EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B

PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 4

Introduction aux équations différentielles

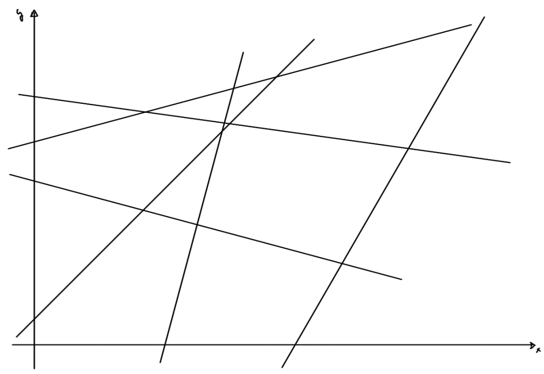
Origines des équations différentiel: la mécanique de Newton.

$$F = ma \quad \text{avec} \quad a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

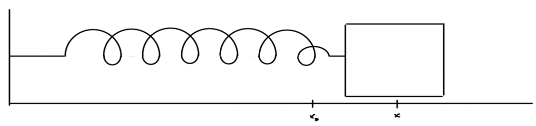
1. $F = 0: \quad m\ddot{x}(t) = 0$

   Quelle est la fonction $x(t)$ satisfaisant la relation $\ddot{x}(t) = 0$?

   N'importe quelle équation polynomiale de premier degré.



2. Oscillation harmonique



$$\begin{cases} f = -kx \\ f = ma \end{cases} \implies m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

équation différentielle de $x(t)$

3. Oscillateur harmonique amorti (milieu visqueux)

$$\begin{cases} f = -dx - \mu\dot{x} \\ f = ma \end{cases} \implies m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \mu\dot{x}(t)$$

Une équation différentielle de $f(x)$ est une relatino entre $x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)$ dont l'inconnue est $f(x)$

4.1 Équation différentielle linéaire de premier ordre

1. C'est une équation du type

$$y'(x) + \rho(x)y(x) = r(x)$$

où les "fonctions-coefficients" $\rho(x)$ et $r(x)$ sont continues sur $D \subset D_\rho \cap D_r$

Exemple: $y' = yx \in \mathbb{R}$

- $y = 0$ est solution
- $y \neq 0, \quad \frac{y'}{y} = 1 \implies \ln|y| = x + c \iff |y| = e^{x+c}$

$$y = \pm e^{x+c} = \pm e^c e^x$$

En résumé $y = Ae^x, \quad A \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$ décrit toutes les solutions de l'équation $y' = y$

2. Équations homogène (sans second membre $(r(x) = 0)$)

$$y'(x) + \rho(x)y(x) = 0, \quad x \in I$$

Théorème 1: Toutes les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y = ce^{\int_{x_0}^{x} \rho(t)dt}, \quad \text{où } x_0 \in I, \quad c \in \mathbb{R}$$

Remarques:

(a) Si y_1 et y_2 sont 2 solutions, alors ne diffèrent que d'une constante multiplicative
(b) Pour une solution donnée, on observe que $y(x_0) = c$, donc en fixant $y(x_0)$, on obtient une unique solution.

Démonstration:

- Soit

$$w(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} \rho(t)dt}$$

$$w'(x) = -\rho(x)w(x)$$

et

$$w'(x) + \rho(x)w(x) = -\rho(x)w(x) + \rho(x)w(x) \equiv 0$$

donc $w(x)$ est solution de l'équation homogène.

- Soit $u(x)$ une autre solution de l'équation homogène, on pose:

$$\varphi(x) = \frac{u(x)}{w(x)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{u'(x)w(x) - u(x)w'(x)}{w^2(x)} = \frac{-u(x)w(x) \cdot w(x) - u(x) \cdot (-\rho(x)w(x))}{w^2(x)} \equiv 0$$

$$\varphi(x) = \frac{u(x)}{w(x)} \quad \text{est constante} \quad \implies \frac{u(x)}{w(x)} = c \implies u(x) = c \cdot w(x)$$

□

$$y(x) = cw(x) = ce^{-\int_{x_0}^{x} \rho(t)dt}$$

est la solution générale de l'équation homogène.

