Kombinatorické struktury

prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

4. července 2021

Obsah

1 Konečné/Afinní projektivní roviny

Definice 1.1 (Množinový systém). Nechť X, I jsou množiny. Pak

$$\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}, \forall i \in I : M_i \subseteq X$$

nazveme množinovým systémem.
Kromě množinového zápisu a *Vennova diagramu* také můžeme incidenci značit incidenční maticí $A_{\mathcal{M}} \in \{0,1\}^{X \times I}$, kde $A_{x,i} = 1$, právě když $x \in M_i$. Alternativou je také bipartitní graf incidence, který definujeme jako

$$B_{\mathcal{M}} = (X \cup I, \{\{x, i\} : x \in M_i\})$$

Definice 1.2 (Konečná projektivní rovina). Konečná projektivní rovina (KPR) je množinový systém $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$ splňující následující axiomy:

(A1) Pro každé dvě různé množiny $A, B \in \mathcal{L}$ platí $|A \cap B| = 1$

(A2) Pro každé dva různé prvky $x, y \in X$ existuje $A \in \mathcal{L}$ taková, že $x, y \in A$

(A3) V X existují čtyři prvky tak, že žádné tři z nich nepatří do stejné množiny z $\mathcal{L}$.

Je zvykem prvkům množiny X říkat body a množinám z $\mathcal{L}$ přímky.

Poznámka 1.3 (Každé dva body v KPR sdílejí právě jednu přímku). Pokud $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$ splňuje A1 a A2, pak každé dva různé body $x, y \in X$ náležejí právě jedné společné přímce.

Důkaz. Mějme $x, y \in X$ různé. Z A2 máme, že existuje alespoň jedna $A \in \mathcal{L}$ taková, že $x, y \in A$. Pro spor předpokládejme, že existuje i odlišná $B \in \mathcal{L}$ taková, že $x, y \in B$. Pak přímky A a B nesplňují A1, neboť $A \cap B \supset \{x, y\}$, a tedy $|A \cap B| \geq 2$, což je spor. □

Poznámka 1.4 (O ekvivalentním axiomu ke čtveřici v KPR). Pokud systém $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$ splňuje A1 a A2, pak A3 je ekvivalentní axiomu

(A3') Body systému $\mathcal{P}$ nemohou být pokryty jednou nebo dvěma přímkami z $\mathcal{L}$.

Důkaz. TODO □

Věta 1.5 (O řádu KPR). *Pro každou KPR $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$ existuje přirozené číslo m takové, že*

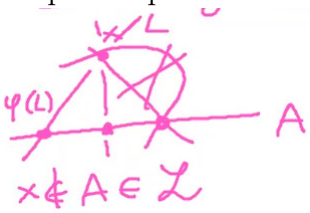
- $\forall A \in \mathcal{L} : |A| = m + 1$
- $\forall x \in X : |\{A \in \mathcal{L} : x \in A\}| = m + 1$
- $|X| = |\mathcal{L}| = m^2 + m + 1$

*Toto číslo m nazýváme **řádem roviny** $\mathcal{P}$ a můžeme psát KPR(m) pro konečnou projektivní rovinu řádu m.*

Důkaz. Vezmeme $x \notin A \in \mathcal{L}$. Definujme zobrazení které přiřazuje bod z přímky L bod na A:

$$\varphi : \{L : x \in L \in \mathcal{L}\} \to A$$

Neboli $\varphi(L)$ je průsečík s přímkou A (právě jeden společný bod). Různým přímkám přiřadí různé body. Nechť sporem existují 2 přímky kterým φ přiřadilo stejný bod, pak mají alespoň 2 společné body. Spor s axiomem A1 definition 1.2. Proto φ je prosté.



Na druhou stranu, každý bod A protíná ještě nějaká přímka $\Rightarrow \varphi$ je na. Neboli φ je bijekce.
Vezmeme 2 přímky A, B. Dle A3 nemůže pokrývat celou KPR.

$$\exists y : y \notin A \wedge y \notin B$$

Jelikož φ je bijekce

$$|A| = \#\text{ přímek procházejících } y = |B|$$

Dohromady

$$\exists m : \forall A \in \mathcal{L} : |A| = m+1$$

Nechť $A \in \mathcal{L}$ libovolná přímka, má $(m+1)$ bodů. Dal bodem $v \in A$ prochází dalších m přímek, pro nichž v je jediným společným bodem, ostatní jsou různé. Nazveme je vodorovné. Každá z nich má dalších $(m+1)-1 = m$ bodů, dohromady m^2. Vezmeme další bod $s \in A$. Tím prochází dalších m přímek a musí protínat vodorovné právě v 1 bodě. Říkáme jim svislé. Z ostatních bodů A taky vychází svazek m přímek, další body již ale nejsou.
Tedy celkem $|X| = |\mathcal{L}| = m^2 + m + 1$ bodů a $|\mathcal{L}| = 1 + m(m+1)$ přímek.
Kanonický obrázek KPR:
"Přímky"se nerovnají geometrickým přímkám, jen mnemonický název. □

Věta 1.6 (Existence KPR). *Je-li $m = p^r$ mocnina prvočísla, pak existuje KPR(m).*

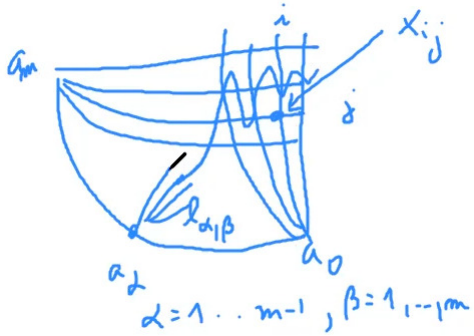
Důkaz. Konstruktivně pomoci mod aritmetiky. Z algebry $\exists GF(m)$ napíšeme jako

$$\{1, \ldots, m = 0\}$$

Nechť $A = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ je přímka. Označme svazek přímek vycházející z bodu a_k:

$$\forall k \in \{0, \ldots, m-1\}, \forall b \in [m] : l_{k,b} = \{a_k\} \cup \{x_{i,k\cdot i+b} : i \in [m]\} \tag{1}$$

kde $x_{i,j}$ je bod se souřadnice (i, j) v šachovnice.



