

**Wintersemester 2017/18**  
**Modulprüfung „Automaten und Formale Sprachen“**  
**28.03.2018 11:00 Uhr**

**Name:**

**Matrikelnummer:**

**Studiengang, Abschluss:**

**Zugelassene Hilfsmittel:** Maximal **einen** beidseitig beschriebenen Bogen DIN A4, der mit dem Namen zu versehen und als Hilfsbogen eindeutig zu kennzeichnen ist. Keine elektronischen Hilfsmittel (wie zum Beispiel Taschenrechner).

**Bearbeitungszeit:** 60 Minuten

**Hinweise:**

- Bearbeiten Sie von den folgenden Aufgaben so viele wie möglich. Dabei können Sie insgesamt 63 Punkte erreichen. Bei 30 oder mehr Punkten ist die Prüfung bestanden.
- Beschriften Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Bei fest zusammengehefteten Blättern genügt es das oberste zu beschriften.
- Alle in der Vorlesung oder Übung bewiesenen Aussagen dürfen verwendet werden, außer dies ist bei einer Aufgabe ausdrücklich ausgeschlossen.
- Die Menge der natürlichen Zahlen enthält die Null.

---

**Nur vom Korrektor auszufüllen:**

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	10	
2	12	
3	10	
4	6	
5	5	
6	12	
7	8	
Summe	63	

**Note:**

**Bemerkungen:**



## Beachten Sie folgende Definitionen:

- Für ein Alphabet  $\Sigma$ , einen Buchstaben  $x \in \Sigma$  und ein Wort  $w \in \Sigma^*$  sei  $|w|_x$  die Anzahl der Vorkommen von  $x$  in  $w$  (z. B.  $|aabcab|_a = 3$ ).
- Ein Wort  $u \in \Sigma^*$  heißt *Suffix* eines Wortes  $w \in \Sigma^*$ , falls ein Wort  $x \in \Sigma^*$  existiert mit  $w = xu$ .

*Beispiel:* Die Suffixe von  $abac$  sind genau  $\varepsilon$ ,  $c$ ,  $ac$ ,  $bac$  und  $abac$ .

### Aufgabe 1

(10 Punkte)

Sei  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Geben Sie graphisch einen *minimalen* deterministischen endlichen Automaten für

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens ein } c \text{ und } abba \text{ ist ein Suffix von } w\}$$

an.

*Hinweis:* Der gesuchte Automat hat genau 6 Zustände.

**Aufgabe 2**

(12 Punkte)

Sei  $L$  die Sprache

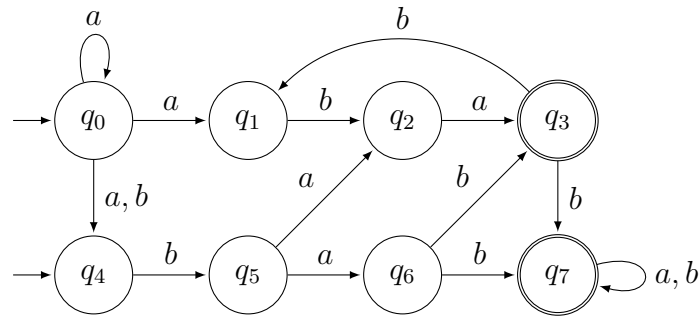
$$L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

über dem Alphabet  $\Sigma = \{a\}$ . Beweisen Sie, dass  $L$  nicht regulär ist.

### Aufgabe 3

(10 Punkte)

Sei  $M'$  der folgende nichtdeterministische endliche Automat über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ :



$M$  bezeichne den deterministischen endlichen Automaten, der aus  $M'$  mittels Potenzmengenkonstruktion hervorgeht. Ferner bezeichne  $\delta$  die Überföhrungsfunktion von  $M$ .

- a) Geben Sie den Startzustand von  $M$  an. (1 P)  
Ist dieser ein Endzustand von  $M$ ? Begründen Sie kurz.

- b) Berechnen Sie  $\delta(\{q_0, q_1\}, b)$ . (3 P)  
Ist das Ergebnis ein Endzustand von  $M$ ? Begründen Sie kurz.

- c) Berechnen Sie  $\hat{\delta}(\{q_3, q_4, q_5\}, ba)$ . (3 P)  
Ist das Ergebnis ein Endzustand von  $M$ ? Begründen Sie kurz.

- d) Berechnen Sie  $\hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, bb)$ . (3 P)  
Ist das Ergebnis ein Endzustand von  $M$ ? Begründen Sie kurz.

