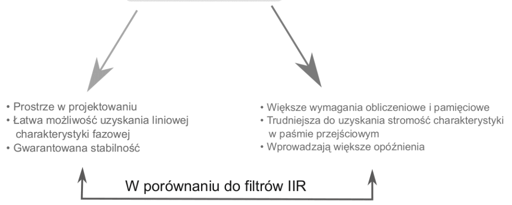
## Filtr FIR

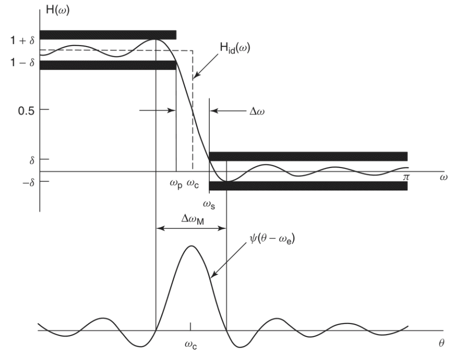
**FIR**

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} b(m)x(n-m) - \sum_{k=0}^{K-2} a(k)y(n-k)$$



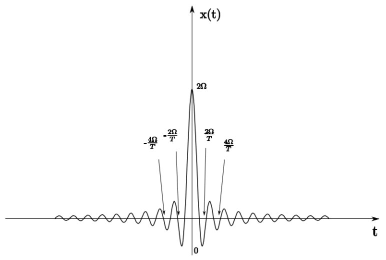

Każda próbka sygnału wyjściowego jest określona przez wartość średnią ważoną ostatnich próbek sygnału poddawanego filtracji.

## Właściwości podstawowe




$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(2\cdot\pi\cdot f_{cutoff}\cdot t)}{2\cdot\pi\cdot f_{cutoff}\cdot t}$$

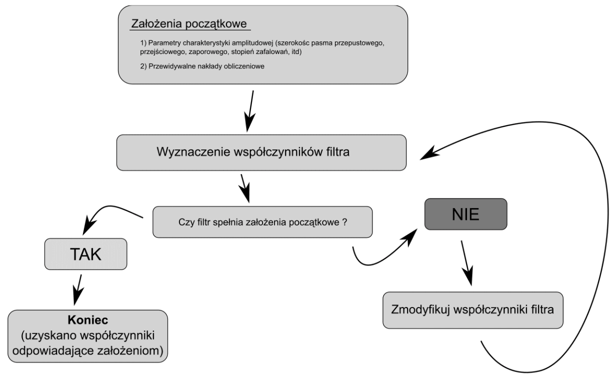
## Właściwości podstawowe



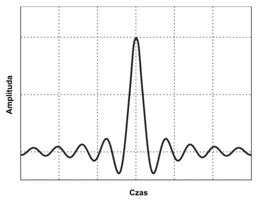

**Funkcja sinc**

Przy określaniu charakterystyki częstotliwościowej filtra dolnoprzepustowego istotne jest określenia stopnia aproksymacji funkcji sinc, dobór liczby próbek i warunek ich symetrii decydujący o zachowaniu charakterystyki fazowej.

## Projektowanie filtru

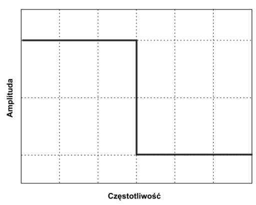



## FIR: Metoda okien czasowych

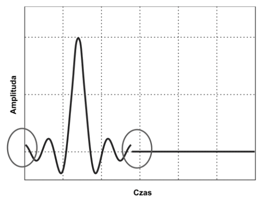



Funkcja sinc w dziedzinie czasu określona w dziedzinie od $-\infty$ do $\infty$ posiada widmo amplitudowe o charakterystyce impulsu prostokątnego

Amplituda impulsu jest zależna od maksimum funkcji sinc, natomiast szerokośc impulsu jest determinowana przez liczbę miejsc zerowych funkcji w rozpatrywanym przedziale.

