# EPFL

## MAN

Mise à niveau

---

# Maths 1B

## PREPA-033(B)

---

*Student:*
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*
Olivier WORINGER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Chapter 3

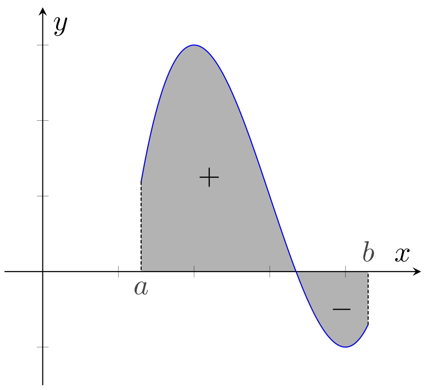
# Calcul intégral

## 3.1 Intégrale définie

### 3.1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[\,a; b\,]$ $(a < b)$
On considère le domaine $D$ du plan, limité par

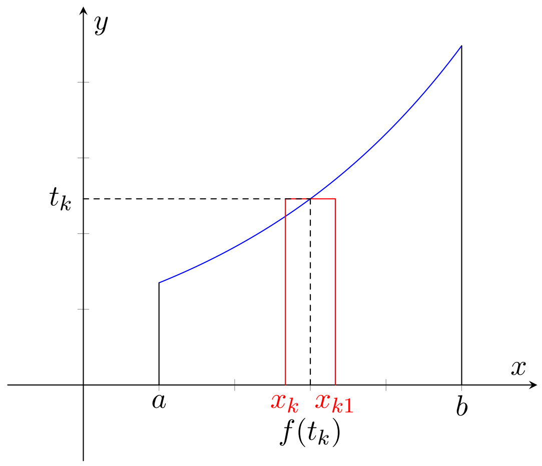
$$y = f(x), \quad y = 0, \quad x = a \quad \text{et} \quad x = b$$




L'aire **analytique** du domaine $D$ est définie positive si $f(x) \geq 0$ et négative si $f(x) \leq 0$.
On cherche à déterminer (à définir) l'aire analytique de $D$.
On partage l'intervalle $[\,a, b\,]$ en $n$ intervalles

$$[\,x_{k-1}, x_k\,] \quad 1 \leq k \leq n \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$$

Puis on choisit arbitrairement une abscisse $t_k$ dans chaque intervalle $[\,x_{k-1}, x_k\,]$, $1 \leq k \leq n$




La somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x$$

avec

$$\Delta x = x_k - x_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n$$

est la somme des aires analytiques des domaines rectangulaires.

**Définition:** La somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x$$

est appelée somme de Riemann de $f$ sur $[\, a, b\,]$
Elle dépend du choix du partage de $[\, a, b\,]$ et du choix de chaque $t_k \in [a, b]$

**Cas particulier:** Les sommes de Darboux.
Pour un partage donné de $[a, b]$, on définit:

- La somme de Darboux inférieure:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$

  où $m_k$ le min de $f$ sur $[x_{k-1}, x_k]$

- La somme de Darboux supérieure:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

  où $M_k$ le max de $f$ sur $[x_{k-1}, x_k]$

**Définition:** Si pour $n \to \infty$ tous les $\Delta x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et si

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f({}_k)\Delta x_k$$

existe indépendamment du choix du partage et du choix des $t_k$ $1 \leq k \leq n$ alors $f$ est dit intégrable au sens de Riemann et cette limite est appelée l'intégrale définie de $f$ un $[a, b]$ et un la note

$$\int_a^b f(x)dx$$

**Intégrale de Riemann**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

L'intégrale définie de $f$ sur $[a, b]$ est par définition, la mesure de l'aire analytique du domaine $D$.

**Théorème (sans démonstration):** Si $f$ est continue sur $[a, b]$, alors $f$ est intégrable au sens de Riemann

**Exemple:**

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, a](a > 0)$$

- Soit

  $$u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

  Montrer que

  $$t_n = \frac{1}{3}n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)$$

- Déterminer les 2 sommes de Darboux de $f$ sur $[0, a]$ relativement à un découpage de $[0, a]$ en $n$ intervalles isométriques.

