# EPFL

## MAN
Mise à niveau

---

# Maths 1A
## PREPA-031(A)

---

*Student:*
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Chapter 4

# Nombres complexes

## 4.1 Définitions, forme cartésienne

**Rappel:**

$$x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x] \quad \text{est irréductible}$$

On ne peut par le factoriser comme

$$(x-a)(x-b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Nous voulons alors construire une extension des nombres réels $\mathbb{R}$ permettant de résoudre ce type d'équation:

$$x^2 + 1 = 0$$

On introduit pour cela un "nombre" $i$ ("imaginaire") tel que

$$\boxed{i^2 = -1}$$

**Remarque:** On connait les rotations

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Rot}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$$

On impose les mêmes règles de calcul que sur $\mathbb{R}$.

**Remarque:** Tout comme $i^2 = -1$, on a $(-i)^2 = ((-1)i)^2 = -1$ $i$ et $-i$ sont les 2 racines (complexes) de $-1$.
On admet l'écriture

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

Le symbole $\sqrt{.}$ n'est plus réservé à la racine positive d'un réel positif.
Pour l'équation $x^2 + 1 = 0$, l'ensemble solution est $\mathbb{S} = \{-i, i\}$
D'où la factorisation

$$x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

En effet

$$(x+i)(x-i) = x^2 \cancel{-ix} + \cancel{ix} - \underbrace{i^2}_{=-1} = x^2 + 1$$

**Exemple:** Résoudre en $x$:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Le discriminent vaut

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 = -1 \cdot 3$$

L'ensemble solution est alors

$$\mathbb{S} = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Nous allons donc manipuler des nombres de la forme cartésienne (ou algébrique)

$$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

**Définition:** L'ensemble

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

est l'ensemble des nombres complexes.

**Définition:** Soit $z = a + ib, \quad a, bin\mathbb{R}$

- $a$ : partie réelle de $z$ $\qquad \text{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$
- $b$ : partie imaginaire de $z$ $\qquad \text{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

Ainsi,

$$z = \text{Re}(z) + i \cdot \text{Im}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

**Remarque:** $i \cdot \mathbb{R} = \{i \cdot b \mid b \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des nombres imaginaires.

**Définition:** Opérations sur les nombres complexes
Soit $z = a + ib, \quad z' = a' + ib', \quad a, b, a', b'in\mathbb{R}$.

1. Égalité

$$z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ \text{et} \\ b = b' \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{et} \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

2. Addition $+$

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

ou encore

$$\text{Re}(z + z') = \text{Re}(z) + \text{Re}(z') \quad \text{et} \quad \text{Im}(z + z') = \text{Im}(z) + \text{Im}(z')$$

en particulier

$$\text{Re}(2z) = 2\text{Re}(z) \quad \text{et} \quad \text{Im}(2z) = 2\text{Im}(z)$$

3. Multiplication

$$z \cdot z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

ou encore

$$\text{Re}(zz') = \text{Re}(z)\text{Re}(z') - \text{Im}(z) - \text{Im}(z')$$
$$\text{Im}(zz') = \text{Re}(z)\text{Im}(z') - \text{Im}(z) - \text{Re}(z')$$

**Remarque:** Similitude avec $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$!

**Cas particuliers:** Pour $z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$

- $\lambda z = \lambda a + i\lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (amplification par un réel)
- $iz = ia + i^2 b = -b + ia$ (amplification par i)
- $z^2 = z \cdot z = (a+ib)^2 = a^2 + b^2 + i2ab$ (carré)

Avec ces deux lois $+$ et $\cdot$ étendant celles définies sur $\mathbb{R}$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps.
En effet,

- Élément neutre pour l'addition $0 = 0 + i0$
- L'opposé de $z = a + ib$ pour l'addition: $-z = -a - ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$
- Élément neutre pour la multiplication $1 = 1 + i0$
- L'inverse de $z = a + ib \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$ pour la multiplication est

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}}$$

En effet,

$$z \cdot \frac{1}{z} = (a+ib) \cdot \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

L'inverse permet de définir la division dans $\mathbb{C}$:
Soit $z_1$ et $z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_2} \cdot z_1 = \frac{z_1}{z_2}$$

**Définition:** Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R}$
Le nombre **conjugé complexe** (c.c.) de $z$, noté $\overline{z}$ , est le nombre

$$\boxed{\overline{z} = a - ib}$$

**Propriétés:** Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

1. $\boxed{\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}}$
2. $\overline{\overline{z}} = z$
3. $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z) \qquad \mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$
4. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
5. $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
6. $\overline{z} \cdot \overline{z'} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$
7. $\boxed{\begin{array}{c}\overline{z}=z \iff \mathrm{Im}(z)=0 \iff z\in\mathbb{R} \\ \overline{z}=-z \iff \mathrm{Re}(z)=0 \iff z\in i\mathbb{R}\end{array}}$

