Kombinatorické struktury

prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

21. března 2021

Obsah

1 Konecne/Afinni projektivní roviny

2 Latinské čtverce

Definice 2.1. Latinský obdélník je matice $L \in X^{k \times n}$. Taková, že prvky se neopakuji ani ve sloupcích ani v řádcích. Kde X je n-prvková množina. Typický $\{1, ..., n\} := [n]$.
Na řádky lze nahlížet jako na permutace.

Věta 2.2 (Latinské čtverce). *Každý Latinský obdélník řádu $k \times n$ lze doplnit na Latinský čtverec řadu $n \times n$.*

Důkaz. Dokážeme přidaní nových řádků v závislostí na již existujících řádcích.
V k-tem kroků se podíváme na j-tý sloupec. Nechť M_j bude množina kandidátů které můžeme dat na j-tou pozici v novém řádku.

$$M_j = [n] \setminus \{L_{ij} : i = 1, 2, ..., k\}$$

Teď musíme z množin M_j vzít po 2 různé prvky. Jinými slovy, hledáme Systém různých reprezentantů - SRR pro $\{M_j\}_1^n$.
Sestavíme graf, kde vrcholy jsou množiny M_j a prvky z $[n]$.

$$(l, M_j) \in E \iff l \in M_j$$

Pak tento bipartitní graf je $(n-k)$-regulární. Protože $\forall x$ je v $(n-k)$ množinách M_j.
Dle Hallové věty, v takovém grafu existuje perfektní párovaní, které určuje SRR. □

Důsledek 2.3. *Latinských čtverců řádu n je $\mathcal{O}(n!)$.*

Důkaz. BUNO: v prvním řádku je $\{1, 2, ..., n\}$. Jinak můžeme vhodně přejmenovat prvky.
V druhém řádku musí být permutace $[n]$ bez pevných bodů. Z *problému šatnářky* takových permutaci je

$$\frac{n!}{e}$$

Pak dle věty každý obdélník lze doplnit na čtverec. □

Definice 2.4. Latinský čtverce jsou kolmé $L \perp L'$ právě když

$$\forall x, y \in [n]^2 \exists!(i, j) \in [n]^2 : L_{i,j} = x \wedge L'_{i,j} = y$$

Taky lze definovat ortogonalitu nad různými množiny.

Značení 2.5. $NOL\check{C}(n)$ značíme největší počet navzájem ortogonálních Latinských čtverců řádu n.

Věta 2.6 (Horní odhad NOLČ).

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 : NOL\check{C}(n) \leq n - 1$$

Důkaz. Nechť

$$L^1, ..., L^t \in \{1, ..., n\}^{n \times n}, \forall i \neq j : L^i \perp L^j$$

BUNO: přejmenujeme prvky v každém LČ tak, aby v prvním řádku bylo $\{1, 2, ..., n\}$. Takto vyrobíme LČ $L^{1\prime}, ..., L^{t\prime}$.
Tvrdíme ale, že ortogonalita je zachovaná. Obecně pro libovolná permutace π aplikovaná ne jeden z dvojice ortogonálních LČ zachovává ortogonalitu.
Pak na pozici $(2,1)$ nemůže být 1. Pokud tam ale bude nějaké písmeno a, tak čtverce nebudou ortogonální, protože všechny dvojice (i,i) máme v prvním řádku. Z toho na pozice $(2,1)$ můžou být prvky $\{2, ..., n\}$ po 2 různé. Takže $NOLČ(n) \leq n - 1$. □

Kdy máme extremální řešení?

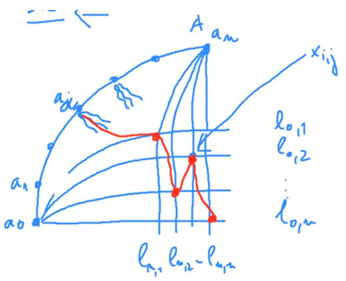
Věta 2.7 (Extremální NOLČ a KPR).

$$NOLČ(n) = n - 1 \iff \exists KPR(n)$$

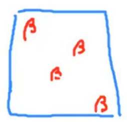
Z předchozí přednášky platí pro mocniny prvočísla.

Důkaz. $KRP \Rightarrow LČ$. Sestavíme nevlastní přímku A, svislé a vodorovné přímky. Dal přímky spojující A a průniky svislých a vodorovných přímek budou určovat LČ.

$$L^{\alpha}_{i,j} = \beta \iff x_{i,j} \in k_{\alpha,\beta}$$



Pak písmena v LČ odpovídající červené přímce budou:



Z axiomu KPR svislé, vodorovné a přímky procházející body a_α se protínají právě v 1 bodě. Takže písmena se neopakuji v rádcích a sloupcích.
Jsou $\perp$ protože

$$\forall \beta, \beta' \exists!(i,j) : L^{\alpha}_{i,j} = \beta \wedge L^{\gamma}_{i,j} = \beta'$$

Protože přímky se nemůžou protínat na nevlastní přímce A, takže se protínají uvnitř šachovnice.

$$\exists! x_{i,j} \in l_{\alpha,\beta} \cap l_{\gamma,\beta'}$$

$LČ \Rightarrow KPR$. Nechť máme LČ

$$L^{\alpha}, \alpha \in \{1, 2, ..., n-1\}$$

Sestavíme nevlastní, svislé a vodorovné přímky.
Šikmé přímky vytvoříme dle:

$$L^{\alpha}_{i,j} = \beta \iff x_{i,j} \in k_{\alpha,\beta}$$

Ověříme axiomy:

- A_1. Přímky ze stejného svazku šikmých přímek se protínají v nevlastním bodě. Vodorovné a svislé se protínají v šachovnici.