Exemples:

(a) $y'(x) + \cos(x)y(x) = 0$

- Soit on applique le théorème 1:

$$y(x) = ce^{-\int_0^x \cos(t)dt} = ce^{-\sin(x)}$$

- Soit on résout

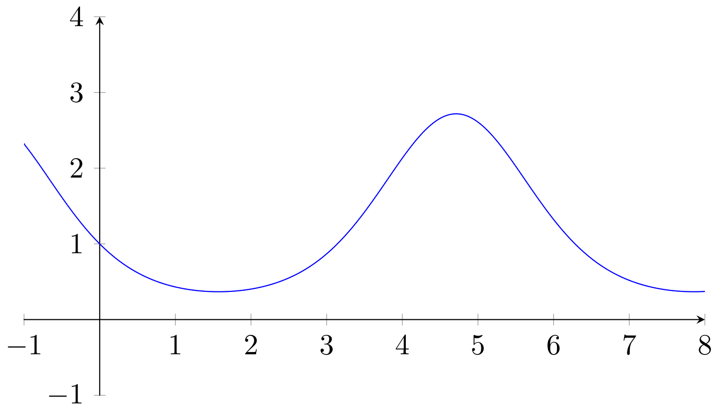
$$y'(x) + \cos(x)y(x) = 0$$

 - $y = 0$ est solution
 - $y \neq 0 \implies y'(x) = \cos(x) \cdot y(x)$

$$\implies \frac{y'}{y(x)} = -\cos(x) \implies \ln(|y(x)|) = -\sin(x) + c$$

$$\implies |y(x)| = e^{-\sin(x)+c} \iff y(x) = \pm e^c \cdot e^{-\sin(x)}$$

D'où $y(x) = Ae^{-\sin(x)}$, $\quad A \in \mathbb{R}$ Si on fixe $y(0) = 1$ On a: $A = 1, \quad y = e^{-\sin(x)}$



(b) Evalutation de la vitesse d'un corps dans un milieu visqueux
$F = -\mu v$ (force de frottement proportionnlement à la vitesse).
et $F = ma$

$$\implies m\dot{v}(t) = -\mu(v(t))$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{\mu}{m}v(t) \implies v(t) = ce^{\frac{\mu}{m}t} \implies \text{si } v(0) = v_0$$

alors

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t}$$

3. Équation générale (inhomogène, avec le second membre)

$$y'(x) + \rho(x)y(x) = r(x)$$

   (a) Recherche d'une solution particulière
      i. Par tâtonnement

      Exemples 1: $y'(x) + y(x) = 1$
      $y = 1$ est une solution particulière

      Exemple 2: On cherche une solution particulière de type $y = ax + b$

$$y'a = a \quad \text{et} \quad y'(x) + y(x) = y \iff a + [ax + b] = x$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \implies y = x - 1$$

   (b) Méthode de la variation de constantes Soit $u(x) = c \cdot w(x)$ la solution générale de l'équation homogène
   On cherche une solution particulière de la forme.

$$y(x) = c(x) \cdot w(x)$$

$$y'(x) = c'(x)w(x) + c(x)w'(x)$$

   et

$$y'(x) + \rho(x)y(x) = r(x)$$

$$\implies c'(x)w(x) + c(x)w'(x) + \rho(x)c(x)w(x) = r(x)$$

$$\implies c'(x)w(x) = r(x) \implies r(x) \implies c(x) = \int \frac{r(x)}{w(x)} dx$$

[missing the end of Zano's appunti]

4.2 Équations différentielles linéaires du 2^e ordre

4.2.1 Existance et unicité des solutions

Une équation linéaire d'ordre 2 est de type

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$$

avec p, q, r continues sur I

Théorème 1 (sans démonstration)
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. L'équation ci-dessous admet une et une seule solution vérifiant les conditions initiales:

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

4.2.2 Équation homogène

1. Indépendance des solutions

Définition Deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ définis sur I sont linéairement dépendants sur I si et seulement si elles sont colinéaire

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } y_1(x) = c \cdot y_2(x)$$

Sinon elles sont linéairement indépendantes.

