Wintersemester 2018/19

Modulprüfung „Theoretische Informatik I"

26.02.2019 14:00 – 16:00 Uhr

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang, Abschluss:

Zugelassene Hilfsmittel: Maximal **einen** beidseitig beschriebenen Bogen DIN A4, der mit dem Namen zu versehen und als Hilfsbogen eindeutig zu kennzeichnen ist. Keine elektronischen Hilfsmittel (wie zum Beispiel Taschenrechner).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hinweise:

- Bearbeiten Sie von den folgenden Aufgaben so viele wie möglich. Dabei können Sie insgesamt 100 Punkte erreichen. Bei 50 oder mehr Punkten ist die Prüfung bestanden.
- Beschriften Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Bei fest zusammengehefteten Blättern genügt es das oberste zu beschriften.
- Alle in der Vorlesung oder Übung bewiesenen Aussagen dürfen verwendet werden, außer dies ist bei einer Aufgabe ausdrücklich ausgeschlossen. Die Verwendung muss dabei aber stets kenntlich gemacht werden.
- Die Menge der natürlichen Zahlen enthält die Null.

Nur vom Korrektor auszufüllen:

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	11	
2	13	
3	14	
4	12	
5	16	
6	12	
7	8	
8	14	
Summe	100	

Note:

Bemerkungen:

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein dreielementiges Alphabet.

a) Geben Sie einen regulären Audruck γ mit (2 P)

$$L(\gamma) = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 2 \text{ und die letzten zwei Buchstaben in } w \text{ sind gleich}\}$$

an.

b) Geben Sie grafisch einen minimalen DEA M mit (6 P)

$$T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 2|w|_b + 1 \mod 5\}$$

an. Beachten Sie: $c \in \Sigma$.

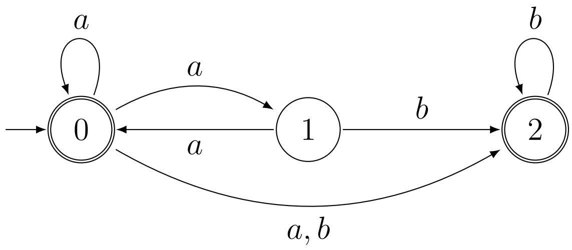
c) Geben Sie grafisch einen NEA M mit höchstens 4 Zuständen und (3 P)

$$T(M) = \{ucv \mid u, v \in \Sigma^* \wedge |v| = 2\}$$

an.

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und M der folgende NEA



und L die von M akzeptierte Sprache.

a) Konstruieren Sie einen zu M äquivalenten DEA. Verwenden Sie hierfür die Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung und geben Sie den entstehenden DEA grafisch an. Aus der Beschriftung der Zustände soll ersichtlich sein, aus welchen Zuständen von M diese jeweils hervorgehen. (4 P)

Hinweis: Nicht erreichbare Zustände müssen nicht gezeichnet werden. Ihr Automat sollte 4 Zustände haben.

b) Geben Sie grafisch einen zu M äquivalenten <u>minimalen</u> DEA an. (3 P)

Hinweis: Ihr Automat sollte 3 Zustände haben.

c) Sei R_L die Myhill-Nerode-Äquivalenz. (3 P)

Geben Sie für jede Äquivalenzklasse $[w]_{R_L}$ einen Vertreter w minimaler Länge und einen regulären Ausdruck γ mit $[w]_{R_L} = L(\gamma)$ an.

d) Sei $\equiv_L$ die syntaktische Kongruenz. Gilt $aab \equiv_L bbb$? (3 P)

☐ Ja ☐ Nein

Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Für eine Sprache L über einem Alphabet Σ und ein $a \in \Sigma$ definieren wir

$$\mathrm{multipop}_a(L) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N} \colon wa^k \in L \right\}.$$

Beachten Sie: $0 \in \mathbb{N}$.

a) Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$ eine möglichst einfache Darstellung an. (4 P)

$\mathrm{multipop}_a(\emptyset) =$

$\mathrm{multipop}_a(\{\varepsilon, ab, abaa\}) =$

$\mathrm{multipop}_a(\{b^m a^n \mid m < n\}) =$

$\mathrm{multipop}_a(\{a, b\}^*) =$

b) Zeigen Sie für jedes Alphabet Σ, jede Sprache L über Σ und jedes $a \in \Sigma$: (10 P)
Wenn L regulär ist, dann ist auch $\mathrm{multipop}_a(L)$ regulär.
Hinweis: Falls Sie einen konstruktiven Beweis angeben (z. B. mittels Automaten), beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

a) Der Schnitt von zwei Typ-2-Sprachen ist vom Typ 1. (4 P)

☐ Wahr ☐ Falsch

b) Ist das Bild $\varphi(L)$ einer Sprache L unter einem Homomorphismus φ regulär, dann ist auch L selbst regulär. (4 P)

