

EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2A
PREPA-032(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sacha FRIEDLY

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

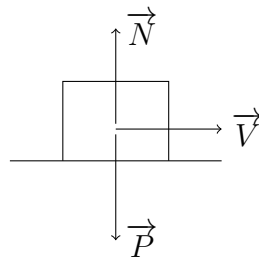
Chapter 1

Vecteurs & opération

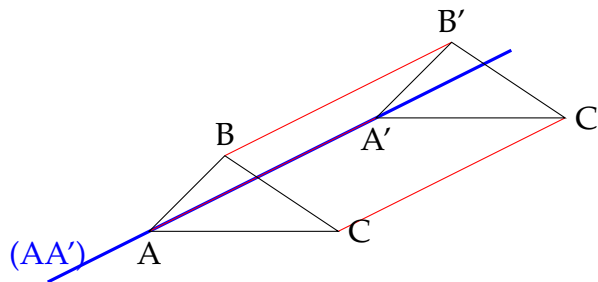
25/02/2019

Motivations:

1. Forces:



2. Déplacements:



Segments: $AA' \neq BB' \neq CC'$

Droites: $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$

Vecteurs: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$

Dans le plan ou l'espace, un vecteur est définie par:

1. une **direction**: "une" droite qui porte le vecteur
2. une **longueur/norme**
3. un **sens**

Bonne façon de penser: des flèches.

(Si on se fixe une origine: Ensemble des vecteurs \implies Espace vectoriels)

Conventions:

On notera les vecteurs : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

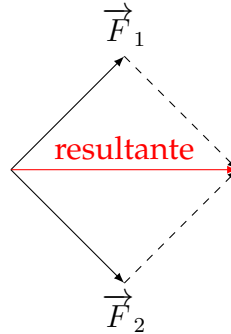
La norme de \vec{a} : $\|\vec{a}\| \geq 0$ (avec choix d'**unité**!)

Le vecteur nul: $\vec{0} \quad \|\vec{0}\| = 0$

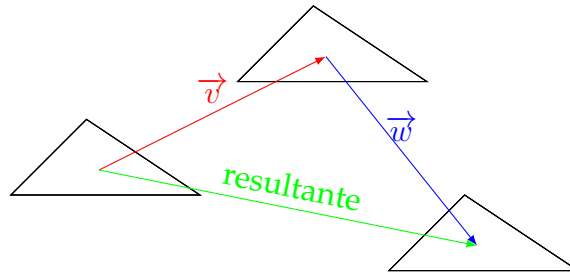
1.1 Addition vectorielle

Motivation:

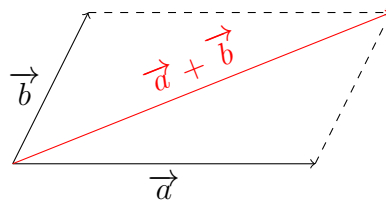
1. En physique:



2. Déplacements:



L'**addition** de deux vecteurs \vec{a}, \vec{b} est définie par la règle du parallélogramme.

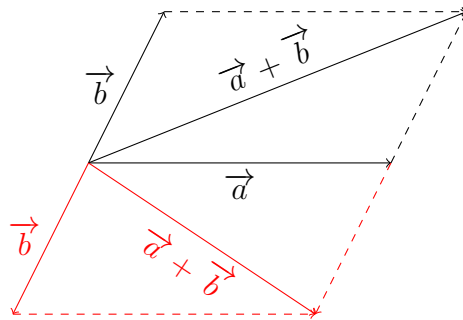


Propriétés

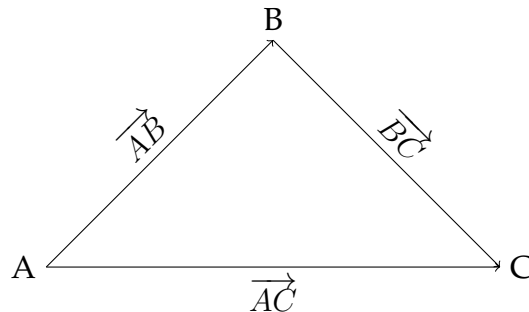
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\forall \vec{a}, \exists! \vec{a}' \text{ t.q. } \vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$
On notera $\vec{a}' = -\vec{a}$ (appelé **opposé** de \vec{a})