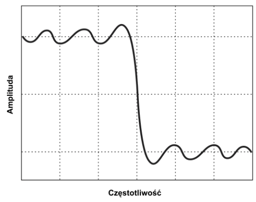



## FIR: Metoda okien czasowych

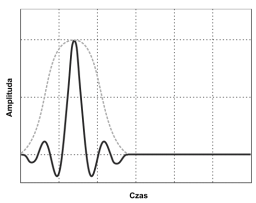



Symetryczne ograniczenie (i jednoczesne zachowanie ciągłości fazy) rozpatrywanej funkcji w dziedzinie czasu powoduje degradację impulsu w dziedzinie częstotliwości

Występowanie nieciągłości w rozpatrywanym sygnale powoduje powstawanie efektu Gibbsa. Stopień zafalowań jest zależny od wartości tych nieciągłości.

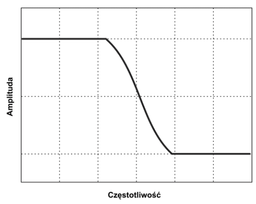



## FIR: Metoda okien czasowych




W celu zmniejszenia stopnia tych zafalowań stosuje się techniki okienkowania w dziedzinie czasu polegającego na wymnożeniu sygnału z funkcją okna.

W rezultacie uzyskuje się znaczne zmniejszenie zafalowań kosztem zwiększenia zakresu stanu przejściowego pomiędzy wartością maksymalną i minimalną amplitudowej charakterystyki częstotliwościowej




## FIR: Metoda okien czasowych

**Uogólniając powyższe rozważania można stwierdzić następujące wnioski**:

I) Charakterystyka częstotliwościowa jest ściśle związana z liczbą próbek funkcji sinc.

II) W celu poprawy bądź zmiany właściwości filtru należy zastosować funkcję okna.

III) Wartości współczynników filtru rzędu N-1 można uzyskać za pomocą następującej zależności:

$$h(n) = \frac{\sin(\omega t)\cdot w(n)}{\omega t}$$

IV) Filtr reprezentowany przez współczynniki h(n) jest filtrem typu FIR (SOI) ponieważ posiada skończoną liczbę współczynników, a jego odpowiedź impulsowa dąży do wartości 0.

## FIR: Metoda okien czasowych - etapy projektowania

**1°** Opis żądanej charakterystyki filtru w dziedzinie częstotliwości z uwzględnieniem liniowości fazy.

**2°** Wyznaczenie odpowiedzi impulsowej filtru (konwersja $f \rightarrow t$).

**3°** Ograniczyć liczbę próbek odpowiednio do liczby wymaganych współczynników filtra.

## FIR: Metoda okien czasowych - etapy projektowania

**4°** Uzupełnić wartościami zero wybrany zestaw współczynników i wyznaczyć charakterystykę częstotliwościową.

**5°** Jeśli uzyskany filtr nie spełnia zadanych wymagań należy zwiększyć liczbę próbek (rząd) w sytuacji gdy pasmo przejściowe jest zbyt szerokie lub wykorzystać okno o danych parametrach gdy tłumienie w paśmie zaporowym jest zbyt małe.

**6°** Po uzyskaniu nowego zestawu współczynników kroki 4° oraz 5° należy powtarzać do momentu aż zostaną osiągnięte początkowe założenia projektowe (o ile jest to możliwe).