Šikmé přímky taky lze vyjádřit pomoci vzorečku (1):

$$\forall b \in [m] : l_{m,b} = \{a_m\} \cup \{x_{i,m\cdot i+b=b} : i \in [m]\}$$

Ověříme axiomy definition 1.2:

(A1) Rozborem případů:

1. přímky ze stejného svazku dle jednoznačnosti aritmetiky modulo v tělese mají společný prvek pouze a_k.
2. Stejně pro šikmé přímky, protože je lze stejně vyjádřit.
3. Jednobodový průnik přímek ze svazku a vodorovných zaručuje jednoznačný bod $x_{i,j}$.
4. Potřebujeme ukázat

   $$\forall k_1 \neq k_2, \forall b_1, b_2 : |l_{k_1,b_1}, l_{k_2,b_2}| = 1$$

   Dle definice přímek ze svazku bod v průniku má souřadnice:

   $$x_{i,j} = x_{i,k_1\cdot i+b_1} = x_{i,k_2\cdot i+b_2} \Rightarrow k_1 \cdot i + b_1 = k_2 \cdot i + b_2 \iff i = (b_1 - b_2)\cdot(k_2 - k_1)^{-1}$$

   Z vlastnosti konečného tělesa, takové i je jednoznačné.

(A2) Není potřeba ukazovat rozborem případu. Stačí sečíst dvěma způsoby

$$C = |\{((x,y),A) : x,y \in A, x \neq y, A \in \mathcal{L}\}|$$

máme $(m+1)$ přímek a $\binom{m+1}{2}$ způsobů zvolit body. Taky ale z A1 2 body spojuje nejvýše 1 přímka, proto $\binom{m^2+m+1}{2} \geq C$ Dohromady

$$\binom{m^2+m+1}{2} = (m^2+m+1)m(m+1) \geq C = (m+1)\cdot\binom{m+1}{2} = (m^2+m+1)m(m+1)$$

Z rovnosti usoudíme, že každé dvojice odpovídá právě jedna přímka.

(A3) TODO z konstrukce?

□

Conjecture 1.7. *KPR(m) existuje, právě když m je mocnina prvočísla*

Věta 1.8 (KPR(6), Dk později). *KPR(6) neexistuje.*

Poznámka 1.9. KPR(10) neexistuje, ale jediný známý důkaz je počítačovým rozborem případů.
Neznáme žádnou KPR s řádem rozdílným od mocniny prvočísla. Zároveň však známe nekonečně mnoho m takových, že KPR(m) neexistuje. Nejmenší otevřený případ je $m = 12$.

Definice 1.10 (Konečná afinní rovina). Konečná afinní rovina (KAR) je množinový systém $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$ splňující následující axiomy:

(AF1) Pro každé dva různé prvky $x, y \in X$ existuje právě jedna množina $A \in \mathcal{L}$ taková, že $x, y \in A$

(AF2) Pro každou množinu $A \in \mathcal{L}$ a každý prvek $x \in X$ nenáležící do A existuje právě jedna množina $B \in \mathcal{L}$ taková, že $x \in B$ a $A \cap B = \emptyset$

(AF3) V X existují tři prvky, které nepatří do stejné množiny z $\mathcal{L}$

Prvkům množiny X říkáme body, množinám z $\mathcal{L}$ říkáme přímky, dvě množiny s prázdným průnikem jsou rovnoběžky a dvě množiny s neprázdným průnikem jsou různoběžky.

Poznámka 1.11 (O relaci rovnoběžnosti a směrech). Rovnoběžnost přímek v KAR je tranzitivní a symetrická relace na $\mathcal{L}$. Její reflexivní zúplnění je tedy ekvivalence a $\mathcal{L}$ se tedy rozpadá na několik tříd ekvivalence. Těmto třídám říkáme směry. Přímky různých směrů jsou různoběžné.

Q: co když přímky husté?
Q: co když slepíme směry dle ekvivalence?
A: Jak slepit? Neporuší to axiomy?
Q: souvisí KAR s hyperbolickou geometrii Lobačevského?
A: ano, ale nevíme co dříve.

Věta 1.12 (O řádu KAR). *Pro každou KAR $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$ existuje $m \in \mathbb{N}$ (nazývané řád roviny $\mathcal{P}$) takové, že:*

- $\forall a \in \mathcal{L} : |A| = m$
- $\forall x \in X : |\{A \in \mathcal{L} : x \in A\}| = m+1$
- $|X| = m^2$
- $|\mathcal{L}| = m^2 + m$
- *počet směrů přímek je $m+1$, přičemž každý směr obsahuje m rovnoběžných přímek*

Důkaz. Vezmeme $x \notin A \in \mathcal{L}$. Definujme zobrazení které přiřazuje bod z přímky L bod na A:

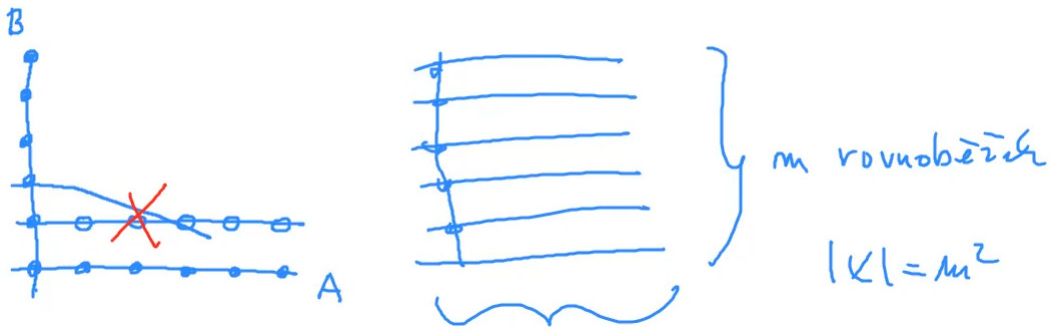
$$\varphi(L) = L \cap A, \varphi : \{L : x \in L \in \mathcal{L}, L \nparallel A\} \to A$$

Z AF1 φ je prosté a je definované pro všechny body A proto φ je na $\Rightarrow$ bijekce.
Jelikož φ je bijekce a z AF2 existuje právě 1 rovnoběžka k A procházející bodem x:

$$|A| + 1 = \#\text{ přímek obsahujících } x \tag{2}$$

Vezmeme 2 přímky $A, B : A \nparallel B$. Dle AF1, AF2, AF3 $\Rightarrow$ nejde pokryt 2ma různoběžnými přímkami. Pak $\exists t \notin A \cup B$, zobrazeni φ určuje přímku pro každý bod A, B. Neboli $|A| = |B|$.
Vezmeme 2 rovnoběžky A, B a různoběžku C z předchozího případu usoudíme $|A| = |C| = |B|$.
Dohromady $\exists m, \forall A \in \mathcal{L} : |A| = m$. Taky z (2):

$$|\{L : x \in L \in \mathcal{L}\}| = m+1$$

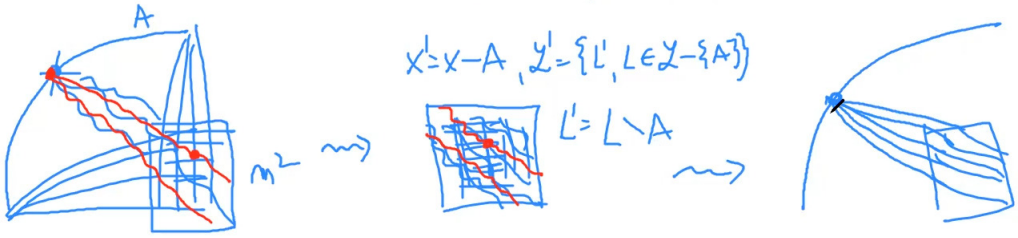


Vezmeme libovolnou přímku A, má m bodů. Přes libovolný bod $a \in A$ prochází další přímka B. Dle AF2 najdeme ke každému bodu $b_i \in B$ rovnoběžku k A která má dalších $(m-1)$ bodů. Konstrukce dává m rovnoběžek a m^2 bodů. Dohromady $|X| = m^2$.
Na jedné straně, počet bodu je m^2. Každým bodem prochází $(m+1)$ přímek. Na druhé straně se to rovná počtu přímek krát počet bodů na přímce m.

