Lösungsblatt 7

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Gegeben Sie für jeden regulären Ausdruck (engl. *regular expression*, kurz *RE*) γ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ an, welche der Wörter ε, a, bb, bab, $abab$ und $bbaa$ in $L(\gamma)$ enthalten sind.

1. $\gamma = (ab)^*$
2. $\gamma = (aa|bb)^*$
3. $\gamma = (a|b)^*a(a|b)^*$
4. $\gamma = a^*b^*$
5. $\gamma = (a^*b^*)^*$
6. $\gamma = b^*(\varepsilon|a|aa)b^*$

Wichtiger Hinweis: Für bessere Lesbarkeit gehen wir sparsam mit Klammern um. Analog zur Konvention der *Punkt- vor Strichrechnung* legen wir fest, dass der Stern stärker bindet als die Konkatenation, d. h. $\alpha\beta^* := \alpha(\beta)^*$.

Lösung

1. $\varepsilon, abab \in L(\gamma)$ und $a, bb, bab, bbaa \notin L(\gamma)$
2. $\varepsilon, bb, bbaa \in L(\gamma)$ und $a, bab, abab \notin L(\gamma)$
3. $a, bab, abab, bbaa \in L(\gamma)$ und $\varepsilon, bb \notin L(\gamma)$
4. $\varepsilon, a, bb \in L(\gamma)$ und $bab, abab, bbaa \notin L(\gamma)$
5. $\varepsilon, a, bb, bab, abab, bbaa \in L(\gamma)$
6. $\varepsilon, a, bb, bab, bbaa \in L(\gamma)$ und $abab \notin L(\gamma)$

Vorbereitungsaufgabe 2

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ einen möglichst einfachen RE γ mit $L(\gamma) = L$ an.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aabb \text{ ist Präfix von } w\}$
2. $L = \{a^m b^n \mid m \text{ ist gerade und } n \text{ ungerade}\}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq 1 \wedge |w|_b \geq 1\}$
4. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aba \text{ ist Präfix und Suffix von } w\}$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aab \text{ ist kein Infix von } w\}$
6. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ und } |w|_b \text{ sind beide gerade}\}$

Lösung

Zu einigen Teilaufgaben geben wir mehrere äquivalente Lösungen an. Elegantere Lösungsvorschläge sind immer herzlich willkommen!

1. $\gamma = aabb(a|b)^*$
2. $\gamma = (aa)^*b(bb)^* \equiv (aa)^*(bb)^*b$
3. $\gamma = (a|b)^*(ab|ba)(a|b)^*$
4. $\gamma = aba|ababa|aba(a|b)^*aba \equiv aba(\varepsilon|ba|(a|b)^*aba) \equiv (\varepsilon|ab|aba(a|b)^*)aba$
5. $\gamma = (b|ab)^*a^*$
6. $\gamma = (aa|bb|(ab|ba)(aa|bb)^*(ab|ba))^*$

Hinweis: Wir nennen zwei REs α und β *äquivalent* und schreiben $\alpha \equiv \beta$, falls sie dieselbe Sprache beschreiben. Formal:

$$\alpha \equiv \beta \;:\Longleftrightarrow\; L(\alpha) = L(\beta).$$

Vorbereitungsaufgabe 3

In dieser Aufgabe soll der Beweis vom Satz von Kleene wiederholt weden.

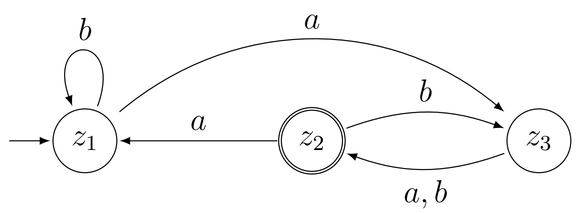
1. Gegeben seien zwei reguläre Grammatiken $G_1 = (\{S_1, T\}, \{a, b\}, P_1, S_1)$ und $G_2 = (\{S_2, U\}, \{a, b\}, P_2, S_2)$ mit Produktionen

   $$P_1: \quad S_1 \to aT \mid b \qquad\qquad P_2: \quad S_2 \to bU \mid \varepsilon$$
   $$\quad T \to aS_1 \mid bT \qquad\qquad\qquad U \to aU \mid b$$

   Seien α und β REs mit $L(G_1) = L(\alpha)$ und $L(G_2) = L(\beta)$. Geben Sie eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ für folgende Fälle an.