  Et vérifier que ces 2 sommes convergent vers la même valeur.

- $u_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$

  – Vérification pour $n = 1$:

    $$u_1 = 1^2 = 1$$

    et

    $$\frac{1}{3}\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)\Big|_{n=1} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = 1$$

  – Démonstration du pas de récurrence:
    Hypothèse: $u_n = \frac{1}{3}n(n + \frac{1}{2})(n + 1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné
    Conclusion: $u_{n+1} = \frac{1}{3}(n + 1)(n + \frac{3}{2})(n + 2)$
    Preuve:

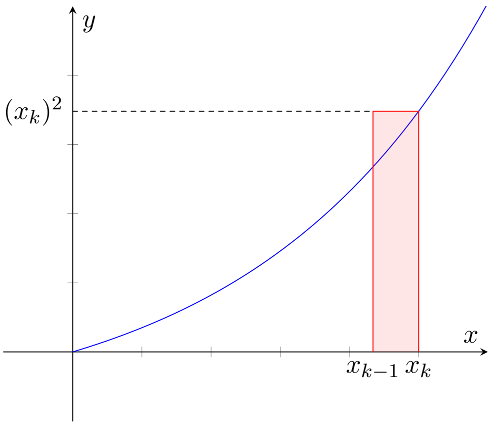
$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3} n \left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\left(n \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) + 3(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\left(n + \frac{7}{2} n + 3\right) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\left(n + \frac{3}{2}\right)(n+2)
\end{aligned}$$

$\square$

- Sommes de Darboux
  - Partition de $[0, a]$ en $n$ intervalles isométriques:

$$\Delta x_k = \frac{a}{n}, \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{et} \quad x_k = k \cdot \frac{a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n$$

  - Somme de Darboux supérieure:

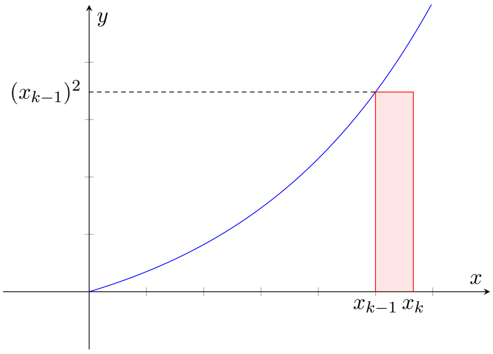



$f(x) = x^2$ est strictement croissante, donc $M_k = f(x_k)$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \frac{a}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n} \\
&= \left(\frac{a}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}(n)\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 (n+1) \\
&= a^3 \cdot \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a^3}{3}$$

  - Somme de Darboux inférieure:




$f(x) = x^2$ est strictement croissante donc $m_k = f(x_{k-1})$

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( (k-1) \cdot \frac{a}{n} \right)^2 \cdot \frac{a}{n} \\
&= \left( \frac{a}{n} \right)^3 \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \\
&= \frac{a^3}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{a^3}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \\
&= \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{3}(n-1)\left(n - \frac{1}{2}\right)(n) \\
&= a^3 \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a^3}{3}$$

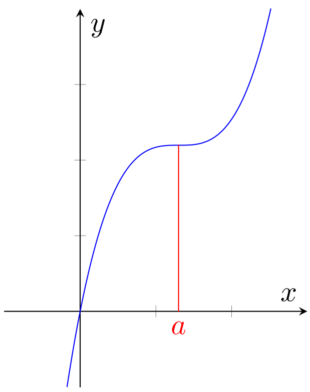
– Les 2 sommes de Darboux convergent vers la même valeurs $\frac{a^3}{3}$
  Or $f(x) = x^2$ est continue sur $[0, a]$ donc

