# Lösungsblatt 2

## Vorbereitungsaufgaben

### Vorbereitungsaufgabe 1

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit Variablenmenge $V = \{S, A, B, C\}$, Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und Regelmenge

$$P = \{(S, aSBC), (S, aBC), (CB, BC), (aB, ab), (bB, bb), (bC, bc), (cC, cc)\}.$$

Diese 7 Produktionen lassen sich auch wie folgt darstellen:

$$S \to aSBC \mid aBC \qquad CB \to BC \qquad aB \to ab \qquad bB \to bb \qquad bC \to bc \qquad cC \to cc$$

1. Wörter aus $(V \cup \Sigma)^*$ heißen *Satzformen*. Für Satzformen $x$ und $y$ gilt: In $G$ lässt sich $y$ genau dann in einem Schritt von $x$ ableiten (in Zeichen $x \Rightarrow_G y$), wenn gilt:

   $$\exists u, v, w_1, w_2 \in (V \cup \Sigma)^* \colon (x = w_1 u w_2 \wedge y = w_1 v w_2 \wedge (u, v) \in P).$$

   Beispiele:

   - Für $u = CB$, $v = BC$, $w_1 = Sa$ und $w_2 = b$ erhält man $SaCBb \Rightarrow_G SaBCb$.
   - Es gilt $aSc \not\Rightarrow_G abc$, da keine entsprechende $u, v, w_1, w_2$ existieren. Dafür müsste eine Regel $u \to v$ in $P$ existieren mit einem $S$ in der linken Seite und einem $b$ in der rechten.

   Geben Sie Satzformen $u, v, w_1, w_2$ an, die die Korrektheit der folgenden Aussagen begründen:

   (a) $CBA \Rightarrow_G BCA$

   (b) $aBc \Rightarrow_G abc$

   (c) $abC \Rightarrow_G abc$

2. In $G$ lässt sich $y$ genau dann in $n$ Schritten von $x$ ableiten (in Zeichen $x \Rightarrow_G^n y$), wenn gilt:

   $$\exists w_1, \ldots, w_{n-1} \in (V \cup \Sigma)^* \colon x \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G w_2 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G w_{n-1} \Rightarrow_G y.$$

   Beispiel: Es gilt $aCB \Rightarrow_G aBC \Rightarrow_G abC \Rightarrow_G abc$, also $aCB \Rightarrow_G^3 abc$.

   Geben Sie Ableitungsketten an, die die Korrektheit der folgenden Aussagen begründen:

   (a) $S \Rightarrow_G^3 aaaBCBCBC$

   (b) $BCBCBC \Rightarrow_G^3 BBBCCC$

   (c) $aBBBCCC \Rightarrow_G^6 abbbccc$

3. In $G$ lässt sich $y$ genau dann von $x$ ableiten (in Zeichen $x \Rightarrow_G^* y$), wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x \Rightarrow_G^n y$.

   Zeigen Sie: $aabbcc \in L(G)$.

4. Von welchen Chomsky-Typen ist $G$?

**Lösung**

1. (a) $u = CB$, $v = BC$, $w_1 = \varepsilon$ und $w_2 = A$.

   (b) $u = aB$, $v = ab$, $w_1 = \varepsilon$ und $w_2 = c$.

   (c) $u = bC$, $v = bc$, $w_1 = a$ und $w_2 = \varepsilon$.

2. (a) $S \Rightarrow_G aSBC \Rightarrow_G aaSBCBC \Rightarrow_G aaaBCBCBC$.

   (b) $BCBCBC \Rightarrow_G BBCCBC \Rightarrow_G BBCBCC \Rightarrow_G BBBCCC$.

   (c) $aBBBCCC \Rightarrow_G abBBCCC \Rightarrow_G abbBCCC \Rightarrow_G abbbCCC \Rightarrow_G abbbcCC \Rightarrow_G abbbccC \Rightarrow_G abbbccc$.

3. Aus Teil 2 folgt

$$S \Rightarrow_G^3 aaaBCBCBC \Rightarrow_G^3 aaaBBBCCC \Rightarrow_G^6 aaabbbccc,$$

   d. h. $S \Rightarrow_G^{12} aaabbbccc$ und somit auch $S \Rightarrow_G^* aaabbbccc$.

4. $G$ ist von den Typen 0 und 1, aber nicht von den Typen 2 und 3.

## Vorbereitungsaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Von welchen Chomsky-Typen sind folgende Grammatiken und welche Sprachen erzeugen sie?

1. $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to aSb \mid ab\}$.
2. $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to aS \mid bS \mid a \mid b\}$.
3. $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to TS \mid Ta, TT \to aT\}$.

**Lösung**

1. Chomsky-Typen: 0, 1 und 2. Erzeugte Sprache: $L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.
2. Chomsky-Typen: 0, 1, 2 und 3. Erzeugte Sprache: $L(G) = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} = \Sigma^+$.
3. Chomsky-Typen: 0 und 1. Erzeugte Sprache: $L(G) = \emptyset$.

## Vorbereitungsaufgabe 3

Gegeben sei folgende Sprache über dem ALphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L = \{a^m b^n \mid m, n \geq 1\}.$$

Geben Sie jeweils eine Grammatik $G$ mit höchstens 4 Produktionen an, die $L$ erzeugt.

1. $G$ soll vom Chomsky-Typ 3 sein.
2. $G$ darf nur eine Variable besitzen.

### Lösung

Mögliche Grammatiken:

1. $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to aS \mid aT, T \to bT \mid b\}$
2. $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to aS \mid Sb \mid ab\}$

---

# Präsenzaufgaben

---

## Präsenzaufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen gelten für eine beliebige Sprache $L$? Begründen Sie die Korrektheit der Aussage oder geben Sie eine Sprache $L$ an, die sie widerlegt.

1. $L^+ \subseteq L^*$
2. $\forall k \geq 1\colon L^k \subseteq L^+$
3. $\forall k \geq 0\colon L^k \subseteq L^*$
4. $(L^2)^* = (L^*)^2$
5. $\varepsilon \in L^*$
6. $L^+ = L^* \setminus \{\varepsilon\}$

### Lösung

1. Die Aussage ist richtig.

   Sei $w \in L^+$ beliebig. Dann gilt per Definition $w \in L^n$ für ein $n \geq 1$. Wegen $n \geq 1 \geq 0$ gilt insbesondere $w \in L^n$ für ein $n \geq 0$, also $w \in L^*$.

2. Die Aussage ist richtig.

   Seien $k \geq 1$ und $w \in L^k$ beliebig. Dann existiert ein $n \geq 1$ mit $w \in L^n$ (nämlich $n = k$). Also ist $w \in L^+$.

3. Die Aussage ist richtig.

   Die Begründung ist analog zu 2.

4. Die Aussage ist im Allgemeinen falsch.

   Für $L = \{a\}$ gilt $a \in (L^*)^2$, aber $a \notin (L^2)^*$.

   *Hinweis*: Es gilt $(L^*)^2 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $(L^2)^* = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

5. Die Aussage ist richtig.

   Folgt direkt aus $\varepsilon \in \{\varepsilon\} = L^0 \subseteq L^*$.

6. Die Aussage ist im Allgemeinen falsch.

   Für $L = \{\varepsilon\}$ gilt $\varepsilon \in L^+$, aber $\varepsilon \notin L^* \setminus \{\varepsilon\}$.

   *Hinweis:* Hier hätte man eine beliebige Sprache $L$ mit $\varepsilon \in L$ wählen können.

## Präsenzaufgabe 2

Zeigen Sie für beliebige Sprachen $A$, $B$ und $C$ über einem Alphabet $\Sigma$:

1. $A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*$
2. $A(B \cup C) = AB \cup AC$
3. $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$
4. $A^*A^* = A^*$

### Lösung

Zu einigen Beweisen werden auch die entsprechenden Beweisstrukturen angegeben. Beweisstrukturen zeichnen sich dadurch aus, dass sie nicht in Form eines zusammenhängenden Textes geschrieben werden, sondern in Form einer Liste von Inferenzen.

Beweisstrukturen sind besonders hilfreich, um den Aufbau von Beweisen zu erkennen und sind deshalb für Anfänger gut geeignet. Obwohl sie der Regel auch als endgültiger Beweis zulässig sind, wird davon abgeraten, Beweise so aufzuschreiben. Bei komplizierteren und längeren Beweisen sind Beweisstrukturen mühsamer zu schreiben und zu lesen.

Da die Beweisstrukturen in Teilaufgaben 2, 3 und 4 (zweite Richtung) gut erkennbar sind, geben wir diese nicht explizit an.

1. Beweisstruktur

   Angenommen, es gilt $A \subseteq B$. Sei $w \in A^*$ beliebig.

