Wintersemester 2017/18

Modulprüfung „Theoretische Informatik I“

28.03.2018   8:00 Uhr

Name:	
Matrikelnummer:	
Studiengang, Abschluss:	

Zugelassene Hilfsmittel: Maximal **einen** beidseitig beschriebenen Bogen DIN A4, der mit dem Namen zu versehen und als Hilfsbogen eindeutig zu kennzeichnen ist. Keine elektronischen Hilfsmittel (wie zum Beispiel Taschenrechner).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hinweise:

- Bearbeiten Sie von den folgenden Aufgaben so viele wie möglich. Dabei können Sie insgesamt 108 Punkte erreichen, jedoch zählen bereits 100 Punkte als volle Punktzahl. Bei 50 oder mehr Punkten ist die Prüfung bestanden.
- Beschriften Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Bei fest zusammengehefteten Blättern genügt es das oberste zu beschriften. Tragen Sie Ihre Antwort in die jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Als Konzeptpapier sollen die Klausurrückseiten verwendet werden.
- Alle in der Vorlesung oder Übung bewiesenen Aussagen dürfen verwendet werden, außer dies ist bei einer Aufgabe ausdrücklich ausgeschlossen.
- Die Menge der natürlichen Zahlen enthält die Null.

Nur vom Korrektor auszufüllen:

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	10	
2	12	
3	10	
4	6	
5	5	
6	12	
7	6	
8	14	
9	15	
10	8	
11	10	
Summe	108	

Note:

Bemerkungen:

Beachten Sie folgende Definitionen:

- Für ein Alphabet Σ, einen Buchstaben $x \in \Sigma$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ sei $|w|_x$ die Anzahl der Vorkommen von x in w (z. B. $|aabcab|_a = 3$).
- Ein Wort $u \in \Sigma^*$ heißt *Suffix* eines Wortes $w \in \Sigma^*$, falls ein Wort $x \in \Sigma^*$ existiert mit $w = xu$.

  Beispiel: Die Suffixe von $abac$ sind genau ε, c, ac, bac und $abac$.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie graphisch einen *minimalen* deterministischen endlichen Automaten für

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens ein } b \text{ und } aaca \text{ ist ein Suffix von } w\}$$

an.

Hinweis: Der gesuchte Automat hat genau 6 Zustände.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

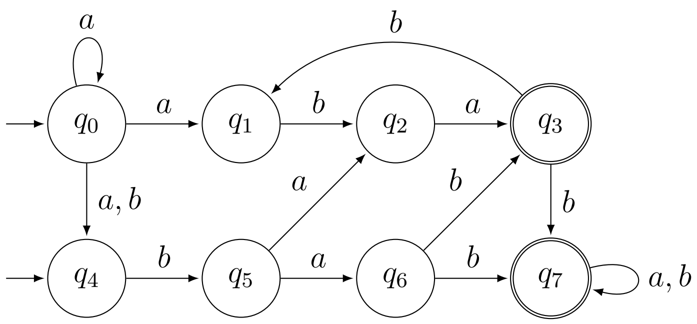
Sei L die Sprache

$$L = \left\{ a^{4^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$. Beweisen Sie, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei M' der folgende nichtdeterministische endliche Automat über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:



M bezeichne den deterministischen endlichen Automaten, der aus M' mittels Potenzmengenkonstruktion hervorgeht. Ferner bezeichne δ die Überführungsfunktion von M.

a) Geben Sie den Startzustand von M an. (1 P)
Ist dieser ein Endzustand von M? Begründen Sie kurz.

b) Berechnen Sie $\delta(\{q_0, q_1\}, a)$. (3 P)
Ist das Ergebnis ein Endzustand von M? Begründen Sie kurz.

c) Berechnen Sie $\hat{\delta}(\{q_0, q_2, q_4\}, bb)$. (3 P)
Ist das Ergebnis ein Endzustand von M? Begründen Sie kurz.