## FIR: Metoda okien czasowych

- **Okno prostokątne**

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \end{cases}$$

- **Okno Blackmana**

$$w(n) = 0.42 - \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$$

- **Okno Hanninga**

$$w(n) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right]$$

- **Okno Hamminga**

$$w(n) = 0.54 - 046 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

## FIR: Metoda okien czasowych

| Typ okna | Maksymalna amplituda listka bocznego [dB] | Szerokość listka głównego | Szerokość pasma przejściowego | Minimalne tłumienie w paśmie zaporowym [dB] |
|---|---|---|---|---|
| prostokątne | -13 | $\frac{4\pi}{N}$ | $\frac{0.9}{N}$ | -21 |
| Blackmana | -57 | $\frac{12\pi}{N}$ | $\frac{5.5}{N}$ | -74 |
| Hanna | -31 | $\frac{8\pi}{N}$ | $\frac{3.1}{N}$ | -44 |
| Hamminga | -41 | $\frac{8\pi}{N}$ | $\frac{3.3}{N}$ | -53 |

- Największym tłumieniem w paśmie zaporowym charakteryzuje się okno Blackmana przy jednocześnie najszerszym listku głównym.
- Podczas projektowania zawsze poszukujemy kompromisu pomiędzy przeciwstawnymi parametrami charakterystyki częstotliwościowej (np. szerokością listka głównego, a poziomem listków bocznych).

## FIR: Metoda okien czasowych

Z rozpatrywanej grupy okien płyną następujące wnioski:

- Okno Hamminga ma szybsze opadanie charakterystyki niż Blackmana.
- Najlepsze tłumienie w paśmie zaporowym posiada okno Blackmana.
- Okno prostokątne posiada najgorsze tłumienie w paśmie zaporowym.
- W przypadku okna Hanna poziom tłumienia w paśmie zaporowym rośnie wraz z częstotliwością.
- Szerokość listka głównego okna Hamminga i Hanna jest taka sama.

W praktyce łatwiej poradzić sobie ze zmianą szybkości opadania charakterystyki częstotliwościowej niż ze słabym poziomem tłumienia w paśmie zaporowym.

## FIR: Metoda okien czasowych

Ze względu, że głównymi parametrami mającymi wpływ na kształtowanie charakterystyki filtra w procesie projektowania jest rozmiar i typ okna (z ograniczonego zestawu okien czasowych) w praktyce stosuje się dodatkowo tzw. *okna parametryczne* (Kaisera, Dolpha-Czebyszewa, Gaussa).

**Do dwóch najczęściej stosowanych okien parametrycznych należą**:

1. Okno Kaisera.
2. Okno Dolpha-Czebyszewa.

Poprzez zmiany parametrów okien (prócz rozmiaru) można dokładniej wpływać na charakterystykę filtra w każdym z rozpatrywanych pasm.

## Okno Kaisera

Okno Kaisera jest zdefiniowane w następujący sposób:

$$w(n) = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1 - \left(\frac{n}{N}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, \qquad -N \leqslant n \leqslant N$$

gdzie:

$\beta$ - stała wpływająca na kształt okna

$I_0(i)$ - zmodyfikowana funkcja Bessela zerowego rzędu

## Okno Kaisera

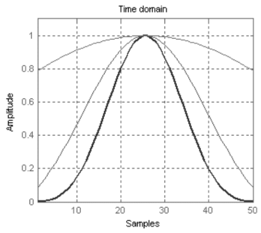
Zmodyfikowana funkcja Bessla zerowego rzędu stosowana często w praktyce jest aproksymowana zależnością:

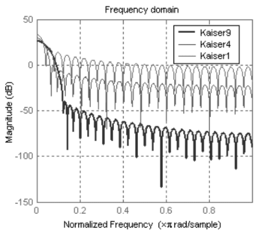
$$I_0(i) \cong 1 + \sum_{p=1}^{20}\left[\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^p}{p!}\right]^2$$

Dla funkcji tej zachodzi $I_0(i) > 0$ gdy $i > 0$.

W przypadku zastosowania okna Kaisera do wyznaczania charakterystyki częstotliwościowej parametr $\beta$ wpływa na minimalny poziom tłumienia w paśmie zaporowym.

