EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2B

PREPA-032(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Simon BOSSONEY

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 4

Théorème du rang

4.1 Rang d'une application linéaire

Comme l'image d'une application linéaire $f : V \longrightarrow W$ est un sous-espace vectoriel de W, on introduit la définition suivante

4.1.1 Définition

Soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire. Le **rang** de f est par définition

$$\text{rang}(f) := \dim(\text{Im}(f))$$

Comme l'image d'une application linéaire est engendrée par les combinaisons linéaires des images par f des éléments d'une base de V, on a le résultat suivant:

4.1.2 Théorème

Soient $f : V \longrightarrow W$ un application linéaire $B = \{b_1, ..., b_n\}$ une base de V. Alors

$$\text{rang}(f) = \dim(\text{Vect}(f(b_1), ..., f(b_n)))$$

□

Les vecteurs $f(b_1), ..., f(b_n)$ ne sont en général pas linéairement indépendants. En fait, il existe une relation très simple entre la dimension du noyau de f et son rang.

Théorème du rang (deuxième version) Soient $f : V \longrightarrow W$ un application linéaire où V est de dimension finie n. Alors,

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rang}(f) = \dim(V) = n$$

Démonstration: Comme le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de V, il est de dimension finie et possède alors une base $\{n_1, ..., n_k\}$ avec $k \leq n = \dim(V)$. On peut completer cette famille de vecteurs pour en obtenir une base de V en ajoutant r vecteurs $b_1, ..., b_r$ de V où $r = n - k$. On a alors,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(\underbrace{f(n_1)}_{=0_W}, ..., \underbrace{f(n_k)}_{=0_W}, f(b_1), ..., f(b_r)) = \text{Vect}(f(b_1), ..., f(b_r))$$

La famille $\{f(b_1), ..., f(b_r)\}$ est donc une famille génératrice de l'image de f.

Pour conclure, il faut montrer que cette famille est aussi une base de l'image de f, c'est-à-dire c'est une famille libre.

Si $0_W = \lambda_1 f(b_1) + ... + \lambda_n f(b_n) \iff 0_W = f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_r b_r)$

$$\begin{aligned}
&\iff \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_r b_r \in \mathrm{Ker}(f) \\
&\iff \exists \mu_1, ..., \mu_k \in \mathbb{R} \mid \mu_1 n_1 + ... + \mu_k n_k = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_r b_r \\
&\iff \exists \mu_1, ..., \mu_k \in \mathbb{R} \mid \mu_1 n_1 + ... + \mu_k n_k - \lambda_1 b_1 - ... - \lambda_r b_r = 0_V \\
&\iff \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0 = \mu_1 = ... = \mu_k
\end{aligned}$$

□

Exemple: On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P(x) \longmapsto P(1)$. Le rang de cette application linéaire ne peut pas excéder la dimension de l'espace vectoriel d'arrivée, i.e.

$$\mathrm{rang}(f) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$$

Explicitement,

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \longmapsto P(1) = a + b + c + d$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1)$ et $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Le théorème du rang nous assure alors que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[x]) - \mathrm{rang}(f) = 4 - 1 = 3$$

4.2 Rang d'une famille de vecteurs

Déterminer le rang d'une application linéaire revient donc à calculer la dimension d'un espace vectoriel engendré par une certaine famille de vecteurs.

4.2.1 Définition

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_n\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel V. Le **rang** de $\mathcal{F}$ s'écrit,

$$\mathrm{rang}(\mathcal{F}) := \dim(\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_n))$$

Le lien avec le rang d'une application linéaire peut être établi en notant qu'une famille finie de vecteurs $\mathcal{F} \subset V$ définit une application linéaire.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow V \\
(\lambda_1, ..., \lambda_n) &\longmapsto \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n
\end{aligned}$$

On accepte à nouveau l'abus de notation qui consiste à utiliser le même symbole pour la famille finie de vecteurs et l'application linéaire qu'elle définit. Clairement, le rang de $\mathcal{F}$ en tant qu'application linéaire est le même que celui de $\mathcal{F}$ en tant que famille de vecteurs.

