EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2B

PREPA-032(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Simon BOSSONEY

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 5

Inversion

5.1 Inversion d'une application linéaire

5.1.1 Définition

L'inverse d'une application linéaire $f : V \longrightarrow W$ est l'application linéaire

$$f^{-1} : W \longrightarrow V$$

telle que $\forall x \in V$ et $\forall w \in W$

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad f \circ f^{-1}(w) = w$$

5.1.2 Théorème

L'application linéaire $f : V \longrightarrow W$ si et seulement si elle est une bijection.

Démonstration: Soient $x, y \in V$ et $f(x) = f(y) = w \in W$

$$x = f^{-1} \circ f(x) = f^{-1} \circ f(y) = y$$

ainsi si $x = 0_V$ alors

$$y = 0_V$$

et donc Ker$(f) = \{0_V\}$. Par conséquent, l'application linéaire f est injective.
Soit $w \in W$ et $x = f^{-1}(w) \in V$, alors

$$w = f \circ f^{-1}(w) = f(x) \in W$$

Ainsi, $\forall w \in W$, il existe $x \in V$ tel que $f(x) = w$. Par conséquent, Im$(f) = W$, ce qui signifie que l'application linéaire f est surjective.
Si l'application linéaire f est injective et surjective, elle est bijective.

$\square$

5.1.3 Théorème:

L'inverse $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(V, W)$ est unique.

Démonstration: Soit $f \in \mathcal{L}(V,W)$ une application linéaire et soient $f^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$ et $g^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$ deux applications linéaires inverses de $f \in \mathcal{L}(V,W)$
Ainsi

$$\forall x \in V : f^{-1} \circ f(x) = g^{-1} \circ f(x) = x$$

De plus,

$$\forall w \in W : f \circ f^{-1}(w) = f \circ g^{-1}(w) = w$$

Donc,

$$f^{-1}(w) = f^{-1} \circ \left(f \circ g^{-1}(w)\right) = \left(f^{-1} \circ f\right) g^{-1}(w) = g^{-1}(w)$$

Ainsi

$$f^{-1}(w) = g^{-1}(w) \quad \forall w \in W$$

$\square$

5.1.4 Théorème:

L'application inverse $f^{-1} : W \longrightarrow V$ d'une application linéaire $f : V \longrightarrow W$ est linéaire.

Démonstration: Soient $x, y \in V$ et $w, u \in W$ tels que $w = f(x)$ et $u = f(y)$. Alors, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(w + \lambda u) &= f^{-1} \circ (f(x) + \lambda f(y)) = f^{-1} \circ f(x + \lambda y) \\ &= x + \lambda y = f^{-1}(w) + \lambda f^{-1}(u) \end{aligned}$$

Exemples:

1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{w}{a} \\ \frac{u}{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$f^{-1} \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f^{-1} \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f \circ f^{-1} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \frac{w}{a} \\ \frac{u}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

L'inverse de f existe parce que f est une application bijective ($\mathrm{Ker}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$)

2. Soit

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$P(x) = ax^2 + bx + c \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

Cette application linéaire n'a pas d'inverse. En effet $\text{Ker}(f) = \{P(x) = c\}$. Ainsi, cette application n'est pas injective et donc pas bijective.

3. Soit

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$P(x) = ax^2 + bx + c \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

L'inverse de cette application linéaire est,

$$f^{-1}\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto P(x) = ax^2 + bx + c$$

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{R}_2[x])$

5.2 Inverse d'une matrice

5.2.1 Définition:

L'inverse d'une matrice $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ est une matrice $A^{-1} \in M_{nxm}(\mathbb{R})$ telle que

$$I_n = A^{-1}A = AA^{-1} = I_m$$

5.2.2 Théorème:

La matrice inverse $A^{-1} \in M_{nxm}(\mathbb{R})$ de la matrice $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ peut seulement exister si $m = n$.

Démonstration: Comme

$$I_n = A^{-1}A = AA^{-1} = I_m \implies n = m$$

Donc

$$A, A^{-1} \in M_{nxn}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$$

Exemples:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La matrice A représente une application linéaire $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Soit $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1, e_2\}$ une base de l'espace vectoriel de départ et $B'_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\}$ une base de l'espace vectoriel d'arrivée.

