

Wintersemester 2015/16
Modulprüfung „Automaten und Formale Sprachen“
23.03.2016 11:00 Uhr

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang, Abschluss:

Zugelassene Hilfsmittel: Maximal **einen** beidseitig beschriebenen Bogen DIN A4, der mit dem Namen zu versehen und als Hilfsbogen eindeutig zu kennzeichnen ist. Keine elektronischen Hilfsmittel (wie zum Beispiel Taschenrechner).

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Hinweise:

- Bearbeiten Sie von den folgenden Aufgaben so viele wie möglich. Dabei können Sie insgesamt 60 Punkte erreichen. Bei 30 oder mehr Punkten ist die Prüfung bestanden.
- Beschriften Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Bei fest zusammengehefteten Blättern genügt es das oberste zu beschriften.

Nur vom Korrektor auszufüllen:

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	12	
2	8	
3	10	
4	9	
5	15	
6	6	
Summe	60	

Note:

Bemerkungen:

Aufgabe 1

(12 Punkte)

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 5\}$$

über dem Alphabet $\{a, b\}$. Hierbei bezeichnet $|w|_a$ die Anzahl der Vorkommen von a in w .

- a) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der L erkennt. (8 P)

- b) Geben Sie für jeden der folgenden regulären Ausdrücke an, ob er L beschreibt. (4 P)

- | | | |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 1. $(a b)(a b)(a b)(a b)(a b)$ | <input type="checkbox"/> beschreibt L | <input type="checkbox"/> beschreibt L nicht |
| 2. $(b)^*a(b)^*a(b)^*a(b)^*a(b)^*a(b)^*$ | <input type="checkbox"/> beschreibt L | <input type="checkbox"/> beschreibt L nicht |
| 3. $(a)^*b(a)^*b(a)^*b(a)^*b(a)^*b(a)^*$ | <input type="checkbox"/> beschreibt L | <input type="checkbox"/> beschreibt L nicht |
| 4. $aaaaa$ | <input type="checkbox"/> beschreibt L | <input type="checkbox"/> beschreibt L nicht |
| 5. $(b)^*aaaaa(b)^*$ | <input type="checkbox"/> beschreibt L | <input type="checkbox"/> beschreibt L nicht |
| 6. $(a b)^*$ | <input type="checkbox"/> beschreibt L | <input type="checkbox"/> beschreibt L nicht |
| 7. $(a b)^*a(a b)^*a(a b)^*a(a b)^*a(a b)^*a(a b)^*$ | <input type="checkbox"/> beschreibt L | <input type="checkbox"/> beschreibt L nicht |
| 8. $((b)^* a)((b)^* a)((b)^* a)((b)^* a)((b)^* a)$ | <input type="checkbox"/> beschreibt L | <input type="checkbox"/> beschreibt L nicht |

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Sei L die Sprache

$$L = \{a^n b^m \mid n, m \in \{0, 1, \dots\}, n \neq m\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.a) Ist L regulär? ☐ Ja ☐ Nein

(1 P)

b) Beweisen Sie Ihre Antwort.

(7 P)

Aufgabe 3

(10 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet. Für jeden Buchstaben $a \in \Sigma$ sei ein Wort $w_a \in \Sigma^*$ gegeben. Für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichne $\llbracket w \rrbracket$ das Wort, in dem jeder Buchstabe a durch das entsprechende Wort w_a ersetzt wurde. Formal ist $\llbracket \cdot \rrbracket$ definiert über

$$\llbracket a_1 a_2 \cdots a_n \rrbracket = w_{a_1} w_{a_2} \cdots w_{a_n},$$

wobei $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma$ sei. Auf eine Sprache L lässt sich $\llbracket \cdot \rrbracket$ folgendermaßen verallgemeinern:

$$\llbracket L \rrbracket = \{\llbracket w \rrbracket \mid w \in L\} = \{\llbracket a_1 a_2 \cdots a_n \rrbracket \mid a_1 a_2 \cdots a_n \in L\} = \bigcup_{\substack{a_1 a_2 \cdots a_n \in L \\ \text{mit } a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma}} \{w_{a_1} w_{a_2} \cdots w_{a_n}\}$$

- a) In dieser Teilaufgabe sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, $w_a = a$, $w_b = ba$ und $w_c = \varepsilon$. (2 P)
Geben Sie $\llbracket \{a^n b^n c^m \mid m, n \in \{0, 1, \dots\}\} \rrbracket$ an.