Vérification par calcul direct

**Définition:** Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R}$
Le **module** de $z$, noté $|z|$, est le nombre réel positif (ou nul)

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ou encore

$$\boxed{|z|^2 = z \cdot \overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$$

**Propriétés:**

- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $|\overline{z}| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ [missing last points from that slide]
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

## 4.2 Puissances et racines

### 4.2.1 Exposants entiers

**Définition:** Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme pour les réels, on définit " $z$ puissance $n$" comme

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ facteurs}}$$

De plus, si $z \neq 0$, on a les exposants nuls ou négatifs:

$$z^0 = 1 \quad z^{-1} = \frac{1}{z} \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

### 4.2.2 Racines complexes

**Définition:** Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$w \in \mathbb{C}$ est une racine $n^e$ de $z$ si $w$ vérifie $w^n = z$.
Nous admettons l'écriture $\sqrt[n]{z}$ pour désigner toutes les racines $n^e$ de $z$ complexes: $\sqrt{\cdot}$ est une fonction multivalente, pas comme sur $\mathbb{R}$.
D'où l'équivalence

$$\boxed{w^n = z \quad \iff \quad w = \underbrace{\sqrt[n]{z}}_{n \text{ valeurs}}}$$

**Exemple:** $\sqrt{-1} = \pm i$ : 2 valeurs

**Propriétés:** Soit $z \in \mathbb{C}$

- Toutes les propriétés des réels à exposants fractionnaires restent valables en posant
$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$
- $\sqrt[n]{|z|} = |\sqrt[n]{z}|$ toutes les racines $n^e$ de $z$ sont de même module!

**Exemple:**

$$\sqrt[3]{-1} = \begin{cases} -1 \text{ (évidemment)} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

En effet, $(-1)^3 = -1$

$$\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(1 \pm i3\sqrt{3} - 9 \mp i3\sqrt{3}\right) = -1$$

Ou encore, en résolvant $z^3 = -1 \iff$

$$z^3 + 1 = 0 \iff (z+1)\underbrace{\left(z^2 - z + 1\right)}_{\text{comme avant}} = 0$$

**Cas particuliers:** Écrire $\sqrt{z}$ sous la forme algébrique. Posons $z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$. Nous cherchons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\sqrt{a+ib} = \alpha + i\beta$$

problème équivalent:

$$a + ib = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Plutôt que la relation $2\alpha\beta = b$, utilisons le carré du module.

$$\alpha^2 + \beta^2 = |\alpha + i\beta|^2 = |\sqrt{a+ib}|^2 = \sqrt{|a+ib|^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Alors

$$\sqrt{z} = \sqrt{a+ib} = \alpha + i\beta \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a = \mathrm{Re}(z) \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2+b^2} = |z| \\ \mathrm{sgn}(\alpha\beta) = \mathrm{sgn}(b) = \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z)) \end{cases}$$

**Exemple:**

$$\sqrt{i} = \alpha + i\beta \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \mathrm{Re}(z) = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = |i| = 1 \\ \mathrm{sgn}(\alpha\beta) = \mathrm{sgn}(1) = +1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{2} \\ \mathrm{sgn}(\alpha\beta) = +1 \end{cases}$$

$$\iff \sqrt{i} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Application: résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$az^2 + bz + c = - \quad a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

Solution:

$$z_1, z_2 = \frac{-b + \sqrt{\beta}}{2a}$$

## 4.3 Plan complexe

### 4.3.1 Isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$

Tout nombre complexe $z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$, peut être associé à un point $M$ du plan, le plan complexe ou plan de Gauss. On dit que $a$ est l'affixe de $M$.
En effet $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ sont isomorphes: il existe une application linéaire bijective de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z &\longmapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \end{aligned}$$

et son inverse est

$$\begin{aligned} h^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto a + ib \end{aligned}$$

**Exemple:**

**Remarque:** $z$ et $\overline{z}$ sont symétrique par rapport à l'axe réel

### 4.3.2 Forme polaire

Tout point du plan (et donc du plan complexe) peut être donné sous forme polaire

**Définition:** Soit $z \in \mathbb{C}$
La forme polaire de $z$ est la donnée

- de la distance $r = |z|$ de $z$ à $O$: le module de $z$.
- de l'angle $\varphi$ entre l'axe réel et le rayon-vecteur

