Componentes fuertemente conexas

Colectivo Estructuras de Datos y Algoritmos

Octubre 2020

1. ¿Cómo se puede afectar el número de componentes fuertemente conexas de un grafo si se añade o se elimina un arco?

2. Demuestre que para cualquier grafo se cumple que $((G^T)^{SCC})^T = G^{SCC}$, o sea que el grafo transpuesto del grafo reducido de G^T es igual al grafo reducido de G.

3. Se dice que un grafo dirigido $G = \langle V, E\rangle$ es **simplemente conexo** si, para todo par de vértices $u, v \in V$, existe en G un camino de u a v o un camino de v a u. Proponga un algoritmo que dado un grafo dirigido $G = \langle V, E\rangle$ permita determinar en $O(|E|)$ si G es simplemente conexo.

4. En un grafo dirigido $G = \langle V, E\rangle$ se dice que un vértice v está **hundido** cuando para todo vértice w alcanzable desde v, se cumple que v también es alcanzable desde w. Se define el **fondo** de un grafo como el conjunto de vértices $H = \{v \mid v \in V(G) \text{ y } hundido(v)\}$. Diseñe un algoritmo que dado un grafo dirigido $G = \langle V, E\rangle$ permita determinar en $O(|V| + |E|)$ el conjunto H definido anteriormente.

5. Sea $G = \langle V, E\rangle$ un grafo dirigido. Se dice que un arco $e = \langle u, v\rangle$ es fuerte si y solo si existe un camino de v a u en G, de lo contrario se dice que e es débil. Diseñe un algoritmo que permita, dado un grafo dirigido $G = \langle V, E\rangle$, determinar el camino con mayor cantidad de arcos débiles en G (en caso de existir varios, uno cualquiera) en $O(|V| + |E|)$.

6. Sea $G = \langle V, E\rangle$ un grafo dirigido y ponderado por una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ tal que $w(e = \langle u, v\rangle) = 0$ si existe un camino de v a u, de lo contrario es un número real cualquiera. Plantee un algoritmo que dado un vértice s y un conjunto de vértices T encuentre el camino de mayor costo en G desde el vértice de origen s hacia un vértice $t \in T$, en $O(|V| + |E|)$.

7. En una ciudad donde todos los habitantes tienen teléfonos celulares, la compañía de telecomunicaciones impone un protocolo de mensajería que consiste en que todo mensaje que le llegue a un habitante se le reenvía directamente a cada uno de los contactos que estén en el teléfono del mismo. El protocolo garantiza, además, que a cada habitante no le llegue el mismo mensaje más de una vez (debido a que antes de enviarlo consulta si este ya lo tiene). El gobernador de la cuidad necesita dar un comunicado a toda la población, pero por razones que se desconocen, las tarifas de mensajería de la compañía de telecomunicaciones son muy costosas y el gobernador necesita ahorrar. Él desea saber la mínima cantidad de mensajes que tiene que mandar para que toda la población se entere del comunicado. Diseñe un algoritmo que permita al gobernador, dada la lista de contactos de cada habitante de la ciudad, conocer la menor cantidad de mensajes necesarios para garantizar que todos los habitantes obtengan la información (partiendo del protocolo de mensajería de la compañía de telecomunicaciones).

8. En una cueva, la cual esta divida en secciones, existen tesoros escondidos con distintos valores. Existe un conjunto de secciones en las que se puede entrar a la cueva y otro en las que se puede salir de la misma. Entre las secciones existen túneles que conectan unidireccionalmente las mismas. En estas secciones pueden existir tesoros con un valor positivo. Diseñe un algoritmo que permita determinar la mayor ganancia que se puede obtener en un recorrido sobre esta cueva dado que necesariamente hay que entrar por una de las secciones de entrada y salir por una de las de salida (la ganancia está determinada por la suma de los valores de todos los tesoros recogidos).

9. Dada una fórmula en **FNC** (Forma Normal Conjuntiva [1]) donde el número de literales de en cada disyunción es menor o igual a 2, saber si esta es satisfacible o no, se conoce como el problema **2-Sat**. En este problema se recibe una fórmula en **FNC**, por ejemplo:

$$F(x_i) = (x_0 \vee \neg x_1) \wedge (x_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge ...$$

   Donde se define el conjunto $X = \{x_i\}$ de las variables que conforman todos los literales y el conjunto C que contienen todas las cláusulas de la fórmula.

   Una fórmula es satisfacible si existe un asignación booleana sobre las variables x_i que haga verdadera $F(x_i)$, en otro caso se dice insatisfacible.

   Diseñe un algoritmo que permite resolver el problema **2-Sat** en $O(|X| + |C|)$ y que en caso de que F sea satisfacible brinde una asignación de las variables x_i que haga la fórmula verdadera.

   a) (Opcional) Implemente una solución al problema:
   The Door Problem [https://codeforces.com/contest/776/problem/D]

[1] Una conjunción de cláusulas, y estas a su vez, son una disyunción de literales