On peut définir une **soustraction**:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$



Une formulation de la règle du parallélogramme

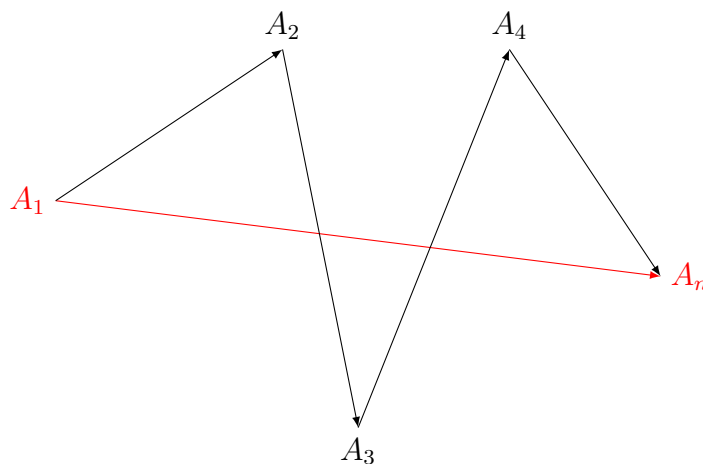


Règle de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (1.1)$$

Remarque:

1. On peut l'itérer:



Pour les points A_1, \dots, A_n

$$\overrightarrow{A_1 A_n} = \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$$

2. Si $A = C$ dans (1.1):

$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{BA} &= \vec{AA} = \vec{0} \\ \implies \vec{BA} &= -\vec{AB}\end{aligned}\tag{1.2}$$

3. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ n'implique pas (en général) $\|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\| = \|\vec{AC}\|$

En fait a l'**inegalité triangle**:

Inegalité triangle

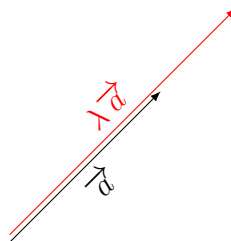
$$\|\vec{AC}\| \leq \|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\|$$

1.2 Multiplication par un scalaire

Si \vec{a} est un vecteur et $\lambda \in \mathbb{R}$ (un scalaire), on définit $\lambda \vec{a}$ comme suit:

- Si $\lambda = 0$, alors $\lambda \vec{a} := \vec{0}$
- Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda \vec{a}$ a même direction
 - \hookrightarrow Si $\lambda > 0$, $\lambda \vec{a}$ le même sens que \vec{a}
 - \hookrightarrow Si $\lambda < 0$, $\lambda \vec{a}$ est de sens opposée à \vec{a}
 - $\implies \lambda \vec{a}$ a longueur $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$

Exemple $\lambda = \frac{3}{2}$



Propriétés

1. $\lambda \vec{a} = \vec{0} \iff \vec{a} = \vec{0} \text{ ou } \lambda = 0$
2. $1 \vec{a} = \vec{a}, (-1) \vec{a} = -\vec{a}$
3. $\lambda(\mu \vec{a}) = \mu(\lambda \vec{a}) = (\mu\lambda) \vec{a}$
4. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$
5. $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

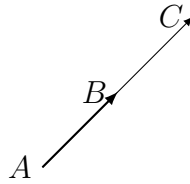
(Muni de "+" et de la multiplication par des scalaires, les vecteurs forment un espace vectoriel)

On peut maintenant résoudre des équations:

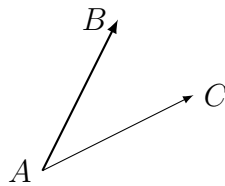
$$2\vec{x} + \vec{b} = \vec{c} - \vec{x}$$

1.3 "Vectorisation" de la géométrie

1. A, B, C sont alignés $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$



Remarque:

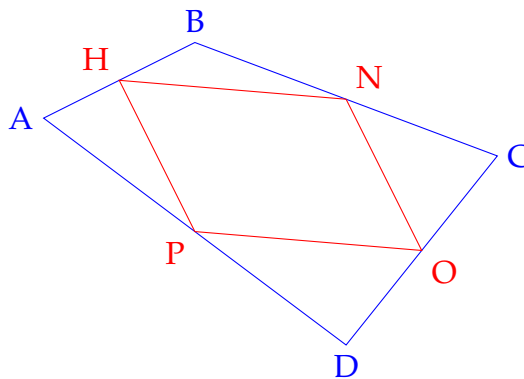


Les points si-dessus ne sont pas alignés: $\nexists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$

2. 4 points A, B, C, D forment un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \pm \overrightarrow{DC}$, ou $\overrightarrow{AD} \pm \overrightarrow{BC}$, ou $\overrightarrow{AC} = \pm \overrightarrow{BD}$

Theoremes

1. **Theorème (Varignon):** Les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque forment un parallélogramme.



