

EPFL

MAN

Mise à niveau

Physique

PREPA-033

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sylvain BRÉCHET

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 1

Introduction (slides)

Chapter 2

Mouvement dans le plan

2.1 Matière et espace

27/02/2019

La matière est faite d'atomes et de molécules. En mécanique classique, on peut considérer les molécules comme des petites billes en interaction.

- 5 états:
 1. Solide;
 2. Liquide;
 3. Gaz;
 4. Plasma;
 5. Condensat de Bose-Einstein;
- À l'échelle microscopique, on peut distinguer les atomes et les molécules.
- À l'échelle macroscopique, les atomes et les molécule forment un continuum de matière.
- Un objet est un continuum

2.1.1 Grandeurs extensives et intensives

- **Grandeurs extensives:** grandeur physique qui, pour un ensemble d'objets, sont égalés à leur somme pour chaque objet.
Exemple quantité de matière, quantité de mouvement, force, volume.
- **Grandeurs intensives:** grandeurs physique qui sont indépendantes du nombre d'objets.
Exemple vitesse, accélération, température.

2.1.2 Masse

Masse (M ou m): grandeur physique qui caractérise la quantité de matière d'un objet.

- Grandeur extensive

- Grandeur scalaire
- Grandeur conservée (Lavoisier)
- Masse constante \implies système fermé (lingot d'or)
- Masse variable \implies système ouvert (fusée)
- Unité physique (SI): kilogramme [kg]

2.1.3 Volume

Volume (V): grandeur physique scalaire et extensive qui caractérise la portion d'espace occupée par un objet.

- Unité physique (SI): mètre cube [m³]

2.1.4 Masse volumique

Masse volumique (ρ): grandeur physique scalaire définie comme le rapport de la masse m et du volume V .

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.1)$$

- Unité physique (SI): [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]
- Grandeur qui caractérise une matière $\rho_{\text{eau}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{l}} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \rho_{\text{glace}} = 0.9 \frac{\text{kg}}{\text{l}} = 0.9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- **Homogène**: un objet est homogène si sa masse volumique est la même partout (par ex. une planche de bois)
- **Inhomogène**: un objet est inhomogène si sa masse volumique varie d'un endroit à l'autre (par ex. un marteau avec manche en bois et tête en fer)

2.1.5 Densité

Densité (d): nombre sans dimension physique définie comme le rapport entre la masse volumique de l'objet et la masse volumique de l'eau.

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau}}} \quad (2.2)$$

2.1.6 Surface

Surface (s, σ): grandeur physique scalaire et extensible qui caractérise une portion de l'espace en à deux dimensions.

- Unité physique (SI): mètre carré [m²]

2.1.7 Longueur

Longueur (l, x, r, s, d, L): grandeur physique scalaire et extensible de l'espace à une dimension.

- Unité physique (SI): mètre [m]

2.2 Référentiel

2.2.1 Point matériel

Représentation d'un objet par rapport à un point auquel on associe toute la matière (masse) de l'objet.

- **Modèle:** idéalisation de la réalité
- **Limites:** pas de mouvement de rotation propre
- **Erreurs:** (i) quantitatif, (ii) qualitatif

2.2.2 Référentiel

- Object physique (indéformable) de référence par rapport auquel on décrit le mouvement.

Exemple: terre, bateau, système solaire

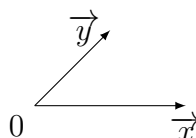
- Un ensemble de N points matériels ($N \geq 4$) non-coplanaires et fixes les uns par rapport aux autres.

28/02/2019

2.2.3 Repère

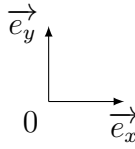
Un **repère** est une **entité géométrique**. Dans le plan, c'est à dire dans un espace à 2 dimensions, un repère est constitué de 2 vecteurs linéairement indépendants (i.e. non colinéaire) attachés à un point appelé l'**origine** O .

- Repère quelconque:

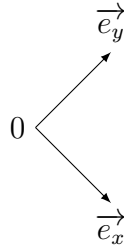


- Un repère est orthonormé si et seulement si les vecteurs de base \vec{e}_x et \vec{e}_y sont orthogonaux ($\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$) et unitaires ($\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = 1$)

- Repère horizontale-vertical $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$



- Repère oblique $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

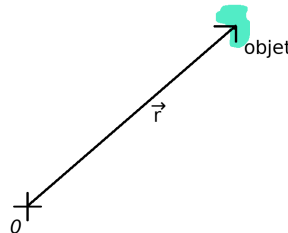


$\triangle!$ référentiel (physique: **réel**) \iff repère (géométrique: **virtuel**) $\triangle!$

2.3 Vecteur position et déplacements

2.3.1 Vecteur position

- La position d'un objet (point matériel) dans le référentiel est donné par le vecteur position \vec{r} :



- Unité physique (SI): mètre [m]

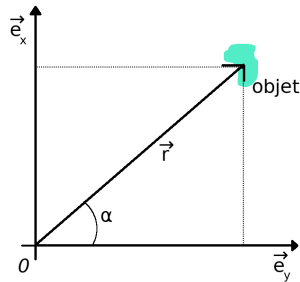
Vecteur Un vecteur possède 3 propriétés fondamentale:

- Direction
- Sens
- Norme

On le note par un symbole surmonté d'une flèche (manuscrit) ou en gras (caractère d'imprimerie)

Pour le vecteur position \mathbf{r} , la **direction** est la droite passant pas O et l'objet, le **sens** est donné par le regard vers l'objet depuis O et la **norme** par la distance de O à l'objet.

- Le vecteur position \vec{r} peut être décomposé dans le repère orthonormée $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$



- Vecteur position \vec{r} :

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot r \\ \sin(\alpha) \cdot r \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\text{où } r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

x et y sont les **composants** du vecteurs position \vec{r} dans le repère orthonormée $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

- Comme l'objet peut se déplacer au cours du temps, sa position peut changer.

2.3.2 Temps

Temps (t ou T): grandeurs scalaire qui décrit l'évolution d'un système physique.

- Unité physique (SI): secondes [s]
- Comme un objet se déplace au cours du temps, son vecteur position est fonction du temps: $\vec{r} \equiv \vec{r}(t)$
- Vecteur position à l'instant t :

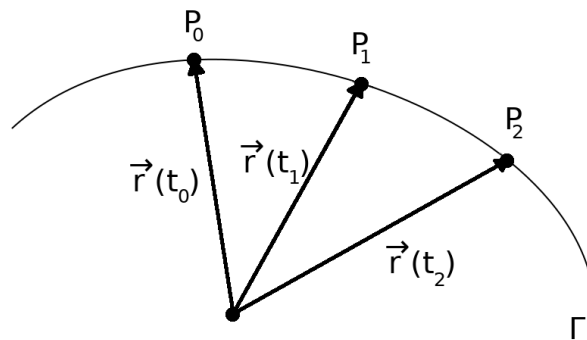
$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(\alpha(t)) \\ r(t) \cdot \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

- **Exemples:** horaires de train (Où? Quand?), GPS

2.3.3 Trajectoire

- Lieux géométrique des points de l'espace occupés par l'objet (point matériel) au cours du temps.

- Ensemble des points qui sont atteints par l'objet (courbe ou droite) représenté par Γ



$$\Gamma = \{P | \exists t, \overrightarrow{OP} = \vec{r}(t)\}$$

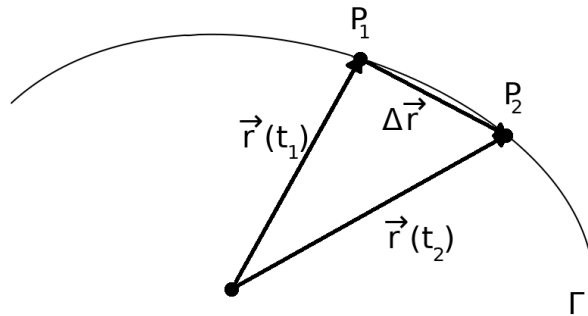
Exemples

1. Droite (chute libre)
2. Cercle (electron dans un champ magnétique)
3. Parabole (projectile)
4. Ellipse (planète)
5. Hyperbole (astéroïde)

La trajectoire répond à la question "où?" sans se préoccuper de la question "quand?".

2.3.4 Déplacement

Le vecteur déplacement est la variation du vecteur position au cours du temps. On considère les position P_1 et P_2 d'un objet aux temps t_1 et t_2 où $t_1 < t_2$.



$$\vec{r}_1 + \Delta \vec{r} = \vec{r}_2$$

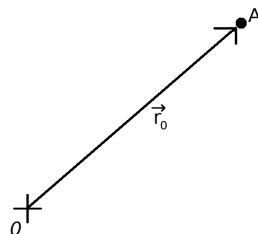
- Déplacement le long de

$$\Gamma : \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad (2.5)$$

- **Exemple:** Le vecteur déplacement $\Delta \vec{r}$ entre Genève (position \vec{r}_1) et Lausanne (position \vec{r}_2) le long des voies le chemin de fer (trajectoire Γ)

Cas particuliers:

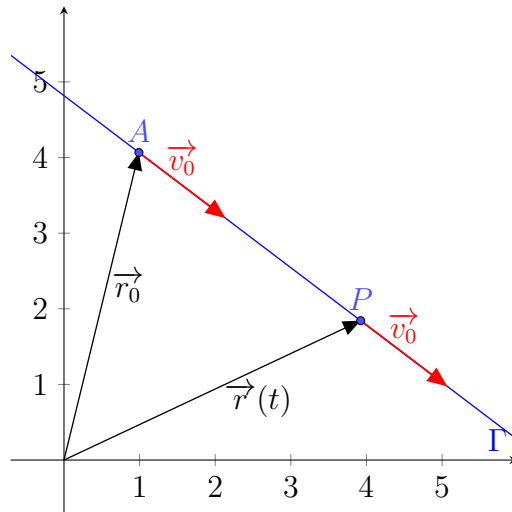
1. Objet immobile au point A



Vecteur position indépendant du temps t :

$$\vec{r}(t) = \vec{OA} = \vec{r}_0 = \text{cste} \quad \forall t \quad (2.6)$$

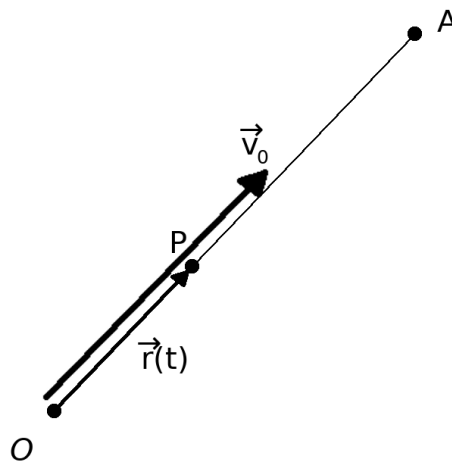
2. Objet qui avance régulièrement sur une droite Γ qui passe par un point A l'instant t_0 : $\vec{r}(t_0) = \vec{OA} = \vec{r}_0$



- Le vecteur déplacement $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$ est proportionnelle à sa durée $\Delta t = t - t_0$
- Il existe un vecteur directeur \vec{v}_0 de la droite tel que $\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 \cdot \Delta t$, ou encore

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0 \quad (2.7)$$

3. L'objet est dit en mouvement rectiligne uniforme (MRU)
4. Dans le plan, on donne l'origine O et un point A . Un objet se déplace de O à A entre $t = 0$ et $t = t_A$
5. On cherche à déterminer l'équation horaire $\vec{r}(t)$ de l'objet en considérant que celui-ci passe en O à l'instant $t = 0$.