Définition Soit $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux fonctions dérivable sur I. On appelle "Wronskien" de $y_1(x)$ et $y_2(x)$ noté

$$W[y_1, y_2](x)$$

le déterminant

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)$$

Théorème 2 Soient

$$y'' + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

et $y_1(x), y_2(x)$ deux solutions de cette équation, alors $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si

$$W[y_1, y_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

Démonstration

(a) $\implies$ par la contraposée
Soit

$$x_0 \in I \text{ t.q. } W[y_1, y_2](x_0) = 0$$

Donc

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Posons

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$y(x)$ est solution de l'équation différentielle et vérifie $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$
Or d'après le théorème 1 donc $y(x) = 0$ est l'unique solution de cette équation différentielle avec CI.

$$y(x) = 0 \iff c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

$$\iff y_1(x) \text{ et } y_2(x) \text{ sont linéairement dépendantes}$$

(b) $\impliedby$ trivial

2. Solution générale de l'équation homogène

Théorème 3 Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ 2 solutions indépendantes de l'équation homogène

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = r(x)$$

Alors la solution générale s'écrit

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Démonstration Soit $y(x)$ une solution de l'équation homogène et $x_0 \in I$

$$W[y_1, y_2](x_0) \neq 0 \iff \exists A, B \in \mathbb{R} \text{ t.q.}$$

$$\begin{cases} Ay_1(x_0) + By_2(x_0) = y(x_0) \\ Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

On pose

$$z(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

Et $z(x)$ est solution de l'équation homogène avec

$$\begin{cases} z(x_0) = y(x_0) \\ z'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

Et d'après le théorème 1:

$$z(x) = y(x) \quad \forall x \in I$$

La réciproque est évidente

Remarques

(a) Il est en général difficile de trouver des solutions de l'équation homogène

(b) Si on connait une solution $y_1(x)$ de l'équation homogène, alors $\exists y_2(x) = c(x) \cdot y_1(x)$ solution de l'équation homogène indépendantes de $y_1(x)$ (ex. 2 série 14)

3. Cas particuliers

   (a) Équation linéaire d'ordre 2^e à coefficients constants

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = r(x) \quad p, q \in \mathbb{R}$$

On cherche des solutions de type

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda \cdot e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0 \iff \left[\lambda^2 + p\lambda + q\right] \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\iff \lambda + p\lambda + q = 0 : \quad \text{équation caractéristique}$$

Si $\Delta > 0$

$$(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = 0$$

et

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

sont des solutions indépendantes de l'équation homogène.
La solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple Résoudre

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$

l'équation caractéristique s'écrit

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\iff (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3$$

(b) Équation d'Euler
Soit

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0, \quad x > 0$$

On cherche des solutions de type $y(x) = x^r$

$$ax^2[r(r-1)x^{r-2}] + bx[rx^{r-1}] + cx^r = 0$$

$$[ar(r-1) + br + c] \cdot \underbrace{x^r}_{\neq 0} = 0 \iff ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

Exemple Résoudre

$$x^2 \cdot y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

$$y = x^r, \quad x > 0$$

$$x^2 \left[r(r-1)x^{r-2}\right] - 2x \left[rx^{r-1}\right] + 2x^r = 0$$

$$\iff r(r-1) - 2r + 2 = 0 \iff r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$\iff (r-2)(r-1) = 0$$

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2$$

et

$$y = Ax + Bx^2, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation d'Euler

4.2.3 Équation inhomogène

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = r(x)$$

avec p, q, r continues sur I.

Théorème 4 (sans démonstration)
Toute solution de l'équation inhomogène s'écrit

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x)$$

où y_p est une solution particulière de l'équation inhomogène et y_H est la solution de l'équation homogène.

$$y(x) = y_p(x) + Ay_1(x) + By_2(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène.

Recherche d'une équation particulière Méthode de variation des constantes
On cherche une solution de type

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$$

$$\begin{array}{l|lcl}
\cdot\, q & y & = & A y_1 + B y_2 \\
\cdot\, p & y' & = & \underline{A' y_1} + A y_1' + \underline{B' y_2} + B y_2' \\
+ & y'' & = & A'' y_1 + A' y_1' + A' y_1' + \underset{0}{A y_1''} + B'' y_2 + \underset{0}{B' y_2'} + B' y_2' + \underset{0}{B y_2''} \\
\hline
r(x) & & &
\end{array}$$

En impostant la contrainte

$$A'y_1 + B'y_2 = 0$$

on obtient

$$A''y_1 + A'y_1' + B''y_2 + B'y_2' = 0$$

et il reste

$$r(x) = A'y_1' + B'y_2'$$

les fonctions dérivées A' et B' sont donc solutions du système

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = r(x) \end{cases}$$

qui admet une solution unique car son déterminant est le Wronskien $W[y_1, y_2](x)$

