

Puntos de articulación y componentes biconexas

Colectivo Estructuras de Datos y Algoritmos

Octubre 2021

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
 - a) — En un grafo no dirigido una arista puente siempre une dos puntos de articulación.
 - b) — La condición necesaria y suficiente para que un vértice v sea punto de articulación en un grafo no dirigido G es que, en un árbol abarcador en profundidad G_π , el vértice v tenga un hijo w tal que $low[w] \geq low[v]$.
 - c) — Un grafo no dirigido es k -conexo si y solo si no tiene puntos de articulación.
 - d) — Hallar las aristas puente de un grafo no dirigido equivale a hallar las aristas que nunca serán clasificadas como **arista de retroceso** en todo recorrido *DFS*.
2. Implemente un algoritmo que permita determinar si un grafo no dirigido y conexo $G = \langle V, E \rangle$ es triconexo en $O(|V| * |E|)$. Justifique complejidad temporal y correctitud de su algoritmo.
3. Implemente un algoritmo que dado un grafo conexo y no dirigido $G = \langle V, E \rangle$ determine en $O(|V| + |E|)$ una secuencia en que se pueden ir eliminando todos los vértices de G de manera tal que nunca se desconecte la parte de G que va quedando. Explique por qué su algoritmo es correcto y justifique su complejidad temporal.
4. Implemente un algoritmo con complejidad temporal $O(|E|)$ que le asigne a cada arista e de un grafo no dirigido y conexo G , un número positivo $Num(e)$ tal que $Num(e) = Num(e')$ si y solo si e y e' pertenecen a la misma componente biconexa. Justifique la complejidad temporal y explique de forma intuitiva por qué su algoritmo funciona.
5. Sean $G = \langle V, E \rangle$ un grafo no dirigido y conexo y $a, b \in V$. Se dice que un nodo $v \in V$ es $a - b$ crítico si v se encuentra en todo camino de a a b en G . Implemente un algoritmo que permita determinar en $O(|V| + |E|)$ el conjunto de nodos $a - b$ críticos dados G , a y b . Explique por qué su algoritmo funciona correctamente y justifique la complejidad temporal.
6. Dado un grafo no dirigido G decimos que los caminos simples $(u, a_1), (a_1, a_2) \dots (a_p, v)$ y $(u, b_1), (b_1, b_2) \dots (b_q, v)$ son vértice disjuntos si los dos son caminos válidos en G y los conjuntos $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ y $\{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ son disjuntos. Demuestre que G no tiene puntos de articulación si y solo si para cada par de vértices u y v de G existen dos caminos vértice disjuntos de u a v .
7. Se desea implementar una estructura de datos que dado un grafo no dirigido y conexo $G = \langle V, E \rangle$ permita realizar consultas de la forma *CANT_PUENTES*(G, a, b) para determinar la cantidad de aristas puentes que hay en todo camino simple de a a b .
 - a) Sean $G = \langle V, E \rangle$ un grafo no dirigido y conexo y $a, b \in V$. Demuestre que todos los caminos simples entre a y b tienen la misma cantidad de aristas puentes.
 - b) Diseñe una estructura de datos que permita responder a estas consultas en $O(P)$, donde P es la cantidad de aristas puentes de G . La complejidad temporal de inicializar tal estructura debe ser $O(|V| + |E|)$. Explique la correctitud y complejidad temporal de la implementación de los métodos de su estructura de datos.