   $\rightsquigarrow$ $w \in A^n$ für ein $n \geq 0$.
   $\rightsquigarrow$ $w = w_1 \dots w_n$ für $n$ Wörter $w_1, \dots, w_n \in A$.
   $\rightsquigarrow$ $w_1, \dots, w_n \in B$ (nach Annahme).
   $\rightsquigarrow$ $w \in B^n$.
   $\rightsquigarrow$ $w \in B^*$.

   *Hinweis*: Das Symbol $\rightsquigarrow$ ist kein formal definiertes logisches Symbol. Für eine Aussage $P$ wird „$\rightsquigarrow P$“ als Abkürzung verwendet für

   „Aus allem, was bisher angenommen und inferiert wurde, folgt $P$“.

   Viele Dozenten (mich eingeschlossen, siehe meine Folien oder meinen Tafelanschrieb bei der Ergänzung) verwenden stattdessen normale Implikationspfeile, weil sich das so etabliert hat. Streng genommen ist dies jedoch formal nicht richtig. Beispielsweise ist die Implikation

   $$w_1, \dots, w_n \in B \implies w \in B^n$$

   falsch, da auf jeder Seite der Implikation Objekte vorkommen, die in der jeweils anderen Seite fehlen. Sie gilt somit nicht für beliebige $w_1, \dots, w_n$ und $w$, aber schon für diejenigen, die die Bedingungen der Zeilen davor erfüllen. Für erfahrene Mathematiker ist das kein Problem, weil sie wissen, was gemeint ist. Anders ist es bei Studienanfänger. Diese können dadurch leicht verwirrt werden. Deshalb versuche ich auch, mir das abzugewöhnen.

Beweis

Angenommen, es gilt $A \subseteq B$. Sei $w \in A^*$ beliebig. Dann ist $w = w_1 \dots w_n$ für ein $n \geq 0$ und für Wörter $w_1, \dots, w_n \in A$. Nach Annahme gilt $w_1, \dots, w_n \in B$, also $w \in B^n$ und somit $w \in B^*$.

2. Mengengleichheiten der Form $U = V$ werden in der Regel so bewiesen, dass man die Inklusionen $U \subseteq V$ und $V \subseteq U$ getrennt voneinander zeigt. Sind beide Beweise ähnlich genug, so kann wegen

$$\begin{aligned} U = V &\iff U \subseteq V \wedge V \subseteq U \\ &\iff \forall x\colon (x \in U \implies x \in V) \wedge \forall x\colon (x \in V \implies x \in U) \\ &\iff \forall x\colon ((x \in U \implies x \in V) \wedge (x \in V \implies x \in U)) \\ &\iff \forall x\colon (x \in U \iff x \in V) \end{aligned}$$

auch versucht werden, die Äquivalenz

$$x \in U \iff x \in V$$

für alle $x$ in einem Beweis zu zeigen, z. B. durch Äquivalenzumformungen. Dies ist in dieser Teilaufgabe genau der Fall.

Beweis

Sei $w$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & w \in A(B \cup C) \\ \iff & \exists u, v\colon w = uv \wedge u \in A \wedge v \in B \cup C \\ \iff & \exists u, v\colon w = uv \wedge u \in A \wedge (v \in B \vee v \in C) \\ \iff & \exists u, v\colon (w = uv \wedge u \in A \wedge v \in B) \vee (w = uv \wedge u \in A \wedge v \in C) \\ \overset{(*)}{\iff} & \exists u, v\colon (w = uv \wedge u \in A \wedge v \in B) \vee \exists u, v\colon (w = uv \wedge u \in A \wedge v \in C) \\ \iff & w \in AB \vee w \in AC \\ \iff & w \in AB \cup AC. \end{aligned}$$

*Hinweise*:

- An der Stelle $(*)$ wurde die Äquivalenz

$$\exists x\colon (P(x) \vee Q(x)) \iff \exists x\colon P(x) \vee \exists x\colon Q(x)$$

verwendet.

- Bei Äquivalenzumformungen soll immer darauf geachtet werden, dass jede Äquivalenz tatsächlich eine solche ist. Oft überprüft man nur eine Richtung und schreibt trotzdem einen Äquivalenzpfeil, obwohl nur ein Implikationspfeil richtig wäre.

