Amsterdam University of Applied Sciences

Całkowanie w przestrzeni trójwymiarowej

Matematyka obliczeniowa

Karol Działowski, Wojciech Olejnik, Tymoteusz Skórka

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
03 Czerwiec 2020

Streszczenie

Poniższa praca dotyczy zagadnienia całkowania numerycznego z wykorzystaniem metody prostokątów, oraz metody Monte Carlo. Obie metody zostały opisane, zaimplementowane oraz zastosowane do wykonania zadania polegającego na obliczeniu przybliżonej objętości bryły. Na potrzeby projektu stworzony został interfejs graficzny umożliwiający podstawową obsługę aplikacji. W pracy umieszczone zostały wyniki uzyskane poszczególnymi metodami wraz z ich interpretacją.

Słowa kluczowe: całkowanie numeryczne, metoda prostokątów, metoda Monte Carlo, matematyka obliczeniowa

---

Wstęp

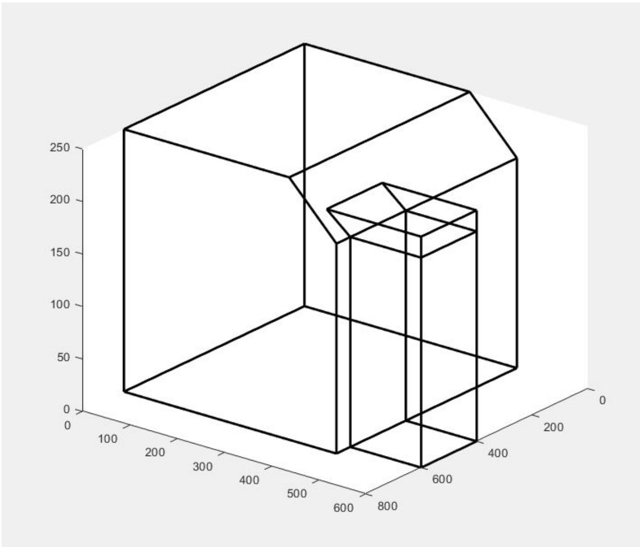
Całkowanie numeryczne to metody polegające na przybliżonym obliczaniu całek oznaczonych. Metody te są wykorzystywane gdy znane są wartości funkcji tylko w danych punktach, najczęściej jako efekt próbkowania. Innym przykładem wykorzystania całkowania numerycznego jest sytuacja gdy funkcja jest znana ale może być trudna lub niemożliwa do obliczenia symbolicznie i szybsze będzie obliczenie numeryczne. W odniesieniu do całek dwuwymiarowych zamiast terminu całkowanie możemy używać terminu kubatura.

Celem tego projektu była implementacja aplikacji obliczającej objętość bryły przybliżonej kształtem do wybranej sali. Jako że nie mogliśmy dokonać pomiarów sali to dobraliśmy wymiary na podstawie rysunku z treści zadania. Przybliżone objętości tej bryły zostały obliczone za pomocą metody prostokątów oraz metody Monte Carlo.

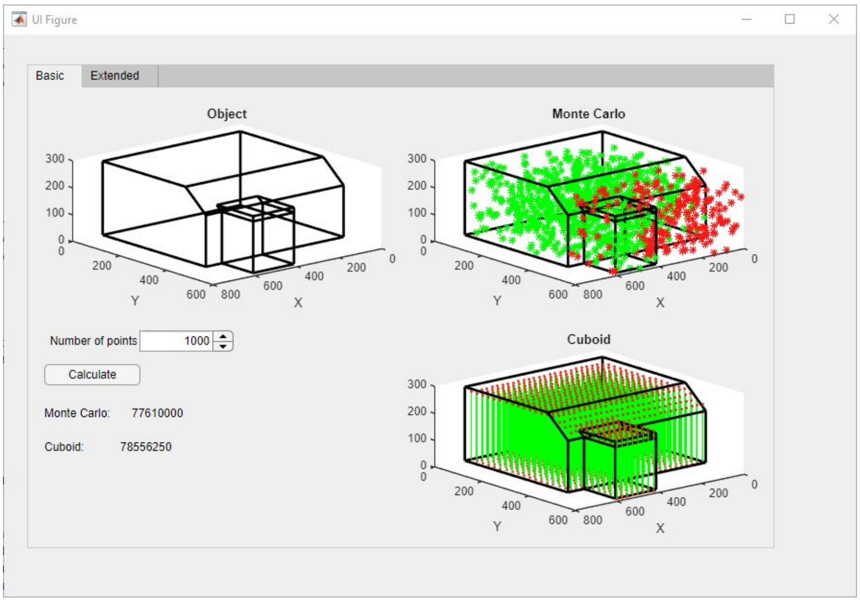
Zadanie rozszerzone polegało na implementacji aplikacji do obliczania objętości dowolnej bryły. W tym celu wykorzystano gotowe rozwiązania dostępne w repozytorium Matlaba, które zostaną przybliżone w dalszych rozdziałach. Dla obu aplikacji zaimplementowano interfejs graficzny spełniający podstawowe funkcjonalności.