6. Conditions l'initiale et finale: $\vec{r}(0) = \vec{0}$ et $\vec{r}(t_A) = \vec{OA}$

7. Ainsi:

$$\vec{r}(t_A) = \vec{v}_0 \cdot t_A = \overrightarrow{OA} \implies \vec{v}_0 = \frac{\overrightarrow{OA}}{t_A} \quad (2.8)$$

8. Finalement,

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot t = \frac{t}{t_A} \cdot \overrightarrow{OA} \quad (2.9)$$

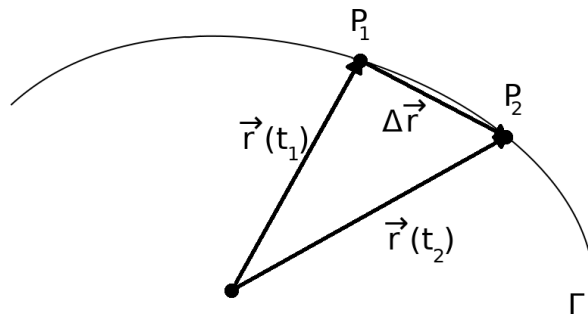
9. **Rencontre:** Lorsque deux objets se trouvent à la même position au même temps t_r , il y a rencontre

$$\exists t_r \vec{r}_1(t_r) = \vec{r}_2(t_r) \quad (2.10)$$

2.4 Vecteur vitesse

2.4.1 Vitesse moyenne

On considère un objet en position initiale P_1 au temps initiale t_1 et en position finale P_2 au temps finale t_2



- Position initiale: $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$
- Position finale: $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$
- Déplacement: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
- Intervalle de temps: $\Delta t = t_2 - t_1$
- La **vitesse moyenne** ($\overrightarrow{v_{moy}}$) de l'objet est définie comme le rapport entre le déplacement $\Delta \vec{r}$ et l'intervalle de temps Δt

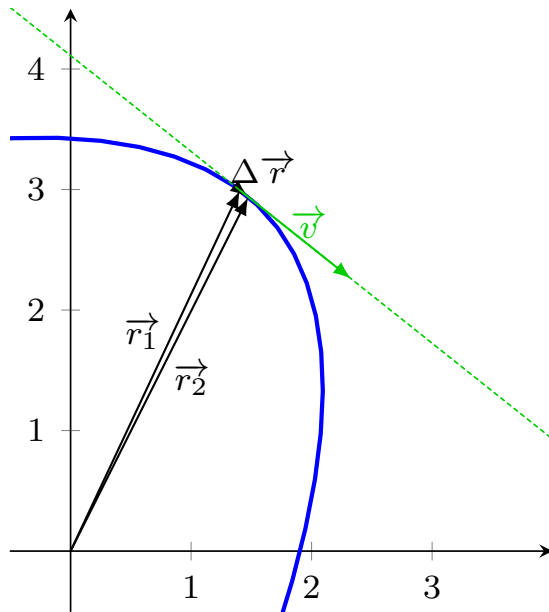
$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.11)$$

- Unité physique (SI): mètre par secondes [$\frac{m}{s}$]

- La vitesse moyenne ne donne que la position finale \vec{r}_2 par rapport à la position initiale \vec{r}_1 et non les positions intermédiaires

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{v}_{moy} \cdot \Delta t \quad (2.12)$$

- C'est la vitesse constante qu'il faudrait maintenir pour faire le déplacement $\Delta \vec{r}$ durant l'intervalle du temps Δt .



- Dans la limite où l'intervalle de Δt est très petit, le déplacement

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.13)$$

donne la direction et le sens de mouvement est juste après le temps t_1 .

- Le déplacement $\Delta \vec{r}$ devient vecteur directeur de la tangente à la trajectoire en \vec{r}_0

- La **vitesse instantanée** ou **vitesse** de l'objet est définie comme la vitesse moyenne dans la limite d'un intervalle du temps infinitésimale.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \quad (2.14)$$

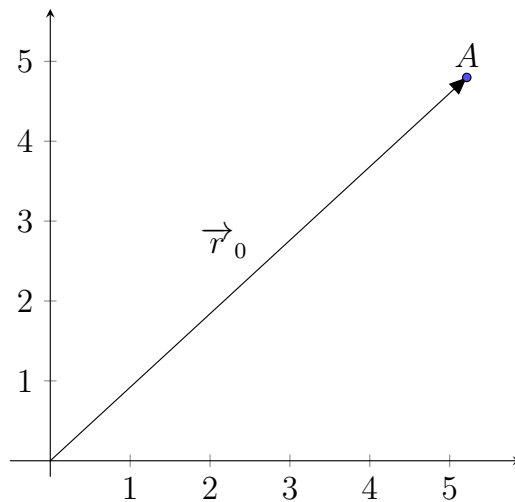
Propriétés de la vitesse

6/03/2019

- Taux de variation de la position par rapport au temps (dérivée)
- Vector (direction, sens, norme)
- Tangente à la trajectoire dans le sens du mouvement

Cas particuliers

1. Objet immobile qui se trouve au point A



Vecteur vitesse nulle (position constante):

$$\vec{v}(t) = \vec{0}, \quad \forall t \quad (2.15)$$

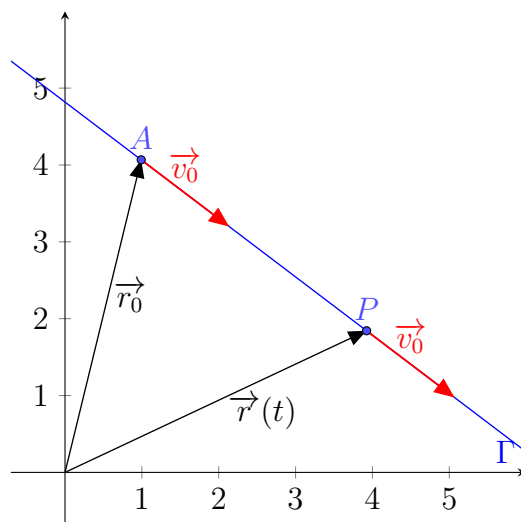
$$\text{car } \vec{r}(t) = \vec{OA} = \vec{r}_0 \quad (2.6)$$

Vérification:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_0}{\Delta t} = \vec{0}$$

□

2. Objet qui avance à vitesse constante



- Vecteur de vitesse constant

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \overrightarrow{cste} \quad (2.16)$$

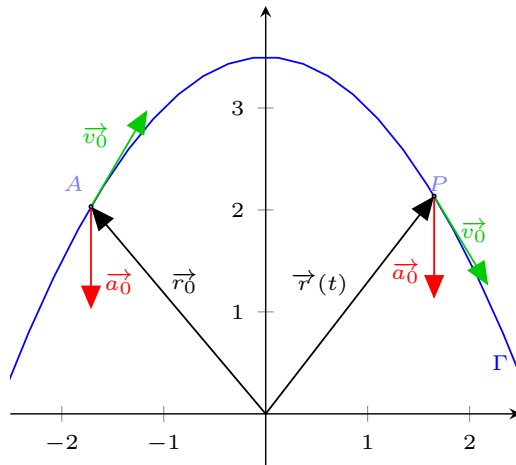
- Vitesse et vitesse moyenne identiques

$$\vec{r}(t) = \vec{V}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0 \quad (2.7)$$

Mouvement rectiligne uniforme à vitesse constante (MRU).

Vérification $\vec{v}(t) \stackrel{(2.7)}{\stackrel{(2.14)}{=}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t - t_0) + \vec{r}_0 - \vec{v}(t - t_0) - \vec{r}_0}{\Delta t} = \vec{V}_0$

3. Objet qui passe par A l'instant t_0 , i.e. $\vec{r}(t) = \vec{OA} = \vec{r}_0$, avec une vitesse \vec{v}_0 , et dont la vitesse change régulièrement.



- La variation de vitesse

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$$

est proportionnellement à la durée

$$\Delta t = t - t_0$$

- Il existe un vecteur \vec{a}_0 tel que

$$\Delta \vec{v} = \vec{a}_0 \cdot \Delta t$$

Ainsi,

$$\vec{v}(t) = \vec{a}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{v}_0 \quad (2.17)$$

- Mouvement uniformément accéléré (MUA) (2.17)

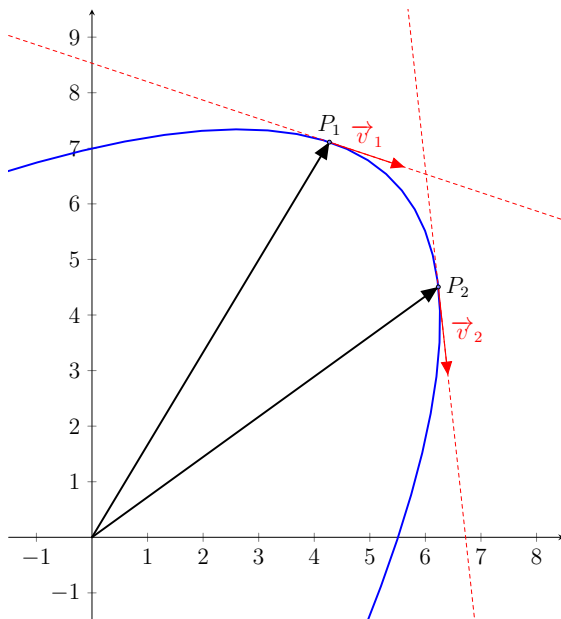
- Le vecteur position $\vec{r}(t)$ s'écrit:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0 \quad (2.18)$$

2.5 Vecteur accélération

2.5.1 Accélération moyenne

On considère un objet en position initiale P_1 au temps initiale t_1 et en position finale P_2 au temps finale t_2 .