$$m^2 \cdot (m+1) = |\mathcal{L}| \cdot |A| = |\mathcal{L}| \cdot m \Rightarrow |\mathcal{L}| = m \cdot (m+1)$$

□

Důsledek 1.13 (O vztahu KAR a KPR). *Každá afinní rovina řádu m vznikne z projektivní roviny řádu m vynecháním jedné přímky a jejích bodů. Naopak každá projektivní rovina řádku m vznikne z nějaké afinní roviny řádu m přidáním $m+1$ bodů, každý z nich do všech přímek jednoho směru, a jedné přímky obsahující tyto přidané body.*



Definice 1.14 (Desargova vlastnost). Desargova vlastnost je následující: *Pro každých šest různých bodů $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ takových, že se přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 protínají v jednom bodě platí, že průsečíky dvojic přímek A_1B_1, A_2B_2 a B_1C_1, B_2C_2 a A_1C_1, A_2C_2 leží na jedné přímce.*

Definice 1.15 (Desargovská projektivní rovina). Projektivní rovina je Desargovská, pokud má Desargovu vlastnost. Jinak je ne-Desargovská.

Cvičení 1.16. KPR sestrojené výše jsou Desargovské.

1.1 KPR a extremální grafy

Příklad 1.17 (Extremální Moorovy grafy).

Příklad 1.18 (Copnumber grafu).

2 Latinské čtverce

Definice 2.1 (Latinský obdélník). Latinský obdélník je matice $L \in X^{k \times n}$. Taková, že prvky se neopakuji ani ve sloupcích ani v řádcích. Kde X je n-prvková množina. Typický $\{1, ..., n\} := [n]$.
Na řádky lze nahlížet jako na permutace.

Věta 2.2 (Latinské čtverce). *Každý Latinský obdélník řádu $k \times n$ lze doplnit na Latinský čtverec řadu $n \times n$.*

Důkaz. Dokážeme přidaní nových řádků v závislostí na již existujících řádcích.
V k-tem kroků se podíváme na j-tý sloupec. Nechť M_j bude množina kandidátů které můžeme dat na j-tou pozici v novém řádku.

$$M_j = [n] \setminus \{L_{ij} : i = 1, 2, ..., k\}$$

Teď musíme z množin M_j vzít po 2 různé prvky. Jinými slovy, hledáme Systém různých reprezentantů - SRR pro $\{M_j\}_1^n$.
Sestavíme graf, kde vrcholy jsou množiny M_j a prvky z $[n]$.

$$(l, M_j) \in E \iff l \in M_j$$

Pak tento bipartitní graf je $(n-k)$-regulární. Protože $\forall x$ je v $(n-k)$ množinách M_j.
Dle Hallové věty, v takovém grafu existuje perfektní párovaní, které určuje SRR. □

Důsledek 2.3. *Latinských čtverců řádu n je* $\mathcal{O}(n!)$.

Důkaz. BUNO: v prvním řádku je $\{1, 2, ..., n\}$. Jinak můžeme vhodně přejmenovat prvky. V druhém řádku musí být permutace $[n]$ bez pevných bodů. Z *problému šatnářky* takových permutaci je

$$\frac{n!}{e}$$

Pak dle věty každý obdélník lze doplnit na čtverec. □

Definice 2.4 (Kolmost LČ). Latinský čtverce jsou kolmé $L \perp L'$ právě když

$$\forall x, y \in [n]^2 \exists! (i, j) \in [n]^2 : L_{i,j} = x \wedge L'_{i,j} = y$$

Taky lze definovat ortogonalitu nad různými množiny.

Značení 2.5 (NOLČ(n)). $NOL\check{C}(n)$ značíme největší počet navzájem ortogonálních Latinských čtverců řádu n.

Věta 2.6 (Horní odhad NOLČ).

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 : NOL\check{C}(n) \leq n - 1$$

Důkaz. Nechť

$$L^1, ..., L^t \in \{1, ..., n\}^{n \times n}, \forall i \neq j : L^i \perp L^j$$

BUNO: přejmenujeme prvky v každém LČ tak, aby v prvním řádku bylo $\{1, 2, ..., n\}$. Takto vyrobíme LČ $L^{1\prime}, ..., L^{t\prime}$.
Tvrdíme ale, že ortogonalita je zachovaná. Obecně pro libovolná permutace π aplikovaná ne jeden z dvojice ortogonálních LČ zachovává ortogonalitu.
Pak na pozici $(2, 1)$ nemůže být 1. Pokud tam ale bude nějaké písmeno a, tak čtverce nebudou ortogonální, protože všechny dvojice (i, i) máme v prvním řádku. Z toho na pozice $(2, 1)$ můžou být prvky $\{2, ..., n\}$ po 2 různé. Takže $NOL\check{C}(n) \leq n - 1$. □

Kdy máme extremální řešení?

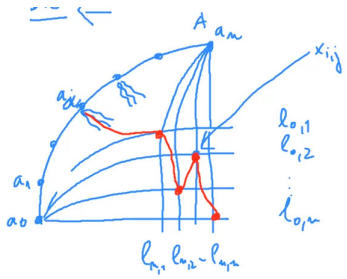
Věta 2.7 (Extremální NOLČ a KPR).

$$NOL\check{C}(n) = n - 1 \iff \exists KPR(n)$$

Z předchozí přednášky platí pro mocniny prvočísla.