   (a) $L(G) = L(\alpha\beta)$ (b) $L(G) = L((\alpha|\beta))$ (c) $L(G) = L((\alpha)^*)$

2. Verallgemeinern Sie Ihre Konstruktion aus Teil 1 (c) für eine beliebige Grammatik $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$.
3. Geben Sie eine Mengendarstellung von $R^k_{i,j}$ an. Verwenden Sie den in Aufgabenblatt 2, Aufgabe 4 eingeführten Begriff eines *Laufes*.
4. Sei M der folgende DFA:



   Bestimmen Sie $\alpha^1_{2,1}$, $\alpha^1_{1,3}$ und $\alpha^1_{3,2}$. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie diese durch kürzere, äquivalente Ausdrücke ersetzen.

Lösung

1. (a) $G = (\{S_1, S_2, T, U\}, \{a, b\}, P, S_1)$ mit Produktionen

$$S_1 \to aT \mid bS_2 \mid b \qquad S_2 \to bU$$
$$T \to aS_1 \mid bT \qquad U \to aU \mid b$$

(b) $G = (\{S, S_1, S_2, T, U\}, \{a, b\}, P, S)$ mit Produktionen

$$S \to aT \mid b \mid bU \mid \varepsilon \qquad S_1 \to aT \mid b \qquad S_2 \to bU$$
$$T \to aS_1 \mid bT \qquad U \to aU \mid b$$

Hinweis: Die Produktionen

$$S \to S_1 \mid S_2 \qquad S_1 \to aT \mid b \qquad S_2 \to bU$$
$$T \to aS_1 \mid bT \qquad U \to aU \mid b$$

liefern eine korrekte Grammatik, die aber nicht regulär (Typ 3) ist.

(c) $G = (\{S, S_1, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to aT \mid b \mid bS_1 \mid \varepsilon \\ S_1 &\to aT \mid b \mid bS_1 \\ T &\to aS_1 \mid bT \end{aligned}$$

Hinweis: Die Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to S_1S \mid \varepsilon \\ S_1 &\to aT \mid b \\ T &\to aS_1 \mid bT \end{aligned}$$

liefern eine korrekte Grammatik, die aber nicht regulär ist.

Quiz: Warum benötigt man das zusätzliche Symbol S? Wäre die Grammatik $G = (\{S_1, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit Produktionen

$$\begin{aligned} S_1 &\to aT \mid bS_1 \mid b \mid \varepsilon \\ T &\to aS_1 \mid bT \end{aligned}$$

nicht ausreichend? Abgesehen von der ε-Sonderregel ist sie ja regulär…[*]

2. Wähle $G = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $S \notin V_1$ beliebig und

$$P = \Big(\{(S, \varepsilon)\} \cup P_1 \cup \{(S, v) \mid (S_1, v) \in P_1\} \cup \{(S, vS_1) \mid (S_1, v) \in P_1 \wedge v \in \Sigma\} \cup \{(u, vS_1) \mid (u, v) \in P_1 \wedge v \in \Sigma\} \Big) \underbrace{\setminus \{(S_1, \varepsilon)\}}_{\text{wegen } \varepsilon\text{-Sonderregel}}.$$

[*]Die Grammatik ist aber falsch. Sie erzeugt beispielsweise aa, obwohl aa nicht von G_1 erzeugt wird.