☐ Wahr ☐ Falsch

c) Für kontextfreie Sprachen $L_1, L_2, L_3, \dots$ ist $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ ebenfalls kontextfrei. (4 P)

☐ Wahr ☐ Falsch

Aufgabe 5 (16 Punkte)

Seien $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und L folgende Sprache über Σ:

$$L = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\}.$$

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die L erzeugt. (4 P)
Ihre Grammatik darf höchstens 5 Produktionen besitzen.

b) Geben Sie grafisch einen DPDA M an, der L akzeptiert. (5 P)
Ihr DPDA darf höchstens 5 Zustände besitzen.

c) Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist. (5 P)

d) Für welche Sprachklassenpaare gilt Gleichheit und für welche echte Inklusion? (2 P)

Füllen Sie die Kästchen zwischen folgenden Sprachklassen so mit den Symbolen = und $\subsetneq$ aus, dass wahre Aussagen entstehen.

Nicht ausgefüllt zählt als falsch ausgefüllt.

DEA		**NEA**		**DPDA**		**PDA**		**LBA**		**DTM**		**TM**

Bemerkung: Wie in der Vorlesung bezeichnet $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ die Klasse aller Sprachen, die von einer Maschine vom Typ $\mathcal{C}$ akzeptiert werden.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit folgenden Produktionen:

$$S \to CD \mid EC \qquad B \to EB \mid b \qquad D \to BA$$
$$A \to a \qquad C \to CC \mid a \qquad E \to AB.$$

a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? (4 P)
Nicht angekreuzt oder mehr als ein Kreuz zählt als falsches Kreuz.

G ist in Chomsky-Normalform.	☐ Wahr	☐ Falsch
G ist in Greibach-Normalform.	☐ Wahr	☐ Falsch
G ist in Kuroda-Normalform.	☐ Wahr	☐ Falsch
G ist vom Typ 0.	☐ Wahr	☐ Falsch
G ist vom Typ 1.	☐ Wahr	☐ Falsch
G ist vom Typ 2.	☐ Wahr	☐ Falsch
G ist vom Typ 3.	☐ Wahr	☐ Falsch
G besitzt genau 6 Produktionen.	☐ Wahr	☐ Falsch

b) Sei $w = aabb$ Verwenden Sie den CYK-Algorithmus, um $w \notin L(G)$ zu zeigen. (5 P)
Füllen Sie die CYK-Tabelle vollständig aus und begründen Sie kurz woran man erkennt, dass $w \notin L(G)$ gilt. Form und Ausrichtung der Tabelle dürfen von Ihnen frei gewählt werden.

c) Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist. (3 P)

Hinweis: Betrachten Sie das Wort aba.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Seien $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und $s\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine Funktion mit $s(w) = a^{|w|_a} b^{|w|_b} c^{|w|_c}$.

Beispiel: $s(abcaba) = aaabbc$.

a) Bestimmen Sie folgende Urbilder bezüglich s: (3 P)

$s^{-1}(\varepsilon) =$

$s^{-1}(aab) =$

$s^{-1}(cba) =$

b) Sei $s(L) = \{s(w) \mid w \in L\}$. Gilt die Implikation (5 P)

$$L \text{ ist regulär} \implies s(L) \text{ ist kontextfrei}$$

für jede Sprache L über Σ?

☐ Ja ☐ Nein

Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8 (14 Punkte)

Gegeben sei die DTM $M = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, \{a, b, \Box\}, \delta, A, \Box, \{D\})$ mit folgender Überführungsfunktion:

δ	a	b	$\Box$
A	(B, a, R)	(C, b, L)	$(D, \Box, N)$
B	(C, a, L)	(A, b, R)	
C	(C, a, L)	(C, b, L)	$(A, \Box, R)$
D			

wobei wir für die restlichen Fälle $\delta(q, x) = (q, x, N)$ definieren.

a) Füllen Sie die Kästchen so aus, dass eine gültige Konfigurationsfolge mit 8 Übergängen entsteht. Achten Sie dabei auf die korrekte Notation von Konfigurationen. (5 P)

$Aabaa \vdash \boxed{} \vdash \boxed{} \vdash \boxed{} \vdash \boxed{}$

$\vdash \boxed{} \vdash \boxed{} \vdash \boxed{} \vdash \boxed{}$

Zeigen Sie anhand obiger Konfigurationsfolge, dass $abaa \notin T(M)$ gilt.

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = T(M)$ an. (4 P)

$\gamma = \boxed{}$

c) Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA. Geben Sie eine DTM M' mit $T(M') = T(M)$ an. (5 P)
Beachten Sie:

- Geben Sie M' als 7-Tupel an und definieren Sie jede Komponente in Abhängigkeit der Komponenten von M.
- Achten Sie auf die inhaltliche und die notationelle Korrektheit Ihrer Konstruktion.
- In dieser Aufgabe ist kein Korrektheitsbeweis verlangt.