## Okno Kaisera




## Okno Dolpha-Czebyszewa

Okno to jest zdefiniowane przez funkcję postaci:

$$w(n) = \frac{1}{2N+1}\left[\frac{1}{\gamma} + 2\sum_{i=1}^{N} T_i\left(\beta\cos\frac{i}{2N+1}\right)\cos\frac{2ni\pi}{2N+1}\right]$$

gdzie:

$\beta = \cosh\left(\frac{1}{2N}\cosh^{-1}\frac{1}{\gamma}\right)$

$-N \leqslant n \leqslant N$

$$T_i(x) = \begin{cases} \cos(i\cos^{-1}x) & , \quad |x| \leqslant 1 \\ \cosh(i\cosh^{-1}x) & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

$T_i(x)$ - postać trygonometryczna wielomianu Czebyszewa

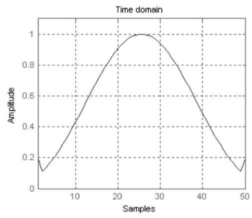
## Okno Dolpha-Czebyszewa

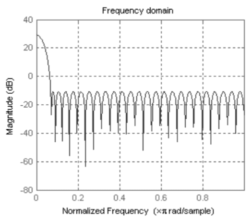
Parametr $\gamma$ określa stosunek amplitudy listków bocznych do amplitudy listka głównego. Możliwe jest więc wpływanie na stopień tłumienia/wzmocnienia w paśmie zaporowym.

Szerokość listka głównego ustalana jest na podstawie liczby współczynników filtra. Dla określonej liczby współczynników okno to umożliwia uzyskanie filtra dla którego występuje najmniejsza szerokość listka głównego w porównaniu do innych okien zapewniając dzięki temu najwęższe pasmo przejściowe.

Wszystkie listki boczne w charakterystyce częstotliwościowej posiadają taką samą wysokość zapewniając jednakowe tłumienie w paśmie zaporowym.

## Okno Dolpha-Czebyszewa




## Inne metody projektowania filtrów FIR

- Metoda optymalizacji średniokwadratowej
- Metoda próbkowania w dziedzinie częstotliwości
- Algorytm Parksa-McClellana (metoda Remeza)

## Konwersja typów filtrów

Prezentowane dotychczas przykłady prezentowały charakterystyki częstotliwościowe filtrów dolnoprzepustowych. Uzyskane w procesie projektowania wartości współczynników można poddać określonym przekształceniom w celu uzyskania docelowych własności częstotliwościowych.

Wykorzystuje się w tym celu najczęściej dwa podejścia:

- Zastosowanie własności liniowych systemów niezmiennych w czasie
- Użycie twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości dla przekształcenia Fouriera

## Twierdzenie o przesunięciu w częstotliwości

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$
$$x(t)e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(\omega + \omega_0)$$

$$\Downarrow$$

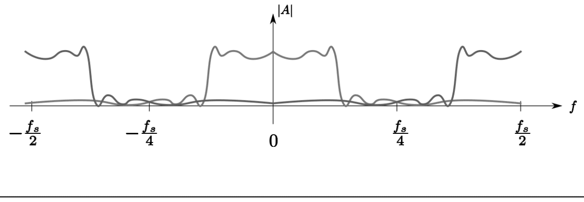
$$x(t)\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)\right]$$
$$x(t)\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2j}\left[X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)\right]$$

## Konwersja filtrów - filtr HP

Mając wyznaczone dyskretne próbki filtru dolnoprzepustowego i wykorzystując twierdzenie o przesunięciu o określoną wartość $\omega_0$ można uzyskać pożądaną charakterystykę.