Důkaz. $KRP \Rightarrow L\check{C}$. Sestavíme nevlastní přímku A, svislé a vodorovné přímky. Dal přímky spojující A a průniky svislých a vodorovných přímek budou určovat LČ.

$$L^{\alpha}_{i,j} = \beta \iff x_{i,j} \in k_{\alpha,\beta}$$



Pak písmena v LČ odpovídající červené přímce budou:

Z axiomu KPR svislé, vodorovné a přímky procházející body a_{α} se protínají právě v 1 bodě. Takže písmena se neopakuji v rádcích a sloupcích.
Jsou $\perp$ protože

$$\forall \beta, \beta' \exists! (i,j) : L^{\alpha}_{i,j} = \beta \wedge L^{\gamma}_{i,j} = \beta'$$

Protože přímky se nemůžou protínat na nevlastní přímce A, takže se protínají uvnitř šachovnice.

$$\exists! x_{i,j} \in l_{\alpha,\beta} \cap l_{\gamma,\beta'}$$

$L\check{C} \Rightarrow KPR$. Nechť máme LČ

$$L^{\alpha}, \alpha \in \{1,2,...,n-1\}$$

Sestavíme nevlastní, svislé a vodorovné přímky.
Šikmé přímky vytvoříme dle:

$$L^{\alpha}_{i,j} = \beta \iff x_{i,j} \in k_{\alpha,\beta}$$

Ověříme axiomy:

- A_1. Přímky ze stejného svazku šikmých přímek se protínají v nevlastním bodě. Vodorovné a svislé se protínají v šachovnici.

  Šikmé vs svislé a Vodorovné vs svislé se protínají protože průniky jsou určené LČ. 2 Šikmé přímky se protínají právě v 1 bodě protože čtverce jsou $\perp$.

- A_3. Plyne z toho, že $n \geq 2$.

- A_2. Spočítáme 2ma způsoby # 3jic.

  $$T = |\{((x,y),l) : x \neq y \in X, l \in L, x, y \in l\}|$$

  Máme (n^2+n+1) přímek, na každé z nich je $(n+1)$ bodů. Pak

  $$T = (n^2+n+1)\binom{n+1}{2}$$

Na druhou stranu, máme (n^2+n+1) bodů. Každou 2ci prochází nejvýše 1 přímka.

$$T \leq 1 \cdot \binom{n^2+n+1}{2}$$

Dohromady

$$(n^2+n+1)\binom{n+1}{2} \leq \binom{n^2+n+1}{2}$$

Po roznásobení dostaneme stejná čísla na obou stranách, což může nastat pouze v případě že každou 2cí bodů prochází *právě 1* přímka.

□

Definice 2.8 (Ortogonální tabulka). Ortogonální tabulka řádu n, hloubky d je matice

$$M \in \{1,...,n\}^{d \times n^2}$$

d řádků, n sloupců. Každé 2 řádky jsou ortogonální. Formálně:

$$\forall i \neq j, \forall x,y \in [n], \exists! k \in \{1,...,n^2\} : M_{i,k} = x \wedge M_{j,k} = y$$

Poznámka 2.9. Jelikož počet 2jic je pravě n^2, což se rovná počtu sloupců stačí i slabší podmínka.

$$\forall i \neq j, \forall x,y \in [n], \exists k \in \{1,...,n^2\} : M_{i,k} = x \wedge M_{j,k} = y$$

Věta 2.10 (Ortogonální tabulka a NOLČ).

$$\forall n,d \in \mathbb{N} \exists OA(n,d) \iff NOL\check{C}(n) \geq d-2$$

Důkaz. BUNO první řádek má bloky $i,i,...,i$ velikosti n. Druhý řádek bloky $1,2,...,n$ taky velikosti n. Jinak zvolíme vhodnou permutaci.
Pak vezmeme libovolný další řádek. Přemístíme blok velikosti n na řádek LČ.

$$L^3_{i,j} = M_{3,n(i-1)+j}$$

Tvrdíme, že je to LČ.

- v řádku nemůže být dvakrát stejné písmeno, třeba pokud by tam bylo a. Měli bychom v původní tabulce dvakrát (i,a) v různých řádcích.
- Pokud bychom měli v sloupci 2 stejná písmena, např ve sloupci j. Tak bychom měli (j,b) na stejné pozice j. Jelikož 2. řádek má stejné bloky, tak by řádek ze kterého jsme udělali LČ nebyl $\perp$ s 2. řádkem.

Když budeme mít 2 LČ z ortogonální tabulky, tak jsou ortogonální. Řádky tabulky jsou kolmé $\Rightarrow$ řádky LČ jsou kolmé.
První 2 řádky jsou zafixované, z dalších můžeme vyrobit $\perp$ LČ. Takže dohromady $(d-2)$.
Obraceně, pokud máme $(d-2)$ LČ, tak je poskládáme do OA. □

Věta 2.11 (Tenz produkt Ortogonálních tabulek).

$$\forall n_1,n_2,d \in \mathbb{N} \ \exists OA(n_1,d) \wedge OA(n_2,d) \Rightarrow \exists OA(n_1 \cdot n_2, d)$$

Důkaz. Mějme řádek z $OA(n_1) : a_1, a_2, ..., a_n$ a řádek z $OA(n_2) : b_1, b_2, ..., b_n$.
Uděláme výsledný řádek pomoci tenzorového součinu:

$$(a_1, b_1)(a_1, b_2), ...(a_1, b_{n_2^2})(a_2, b_1)...$$

Vezmeme 2 řádky $OA(n_1 \cdot n_2, d)$. Nechť $x = (c, d), y = (c', d')$.
Z vlastnosti OA, $\exists! k : c$ je ve stejném sloupci s c' v $OA(n_1)$. Analogický $\exists! l : d$ je ve stejném sloupci s d' v $OA(n_2)$.
Pak z definice tenzorového součinu v $OA(n_1 \cdot n_2, d)\exists!(a_k, a_l)$. Z toho $\forall c, d, c', d', \exists!$ sloupec ve kterém v tabulce jsou $(c, d) \wedge (c', d')$. □

Věta 2.12 (Dolní odhad NOLČ). *Nechť $n = \prod_1^k p_i^{r_i}$ je faktorizace n. Pak*

$$NOL\check{C}(n) \geq \min_{i=1}^{k}\{p_i^{r_i} - 1\}$$

Důkaz. Nechť

$$s = \min_{i=1}^{k}\{p_i^{r_i} - 1\}$$

Z věty 2.6

$$NOL\check{C}(p_i^{r_i}) \geq p_i^{r_i} - 1$$

Pak protože $s = \min \Rightarrow p_i^{r_i} - 1 \geq s$.
Což spolu s větou 2.10 dává:

$$\exists OA(p_i^{r_i}, s + 2)$$

Aplikujeme 2.11 induktivně, pak

$$\exists OA(\prod_1^k p_i^{r_i}, s + 2) = OA(n, s + 2) \Rightarrow NOL\check{C}(n) \geq s$$

□

Důsledek 2.13.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 2 \wedge n \not\equiv 2 \mod 4 : NOL\check{C}(n) \geq 2$$

Důkaz. Rozložíme n na mocniny prvočísel. Pak pokud v rozkladu je 2, tak má exponent aspoň 2. Protože jinak je $n \not\equiv 2 \mod 4$, což jsme vyloučili předpokladem. Pro ostatní prvočísla $p_i^{r_i} - 1 \geq 2$. Dohromady $s \geq 2$. □