$$\int_0^a x^2 \cdot dx = \frac{a^3}{3}$$

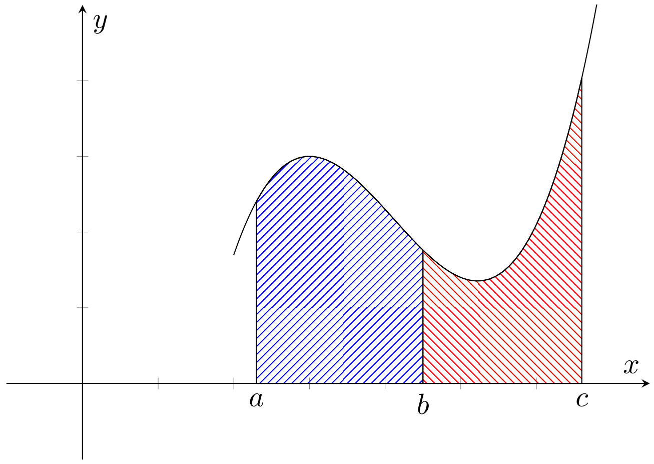
$\square$

**Quelques conséquences de la définition**

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$



2. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

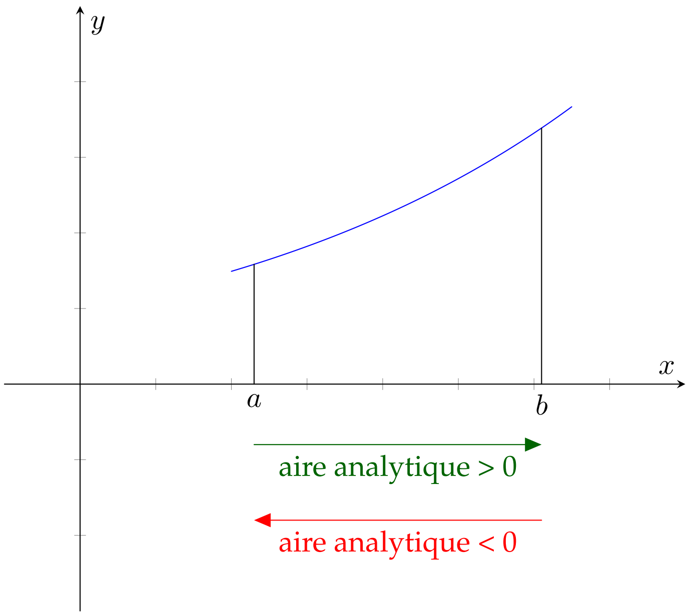



En particulier

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

d'où

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

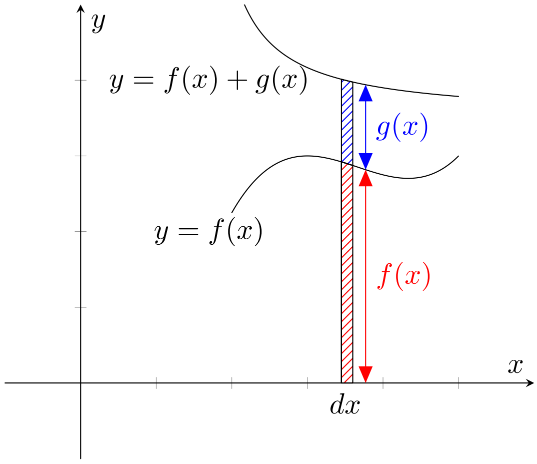



$$\overset{a<b}{\underset{f(x)>0}{}} \int_a^b \underbrace{f(x)}_{>0} \underbrace{dx}_{>0} > 0 \qquad \int_b^a \underbrace{f(x)}_{>0} \underbrace{dx}_{<0} < 0$$

□

3. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$



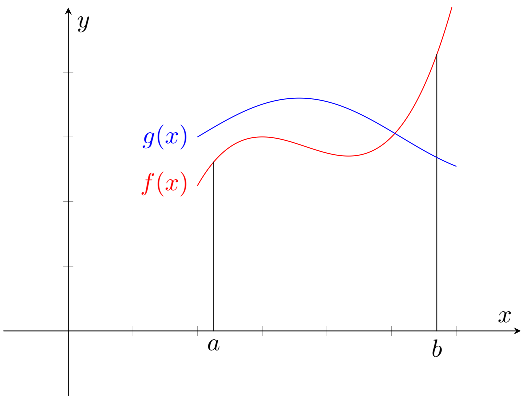

5. Si $a < b$ et si

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

⚠ Attention! La réciproque est fausse.