D'après la 2^e version du théorème du rang.

$$\mathrm{rang}(\mathcal{F}) + \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{F})) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Si $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \text{Ker}(\mathcal{F}) \iff \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0_V$

$$\iff < \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0_V > \in L_{\mathcal{F}}$$

où on rappelle ici que pour une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_n\}$, on note $L_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des relations de dépendance linéaire

$$L_{\mathcal{F}} = \{< \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0_V >\}$$

Cet ensemble est à son tour un espace vectoriel.
L'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \text{Ker}(\mathcal{F}) &\longrightarrow L_{\mathcal{F}} \\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) &\longmapsto < \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0_V > \end{aligned}$$

L'application linéaire f définit une bijection entre Ker$(\mathcal{F})$ et $L_{\mathcal{F}}$. Ces deux espaces vectoriels sont donc la même dimension.

Théorème du rang (troisième version) Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_n\}$ une famille de vecteurs de V. Alors

$$\text{rang}(\mathcal{F}) + \dim(L_{\mathcal{F}}) = n$$

□

4.3 Rang de matrices

Un matrices peut être considérée comme un ensemble de lignes ou des colonnes vues comme des vecteurs à coefficients réels.

4.3.1 Définition

Soit une matrice $A = \{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{mxn}(\mathbb{R})$.
Pour $1 \leq i \leq m$, on note le vecteur ligne

$$l_i := (a_{i1}, ..., a_{in}) \in \mathbb{R}^n$$

Pour $1 \leq j \leq n$, on note le vecteur ligne

$$c_i := (a_{1j}, ..., a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$$

On définit alors,

$$\text{rang}(\text{lignes}(A)) = \dim(\text{Vect}(l_1, ..., l_m))$$

$$\text{rang}(\text{colonnes}(A)) = \dim(\text{Vect}(c_1, ..., c_n))$$

On rappelle ici que chaque l_i définit une équation linéaire homogène e_i à n variables par

$$e_i = < a_{i1} x_1 + ... + a_{in} x_n = 0 >$$

Comme l'addition de deux équations linéaires homogènes se fait en additionnant les coefficients multipliant une variable x_j donnée, cette correspondance définit une application linéaires bijective entre Vect$(l_1, ..., l_m)$ et Vect$(e_1, ..., e_m)$. Ces deux espaces ont donc la même dimension. Ainsi, d'après le premier théorème du rang

$$\dim(\text{Vect}(e_1, ..., e_m)) + s = n$$

où s est la dimension du l'ensemble des solutions du système d'équations linéaire constituées des m lignes de la matrice A. Par conséquent,

$$\dim(\text{Vect}(l_1, ..., l_m)) + s = n \iff \text{rang}(\text{lignes}(A)) + s = n$$

D'autres part, si on considère la matrice A comme une application linéaire $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \longmapsto \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

alors $s = \dim(\text{Ker}(f_A))$ et rang$(f_A) = \dim(\text{Im}(f_A))$.
L'image de f_A est obtenue par combinaison linéaire des colonnes $c_k = (a_{ik}, ..., a_{mk})$ où $1 \leq k \leq n$ de A:

$$\dim(\text{Im}(f_a)) = \dim(\text{Vect}(c_1, ..., c_m)) = \text{rang}(\text{colonnes}(A))$$

Ainsi le deuxième théorème du rang s'écrit,

$$\dim(\text{Ker}(f_A)) + \dim(\text{Im}(f_A)) = n \iff \text{rang}(\text{colonnes}(A)) + s = n$$

Théorème du rang (quatrième version) Soit une matrice $A = \{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{mxn}(\mathbb{R})$
Alors,

$$\text{rang}(\text{colonnes}(A)) = \text{rang}(\text{lignes}(A)) = \text{rang}(f_A)$$