EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1A

PREPA-031(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 6

Séries de Taylor

6.1 Développement limités: polynôme de Taylor

But: On cherche un polynôme approchant au mieux une fonction f dans un voisinage d'un point donné. Critère: les variables locales (dérivées) coïncident.

Définition: Soit f une fonction réelle $n+1$ fois dérivable sur $I =]a, b[$ On appelle polynôme de Taylor (ou développement limité) de degré n de f en $x_0 \in I$ le polynôme:

Développement limité

$$\begin{aligned} DL^{(n)}_{f,x_0}(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

$f(x_0)$ est le terme constant et on vérifie que les dérivées coïncident:

$$k^e \text{ dérivée } : \left(DL^{(n)}_{f,x_0}\right)^{(k)} = f^{(k)}(x_0) \quad k = 0, \ldots, n$$

Exemple: $f(x) = \sin(x)$ dans un voisinage de $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin(0) = 0 \\ f'(0) &= \cos(0) = 1 \\ f''(0) &= -\sin(0) = 0 \\ f'''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ f^{(4)}(0) &= \sin(0) = 0 \\ f^{(5)}(0) &= \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; DL^{(5)}_{f,x_0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Remarque: Avec le changement de variable $x = x_0 + h$ développer $f(x)$ au voisinnage de x_0 revient à chercher une approximation de f "en x_0 plus un petit quelque chose".

$$\begin{aligned} DL^{(n)}_{f,x_0}(x_0+h) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \\ =& \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}h^k \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} f(x) =& \sqrt{2}\sin(x) \quad \text{en} \quad x_0 = \frac{\pi}{4} \\ =& \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right) \\ f(x_0) =& \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ f'(x_0) =& \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ f''(x_0) =& -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ f'''(x_0) =& -\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ f^{(4)}(x_0) =& \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ à l'ordre 4 $\quad DL^{(4)}_{f,\frac{\pi}{4}}(x) = 1 + h - \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}$

$$= 1 + (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}$$

6.2 Approximation et reste

Pour qualifier l'approximation d'une fonction par un polynôme de Talyor, il convient d'estimer l'erreur (ou le reste), soit la différence $f(x) - DL^{(n)}_{f,x_0}(x)$ notée

$$d^n f\Big|_{x_0}(x)$$

Théorème: Soit f une foction réelle $n+1$ fois dérivable sur $I =]a,b[$ et $x_0 \in I$. Alors pour

$$x \in I, \quad \underline{\exists y_0 \in]x_0, x[}$$

$$\boxed{d^n f\Big|_{x_0}(x) = f(x) - DL^{(n)}_{f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

Conséquence: en posant $h = x - x_0$ (écart par rapport à x_0), le $d^n f\Big|_{x_0}(x)$ est du type $o(h^n)$ ("petit o de h")
C'est-à-dire une fonction de h tendant vers 0 **plus vite que h^n** lorsque $h \longrightarrow 0$:

$$d^n f\Big|_{x_0}(x_0+h) = o(h^n)$$

avec $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$
Ainsi

$$f(x) = DL^{(n)}_{f,x_0}(x_0+h) + o(h^n)$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)(x_0)}}{k!} h^n + o(h^n)}$$

Remarque: Souvent, on donne le D.L. que l'on complète par $o(h^n)$ pour contrôler l'ordre du développement.

Exemple: (voir formulaire)

$$X_0 = 0, \quad x = 0+h: \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(h^n)$$

si $|x| < 1$

$$x_0 = 0, \quad x = 0+h: \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Remarque: Connaissant le DL de f en x_0, on ne peut à priori rien dire sur le DL autour d'un autre point (sauf pour les polynômes).
On peut parfois utiliser des DL connues.

1. L'écriture d'un polynôme est une DL autour de $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} P(x) =& 3x^2 - 7x + 3 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ =& \underbrace{3}_{\text{ordre } 0} \underbrace{-7x}_{1^e \text{ ordre}} + \underbrace{3x^2}_{2^e \text{ ordre}} \end{aligned}$$

   Le polynôme de Taylor autour de $x_0 = 1$ est

$$\begin{aligned} P(x) =& a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0 \\ =& \underbrace{a_0}_{\text{ordre } 0} \underbrace{a_1(x-1)}_{1^e \text{ ordre}} + \underbrace{a_2(x-1)^2}_{2^e \text{ ordre}} \end{aligned}$$

   Les coefficients a_0, a_1, a_2 s'obtiennent par identification des puissances de x.
   Ou alors on pose

$$n = x - 1 \iff x = 1 + n$$

   et on calcule

$$P(x) = P(1+n)$$

2. Donnons le DL de $f(x) = \frac{1}{x}$ en x_0
   pour $x_0 = 1, x = 1 + h$, le DL est connu.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{1+h} \\
&= 1 - h + h^2 - h^3 + \ldots + (-1)^n h^n + o(h^n) \quad (|h| < 1) \\
&= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots + (-1)^n (x-1)^n + o((x-1)^n) \quad (|x-1| < 1)
\end{aligned}
$$

   Pour $x_1 = 2$, on peut ramener à un DL connu:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{2+h} + \frac{1}{2\left(1 + \frac{h}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{h}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \ldots + (-1)^n \left(\frac{h}{2}\right)^n + o\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

   où $h = x - 2$

6.3 DL d'une combinaison de fonctions

Le DL d'une combinaison de fonctions est la combinaison des DL individuels.