- b) Zeigen Sie: (8 P)
Ist $L \subseteq \{a, b\}^*$ kontextfrei, so ist dies auch $\llbracket L \rrbracket$ (bei jeder Wahl von w_a und w_b).

Aufgabe 4

(9 Punkte)

Sei $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ die Grammatik in Chomsky-Normalform mit den Produktionen

$$P = \{ S \rightarrow CB \mid BC, \quad C \rightarrow AS \mid SA \mid c, \quad A \rightarrow a, \quad B \rightarrow b \}.$$

- a) Führen Sie den CYK-Algorithmus für G auf dem Wort $w_1 = bcab$ aus. (5 P)
Verwenden Sie dafür folgende Tabelle:

b	c	a	b

- b) Ist das Wort w_1 in der Sprache $L(G)$? ☐ Ja ☐ Nein (1 P)
Begründen Sie Ihre Antwort kurz:

- c) Sei $w_2 = bca$. Geben Sie die Menge $\{V \mid V \Rightarrow_G^* w_2\}$ an, (2 P)
d. h. die Menge aller Variablen in G , aus denen sich w_2 ableiten lässt.
Hinweis: w_2 ist ein Faktor von w_1 .

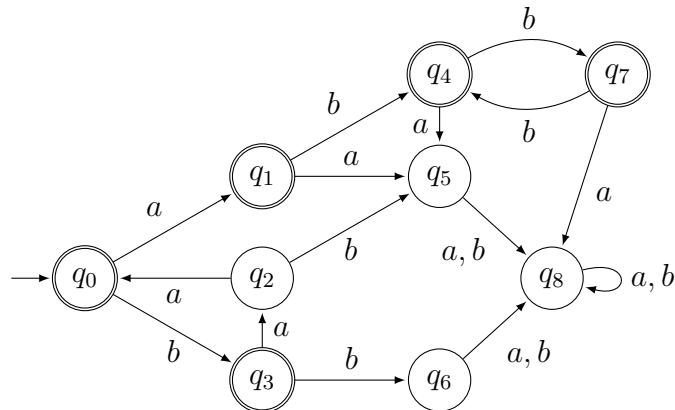
Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

- d) Ist $w_2 \in L(G)$? ☐ Ja ☐ Nein (1 P)
Begründen Sie Ihre Antwort kurz:

Aufgabe 5

(15 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und der folgende (nicht minimale) deterministische endliche Automat $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gegeben. Die von M akzeptierte Sprache sei $L = T(M)$.



Zur Erinnerung: Die Myhill-Nerode-Relation R_L einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist über

$$u R_L v \iff (\forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L)$$

definiert.

- a) Gilt $b R_L aa$? ☐ Ja ☐ Nein

(3 P)

Beweisen Sie Ihre Antwort.

- b) Gilt $a R_L b$? ☐ Ja ☐ Nein

(3 P)

Beweisen Sie Ihre Antwort.

- c) Gilt $aa R_L bb$? ☐ Ja ☐ Nein

(3 P)

Beweisen Sie Ihre Antwort.

d) Stimmt folgende Aussage? (3 P)

Beim Minimieren von M werden $\delta(q_0, a) = q_1$ und $\delta(q_0, b) = q_3$ zusammengefasst.

☐ Stimmt ☐ Stimmt nicht

Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

e) Stimmt folgende Aussage? (3 P)

Beim Minimieren von M werden $\hat{\delta}(q_0, aa) = q_5$ und $\hat{\delta}(q_0, bb) = q_6$ zusammengefasst.

☐ Stimmt ☐ Stimmt nicht

Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils die **kleinste** (bezüglich Inklusion) Sprachklasse an, in der die jeweilige Sprache enthalten ist. Nicht angekreuzt oder mehr als ein Kreuz zählt als falsches Kreuz.

Sprache	regulär	det. kontextfrei	kontextfrei	kontext- sensitiv	Typ-0
$\{a^n b^n \mid n = 42\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{a^n b^n \mid n \text{ gerade} \}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{a, b\}^* \setminus \{a^n b^n \mid n \text{ ungerade} \}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{a^i b^n c^i \mid n, i \in \mathbb{N}\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^i b^n c^i \mid n, i \in \mathbb{N}\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>