Kombinatorické struktury

prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

19. března 2021

Obsah

1 Konecne/Afinni projektivní roviny

2 Latinské čtverce

Definice 2.1. Latinský obdélník je matice $L \in X^{k \times n}$. Taková, že prvky se neopakuji ani ve sloupcích ani v řádcích. Kde X je n-prvková množina. Typický $\{1,...,n\} := [n]$.
Na řádky lze nahlížet jako na permutace.

Věta 2.2 (Latinské čtverce). *Každý Latinský obdélník řádu $k \times n$ lze doplnit na Latinský čtverec řadu $n \times n$.*

Důkaz. Dokážeme přidaní nových řádků v závislostí na již existujících řádcích.
V k-tem kroků se podíváme na j-tý sloupec. Nechť M_j bude množina kandidátů které můžeme dat na j-tou pozici v novém řádku.

$$M_j = [n] \setminus \{L_{ij} : i = 1,2,...,k\}$$

Teď musíme z množin M_j vzít po 2 různé prvky. Jinými slovy, hledáme Systém různých reprezentantů - SRR pro $\{M_j\}_1^n$.
Sestavíme graf, kde vrcholy jsou množiny M_j a prvky z $[n]$.

$$(l, M_j) \in E \iff l \in M_j$$

Pak tento bipartitní graf je $(n-k)$-regulární. Protože $\forall x$ je v $(n-k)$ množinách M_j.
Dle Hallové věty, v takovém grafu existuje perfektní párovaní, které určuje SRR. $\square$

Důsledek 2.3. *Latinských čtverců řádu n je $\mathcal{O}(n!)$.*

Důkaz. BUNO: v prvním řádku je $\{1,2,...,n\}$. Jinak můžeme vhodně přejmenovat prvky. V druhém řádku musí být permutace $[n]$ bez pevných bodů. Z *problému šatnářky* takových permutaci je

$$\frac{n!}{e}$$

Pak dle věty každý obdélník lze doplnit na čtverec. $\square$

Definice 2.4. Latinský čtverce jsou kolmé
Taky lze definovat ortogonalitu nad různými množiny.

Značení 2.5. $NOL\check{C}(n)$ značíme největší počet navzájem ortogonálních Latinských čtverců řádu n.

Věta 2.6 (Horní odhad NOLČ).

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 : NOL\check{C}(n) \leq n - 1$$

Důkaz. Nechť

$$L^1,...,L^t \in \{1,...,n\}^{n \times n}, \forall i \neq j : L^i \perp L^j$$

BUNO: přejmenujeme prvky v každém LČ tak, aby v prvním řádku bylo $\{1,2,...,n\}$. Takto vyrobíme LČ $L^{1\prime},...,L^{t\prime}$.
Tvrdíme ale, že ortogonalita je zachovaná. Obecně pro libovolná permutace π aplikovaná ne jeden z dvojice ortogonálních LČ zachovává ortogonalitu.
Pak na pozici $(2,1)$ nemůže být 1. Pokud tam ale bude nějaké písmeno a, tak čtverce nebudou ortogonální, protože všechny dvojice (i,i) máme v prvním řádku. Z toho na pozice $(2,1)$ můžou být prvky $\{2,...,n\}$ po 2 různé. Takže $NOL\check{C}(n) \leq n-1$. $\square$

Kdy máme extremální řešení?

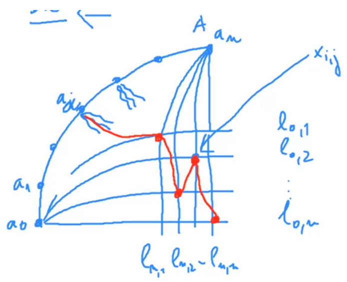
Věta 2.7 (Extremální NOLČ a KPR).

$$NOL\check{C}(n) = n - 1 \iff \exists KPR(n)$$

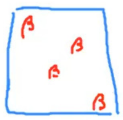
Z předchozí přednášky platí pro mocniny prvočísla.