- Vitesse initiale: $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$
- Vitesse finale: $\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$
- Variation de vitesse: $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$
- Intervalle de temps: $\Delta t = t_2 - t_1$

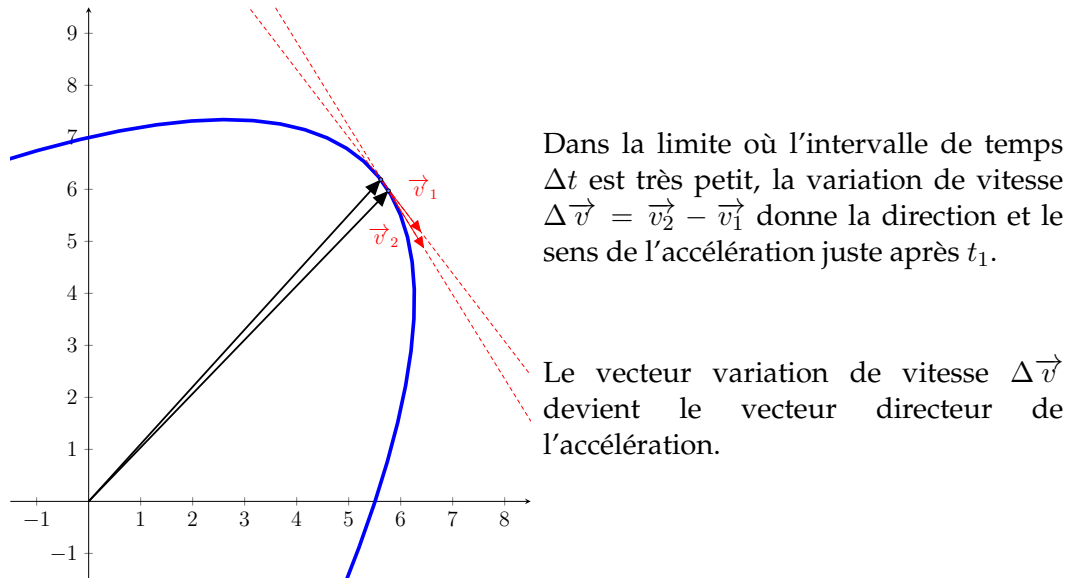
- L'accélération moyenne \vec{a}_{moy} est définie comme le rapport entre la variation de la vitesse $\Delta \vec{v}$ et l'intervalle Δt

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.19)$$

- Unité physique (SI): mètres par secondes $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
- L'accélération moyenne donne que la vitesse finale \vec{v}_2 par rapport à la vitesse initiale \vec{v}_1 et non les vitesses intermédiaire

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a}_{moy} \cdot t \quad (2.20)$$

- C'est l'accélération constante qu'il faudrait maintenir pour effectuer une variation de vitesse $\Delta \vec{v}$ en un intervalle de temps Δt



- L'**accélération instantanée** ou **accélération** de l'objet est déterminé comme l'accélération moyenne dans la limite d'un intervalle de temps infinitésimale.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.21)$$

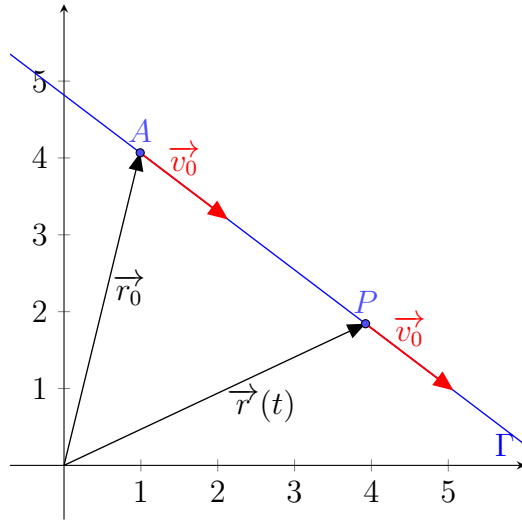
$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}(t) \quad (2.22)$$

Propriétés de l'accélération

- Taux de variation de la variation vitesse par rapport au temps (dérivée)
- Vecteur (direction, sens, norme)
- Toujours dirigée vers l'intérieur de la trajectoire (courbe)
- Selon la tangente à la trajectoire le vecteur accélération va décrire un changement de norme du vecteur vitesse
- Selon la normale à la tangente: changement de direction du vecteur vitesse

Cas particuliers

1. Objet qui avance à vitesse constante \vec{v}_0 et qui passe par le point A à l'instant t_0 : $\vec{r}(t_0) = \vec{OA} = \vec{r}_0$. La vitesse est constante (MRU) et donc l'accélération est nulle.

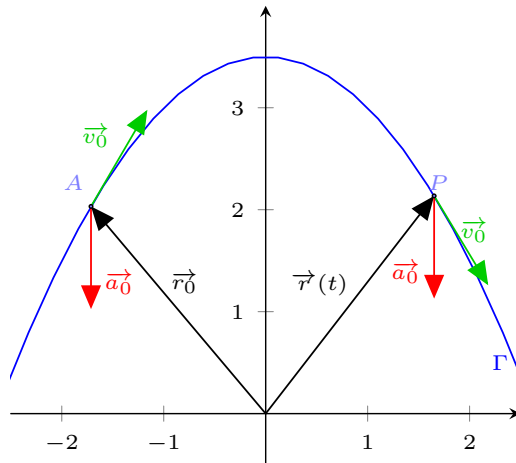


- $\vec{a}(t) = \vec{0}$
- $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$ (2.23)
- $\vec{r}(t) = \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0$

Vérification: $\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\Delta t + t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_0 - \vec{v}_0}{\Delta t} = \vec{0}$

□

2. Objet qui passe par le point A à l'instant t_0 : $\vec{r}(t_0) = \vec{OA} = \vec{r}_0$ avec vitesse \vec{v}_0 : $\vec{v}(t_0)$ et dont l'accélération \vec{a}_0 est constante.



- $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \text{cste}$
- $\vec{v}(t) = \vec{a}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{v}_0$ (2.24)
- $\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \cdot \vec{a}_0 \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0$

Vérification:

$$\vec{a}(t) \stackrel{(2.21)}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}_0 \cdot (t - \Delta t - t_0) + \vec{v}_0 - \vec{a}_0 \cdot (t - t_0) - \vec{v}_0}{\Delta t} \stackrel{(2.24)}{=} \vec{a}_0$$

□

On veut montrer que la trajectoire est une parabole d'axe verticale. On choisit l'origine O sur la trajectoire Γ et l'origine du temps $t = 0$ lorsque l'objet passe en O . On prend \vec{e}_x perpendiculaire à \vec{a}_0 et \vec{e}_y parallèle à \vec{a}_0 .

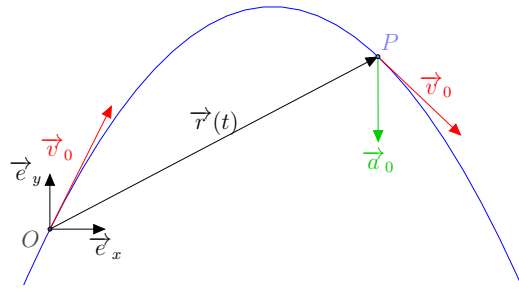
- Équation horaire:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{a}_0 \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t$$

$$\text{Selon } \vec{e}_x : x(t) = v_{0x} \cdot t \quad (2.25)$$

$$\text{Selon } \vec{e}_y : y(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t \quad (2.26)$$

$$(2.25) \Rightarrow t(x) = \frac{x}{v_{0x}} \quad (2.27)$$



(2.27) \rightarrow (2.26) : Équation de la trajectoire

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0y} \cdot \frac{x}{v_{0x}} = -\frac{a_0}{2 \cdot v_{0x}} \cdot x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x \quad (2.28)$$

Cette expression du second degré en x décrit une parabole.

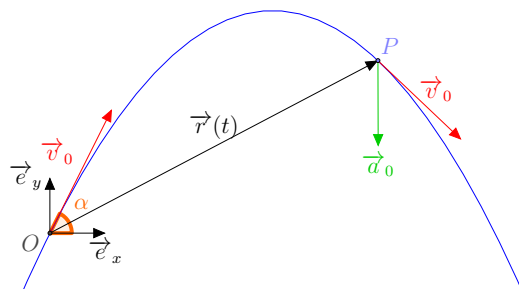
2.5.2 Tir au canon

On tire un obus avec vitesse initiale \vec{v}_0 faisant un angle α avec le sol. On néglige les frottements de l'air. L'obus a une trajectoire balistique.

$$\vec{a}(t) = \vec{g} + cste \quad (2.29)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0 \quad (2.30)$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t \quad (2.31)$$



où

$$\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_y$$

et

$$\vec{v}_0 = \underbrace{V_0 \cdot \cos(\alpha)}_{v_{0x}} \cdot \vec{e}_x + \underbrace{v_0 \cdot \sin(\alpha)}_{v_{0y}} \cdot \vec{e}_y$$

- Hauteur maximale h : $\vec{v}_y(t_h) = 0$

$$\vec{V}_y(t_h) \stackrel{(2.30)}{=} -y \cdot t_h + \vec{v}_{0y} = 0 \Rightarrow t_h = \frac{\vec{v}_{0y}}{y} = \frac{\vec{v}_0 \cdot \sin(\alpha)}{y} \quad (2.32)$$

$$h = y(t_h) \stackrel{(2.31)}{=} -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_h^2 + \vec{v}_{0y} \cdot t_h \stackrel{(2.32)}{=} \frac{\vec{v}_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g} \quad (2.33)$$

- Temps de vol: $y(t_v) = 0$

$$y(t_h) \stackrel{(2.31)}{=} -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_h^2 + \vec{v}_{0y} \cdot t_h = 0 \implies t_v \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_v + \vec{v}_{0y} \right) \\ \implies t_v = 0 \quad \text{ou} \quad t_v = \frac{2 \cdot \vec{v}_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot \vec{v}_0 \cdot \sin(\alpha)}{g} \quad (2.34)$$

7/03/2019

- Distance horizontale (portée):

$$d = x(t_v) \stackrel{(2.31)}{=} v_{0x} \cdot t_v = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g} \quad (2.35)$$

- Équation de la trajectoire Γ :

$$(2.28) : g(x) = -\frac{a_0}{2v_{0x}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x = -\frac{g}{2v_0 \cdot \cos^2(\alpha)} \quad (2.36)$$

- Point de la trajectoire $P(x_p, y_p)$: (où $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$)

$$(2.36) : y_p = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot (1 + \tan^2(\alpha)) \cdot x_p^2 + \tan(\alpha) \cdot x_p \\ \implies \frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} \cdot \tan^2(\alpha) - x_p \cdot (1 + \tan(\alpha)) + \frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} + y_p = 0 \quad (2.37)$$

C'est une équation du 2^o degrés en $\tan(\alpha)$ qui est fonction de la vitesse initiale \vec{v}_0 et des coordonnées x_p et y_p du point P .

