F5 (Tidigare i F6) Tvådimensionella fördelningar: simultanfördelning, marginalfördelning*, oberoende fördelningar, betingad fördelning*

Tillämpad sannolikhetslära och statistik

Karl-Olof Lindahl

Innehåll

1. Tvådimensionella fördelningar (simultanfördelning/joint distribution)
2. Marginalfördelning*
3. Oberoende slumpvariabler
4. Betingad fördelning*

* ej obligatorisk för 1MA511

På agendan

Tillämpad sannolikhetslära och statistik, *Karl-Olof Lindahl*

1. Tvådimensionella fördelningar (simultanfördelning/joint distribution)
2. Marginalfördelning*
3. Oberoende slumpvariabler
4. Betingad fördelning*

* ej obligatorisk för 1MA511

Tvådimensionell diskret slumpvariabel

- Då man man samtidigt studerar två slumpmässigt varierande storheter X och Y får man en tvådimensionell slumpvariabel.
- Till exempel skulle X kunna vara antalet pojkar och Y vara antalet flickor i en slumpvis vald familj.
- Den simultana sannolikhetsfunktionen (joint PDF) för två slumpvariabler X och Y definieras som

$$p_{X,Y}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x, Y = y),$$

där alla $p_{X,Y}(x,y) \geq 0$ och $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x,y) = 1$.

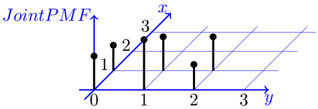
Tvådimensionell diskret slumpvariabel

- Då man man samtidigt studerar två slumpmässigt varierande storheter X och Y får man en tvådimensionell slumpvariabel.
- Till exempel skulle X kunna vara antalet pojkar och Y vara antalet flickor i en slumpvis vald familj.
- Den simultana sannolikhetsfunktionen (joint PDF) för två slumpvariabler X och Y definieras som

$$p_{X,Y}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x, Y = y),$$

där alla $p_{X,Y}(x,y) \geq 0$ och $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x,y) = 1$.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0.15	0.3	0.125
$X = 1$	0.125	0.15	0.15



- Exempelvis är $p_{X,Y}(1,2) = 0.3$ och

$$F_{X,Y}(1,1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = 0.15 + 0.3 + 0.125 + 0.15 = 0.725$$

Marginalfördelning (Marginal distribution)

Marginalfördelning (Marginal distribution)

- Tagna var för sig är X och Y endimensionella.

Marginalfördelning (Marginal distribution)

- Tagna var för sig är X och Y endimensionella.
- Deras fördelningar kallas marginalfördelningar.

Marginalfördelning (Marginal distribution)

- Tagna var för sig är X och Y endimensionella.
- Deras fördelningar kallas marginalfördelningar.
- Motsvarande marginella sannolikhetsfunkteioner kan uttryckas i termer av simultanfördelningen. Till exempel är

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} p_{X,Y}(x, y).$$

Marginalfördelning (Marginal distribution)

- Tagna var för sig är X och Y endimensionella.
- Deras fördelningar kallas marginalfördelningar.
- Motsvarande marginella sannolikhetsfunkteioner kan uttryckas i termer av simultanfördelningen. Till exempel är

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} p_{X,Y}(x,y).$$

- De marginella sannolikhetsfunktionerna för exemplet på föregående sida utgörs av raden längst ner respektive kolonnen längst till höger i följande tabell

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	S:a dvs $p_X(x)$
$X=0$	0.15	0.3	0.125	0.575
$X=1$	0.125	0.15	0.15	0.425
S:a dvs $p_Y(y)$	0.275	0.45	0.275	

Oberoende slumpvariabler (Independent random variables

Oberoende slumpvariabler (Independent random variables

- Två slumpvariabler X och Y är oberoende om

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y), \quad \text{för alla } (x, y) \text{ där } p_{XY}(x, y) > 0.$$

Oberoende slumpvariabler (Independent random variables

- Två slumpvariabler X och Y är oberoende om

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y), \quad \text{för alla } (x, y) \text{ där } p_{XY}(x, y) > 0.$$

- I termer av marginella sannolikhetsfunktionerna $p_X(x)$ och $p_Y(y)$ är detta ekvivalent med

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

Oberoende slumpvariabler (Independent random variables

- Två slumpvariabler X och Y är oberoende om

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y), \quad \text{för alla } (x, y) \text{ där } p_{XY}(x, y) > 0.$$

- I termer av marginella sannolikhetsfunktionerna $p_X(x)$ och $p_Y(y)$ är detta ekvivalent med

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_Y(y).$$

- I termer av marginella fördelningsfunktioner $F_X(x)$ och $F_Y(y)$ är detta i sin tur ekvivalent med

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y).$$

Oberoende slumpvariabler (Independent random variables

- Två slumpvariabler X och Y är oberoende om

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y), \quad \text{för alla } (x, y) \text{ där } p_{XY}(x, y) > 0.$$

- I termer av marginella sannolikhetsfunktionerna $p_X(x)$ och $p_Y(y)$ är detta ekvivalent med

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

- I termer av marginella fördelningsfunktioner $F_X(x)$ och $F_Y(y)$ är detta i sin tur ekvivalent med

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

- Slumpvariablerna i tidigare exempel är inte oberoende eftersom enligt tabellen nedan

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	S:a dvs $p_X(x)$
$X = 0$	0.15	0.3	0.125	0.575
$X = 1$	0.125	0.15	0.15	0.425
S:a dvs $p_Y(y)$	0.275	0.45	0.275	

har vi

$$p_{X,Y}(0, 1) = 0.3 \neq p_X(0)p_Y(1) = 0.575 \cdot 0.45 = 0.2565.$$

Betingad fördelning (Conditional distribution)*

Storheterna

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x), P(Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}, \quad p_Y(y) > 0,$$

betecknas $p_{X|Y}(x|y)$ och kallas den betingade sannolikhetsfunktionen för X, givet att $Y = y$.

Betingad fördelning (Conditional distribution)*

Storheterna

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x), P(Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}, \quad p_Y(y) > 0,$$

betecknas $p_{X|Y}(x|y)$ och kallas den betingade sannolikhetsfunktionen för X, givet att $Y = y$.

- Den betingade fördelningen fås alltså från simultanfördelningen genom att välja lämplig rad eller kolonn och multiplicera med lämplig skalfaktor

Betingad fördelning (Conditional distribution)*

Storheterna

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x), P(Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}, \quad p_Y(y) > 0,$$

betecknas $p_{X|Y}(x|y)$ och kallas den betingade sannolikhetsfunktionen för X, givet att $Y = y$.

- Den betingade fördelningen fås alltså från simultanfördelningen genom att välja lämplig rad eller kolonn och multiplicera med lämplig skalfaktor
- Till exempel är