⚠ Attention à considérer suffisamment de termes ⚠

Exemple: A l'aide d'un DL du sinus en $x_0 = 0$, calculer

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{6\sin(x) - 6x + x^3}{x^5}$$

Avec assez de termes, on a toutes les compensations.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{6\sin(x) - 6x + x^2}{x^5} &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{6\left(\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) - \cancel{6x} + \cancel{x^3}}{x^5} \\
&= \frac{6}{5!} + \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{6 \cdot o(x^5)}{x^5} = \frac{6}{5!}
\end{aligned}
$$

C'est bon pour la somme, produit, quotient, dérivées et primitives (⚠ constante d'intégration)
Pour une fonction composées $g(y)$ où $y = f(x)$ il suffit de considérer $f(x) = f(x_0 + h)$ comme

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + u_{\nwarrow \text{(petit qqch)}}$$

où

$$u = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

avec $u \xrightarrow[h \longrightarrow 0]{} 0$ et

$$
\begin{aligned}
g(f(x_o + h)) &= g(f(x_0) + u) \\
&= DL_{g,y_0}^{(m)}(y_0 + n) + o(n^m) \\
&= \sum_{l=0}^{m} \frac{g^{(l)}(y_0)}{l!} u^l + o(u^m)
\end{aligned}
$$

Il suffit d'injecter le DL de $f(x)$ autour de x_0 dans le DL de $g(y)$ autour de $y_0 = f(x_0)$

Cas particulier: Le quotient. Donner le DL à l'ordre n de l'inverse de $f(x)$ en x_0 ($f(x_0) \neq 0$) à l'aide du Dl de f en x_0:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0+h)} = \frac{1}{f(x_0)+u}$$

où $u = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k + o(h^n)$

$$= \frac{1}{f(x_0)} \cdot \frac{1}{1+\frac{u}{f(x_0)}} = \frac{1}{f(x_0)} \cdot \left(1 - \left(\frac{u}{f(x_0)}\right) + \left(\frac{u}{f(x_0)}\right)^2 - \left(\frac{u}{f(x_0)}\right)^3 + \ldots\right)$$

On celle à prendre assez de termes des chaque puissance de $\frac{u}{f(x_0)}$

Exemple: Donne le DL d'ordre 4 en $x_0 = 0$ de

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\sin(x)} =& 1 + \sin(x) + \sin^2(x) + \ldots \quad (|\sin(x)| < 1) \\
=& 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \\
&+ \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 \\
&+ \left(x + o(x^2)\right)^3 \\
&+ (x + o(x))^4 \\
=& 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

6.4 Séries de Taylor et fonctions analytiques

Définition On appelle **série entière** une expression de la forme

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \lim_{n \longrightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k}_{S_n(x)}$$

"suite des somme parallèles"

Théorème Il existe $R > 0$, appelé rayon de convergence de A, tel que $A(x)$ est bien défini (la série converge)

$$\forall x \in]x_0 - R; x_0 + R[$$

De plus:

1. si
$$L = \lim_{k \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$
existe, alors
$$R = \frac{1}{L}$$

2. si

$$L = \lim_{k \longrightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

existe, alors

$$R = \frac{1}{L}$$

Si $|x - x_0| < R$, alors la série $\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ converge Si $|x - x_0| > R$, alors la série $\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ diverge Si $|x - x_0| - R$, le théorème ne permet pas de conclure.

Définition On appelle série de Taylor de f en x_0 (f infiniment dérivable en x_0)

$$T_{f,x_0}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} DL^n_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Définition On dit que f est **analytique** au point x_0, de rayon $R > 0$, si

$$f(x) = T_{f,x_0}(x) \quad \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d^n_{f,x_0}(x) = 0 \quad \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[$$

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{si } |x| < 1$$

(série géométrique de raison x) En d'autres termes, le développement en série de Taylor de f au point $x_0 = 0$ est donnée par

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ainsi

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1$$

et donne

$$f^{(k)}(0) = k!$$

Rayon de convergence?

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \longrightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1 \implies R = 1$$

Si $x = 1$, $s_n(1) = n \longrightarrow \infty$, la série diverge. Si $x = -1$, $s_n(-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \implies$ diverge

Exemple La fonction exponentielle

$$f(x) = \exp(x)$$

est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f^{(k)}(x_0) = \exp(x_0) \quad \forall k \geq 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

On regarde d'abord $T_{f,0}(x)$: on a que

$$f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \geq 0 \implies T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Rayon de convergence:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 \implies R = \infty$$

la série converge sur $\mathbb{R}$
Pour prouver que $\exp(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ on montre que

$$d_{f,0}^n(x) \longrightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Par le théorème R, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$, y_0 entre 0 et x tel que

$$d_{f,0}^n(x) = \frac{\exp(y_0)}{(n+1)!} x^{n+1} = \exp(y_0) \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\longrightarrow 0} \quad (n \longrightarrow \infty)$$

□

Maintenant $\exp(x)$ est en fait analytique en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ car

$$\exp(x_0 + h) = \exp(x_0) \exp(h) = \exp(x_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \overset{h=x-x_0}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Exemple Une fonction non analytique est donné par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$