- Discriminant de l'équation du 2^o ordre en $\tan(\alpha)$ (2.37)

$$\Delta = x_p^2 - 4 \cdot \frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} \cdot \left(\frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} + y_p \right) = x_p^2 \cdot \left(1 - \frac{2g}{v_0^2} \cdot \left(\frac{gx_p^2}{2v_0^2} + y_p \right) \right) \quad (2.38)$$

- On doit distinguer 3 cas:

1. $\Delta > 0$: il y a deux angles α possibles (angles complémentaires). Le point P est à portée du canon avec deux trajectoires possibles.
2. $\Delta = 0$ il y a un angle α possible. Tous les points (x, y) vérifiant $\Delta = 0$ se trouvent sur une parabole, dite de sécurité, d'équation.

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.39)$$

3. $\Delta < 0$: il n'y a donc pas d'angles de tir possible. P est au delà de la parabole de sécurité.

Chapter 3

Dynamique

3.1 Première loi de Newton

Un objet a un mouvement rectiligne uniforme (MRU), ainsi $\vec{v} = \overrightarrow{cste}$ et $\vec{a} = \vec{0}$ si et seulement si il ne subit aucune action extérieure. (force extérieure résultante est nulle)

Exemple: Un pock qui glisse à vitesse constante $\vec{v} = \overrightarrow{cste}$ sur la glace d'une patinoire.

Référentiel d'inertie Tout référentiel par rapport auquel le principe d'inertie est vérifié.

Exemple: La patinoire est un référentiel d'inertie pour le pock.

Contre-exemple: La patinoire qui est en rotation autour d'un axe vectoriel. Le pock bouge par rapport à la patinoire sans qu'on agisse sur lui.

3.2 Deuxième loi de Newton

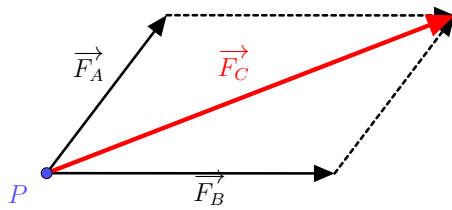
3.2.1 Force

Force (\vec{F}) grandeur physique qui modifie l'état de mouvement rectiligne uniforme (MRU) d'un objet.

Grandeur extensive

Grandeur vectorielle

La force satisfait la règle d'addition vectorielle (règle du parallélogramme)



$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{F}_C$$

Unité physique (SI): newton $[N]$ $[kg \cdot \frac{m}{s^2}]$

3.2.2 Deuxième loi de Newton

Un objet a un mouvement accéléré ($\vec{v} = \text{cste}$ et $\vec{a} \neq \vec{0}$)

Mathématiquement, on l'écrit:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (3.1)$$

où ici \vec{F} est la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur l'objet.

Remarques:

- La force est la cause, l'accélération est l'effet: l'objet de masse m subit une force \vec{F} génère une accélération \vec{a} .
- Les vecteurs \vec{a} et \vec{F} sont parallèles et de même sens (i.e. $m > 0$)
- Plus la masse m de l'objet est grande, plus il est difficile de l'accélérer, c'est à dire de modifier sa vitesse.

Remarques générales:

1. Une force qui est opposée à la vitesse (triangle) va provoquer un ralentissement l'accélération \vec{a} est opposé à la vitesse \vec{v}
2. Une force non-parallèle à la vitesse (force latéral) provoque un virage. La force est orientée vers l'intérieur du virage.
3. Si un objet est au repos, la résultante des forces que cet objet subit est nulle:

Objet statique ($\vec{v} = \vec{0}$) $\implies \vec{F} = \vec{0}, \quad \forall t$

⚠ La réciproque est fautive: si l'objet ne subit aucune force résultante, il n'est pas nécessairement au repos (MRU)

Méthodologie

Pour appliquer la deuxième loi de Newton dans un problème spécifique, il est recommandé de procéder de la manière suivante:

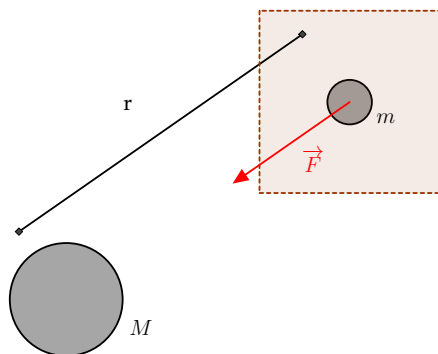
1. Faire un dessin
2. Choisir un référentiel d'inertie
3. Désigner l'objet considéré
4. Identifier toutes les forces extérieures exercées sur l'objet
5. Écrire la deuxième loi de Newton (vectoriellement)
6. Choisir un repère
7. Faire des projections

3.3 Forces particulières

3.3.1 Forces à distances

Elles sont exercées sans contact avec l'objet considéré.

1. **Force de la gravitation:** les masses s'attirent



$$\|\vec{F}\| = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (3.2)$$

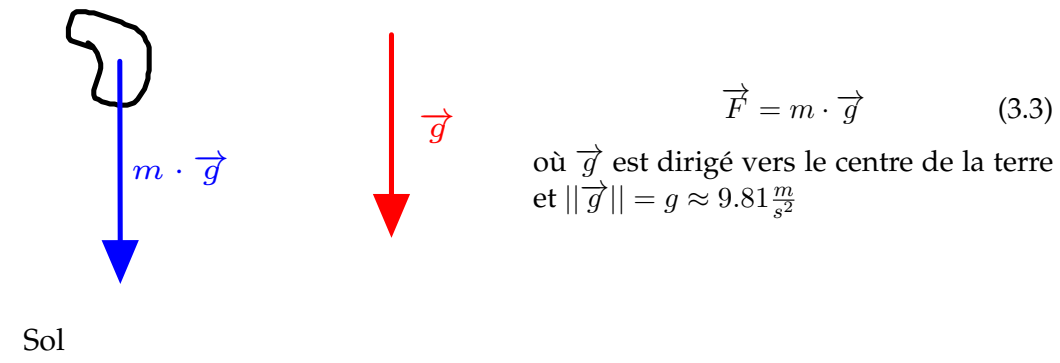
- Force proportionnelle au produit des masses
- Force inversement proportionnelle au carré de la distance qui les séparent.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} : \text{constante universelle de la gravitation}$$

Exemples:

- La terre est attirée par le soleil
- La soleil est attirée par la terre

Près de la surface de la terre, le champ gravitationnel a une norme $g = \frac{G \cdot M}{r^2}$ qui est quasiment constant (car $r = \text{cst}$). Dans ce cas, la force de gravitation est appelé le **poids**.



Exemple: Objet en chute libre, la seule force que subit cet objet, c'est son poids. Alors

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \implies m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a} \implies \vec{a}(t) = \vec{g} = \overrightarrow{cste}, \quad \forall t$$

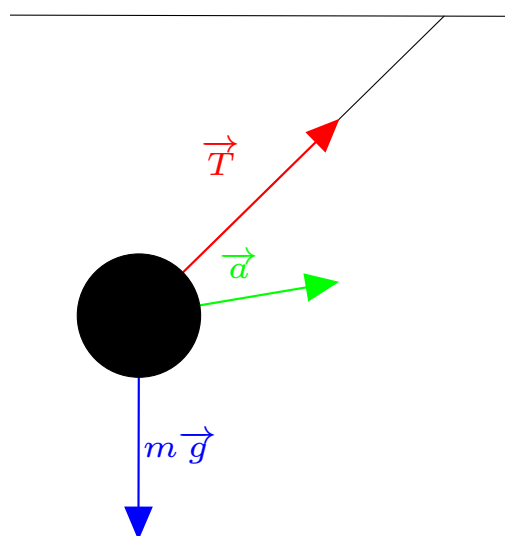
Remarques:

- L'accélération est constante et égale à \vec{g} (MUA)
 - L'accélération est indépendante de la masse.
2. **Forces électrique:** les charges électriques de signes opposés s'attirent et les charges électriques de même signe se repoussent.
 3. **Force magnétique:** Une charge électrique en mouvement est déviée par un courant électrique.

3.3.2 Forces de contact

Les forces de contact sont exercées par traction (tension dans un fil), par pression (soutien d'une table) ou par cisaillement (frottement). Elles sont transmises par contact avec l'objet considéré.

Tension: pendule simple constitué d'une boule suspendue à un fil attaché au plafond.

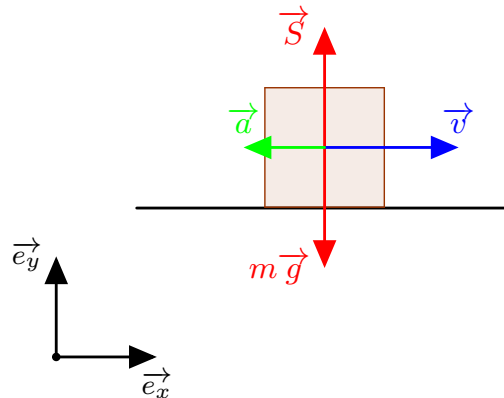


• **Loi du mouvement:**

$$m \cdot \vec{g} + \vec{T} = m \cdot \vec{a} \quad (3.4)$$

- À chaque instant la somme des forces tend à ramener le pendule à la position verticale. Il s'en suit un mouvement d'oscillation.

Soutien: Une boîte qui glisse sur une table est soumise à son poids $m\vec{g}$, à la force de soutien \vec{S} de la table et à une force de frottement \vec{f} qui s'oppose au mouvement.



Loi de mouvement:

$$m \cdot \vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$$

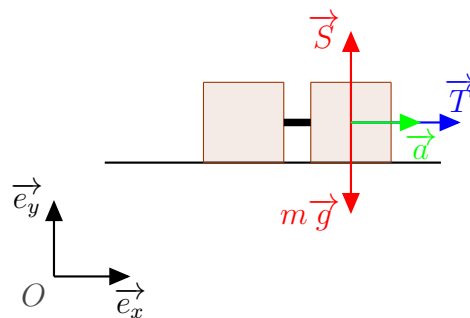
Projections sur les axes:

$$\begin{aligned} \text{selon } \vec{e}_x : -f &= m \cdot (-a) \\ \text{selon } \vec{e}_y : -m \cdot g + S &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Comme la boîte ne quitte pas la table, l'accélération est parallèle à la table. Ainsi,

$$\begin{cases} f = m \cdot a \\ S = m \cdot g \end{cases} \quad (3.6)$$

Traction: Une locomotive pousse un wagon avec une force de traction \vec{T} . Le wagon a une masse m et le frottement est négligeable.