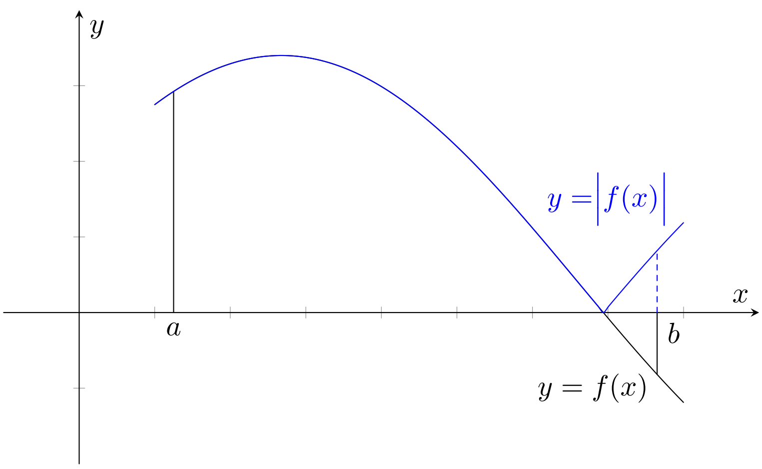



$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

mais

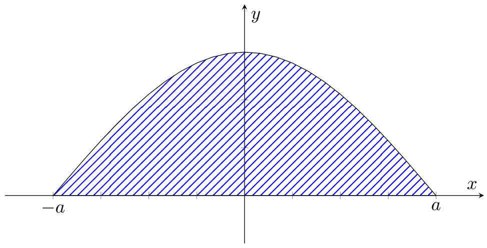
$$f(x) \not\leq g(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

6. $\int_a^b |f(x)|dx \geq \left|\int_a^b f(x)dx\right| \quad a < b$



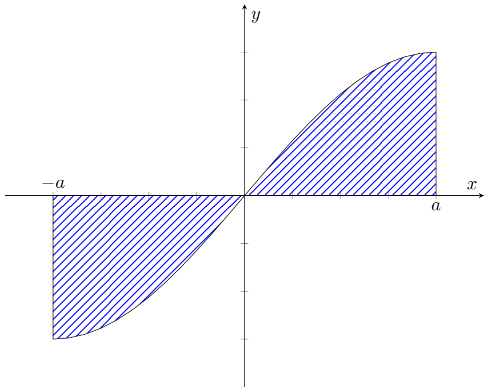

7. • Si $f$ est paire sur $[-a, a]$, $\quad (a > 0)$ alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx$$




- Si $f$ est impaire sur $[-a, a]$, $\quad (a > 0)$ alors

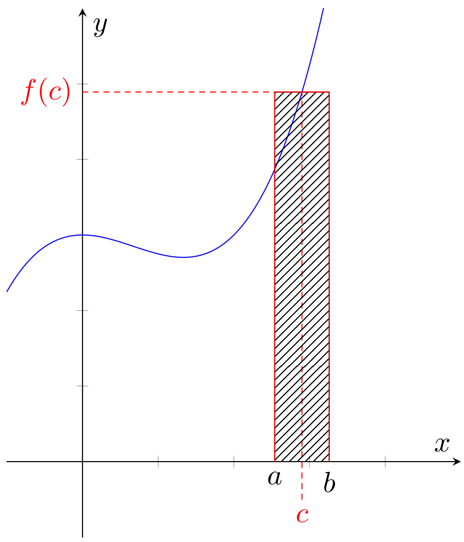
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$




### 3.1.2 Théorème fondamental du calcul intégral

**Théorème de la moyenne** Soit $f$ continue sur $[a, b]$

$$\exists c \in [a, b] \text{ t.q. } \int_{a}^{b} f(x)dx = (b - a) \cdot f(c)$$




**Définition:** Soient $m = \min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ et $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Longrightarrow \int_{a}^{b} m dx \leq \int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} M dx$$