Preuve: À voir $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PO}$

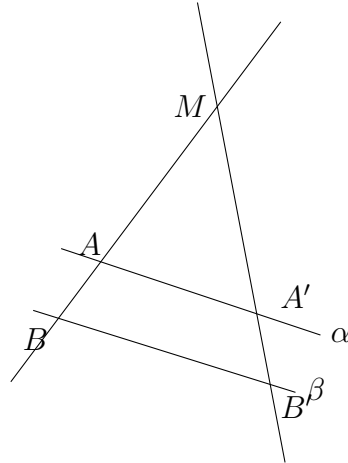
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

De même:

$$\overrightarrow{PO} = \dots = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \Rightarrow \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{PO}\end{aligned}$$

2. Théorème de Thalès "version vectoriel"



$$M, A, B \text{ alignés} \Rightarrow \exists \lambda \text{ t.q. } \overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{MB} \quad (1.3)$$

$$M, A', B' \text{ alignés} \Rightarrow \exists \lambda' \text{ t.q. } \overrightarrow{MA'} = \lambda' \overrightarrow{MB'} \quad (1.4)$$

Thalès: $\lambda = \lambda'$

Remarque

$$\text{De (1.3): } \|\overrightarrow{MA}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{MB}\|$$

$$\text{De (1.4): } \|\overrightarrow{MA'}\| = |\lambda'| \|\overrightarrow{MB'}\|$$

Preuve

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} &= \lambda \overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} &= \lambda(\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'B}) \\ \underbrace{\overrightarrow{MA'}}_{\lambda' \overrightarrow{MB'}} - \lambda \overrightarrow{MB'} &= \lambda \overrightarrow{B'B} - \underbrace{\overrightarrow{A'A}}_{\text{comme } \overrightarrow{A'A} \parallel \overrightarrow{B'B}, \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{A'A} = \mu \overrightarrow{B'B}} \\ (\lambda - \lambda') \overrightarrow{MB} &= (\lambda - \mu) \overrightarrow{B'B}\end{aligned}$$

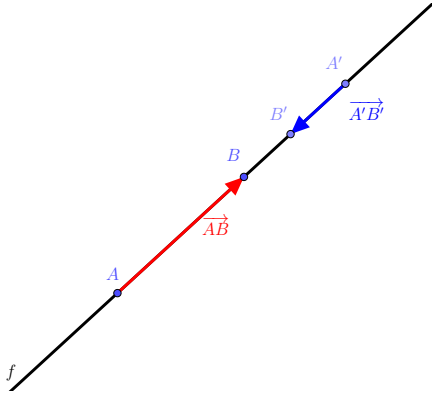
Si une de ces parenthèse est non-nulle, alors on pourrait écrire \overrightarrow{MB} , comme multiple de $\overrightarrow{B'B}$ (ou vice-versa), ce qui signifierait qu'ils sont parallèles.

On a donc $\underbrace{\lambda - \lambda' = 0}_{\lambda = \lambda'}$ et $\underbrace{\lambda - \mu = 0}_{\lambda = \mu}$

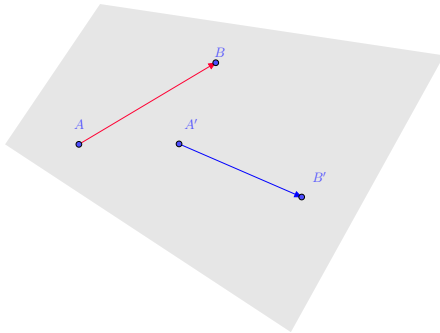
□

1.4 Repères

Définition Un vecteur directeur d'une droite / d'un plan est n'importe quel vecteur obtenu à partir de deux points A, B sur cette droite / plan.



L'ensemble des vecteurs d'une droite forment un espace vectoriel, de dimension 1.