Loi du mouvement:

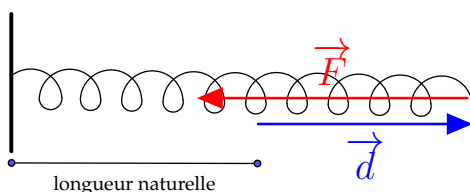
$$m \cdot \vec{g} + \vec{S} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \text{selon } \vec{e}_x : T &= m \cdot a \\ \text{selon } \vec{e}_y : -m \cdot g + S &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ainsi,

$$\begin{cases} T = m \cdot a \\ S = m \cdot g \end{cases}$$

Force élastique Un ressort est formé d'un tige enroulée en spirale. Il a une certaine longueur au repos et une rigidité (difficulté à déformer). La force exercée par le ressort est proportionnelle à son allongement \vec{d} (vecteur déplacement de l'extrémité).



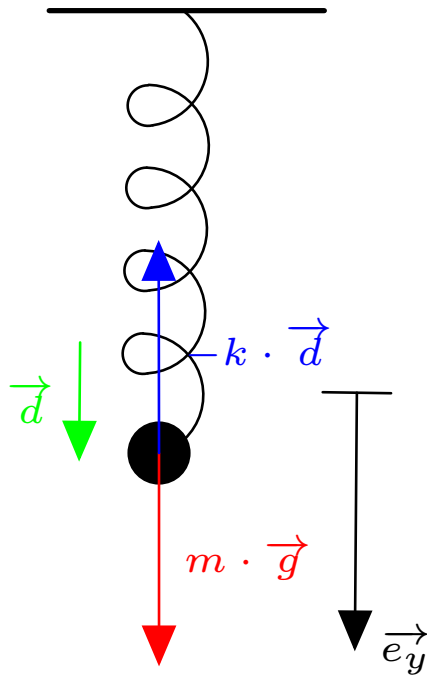
• Force élastique:

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{d} \quad (3.8)$$

• La constante de ressort k mesure sa rigidité.

• Unité physique de k : $\left[\frac{N}{kg} \right]$

Équilibre Objet immobile suspendu à un ressort



Loi du mouvement:

$$m \cdot \vec{g} - k \cdot \vec{d} = \vec{0} \quad (3.9)$$

selon \vec{e}_y : $m \cdot g - k \cdot d = 0 \implies d = \frac{m \cdot g}{k}$

Si la période est faible, alors l'allongement sera faible également. Si la constante élastique est grande, alors l'allongement sera petit.

3.4 Quantité de mouvement

- On considère un objet de masse m et de vitesse \vec{v} . La quantité de mouvement \vec{P} va s'exprimer comme,

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v} \quad (3.10)$$

- C'est une grandeur extensive et vectorielle
- Unité physique (SI): $[\frac{kg \cdot m}{s}]$
- Pour un objet de masse m constante, la 2^{ème} de Newton s'écrit alors:

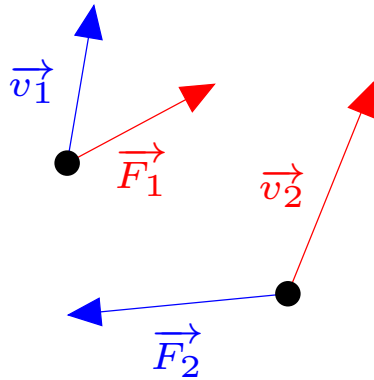
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \dot{\vec{P}} \implies \vec{F} = \dot{\vec{P}} \quad (3.11)$$

3.4.1 Quantité de mouvement

- Come la quantité de mouvement est une grandeur extensive. La quantité de mouvement totale \vec{P} d'un objet formé de n parties est la somme des quantité de mouvement de chaque parties.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n \quad (3.12)$$

- Comme la force est une grandeur extensive, la force résultante totale \vec{F} exercée sur un objet N parties est la somme des forces exercées sur chaque parties.



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad (3.13)$$

Objet formé de deux parties:

$$\text{partie 1 : } \vec{F}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1$$

$$\text{partie 2 : } \vec{F}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{\dot{P}} \quad (3.14)$$

3.5 Centre de masse

Dans la 2^e loi de Newton: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, l'accélération \vec{a} est celle de l'objet. On considère un objet qui est formé de n parties dont les vecteurs position sont \vec{r}_i où $i = 1, 2, \dots, n$

Remarque: La quantité de mouvement totale s'écrit,

$$\vec{P} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{v}_n = \frac{d}{dt}(m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{v}_n) = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{r}_{CM}) \quad (3.15)$$

Centre de masse

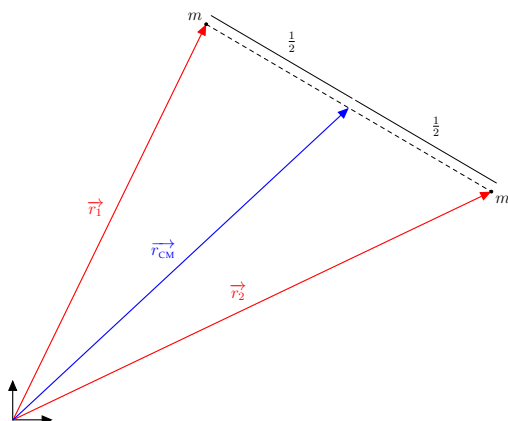
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{r}_n}{m} \quad (3.16)$$

où $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \text{cste}$ est la masse de l'objet.

Le centre de masse est aussi appelé le centre de gravité. Il coïncide avec le barycentre (géométrique) si toutes les parties ont une masse identique.

3.5.1 Haltère symétrique

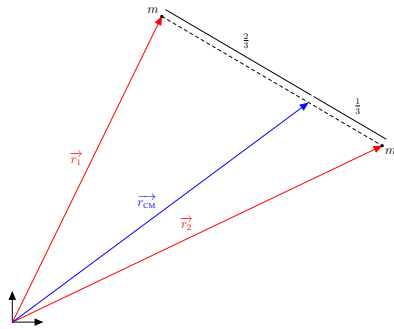
Le centre de masse (CM) d'une haltère symétrique est à équidistance (milieu) des 2 masses.



Centre de masse

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m \cdot \vec{r}_1 + m \cdot \vec{r}_2}{2m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad (3.17)$$

3.5.2 Haltère asymétrique



Le centre de masse (CM) d'une haltère asymétrique n'est pas au milieu des masses.

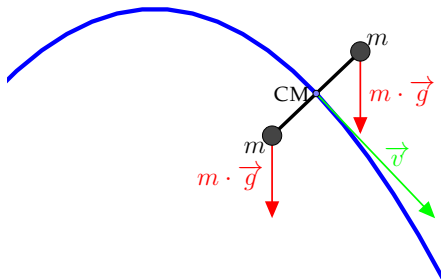
$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m \cdot \vec{r}_1 + 2 \cdot m \cdot \vec{r}_2}{3m} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2) \quad (3.18)$$

- La quantité de mouvement \vec{P} d'un objet c'est aussi celle d'une masse égale à la masse totale de l'objet située au centre de masse.

$$\vec{P} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{r}_{\text{CM}}) = m \cdot \dot{\vec{r}}_{\text{CM}} = m \cdot \dot{\vec{v}}_{\text{CM}}, \quad \text{où } m = \text{cste} \quad (3.19)$$

3.5.3 Haltère lancée

Lorsqu'on lance une haltère symétrique, les 2 masses peuvent avoir un mouvement de rotation propre autour du centre, mais le centre de masse a une trajectoire balistique.



Objet: haltère (masse $2m$)

Force: poids: $2m \cdot \vec{g}$

Loi du mouvement:

$$2 \cdot m \cdot \vec{g} = 2 \cdot m \cdot \vec{a}_{\text{CM}} \implies \vec{a}_{\text{CM}}(t) = \vec{g}, \quad \forall t \quad (3.20)$$

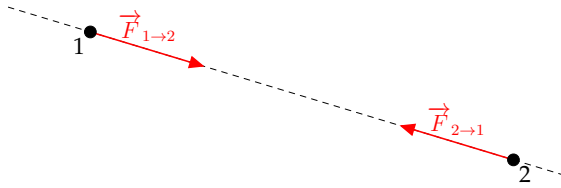
Remarque:

- Le mouvement du centre de masse est le mouvement global de l'objet (comme m de loin)
- La 2^e loi de Newton ne dit rien sur les mouvements internes à l'objet (rotations, vibrations, déformations, ...)

3.6 Troisième loi de Newton

Loi d'action-réaction

La force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ exercée par la partie 1 sur la partie 2 d'un objet est de même norme, du même support et opposée à la force $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ exercée sur la partie 2 sur la partie 1



Mathématiquement, la troisième loi de Newton s'écrit,

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \implies \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} \quad (3.21)$$

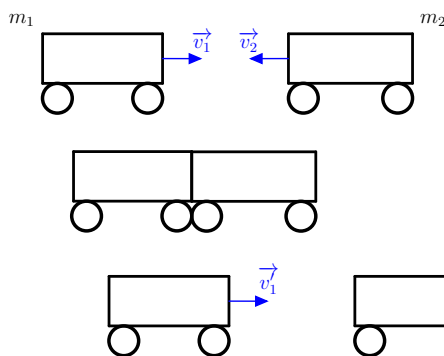
3.6.1 Deuxième loi de Newton

- On considère un objet constitué de différentes parties qui sont soit en contact, soit disjointes.
- Compte tenu de la 3^e loi de Newton, les forces internes à l'objet qui s'exercent entre les parties d'un objet s'annulent deux à deux lorsqu'on somme toutes les forces.
- Ainsi, seules les forces extérieures, dont la résultante est notée \vec{F}^{est} , contribuent à modifier la quantité de mouvement totale \vec{P} de l'objet (ou le mouvement du centre de masse).
- La 2^e loi de Newton s'écrit finalement,

$$\vec{F}^{\text{est}} = \dot{\vec{P}} = m \cdot \vec{a}_{\text{CM}}, \text{ ou si } m = \text{cste} \quad (3.22)$$

Remarque: En absence de force extérieure résultante, la quantité de mouvement totale est constante.