Důkaz. $KRP \Rightarrow L\check{C}$. Sestavíme nevlastní přímku A, svislé a vodorovné přímky. Dal přímky spojující A a průniky svislých a vodorovných přímek budou určovat LČ.

$$L^{\alpha}_{i,j} = \beta \iff x_{i,j} \in k_{\alpha,\beta}$$



Pak písmena v LČ odpovídající červené přímce budou:



Z axiomu KPR svislé, vodorovné a přímky procházející body a_α se protínají právě v 1 bodě. Takže písmena se neopakuji v rádcích a sloupcích.
Jsou $\perp$ protože

$$\forall \beta, \beta' \exists! (i,j) : L^{\alpha}_{i,j} = \beta \wedge L^{\gamma}_{i,j} = \beta'$$

Protože přímky se nemůžou protínat na nevlastní přímce A, takže se protínají uvnitř šachovnice.

$$\exists! x_{i,j} \in l_{\alpha,\beta} \cap l_{\gamma,\beta'}$$

$L\check{C} \Rightarrow KPR$. Nechť máme LČ

$$L^{\alpha}, \alpha \in \{1, 2, ..., n-1\}$$

Sestavíme nevlastní, svislé a vodorovné přímky.
Šikmé přímky vytvoříme dle:

$$L^{\alpha}_{i,j} = \beta \iff x_{i,j} \in k_{\alpha,\beta}$$

Ověříme axiomy:

- A_1. Přímky ze stejného svazku šikmých přímek se protínají v nevlastním bodě. Vodorovné a svislé se protínají v šachovnici.

  Šikmé vs svislé a Vodorovné vs svislé se protínají protože průniky jsou určené LČ. 2 Šikmé přímky se protínají právě v 1 bodě protože čtverce jsou $\perp$.

- A_3. Plyne z toho, že $n \geq 2$.

- A_2. Spočítáme 2ma způsoby # 3jic.

  $$T = |\{((x,y),l) : x \neq y \in X, l \in L, x,y \in l\}|$$

  Máme (n^2+n+1) přímek, na každé z nich je $(n+1)$ bodů. Pak

  $$T = (n^2+n+1)\binom{n+1}{2}$$

  Na druhou stranu, máme (n^2+n+1) bodů. Každou 2ci prochází nejvýše 1 přímka.

  $$T \leq 1 \cdot \binom{n^2+n+1}{2}$$

  Dohromady

  $$(n^2+n+1)\binom{n+1}{2} \leq \binom{n^2+n+1}{2}$$

  Po roznásobení dostaneme stejná čísla na obou stranách, což může nastat pouze v případě že každou 2cí bodů prochází *právě 1* přímka.

□

Definice 2.8. Ortogonální tabulka

Věta 2.9 (Ortogonální tabulka a NOLČ).

$$\forall n,d \in \mathbb{N} \exists OA(n,d) \iff NOL\check{C}(n) \geq d-2$$

Důkaz. □

Věta 2.10 (Tenz produkt Ortogonálních tabulek).

$$\forall n,m,d \in \mathbb{N} \;\; \exists OA(n,d) \wedge OA(m,d) \Rightarrow \exists OA(mn,d)$$

Důkaz. □

Věta 2.11 (Dolní odhad NOLČ). *Nechť* $n = \prod_1^k p_i^{r_i}$ *je faktorizace* n*. Pak*

$$NOL\check{C}(n) \geq \min_{i=1}^{k}\{p_i^{r_i} - 1\}$$

Důkaz. □

Důsledek 2.12.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 2 \wedge n \neg \equiv 2 \mod 4 : NOL\check{C}(n) \geq 2$$

Lemma 2.13.

$$\exists OA(m,4) \Rightarrow \exists OA(3m+1,4)$$

Věta 2.14 (Dolní odhad NOLČ - 2).

$$\forall k > 0 : NOL\check{C}(12k+10) \geq 2$$

Důkaz. □