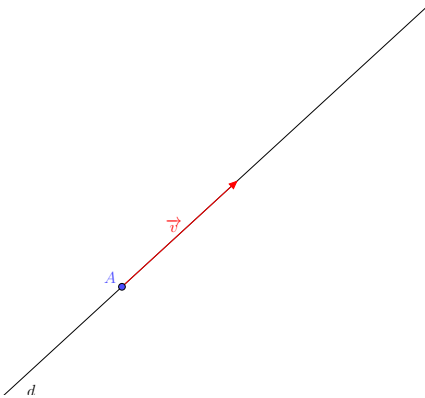


L'ensemble des vecteurs directeurs d'un plan forme un espace vectoriel de dimension 2.

Base: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

\vec{v}_1 ou \vec{v}_2 : n'importe quel vecteurs non-nuls, non-colinéaires.

Définition Soit une droite, et



- A un point quelconque sur d
- $\vec{v} \neq 0$ un vecteur de d

(A, \vec{v}) est un repère de d

Si un repère (A, \vec{v}) est donné (pour d), alors tout point $P \in d$ peut se décrire ainsi:

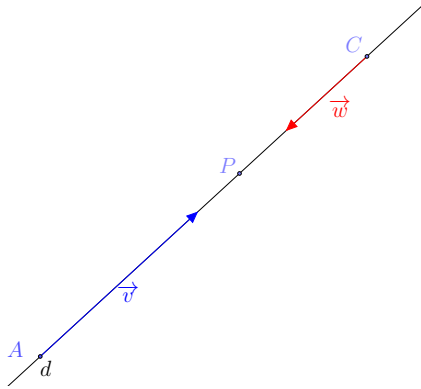
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$$

(λ est la coordonnée de $P \in d$ relativement au repère (A, \vec{v}))

En faisant varier $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient (à l'aide de $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$) tous les points de la droite.

\Rightarrow description paramétrique de d (paramètre: λ)

Changement de repère: (sur une droite)



Soit une droite α , avec un repère (A, \vec{v})

Si $P \in d$, alors $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$, où λ est la coordonnée de P relativement à (A, \vec{v})

Si (C, \vec{w}) est un repère pour d , comment calculer la coordonnée P relativement à (C, \vec{w}) ?

Supposons que C a pour coordonnée y dans (A, \vec{v}) :

$$\overrightarrow{AC} = y \cdot \vec{v}$$

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v}, \quad \vec{w} \neq \vec{0}$$

On cherche λ' t.q. $\overrightarrow{CP} = \lambda' \vec{w}$, λ' coordonnée de P relativement à (C, \vec{w})

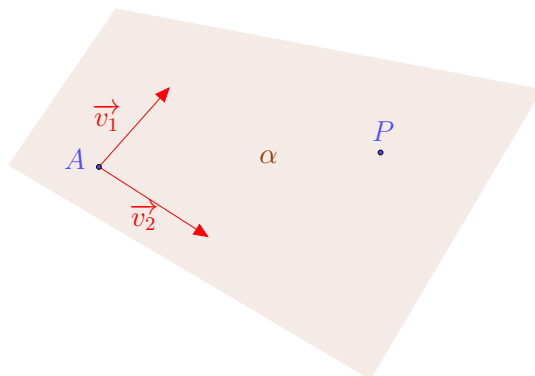
Or:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} \\ &= -\overrightarrow{AC} + \lambda \vec{v} \\ &= -y \cdot \vec{v} + \lambda \vec{v} = (\lambda - y) \vec{v} = \frac{\lambda - y}{\alpha} \cdot \vec{w} \\ \Rightarrow \lambda' &= \frac{\lambda - y}{\alpha} \end{aligned}$$

Définition Soit π un plan, et

- $A \in \pi$ un point quelconque
- \vec{v}_1, \vec{v}_2 deux vecteurs non-nuls et non-colinéaires directeurs de π

$\Rightarrow (A, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est un repère pour π