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = r(x) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-y_2') \\ \cdot(y_2) \end{array} \right.$$

$$A'(\underbrace{-y_1y_2' + y_1'y_2}_{-W(\neq 0)}) = r(x) \cdot y_2$$

$$A' = -\frac{r(x) \cdot y_2}{W}$$

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = r(x) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-y_1') \\ \cdot(y_1) \end{array} \right.$$

$$B'(\underbrace{-y_2y_1' + y_1y_2'}_{-W(\neq 0)}) = r(x) \cdot y_1$$

$$B' = -\frac{r(x) \cdot y_1}{W}$$

D'où

$$A = \int -\frac{r(x)y_2}{W}dx \quad \text{et} \quad B = \int \frac{r(x) \cdot y_1}{W}dx$$

Exemple

$$y'' - 3y'(x) + 2y(x) = \sin(x)$$

- Résolution de l'équation homogène

$$y'' - 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

Équation caractéristique:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

D'où

$$y_H = Ae^x + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

- Recherche de $y_p(x)$ Variation des constantes

$$y_p(x) = A(x) \cdot e^x + B(x)e^{2x}$$

avec A' et B' solutions de

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = \sin(x) \end{cases} \iff \begin{cases} A'e^x + B'e^{2x} = 0 \\ A'e^x + 2B'e^{2x} = \sin(x) \end{cases}, W = e^{3x}$$

$$A' = -\frac{\sin(x)e^{2x}}{e^{3x}} = -e^{-x}\sin(x) \quad \text{et } B' = \frac{\sin(x)e^x}{e^{3x} = e^{-2x}\sin(x)}$$

Intégration par parties

$$A(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) \quad \text{et} \quad B(x) = -\frac{1}{5}e^{-2x}(\cos(x) + 2\sin(x))$$

$$\implies y_p(x)\frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) - \frac{1}{5}(\cos(x) + 2\sin(x))$$

Et la solution générale

$$y(x) = y_p(x) + Ae^x + Be^{2x} = \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x) + Ae^x + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

4.3 Cas particulier

Équation linéaire, homogène, du 2^e ordre à coefficients constants

$$y'' + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

4.3.1 Équation caractéristique

On cherche 2 solutions indépendantes du type

$$y = e^{\lambda x}$$

$$y = e^{\lambda x}; \quad y' = \lambda e^{\lambda x}; \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$y'' + py' + qy = 0 \implies (\lambda^2 + p\lambda + q)\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \iff \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

(équation caractéristique)
Trois cas à distinguer:

4.3.2 Premier cas: $\Delta > 0$

L'équation caractéristique admet 2 solutions distinctes

$$\lambda_+ \quad \text{et} \quad \lambda_-$$

Donc

$$y_1 = e^{(\lambda_+)x} \quad \text{et} \quad y_2 = e^{(\lambda_-)x}$$

sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène, et la solution générale de l'équation homogène s'écrit:

$$y = Ay_1 + By_2 = Ae^{(\lambda_+)x} + Be^{(\lambda_-)x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

4.3.3 Deuxième cas: $\Delta = 0$

L'équation caractéristique admet deux racines confondues:

$$\lambda = -\frac{p}{2}$$

Donc

$$y_1 = e^{\lambda x} = e^{-\frac{p}{2}x}$$

est une solution de l'équation homogène.
On cherche une 2^e indépendante de y_1 de la forme

$$y_2 = c(x)y_1(x)$$

$$y_2(x) = c(x) \cdot e^{-\frac{p}{2}x}; \quad y_2'(x) = c'(x)e^{-\frac{p}{2}x} - c(x)\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x}; \quad y_2''(x) = c''(x)e^{-\frac{p}{2}x} - 2\frac{p}{2}c'(x)e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}c(x)e^{-\frac{p}{2}x}$$

$$y_2''(x) + py_2' + qy_2 = 0 \iff c''(x)e^{-\frac{p}{2}x} - pc'(x)^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}c(x)e^{-\frac{p}{2}x} + p\left[c'(x)e^{-\frac{p}{2}} - \frac{p}{2}c(x)e^{-\frac{p}{2}x}\right] + q\left[c(x)e^{-\frac{p}{2}x}\right] = 0$$

Or

$$\Delta = 0 \iff p^2 - 4q = 0$$

Donc il reste

$$c''(x)\underbrace{e^{-\frac{p}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

et

$$c''(x) = 0$$

donne

$$c'(x) = \text{ cste}$$

et

$$c(x) = x(\text{par example})$$

Posons

$$y_2(x) = x \cdot y_1(x) = xe^{\lambda x}$$

Donc la solution générale s'écrit

$$y = Ay_1 + By_2 = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

4.3.4 Troisième cas: $\Delta < 0$

L'équation caractéristique admet 2 solutions complexes conjugés

$$\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas on peut définir 2 solutions indépendantes