Lemma 2.14 (OA 3m + 1).

$$\exists OA(m, 4) \Rightarrow \exists OA(3m + 1, 4)$$

Důkaz. Nechť $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Dal vezmeme okruh $\mathbb{Z}_{2m+1}$ a máme dle předpokladu $OA(m, 4)$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}$$

Vezmeme

$$a_i = (i, i, ..., i) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^m$$
$$b_i = (i+1, i+2, ..., i+m) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^m$$
$$c_i = (i-1, i-2, ..., i-m) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^m$$
$$A = (a_0, a_1, ..., a_{2m}) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^{m(2m+1)}$$
$$B = (b_0, b_1, ..., b_{2m}) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^{m(2m+1)}$$
$$C = (c_0, c_1, ..., c_{2m}) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^{m(2m+1)}$$
$$X = (x_1, x_2, ..., x_m, x_1, x_2, ..., x_m ...) \in X^{m(2m+1)}$$

Pak sestavíme $OA(3m+1, 4)$ nad prvky $X \cup \mathbb{Z}_{2m+1}$ takto:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 2m & A & B & C & X & D_1 \\ 0 & 1 & ... & 2m & B & A & X & C & D_2 \\ 0 & 1 & ... & 2m & C & X & A & B & D_3 \\ 0 & 1 & ... & 2m & X & C & B & A & D_4 \end{pmatrix}$$

Počet sloupců je

$$(2m+1) + 4m(2m+1) + m^2 = 9m^2 + 6m + 1 = (3m+1)^2$$

Teď zkontrolujeme, že $\forall x, y \in X, \forall i, j \in \mathbb{Z}_{2m+1}$ najdeme následující dvojice v sloupcích aspoň jednou.
$z_{i,i} = \binom{i}{i}, z_{i,j} = \binom{i}{j}, z_{i,x} = \binom{i}{x}, z_{x,i} = \binom{x}{i}, z_{x,y} = \binom{x}{y}$
Pak kvůli velikosti tabulky dvojice bude v OA právě jednou.

- $z_{i,i}$ je na začátku v $0, 1, ..., m$.
- $z_{i,j}$ je v $\binom{A}{B} \cup \binom{B}{A}$ nebo $\binom{A}{C} \cup \binom{C}{A}$ nebo $\binom{B}{C} \cup \binom{C}{B}$
- $z_{i,x}$ je v $\binom{A}{X} \vee \binom{B}{X} \vee \binom{C}{X}$
- $z_{x,i}$ je v $\binom{A}{X} \vee \binom{B}{X} \vee \binom{C}{X}$
- $z_{x,y}$ je v D.

□

Věta 2.15 (Dolní odhad NOLČ - 2).

$$\forall k > 0 : NOL\check{C}(12k+10) \geq 2$$

Důkaz. Pokud vezmeme $m = 4k+3$ pak dle **??** 2.13

$$\exists OA(4k+3, 4) \overset{lemma\ 2.14}{\Rightarrow} \exists OA(3(4k+3)+1, 4) = OA(12k+10, 4) \iff NOL\check{C}(12k+10) \geq 2$$

□

Poznámka 2.16. Ortogonální tabulky se používají např pro rozvrhovaní turnaje kde každý hraje s každým jednou. Z toho turnaje mají určitý počet hráčů, aby existovala příslušná OA.
V bridge to je složitější, protože nejlepší hraje s nejhorším. Po nějakém počtu roundů už nejde pokračovat dal.

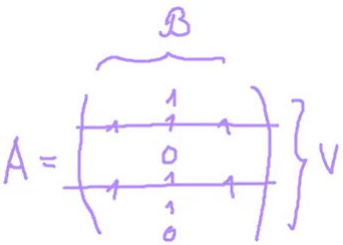
3 Bloková schémata

Definice 3.1 (Blokové schéma (BIBD)). Blokové schéma s parametry $v, k, \lambda > 0$ ((v, k, λ)-BIBD) je množinový systém $(V, \mathcal{B})$ takový, že:

1. $|V| = v$
2. $\forall B \in \mathcal{B} : |B| = k$
3. $\forall x, y \in V, x \neq y : |\{B \in \mathcal{B} : x, y \in B\}| = \lambda$
4. $v > k$, netrivialita: bloky neobsahuji všechny prvky.

Množiny $B \in \mathcal{B}$ jsou *bloky* schématu $(V, \mathcal{B})$.

Vlastnosti 3.2 (BIBD)**.**



BIBD reprezentujeme pomoci matice incidence, pro niž platí:

- Z 2 axiomu, sloupcový součet je právě k.
- Z 3 axiomu, libovolné 2 sloupce mají jedničky na λ společných pozicích. Neboli skalární součet je λ.

Věta 3.3 (Struktura BIBDu). *Nechť $(V, \mathcal{B})$ je (v, k, λ)-BIBD, pak*

1. *$\forall x \in V$ patří to $r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$ bloků.*
2. *$|\mathcal{B}| = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)}$*

Důkaz. 1) ekvivalentně znamená, že řádkové součty matice se rovnají r. Zafixujeme libovolný prvek $x \in V$. Pak

$$r_x = |\{B : x \in B \in \mathcal{B}\}|$$

Spočítáme 2ma způsoby # dvojic:

$$C = |\{(y, B) : x \neq y, x, y \in B \in \mathcal{B}\}|$$

Na jedné straně je r_x způsobů zvolit B obsahující x a $(k-1)$ možnosti zvolit další prvek $y \in B$.
Na druhou stranu, nejprve zvolíme y, což jde udělat $(v-1)$ způsoby. Z axiomu 3 takové x, y jsou ve λ společných množinách.

$$r_x(k-1) = C = (v-1)\lambda \Rightarrow r_x = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$$

Konečně, x byl libovolný prvek, rovnost platí $\forall x \in V$.

2) Jaký je součet všech prvků matice? Spočítáme po řádcích a po sloupcích

$$|\mathcal{B}| \cdot k = RS = SlS = v \cdot r = v \cdot \frac{\lambda(v-1)}{k-1} \Rightarrow |\mathcal{B}| = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)}$$

□

Vlastnosti 3.4 (Struktura BIBDu)**.**

Pokud pro parametry $\exists(v,k,\lambda)$-BIBD, tak:

D1 $\lambda(v-1)$ je dělitelné $(k-1)$.

D2 $\lambda \cdot v(v-1)$ je dělitelné $k \cdot (k-1)$.

- $r > \lambda$.

Důkaz. Plyne hned z 3.3, jelikož $r, |\mathcal{B}|$ jsou celá čísla.
3 podmínka platí z předpokladu netriviality

$$v > k \Rightarrow (v-1) > (k-1) \Rightarrow \frac{r}{\lambda} = \frac{v-1}{k-1} > 1$$

□

Příklad 3.5. Každá KPR(m) je $(m^2+m+1, m+1, 1)$-BIBD.
Každá KAR(m) je $(m^2, m, 1)$-BIBD.