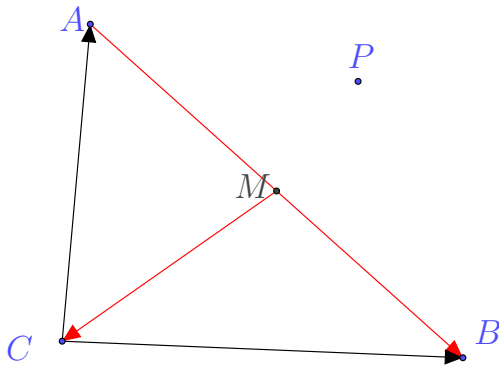


Tout point $P \in \pi$ peut se décrire:

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{AP} = x \cdot \vec{v}_1 + y \cdot \vec{v}_2$$

(x, y) : coordonnées de P sur π relativement au repère $(A, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$

De même on définit un repère dans l'espace $(A, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ où $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont non-coplanaires, non-nuls (le triplet $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ doit former un parallélépipède non-dégénéré, de volume "positif")

Changement de repère: (dans le plan)**Exemple** A, B, C : triangle**Repère 1:** $(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ Si P est dans le plan,

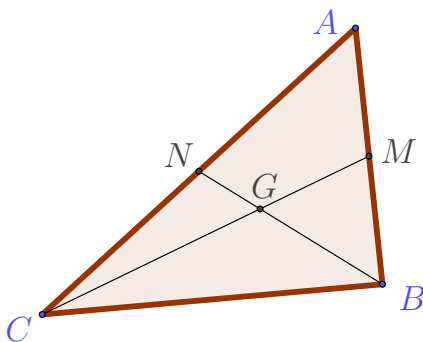
$$\exists (x, y) \text{ t.q. } \overrightarrow{CP} = x \cdot \overrightarrow{CB} + y \cdot \overrightarrow{CA}$$

Si M est milieu de AB , alors**Repère 2:** $(M, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MC})$ **Question** Coordonnées de $P, (x', y')$, relativement au repère 2?

$$\overrightarrow{MP} = x' \overrightarrow{AB} + y' \overrightarrow{MC}$$

 (x', y') en fonction de (x, y)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{MC} + x \cdot \overrightarrow{CB} + y \cdot \overrightarrow{CA} \Rightarrow \\ \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \\ \Rightarrow (1 - x - y) \cdot \overrightarrow{MC} &+ \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right) \cdot \overrightarrow{AB} \\ \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \\ y' = 1 - x - y \end{cases} \end{aligned}$$

Application Intersection entre deux droites. M : milieu de AB N : milieu de AC **But:** calculer le point d'intersection

$$G := (NB) \cap (MC)$$

- Exprimons G dans (C, \overrightarrow{CM}) : $\overrightarrow{CG} = \lambda \overrightarrow{CM}$
- Exprimons G dans (B, \overrightarrow{BN}) : $\overrightarrow{BG} = \mu \overrightarrow{BN}$
- Exprimons les coordonnées de G dans $(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$, en fonction de λ :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CG} &= \lambda \overrightarrow{GM} = \lambda(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}) \\
&= \lambda \overrightarrow{CB} + \frac{\lambda}{2} \overrightarrow{BA} \\
&= \lambda \overrightarrow{CB} + \frac{\lambda}{2}(-\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) \\
&= \frac{\lambda}{2} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{\lambda}{2} \overrightarrow{CA}
\end{aligned}$$

- Exprimons les coordonnées de G dans $(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$, en fonction de μ :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} \\
\overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{CB} + \mu \overrightarrow{BN} \\
&= \overrightarrow{CB} + \mu \cdot (-\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}) \\
&= 1 - \mu \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{\mu}{2} \overrightarrow{CA}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{2} = 1 - \mu \implies \frac{\lambda}{2} = 1 - \lambda \implies \frac{3}{2}\lambda = 1 \implies \lambda = \mu = \frac{2}{3} \\ \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{2} \implies \lambda = \mu \end{cases}$$

Donc

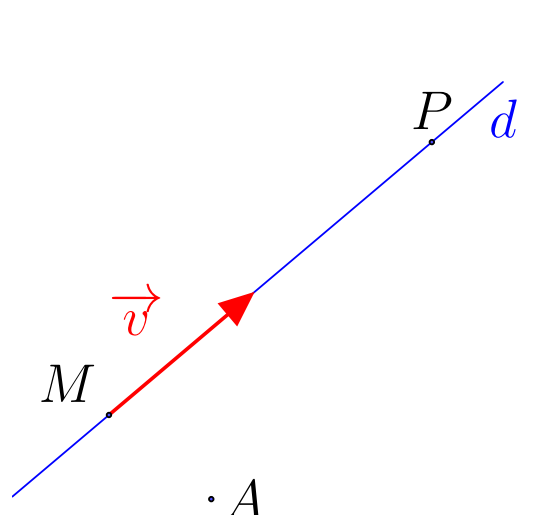
$$(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) : \overrightarrow{CG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}$$