d) Berechnen Sie $\hat{\delta}(\{q_3, q_4, q_5\}, bb)$. (3 P)
Ist das Ergebnis ein Endzustand von M? Begründen Sie kurz.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$ die Sprache $L = \{a^{m+n}b^n \in \{a,b\}^* \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Ferner bezeichne R_L die Myhill-Nerode-Äquivalenz bezüglich L.

a) Geben Sie ein Wort w_1 an mit $w_1 \neq aba$ aber $w_1 \; R_L \; aba$: (1 P)

b) Geben Sie ein Wort w_2 an mit $w_2 \neq aab$ aber $w_2 \; R_L \; aab$: (1 P)

c) Geben Sie die Myhill-Nerode-Äquivalenzklasse von aaa in Mengenschreibweise an: (3 P)

$$[aaa]_{R_L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \; R_L \; aaa\} = \boxed{}$$

d) Die Äquivalenzrelation R_L besitzt… (1 P)

☐ …**endlich** viele Äquivalenzklassen und zwar $\boxed{}$.

☐ …**unendlich** viele Äquivalenzklassen.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sei G die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{&S \to BB \mid BC, \\ &A \to a, \\ &B \to AC \mid BB, \\ &C \to a \mid b \mid CA\}. \end{aligned}$$

a) Entscheiden Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $abba$ in der Sprache $L(G)$ enthalten ist. Benutzen Sie die unten stehende Tabelle, um die Ausführung des Algorithmus wie in der Vorlesung zu protokollieren. (4 P)

Füllen Sie die Tabelle vollständig aus und streichen Sie dabei leere Felder durch.

Länge	a	b	b	a
1				
2				
3				
4				

b) Gilt $abba \in L(G)$? ☐ Ja ☐ Nein (1 P)

Gilt $ba \in L(G)$? ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils die (bezüglich Inklusion) **kleinste** Sprachklasse an, in der die jeweilige Sprache enthalten ist. Nicht angekreuzt oder mehr als ein Kreuz zählt als falsches Kreuz.

Falsche Kreuze führen **nicht** zu Punktabzügen!

	regulär (Typ 3)	deterministisch kontextfrei	kontextfrei (Typ 2)	kontextsensitiv (Typ 1)	rekursiv aufzählbar (Typ 0)
1. $(\{a\}^* \cup \{b\}^*) \setminus \{a^{n^2}b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$	☐	☐	☐	☐	☐
2. $\{bc\}^* \cap \{c\}^*$	☐	☐	☐	☐	☐
3. $\{w \in \{a,b,c\}^* \mid \lvert w\rvert_a = \lvert w\rvert_b\}$	☐	☐	☐	☐	☐
4. $\{w \in \{a,b,c\}^* \mid \lvert w\rvert_a = \lvert w\rvert_b = \lvert w\rvert_c\}$	☐	☐	☐	☐	☐
5. $\{w \in \{a,b,c\}^* \mid \lvert w\rvert_a \neq \lvert w\rvert_b \text{ oder } \lvert w\rvert_a \neq \lvert w\rvert_c\}$	☐	☐	☐	☐	☐
6. $\{www \mid w \in \{a,b,c\}^*\}$	☐	☐	☐	☐	☐
7. $\{a^{3m}b^{2n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$	☐	☐	☐	☐	☐
8. $\{a^n b^{m+n} a^m \mid n,m \in \mathbb{N}\}$	☐	☐	☐	☐	☐
9. $\{a^{2p} \mid p \text{ prim}\}$	☐	☐	☐	☐	☐
10. $\{a^{2n}a^{2m} \in \{a\}^* \mid n,m \in \mathbb{N}\}$	☐	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \text{ und } abba \text{ ist ein Suffix von } w\}$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für L an.

Hinweis: Um Punkte zu bekommen darf ihre Grammatik *höchstens* 4 Nichtterminale verwenden, sie braucht aber **nicht** in Chomsky Normalform zu sein. Außerdem dürfen Sie Regeln der Form $A \to \varepsilon$ verwenden auch wenn A nicht das Startsymbol ist.