3. $R^k_{i,j} = \{w \in \Sigma^* \mid$ es gibt einen Lauf von M auf w, der in z_i beginnt, in z_j endet und nur Zwischenzustände z_m mit $m \leq k$ besitzt$\}$

4. $\alpha^1_{2,1} = (\alpha^0_{2,1}|\alpha^0_{2,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,1}) = (a|a(\varepsilon|b)^*(\varepsilon|b)) \equiv ab^*$

   $\alpha^1_{1,3} = (\alpha^0_{1,3}|\alpha^0_{1,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,3}) = a|(\varepsilon|b)(\varepsilon|b)^*a) \equiv b^*a$

   $\alpha^1_{3,2} = (\alpha^0_{3,2}|\alpha^0_{3,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,2}) = ((a|b)|\emptyset(\varepsilon|b)^*\emptyset) \equiv a|b$

Vorbereitungsaufgabe 4

Sei Σ ein Alphabet. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ definieren wir das gespiegelte (engl. *reversed*) Wort w^R rekursiv wie folgt:

$$w^R = \begin{cases} \varepsilon & \text{für } w = \varepsilon \\ au^R & \text{für } u \in \Sigma^* \text{ und } a \in \Sigma \text{ mit } w = ua. \end{cases}$$

Formal ist also die Wortspiegelung eine Funktion $(\cdot)^R \colon \Sigma^* \to \Sigma^*$.

1. Zeigen Sie $(bac)^R = cab$ durch wiederholtes Anwenden der Definition.
2. Für eine Sprache L über Σ sei

   $$L^R = \left\{ w^R \,\middle|\, w \in L \right\}.$$

   Gegeben Sie zu jeder der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ eine möglichst einfache Beschreibung an.

   (a) $\{\varepsilon, ab, bbab\}^R$
   (b) $\emptyset^R$
   (c) $(\Sigma^*)^R$
   (d) $\{a^m b^n \mid m \leq n\}^R$
   (e) $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \leq |w|_b\}^R$
   (f) $\{w \in \Sigma^* \mid abb \text{ ist Präfix von } w\}$

3. Zeigen Sie für alle $u, v \in \Sigma^*$: $(uv)^R = v^R u^R$.

Lösung

1. $(bac)^R = c(ba)^R = cab^R = cab\varepsilon^R = cab\varepsilon = cab$.
2. (a) $\{\varepsilon, ab, bbab\}^R = \{\varepsilon, ba, babb\}$
   (b) $\emptyset^R = \emptyset$
   (c) $(\Sigma^*)^R = \Sigma^*$
   (d) $\{a^m b^n \mid m \leq n\}^R = \{b^n a^m \mid m \leq n\}$
   (e) $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \leq |w|_b\}^R = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \leq |w|_b\}$
   (f) $\{w \in \Sigma^* \mid abb \text{ ist Präfix von } w\} = \{w \in \Sigma^* \mid bba \text{ ist Suffix von } w\}$
3. Sei $u \in \Sigma^*$ beliebig. Wir zeigen die Aussage

   $$\forall v \in \Sigma^* \colon (uv)^R = v^R u^R$$

mit Induktion nach der Wortlänge $|v|$ von v, d. h. wir zeigen die äquivalente Aussage

$$\forall n \geq 0 \colon \forall v \in \Sigma^n \colon (uv)^R = v^R u^R$$

mit Induktion nach n.

Induktionsanfang

Für $n = 0$ gilt $v = \varepsilon$ und somit $(uv)^R = u^R = v^R u^R$.

Induktionsschritt

Sei $n \geq 0$ beliebig. Angenommen, alle $v \in \Sigma^n$ erfüllen die Gleichung $(uv)^R = v^R u^R$ (IV). Sei $v' \in \Sigma^{n+1}$ beliebig. Dann existieren ein $v \in \Sigma^n$ und ein $a \in \Sigma$ mit $v' = va$. Daraus folgt

$$(uv')^R = (uva)^R = a(uv)^R \overset{\text{IV}}{=} av^R u^R = (va)^R u^R = v'^R u^R,$$

was zu zeigen war. $\square$

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ einen möglichst einfachen RE γ mit $L(\gamma) = L$ an.

Hinweis: Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde bei Teilaufgabe 8 die Bedingung $|w|_a \leq 2$ durch $|w|_a \leq 1$ ersetzt.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aabb \text{ ist Suffix von } w\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid abba \text{ ein Infix von } w\}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid ab \text{ ist kein Infix von } w\}$
4. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{der dritte Buchstabe in } w \text{ ist ein } a\}$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{der drittletzte Buchstabe in } w \text{ ist ein } a\}$
6. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 3\}$
7. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \leq 2 \lor |w|_b \geq 2\}$
8. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \leq 1 \land |w|_b \geq 2\}$
9. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ oder } |w|_b \text{ ist gerade}\}$
10. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 1 \mod 3\}$
11. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 0 \mod 3 \lor |w|_b \equiv 1 \mod 2\}$

Lösung

Zu einigen Teilaufgaben geben wir mehrere äquivalente Lösungen an. Elegantere Lösungsvorschläge sind immer herzlich willkommen!