Zakładając, że sygnał filtrowany został spróbkowany z częstotliwością $f_s$ charakterystykę filtra górnoprzepustowego można uzyskać przez wymnożenie współczynników filtra LP z tonem prostym o częstotliwości $\frac{f_s}{2}$:

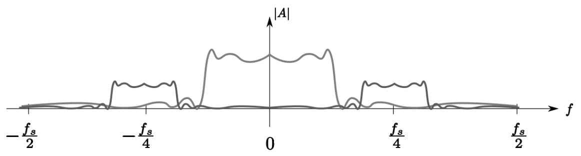
$$h_{HP}(n) = h_{LP}(n) \cdot \sin(\pi f_s n)$$



## Konwersja filtrów - filtr BP

Podobnie jak w poprzednim przypadku, dobierając wartość przesunięcią i odpowiednią szerokość listka głównego (liczbę próbek) można przekształcić filtr dolnoprzepustowy w filtr pasmowo przepustowy.
Zakładając częstotliwość środkową równą $\frac{f_s}{4}$ oraz szerokość jak dla filtru dolnoprzepustowego, tym razem współczynniki filtra należy przemnożyć przez sygnał sinusoidalny o częstotliwości $\frac{f_s}{4}$:

$$h_{BP}(n) = h_{LP}(n) \cdot \sin\left(\frac{\pi f_s n}{2}\right)$$




# Filtry IIR

## Filtr rekursywny

Filtr ze sprzężeniem zwrotnym (występuje wielomian mianownika transmitancji).

**Podstawowe cechy**:

- Możliwość uzyskania stromych charakterystyk amplitudowych w dziedzinie częstotliwości przy małej liczbie współczynników filtra.
- Nieliniowość charakterystyki fazowo-częstotliwościowej (modyfikacja kształtu sygnału w dziedzinie czasu po filtracji).
- Możliwość występowania niestabilności pracy powodujące wzbudzenia filtra (generacja zamiast filtracji).

## Filtr rekursywny

Postać ogólna filtru IIR (NOI):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K-1} b_k \cdot x(n-k) - \sum_{l=1}^{L-1} a_l \cdot y(n-l)$$

Odpowiedź filtru:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Uwzględniając powyższe zależności, odpowiedź w dziedzinie transformaty z przedstawia się następująco:

$$Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{K-1} b_k \cdot z^{-k}\right) H(z) - \left(\sum_{l=1}^{L-1} a_l \cdot z^{-l}\right) X(z)$$

## Filtr rekursywny

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_{K-1} z^{-(K-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{L-1} z^{-(L-1)}}$$

Uwzględniając właściwości transformaty z otrzymujemy ostatecznie:

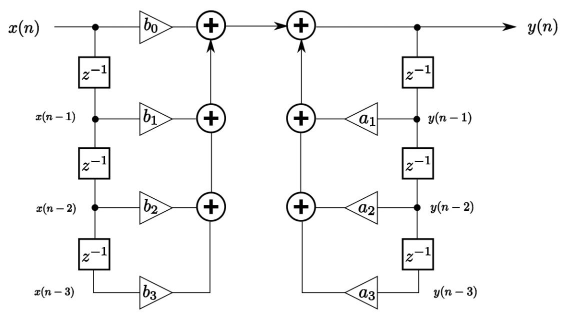
$$H(z) = \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \ldots (1 - z_{K-1} z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \ldots (1 - z_{L-1} z^{-1})}$$

gdzie:

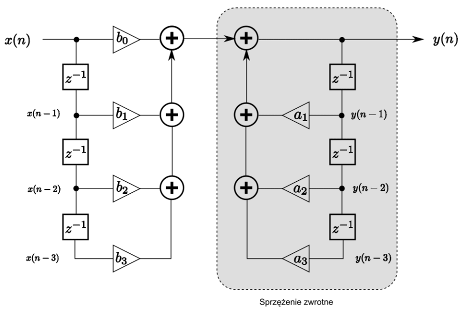
$z_i$ - zera wielomianu licznika (zera transmitancji)
$p_i$ - zera wielomianu mianownika (bieguny transmitancji)

Oznaczenia na płaszczyźnie zespolonej: "x" - biegun, "o" - zero

## Podstawowa struktura filtra IIR




## Podstawowa struktura filtra IIR




## Transformata z

Transformata $z$ wyraża się następującą zależnością:

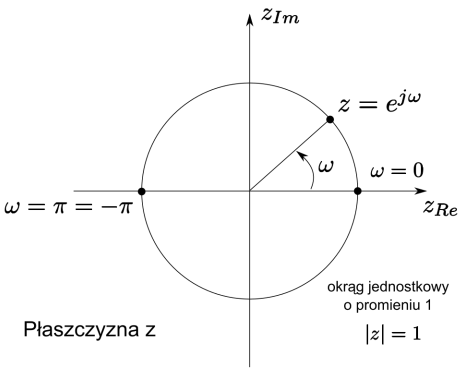
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

gdzie: $z$ - zmienna zespolona

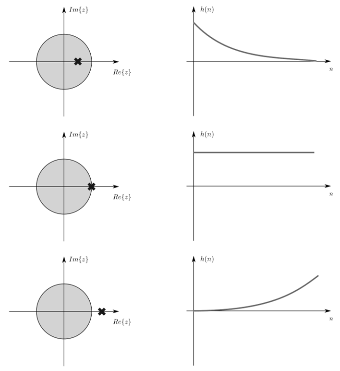
Związek transformaty $z$ z dziedziną częstotliwości można uzyskać dokonując podstawienia $z = re^{j\omega}$:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) r^{-n} (e^{-j\omega n})$$

## Płaszczyzna z




## Stabilność



## Metody projektowania filtrów rekursywnych

**Najczęściej w praktyce stosuje się następujące metody**:

- Wykorzystująca transformację biliniową
- Metoda zer i biegunów
- Minimalizacji błędu średniokwadratowego aproksymacji zadanej charakterystyki częstotliwościowej
- Dopasowanej transformaty $z$
- Niezmienności odpowiedzi impulsowej

## Transformacja biliniowa

W przypadku tej metody przyjmuje się założenie, że dla każdego filtra analogowego można skonstruować jego odpowiednik cyfrowy.

Transformacja odwzorozuje płaszczyznę $s$ w płaszczyznę $z$. Mechanizm ten pozwala na uproszczenie zastępowania funkcji zmiennej $s$ funkcją zmiennej $z$ przy przejściu z transmitancji $H(s)$ do transmitancji $H(z)$, bez potrzeby stosowania przekształcenia Lapalace'a i przekształcenia Z.

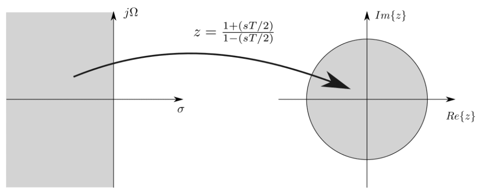
W wyniku zastosowania tej metody występuje nieliniowe zniekształcenie osi częstotliwości funkcji $H(z)$, względem oryginalnej osi częstotliwości dla analogowego prototypu filtra. Prowadzi to do uzyskania większego nachylenia charakterystyki w paśmie przejściowym.

## Transformacja biliniowa

Funkcję transmitancji $H(z)$ dyskretnego filtra IIR w dziedzinie transformaty $Z$ można otrzymać przez podstawienie za zmienną $s$ transmitancji analogowego prototypu filtra $H(s)$:

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

gdzie: $T$ jest okresem próbkowania filtra dyskretnego.




## Transformacja biliniowa – przykład

Rozważmy konwersję dolnoprzepustowego filtra analogowego Butterwortha drugiego rzędu do filtra cyfrowego. Częstotliwośc graniczna filtra wynosi 3000Hz, częstotliwość próbkowania 30kHz. Transmitancja rozpatrywanego filtra analogowego wyraża się następującą zależnością:

$$H_a(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

gdzie: $\omega_c = 6000\pi$. Okres próbkowania wynosi $T = \frac{1}{30000}$s.

Dokonujemy podstawienia $s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$ do transmitancji $H_a(s)$.

