EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B

PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 4

Introduction aux équations différentielles

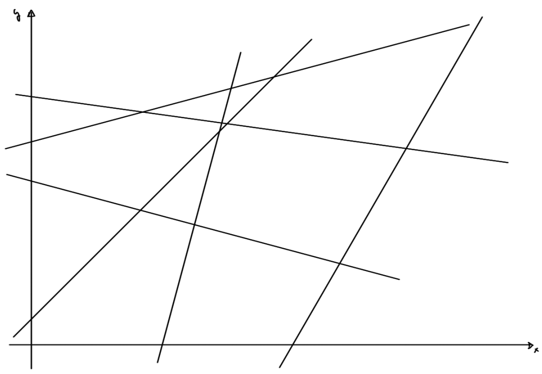
Origines des équations différentiel: la mécanique de Newton.

$$F = ma \quad \text{avec} \quad a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

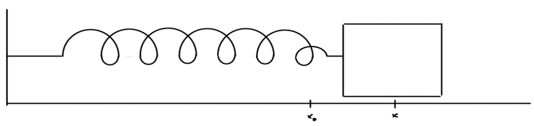
1. $F = 0 : \quad m\ddot{x}(t) = 0$

   Quelle est la fonction $x(t)$ satisfaisant la relation $\ddot{x}(t) = 0$?

   N'importe quelle équation polynomiale de premier degré.



2. Oscillation harmonique



$$\begin{cases} f = -kx \\ f = ma \end{cases} \implies m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

équation différentielle de $x(t)$

3. Oscillateur harmonique amorti (milieu visqueux)

$$\begin{cases} f = -dx - \mu\dot{x} \\ f = ma \end{cases} \implies m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \mu\dot{x}(t)$$

Une équation différentielle de $f(x)$ est une relatino entre $x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)$ dont l'inconnue est $f(x)$

4.1 Équation différentielle linéaire de premier ordre

1. C'est une équation du type

$$y'(x) + \rho(x)y(x) = r(x)$$

où les "fonctions-coefficients" $\rho(x)$ et $r(x)$ sont continues sur $D \subset D_\rho \cap D_r$

Exemple: $y' = yx \in \mathbb{R}$

- $y = 0$ est solution
- $y \neq 0, \quad \frac{y'}{y} = 1 \implies \ln|y| = x + c \iff |y| = e^{x+c}$

$$y = \pm e^{x+c} = \pm e^c e^x$$

En résumé $y = Ae^x, \quad A \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$ décrit toutes les solutions de l'équation $y' = y$

2. Équations homogène (sans second membre $(r(x) = 0)$)

$$y'(x) + \rho(x)y(x) = 0, \quad x \in I$$

Théorème 1: Toutes les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y = ce^{\int_{x_0}^{x} \rho(t)dt}, \quad \text{où } x_0 \in I, \quad c \in \mathbb{R}$$

Remarques:

(a) Si y_1 et y_2 sont 2 solutions, alors ne diffèrent que d'une constante multiplicative
(b) Pour une solution donnée, on observe que $y(x_0) = c$, donc en fixant $y(x_0)$, on obtient une unique solution.

Démonstration:

- Soit

$$w(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} \rho(t)dt}$$
$$w'(x) = -\rho(x)w(x)$$

et

$$w'(x) + \rho(x)w(x) = -\rho(x)w(x) + \rho(x)w(x) \equiv 0$$

donc $w(x)$ est solution de l'équation homogène.

- Soit $u(x)$ une autre solution de l'équation homogène, on pose:

$$\varphi(x) = \frac{u(x)}{w(x)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{u'(x)w(x) - u(x)w'(x)}{w^2(x)} = \frac{-u(x)w(x) \cdot w(x) - u(x) \cdot (-\rho(x)w(x))}{w^2(x)} \equiv 0$$

$$\varphi(x) = \frac{u(x)}{w(x)} \quad \text{est constante} \quad \implies \frac{u(x)}{w(x)} = c \implies u(x) = c \cdot w(x)$$

□

$$y(x) = cw(x) = ce^{-\int_{x_0}^{x} \rho(t)dt}$$

est la solution générale de l'équation homogène.

Exemples:

(a) $y'(x) + \cos(x)y(x) = 0$

- Soit on applique le théorème 1:

$$y(x) = ce^{-\int_0^x \cos(t)dt} = ce^{-\sin(x)}$$

- Soit on résout

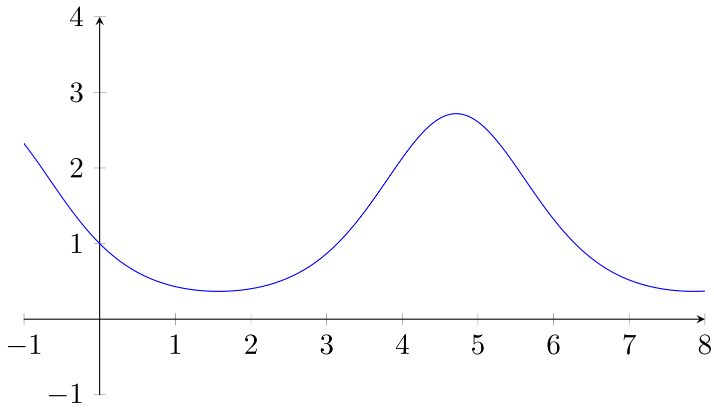
$$y'(x) + \cos(x)y(x) = 0$$

  - $y = 0$ est solution
  - $y \neq 0 \implies y'(x) = \cos(x) \cdot y(x)$

$$\implies \frac{y'}{y(x)} = -\cos(x) \implies \ln(|y(x)|) = -\sin(x) + c$$

$$\implies |y(x)| = e^{-\sin(x)+c} \iff y(x) = \pm e^c \cdot e^{-\sin(x)}$$

D'où $y(x) = Ae^{-\sin(x)}$, $\quad A \in \mathbb{R}$ Si on fixe $y(0) = 1$ On a: $A = 1$, $\quad y = e^{-\sin(x)}$



(b) Evalutation de la vitesse d'un corps dans un milieu visqueux
$F = -\mu v$ (force de frottement proportionnlement à la vitesse).
et $F = ma$

$$\implies m\dot{v}(t) = -\mu(v(t))$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{\mu}{m}v(t) \implies v(t) = ce^{\frac{\mu}{m}t} \implies \text{si } v(0) = v_0$$

alors

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t}$$

3. Équation générale (inhomogène, avec le second membre)

$$y'(x) + \rho(x)y(x) = r(x)$$

(a) Recherche d'une solution particulière

i. Par tâtonnement

Exemples 1: $y'(x) + y(x) = 1$
$y = 1$ est une solution particulière

Exemple 2: On cherche une solution particulière de type $y = ax + b$

$$y'a = a \quad \text{et} \quad y'(x) + y(x) = y \iff a + [ax + b] = x$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \implies y = x - 1$$

(b) Méthode de la variation de constantes Soit $u(x) = c \cdot w(x)$ la solution générale de l'équation homogène
On cherche une solution particulière de la forme.

$$y(x) = c(x) \cdot w(x)$$

$$y'(x) = c'(x)w(x) + c(x)w'(x)$$

et

$$y'(x) + \rho(x)y(x) = r(x)$$

$$\implies c'(x)w(x) + c(x)w'(x) + \rho(x)c(x)w(x) = r(x)$$

$$\implies c'(x)w(x) = r(x) \implies r(x) \implies c(x) = \int \frac{r(x)}{w(x)}dx$$

[missing the end of Zano's appunti]

4.2 Équations différentielles linéaires du 2^e ordre

4.2.1 Existance et unicité des solutions

Une équation linéaire d'ordre 2 est de type

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$$

avec p, q, r continues sur I

Théorème 1 (sans démonstration)
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. L'équation ci-dessous admet une et une seule solution vérifiant les conditions initiales:

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

4.2.2 Équation homogène

1. Indépendance des solutions

Définition Deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ définis sur I sont linéairement dépendants sur I si et seulement si elles sont colinéaire

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } y_1(x) = c \cdot y_2(x)$$

Sinon elles sont linéairement indépendantes.

Définition Soit $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux fonctions dérivable sur I. On appelle "Wronskien" de $y_1(x)$ et $y_2(x)$ noté

$$W[y_1, y_2](x)$$

le déterminant

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)$$

Théorème 2 Soient

$$y'' + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

et $y_1(x), y_2(x)$ deux solutions de cette équation, alors $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si

$$W[y_1, y_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

Démonstration

(a) $\implies$ par la contraposée

Soit

$$x_0 \in I \text{ t.q. } W[y_1, y_2](x_0) = 0$$

Donc

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Posons

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$y(x)$ est solution de l'équation différentielle et vérifie $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$
Or d'après le théorème 1 donc $y(x) = 0$ est l'unique solution de cette équation différentielle avec CI.

$$y(x) = 0 \iff c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

$$\iff y_1(x) \text{ et } y_2(x) \text{ sont linéairement dépendantes}$$

(b) $\impliedby$ trivial

2. Solution générale de l'équation homogène

Théorème 3 Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ 2 solutions indépendantes de l'équation homogène

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = r(x)$$

Alors la solution générale s'écrit

$$y(x) = A y_1(x) + B y_2(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Démonstration Soit $y(x)$ une solution de l'équation homogène et $x_0 \in I$

$$W[y_1, y_2](x_0) \neq 0 \iff \exists A, B \in \mathbb{R} \text{ t.q.}$$

$$\begin{cases} Ay_1(x_0) + By_2(x_0) = y(x_0) \\ Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

On pose

$$z(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

Et $z(x)$ est solution de l'équation homogène avec

$$\begin{cases} z(x_0) = y(x_0) \\ z'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