1. $\gamma = (a|b)^*aabb$
2. $\gamma = (a|b)^*abba(a|b)^*$
3. $\gamma = b^*a^*$
4. $\gamma = (a|b)(a|b)a(a|b)^*$
5. $\gamma = (a|b)^*a(a|b)(a|b)$
6. $\gamma = b^*ab^*ab^*ab^*$
7. $\gamma = b^*|b^*ab^*|b^*ab^*ab^*|(a|b)^*b(a|b)^*b(a|b)^* \equiv b^*(\varepsilon|a)b^*(\varepsilon|a)b^*|(a|b)^*b(a|b)^*b(a|b)^* \equiv b^*(\varepsilon|a|ab^*a)b^*|(a|b)^*b(a|b)^*b(a|b)^*$
8. $\gamma = b^*(bb|abb|bab|bba)b^*$
9. $\gamma = b^*(ab^*ab^*)^*|a^*(ba^*ba^*)^* \equiv (b^*ab^*a)^*b^*|(a^*ba^*b)^*a^*$
10. $\gamma = (a|b)((a|b)(a|b)(a|b))^*$
11. $\gamma = b^*(ab^*ab^*ab^*)^*|a^*ba^*(ba^*ba^*)^*$

Da REs über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nichts anderes als Zeichenketten und somit Wörter über dem Alphabet $\Gamma = \{\emptyset, \varepsilon, (,), ^*, |, a, b\}$ sind, kann beispielsweise statt $b^*ab^*ab^*ab^*$ auch $b^*(ab^*)^3$ oder $(b^*a)^3b^*$ geschrieben werden.

Präsenzaufgabe 2

Seien Σ ein Alphabet mit $\varepsilon, \emptyset, |, ^*, (,) \notin \Sigma$ und $\Gamma = \Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, ^*, (,)\}$. Ein RE über Σ kann als Wort über Γ aufgefasst werden.

Beispiel: Für $\Sigma = \{a, b\}$ ist $(ab)^*(bb|\varepsilon)$ ein RE (der Länge 11) über Σ, aber $(^*a|)|ba$ nicht.

Die Menge aller REs über Σ bezeichnen wir mit $\mathrm{RE}(\Sigma)$.

1. Geben Sie eine Grammatik G mit $L(G) = \mathrm{RE}(\Sigma)$ an.
2. Da REs induktiv definiert sind, gilt für sie das Prinzip der *strukturellen Induktion*: Jedes $\gamma \in \mathrm{RE}(\Sigma)$ besitzt genau dann eine Eigenschaft $P(\gamma)$, wenn folgende Aussagen gelten:

(1) $P(\emptyset)$	(4) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon ((P(\alpha) \wedge P(\beta)) \implies P(\alpha\beta))$
(2) $P(\varepsilon)$	(5) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon ((P(\alpha) \wedge P(\beta)) \implies P((\alpha|\beta)))$
(3) $\forall a \in \Sigma\colon P(a)$	(6) $\forall \alpha \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon (P(\alpha) \implies P((\alpha)^*))$

   (a) Welche Richtung der Äquivalenz ist trivial?

   (b) Zeigen Sie die nichttriviale Richtung der Äquivalenz.

Lösung

1. $G = (\{S\}, \Gamma, P, S)$ mit $\Gamma = \Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, ^*, (,)\}$ und

$$P = \{(S, \emptyset), (S, \varepsilon), (S, SS), (S, (S|S)), (S, (S)^*)\} \cup \{(S, a) \mid a \in \Sigma\}$$

   bzw.

$$P = \{S \to \emptyset, S \to \varepsilon, S \to SS, S \to (S|S), S \to (S)^*\} \cup \{S \to a \mid a \in \Sigma\}.$$

2. (a) Die Implikation von links nach rechts ist trivial. Gilt nämlich $P(\gamma)$ für alle $\gamma \in \mathrm{RE}(\Sigma)$, dann sind die Aussagen (1) bis (6) wegen $\Sigma \subseteq \mathrm{RE}(\Sigma)$ und $\emptyset, \varepsilon, \alpha, \beta, \alpha\beta, (\alpha|\beta), (\alpha)^* \in \mathrm{RE}(\Sigma)$ automatisch alle erfüllt.