3.6.2 Choc de 2 chariots sur un rail horizontal



Objet: deux chariots de masse m_1 et m_2

Forces extérieures: poids $m_1 \cdot \vec{g}$ et $m_2 \cdot \vec{g}$, forces de soutiens \vec{S}_1 et \vec{S}_2 qui se compensent:

$$m_1 \cdot \vec{g} + \vec{S}_1 + m_2 \cdot \vec{g} + \vec{S}_2 = \vec{0}$$

Remarque le mécanisme compliqué du choc ne joue aucun rôle (forces internes)

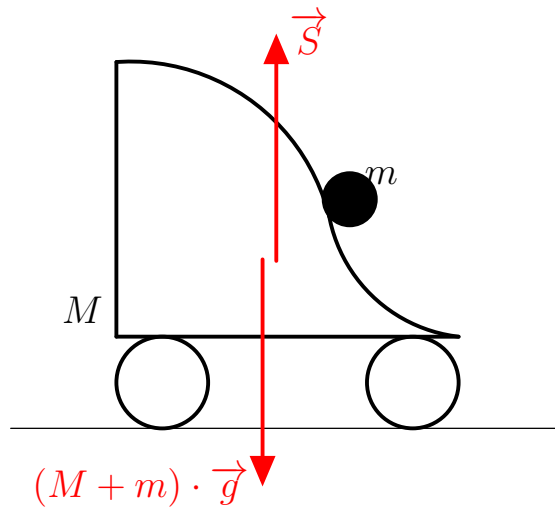
Comme la force externe résultante est nulle, $\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$, la quantité de mouvement totale est constante:

$$\vec{P} = \text{cste}$$

$$\underbrace{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}_{\text{avant le choc}} = \underbrace{m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2'}_{\text{après le choc}} \quad (3.23)$$

3.6.3 Chariot propulsé par un boulet

On considère un chariot qui est propulsé par un boulet qui s'en échappe.



Objet: chariot de masse M et du boulet de masse m

Forces (externes): poids $(M + m) \vec{g}$ et soutien du sol \vec{S}

selon \vec{e}_x : $F_x^{\text{est}} = 0$

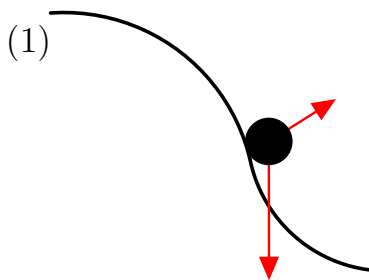
$$\Rightarrow P_x = M \cdot V_x + m \cdot v_x = \text{cste} (= 0)$$

$$\Rightarrow V_x = -\frac{m}{M} \cdot v_x \quad (3.24)$$

Le chariot et le boulet ont des vitesses de signe opposé.

Remarques:

- Selon \vec{e}_y , $F_y^{\text{est}} \neq 0$, car le boulet descend alors que le chariot reste à la même hauteur.
- Le boulet et le chariot peuvent être pris séparément.

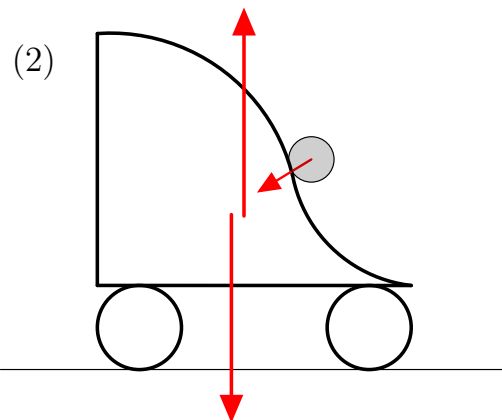


Objet: boulet (1)

Forces: poids $m \cdot \vec{g}$, action du chariot \vec{N} ,

$$m \cdot \vec{g} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}_m \quad (3.25)$$

L'accélération est dirigée le long du plan incliné vers la droite.



Objet: chariot (2)

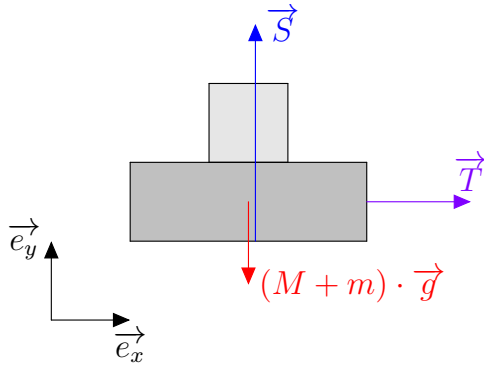
Forces: poids $M \cdot \vec{g}$, soutien du sol \vec{S} , réaction du chariot \vec{N} ,

$$M \cdot \vec{g} + \vec{S} - \vec{N} = M \cdot \vec{a}_M \quad (3.26)$$

L'accélération est dirigée vers la gauche.

3.6.4 Blocs superposés

On considère un objet constitué de deux blocs superposés. L'un est tracté et glisse sans frottements sur le sol. L'autre bloc est posé sur le premier. Les deux blocs sont immobiles l'un par rapport à l'autre; leur accélération \vec{a} est identique.

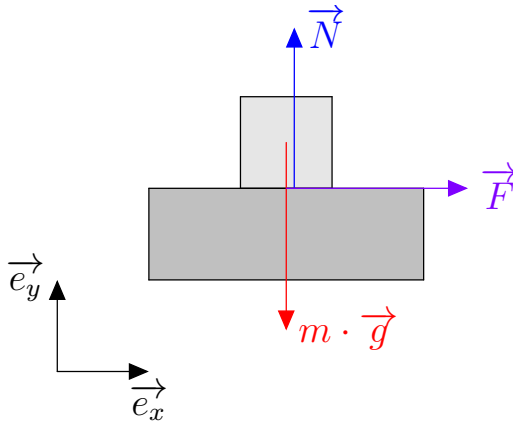


Objet: les deux blocs

Forces: Poids $(M+m) \cdot \vec{g}$, soutien \vec{S} , traction \vec{T}

$$\vec{T} + (M+m) \cdot \vec{g} + \vec{S} = (M+m) \cdot \vec{a}$$

selon \vec{e}_x : $T = (M+m) \cdot a$ (3.27)



Objet: le bloc supérieur

Forces: Poids $m \cdot \vec{g}$, soutien du bloc inférieur \vec{N} , frottement \vec{F}

$$\vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}$$

selon \vec{e}_x : $F = m \cdot a$ (3.28)

A l'aide des équations du mouvement (3.27) et (3.28)

$$\begin{cases} T = (M+m) \cdot a & (3.27) \\ F = m \cdot a & (3.28) \end{cases}$$

On fixe l'expression de la norme F de la force du frottement

$$f = \frac{m}{m+M} \cdot T \quad (3.29)$$

Remarque: En considérant comme objet le bloc inférieur, on aurait obtenu la loi du mouvement suivante:

$$\vec{T} + M\vec{g} + \vec{S} - \vec{F} - \vec{N} = M \cdot \vec{a}$$

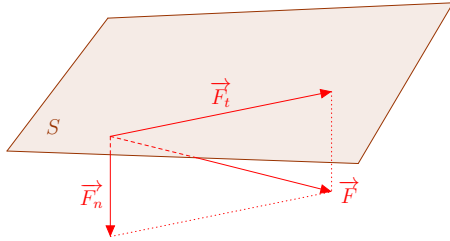
où les signes négatifs sont le résultat de la 2^e loi de Newton

selon \vec{e}_x : $T - F = m \cdot a$ (3.30)

Les équations du mouvement (3.27), (3.28) et (3.30) sont linéairement dépendantes

3.7 Pression

On considère une force \vec{F} exercée sur la surface S d'un objet:



On décompose la force \vec{F} :

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t \quad (3.31)$$

où

- \vec{F}_n = force normale, de compression
- \vec{F}_t = force tangente, de cisaillement

3.7.1 Pression moyenne

- La pression moyenne est définie comme le rapport de la norme de la force normale et de la surface.

$$p_{moy} = \frac{\|\vec{F}_n\|}{S} \quad (3.32)$$

- Elle nous donne la répartition moyenne de la force normale sur la surface de l'objet.
- Unité physique de la pression (SI): Pascale $[Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{m \cdot s^2}\right]$

Exemple: Une personne de masse $m = 64kg$ se tient sur un talon. On calcule la pression moyenne exercée sur le pied du voisin.

- À l'équilibre, la force exercée sur le sol est le poids de la personne $m \cdot \vec{g}$. Ainsi,

$$p_{moy} = \frac{m \cdot g}{S} \quad (3.33)$$

- Talon plat:

$$S = 16cm^2 \Rightarrow p_{moy} = \frac{640N}{16 \cdot 10^{-4}m^2} = 4 \cdot 10^5 Pa$$

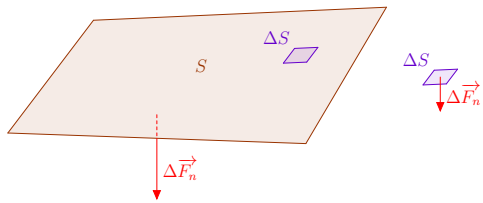
- Talon pointu:

$$S = 1cm^2 \Rightarrow p_{moy} = \frac{640N}{1 \cdot 10^{-4}m^2} = 64 \cdot 10^5 Pa$$

Pour exercer la même pression sur le sol avec un talon plat qu'avec un talon aiguille, il faudrait que la personne porte 15 autres personnes de masse identiques.

3.7.2 Pression locale

La force normale \vec{F}_n n'agit à priori pas de la même manière sur toute la surface d'air S . En divisant la surface en éléments d'air ΔS , on met en évidence la contribution de $\Delta \vec{F}_n$ sur chaque ΔS .



Surface totale: $S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots$

Force normale: $F_n = \Delta F_{n,1} + \Delta F_{n,2} + \dots$

Pression locale:

$$p(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \vec{F}_n\|}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}$$

Remarque: La pression est

1. Un scalaire positif, $p \geq 0$
2. Définie en tout point \vec{r} de la surface, à priori différente d'un à un autre: c'est une fonction de l'espace (et du temps)

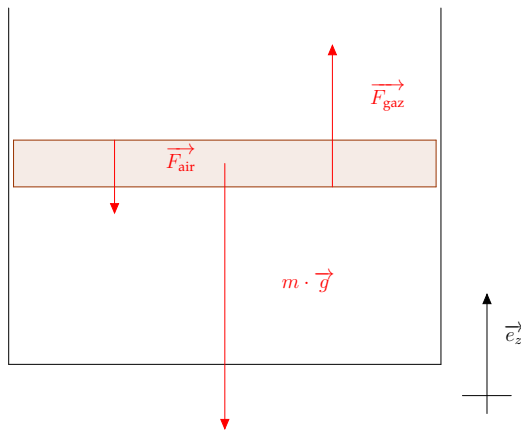
$$p \equiv p(\vec{r}, t)$$

Cas particuliers Si la force normale est uniforme sur la surface S , alors la pression est identique en tout point et est égale à la pression moyenne. Ainsi

$$\|\vec{F}_n\| = p \cdot S \quad (3.34)$$

Exemple: La pression de l'air due aux chocs des molécules d'aires sur les faces.