#### Aufgabe 4

(6 Punkte)

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$  und  $L \subseteq \Sigma^*$  die Sprache  $L = \{a^m b^{m+n} \in \{a, b\}^* \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ . Ferner bezeichne  $R_L$  die Myhill-Nerode-Äquivalenz bezüglich  $L$ .

- a) Geben Sie ein Wort  $w_1$  an mit  $w_1 \neq abb$  aber  $w_1 R_L abb$ : (1 P)

- b) Geben Sie ein Wort  $w_2$  an mit  $w_2 \neq baa$  aber  $w_2 R_L baa$ : (1 P)

- c) Geben Sie die Myhill-Nerode-Äquivalenzklasse von  $aaaa$  in Mengenschreibweise an: (3 P)

$$[aaaa]_{R_L} = \{w \in \Sigma^* \mid w R_L aaaa\} =$$

- d) Die Äquivalenzrelation  $R_L$  besitzt... (1 P)

- ☐ ... **endlich** viele Äquivalenzklassen und zwar .
- ☐ ... **unendlich** viele Äquivalenzklassen.

#### Aufgabe 5

(5 Punkte)

Sei  $G$  die Grammatik  $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow BB \mid BC, \\ A \rightarrow a, \\ B \rightarrow AC \mid BB, \\ C \rightarrow a \mid b \mid CA\}.$$

- a) Entscheiden Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort  $abab$  in der Sprache  $L(G)$  enthalten ist. Benutzen Sie die unten stehende Tabelle, um die Ausführung des Algorithmus wie in der Vorlesung zu protokollieren. (4 P)

Füllen Sie die Tabelle vollständig aus und streichen Sie dabei leere Felder durch.

Länge	$a$	$b$	$a$	$b$
1				
2				
3				
4				

- b) Gilt  $abab \in L(G)$ ? ☐ Ja ☐ Nein (1 P)  
 Gilt  $ba \in L(G)$ ? ☐ Ja ☐ Nein

## Aufgabe 6

(12 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils die (bezüglich Inklusion) **kleinste** Sprachklasse an, in der die jeweilige Sprache enthalten ist. Nicht angekreuzt oder mehr als ein Kreuz zählt als falsches Kreuz.

Falsche Kreuze führen **nicht** zu Punktabzügen!

	regulär (Typ 3)	deterministisch kontextfrei	kontextfrei (Typ 2)	kontextsensitiv (Typ 1)	rekursiv aufzählbar (Typ 0)
1. $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid  w _a \neq  w _b \text{ oder }  w _a \neq  w _c\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid  w _a =  w _b\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid  w _a =  w _b =  w _c\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. $\{www \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. $\{a^{2^n} b^{m \cdot 4^n} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. $\{a^{2^n} a^{2^m} \in \{a\}^* \mid n, m \in \mathbb{N}\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. $\{a^{3^m} b^{2^n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. $\{a^p b^p \mid p \text{ prim}\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. $(\{a\}^* \cup \{b\}^*) \setminus \{a^{n^2} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. $\{bc\}^* \cap \{c\}^*$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Aufgabe 7

(8 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen eindeutig. Falsche Antworten führen **nicht** zu negativen Punkten.

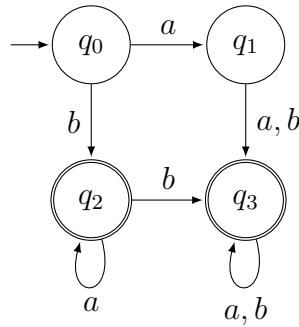
a) Sei  $L = L((a|b)(a)^*)$ . (2 P)

Gilt  $baba \in L$ ? ☐ Ja ☐ Nein

Gilt  $b \in L$ ? ☐ Ja ☐ Nein

Gilt  $\varepsilon \in L$ ? ☐ Ja ☐ Nein

b) Gegeben sei folgender DEA: (2 P)



Wie viele Zustände hat ein äquivalenter Minimalautomat?

c) Gegeben sei eine Grammatik  $G$  mit Startsymbol  $S$  und folgenden Regeln: (2 P)

$$S \rightarrow aAB$$

$$A \rightarrow aB \mid bA$$

$$B \rightarrow b$$

Geben Sie die Anzahl der Elemente in der Menge  $\{w \in L(G) \mid |w| \leq 7\}$  an:

d) Sei  $L$  die Sprache (2 P)

$$L = \{a^n b^m a \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Außerdem bezeichne  $\equiv_L$  die syntaktische Kongruenz-Relation.

Gilt  $bb \equiv_L bbb$ ? ☐ Ja ☐ Nein

Gilt  $a \equiv_L aaba$ ? ☐ Ja ☐ Nein

Gilt  $a \equiv_L \varepsilon$ ? ☐ Ja ☐ Nein