- Ein Beweis in der Form

$$\begin{aligned}
A(B \cup C) &= \{uv \mid u \in A \land v \in B \cup C\} \\
&= \{uv \mid u \in A \land (v \in B \lor v \in C)\} \\
&= \{uv \mid (u \in A \land v \in B) \lor (u \in A \land v \in C)\} \\
&= \{uv \mid u \in A \land v \in B\} \cup \{uv \mid u \in A \land v \in C)\} \\
&= AB \cup AC
\end{aligned}$$

  ist für diese Teilaufgabe nicht geeignet, da die Gefahr besteht, dass die Gültigkeit der Äquivalenz $(*)$ nicht klar ersichtlich wird. Dass diese Äquivalenz eine fundamentale Rolle spielt, erkennt man daran, dass die Mengeninklusion aus Teilaufgabe 3. im Allgemeinen keine Mengengleichheit ist.

3. <u>Beweis</u>

   Sei $w$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& w \in A(B \cap C) \\
&\implies \exists u, v \colon w = uv \land u \in A \land v \in B \cap C \\
&\implies \exists u, v \colon w = uv \land u \in A \land (v \in B \land v \in C) \\
&\implies \exists u, v \colon (w = uv \land u \in A \land v \in B) \land (w = uv \land u \in A \land v \in C) \\
&\overset{(*)}{\implies} \exists u, v \colon (w = uv \land u \in A \land v \in B) \land \exists u, v \colon (w = uv \land u \in A \land v \in C) \\
&\implies w \in AB \land w \in AC \\
&\implies w \in AB \cap AC.
\end{aligned}$$

   *Hinweise*:

   - An der Stelle $(*)$ wurde die Implikation

$$\exists x \colon (P(x) \land Q(x)) \implies \exists x \colon P(x) \land \exists x \colon Q(x)$$

     verwendet. Diese ist im Allgemeinen keine Äquivalenz ist, da in $\exists x \colon (P(x) \land Q(x))$ gefordert wird, dass die Aussagen $P(x)$ und $Q(x)$ von demselben Element $x$ erfüllt werden, aber in $\exists x \colon P(x) \land \exists x \colon Q(x)$ nicht. Definiert man beispielsweise $P(x)$ als *$x$ ist eine gerade Zahl* und $Q(x)$ als *$x$ ist eine ungerade Zahl*, so gilt $\exists x \colon P(x) \land \exists x \colon Q(x)$, aber nicht $\exists x \colon (P(x) \land Q(x))$.

   - Man beachte, dass die restlichen 5 Implikationen sogar Äquivalenzen sind. Da aber nur die Implikation gezeigt werden kann, verwenden wir bei ihnen keine Doppelpfeile. Dies wäre zwar nicht falsch, aber es hat keinen Mehrwert für den Beweis.

   - Im Allgemeinen sind die zwei Mengen nicht gleich. Beispielsweise gilt für $A = \{\varepsilon, a\}$, $B = \{\varepsilon\}$ und $C = \{a\}$:

$$AB \cap AC = \{\varepsilon, a\} \cap \{a, aa\} = \{a\} \neq \emptyset = \{\varepsilon, a\}\,\emptyset = A(B \cap C).$$

   - Dass die Mengengleichheit im Allgemeinen nicht gilt, heißt jedoch nicht, dass die *echte Inklusion*

$$A(B \cap C) \subsetneq AB \cap AC$$

gilt. Dies würde wiederum bedeuten, dass die Mengen $A(B \cap C)$ und $AB \cap AC$ für alle $A, B, C$ ungleich sind, was beispielsweise für $A = B = C = \emptyset$ nicht stimmt.

4. In dieser Teilaufgabe zeigen wir beide Inklusionen getrennt voneinander.

$\underline{A^*A^* \subseteq A^*}$

Beweisstruktur

Sei $w \in A^*A^*$ beliebig.

$\rightsquigarrow$ $w = uv$ für zwei Wörter $u, v \in A^*$.

$\rightsquigarrow$ $u \in A^\ell$ und $v \in A^m$ für zwei Zahlen $\ell, m \geq 0$.

$\rightsquigarrow$ $u = u_1 \dots u_\ell$ für $\ell$ Wörter $u_1, \dots, u_\ell \in A$ und $v = v_1 \dots v_m$ für $m$ Wörter $v_1, \dots, v_m \in A$.

$\rightsquigarrow$ $w = u_1 \dots u_\ell v_1 \dots v_m$.

$\rightsquigarrow$ $w \in A^{\ell+m}$.