3.7.3 Gaz dans un cylindre



Objet: piston

Forces: poids $m \cdot \vec{g}$ et forces de pression \vec{F}_{air} et \vec{F}_{gaz}

$$m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{\text{air}} + \vec{F}_{\text{gaz}} = \vec{0} \quad (\text{à l'équilibre})$$

$$\text{selon } \vec{e}_x : -m \cdot g - p_{\text{air}} \cdot S + p_{\text{air}} \cdot S = 0 \implies$$

$$p_{\text{gaz}} = p_{\text{air}} + \frac{m \cdot g}{S}$$

3.7.4 Loi des gaz parfaits

Un gaz parfait est un modèle de gaz idéalisé. Lorsque la pression d'un gaz est suffisamment basse, les gaz réels peuvent être modélisés par les modèles de gaz parfait. Dans le cas contraire, ils sont décrits par le modèle du gaz de Van der Waals.

Équations d'état du gaz parfait

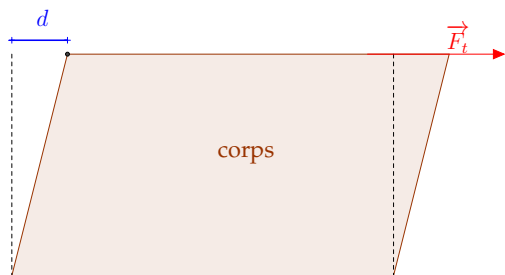
$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T = n \cdot R \cdot T \quad (3.35)$$

où

- p est la pression du gaz [Pa]
- V est le volume occupé par le gaz [m^3]
- T la température du gaz [K]
- k est la constante de Boltzmann: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \left[\frac{J}{K} \right]$
- N_A est le nombre d'Avogadro: $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ molécules
- n est le nombre de moles de gaz: $n = \frac{N}{N_A}$
- R est la constante de gaz parfait: $R = N_A \cdot k = 8.31 \left[\frac{J}{K \cdot mol} \right]$

3.8 Hydrostatique

3.8.1 Définition d'un fluide



Si on applique une force tangentielle de cisaillement \vec{F}_t pour obtenir un petit déplacement tangentiel d , le corps s'oppose à ce cisaillement.

- Le corps est **solide** s'il faut exercer une force de cisaillement en continu pour maintenir un déplacement.

Exemple: Modèle linéaire

$$F_t = k \cdot d \quad (\text{force élastique})$$

En régime élastique, le solide reprend sa forme initiale si on supprime la force de cisaillement.

- Le corps est un **fluide**, si la force de cisaillement nécessaire pour maintenir le déplacement diminue au cours du temps. Après un temps suffisamment grand, plus aucun cisaillement n'est nécessaire, le fluide s'est adapté à la contrainte.

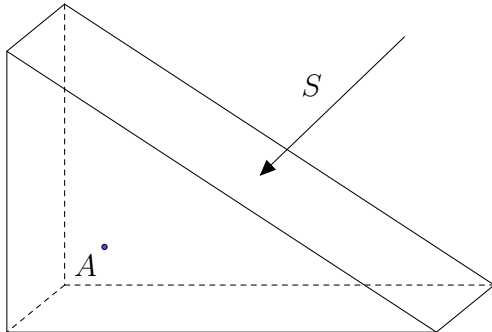
Exemple: Modèle exponentiel

$$F_t = k \cdot d \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Si on maintient ce cisaillement (même très faible), le fluide se transforme continuellement.

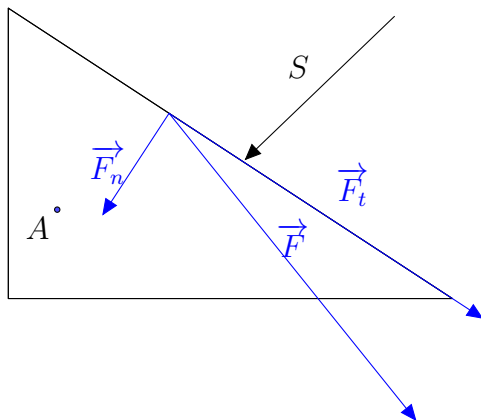
3.8.2 Forces dans un fluide au repos

L'hydrostatique est l'étude des fluides au repos.



Dans un fluide, on considère un petit volume autour du point A.

En coupe,



Le fluide environnant exerce une force \vec{F} sur chaque face de surface S :

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n \quad (3.36)$$

Comme le fluide est au repos il n'exerce pas réellement de cisaillement (sinon il se déformerait):

$$\vec{F}_t = \vec{0}$$

. Ainsi la force \vec{F} est normale à la face

$$\vec{F} = \vec{F}_n$$

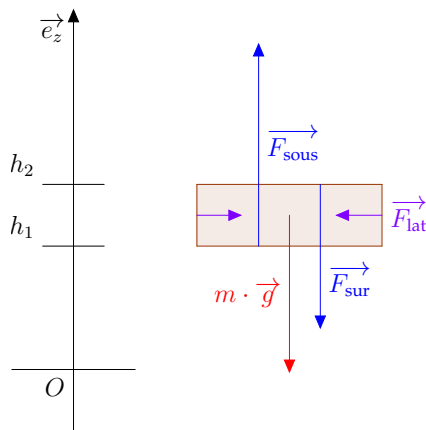
3.8.3 Loi de Pascal

L'intensité de la force exercée par le fluide sur la surface ne dépend pas de l'orientation de la surface. Elle dépend de la taille de la surface et de sa position \vec{r} dans le fluide. Il suffit de connaître la pression (force par unité de surface) de fluide $p(\vec{r})$.

Remarque: Lors de chocs sur une surface, les molécules changent de quantité de mouvement et subissent une force de la part de la surface. La 3^e loi de Newton implique que les molécules exercent une force, nommée de pression.

3.8.4 Loi d'hydrostatique

On considère un fluide au repos, soumis à la force de la gravité. Par expérience, la pression augmente avec la profondeur (oreilles).



Objet: parallélépipède rectangle de fluide entre deux niveaux h_1 et h_2

Forces poids $m \cdot \vec{g}$ et forces de pression verticale \vec{F}_{sur} et \vec{F}_{sous} et latérales \vec{F}_{lat}

$$m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{\text{sous}} + \vec{F}_{\text{sur}} + \vec{F}_{\text{lat}} - \vec{F}_{\text{lat}}$$

$$\text{selon } \vec{e}_z : -m \cdot g - F_{\text{sur}} + F_{\text{sous}} = 0$$

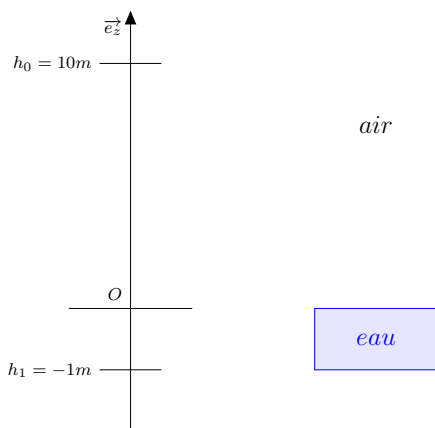
- Fluide homogène: $-\rho_{fl} \cdot (h_2 - h_1) \cdot S \cdot g - p(h_2) \cdot S + p(h_1) \cdot S = 0$

$$p(h_1) - p(h_2) = \rho_{fl} \cdot g(h_2 - h_1) \quad (3.37)$$

- La différence de pression entre deux niveaux est due au poids du fluide par unité de surface entre les niveaux.

3.8.5 Pression d'une colonne d'air et d'eau

Connaissant la pression de l'air $p(h_0) = p_0 = 1 \text{ atm}$ à une hauteur de 10 m au dessus du niveau de l'eau, on cherche à déterminer la pression $p(h_1)$ à 1 m de profondeur dans l'eau



Dans l'air:

$$p(0) - p(h_0) = \rho_{\text{air}} \cdot g \cdot (h_0 - 0), \quad (h_0 > 0)$$

Dans l'eau:

$$p(h_1) - p(0) = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (0 - h_1), \quad (h_1 < 0)$$

Ainsi,

- $p(0) = p(h_0) + \rho_{\text{air}} \cdot g \cdot h_0 = (1.013 \cdot 10^5 + 1.3 \cdot 9.81 \cdot 10) \text{ Pa} = 1.014 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- $p(h_1) = p(0) + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (-h_1) = (1.014 \cdot 10^5 + 1.3 \cdot 9.81 \cdot 1) \text{ Pa} = 1.112 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Remarques:

- La variation de pression de l'air peu souvent être négligée
- Pour 1 m de profondeur dans l'eau, la pression augmente de 10%

3.8.6 Surfaces connecté par un fluide

- La pression est identique en tous points d'un même niveau. Dans les vases communicants, les niveaux à l'air libre sont les mêmes (sinon le fluide ne serait pas au repos)
- Soient deux colonnes de sections S_1 et S_2 reliées par l'eau

Quelle force \vec{F}_2 faut-il exercer à droite pour maintenir une différence de niveau $\Delta h = h_1 - h_2$ entre les colonnes d'eau?

- Au niveaux de h_2 , la pression est la même dans les 2 colonnes

$$p_a + \frac{F_2}{S_2} = p_a + \frac{M_a}{S_1} + \rho_{\text{eau}} g \cdot (h_1 - h_2) \implies F_2 = M \cdot g \cdot \frac{S_2}{S_1} + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \cdot S_2$$

- En choisissant S_2 petite, F_2 peut être petite. C'est le principe de fonctionnement d'une presse hydraulique.

3.8.7 Principe d'Archimède

La pression augmente avec la profondeur, donc un corps immergé subit une résultante des forces de pression dirigée vers le haut appelée poussée d'Archimède \vec{F}_A .

Objet: élément de fluide de masse m et de volume V_{fl}

Forces: $m \cdot \vec{g}$ poids, forces de pression (poussée d'Archimède)

$$m \cdot \vec{g} + \vec{F}_A = \vec{0} \implies \vec{F}_A = -\rho_{\text{fl}} \cdot V_{\text{fl}} \cdot \vec{g}$$

Le point d'application de la poussée d'Archimède est le centre de masse de l'élément de fluide.

Si on remplace l'élément de fluide par un autre corps au repos de même forme et de même volume, les forces exercées par le fluide environnant ne changent pas.

Poussée d'Archimède:

$$\vec{F}_A = -\rho_{\text{fl}} \cdot V_{\text{im}} \cdot \vec{g} \quad (3.38)$$

où V_{im} est le volume immergé du corps.

Remarque: Comme la poussée d'Archimède est une conséquence de la loi de l'hydrostatique qui donne la différence de pression dans un même fluide, un corps flottant entre deux fluides subit deux poussées d'Archimède, selon le volume immergé dans chacun des fluides.

