Wintersemester 2016/17

Modulprüfung „Automaten und Formale Sprachen“

29.03.2017   11:00 Uhr

Name:	
Matrikelnummer:	
Studiengang, Abschluss:	

Zugelassene Hilfsmittel: Maximal **einen** beidseitig beschriebenen Bogen DIN A4, der mit dem Namen zu versehen und als Hilfsbogen eindeutig zu kennzeichnen ist. Keine elektronischen Hilfsmittel (wie zum Beispiel Taschenrechner).

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Hinweise:

- Bearbeiten Sie von den folgenden Aufgaben so viele wie möglich. Dabei können Sie insgesamt 60 Punkte erreichen. Bei 30 oder mehr Punkten ist die Prüfung bestanden.
- Beschriften Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Bei fest zusammengehefteten Blättern genügt es das oberste zu beschriften.
- Alle in der Vorlesung oder Übung bewiesenen Aussagen dürfen verwendet werden, außer dies ist bei einer Aufgabe ausdrücklich ausgeschlossen.
- Die Menge der natürlichen Zahlen enthält die Null.

Nur vom Korrektor auszufüllen:

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	13	
2	10	
3	14	
4	15	
5	8	
Summe	60	

Note:

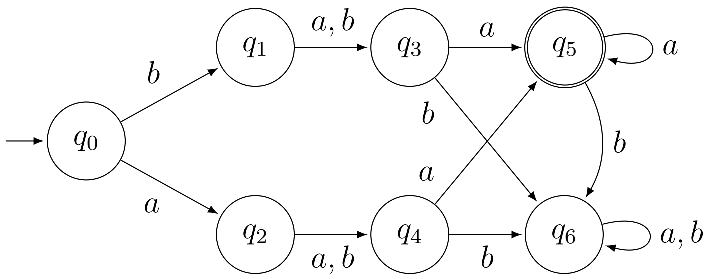
Bemerkungen:

Aufgabe 1 (13 Punkte)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein vollständiger deterministischer endlicher Automat. Wir nennen ein Wort w *synchronisierend* für M, falls

$$\exists p \in Q \;\; \forall q \in Q : \quad \hat{\delta}(q, w) = p.$$

a) Gegeben sei der folgende deterministische endliche Automat M_1: (3 P)



Bestimmen Sie für M_1 ein synchronisierendes Wort der Länge *drei*.

b) Wir definieren die Menge der synchronisierenden Wörter als (10 P)

$$S(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist synchronisierend für } M\}.$$

Zeigen Sie: Die Menge $S(M)$ ist regulär.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein *korrektes Passwort* über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ hat die folgenden Eigenschaften:

- Es enthält mindestens *zwei verschiedene* Buchstaben.
- Es enthält *keine* Buchstabenwiederholung als Faktor (d.h. kein aa, bb, cc als Faktor).

Hinweis: Ein Wort $u \in \Sigma^*$ ist Faktor eines Wortes $w \in \Sigma^*$, falls Wörter $x, y \in \Sigma^*$ existieren mit $w = xuy$.

Beispiele: Korrekte Passwörter sind:

- ab
- bac
- $cacbc$

Keine korrekten Passwörter sind:

- $aabc$
- b
- aa

L bezeichne die Sprache der korrekten Passwörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Geben Sie graphisch einen *minimalen* deterministischen endlichen Automaten M mit $T(M) = L$ an. Den Fangzustand müssen Sie dabei *nicht* einzeichnen.

