

EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2A
PREPA-032(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sacha FRIEDLY

Printemps - 2019



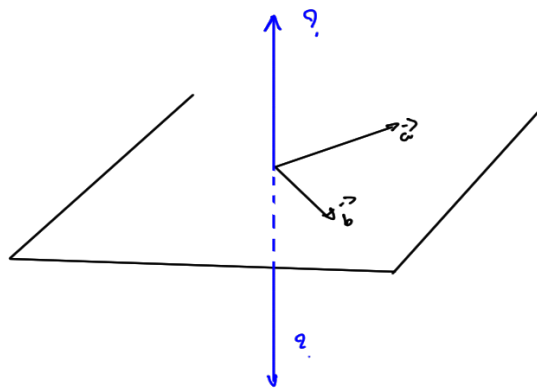
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Produit vectoriel ("cross product")

Seulement dans l'ESPACE

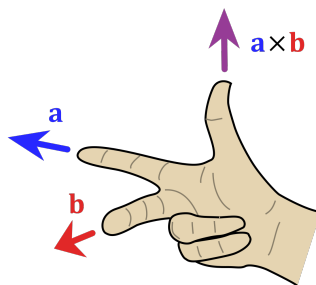
But Étant donné deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} , on aimerait définir de manière univoque un vecteur \vec{c} qui soit \perp à \vec{a} et \perp à \vec{b} .



À définir: le **sens** et la **norme** de \vec{c} .

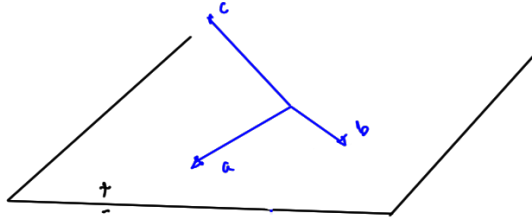
3.1 Sur l'orientation d'une paire de vecteurs

À la paire **ordonnée** (\vec{a}, \vec{b}) , on associe deux demi-espaces "+" et "-", à l'aide de la **règle de la main droite**

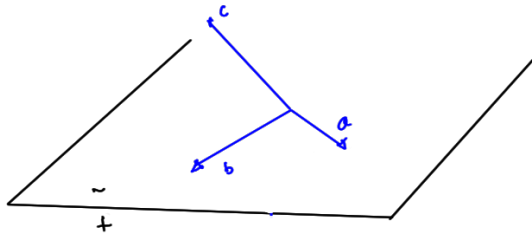


Définition: Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs linéairement indépendants.

- Si \vec{c} pointe dans le demi-plan "+" associé à (\vec{a}, \vec{b}) , on dit que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est **orienté positivement**.



- Si \vec{c} pointe dans le demi-plan "-" associé à (\vec{a}, \vec{b}) , on dit que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est **orienté négativement**.



Définition: Un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est **direct** si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orienté positivement.

Définition: Soient \vec{a}, \vec{b} deux vecteurs de l'espace. Le **produit vectoriel** de \vec{a} et \vec{b} est l'unique vecteur \vec{c} défini comme suit:

Direction $\vec{c} \perp \vec{a}$ et $\vec{c} \perp \vec{b}$

Sens \vec{c} est tel que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est orienté positivement.

Norme $\|\vec{c}\| = \text{l'aire du parallélogramme engendré par } \vec{a} \text{ et } \vec{b}.$

Remarque:

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\varphi) = \|a \times b\|$$

3.2 Propriétés

1.

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} &\iff \|\vec{a} \times \vec{b}\| = 0 \\ &\iff \|\vec{a}\| = 0, \quad \text{ou} \\ &\quad \|\vec{b}\| = 0, \quad \text{ou} \\ &\quad \sin(\varphi) = 0\end{aligned}$$

En particulier:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

2. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ ("x" est **anti-symétrique**)3. En général, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$!!**Contre-exemple:** Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tels que

- $\vec{c} \perp \text{plan}(\vec{a}, \vec{b})$
- $0 < \angle(\vec{a}, \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$

Dans ce cas, on a

$$\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{colinéaire à } \vec{c}} \times \vec{c}$$

mais

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq \vec{0}$$

4. Le produit est **distributif** (par rapport à "+")

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

5. $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

3.3 Calcul de $\vec{a} \times \vec{b}$ en composantes, dans un repère orthonormé direct (R.O.D.)

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un R.O.D. .