## Transformacja biliniowa – przykład

W wyniku podstawienia transmitancja $H(z)$ przyjmuje postać:

$$H(z) = \frac{\omega_c^2}{\left(\frac{2}{T}\right)^2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \sqrt{2}\omega_c\left(\frac{2}{T}\right)\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + \omega_c^2}$$

Po wykonaniu uproszczeń i przyjęciu, że $\omega_c T = \frac{6000\pi}{30000} = \frac{\pi}{5}$ otrzymujemy:

$$H(z) = \frac{0.063964 + 0.127929z^{-1} + 0.063964z^{-2}}{1 - 1.168261z^{-1} + 0.424119z^{-2}}$$

czyli współczynniki filtra IIR wynoszą odpowiednio:

$a_1 = -1.168261, a_2 = 0.424118$
$b_0 = 0.063964, b_1 = 0.127929, b_2 = 0.063964$

## Metoda zer i biegunów

W jaki sposób należy dobierać współczynniki transmitancji $H(z)$, aby uzyskać pożądane właściwości częstotliwościowe (amplitudowe i fazowe).

Związek częstotliwościowy transformaty $z$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Dokonujemy podstawienia: $z = e^{j\Omega}$, gdzie $\Omega = 2\pi\frac{f}{fs}$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

## Metoda zer i biegunów

Następnie określamy $H(z)$ dla określonej pulsacji znormalizowanej. W wyniku tego uzyskujemy informację w jaki sposób filtr przetworzy konkretną składową częstotliwościową:

- moduł ($|H(e^{j\Omega})|$) informuje o ile filtr wzmocni pulsację $\Omega$
- kąt ($\measuredangle H(e^{j\Omega})$) informuje o ile filtr przesunie w fazie pulsację $\Omega$

Wymnażając postać uogólnioną transmitancji jednocześnie przez $z^L$ i $z^K$ uzyskujemy:

$$H(z) = z^{L-K} \frac{b_0}{a_0} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_K)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_L)}$$

## Metoda zer i biegunów

Dokonując podstawienia za "z" i odnosząc do częstotliwości uzyskujemy:

$$H(e^{j\Omega}) = (e^{j\Omega})^{L-K} \frac{b_0}{a_0} \frac{(e^{j\Omega} - z_1)(e^{j\Omega} - z_2) \dots (e^{j\Omega} - z_K)}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2) \dots (e^{j\Omega} - p_L)}$$

Ze względu na to, że $e^{j\omega} - z_K$ oraz $e^{j\Omega} - p_L$ dla danej wartości $\Omega$ są liczbami zespolonymi reprezentującymi zarówno amplitudy jak i kąty:

$$e^{j\Omega} - z_K = B_K e^{j\alpha_K} \longrightarrow B_K = |e^{j\Omega} - z_K|, \quad \alpha_K = \measuredangle(e^{j\Omega} - z_K)$$

$$e^{j\Omega} - p_L = A_L e^{j\beta_L} \longrightarrow A_L = |e^{j\Omega} - p_L|, \quad \beta_K = \measuredangle(e^{j\Omega} - p_L)$$

## Metoda zer i biegunów

**Charakterystyki częstotliwościowe**:

1. Charakterystyka amplitudowa $S(\Omega)$

$$S(\Omega) = (e^{j\Omega})^{L-K} \frac{b_0}{a_0} \frac{B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_K}{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_L}$$

- Jeśli jedna z wartości $B$ się zeruje to moduł też wynosi zero czyli składowa jest tłumiona
- Jeśli jedna z wartości $A$ mieści się w zakresie (0,1) to moduł wzrasta czyli filtr wzmacnia składową

2. Charakterystyka fazowa $P(\Omega)$

$$P(\Omega) = \Omega(L - K) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_K) + (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_L)$$