Aufgabe 8 (14 Punkte)

Für ein Wort $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ mit $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$ sei

$$\mathrm{stott}(w) = \left\{a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$

(insbesondere $\mathrm{stott}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$) und für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei

$$\mathrm{stott}(L) = \bigcup_{w \in L} \mathrm{stott}(w)$$

der *Stotter*-Abschluss von L. Das heißt: In $\mathrm{stott}(L)$ sind genau die Wörter, die aus den Wörtern $w' \in L$ hervorgehen, indem beliebige Buchstaben aus w' mehrmals wiederholt werden.

Beispiele:

- Für $L_1 = \{b, ab, ba, aba\}$, ist $\mathrm{stott}(L_1) = \{a^\ell b^{m+1} a^n \mid \ell, m, n \in \mathbb{N}\}$ und
- für $L_2 = \{ab, ba\}$ ist $\mathrm{stott}(L_2) = \{a^{m+1} b^{n+1} \mid m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{b^{m+1} a^{n+1} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Sei $L_3 = \{bba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$. (4 P)

Gilt $abba \in \mathrm{stott}(L_3)$? ☐ Ja ☐ Nein

Gilt $bbaa \in \mathrm{stott}(L_3)$? ☐ Ja ☐ Nein

Gilt $bbbbba \in \mathrm{stott}(L_3)$? ☐ Ja ☐ Nein

Geben Sie $\mathrm{stott}(L_3)$ in Mengenschreibweise an:

$\mathrm{stott}(L_3) =$ ☐

b) Geben Sie eine Konstruktion an, um aus einer gegebenen kontextfreien Grammatik G mit $L(G) = L$ eine Grammatik G' für $\mathrm{stott}(L)$ zu bestimmen. (10 P)

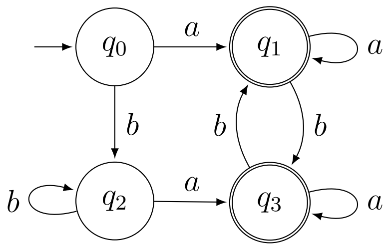
Aufgabe 9 (15 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen eindeutig. Falsche Antworten führen **nicht** zu negativen Punkten.

a) Sei $L = (\{c\}^* \cup \{ba\}^*) \setminus L((a|b)(a|b)^*)$. (3 P)

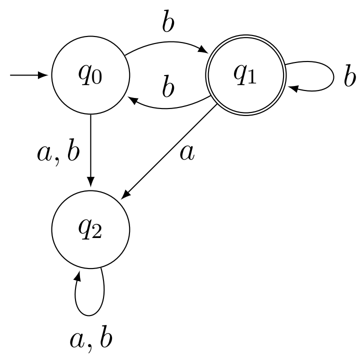
Gilt $\varepsilon \in L$? ☐ Ja ☐ Nein
Gilt $baba \in L$? ☐ Ja ☐ Nein
Gilt $b \in L$? ☐ Ja ☐ Nein
Gilt $L \subseteq \{a, c\}^*$? ☐ Ja ☐ Nein

b) Der zu (2 P)



äquivalente deterministische Minimalautomat hat ☐ Zustände.

c) Gegeben sei folgender NEA M: (3 P)



Akzeptiert M das Wort bbb? ☐ Ja ☐ Nein
Akzeptiert M das Wort ε? ☐ Ja ☐ Nein
Akzeptiert M das Wort ab? ☐ Ja ☐ Nein
Akzeptiert M das Wort bba? ☐ Ja ☐ Nein

d) Gegeben sei eine Grammatik G mit Startsymbol S und folgenden Regeln: (2 P)

$$S \to aAB$$
$$A \to aBB \mid bA$$
$$B \to b$$

Geben Sie die Anzahl der Elemente in der Menge $\{w \in L(G) \mid |w| \leq 10\}$ an: ☐

e) Welche der folgenden Aussagen gelten? (3 P)