Věta 3.6 (Wilson (1975) BD).

$$\forall k, \lambda \exists v_0 : \forall v \geq v_0 \wedge [D1] + [D2] \Rightarrow \exists(v,k,\lambda) - BIBD$$

Věta 3.7 (Fisherová nerovnost). *Pokud* $(V,\mathcal{B})$ *je* (v,k,λ)*-BIBD tak* $|\mathcal{B}| \geq v$.

Důkaz. Trik jako v mnoha důkazech přednášky LAK, mocnění matice incidence. Nechť A je matice incidence BIBDu, pak

$$AA^T = \begin{pmatrix} r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \dots & \lambda & r \end{pmatrix} = \lambda J + (r-\lambda)E$$

Spočítáme determinant pomoci vzorečku multilineární formy

$$detAA^T = (r-\lambda)^v + v \cdot \lambda \cdot (r-\lambda)^{v-1} = (r-\lambda)^{v-1}(r-\lambda+v\lambda) = (r-\lambda)^{v-1}(v(\lambda-1)+r)$$

Dle **??** 3.4 $r > \lambda \Rightarrow (r-\lambda)^{v-1} > 0$. Dle axiomu BIBDu $\lambda - 1 \geq 0$ a $r > 0$. Takže i determinant je nenulový. Pak z LA

$$rankAA^T = v \leq rankA \leq |\mathcal{B}| \Rightarrow |\mathcal{B}| \geq v$$

□

Důsledek 3.8. *Pro každý BIBD* $k \leq r$.

Důkaz.

$$|\mathcal{B}| \cdot k = v \cdot r \wedge |\mathcal{B}| \geq v \Rightarrow k \leq r$$

□

3.1 Symetrické blokové schéma

Definice 3.9 (Symetrické blokové schéma). Blokové schéma se nazývá symetrické, pokud je počet jeho bloků roven počtu jeho prvků.

$$|\mathcal{B}| = v$$

Neboli extremální případ Fisherové nerovnosti.

Věta 3.10 (Ekvivalence BIBD). *Nechť $(V,\mathcal{B})$ je množinový systém takový, že*

- $|V| = v$
- $|\mathcal{B}| = b$
- $A \in \{0,1\}^{v\times b}$ *je matice incidence*
- $k,\lambda,r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} \in \mathbb{Z}^+$

Pak $(V,\mathcal{B})$ je (v,k,λ)-BIBD $\iff$:

1. $AA^T = \lambda J + (r-\lambda)E$
2. $JA = kJ \iff$ *sloupcový součet v matice A je k.*
3. $rankA = v$

Důkaz. "⇒". Plyne z Fisherové nerovnosti 3.7. Z vlastnosti BIBDu **??** 3.4 sloupcový součet v matice A je $k \Rightarrow JA = kJ$.
"⇐". Ověříme axiomy:

1. TODO není axiom ale označení proměnné?
2. $JA = kJ \Rightarrow$ sloupcový součet v matice A je $k \Rightarrow \forall B \in \mathcal{B} : |B| = k$
3. z 1 podmínky plyne, že mimo diagonálu v AA^T jsou λ. Což je skalární součin dvou libovolný řádku matice A.
4. Nechť sporem $v = k$, tak $A = J$ a pro $v \geq 2$ by již neměla plnou hodnost. Spor s 3 podmínkou.

□

Věta 3.11 (SBIBD ekvivalence). *Nechť $(V,\mathcal{B})$ je množinový systém takový, že $|V| = |\mathcal{B}| > 1$ a A je matici incidence. Pak*

1. *Pokud je (v,k,λ)-SBIBD, tak*
   (a) $AA^T = \lambda J + (k-\lambda)E \iff \forall x \in V$ *patří do k bloků,* $\forall x \neq y \in V$ *patří do* λ *bloků.*
   (b) $A^TA = \lambda J + (k-\lambda)E$. *Maticové násobení je skalárním součinem sloupců matice A, neboli se díváme na bloky. Rovnost ekvivalentně znamená, že na diagonále jsou velikosti bloku k a mimo diagonálu průniky bloků* λ.

   $$\forall B \in \mathcal{B} : |B| = k, \forall B_1 \neq B_2 \in \mathcal{B} : |B_1 \cap B_2| = \lambda$$

   (c) $JA = kJ \iff \forall$ *prvek patří do k bloků.*

(d) $AJ = kJ$ *násobíme charakteristický vektor s* $\bar{1}$. *Neboli* $\forall B \in \mathcal{B} : |B| = k$.

(e) A *je regulární* $\iff rankA = v$

2. *Nechť* A *je regulární matice neboli platí e), potom pokud platí a) nebo b)* $\Rightarrow (V,\mathcal{B})$ *je* (v,k,λ)*-SBIBD.*

Důkaz. Je vidět a) $\Rightarrow$ c) a b) $\Rightarrow$ d).
Dle 3.10 (v,k,λ)-SBIBD $\iff$ a), d), e). Potřebujeme zkontrolovat že b) je splněno. Ukážeme ale 1 a 2 dohromady pomoci implikace

$$a),e) \Rightarrow b),d) \tag{3}$$

2 je splněná taky, protože a), e) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ b), d), c) znovu z 3.10 $(V,\mathcal{B})$ je (v,k,λ)-SBIBD. Obraceně pokud platí b), e) pro $A \Rightarrow$ platí a), e) pro $A^T \Rightarrow$ a)-e) pro $A^T \Rightarrow$ a)-e) pro A. Začneme d).
A regulární $\Rightarrow \exists A^{-1}$. Pak

$$A^{-1}AJ \overset{c)}{=} A^{-1}kJ = kA^{-1}J \overset{k\neq 0}{\Rightarrow} A^{-1}J = k^{-1}J$$

Dal

$$JA^T = J^TA^T = (AJ)^T = (kJ)^T = kJ$$

Taky

$$A^T = A^{-1}AA^T \overset{a)}{=}= A^{-1}((k-\lambda)E + \lambda J) = (k-\lambda)A^{-1} + \lambda A^{-1}J = (k-\lambda)A^{-1} + \lambda k^{-1}J$$

Z rovnosti usoudíme, že $k \neq \lambda$ protože jinak A^T regulární $= c \cdot J$ která regulární není. Taky

$$JA^T = kJ = J((k-\lambda)A^{-1} + \lambda k^{-1}J) = (k-\lambda)JA^{-1} + \lambda k^{-1}J^2$$

Jelikož $J \in \{0,1\}^{v\times v} \Rightarrow J^2 = vJ$ tak

$$JA^T = kJ = (k-\lambda)JA^{-1} + \lambda k^{-1}vJ \Rightarrow (k-\lambda)JA^{-1} = (k-\lambda k^{-1}v)J$$