Zadanie podstawowe

Do zadania pierwszego stworzono model sali wzorując się na rysunku zamieszczonym w treści instrukcji zadania. Wymiary dobrano arbitralnie, nie reprezentują one faktycznej sali, ale po przeprowadzeniu pomiarów można w prosty sposób je podmienić. Poniżej przedstawiono rysunek prezentujący szkielet sali. W dalszej części zadania przeprowadzono obliczenia objętości bryły za pomocą metody prostokątów oraz metody Monte Carlo.



Rysunek 1: Bryła będąca imitacją sali z budynku WI1.



Rysunek 2: Zaimplementowany interfejs graficzny do zadania 1.

Metoda prostokątów

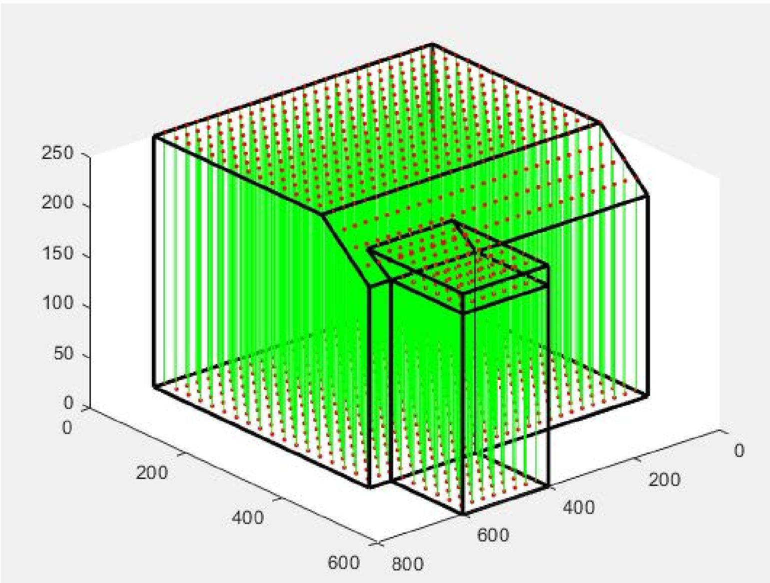
Opis metody:

Metoda prostokątów w kontekście obliczania wartości całki oznaczonej polega na podzieleniu przedziału całkowania na *n* równych interwałów. Każdy interwał jest z góry ograniczony pewną krzywą (w przypadku całki jest to funkcja, którą chcemy poddać całkowaniu). Dla każdego interwału należy wyznaczyć jego środek i obliczyć wartość funkcji dla niego. Przybliżone pole pod krzywą dla danego interwału można opisać jako iloczyn długości interwału i wartości funkcji w jego środku. Przybliżona wartość całki na zadanym przedziale to suma pól wszystkich interwałów. W przypadku tego projektu należy zastosować metodę prostokątów w przestrzeni prostopadłościanów do obliczenia objętości bryły, której ściany są figurami płaskimi. Oznacza to, że przedział całkowania dotyczy osi *x* oraz *y*, a krzywa ograniczająca to górne ściany bryły.