  Šikmé vs svislé a Vodorovné vs svislé se protínají protože průniky jsou určené LČ. 2 Šikmé přímky se protínají právě v 1 bodě protože čtverce jsou $\perp$.

- A_3. Plyne z toho, že $n \geq 2$.

- A_2. Spočítáme 2ma způsoby # 3jic.

  $$T = |\{((x,y),l) : x \neq y \in X, l \in L, x,y \in l\}|$$

  Máme (n^2+n+1) přímek, na každé z nich je $(n+1)$ bodů. Pak

  $$T = (n^2+n+1)\binom{n+1}{2}$$

  Na druhou stranu, máme (n^2+n+1) bodů. Každou 2ci prochází nejvýše 1 přímka.

  $$T \leq 1 \cdot \binom{n^2+n+1}{2}$$

  Dohromady

  $$(n^2+n+1)\binom{n+1}{2} \leq \binom{n^2+n+1}{2}$$

  Po roznásobení dostaneme stejná čísla na obou stranách, což může nastat pouze v případě že každou 2cí bodů prochází *právě 1* přímka.

□

Definice 2.8. Ortogonální tabulka řádu n, hloubky d je matice

$$M \in \{1,...,n\}^{d\times n^2}$$

d řádků, n sloupců. Každé 2 řádky jsou ortogonální. Formálně:

$$\forall i \neq j, \forall x,y \in [n], \exists! k \in \{1,...,n^2\} : M_{i,k} = x \wedge M_{j,k} = y$$

Poznámka 2.9. Jelikož počet 2jic je pravě n^2, což se rovná počtu sloupců stačí i slabší podmínka.

$$\forall i \neq j, \forall x,y \in [n], \exists k \in \{1,...,n^2\} : M_{i,k} = x \wedge M_{j,k} = y$$

Věta 2.10 (Ortogonální tabulka a NOLČ).

$$\forall n,d \in \mathbb{N} \exists OA(n,d) \iff NOL\check{C}(n) \geq d-2$$

Důkaz. BUNO první řádek má bloky $i,i,...,i$ velikosti n. Druhý řádek bloky $1,2,...,n$ taky velikosti n. Jinak zvolíme vhodnou permutaci.
Pak vezmeme libovolný další řádek. Přemístíme blok velikosti n na řádek LČ.

$$L^3_{i,j} = M_{3,n(i-1)+j}$$

Tvrdíme, že je to LČ.

- v řádku nemůže být dvakrát stejné písmeno, třeba pokud by tam bylo a. Měli bychom v původní tabulce dvakrát (i,a) v různých řádcích.
- Pokud bychom měli v sloupci 2 stejná písmena, např ve sloupci j. Tak bychom měli (j,b) na stejné pozice j. Jelikož 2. řádek má stejné bloky, tak by řádek ze kterého jsme udělali LČ nebyl $\perp$ s 2. řádkem.

Když budeme mít 2 LČ z ortogonální tabulky, tak jsou ortogonální. Řádky tabulky jsou kolmé $\Rightarrow$ řádky LČ jsou kolmé.
První 2 řádky jsou zafixované, z dalších můžeme vyrobit $\perp$ LČ. Takže dohromady $(d-2)$.
Obraceně, pokud máme $(d-2)$ LČ, tak je poskládáme do OA. □

Věta 2.11 (Tenz produkt Ortogonálních tabulek).

$$\forall n_1,n_2,d \in \mathbb{N} \ \exists OA(n_1,d) \wedge OA(n_2,d) \Rightarrow \exists OA(n_1 \cdot n_2,d)$$

Důkaz. Mějme řádek z $OA(n_1) : a_1,a_2,...,a_n$ a řádek z $OA(n_2) : b_1,b_2,...,b_n$.
Uděláme výsledný řádek pomoci tenzorového součinu:

$$(a_1,b_1)(a_1,b_2),...(a_1,b_{n_2^2})(a_2,b_1)...$$

Vezmeme 2 řádky $OA(n_1 \cdot n_2,d)$. Nechť $x=(c,d), y=(c',d')$.
Z vlastnosti OA, $\exists!k : c$ je ve stejném sloupci s c' v $OA(n_1)$. Analogický $\exists!l : d$ je ve stejném sloupci s d' v $OA(n_2)$.
Pak z definice tenzorového součinu v $OA(n_1 \cdot n_2,d)\exists!(a_k,a_l)$. Z toho $\forall c,d,c',d',\exists!$ sloupec ve kterém v tabulce jsou $(c,d) \wedge (c',d')$. □

