EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B

PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 4

Calcul intégral

4.1 Intégrale définie

4.1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit f continue sur $[\,a; b\,]$ $(a < b)$
On considère le domaine D du plan, limité par

$$y = f(x), \quad y = 0, \quad x = a \quad \text{et} \quad x = b$$

L'aire **analytique** du domaine D est définie positive si $f(x) \geq 0$ et négative si $f(x) \leq 0$.
On cherche à déterminer (à définir) l'aire analytique de D.
On partage l'intervalle $[\,a, b\,]$ en n intervalles

$$[\,x_{k-1}, x_k\,] \quad 1 \leq k \leq n \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_n = b$$

Puis on choisit arbitrairement une abscisse t_k dans chaque intervalle $[\,x_{k-1}, x_k\,],\ 1 \leq k \leq n$
La somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x$$

avec

$$\Delta x = x_k - x_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n$$

est la somme des aires analytiques des domaines rectangulaires.

Définition: La somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x$$

est appelée somme de Riemann de f sur $[\,a, b\,]$
Elle dépend du choix du partage de $[\,a, b\,]$ et du choix de chaque $t_k \in [a, b]$

Cas particulier: Les sommes de Darboux.
Pour un partage donné de $[a, b]$, on définit:

- La somme de Darboux inférieure:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$

  où m_k le min de f sur $[x_{k-1}, x_k]$

- La somme de Darboux supérieure:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

  où M_k le max de f sur $[x_{k-1}, x_k]$

Définition: Si pour $n \to \infty$ tous les $\Delta x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et si

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(_k)\Delta x_k$$

existe indépendamment du choix du partage et du choix des t_k $1 \leq k \leq n$ alors f est dit intégrable au sens de Riemann et cette limite est appelée l'intégrale définie de f un $[a, b]$ et un la note

$$\int_a^b f(x)dx$$

Intégrale de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

L'intégrale définie de f sur $[a, b]$ est par définition, la mesure de l'aire analytique du domaine D.

Théorème (sans démonstration): Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable au sens de Riemann

Exemple:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, a](a > 0)$$

- Soit

$$u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

  Montrer que

$$t_n = \frac{1}{3}n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1)$$

- Déterminer les 2 sommes de Darboux de f sur $[0, a]$ relativement à un découpage de $[0, a]$ en n intervalles isométriques.

  Et vérifier que ces 2 sommes convergent vers la même valeur.

- $u_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$

  - Vérification pour $n = 1$:
  $$u_1 = 1^2 = 1$$
  et
  $$\frac{1}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\Big|_{n=1} = \frac{1}{3}\cdot 1 \cdot \frac{3}{2}\cdot 2 = 1$$

  - Démonstration du pas de récurrence:
  Hypothèse: $u_n = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné
  Conclusion: $u_{n+1} = \frac{1}{3}(n+1)(n+\frac{3}{2})(n+2)$
  Preuve:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\left(n\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right) + 3(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\left(n+\frac{7}{2}n+3\right) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)
\end{aligned}$$

$\square$

- Sommes de Darboux

  - Partition de $[0, a]$ en n intervalles isométriques:
  $$\Delta x_k = \frac{a}{n}, \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{et} \quad x_k = k\cdot\frac{a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n$$

  - Somme de Darboux supérieure:
  $f(x) = x^2$ est strictement croissante, donc $M_k = f(x_k)$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\frac{a}{n}\right)^2\cdot\frac{a}{n} \\
&= \left(\frac{a}{n}\right)^3\sum_{k=1}^{n}k^2 \\
&= \left(\frac{a}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{3}(n)\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(n+1) \\
&= a^3\cdot\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a^3}{3}$$

– Somme de Darboux inférieure:
$f(x) = x^2$ est strictement croissante donc $m_k = f(x_{k-1})$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left((k-1) \cdot \frac{a}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n} \\ &= \left(\frac{a}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \\ &= \frac{a^3}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{a^3}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \\ &= \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{3}(n-1)\left(n - \frac{1}{2}\right)(n) \\ &= a^3 \cdot \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a^3}{3}$$

– Les 2 sommes de Darboux convergent vers la même valeurs $\frac{a^3}{3}$
Or $f(x) = x^2$ est continue sur $[0, a]$ donc

$$\int_0^a x^2 \cdot dx = \frac{a^3}{3}$$

□

Quelques conséquences de la définition

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
   En particulier
   $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$
   d'où
   $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$
   $$\overset{a<b}{\underset{f(x)>0}{}} \int_a^b \underbrace{f(x)}_{>0} \underbrace{dx}_{>0} > 0 \qquad \int_b^a \underbrace{f(x)}_{>0} \underbrace{dx}_{<0} < 0$$

□

3. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

5. Si $a < b$ et si
$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b]$$
alors
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
⚠ Attention! La réciproque est fausse.
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
mais
$$f(x) \not\leq g(x), \quad \forall x \in [a, b]$$
6. $\int_a^b |f(x)|dx \geq \left|\int_a^b f(x)dx\right| \quad a < b$
7. • Si f est paire sur $[-a, a]$, $\quad (a > 0)$ alors
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$$
   • Si f est impaire sur $[-a, a]$, $\quad (a > 0)$ alors
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

4.1.2 Théorème fondamental du calcul intégral

1. Théorème de la moyenne

   Soit f continue sur $[a, b]$
$$\exists c \in [a, b] \text{ t.q. } \int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Définition: Soient $m = \min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ et $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$
$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$
$$\Longrightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$
$$[\int_a^b k \cdot dx = k(b - a)]$$
$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a) \quad (b - a > 0)$$
$$\Longrightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \leq M$$

Or f est continue sur $[a, b]$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire

$$\exists c \in [a, b] \text{ t.q.}$$

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

□

Autre expression du théorème de la moyenne

$$\exists\, \theta \in [0, 1] \text{ t.q. } \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = h \cdot f(x_0 + \theta h)$$

□

2. Théorème fondamental

Définition: Soit f continue sur $[a, b]$, on définit la "fonction-aire" associé à f sur $[a, b]$ par

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$