$\rightsquigarrow$ $w \in A^n$ für ein $n \geq 0$ (nämlich $n := \ell + m$).

$\rightsquigarrow$ $w \in A^*$.

Beweis

Sei $w \in A^*A^*$ beliebig. Dann ist $w = uv$ für Wörter $u, v \in A^*$, d. h. es gibt Zahlen $\ell, m \geq 0$ und Wörter $u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots, v_m \in A$ mit $w = u_1 \dots u_\ell v_1 \dots v_m$. Wähle $n = \ell + m$. Dann gilt $n \geq 0$ und durch Umbenennung der Variablen erhalten wir Wörter $w_1, \dots, w_n \in A$ mit $w = w_1 \dots w_n$. Somit ist $w \in A^*$.

$\underline{A^* \subseteq A^*A^*}$

Beweis

Sei $w \in A^*$ beliebig. Wegen $\varepsilon \in A^*$ ist $w = w\varepsilon \in A^*A^*$.

## Präsenzaufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen $L$ über $\Sigma$ eine Grammatik $G$ mit $L = L(G)$ an.

1. $L = \{a^m b^n \mid m < n\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist gerade}\}$
3. $L = \left\{a^k b^\ell a^m \;\middle|\; k = \ell \vee \ell = m\right\}$
4. $L = \{a^m b^m a^n b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommen zwei } b\text{s nebeneinander vor}\}$
6. $L = \{a^m b^n a^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

### Lösung

Für einige Teilaufgaben werden mehrere mögliche Grammatiken angegeben.

1. $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to aSb \mid Sb \mid b\}$

   $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to aSb \mid T, T \to bT \mid b\}$

2. $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to SaSaS \mid Sb \mid \varepsilon\}$

   $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to SS \mid aSa \mid Sb \mid \varepsilon\}$

   $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to aSa \mid Sb \mid bS \mid \varepsilon\}$

3. $G = (\{S, T, U, V\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to VT \mid UV, T \to bTa \mid \varepsilon, U \to aUb \mid \varepsilon, V \to aV \mid \varepsilon\}$

4. $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to TU, T \to aTb \mid \varepsilon, U \to aUb \mid \varepsilon\}$.

5. $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to TbbT, T \to aT \mid bT \mid \varepsilon\}$.

6. $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{S \to aSb \mid T, T \to bTa \mid \varepsilon\}$.

---

# Knobelaufgaben

---

## Knobelaufgabe 1

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen und $A$ und $B$ Sprachen mit $|A| = m$ und $|B| = n$.

Bekanntlich ist $mn$ ist eine obere Schranke für $|AB|$, weil für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|AB| \leq mn$ gilt. Die Schranke ist außerdem scharf, weil für alle $m, n \in \mathbb{N}$ Sprachen $A, B$ existieren mit $|AB| = mn$, z. B. $A = \left\{a^k \,\middle|\, 1 \leq k \leq m\right\}$ und $B = \left\{b^k \,\middle|\, 1 \leq k \leq n\right\}$.

1. Geben Sie eine scharfe untere Schranke $s(m, n)$ für $|AB|$ an.

   *Hinweis:* Betrachten Sie die Fälle (1) $m = 0 \lor n = 0$ und (2) $m, n > 0$ getrennt.

2. Zeigen Sie, dass $s(m, n)$ eine untere Schranke ist, indem Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung zeigen:
   $$|AB| \geq s(m, n).$$

3. Zeigen Sie, dass $s(m, n)$ eine scharfe Schranke ist, indem Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ Sprachen $A$ und $B$ angeben mit $|AB| = s(m, n)$.

## Knobelaufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie: Für jede beliebige Sprache $L$ gilt

$$L \subseteq L^3 \implies L \subseteq L^2.$$

*Hinweise:*

- Wenn die Aussage stimmt, nehmen Sie an, dass eine beliebige Sprache $L$ die Inklusion $L \subseteq L^3$ erfüllt und zeigen Sie danach, dass diese Sprache auch die Inklusion $L \subseteq L^2$ erfüllen muss.
- Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Ein Gegenbeipiel wäre in diesem Fall eine Sprache $L$ mit $L \subseteq L^3$ und $L \nsubseteq L^2$.

## Knobelaufgabe 3

Geben Sie eine Typ-1-Grammatik mit höchstens 10 Produktionen an, die die Sprache

$$L = \{a^m b^n a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ erzeugt.