Neboli

$$JA^{-1} = \frac{k-\lambda k^{-1}v}{k-\lambda} \Rightarrow J = JA^{-1}A = \frac{k-\lambda k^{-1}v}{k-\lambda}JA$$

Označme $m = \frac{k-\lambda k^{-1}v}{k-\lambda}$, dal

$$J^2 = vJ = (mJA)J = (mJ)AJ = mJkJ = mkJ^2 \Rightarrow mk = 1$$

Konečně máme d)

$$JA^{-1} = mJ = k^{-1}J \Rightarrow J = k^{-1}JA \Rightarrow JA = kJ$$

b)

$$A^TA = ((k-\lambda)A^{-1} + \lambda k^{-1}J)A = (k-\lambda)E + \lambda k^{-1}kJ = (k-\lambda)E + \lambda J$$

□

Důsledek 3.12 (Duální SBIBD). *Pokud* A *je matice symetrického BIBDu* $\Rightarrow A^T$ *je matice duálního SBIBDu. Neboli*

$$(V,\mathcal{B})^* = (\mathcal{B},V^*), V^* = \{v^* : v \in V\}, v^* = \{B : v \in B \in \mathcal{B}\}$$

Definice 3.13 (Konstrukce blokových schémat ze symetrických). Pokud $(V, \mathcal{B})$ je (v, k, λ)-BIBD, nechť B_0 je zafixovaný blok, definujme:

1. $(B_0, \{B \cap B_0 : B \in \mathcal{B} \setminus \{B_0\}\})$ je $(k, \lambda, \lambda - 1)$-BIBD (odvozové schéma neboli v aj derived design).
2. $(V \setminus B_0, \{B \setminus B_0 : B \in \mathcal{B} \setminus \{B_0\}\})$ je $(v - k, k - \lambda, \lambda)$-BIBD (zbytkové schéma neboli v aj residual design).

Příklad 3.14 (KPR vs KAR). Každá konečná projektivní rovina je symetrický BIBD. Každá konečná afinní rovina je zbytkové schéma pro nějakou konečnou projektivní rovinu stejného řádu.

Lemma 3.15 (Lineární formy). *Nechť $A \in \{0,1\}^{v \times b}$ je matice incidence a $r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$, pak uvažme lineární formy*

$$\forall j \in [b] : L_b(x_1, \ldots, x_v) = \sum^{v} a_{ij} x_i$$

Potom

$$\sum^{b} L_j^2(x_1, \ldots, x_v) = (r - \lambda) \sum^{v} x_i^2 + \lambda \left(\sum^{v} x_i \right)^2$$

Důkaz. Budiž $x = (x_1, \ldots, x_v)$ řádkový vektor proměnných. Označme $L_j = L_j(x_1, \ldots, x_v)$, pak

$$xA = (L_1, \ldots, L_b)$$

Dal

$$(xA)^T = A^T x^T = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \ldots \\ L_b \end{pmatrix}$$

Rovnici $AA^T = (r - \lambda)E + \lambda J$ vynásobíme x zleva a x^T zprava:

$$xAA^T x^T = x((r - \lambda)E + \lambda J)x^T$$

Kde levá strana je $(L_1, \ldots, L_b) \cdot (L_1, \ldots, L_b)^T = \sum L_j^2$. Pravá strana

$$x((r - \lambda)E + \lambda J)x^T = x(r - \lambda)x^T + \lambda x J x^T$$

Roznásobíme

$$(r - \lambda)xx^T + \lambda x J x^T = (r - \lambda) \sum x_i^2 + \lambda (\sum x_i)(x_1 + \ldots + x_v) = (r - \lambda) \sum x_i^2 + \lambda \left(\sum^{v} x_i \right)^2$$

□

Věta 3.16 (Bruck-Ryser-Chowla). *Nechť (v, k, λ)-SBIBD, položme $n = k - \lambda$, pak platí:*

1. *v je sudé a $n = m^2 \in \mathbb{N}$.*
2. *v je liché a Diofantická rovnice*

$$z^2 = nx^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda y^2$$

má netriviální řešení v celých číslech.

Důkaz. 1.
Dle 3.10:

$$AA^T = \lambda J + (r-\lambda)E$$

Spočítáme determinant dle vzorečku multilineární formy:

$$detAA^T = (detA)^2 = (r-\lambda)^v + v\lambda(r-\lambda)^{v-1} = (r-\lambda)^{v-1}(r-\lambda+v\lambda) = (r-\lambda)^{v-1}(r+\lambda(v-1))$$

Dosadíme $k(k-1) = \lambda(v-1)$:

$$= (k-\lambda)^{v-1}(k+k^2-k) = (k-\lambda)^{v-1}k^2$$

$\forall$ prvočísla $p|n = (k-\lambda)$ je v det^2, k^2 sudá mocnina p. Takže v n^{v-1} taky sudá mocnina, jelikož v sudé $\Rightarrow$ v n je sudá mocnina. Neboli n je mocnina přirozeného čísla.
2.
Nejprve použijeme Lagrangeovou větu o 4$\square$:

$$n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2, b_i \in \mathbb{Z}$$

Vezmeme matici

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\ b_2 & b_1 & -b_4 & b_3 \\ b_3 & b_4 & b_1 & -b_2 \\ b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

Využijeme kvaterniony a konkretně normu

$$N(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, N(ab) = N(a) \cdot N(b)$$

která je multilineární formou. Pak zobrazení $y = Bx$ je $\mathbb{Q}^4 \to Q^4$ tak že po aplikace normy platí:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = n(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

Nahlédneme B je regulární. Jinak sporem je singulární, pak $Bx = 0$ má netriviální řešení, z toho

$$N(x) = n \cdot \sum x_i = 0 \Rightarrow \sum x_i = 0 \iff \forall i : x_i = 0$$

Což je spor.
Rozebereme 2 případy: 2a) $v \equiv 1 \mod 4$
Nechť máme proměnné $x_1, \ldots, x_v \in \mathbb{Q}$. Aplikujeme zobrazení určené matici B po 4cich, pak

$$\sum y^2 = n(\sum x^2)$$

Rovnice z lemma 3.15 po transformaci je

$$\sum L_j^2 = \sum_i^{v-1} y_i + nx_v^2 + \lambda(\sum x_i)^2$$

Označme $w = \sum x_i$, taky nahlížejme na L_j jako na lineární formy v proměnných $y_1, \ldots, y_v$. Dosadíme do L_j výrazy získané pomoci $x = \overline{B}y$. Taky ale $y_v = x_v$.