## Metoda zer i biegunów

Określanie częstotliwości (położenie zera bądź bieguna) odbywa się z wykorzystaniem zależności:

$$f = \frac{\Omega f_s}{2\pi}$$

**Przy projektowaniu przyjmuje się następujące zasady**:

- Umieszczając zero transmitancji w pobliżu danej częstotliwości powodujemy tłumienie tej składowej
- Jeśli zero transmitancji leży dokładnie na okręgu to usuwa całkowicie składową
- Zbliżanie bieguna do okręgu od wewnątrz wzmacnia określoną składową
- Zera mogą być umieszczone w dowolnym miejscu, bieguny tylko wewnątrz okręgu
- Jeśli wszystkie zera i bieguny są zespolone to występują w parach sprzężonych

## Metoda zer i biegunów - przykład

Jako przykład zaprojektujmy filtr IIR, który będzie tłumił częstotliwość 185Hz, natomiast wzmacniał częstotliwości 350Hz i 500Hz. Zakładamy, że częstotliwość próbkowania sygnału wynosi 1000Hz.

Z założeń wynika, że zostanie wykorzystane jedno zero ($z_0$) i dwa bieguny ($p_0$, $p_1$):

$z = Ae^{j\phi_f} \longleftrightarrow A = 1$
$p = Ae^{j\phi_f} \longleftrightarrow A \approx 1 \rightarrow 0.97$
$\phi_f = \frac{2\pi f}{1000}$

$$z_0 = e^{j(2\pi \cdot 185)/1000} = e^{j1.162} \qquad (0.37\pi)$$
$$p_0 = e^{j(2\pi \cdot 350)/1000} = e^{j2.199} \Rightarrow 0.97e^{j2.199} \qquad (0.7\pi)$$
$$p_1 = e^{j(2\pi \cdot 500)/1000} = e^{j3.142} \Rightarrow 0.97e^{j3.142} \qquad (\pi)$$

## Metoda zer i biegunów - przykład

Uzyskane wartości zer i biegunów są liczbami zespolonymi, więc stosujemy sprzężenia. Ogólna postać transmitancji dla rozpatrywanego przypadku jest postaci:

$$H(z) = \frac{(1 - z_0 z^{-1})(1 - z_0^* z^{-1})}{(1 - p_0 z^{-1})(1 - p_0^* z^{-1})(1 - p_1 z^{-1})(1 - p1^* z^{-1})}$$

Po wymnożeniu i redukcji uzyskujemy:

$$H(z) = \frac{1 - 0.7942z^{-1} + z^{-2}}{1 + 3.343z^{-1} + 4.094z^{-2} + 2.8982z^{-3} + 0.8853z^{-4}}$$

## Metoda zer i biegunów - przykład

Uwzględniając zależność $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ możemy zapisać:

$$(1 + 3.343z^{-1} + 4.094z^{-2} + 2.8982z^{-3} + 0.8853z^{-4})Y(z)$$
$$= (1 - 0.7942z^{-1} + z^{-2})X(z)$$

ostatecznie zależność opisująca filtrację w dziedzinie czasu dla próbek dyskretnych przyjmuje postać:

$$y(n) = x(n) - 0.7942x(n-1) + x(n-2) -$$
$$-3.343y(n-1) - 4.094y(n-2) - 2.8982y(n-3) - 0.8853y(n-4)$$

## Cechy filtrów IIR

- Transmitancję filtrów rekursywnych można opisać przy pomocy zer, biegunów i wzmocnienia.
- W filtrach IIR opóźnienie grupowe zależy od częstotliwości.
- Filtry IIR stanowią cyfrowy odpowiednik filtrów analogowych.
- W procesie filtracji filtrami rekursywnymi kumulują się błędy numeryczne, które zniekształcają jego charakterystykę i mogą być przyczyną niestabilności.
- Warunek stabilności: moduł wszystkich biegunów musi być mniejszy od 1.
- W procesie projektowania korzysta się z technik projektowania filtrów analogowych i stosuje się przekształcenia do postaci filtrów cyfrowych.