Działanie metody;

1. Wczytanie modelu bryły, który jest maksymalny przedziałem w przestrzeni trójwymiarowej, na podstawie którego będziemy szukać punktów losowych.
2. Podzielenie bryły na interwały względem osi x, oraz y.
3. Dla każdego interwału wyznaczana jest jego wysokość reprezentowana przez zielony słupek na wykresie.
4. Sumowanie wszystkich wysokości.
5. Przybliżona objętość bryły wyznaczana jest jako *(długość interwału)^2 * suma wysokości.*

Wynik działania :



Rysunek 3: Podział bryły na graniastosłupy w metodzie prostokątów.

Obliczona objętość wyniosła 78 556 250.

Metoda Monte Carlo

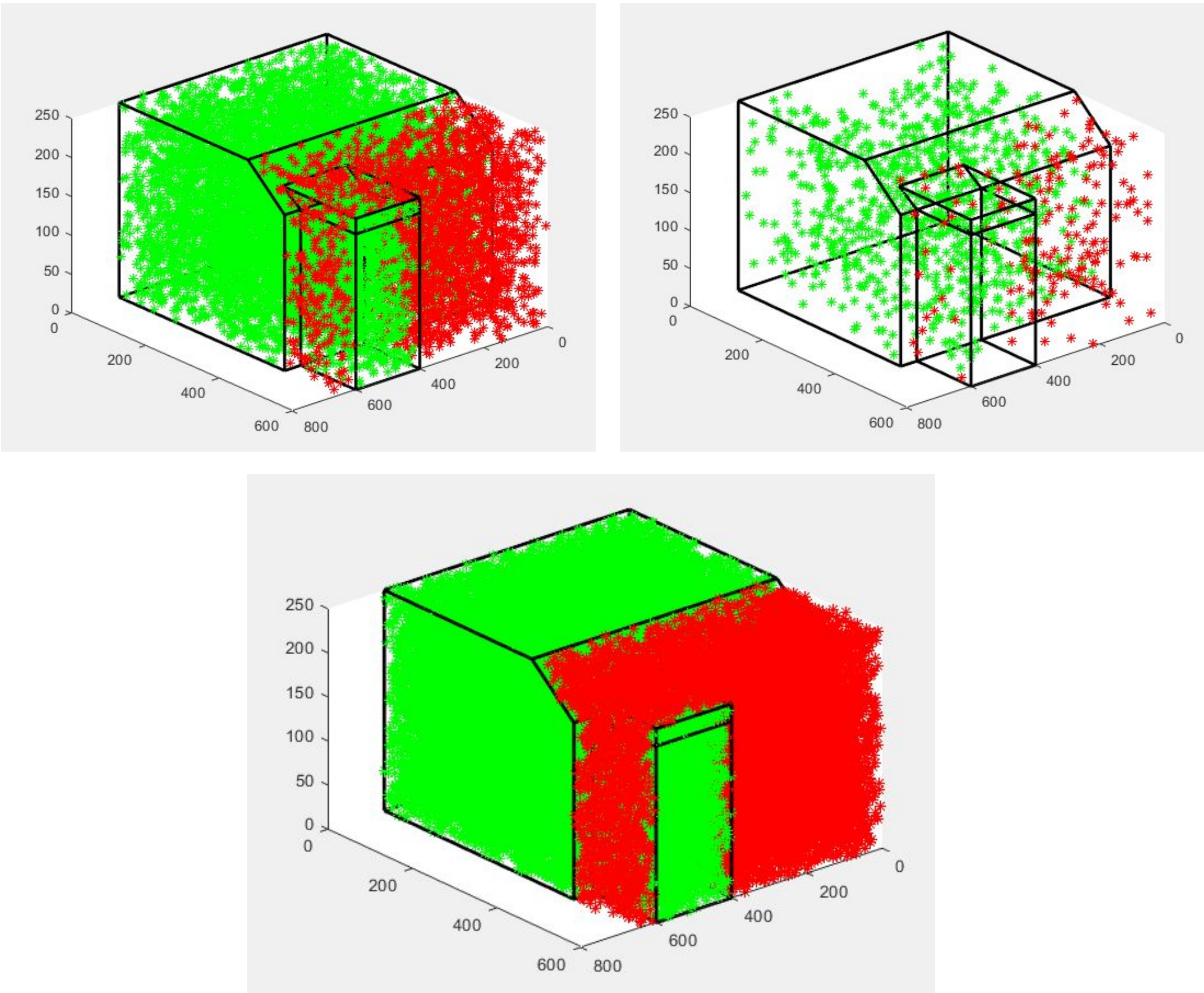
Opis metody:

Metoda Monte Carlo to numeryczny sposób rozwiązywania problemów, który jest stosowany do obliczania i modelowania matematycznych procesów, aby można było przewidzieć ich wyniki za pomocą podejścia analitycznego. Metoda ta polega na generowaniu punktów pseudolosowych i umieszcza ich w odpowiednim przedziale w przestrzeni. Zwiększona liczba próbek nie musimy koniecznie prowadzić do uzyskania lepszego wyniku. Zaletą tej metody jest szybkość obliczeń, a wadą jest jest dokładność, którą możemy poprawić w zależności od użytego generatora próbek. Poprawność metody Monte Carlo w przypadku obliczania całek można udowodnić, za pomocą twierdzenia Picka, które mówi o obliczaniu pola powierzchni wielokąta, którego punkty rozmieszczone są na płaszczyźnie.

Działanie metody;

1. Wczytanie modelu bryły, który jest maksymalny przedziałem w przestrzeni trójwymiarowej, na podstawie którego będziemy szukać punktów losowych
2. Ustalona jest liczba próbek i generowanie ich współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej
3. Następnie określamy czy poszczególne strzały są "trafione", czyli czy mieszczą się w przestrzeni bryły
4. Na końcu obliczana jest objętość bryły

Wynik działania :



Rysunek 4: Działanie metody Monte Carlo dla 10000 próbek (lewo) i 1000 próbek (prawo) i 50000 próbek (dół).

Na powyższym rysunki przedstawiono działanie metody Monte Carlo. Dla 10000 próbek objętość bryły wyniosła 78 263 250, dla 1000 próbek objętość wyniosła 81 120 000, dla 50000 próbek objętość wyniosła 78 103 350.

Wyniki

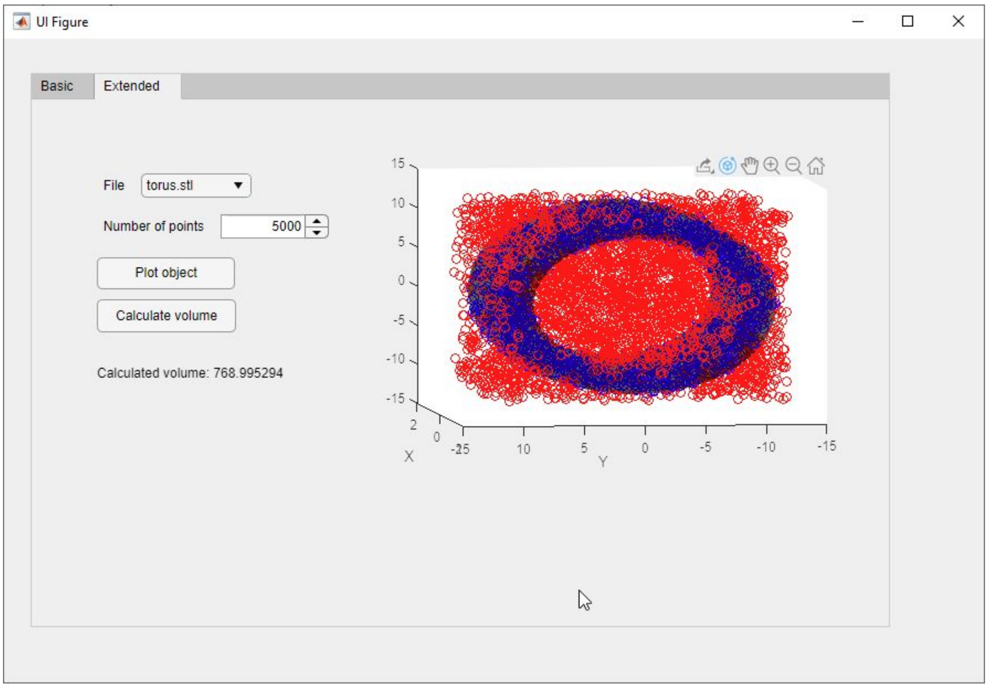
Tabela 1: Wyniki uzyskane metodą prostokątów oraz Monte Carlo z różną ilością próbek.