Aufgabe 3 (14 Punkte)

a) Sei L_1 die Sprache

$$L_1 = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$$

über dem Alphabet $\Sigma_1 = \{a\}$.

i. Ist L_1 kontextfrei? ☐ Ja ☐ Nein (1 P)

ii. Beweisen Sie Ihre Antwort. (6 P)

b) Sei L_2 die Sprache

$$L_2 = \{a^n b^m \mid n \text{ ist keine Primzahl und } m \in \mathbb{N}\}$$

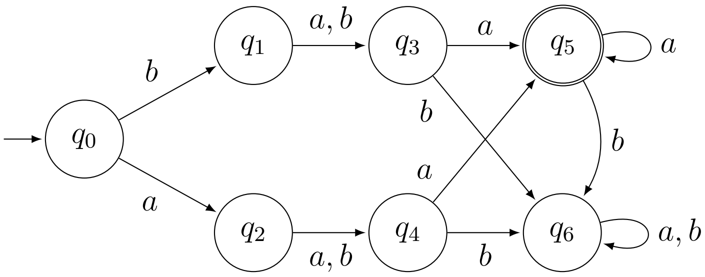
über dem Alphabet $\Sigma_2 = \{a, b\}$.

i. Ist L_2 kontextfrei? ☐ Ja ☐ Nein (1 P)

ii. Beweisen Sie Ihre Antwort. (6 P)

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ der folgende deterministische endliche Automat.



a) Er soll minimiert werden. (6 P)

Anstatt bei nicht äquivalenten Zuständen ein Kreuz einzutragen, soll ein Zeuge eingetragen werden, der die Inäquivalenz der Zustände belegt. Formal ist ein Wort $w \in \Sigma^*$ ein Zeuge für das Feld $\{p, q\}$, falls

$$\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \notin F.$$

Tragen Sie in jedes Feld einen Zeugen ein oder streichen Sie das Feld durch, wenn die Zustände äquivalent sind.

Beispiel: Für die Zustände $\{q_5, q_6\}$ ist $w = \varepsilon$ ein Zeuge, da $\hat{\delta}(q_5, \varepsilon) = q_5 \in F$ aber $\hat{\delta}(q_6, \varepsilon) = q_6 \notin F$.

Außerdem ist a ein Zeuge für $\{q_4, q_6\}$, da $\hat{\delta}(q_4, a) = q_5 \in F$ aber $\hat{\delta}(q_6, a) = q_6 \notin F$, und auch für $\{q_3, q_6\}$.

Ferner ist ba ein Zeuge für $\{q_2, q_6\}$, da $\hat{\delta}(q_2, ba) = \hat{\delta}(q_4, a) = q_5 \in F$ aber $\hat{\delta}(q_6, ba) = \hat{\delta}(q_6, a) = q_6 \notin F$.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_6			ba	a	a	ε
q_5	ε	ε	ε	ε	ε	
q_4						
q_3						
q_2						
q_1						

b) Geben Sie den Minimalautomaten von M an. (6 P)

c) Geben Sie die von M akzeptierte Sprache durch einen regulären Ausdruck an. (3 P)

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils die **kleinste** (bezüglich Inklusion) Sprachklasse an, in der die jeweilige Sprache enthalten ist. Nicht angekreuzt oder mehr als ein Kreuz zählt als falsches Kreuz.

Für diese Aufgabe ist $L_a = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $L_b = \{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sowie $L_c = \{c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und w^R bezeichnet die Spiegelung von w. Für $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ ist also $w^R = a_n a_{n-1} \ldots a_1$, wobei $n \in \{0, 1, \ldots\}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma$.

Sprache	regulär	det. kontextfrei	kontextfrei	kontext-sensitiv	Typ-0
$L_a L_b L_c$	☐	☐	☐	☐	☐
$\{a, b, c\}^* \setminus (L_a L_b \cup L_b L_c)$	☐	☐	☐	☐	☐
$\{ww^R \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$	☐	☐	☐	☐	☐
$\{ww^R w \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$	☐	☐	☐	☐	☐
$\{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$	☐	☐	☐	☐	☐
$\{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \leq m\}$	☐	☐	☐	☐	☐
$\{a^n (bb)^m \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n = m\}$	☐	☐	☐	☐	☐
$\{a^n (bb)^m c^l \mid n, m, l \in \mathbb{N} \text{ mit } n = m \vee n = l\}$	☐	☐	☐	☐	☐