Věta 2.12 (Dolní odhad NOLČ). *Nechť* $n=\prod_1^k p_i^{r_i}$ *je faktorizace* n*. Pak*

$$NOL\check{C}(n) \geq \min_{i=1}^{k}\{p_i^{r_i}-1\}$$

Důkaz. Nechť $s=\min_{i=1}^{k}\{p_i^{r_i}-1\}$. Z věty 2.6

$$NOL\check{C}(p_i^{r_i}) \geq p_i^{r_i}-1$$

Pak protože $s=min \Rightarrow p_i^{r_i}-1 \geq s$ Což spolu s větou 2.10 dává:

$$\exists OA(p_i^{r_i},s+2)$$

Aplikujeme 2.11 induktivně, pak

$$\exists OA(\prod_1^k p_i^{r_i},s+2)=OA(n,s+2) \Rightarrow NOL\check{C}(n) \geq s$$

□

Důsledek 2.13.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n>2 \wedge n \neg \equiv 2 \mod 4 : NOL\check{C}(n) \geq 2$$

Důkaz. Rozložíme n na mocniny prvočísel. Pak pokud v rozkladu je 2, tak má exponent aspoň 2. Protože jinak je $n \neg \equiv 2 \mod 4$, což jsme vyloučili předpokladem. Pro ostatní prvočísla $p_i^{r_i}-1 \geq 2$. Dohromady $s \geq 2$. □

Lemma 2.14.
$$\exists OA(m,4) \Rightarrow \exists OA(3m+1,4)$$

Důkaz. Nechť $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Dal vezmeme okruh $\mathbb{Z}_{2m+1}$ a máme dle předpokladu $OA(m,4)$
$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}$$

Vezmeme

$$\begin{aligned} a_i &= (i, i, ..., i) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^m \\ b_i &= (i+1, i+2, ..., i+m) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^m \\ c_i &= (i-1, i-2, ..., i-m) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^m \\ A &= (a_0, a_1, ..., a_{2m}) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^{m(2m+1)} \\ B &= (b_0, b_1, ..., b_{2m}) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^{m(2m+1)} \\ C &= (c_0, c_1, ..., c_{2m}) \in \mathbb{Z}_{2m+1}^{m(2m+1)} \\ X &= (x_1, x_2, ..., x_m, x_1, x_2, ..., x_m ...) \in X^{m(2m+1)} \end{aligned}$$

Pak sestavíme $OA(3m+1,4)$ nad prvky $X \cup \mathbb{Z}_{2m+1}$ takto:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 2m & A & B & C & X & D_1 \\ 0 & 1 & ... & 2m & B & A & X & C & D_2 \\ 0 & 1 & ... & 2m & C & X & A & B & D_3 \\ 0 & 1 & ... & 2m & X & C & B & A & D_4 \end{pmatrix}$$

Počet sloupců je

$$(2m+1) + 4m(2m+1) + m^2 = 9m^2 + 6m + 1 = (3m+1)^2$$

Teď zkontrolujeme, že $\forall x, y \in X, \forall i, j \in \mathbb{Z}_{2m+1}$ najdeme následující dvojice v sloupcích aspoň jednou.
$z_{i,i} = \binom{i}{i}, z_{i,j} = \binom{i}{j}, z_{i,x} = \binom{i}{x}, z_{x,i} = \binom{x}{i}, z_{x,y} = \binom{x}{y}$
Pak kvůli velikosti tabulky dvojice bude v OA právě jednou.

- $z_{i,i}$ je na začátku v $0, 1, ..., m$.
- $z_{i,j}$ je v $\binom{A}{B} \cup \binom{B}{A}$ nebo $\binom{A}{C} \cup \binom{C}{A}$ nebo $\binom{B}{C} \cup \binom{C}{B}$
- $z_{i,x}$ je v $\binom{A}{X} \vee \binom{B}{X} \vee \binom{C}{X}$
- $z_{x,i}$ je v $\binom{A}{X} \vee \binom{B}{X} \vee \binom{C}{X}$
- $z_{x,y}$ je v D.

$\square$

Věta 2.15 (Dolní odhad NOLČ - 2).

$$\forall k > 0 : NOL\check{C}(12k+10) \geq 2$$

Důkaz. Pokud vezmeme $m = 4k + 3$ pak dle 2.13

$$\exists OA(4k+3,4) \Rightarrow^{lemma} \exists OA(3(4k+3)+1,4) = OA(12k+10,4) \iff NOL\check{C}(12k+10) \geq 2$$

$\square$

Poznámka 2.16. Ortogonální tabulky se používají např pro rozvrhovaní turnaje kde každý hraje s každým jednou. Z toho turnaje mají určitý počet hráčů, aby existovala příslušná OA.
V bridge to je složitější, protože nejlepší hraje s nejhorším. Po nějakém počtu roundů už nejde pokračovat dal.