**Remarque:** $\varphi$ est noté $\arg(z)$, argument de $z$. $\varphi$ n'est pas unique, mais défini **à** $2\pi$ **près**. On écrit alors

$$z = (r, \varphi) \quad \text{avec} \quad r = |z| \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(z) \in \mathbb{R}$$

**Remarque:** On devrait écrire

$$z = (r, \varphi + k \cdot 2\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

mais une seule détermination suffit

**Définition:** Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **détermination principale** de l'argument de $z$.

$$\varphi = \arg(z) \in ]-\pi; \pi[$$

**Propriété:** Soi $z = (r, \varphi) \in \mathbb{C}$. Alors

$$\overline{z} = (r, -\varphi)$$

**Propriétés:** Passage entre les formes polaire et cartésienne.

- Soit $z = (r, \varphi)$
  Alors
  $$\text{Re}(z) = r \cdot \cos(\varphi)$$
  et
  $$\text{Im}(z) = r \cdot \sin(\varphi)$$
  d'où
  $$\boxed{z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))}$$

- Soit $z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$
  Alors
  $$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

**Exemple:** $z = -\sqrt{3} - i$

- $|z| = \sqrt{3 + 1} = 2$
- $\cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin(\varphi) = -\frac{1}{2}$

d'où $\varphi = \arg(z) = -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
Par example, pour $k = 0$ ou $k = 1$,

$$z = (2, -\frac{5\pi}{6}) = 2, \frac{7\pi}{6}$$

**Conséquences:**

1. Soient $M$ et $M_0$ dexu points du plan, d'affixe $z$ et $z_0$ respectivement.
   La distance de $M$ à $M_0$ est $|z - z_0|$.
2. Équation d'un cercle de rayon 1, centré à l'origine: tous les points sont à distance 1 de $O$.
   $$|z|^2 = z\overline{z} = 1^2$$
3. Équation d'un cercle centré en $z_0$ et de rayon $R$ $|z - z_0| = R$ ou $|z - z_0|^2 = R^2$

### 4.3.3 Translation

Une translation dans le plan de Gauss est donnée par une addition

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R} \\ z_2 &= a_2 + ib_2 \quad a_2, b_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\implies z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

Une translation de $t \in \mathbb{C}$ est une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T_t = \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z + t \end{aligned}$$

### 4.3.4 Similitude et formule de Moivre

Homothétie: dans $\mathbb{C}$, l'amplification par $\lambda \in \mathbb{R}$ est une homothétie (mise à l'échelle)

$$\begin{aligned} H_\lambda : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto H_\lambda(z) = \lambda z \end{aligned}$$

En effet

$$|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$$

et

$$\arg(\lambda z) = \begin{cases} \arg(z) & \text{si } \lambda > 0 \\ \arg(z) + \pi & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

En particulier $(-1) \cdot z = -z$ est le symétrique de $z$ par rapport à $O$.

**Remarque:** L'amplitude par $-1$ est aussi une rotation d'angle $\pi$ ( ou $-\pi$ ) autour de $O$ dans le cercle trigonométrique.
Comme $-1 = i^2$, on observe que multiplier par $i$ revient faire une rotation de $\frac{\pi}{2}$ !

$$-z = \text{Rot}_\pi(z) = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(z)) = \cdot i(iz)$$

avec

$$iz = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(z)$$

Ainsi

$$\arg(iz) = \arg(z) + \frac{\pi}{2} = \arg(z) + \arg(i)$$

**Rotation** dans $\mathbb{C}$ la multiplication par un nombre $w$ de module 1 ($|w| = 1, \quad w = (1, \alpha), \quad \alpha = \arg(w)$) est une rotation d'angle $\alpha = \arg(w)$

$$\begin{aligned} R_\alpha : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto R_\alpha(z) = w \cdot z = (1, \alpha) z \end{aligned}$$

Similitude [missing end of slide]

$$\begin{aligned} S_w : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto S_w(z) = w \cdot z \end{aligned}$$

(avec $S_w = H_\lambda \cdot \mathrm{Rot}(\alpha)$)
En effet, si $z_1 = (r_1, \varphi_1)$ et $z_2 = (r_2, \varphi_2)$, alors

$$z_1 z_2 = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$$

**Preuve**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2))) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

**Exemple:** $z_1 = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ et $z_2 = \left(\sqrt{6}, -\frac{5\pi}{6}\right)$
Calculer $z_1 z_2$.

- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 2\sqrt{3}$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} = -\frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$

En particulier, si $z_1 = z_2 = z = (r, \varphi)$

$$z^2 = (r^2, 2\varphi)$$

et par récurrence,

$$z^n = (r^n, n\varphi) = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

**Exemple:** Racine $n^e$ de l'unité: cherchons $z$ tel que

$$z^n = (r^n, n\varphi) = 1 = ( \underbrace{1}_{\text{module de 1}}, \underbrace{0}_{\text{arg de 1}} )$$

Alors:

- module: $r^n = 1 \implies r = 1 (\text{car } r \in \mathbb{R}_+)$
- argument: $n \cdot \varphi = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \implies \varphi = k\frac{2\pi}{n}$

Il y a donc $n$ racines distinctes!

$$S = \left\{ \left(1, k\frac{2\pi}{n}\right) \middle| k = \underbrace{0, ..., n-1}_{n \text{ valeurs}} \right\}$$

Pour $n = 5$

$$S = \left\{ \left(1, k\frac{2\pi}{5}\right) \middle| k = 0, ..., 4 \right\}$$

**Conséquences:**

1. Division Inverse de $z = (r, \varphi)$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = (\frac{1}{r}, -\varphi)$$

Quotient de $z_1 = (r_1, \varphi_1)$ et $z_2 = (r_2, \varphi_2)$ alors

$$\frac{z_1}{z_2} = (\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 - \varphi_2) \quad (r_2 \neq 0)$$

**Formule de Moivre**

$$z^n = (r^n, n \cdot \varphi) \quad \underline{\forall n \in \mathbb{Z}} \quad (r \neq 0)$$

et plus généralement

$$z^q = (r^q, q \cdot \varphi) \quad \forall q \in \mathbb{Q} \quad (r \neq 0)$$

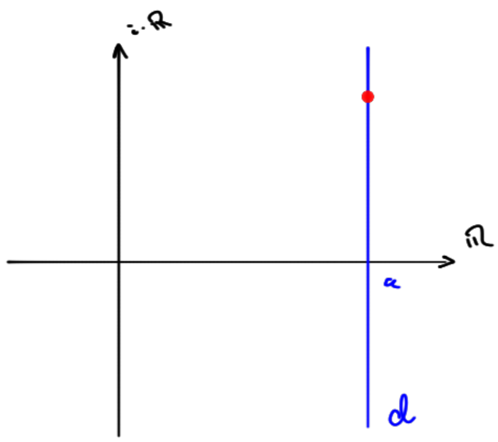
par équivalence

$$z = \sqrt[n]{w} \iff z^n = w$$

**Remarque:**

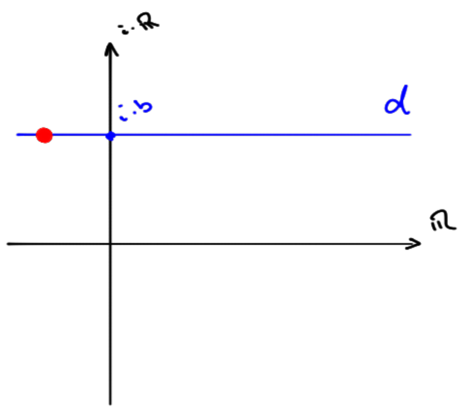
$$z^q = r^q \cdot (\cos(q\varphi) + i \cdot \sin(q\varphi)) \quad q \in \mathbb{Q}$$

2. Équation de droite verticale:




$$z \in d \iff \text{Re}(z) = a$$
$$\iff z + \overline{z} = 2a \quad \in \mathbb{R}$$

3. Droite horizontale d'ordonnée $b$




$$z \in d \iff \text{Im}(z) = b$$
$$\iff z - \overline{z} = i2a \quad \in \mathbb{R}$$

4. Droite quelconque: dans le plan réels

$$\begin{aligned} d : & ax + by = 0 \\ & a\mathrm{Re}(z) + b\mathrm{Im}(z) = c \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

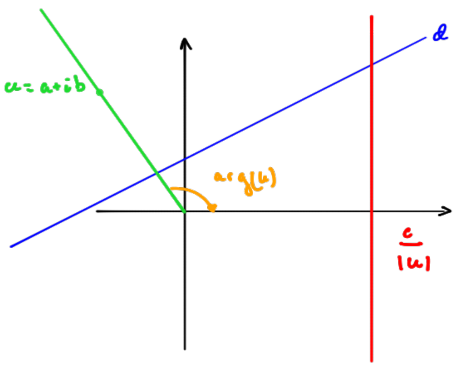
Dans le plan complexe

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{z + \overline{z}}{2} + b \cdot \frac{z - \overline{z}}{2i} &= c \\ a \cdot (z + \overline{z}) - ib \cdot (z - \overline{z}) &= 2c \\ \underbrace{(a - ib)}_{\overline{u}}\, z + \underbrace{(a + ib)}_{u}\, \overline{z} &= 2c \end{aligned}$$