On a:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2, & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &= -\vec{e}_2\end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \\ \vec{b} &= b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3\end{aligned}$$

$\vec{a} \times \vec{b} = ?$ en composantes

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (a_i \vec{e}_i) \times (b_j \vec{e}_j) \\
 &= \sum_{i,j=3}^3 a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \\
 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3} \\
 &\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1} \\
 &\quad + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \cdot \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{=-\vec{e}_2}
 \end{aligned}$$

Donc, si dans un ROD, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$,

alors

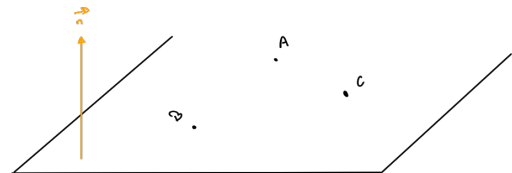
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

3.4 Applications

- Soient, dans un ROD, $A(0, 1, -1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(0, 0, 7)$

Equation cartésienne du plan (ABC)?

Comme un vecteur normal au plan, \vec{n} , est colinéaire à $\vec{AB} \times \vec{AC}$, on peut prendre simplement



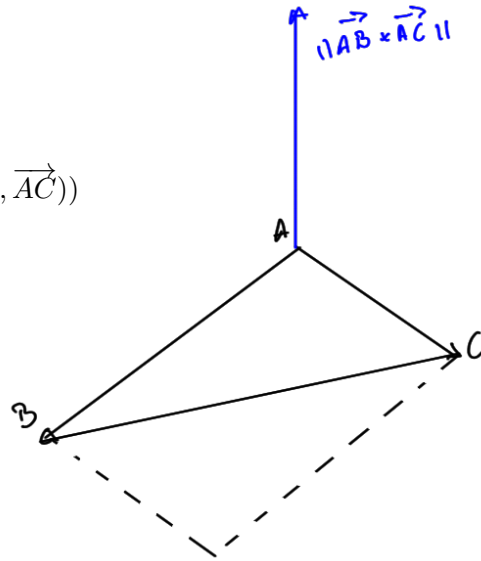
$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc l'équation cartésienne est de la forme:

$$12x - 8y - z + \underbrace{d}_{\substack{\text{passe par C} \\ \Rightarrow d=7}} = 0$$

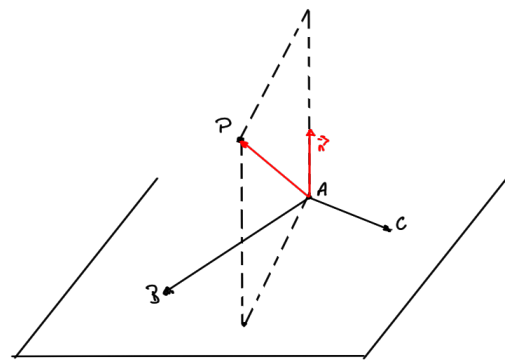
Aire du triangle ABC ? Comme

$$\begin{aligned}
 \text{aire}(ABC) &= \frac{1}{2} \text{aire}(\text{parallélogramme}(\vec{AB}, \vec{AC})) \\
 &= \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{144 + 64 + 1} \\
 &= \frac{\sqrt{209}}{2}
 \end{aligned}$$



Distance de $P(3, 2, 1)$ au plan ABC

$$\begin{aligned}
 \delta &= \left| \vec{AP} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 3-0 \\ 2-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \frac{1}{\sqrt{209}}
 \end{aligned}$$



Intersection entre deux plans:

Si

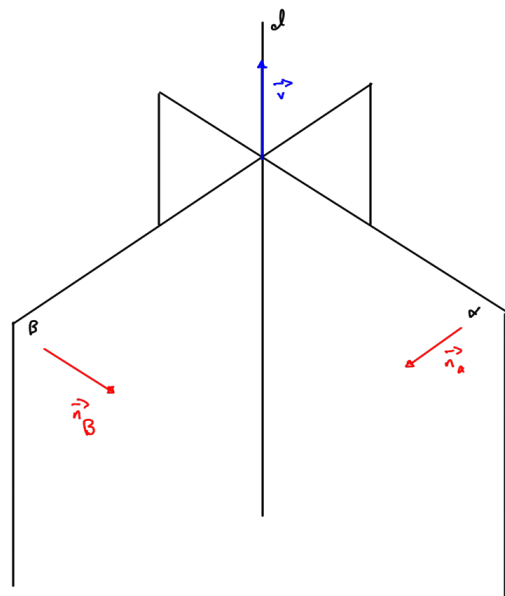
$$\alpha : x - y + z = 0$$

$$\beta : 2x + y - 3z = 2$$

→ droite d'intersection d ?

Comme un vecteur directeur \vec{v} de d doit engendrer α et β , il doit satisfaire:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &\perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{v} &\perp \vec{n}_\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{v} \equiv \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$$



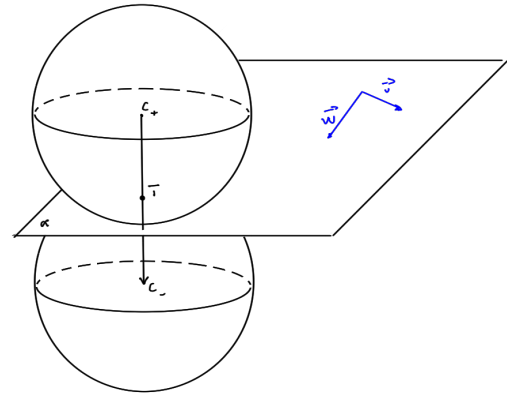
2. Déterminer le centre d'une sphère de rayon $R = \sqrt{30}$ tangente au plan

$$\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{w}}$$

au point $T(5, 1, 0) \in \alpha$

Le centre C de la sphère cherchée est à distance R de α , sur la droite \perp à α passant par T .

→ Deux solutions



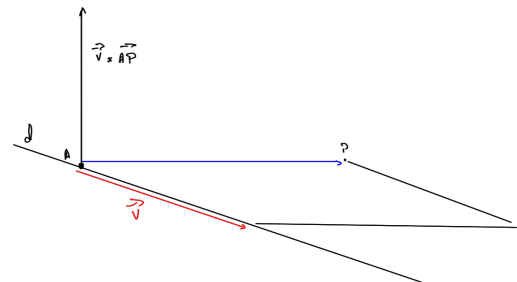
$$\overrightarrow{OC}_{\pm} = \overrightarrow{OT} \pm \sqrt{30} \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}, \quad \text{où} \quad \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

On trouve:

$$C_+(3, 6, -1), \quad C_-(7, -4, 1)$$

3. Distance d'un point à une droite

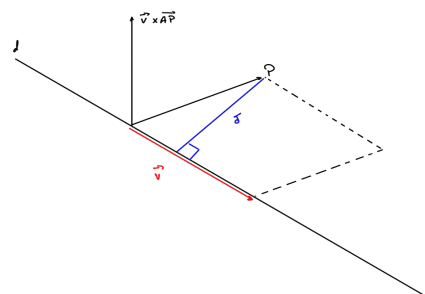
Soit $d = d(A, \vec{v})$, P un point → Comme calculer la distance $\delta = \text{dist}(P, d)$?



