LÓGICA MATEMÁTICA 2016-1

LINGUAGEM, ESTRUTURAS E INTERPRETAÇÕES

LISTA DE EXERCÍCIOS #1

Exercício 1.

Considere uma linguagem $\mathcal{L}$ consistindo das constantes *a* e *b;* dos símbolos funcionais, *f* de aridade 1 e *g* de aridade 2; e dos predicados, *P* de aridade 1 e *Q* de aridade 2. E a estrutura $\mathfrak{N}$ para a linguagem definia abaixo.

D = N; o conjunto dos números naturais.
$a^{\mathfrak{N}} = 1$
$b^{\mathfrak{N}} = 2$
$f^{\mathfrak{N}} = f(n) = n + 1$; onde *n* é um número natural.
$g^{\mathfrak{N}} = g(n,m) = n.m$; onde *n* e *m* são números naturais.
$P^{\mathfrak{N}} = \{0, 2, 4, 6, ...\}$; o conjunto dos números pares.
$Q^{\mathfrak{N}} = \{(n, m) \in N^2; n < m\}$; a relação de *menor* nos naturais.

Calcule os elementos do domínio correspondentes aos termos abaixo:

a) x
b) f(x)
c) f(f(x))
d) g(x, f(f(x)))
e) f(g(a, y))
f) x + y (este é uma pegadinha)
g) f(1)

Exercício 2.

Para cada fórmula abaixo dê uma interpretação que a satisfaz e outra que não a satisfaz.

a) $P(a)$
b) $P(x)$
c) $P(f(y))$
d) $\forall x P(a)$
e) $\forall x P(x)$
f) $\exists x P(a)$
g) $\exists x P(x)$
h) $\neg\forall x P(x)$
i) $\neg\exists x P(x)$
j) $\forall x \neg P(x)$
k) $\exists x \neg P(x)$
l) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
m) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$
n) $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$
o) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
p) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
q) $\exists x(P(x) \vee Q(x))$
r) $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

s) $\forall x \neg (P(x) \rightarrow Q(x))$
t) $\neg \exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$
u) $\exists x \neg (P(x) \rightarrow Q(x))$
v) $\neg \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
w) $\forall x \neg (P(x) \wedge Q(x))$
x) $\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
y) $\exists x \neg (P(x) \wedge Q(x))$
z) $\neg \forall x (P(x) \vee Q(x))$
aa) $\forall x \neg (P(x) \vee Q(x))$
bb) $\neg \exists x (P(x) \vee Q(x))$
cc) $\exists x \neg (P(x) \vee Q(x))$
dd) $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
ee) $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$
ff) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$
gg) $\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Exercício 3.

Assinale verdadeiro e falso nas afirmações sempre justificando suas respostas através de provas (argumentos) ou de contraexemplos.

a) Se uma fórmula é satisfatível então ela é uma validade.
b) Se uma fórmula é uma validade então ela é satisfatível.
c) Se um conjunto é satisfatível todas suas fórmulas são satisfatíveis.
d) Se um conjunto é insatisfatível todas suas fórmulas são insatisfatíveis.
e) Se um conjunto é insatisfatível ele contém pelo menos uma fórmula insatisfatível.
f) Se uma fórmula é satisfatível então qualquer conjunto que a contenha é satisfatível.
g) Se uma fórmula é insatisfatível então qualquer conjunto que a contenha é insatisfatível.
h) O conjunto vazio de fórmulas é satisfatível.
i) O conjunto vazio de fórmulas é insatisfatível.
j) O conjunto de todas as fórmulas é satisfatível.
k) O conjunto de todas as fórmulas é insatisfatível.
l) A fórmula $(\varphi \wedge \psi)$ é satisfatível sse φ e ψ são satisfatíveis.
m) A fórmula $(\varphi \wedge \psi)$ é insatisfatível sse φ e ψ são insatisfatíveis.
n) A fórmula $(\varphi \wedge \psi)$ é válida sse φ e ψ são válidas.
o) A fórmula $(\varphi \vee \psi)$ é satisfatível sse φ ou ψ são satisfatíveis.
p) A fórmula $(\varphi \vee \psi)$ é insatisfatível sse φ ou ψ são insatisfatíveis.
q) A fórmula $(\varphi \vee \psi)$ é insatisfatível sse φ e ψ são insatisfatíveis.
r) A fórmula $(\varphi \vee \psi)$ é válida sse φ ou ψ são válidas.

Exercício 4.

Assinale verdadeiro ou falso nas afirmações sempre justificando suas respostas através de provas ou de contraexemplos.

a) $\Gamma \vDash \varphi$ sse $\Gamma \nvDash \neg\varphi$
b) Se Γ é insatisfatível então $\Gamma \vDash \varphi$, p/toda fórmula φ.
c) Se φ é insatisfatível então, se $\Gamma \vDash \varphi$ então Γ é insatisfatível.
d) $\varnothing \vDash \varphi$ sse φ é válida.

e) Se Γ é satisfatível então $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ou $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é satisfatível. Podem os dois serem satisfatíveis?

f) $\Gamma \vDash \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é satisfatível.

g) $\Gamma \vDash \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é insatisfatível.

h) $\Gamma \vDash \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é satisfatível.

i) $\Gamma \vDash \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível.

j) Se $\varphi \in \Gamma$ então $\Gamma \vDash \varphi$.

k) Se $\Gamma \vDash \varphi$ então $\Gamma \cup \Delta \vDash \varphi$, para todo conjunto de fórmulas Δ.

l) Se $\Gamma \vDash \beta$ e $\Gamma \cup \{\beta\} \vDash \varphi$ então $\Gamma \vDash \varphi$.

m) $\Gamma \vDash (\varphi \rightarrow \psi)$ sse $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$.

n) $\Gamma \vDash P(x)$ então $\Gamma \vDash \forall x P(x)$

o) $\Gamma \vDash P(x)$ então $\Gamma \vDash \exists x P(x)$

p) $\varnothing \vDash \exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x))$

Exercício 5.

Assinale verdadeiro ou falso nas afirmações sempre justificando suas respostas através de provas ou de contraexemplos.

a) $\varnothing \vDash \exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x))$

b) $\exists x \forall y\, P(x,y) \vDash \forall y \exists x\, P(x,y)$

c) $\forall y \exists x\, P(x,y) \vDash \exists x \forall y\, P(x,y)$

d) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \vDash \forall x(P(x) \vee Q(x))$

e) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \vDash \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

f) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vDash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

g) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \vDash \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

h) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vDash \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

i) $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \vDash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

j) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vDash \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

k) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vDash \forall x P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$

l) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x) \vDash \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$

m) $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \vDash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$