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \quad \text{et} \quad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

Démonstration Les solutions à valeurs réels complexes sont données par

$$z_1(x) = e^{\alpha + i\beta)x} \quad \text{et} \quad z_2(x) = e^{\alpha - i\beta)x}$$

$$z_1(x) = e^{\alpha} \cdot [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)]$$

$$z_2(x) = e^{\alpha} \cdot [\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)]$$

Toutes les solutions complexes sont combinaisons linéaires de z_1 et z_2
En particulier les solutions réelles suivantes:

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = e^{\alpha} \cos(\beta x)$$

et

$$y_2(x) = \frac{1}{2i}(z_1 + z_2) = e^{\alpha} \sin(\beta x)$$

sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène

$\square$

On en déduit la solution générale de l'équation homogène:

$$y(x) = e^{\alpha x} \left[A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right], \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple Équation inhomogène

$$y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = e^{2x}$$

- Solution générale de

  $$y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0$$

  Équation caractéristique

  $$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

  $$\Delta' = 4 - 13 = -9 = (\pm 3i)^2$$

  $$\lambda_{\pm} = 2 \pm 3i$$

  Don la solution générale de l'équation s'écrit

  $$y(x) = e^{2x} \left[A \cos(3x) + B \sin(3x) \right] \quad A, B \in \mathbb{R}$$

- Recherche d'une solution particulière

  Ansatz:

$$y_p = ke^{2x}; \quad y_p' = 2ke^{2x}; \quad y_p'' = 4ke^{2x}$$

$$y_p'' - 4y_p' + 13y_p = e^{2x} \iff 4ke^{2x} - 8ke^{2x} + 13ke^{2x} = e^{2x}$$
$$\iff 9k = 1 \iff k = \frac{1}{9}$$
$$y_p = \frac{1}{9}e^{2x}$$

  D'où la solution générale de l'équation initiale

$$y(x) = e^{2x}\left[\frac{1}{9} + A\cos(3x) + B\cos(3x)\right]$$

Autre exemple (dessin d'une masse attachée a un ressort, flemme de dessiner...)
Soit une masse m accroché à un ressort don la force de rappel (proportionnelle à l'allongement) vaut

$$-kx$$

et qui subit une force de frottement (proportionnelle à la vitesse) qui vaut

$$-\mu\dot{x} \quad (\mu > 0)$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x}$$

ou

$$\ddot{x} + \frac{u}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On pose

$$w_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{(pulsation propre)} \qquad 2\nu = \frac{\mu}{m} \quad (\nu > 0)$$

L'équation s'écrit

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\dot{x}(t) + w_0^2 x(t) = 0$$

avec les conditions initialles

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Équation caractéristique:

$$\lambda^2 + 2\nu\lambda + w_0^2 = 0$$
$$\Delta' = \nu^2 - w_0^2 = 0$$

1. $\Delta > 0 \quad (\nu^2 > w_0^2)$ mouvement fortement amorti 2 racines réelles

$$\lambda_\pm = -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - w_0^2} \quad (\lambda_\pm < 0)$$

   La solution générale s'écrit:

$$x(t) = Ae^{(\lambda_+)t} + Be^{(\lambda_-)t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

avec

$$x(0) = x_0 \iff A + B = x_0$$

et

$$\dot{x}(t) = A(\lambda_+)e^{(\lambda_+)t} + B(\lambda_-)e^{(\lambda_-)t}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(0) = 0 &\iff A(\lambda_+) + B(\lambda_-) = 0 \\
&\iff A(-\nu + \sqrt{\nu^2 - w_0^2}) + B(-\nu - \sqrt{\nu^2 - w_0^2}) = 0 \\
&\iff -\nu \underbrace{(A + B)}_{=x_0} + \sqrt{\nu^2 - w_0^2}(A - B) = 0
\end{aligned}$$

$$A - B = \frac{\nu x_0}{\sqrt{\nu^2 - w_0^2}}$$

$$\begin{cases} A + B = x_0 \\ A - B = \frac{\nu x_0}{\sqrt{\nu^2 - w_0^2}} \end{cases}$$