Remarque: $\|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\| = \text{aire du parallélogramme}$

Mais l'aire du parallélogramme se calcule aussi par

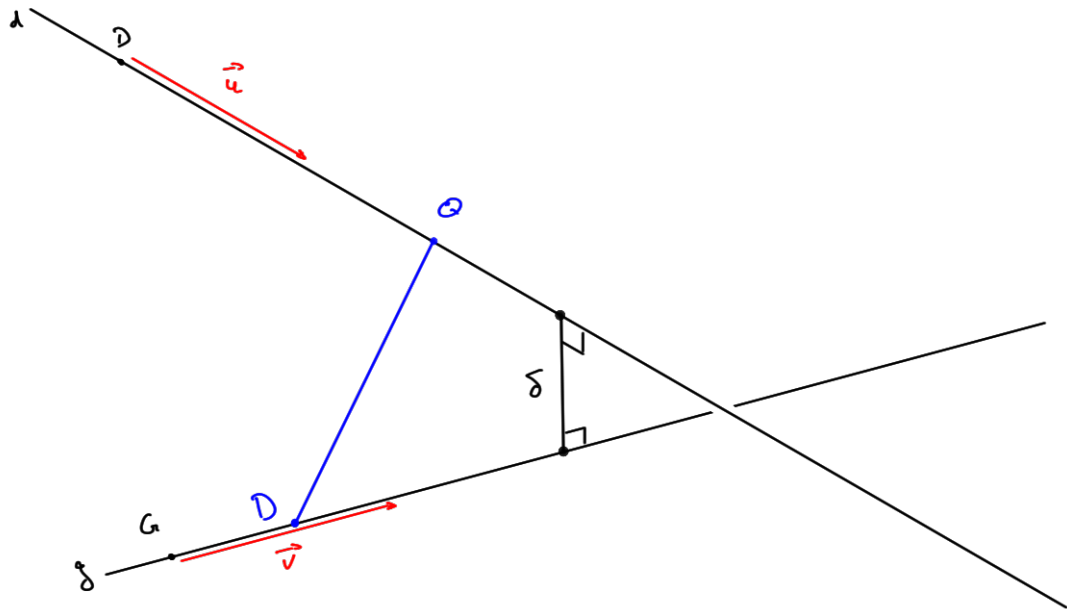
$$\delta = \frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}\|}$$



4. Distance entre deux droites gauches

Soient $d = d(D, \vec{u})$ et $g = (G, \vec{v})$ deux droites gauches.

Comment calculer la **distance** entre d et g ?



$$\delta = \text{dist}(d, g) := \min \text{dist}(P, Q)$$

avec $P \in d$ et $Q \in g$

Soit π le plan contenant d , \parallel à g .

\Rightarrow On veut: $\text{dist}(d, g) = d(g, \pi) = \text{dist}(G, \pi) = \left| \overrightarrow{DG} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right|$ où \vec{n} est normal à π

Comme \vec{u} et \vec{v} dirigent π on peut prendre

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\delta = \text{dist}(d, g) = \left| \overrightarrow{OG} \cdot \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \right|$$