   (b) Zu zeigen: Wenn Aussagen (1) bis (6) gelten, dann gilt $P(\gamma)$ für jeden RE γ.

   Beweis durch Widerspruch

   Angenommen, es gibt REs, die die Eigenschaft P nicht haben. Sei γ ein RE minimaler Länge, für den $P(\gamma)$ falsch ist. Wegen (1), (2) und (3) ist $\gamma \notin \{\emptyset, \varepsilon\} \cup \Sigma$. Dann kann γ nur von der Form (i) $\gamma = \alpha\beta$, (ii) $\gamma = (\alpha|\beta)$ oder (iii) $\gamma = (\alpha)^*$ sein.

   Im Fall (i) sind α und β REs, die kürzer sind als γ. Da γ mit minimaler Länge gewählt wurde, gilt $P(\alpha)$ und $P(\beta)$ und nach (4) auch $P(\gamma)$. Widerspruch!

   Die Fälle (ii) und (iii) funktionieren analog und verwenden entsprechend die Aussagen (5) und (6). □

Präsenzaufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet.

1. Zeigen Sie für beliebige Sprachen A und B über Σ:
   (a) $(AB)^R = B^R A^R$
   (b) $(A \cup B)^R = A^R \cup B^R$
   (c) $(A^*)^R = (A^R)^*$
2. Zeigen Sie: Für eine reguläre Sprache L ist auch $L^R = \left\{w^R \,\middle|\, w \in L\right\}$ regulär.

Lösung

1. (a) Sei $x \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (AB)^R &\iff \exists w \in AB\colon x = w^R \\ &\iff \exists u \in A, v \in B\colon x = (uv)^R = v^R u^R \\ &\iff \exists x \in A^R, y \in B^R\colon x = vu \\ &\iff x \in B^R A^R. \end{aligned}$$

(b) Sei $x \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^R &\iff \exists w \in A \cup B \colon x = w^R \\ &\iff \exists w \in A \colon x = w^R \vee \exists w \in B \colon x = w^R \\ &\iff x \in A^R \vee x \in B^R \\ &\iff x \in A^R \cup B^R. \end{aligned}$$

(c) Sei $x \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A^*)^R &\iff \exists w \in A^* \colon x = w^R \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}, w \in A^n \colon x = w^R \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N} \colon x \in (A^n)^R \\ &\overset{(*)}{\iff} \exists n \in \mathbb{N} \colon x \in (A^R)^n \\ &\iff x \in (A^R)^*. \end{aligned}$$

Die Äquivalenz $(*)$ folgt aus

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon (A^R)^n = (A^n)^R.$$

Dies kann sehr leicht per Induktion gezeigt werden.

<u>Induktionsanfang</u>

$(A^R)^0 = \{\varepsilon\} = \{\varepsilon^R\} = \{\varepsilon\}^R = (A^0)^R$.

<u>Induktionsschritt</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen, es gilt $(A^R)^n = (A^n)^R$ (IV). Dann folgt:

$$(A^R)^{n+1} = (A^R)^n A^R \overset{\text{IV}}{=} (A^n)^R A^R \overset{\text{(a)}}{=} (AA^n)^R = (A^{n+1})^R,$$

was zu zeigen war.

2. Zuerst zeigen wir, dass für jeden RE γ ein RE γ' existiert mit $L(\gamma') = L(\gamma)^R$. Hierfür verwenden wir das Prinzip der strukturellen Induktion mit

$$P(\gamma) \;:\iff\; \exists \gamma' \in \mathrm{RE}(\Sigma) \colon L(\gamma') = L(\gamma)^R$$

zusammen mit den Aussagen (a), (b) und (c) aus Teilaufgabe 1.

(1) <u>Zu zeigen:</u> $P(\emptyset)$.