Gilt $L\big((a|a)^*\big) = L\big((aa)^*\big)$? ☐ Ja ☐ Nein
Gilt $L\big((a|b)^*\big) = L\big((a)^*|(b)^*\big)$? ☐ Ja ☐ Nein
Gilt $L\big((a|b)^*\big) = L\big(\big((a)^*b\big)^*(a)^*\big)$? ☐ Ja ☐ Nein
Gilt $L\big(b(a|b)^* \mid b(a|b)^*\big) = \{a, b\}^*$? ☐ Ja ☐ Nein

f) Gegeben Alphabete Σ und Γ sowie reguläre Sprachen $L_a \subseteq \Gamma^*$ für jeden Buchstaben $a \in \Sigma$. Die Operation *Substitution* $\langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle$ einer Sprache L ergibt die Sprache (2 P)

$$\langle\!\langle L \rangle\!\rangle = \left\{ x \in \Gamma^* \;\middle|\; \exists w \in L \text{ mit } w = a_1 a_2 \cdots a_n,\ a_i \in \Sigma,\ x \in L_{a_1} L_{a_2} \ldots L_{a_n} \right\}.$$

Insbesondere ist $\varepsilon \in \langle\!\langle L \rangle\!\rangle$, falls $\varepsilon \in L$ ist.

Gegeben ist folgende Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Man kann mit dem Pumping-Lemma zeigen, dass L **nicht** regulär ist. Folgende Argumentation versucht schrittweise zu zeigen, dass sie trotzdem regulär ist:

1. Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter Substitution.
2. Die Sprachen $L_a = \{ab\}$ und $L_b = \{\varepsilon\}$ sind regulär.
3. Es gilt $\langle\!\langle L \rangle\!\rangle = L((ab)^*)$.
4. $L((ab)^*)$ ist regulär und deswegen auch L.

In welchem Schritt liegt der Fehler?

Aufgabe 10 (8 Punkte)

a) Ist die Sprache $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \geq 2\}$ regulär? ☐ Ja ☐ Nein (4 P)

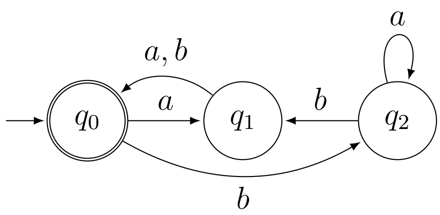
Begründen Sie Ihre Antwort:

b) Ist die Sprache $L_2 = \{a^n b^{2n} \in \{a,b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ kontextfrei? ☐ Ja ☐ Nein (4 P)

Begründen Sie Ihre Antwort:

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Bezeichne M folgenden deterministischen endlichen Automaten:



Sei $L = T(M)$ und bezeichne außerdem $\mathrm{Synt}(L)$ das syntaktische Monoid von L, $\equiv_L$ die syntaktische Kongruenz von L, R_L die Myhill-Nerode-Relation und $Index(R_L)$ den Index von R_L.

a) Welche der folgenden Aussagen gelten? (1 P)

Gilt $bba \equiv_L \varepsilon$? ☐ Ja ☐ Nein

Gilt $|\mathrm{Synt}(L)| < Index(R_L)$? ☐ Ja ☐ Nein

b) Geben Sie für jede Klasse der Relation $\equiv_L$ den längen-lexikographisch kleinsten Vertreter an (z.B. steht *bb* vor *aaa* aber hinter *ba* in so einer Auflistung). (3 P)

c) Geben Sie genau einen Repräsentanten jeder Klasse von $\equiv_L$ an, die die Klasse $[a]_{R_L}$ verfeinert. (2 P)

d) Geben Sie die Verknüpfungstafel von $\mathrm{Synt}(L)$ an. Ordnen Sie die Vertreter der Zeilen- und Spaltenbeschriftungen längen-lexikographisch aufsteigend an, wobei Spaltenüberschriften den rechten Operanden bezeichnen. (4 P)

Ist die Verknüpfung dieses Monoids kommutativ? ☐ Ja ☐ Nein