11/03/2019

1.5 Droites et plans

1.5.1 Représentation paramétrique

Droite



$\forall P \in d, \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{MP} = \lambda \vec{v}$

\overrightarrow{MP} : dans le repère (A, \vec{v})

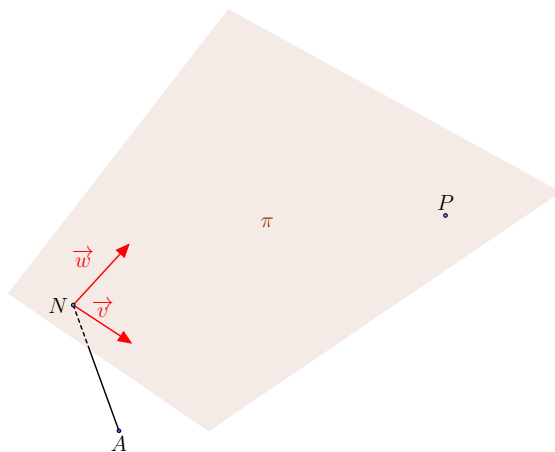
Si $A \notin d$, dans le repère (A, \vec{v})

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$$

Représentation paramétrique de d

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \lambda \cdot \vec{v}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

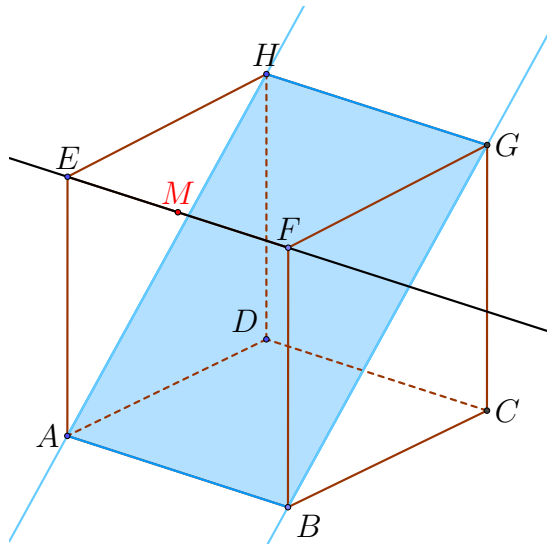
λ : paramètre

Plan

$$\forall P \in \pi, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{NP} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$$

Si $A \notin \pi$

Représentation paramétrique de π
$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AN} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

Exemple: Un cube**Droite EF:**

- Repère: (E, \overrightarrow{EF})

$$\overrightarrow{EP} = \lambda \cdot \overrightarrow{EF}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

- Repère: (A, \overrightarrow{AB})

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}, \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (1.5)$$

Si M est le milieu de \overrightarrow{EF} , comment décrire le segment MF ? → On restreint les valeurs du paramètre.

Dans l'équation (1.5), avec:

- $\lambda = 0, \quad P = E$
- $\lambda = 1, \quad P = F$
- $\lambda = \frac{1}{2}, \quad P = M$

Segment MF c'est l'ensemble des P associés aux valeurs $\lambda \in [\frac{1}{2}; 1]$

Plan ABGH:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AH}, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

On ne garde que le rectangle $[ABGH]$: restreindre les valeurs de λ et μ : $\lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$

Équations paramétriques en composantes: Dans un repère de l'espace $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Soit \vec{v} quelconque:

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3$$

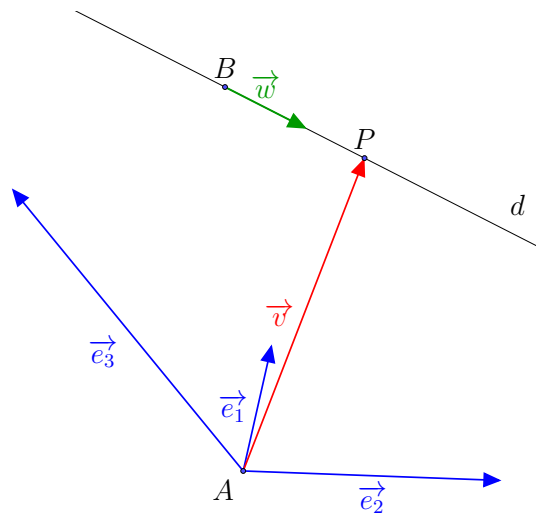
α, β, γ : **composantes** de \vec{v} relativement au repère