Metoda	Prostokątów	Monte Carlo (50000)	Monte Carlo (10000)	Monte Carlo (1000)
Objętość	78556250	78103350	78263250	81120000

Zarówno metoda prostokątów jak i metoda Monte Carlo nie są metodami dokładnymi, dlatego widać pewną rozbieżność w wynikach, jednak uzyskane objętości są tego samego rzędu. W metodzie prostokątów dokładność wyniku zależy od tego, na ile prostopadłościanów została podzielona bryła, natomiast w metodzie Monte Carlo od ilości, oraz dokładności próbek. Należy jednak pamiętać, że większa ilość prostopadłościanów, oraz próbek skutkuje dłuższym czasem obliczeń.

Zadanie rozszerzone

Zadanie rozszerzone polegało na stworzeniu uniwersalnej aplikacji do obliczania objętości dowolnej bryły przy wykorzystaniu metody Monte Carlo. Kluczowym problemem jaki należało rozwiązać było określenie czy wylosowany punkt należy do bryły.



Rysunek 5: Prezentacja interfejsu użytkownika zadania rozszerzonego.

Wczytywanie brył

Do obsługi brył wykorzystywane są pliki w formacie stl. Format ten ma formę tekstowych poleceń, które określają siatkę wielokątów. Siatka wielokątów to dwa lub więcej wielokątów połączonych ze sobą krawędziami. Zwykle takie siatki tworzone są z najprostszych figur geometrycznych takich jak trójkąty.

Czytanie pliku stl do macierzy reprezentujących ściany i wierzchołki bryły wykorzystano gotowe rozwiązanie STL File Reader dostępne na platformie File Exchange. Tak wczytane dane służą do wyświetlania bryły oraz określania czy wylosowane punkty znajdują się w bryle.

Określanie czy punkt należy do bryły

W metodzie Monte Carlo losowane są losowe punkty z przedziału ograniczającego bryłę. Każdy losowy punkt jest sprawdzany czy należy do figury.

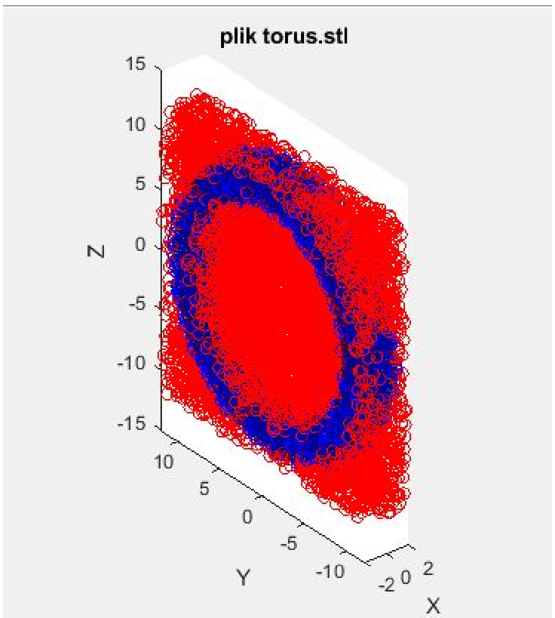
Do sprawdzenia czy losowany punkt należy do figury również wykorzystano gotowe rozwiązania pod nazwą inpolyhedron - are points inside a triangulated volume? Dostępne na platformie MathWorks File Exchange.

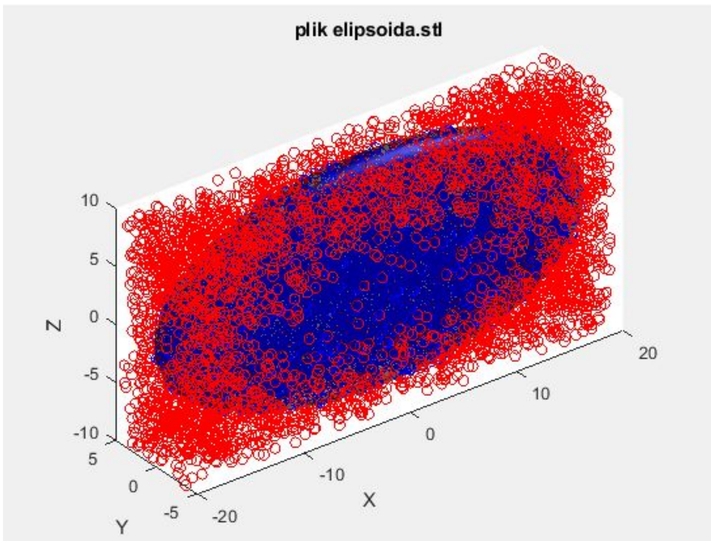
Zaimplementowany algorytm działa następująco:
Dla każdego punktu:

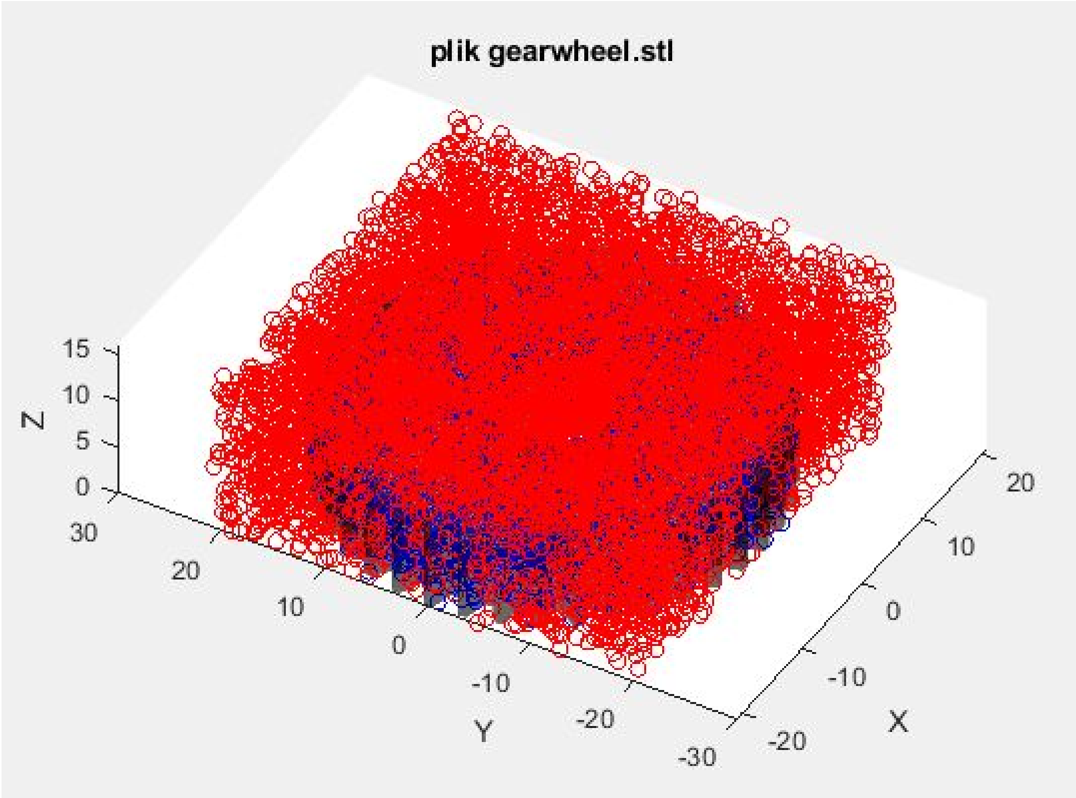
1) Wystrzej losowy promień z testowanego punktu w dowolnym kierunku. Promień $R(t)$ z źródłem w O i znormalizowanym kierunkiem D zdefiniowany jest jako $R(t) = O + tD$
2) Dla każdej ściany bryły oblicz: $M \cdot [t, u, v]^T = (O - v_0)$, co daje współrzędne barycentryczne (u, v) oraz dystans t od źródła promienia do przecięcia z ścianą. Promień i ściana się przecinają gdy obliczone współrzędne i dystans są dodatnie.
3) Policz liczbę przecięć promienia z ścianami.
4) Nieparzysta liczba przecięć oznacza że punkt jest wewnątrz bryły, parzysta że nie należy do bryły.
5) W przypadku gdy promień trafi na krawędź to wylosuj nowy promień.

