Matematyka obliczeniowa – układy równań nieliniowych

1) Napisz program, który pozwoli na rozwiązanie dowolnych układów dwóch równań nieliniowych metodą Newtona. Dobierz odpowiednie warunki początkowe, zapewniające zbieżność metody. Testowe układy równań:

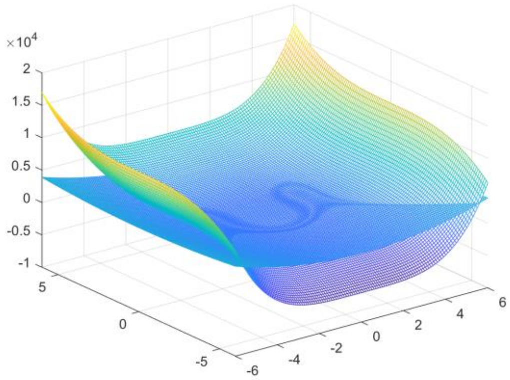
   Układ nr 1

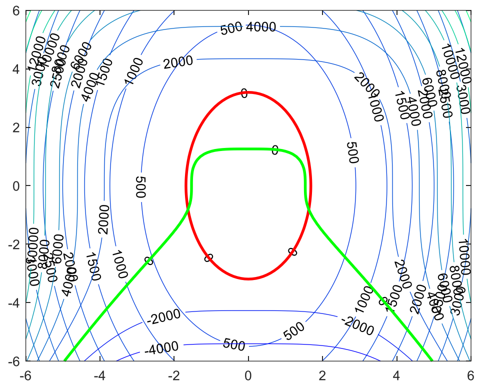
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^3 y^2 = 1 \end{cases}$$ zakres zmiennych: $x = (0.5{,}3)$, $y = (-3{,}3)$

   Układ nr 2

   $$\begin{cases} 90x^2 + 25y^2 - 225 = 0 \\ 9x^4 + 25y^3 - 50 = 0 \end{cases}$$ zakres zmiennych: $x = (-6{,}6)$, $y = (-6{,}6)$

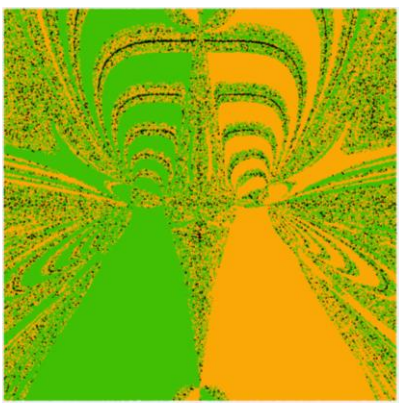
2) Wygeneruj wykres 3D i wykres poziomicowy dla rozpatrywanych układów równań. Na wykresie poziomicowym umieść obie funkcje oraz zaznacz znalezione pierwiastki. Wyróżnij poziomice o wartości funkcji równej zero. Przykład na rysunkach poniżej.





3) Zbadaj jak zmiana punktu startowego wpływa na rozwiązanie układu równań. Znajdź punkty startowe, dla których algorytm znajduje rozwiązania oraz takie, dla których nie działa.

4) **Zadanie dodatkowe.** Dokonaj klasyfikacji punktów startowych ze względu na wynik działania algorytmu. Przedstaw graficznie wynik klasyfikacji (przykład poniżej).



Algorytm Newtona:

1. obliczenie wartości funkcji i macierzy J w aktualnym punkcie,

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

2. rozwiązanie układu równań liniowych $J(x^{(k)}) \cdot d^{(k)} = f(x^{(k)})$ w celu wyznaczenia $d^{(k)}$
3. wyznaczenie kolejnego oszacowania rozwiązania $x^{(k+1)} = x^{(k)} - d^{(k)}$

Przyda się:

- numeryczne obliczanie pochodnej, h – bardzo mała liczba

$$dfx = \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h}$$

$$dfy = \frac{f(x, y+h) - f(x, y-h)}{2h}$$

- definiowanie funkcji dwóch zmiennych

```
f = @(x,y) x^2-y^2
```

- tworzenie wykresu poziomicowego - polecenie `contour()`