Donc,

$$f_A(e_1) = v_1 \quad \text{et} \quad f_A(e_2) = v_2$$

ce qui implique

$$f_A^{-1}(v_1) = f_A^{-1} \circ f_A(e_1) = e_1 = v_1 - v_2$$
$$f_A^{-1}(v_2) = f_A^{-1} \circ f_A(e_2) = e_2 = v_2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie,

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$
$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Ae_1 = e_1 \quad \text{et} \quad Ae_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \Longrightarrow \quad e_2 \in \text{Ker}(f_A)$$

Ainsi, l'application linéaire f_A que représente la matrice A n'est pas injective. Donc il n'y a pas d'inverse.

5.3 Opérations élémentaires

5.3.1 Définition:

Pour $1 \leq i, j \leq m$, on définit la matrice $E_{(i,j)} \in M_m(\mathbb{R})$ par ses coefficients qui sont tous nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_{(i,j,\lambda)} := I_m + \lambda E_{(i,j)}$$

On introduit aussi la matrice

$$M_{(i,\lambda)} := I_m + (\lambda - 1)E_{(i,j)}$$

ainsi que

$$P_{(i,j)} := I_m + \big(E_{(i,j)} - E_{(i,i)}\big) + \big(E_{(j,i)} + E_{(j,j)}\big)$$

On appelle ces matrices des **matrices élémentaires**.

On observe que pour $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ et $A_{(i,j,\lambda)} \in M_m(\mathbb{R})$ on a

$$A_{(i,j,\lambda)}A = (I_m + \lambda E_{(i,j)})A = A + \lambda E_{(i,j)}A$$

Or $E_{(i,j)}A$ n'est autre que la matrice nulle, excepté sa i^e lignes qui est la j^e lignes de A. On en conclut que $A_{(i,j,\lambda)}A$ correspond à l'addition de λ fors la j^e ligne de A à la i^e ligne de A.

La multiplication à gauche par la matrice $M_{(i,\lambda)}$ revient à multiplier la i^e ligne de A par λ, et la multiplication à gauche par la matrice $P_{(i,j)}$ revient à permuter la i^e ligne de A avec sa j^e ligne.

On remarque la multiplication à droite par $A_{(i,j,\lambda)} \in M_n(\mathbb{R})$ revient à additionner λ fois la i^e colonne de A à sa j^e colonne. De manière similaire $AM_{(i,\lambda)}$ correspond à la matrice A dont la i^e colonne est multipliée par λ et $AP_{(i,j)}$ est la matrice A dont les colonnes i et j sont permutées.

Exemple: Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P(1,2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_{(2,1,-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{3,2,-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := B$$

En effet $B = A_{(3,2,-1)}A_{(2,1,-2)}P_{(1,2)}A := PA$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B}$$

On applique maintenant des opérations élémentaires sur les colonnes de B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_{(1,4,1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_{(1,3,-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[A_{(2,3,-2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_{(2,4,-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc finalement écrire que $PAQ = J$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=Q} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=J}$$

Les matrices P et Q représentent des changements de bases: si f_A est l'application linéaire donnée par A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$, alors J représente ces applications par rapport aux bases suivantes de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Diagramme de changement de base: $PAQ = J$

$$J \in M_{3x4}(\mathbb{R}); \quad A \in M_{3x4}(\mathbb{R})$$
$$Q \in M_4(\mathbb{R}); \quad P \in M_3(\mathbb{R})$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3 \\ Q\Big\uparrow & & \Big\downarrow P \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{J} & \mathbb{R}^3 \end{array} \implies J = P \circ A \circ Q = PAQ$$

Les matrices de changement de base Q et P sont des applications linéaires bijectives.

Remarques:

1. Pour trouver les changements de base sans passer par des produits matriciels, on écrit la matrice A entre deux matrices identités:

   $$I_3|A|I_4$$

   A chaque fois qu'on effectue une opération sur les lignes de A, on effectue la même operation sur I_3. A chaque fois qu'on effectue une opération sur les colonnes de A, on effectue la même operation sur I_4.

   Finalement
   $$I_3|A|I_4 \longrightarrow P|J|Q$$

2. si la matrice est inversible, on peut se contenter de faire que des opérations soit seulement sur les lignes soit seulement sur les colonnes:

   $$I_n|A \longrightarrow A^{-1}|I_n$$
   $$A|I_n \longrightarrow I_n|A^{-1}$$