Für $\emptyset' = \emptyset$ gilt: $L(\emptyset') = L(\emptyset) = \emptyset = \emptyset^R = L(\emptyset)^R$.

(2) <u>Zu zeigen:</u> $P(\varepsilon)$.

Für $\varepsilon' = \varepsilon$ gilt: $L(\varepsilon') = L(\varepsilon) = \{\varepsilon\} = \{\varepsilon^R\} = \{\varepsilon\}^R = L(\varepsilon)^R$.

(3) <u>Zu zeigen:</u> $\forall a \in \Sigma \colon P(a)$.

Sei $a \in \Sigma$ beliebig. Für $a' = a$ gilt: $L(a') = L(a) = \{a\} = \{a^R\} = \{a\}^R = L(a)^R$.

(4) Zu zeigen: $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon ((P(\alpha) \wedge P(\beta)) \implies P(\alpha\beta))$.

Seien α und β zwei beliebige REs, sodass REs α' und β' existieren mit $L(\alpha') = L(\alpha)^R$ und $L(\beta') = L(\beta)^R$. Für $(\alpha\beta)' = \beta'\alpha'$ gilt:

$$\begin{aligned} L(\alpha\beta') &= L(\beta'\alpha') = L(\beta')L(\alpha') = L(\beta)^R L(\alpha)^R \\ &\overset{(a)}{=} (L(\alpha)L(\beta))^R = (L(\alpha\beta))^R. \end{aligned}$$

(5) Zu zeigen: $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon ((P(\alpha) \wedge P(\beta)) \implies P((\alpha|\beta)))$.

Seien α und β zwei beliebige REs, sodass REs α' und β' existieren mit $L(\alpha') = L(\alpha)^R$ und $L(\beta') = L(\beta)^R$. Für $(\alpha|\beta)' = (\alpha'|\beta')$ gilt:

$$\begin{aligned} L((\alpha|\beta)') &= L(\alpha'|\beta') = L(\alpha') \cup L(\beta') = L(\alpha)^R \cup L(\beta)^R \\ &\overset{(b)}{=} (L(\alpha) \cup L(\beta))^R = L((\beta|\alpha))^R. \end{aligned}$$

(6) Zu zeigen: $\forall \alpha \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon (P(\alpha) \implies P((\alpha)^*))$.

Sei α ein beliebiger RE, sodass ein RE α' existiert mit $L(\alpha') = L(\alpha)^R$. Wähle $((\alpha)^*)' = (\alpha')^*$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L(((\alpha)^*)') &= L((\alpha')^*) = L(\alpha')^* = (L(\alpha)^R)^* \\ &\overset{(c)}{=} (L(\alpha)^*)^R = L((\alpha)^*)^R. \end{aligned}$$

Der eigentliche Beweis folgt direkt daraus:

Sei nun L regulär. Dann gibt es nach dem Satz von Kleene einen RE γ mit $L(\gamma) = L$. Nach obiger Aussage existiert ein RE γ' mit $L(\gamma') = L(\gamma)^R$. Also ist L^R (wieder nach dem Satz von Kleene) regulär. □

Knobelaufgaben

Knobelaufgabe 1

Geben Sie einen RE γ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ mit

$$L(\gamma) = \{w \in \Sigma^* \mid [w]_2 \equiv 0 \mod 3\}$$

und $|\gamma|_0, |\gamma|_1 \leq 3$ an.

Knobelaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{0, 1\}^3$ ein 8-elementiges Alphabet bestehend aus allen Tripeln über $\{0, 1\}$ und L folgende Sprache über Σ:

$$L = \{(x_1, y_1, z_1) \dots (x_n, y_n, z_n) \mid n \in \mathbb{N} \wedge [x_1 \dots x_n]_2 + [y_1 \dots y_n]_2 = [z_1 \dots z_n]_2\}.$$

Beispielsweise enthält L die Wörter $(0, 1, 1)(1, 0, 1)$, $(0, 0, 1)(1, 0, 0)(1, 1, 0)$ und ε, aber $(1, 1, 1)$ und $(0, 1, 0)(1, 1, 0)$ nicht.

Geben Sie einen RE γ für L an.