5. Perpendiculaire commune à deux droites gauches

facking disegno

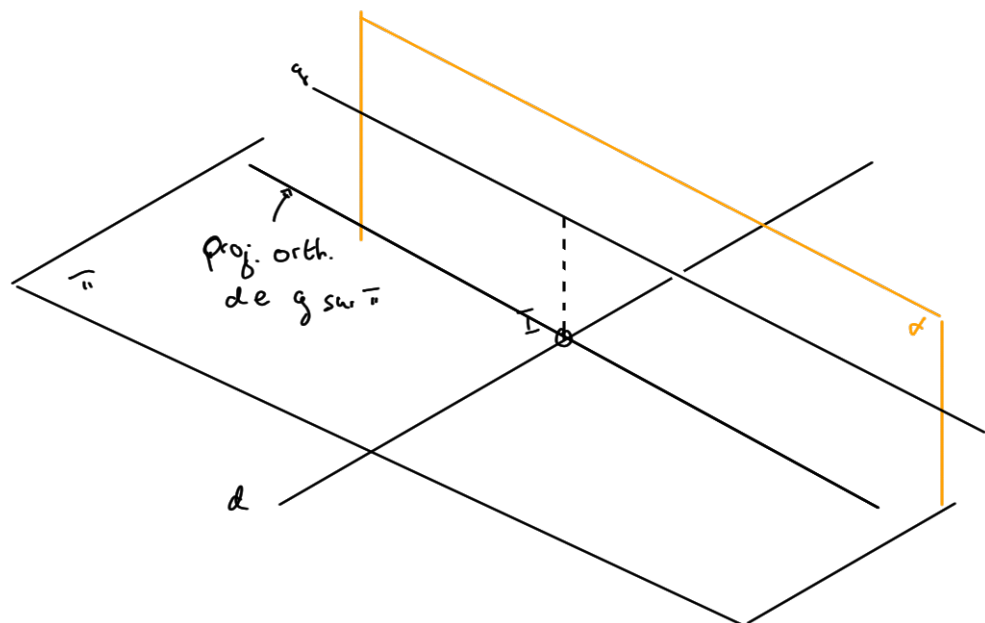
On cherche une droite p , telle que

$$\begin{cases} p \perp d, p \perp g \\ p \cap d \neq \emptyset, p \cap g \neq \emptyset \end{cases}$$

p : **perpendiculaire commune** à d et g .

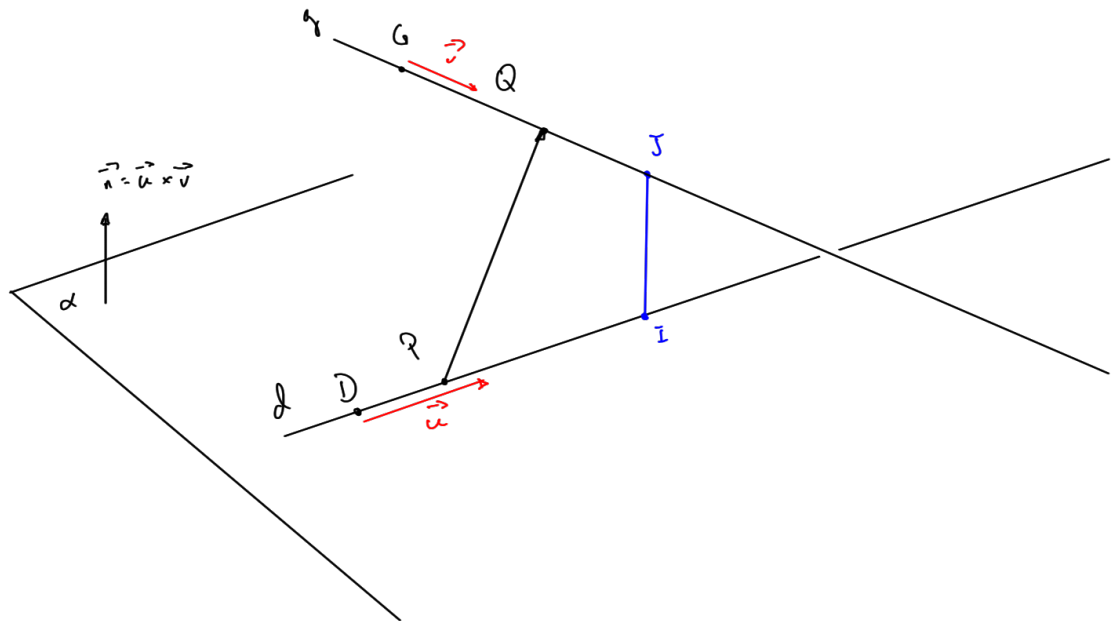
Deux méthodes

(a)



- Soit π le plan contenant d , \parallel à g .
- Soit α le plan \perp à π , contenant g .
- Calculer I : l'intersection entre d et α .
- La droite cherchée p est la droite perpendiculaire à π (donc dirigée par $\vec{u} \times \vec{v}$), passant par I .

(b)



- Laisser glisser un point P sur d : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \lambda X$
-
- Chercher les positions de P et Q pour lesquelles:
[...]