Exemple: Un ballon sur l'eau se trouve partiellement dans l'eau et partiellement dans l'air.

3.8.8 Applications de la force d'Archimède

1. Ballon de foire retenu au sol par un fil.

Objet: ballon

Forces: poids $m \cdot \vec{g}$, tension \vec{T} , poussée d'Archimède \vec{F}_A

$$m \cdot \vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A = \vec{0}$$

$$\vec{T} = -m \cdot \vec{g} - \vec{F}_A = (\rho_{\text{air}} \cdot V - m) \cdot \vec{g} \quad (3.39)$$

Le fil est vertical et tendu si $\rho_{\text{air}} \cdot V - m > 0$

2. Fluide qui se trouve dans un chariot accéléré

Objet: élément de fluide

Forces: poids $m \cdot \vec{g}$, forces de pression (poussée d'Archimède \vec{F}_A)

$$m \cdot \vec{g} + \vec{F}_A = m \cdot \vec{a} \quad (3.40)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_A = - \underbrace{\rho_{\text{fl}} \cdot V_{\text{im}}}_{=m} \cdot (\vec{g} - \vec{a})$$

⚠ \vec{F}_A n'est pas verticale (hydrodynamique si $\vec{a} \neq \vec{0}$)

3. Ballon de foire au plancher d'un chariot accéléré

Objet: ballon

Forces: poids $m \cdot \vec{g}$, tension du fil \vec{T} , poussée d'Archimède

$$m \cdot \vec{g} + \vec{F}_A + \vec{T} = m \cdot \vec{a} \quad (3.41)$$

$$\Rightarrow \vec{T} = -m \cdot (\vec{g} - \vec{a}) - \vec{F}_A = (\rho_{\text{air}} \cdot V - m) \cdot (\vec{g} - \vec{a})$$

Le fil est tendu si et seulement si $\rho_{\text{air}} \cdot V - \underbrace{m}_{\rho_{\text{gaz}} \cdot V} > 0$ et l'angle est donné par:

$$\tan(\alpha) = \frac{T_x}{T_y} = \frac{-(\rho_{\text{air}} \cdot V - m) \cdot a}{-(\rho_{\text{air}} \cdot V - m) \cdot g} = \frac{a}{g}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{g}\right)$$

3.8.9 Unité de pression: le $mmHg$

La pression atmosphérique peut être donnée par la hauteur d'une colonne de liquide dans un tube.

- Un tube vide, fermé supérieurement, plongé dans du mercure (Hg). Sans l'effet de la pression ambiante p_a , le mercure monte dans le tube.
- La pression p_a est partout la même au niveau de l'interface air-mercure.

Sous la colonne de mercure,

$$p_{Hg} = p_a = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h \iff h = \frac{p_a}{\rho_{Hg} \cdot g} \quad (3.42)$$

A une atmosphère, la hauteur de la colonne est de $760mm$, on a la relation,

$$\frac{h}{760mm} = \frac{p_a}{1atm} \quad (3.43)$$

3.9 Deux intermèdes

3.9.1 Produit scalaire

Soient deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} . Leur produit scalaire s'écrit:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\phi) \quad (3.44)$$

où ϕ est l'angle formé par \vec{a} et \vec{b} .

Le produit scalaire est une mesure du parallélisme de deux vecteurs.

Propriétés:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Si l'angle est aigu: $\phi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \iff \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
- si l'angle est obtus: $\phi \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \iff \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$
- Si \vec{a} et \vec{b} sont orthogonaux: $\phi \in \{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Si $\vec{a} \equiv \vec{b} \implies \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\|$ et $\cos(\phi) = \cos(0) = 1 \implies \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

Cas particuliers

$$\|\vec{b}\| = 1 \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\phi)$$

est la projection (avec signe) du vecteur \vec{a} le long du vecteur unitaire \vec{b} . On peut ainsi obtenir les composantes d'un vecteur \vec{a} dans un repère orthonormé (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y) par produit scalaire:

$$\begin{aligned} a_x &= \vec{a} \cdot \vec{e}_x \\ a_y &= \vec{a} \cdot \vec{e}_y \end{aligned}$$

3.9.2 Dérivée temporelle d'un produit

La dérivée temporelle d'un produit (algébrique, scalaire, vectoriel) se calcule comme suit:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(AB) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(AB)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [A(t + \Delta t) \cdot B(t + \Delta t) - A(t) \cdot B(t)] \\
 \Delta(AB) &= A(t + \Delta t) \cdot B(t + \Delta t) - A(t) \cdot B(t + \Delta t) + A(t) \cdot B(t + \Delta t) - A(t) \cdot B(t) \\
 &= (A(t + \Delta t) - A(t)) \cdot B(t + \Delta t) + A(t) \cdot (B(t + \Delta t) - B(t)) \\
 &= \Delta A \cdot B(t + \Delta t) + A(t) \cdot \Delta B \\
 \frac{d}{dt}(AB) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(AB)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \cdot \overbrace{B(t + \Delta t)}^{\rightarrow B(t)} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} A(t) \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = \dot{A}B + A\dot{B}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Pour un vecteur $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_t$

$$\frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} (v \cdot \vec{e}_t) = \dot{v} \cdot \vec{e}_t + v \cdot \dot{\vec{e}}_t \tag{3.46}$$

Remarque: Le premier terme $\dot{v} \cdot \vec{e}_t$ correspond à la dérivée du vecteur \vec{v} lorsque sa norme varie et son orientation reste constante. Le deuxième $v \cdot \dot{\vec{e}}_t$ correspond à la dérivée du vecteur \vec{v} lorsque son orientation varie mais sa norme v reste constante.

Pour le carré de la norme du vecteur \vec{v} :

$$\frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = 2 \cdot \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \tag{3.47}$$

Remarque: Lorsque la norme du vecteur \vec{v} est constante et $\dot{\vec{v}} \neq 0$, le vecteur \vec{v} est orthogonale à sa dérivée temporelle $\dot{\vec{v}}$, c'est-à-dire que $\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = 0$

3.10 Repère lié au mouvement

3.10.1 Abscisse curviligne, repère

Rappel: Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

- x est la coordonnée d'abscisse et \vec{e}_x donne le sens positif:
- $x > 0$: P est devant O selon \vec{e}_x
- $x < 0$: Q est derrière O selon \vec{e}_x

Généralisation à une courbe Γ du plan: On prend un point O sur Γ comme origine et on choisit un sens positif de parcours. La position d'un objet sur Γ est donnée par la longueur s (avec signe) mesurée le long de Γ .

Abscisse curviligne

- s est l'abscisse curviligne
- $s > 0$: P est devant O selon \vec{e}_t
- $s < 0$: Q est derrière O selon \vec{e}_t

On définit un repère orthonormé mobile lié au point matériel $P(P, \vec{e}_t, \vec{e}_n)$ qui se déplace avec P le long de Γ .

1. \vec{e}_t est un vecteur normé, tangent à la trajectoire Γ et donnant le sens positif du parcours
2. \vec{e}_n un vecteur normé, normal à Γ et formant en P un angle $\frac{\pi}{2}$ avec \vec{e}_t (orienté vers l'intérieur)

Exemple:

Abscisse curviligne: $s = L \cdot \alpha$ où $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\alpha > 0$: gauche

$\alpha < 0$: droite

3.10.2 Vitesse scalaire

En tout point de la trajectoire Γ d'un objet, la vitesse est toujours tangente à la trajectoire s'écrit,

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_t$$

où v est la composante scalaire de la vitesse le long de la trajectoire Γ et \vec{e}_t est le vecteur unitaire tangent.

- La vitesse scalaire est définie comme la dérivée temporelle de l'abscisse curviligne:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \quad (3.48)$$

- Unité physique (SI): $\left[\frac{m}{s}\right]$

Remarque: $\|\vec{v}\| = v$ (vitesse instantanée)

Exemple: Trajet Lausanne-Evian:

- Vitesse moyenne:

$$\|\vec{V}_{\text{moy}}\| = \left\| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right\| = \frac{15 \text{ km}}{1.5 \text{ h}} = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

- Vitesse scalaire moyenne:

$$V_{\text{moy}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120 \text{ km}}{1.5 \text{ h}} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}_{\text{moy}}\| \neq V_{\text{moy}} \quad \triangle!$$

3.10.3 Accélération tangentielle et normale

En tout point P de la trajectoire Γ d'un objet, l'accélération se décompose dans un repère $(P, \vec{e}_t, \vec{e}_n)$ comme suit:

Accélération:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (3.49)$$

Accélération tangentielle:

$$\vec{a}_t = a_t \cdot \vec{e}_t = (\vec{a} \cdot \vec{e}_t) \cdot \vec{e}_t \text{ où } \|\vec{e}_t\| = 1$$

Accélération normale:

$$\vec{a}_n = a_n \cdot \vec{e}_n = (\vec{a} \cdot \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n \text{ où } \|\vec{e}_n\| = 1$$

1. L'accélération tangentielle scalaire est l'accélération le long de la trajectoire et donc la dérivée temporelle de la vitesse scalaire.

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (3.50)$$

Unité physique (SI): $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

- $a_t > 0$: v augmente (l'objet va plus vite dans le sens \vec{e}_t)
 - $a_t < 0$: v diminue (l'objet va plus lentement dans le sens \vec{e}_t)
2. L'accélération normale scalaire est la dérivée temporelle de la direction de la vitesse \vec{v}

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (3.51)$$

où R est le rayon de courbure de la trajectoire à un instant donné (rayon du cercle osculateur passant par trois points infiniment proches de la trajectoire).

Unité physique (SI): $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

L'accélération normale est toujours orientée vers l'intérieur de la trajectoire.

Remarque: Les relations (3.50) et (3.51) sont une conséquence des intermédiaires 3.9, comme on va le montrer.

En effet, l'accélération s'écrit comme,

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{e}_t) = \dot{v} \cdot \vec{e}_t + v \cdot \dot{\vec{e}}_t$$

Comme $\|\vec{e}_t\|^2 = 1$; $\frac{d}{dt}\|\vec{e}_t\|^2 = \frac{d}{dt}(\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t) = \dot{\vec{e}}_t \cdot \vec{e}_t + \vec{e}_t \cdot \dot{\vec{e}}_t = 2 \cdot \vec{e}_t \cdot \dot{\vec{e}}_t = 0$ La dérivée temporelle $\dot{\vec{e}}_t$ est donc soit nulle, soit normale à \vec{e}_t . Ainsi $\vec{a}_t = \dot{v} \cdot \vec{e}_t$ et $\vec{a}_n = v \cdot \dot{\vec{e}}_t$