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{plutôt:} \quad \vec{v}|_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Utile si $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \\ \delta \end{pmatrix}$, alors:

- $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha + \mu \\ \beta + \nu \\ \gamma + \delta \end{pmatrix}$
- si $t \in \mathbb{R}$, $t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} t \cdot \alpha \\ t \cdot \beta \\ t \cdot \gamma \end{pmatrix}$

Si d est la droite (B, \vec{w}) :



$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \vec{w}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(relativement au repère $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$)

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad P(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}, \quad B(x_B, y_B, z_B)$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

En composantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x_B + \lambda \cdot w_1 \\ y &= y_B + \lambda \cdot w_2 \\ z &= z_B + \lambda \cdot w_3 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \text{équation paramétrique en composantes}$$

Exercice: Dans un repère du plan: $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On a $M(1, 2)$, $N(3, -4)$

$$\overrightarrow{AM} = \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{AN} = 3 \cdot \vec{e}_1 - 4 \cdot \vec{e}_2$$

Droite (MN) ?

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} \\ &= \overrightarrow{AM} + \lambda \cdot \overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (MN) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Est-ce que $H(-1, 3) \in (MN)$? Si $H \in (MN)$, alors il doit exister $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q.

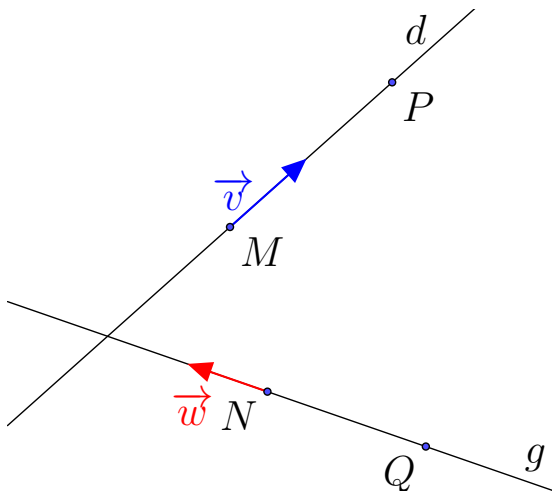
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2\lambda \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \\ 3 = 2 - 6\lambda \Rightarrow -6\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \end{cases} \quad (1.6)$$

\Rightarrow il n'existe aucun λ solution de (1.6)

\Rightarrow Donc $H \notin (MN)$

Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-ce que $d = d(M, \vec{v})$, $g = g(N, \vec{w})$ s'intersectent? Si oui, quelles sont les coordonnées du point d'intersection?



$$d : \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \lambda \vec{v}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$g : \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AN} + \mu \vec{w}, \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Pour que d et g s'intersectent, il doit exister une paire (λ, μ) t.q. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}$

On cherche donc λ, μ t.q.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AP}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AQ}}$$

$$\begin{cases} 4\lambda + \mu = 2 & (1) \\ \lambda - \mu = -6 & (2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) - (2) \implies 5\lambda = -4 \implies \lambda = -\frac{4}{5} \\ (2) \implies \mu = \lambda + 6 \implies \mu = \frac{-4+30}{5} = \frac{26}{5} \end{array}$$

$\implies d$ et g s'intersectent.