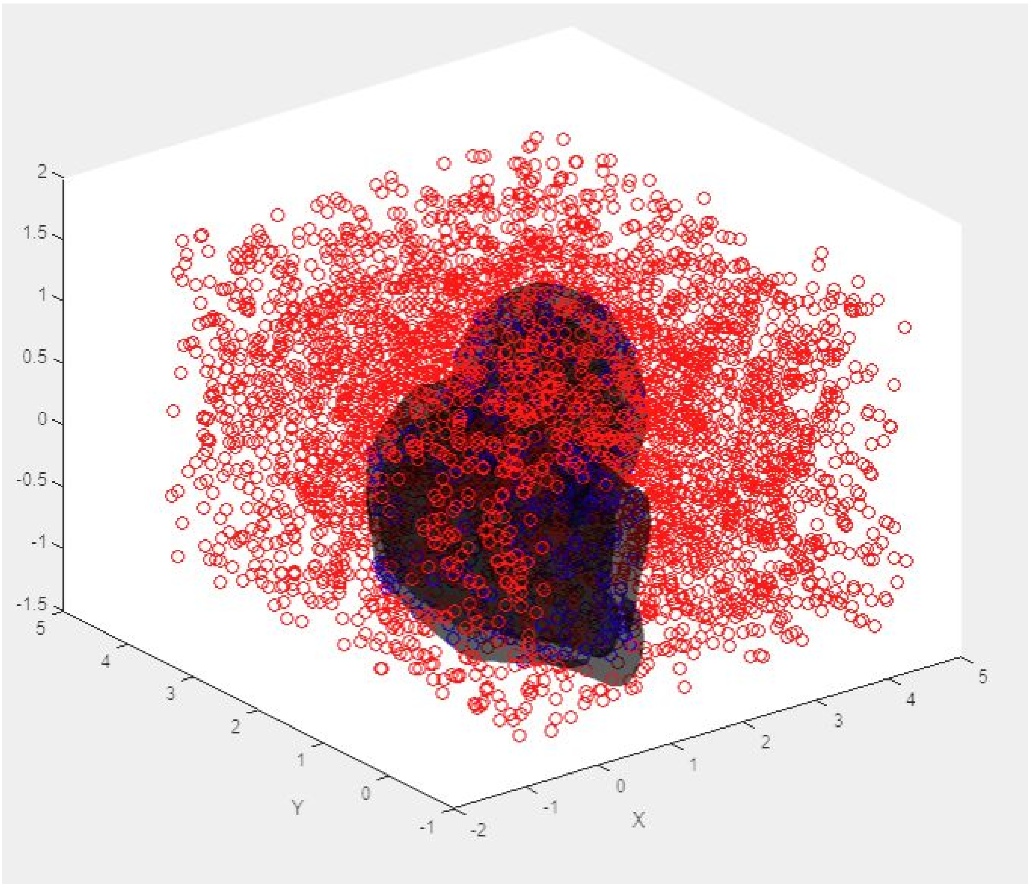
Działanie programu

Program wyświetla obliczoną objętość w interfejsie użytkownika. Poniżej przedstawiono badane bryły.






plik gearwheel.stl
Z
15
10
5
0
30
20
10
0
-10
-20
-30
Y
20
10
0
-10
-20
X


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
5
4
3
2
1
0
-1
Y
-2
-1
0
1
2
3
4
5
X

Wnioski

Przeprowadzone testy aplikacji wskazują na prawidłowe działanie uniwersalnej metody Monte Carlo. Sprawdzono osiągane wyniki na prostych figurach geometrycznych takich jak kula czy stożek. Zaimplementowany interfejs graficzny pozwala na zmianę liczby losowanych próbek oraz wybór bryły wejściowej.

Literatura

- Eric Johnson (2020). STL File Reader (https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22409-stl-file-reader), MATLAB Central File Exchange. Retrieved June 2, 2020.
- Sven (2020). inpolyhedron - are points inside a triangulated volume? (https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37856-inpolyhedron-are-points-inside-a-triangulated-volume), MATLAB Central File Exchange. Retrieved June 2, 2020.
- "Fast, minimum storage ray-triangle intersection". Tomas Möller and Ben Trumbore. Journal of Graphics Tools, 2(1):21--28, 1997. http://www.graphics.cornell.edu/pubs/1997/MT97.pdf