Avec $u = a + ib$

$$\overline{u}z + u\overline{z} = 2c \iff \mathrm{Re}(\overline{u}z) = c \quad c \in \mathbb{R}$$

Interprétation géométrique



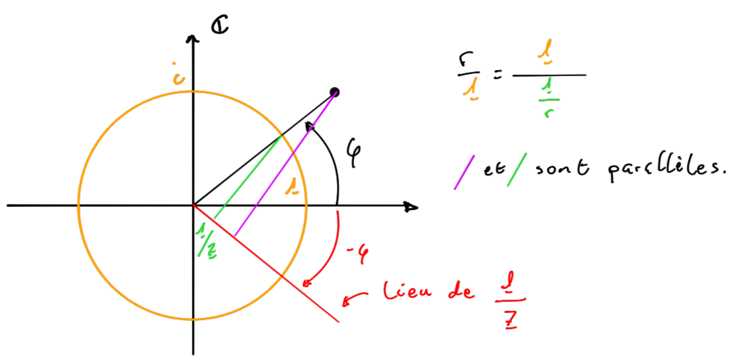

**Remarque:** Le nombre $\overline{u}z$ est sur la droite verticale d'abscisse $c$.

Le nombre $u = a + ib$ définit la normale à $d$.

**Remarque:**

- Une translation transforme une droite en droite et un cercle en cercle.
- De même pour les similitude.

**Remarque sur l'inverse:** Géométriquement, l'inverse de $z = (r, \varphi)$ se construit grâce au théorème de Thalès.




$$\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}, -\varphi\right)$$

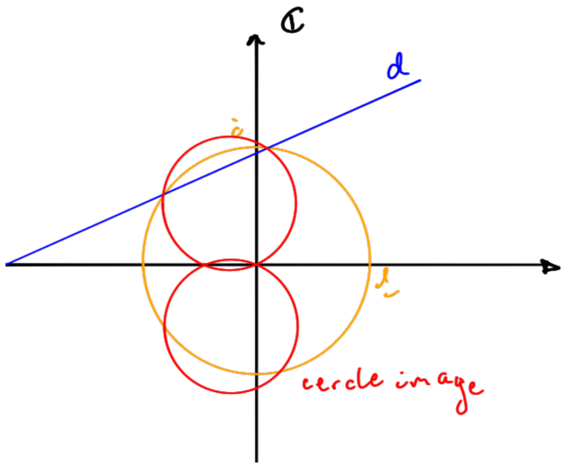
**Remarque:**

- Un point $z$ sur le cercle unité est transformé en son conjugué $\overline{z}$
- Un point $z$ hors du cercle unité est transformé en un point $\frac{a}{z}$ à l'intérieur.

**Par conséquant**

- Une droite passant par $O$ donne une droite passant par $O$.
- Une droite ne passant pas par $O$ donne un cercle passant par $O$!

**Illustration**




Cercle passant par $O$ donne un cercle passant par $O$.
Pour vérifier, [?] l'équation d'une droite ou d'un cercle en $z$ et définit l'image par $w = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{w}$

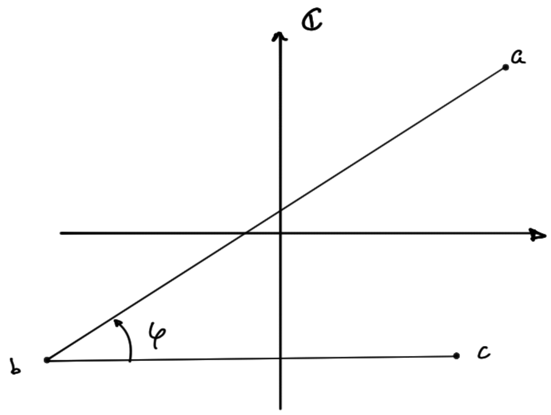
**Exemple:** Trois points donnés par leur affixe:
Donner l'angle $\widehat{ABC}$

$$A(a) \quad B(b) \quad C(c)$$

Il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que

$$a - b = s(c - b)$$

$$\implies \varphi = \arg(s) = \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)$$




A partir de $c$, on obtient $a$.

- par une rotation autour de $b$
- par une homothétie