Points d'intersection:

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda = 1 + 4 \cdot -\frac{4}{5} = \frac{5-16}{5} = -\frac{11}{5} \\ y = 2 + \lambda = 2 + -\frac{4}{5} = \frac{10-4}{5} = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Exemple: Dans l'espace:

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

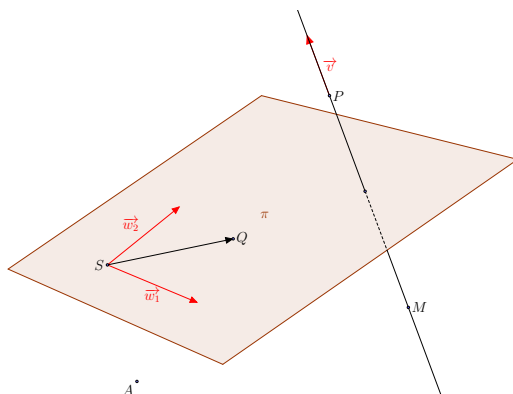
Est-ce que d et g s'intersectent?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

n'a **pas** de solution $\implies d \cap g = \emptyset$

Droites d et g sont **gauches**: leurs vecteurs directeurs sont non-colinéaire, et elles ne s'intersectent pas.

Intersection de d avec le plan $\pi = \pi(S, \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$?



$$\begin{aligned} S & (0, 0, 2) \\ M & (1, 0, 2) \\ \vec{v} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{w_1} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w_2} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} d : \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} & \lambda \in \mathbb{R} \\ \pi : \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AS} + \alpha \cdot \overrightarrow{w_1} + \beta \cdot \overrightarrow{w_2} & \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

→ On cherche λ, α, β tels que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{6}$$

Intersection I :

$$x = 1 + \lambda = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$y = \lambda = -\frac{1}{6}$$

$$z = 2 - \lambda = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$$

Donc $I(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{13}{6})$

II Plans dans l'espace

Dans le repère de l'espace

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \rightarrow \text{n'est pas l'équation d'une droite dans l'espace}$$

décrit un plan! En effet: (supposons $c \neq 0$)

$$z = -\frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$$

Donc tout triplet (x, y, z) qui satisfait (*) peut s'écrire ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{d}{c} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Plus généralement, comment trouver des directions indépendantes seulement à partir de l'équation cartésienne du plan $\pi : ax + by + cz + d = 0$?

→ On choisit des points (au moins 3)

$$A \in \pi \implies ax_A + by_A + cz_A + d = 0$$

$$B \in \pi \implies ax_B + by_B + cz_B + d = 0$$

$$a \underbrace{(x_B - x_A)}_{v_1} + b \underbrace{(y_B - y_A)}_{v_2} + c \underbrace{(z_B - z_A)}_{v_3} = 0$$

Donc $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est directeur de $\pi \iff av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$

Plan: **équation cartésienne** \implies **équation paramétrique**

- chercher/choisir un $A(x_0, y_0, z_0)$ t.q. $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$
- trouver deux directions indépendantes avec $v_1 + bv_2 + cv_3 = 0$

Exemple Dans un repère : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans la première: $x = 1 + (y - 3) + 3(z - 1)$

$$x - y - 3z + 5 = 0$$

Dans le cas générale:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} (**)$$

\rightarrow Comment obtenir les a, b, c de l'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$?

Affirmation: l'équation cartésienne associée à $(**)$ est de la forme

$$\underbrace{(v_2u_3 - v_3u_2)}_a x + \underbrace{(-u_3u_1 - u_1v_3)}_b y + \underbrace{(-v_2u_1 - v_1v_2)}_c z = \text{cste} \leftarrow \text{se trouve en choisissant un point}$$

En effet : Il suffit de vérifier que

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \text{ et } au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$$

En général: Une droite d (dans l'espace) est décrite par deux **équations cartésiennes**:

$$d : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \leftarrow \text{c'est un plan } \alpha! \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \leftarrow \text{c'est un plan } \beta! \end{cases}$$

$$\implies d = \alpha \cap \beta$$

 Il y a une infinité des paires de plans qui décrivent la même droite!

Équation cartésienne \implies équation paramétrique? Si d est donné comme en $(*)$, comment trouver un vecteur directeur \vec{v} ?

\vec{v} doit être directeur à la fois pour α et pour β !

Affirmation on peut par exemples prendre

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} bc' - b'c \\ a'c - ac' \\ ab' - a'b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Vérifions \vec{v} dirige α , car

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = a(bc' - b'c) - b(a'c - ac') + c(ab' - a'b) = 0$$

\vec{v} dirige β , car

$$a'v_1 + b'v_2 + c'v_3 = (\text{faire !}) = 0$$

Exemple

$$d : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad c' = 0$$

Pour formule : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - (-1)1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dirige d

Donc $A(0, 0, 1) \in d$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$