Caminos de costo mínimo. DAG y Dijkstra

Colectivo Estructuras de Datos y Algoritmos

Octubre 2020

1. Resuelva el problema de los caminos de costo mínimo partiendo de un solo origen en un grafo dirigido y acíclico, utilizando la técnica de **Programación Dinámica en DAG** vista en la Clase Práctica 5.

2. Implemente un algoritmo que dado un grafo dirigido y ponderado $G = \langle V, E \rangle$ con función de costo no negativa, un vértice $s \in V$ y la salida del algoritmo de Dijkstra (array d) aplicado sobre el grafo G a partir del vértice origen s; determine en $O(|V| + |E|)$ un camino de costo mínimo que comience en s y termine en un vértice $a \in V$ dado.

3. Sea $G = \langle V, E \rangle$ un grafo dirigido y ponderado con función de costo $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega(e) >= 1$ para todo $e \in E$. Se define el costo de un camino $p = [v_0, ..., v_k]$ de G como $\omega(v_0, v_1) * \omega(v_1, v_2) * ... * \omega(v_{k-1}, v_k)$. Diseñe un algoritmo que permita determinar el camino de costo mínimo en G de acuerdo a la función de costo ω. La complejidad temporal de su algoritmo debe ser $O(|E| \log |V|)$.

4. Sea $G = \langle V, E \rangle$ un grafo dirigido y ponderado con función de costo no negativa ω, y un par de vértices $s, t \in V$. Diseñe un algoritmo que permita determinar el conjunto de todos los vértices de G que pertenecen a algún camino de costo mínimo de s a t. La complejidad temporal de su algoritmo debe ser $O(|E| \log |V|)$.

5. Sea $G = \langle V, E \rangle$ un grafo dirigido y ponderado con función de costo no negativa ω, y un par de vértices $s, t \in V$. Se dice que un par ordenado de vértices $\langle u, v \rangle$ es X-*cool*, si al añadir el arco $\langle u, v \rangle$ a G con $\omega(u, v) = X$ se reduce el costo del camino de costo mínimo de s a t. Diseñe un algoritmo que dados G, s, t y X; permita determinar en $O(|V|^2 + |E| \log |V|)$ el conjunto de pares X-*cool* en G.

6. Sea $G = \langle V, E \rangle$ un grafo dirigido y ponderado con función de costo no negativa ω, un par de vértices $s, t \in V$ y dos enteros $1 \leq k \leq |V|$ y $p \geq 0$. Diseñe un algoritmo que permita determinar el costo del camino de costo mínimo de s a t que se puede lograr poniéndole costo p a lo sumo a k arcos de G. La complejidad temporal de su algoritmo debe ser $O(k|E| \log |V|)$.