Et d'après le théorème 1:

$$z(x) = y(x) \quad \forall x \in I$$

La réciproque est évidente

Remarques

(a) Il est en général difficile de trouver des solutions de l'équation homogène

(b) Si on connait une solution $y_1(x)$ de l'équation homogène, alors $\exists y_2(x) = c(x) \cdot y_1(x)$ solution de l'équation homogène indépendantes de $y_1(x)$ (ex. 2 série 14)

3. Cas particuliers

(a) Équation linéaire d'ordre 2^e à coefficients constants

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = r(x) \quad p, q \in \mathbb{R}$$

On cherche des solutions de type

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda \cdot e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0 \iff \left[\lambda^2 + p\lambda + q\right] \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\iff \lambda + p\lambda + q = 0 : \quad \text{équation caractéristique}$$

Si $\Delta > 0$

$$(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = 0$$

et

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

sont des solutions indépendantes de l'équation homogène.
La solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple Résoudre

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$

l'équation caractéristique s'écrit

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\iff (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3$$

(b) Équation d'Euler

Soit

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0, \quad x > 0$$

On cherche des solutions de type $y(x) = x^r$

$$ax^2[r(r-1)x^{r-2}] + bx[rx^{r-1}] + cx^r = 0$$

$$[ar(r-1) + br + c] \cdot \underbrace{x^r}_{\neq 0} = 0 \iff ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

Exemple Résoudre

$$x^2 \cdot y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

$$y = x^r, \quad x > 0$$

$$x^2\left[r(r-1)x^{r-2}\right] - 2x\left[rx^{r-1}\right] + 2x^r = 0$$

$$\iff r(r-1) - 2r + 2 = 0 \iff r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$\iff (r-2)(r-1) = 0$$

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2$$

et

$$y = Ax + Bx^2, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation d'Euler

4.3 Équation inhomogène

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = r(x)$$

avec p, q, r continues sur I.

Théorème 4 (sans démonstration)

Toute solution de l'équation inhomogène s'écrit

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x)$$

où y_p est une solution particulière de l'équation inhomogène et y_H est la solution de l'équation homogène.

$$y(x) = y_p(x) + Ay_1(x) + By_2(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène.

Recherche d'une équation particulière Méthode de variation des constantes

On cherche une solution de type

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$$

$$\begin{array}{l|lcl}
\cdot\, q & y & = & A y_1 + B y_2 \\
\cdot\, p & y' & = & A' y_1 + A y_1' + B' y_2 + B y_2' \\
+ & y'' & = & A'' y_1 + A' y_1' + A' y_1' + A y_1'' + B'' y_2 + B' y_2' + B' y_2' + B y_2'' \\
\hline
r(x) & & & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0
\end{array}$$

En impostant la contrainte

$$A'y_1 + B'y_2 = 0$$

on obtient

$$A''y_1 + A'y_1' + B''y_2 + B'y_2' = 0$$

et il reste

$$r(x) = A'y_1' + B'y_2'$$

les fonctions dérivées A' et B' sont donc solutions du système

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = r(x) \end{cases}$$

qui admet une solution unique car son déterminant est le Wronskien $W[y_1, y_2](x)$

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = r(x) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-y_2') \\ \cdot(y_2) \end{array} \right.$$

$$A'(\underbrace{-y_1y_2' + y_1'y_2}_{-W(\neq 0)}) = r(x)\cdot y_2$$

$$A' = -\frac{r(x)\cdot y_2}{W}$$

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = r(x) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-y_1') \\ \cdot(y_1) \end{array} \right.$$

$$B'(\underbrace{-y_2y_1' + y_1y_2'}_{-W(\neq 0)}) = r(x)\cdot y_1$$

$$B' = -\frac{r(x)\cdot y_1}{W}$$

D'où

$$A = \int -\frac{r(x)y_2}{W}dx \quad \text{et} \quad B = \int \frac{r(x)\cdot y_1}{W}dx$$

Exemple

$$y'' - 3y'(x) + 2y(x) = \sin(x)$$

- Résolution de l'équation homogène

$$y'' - 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

Équation caractéristique:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

D'où

$$y_H = Ae^x + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

- Recherche de $y_p(x)$ Variation des constantes

$$y_p(x) = A(x) \cdot e^x + B(x)e^{2x}$$

avec A' et B' solutions de

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = \sin(x) \end{cases} \iff \begin{cases} A'e^x + B'e^{2x} = 0 \\ A'e^x + 2B'e^{2x} = \sin(x) \end{cases}, W = e^{3x}$$

$$A' = -\frac{\sin(x)e^{2x}}{e^{3x}} = -e^{-x}\sin(x) \quad \text{et } B' = \frac{\sin(x)e^x}{e^{3x} = e^{-2x}\sin(x)}$$

Intégration par parties

$$A(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) \quad \text{et} \quad B(x) = -\frac{1}{5}e^{-2x}(\cos(x) + 2\sin(x))$$

$$\implies y_p(x)\frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) - \frac{1}{5}\left(\cos(x) + 2\sin(x)\right)$$

Et la solution générale

$$y(x) = y_p(x) + Ae^x + Be^{2x} = \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x) + Ae^x + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$