$$\sum L_j^2 = \sum_i^{v-1} y_i + ny_v^2 + \lambda w^2$$

Zvolme lineární formy tak, aby $L_j^2 = y_j^2$ (proces specializace):

$$L_1 = \sum c_j y_j = y_1 \Rightarrow \sum^{v-1} c_j y_j = (1-c_1)y_1$$

Pak zvolme

$$y_1 = \begin{cases} \frac{\sum_{}^{v-1} c_j y_j}{1-c_1} & \text{pro } c_1 \neq 1 \\ \frac{\sum_{}^{v-1} c_j y_j}{-2} & \text{pro } c_1 = 1, L_1 = -y_1 \end{cases}$$

Pokračujeme induktivně, zbývá:

$$L_v^2 = n y_v^2 + \lambda w^2$$

Kde L_v, y_v, w jsou lineární formy v y_v. Proto

$$L_v = \frac{p}{q} y_v, w = \frac{r}{s} y_v \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} y_v^2 = n y_v^2 + \lambda \frac{r^2}{s^2} y_v^2$$

Dosadíme $y_v = 1$:

$$p^2 s^2 = n q^2 s^2 + \lambda r^2 q^2$$

Položme $z = ps, x = qs \neq 0, y = rs$. Rovnice obecnějšího tvaru dostaneme protože $v \equiv 1 \mod 4 \Rightarrow v - 1$ je dělitelné 2.
2b) $v \equiv 3 \mod 4$. Uvažme rovnici z lemma 3.15, doplníme poslední 4ce proměnnou x_{v+1}:

$$\sum L_j^2 = \sum_{i}^{v+1} y_i - n x_{v+1}^2 + \lambda w^2$$

Znovu překlopíme na lineární formy v y_i a po specializaci:

$$0 = y_{v+1}^2 - n x_{v+1}^2 + \lambda w^2, x_{v+1}^2 = \frac{p}{q} y_{v+1}^2, w = \frac{r}{s} y_{v+1}^2$$

Dostaneme

$$y_{v+1}^2 = n - \frac{p^2}{q^2} - \lambda \frac{r^2}{s^2} y_{v+1}^2$$

Dosadíme $y_{v+1} = 1$:

$$(qs)^2 = n(ps)^2 - \lambda(rq)^2$$

Znovu dostáváme rovnici

$$z^2 = n x^2 - \lambda y^2$$

□

Důsledek 3.17 ($\nexists$ KPR(6)).

Důkaz. Kdyby existovala KPR(6), tak by existoval i $(43, 7, 1)$-SBIBD. Pak ale dle 3.16 rovnice má netriviální řešení

$$z^2 = 6x^2 + (-1)^{21} y^2 \Rightarrow z^2 + y^2 = 6x^2$$

Pokud existovalo netriviální řešení, tak po zrušení společných dělitelů dostaneme řešení $(x, y, z) = 1$ nesoudělná. Vezmeme nemenší takové a upravíme $\mod 3$. Kvadratické residua jsou $0, 1$. Na pravé straně zbytek je vždy 0, aby i na levé byl 0 tak y, z jsou zároveň dělitelné 3mi.

$$9z^2 + 9y^2 = 6x^2 \Rightarrow 3z^2 + 3y^2 = 2x^2 \Rightarrow 3|x$$

Spor s $(x, y, z) = 1$. □

Věta 3.18 (Teorie čísel (BD)). $\forall n : n = a^2 + b^2 \iff$ *prvočíslo* $p = 4k + 3$ *vystupuje v rozvoji s sudou mocninou.*

Důkaz. "⇒"již bylo ukazano na příkladě rovnice $z^2 + y^2 = nx^2$ pro $x = 1$.
"⇐".

Pozorování 1 Pokud $n = n_1 + n_2 \wedge n_1 = x_1^2 + y_1^2 \wedge n_2 = x_2^2 + y_2^2$ tak:

$$n = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2$$

Pozorování 2 Z $n = \prod p_i^a$ vytkneme prvočísla $p \equiv 3 \mod 4$ do n_2:

$$n = \prod p_i^a = n_1^2 \cdot (2) \cdot n_2$$

Pak $n_1^2 = n_1^2 + 0^2$ a $2 = 1^2 + 1^2$. Neboli úloha je redukovaná na $\forall p$ prvočíslo $p = 4k+1 = a^2 + b^2$.

Pozorování 3 Pro $p = 4k+1$ v tělese $\mathbb{Z}_p$ je $(-1) \equiv l^2, l \in \mathbb{Z}_p$. Dal aplikujeme Diofantickou aproximaci

$$\forall e \in R, \forall n \exists \frac{h}{k} \in \mathbb{Q}, 0 < k \leq n : |e - \frac{h}{k}| \leq \frac{1}{k(n+1)}$$

pro $e = \frac{l}{p}, n = \lceil \sqrt{p} \rceil$. Pak

$$n+1 > \sqrt{p} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{p}}$$

Dle aproximaci

$$\exists \frac{h}{k}, k \leq \sqrt{p} : \left| \frac{l}{p} - \frac{h}{k} \right| \leq \frac{1}{k(n+1)} < \frac{1}{k\sqrt{p}}$$

Zvolme $c = lk - ph$. Pak

$$|lk - ph| < \sqrt{p} \Rightarrow c^2 < p \& c \equiv lk \mod p$$

Dal

$$0 < k^2 + c^2 \equiv k^2 + l^2 k^2 = k^2(1 + l^2) \equiv 0 \mod p \Rightarrow k^2 + c^2 < 2p \Rightarrow k^2 + c^2 = p$$

□

Věta 3.19 (∃ KPR □). *∃ KRP(n)* $\wedge n \equiv 1 \vee 2 \mod 4 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z} : n = a^2 + b^2$.

Důkaz. Z example 3.14 KPR(m) existuje právě tehdy když existuje $(m^2 + m + 1, m + 1, 1)$-SBIBD. Z 3.16 rovnice má netriviální řešení:

$$z^2 = nx^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda y^2$$

Z druhého předpokladu dostaneme

$$z^2 + y^2 = nx^2$$

Podíváme se na prvočísla $p \equiv 3 \mod 4 : p|n \iff n = p^c \cdot n_1, (p, l) = 1$. Z teorie čísel $p \equiv 3 \mod 4 \Rightarrow -1$ je kvadratický nezbytek $\mod p$. Jelikož kvadratické □-zbytek $\cdot(-1) =$ □-nezbytek, tak

$$p|z, p|y \Rightarrow z = pz_1, y = py_1 \Rightarrow p^2 z_1^2 + p^2 y_1^2 = n_1 x^2$$

Po upravě

$$z_1^2 + y_2^1 = \frac{n}{p^2} x^2$$

Postupným dělením prvočíslem p dostaneme

$$p^{\lceil \frac{c}{2} \rceil} | z, p^{\lceil \frac{c}{2} \rceil} | y \Rightarrow p^{\lceil \frac{c}{2} \rceil} | n \Rightarrow c = 0 \mod 2$$

použijeme 3.18 $\Rightarrow n = a^2 + b^2$. □

List of Theorems

List of Theorems