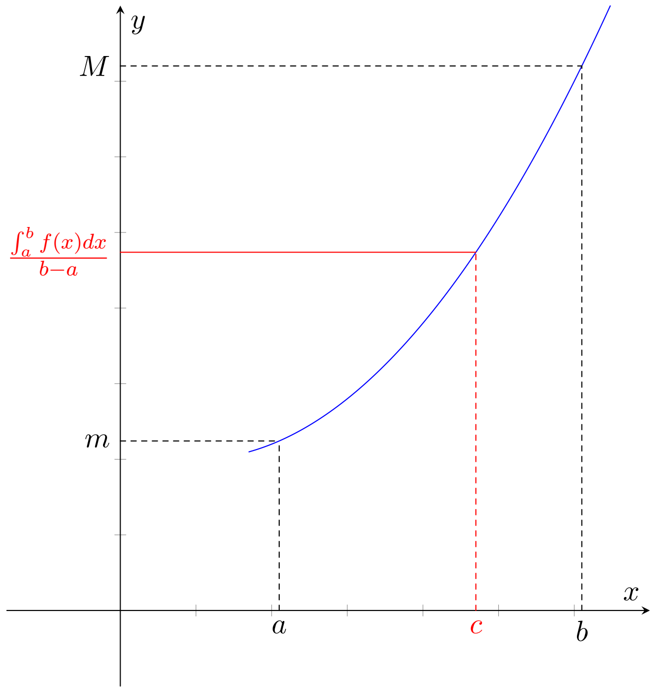
$$[\int_a^b k \cdot dx = k(b-a)]$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (b-a>0)$$

$$\implies m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

Or $f$ est continue sur $[a,b]$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire

$$\exists c \in [a,b] \text{ t.q.}$$




$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

□

Autre expression du théorème de la moyenne

$$\exists\, \theta \in [0,1] \text{ t.q. } \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = h \cdot f(x_0 + \theta h)$$

□

**Théorème fondamental** Soit $f$ continue sur $[a,b]$

**Définition:** On définit la "fonction-aire" associé à $f$ sur $[a,b]$ par

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

**Théorème:** Soient $f$ continue sur $[a,b]$ et $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, la fonction-aire associée à $f$. On a

$$A'(x) = f(x)$$

En d'autres termes

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)}$$

**Démonstration:** La dérivé de $A(x)$ s'écrit

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$

$$A(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$$
$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$A(x+h)-A(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$
$$= \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

D'après le théorème de la moyenne,

$$\exists \theta \in [0,1] \text{ t.q. } \int_x^{x+h} f(t)dt = h\cdot f(x+\theta h)$$

Donc

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot f(x+\theta h)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x+\theta h) \overset{f \text{ continue}}{=} f(x)$$

$\square$

**Définition:** Soit $f$ définie sur $I$. On appelle la **primitive** de $f$ sur $I$, toute fonction $F$ définie sur $I$ telle que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

**Exemples:**

1. La fonction-aire $A(x)$ associée à $f(x)$ est une primitive de $f(x)$
2. Soit

$$f(x) = 2(x+1)$$
$$F(x) = (x+1)^2 \text{ et } G(x) = x^2+2x$$

Sont toutes les deux des primitives de $f$

**Théorème:** Soient $f$ continue sur $I$ et $F(x)$ un primitive de $f$ sur $I$. Toutes les primitives de $f$ sur $I$ sont de la forme

$$F(x) + c$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante

- $F(x) + c$ est une primitive de $f$, car

$$[F(x) + c]' = F'(x) + 0 = f(x)$$

- Soit $G$ une autre primitive de $f$:

$$F'(x) = f \text{ et } G'(x) = f \quad \text{donc} \quad G'(x) - F'(x) = 0$$

$$\Longrightarrow (G - F)'(x) = 0$$
$$\Longrightarrow (G - F)(x) = c$$
$$\Longrightarrow G(x) = F(x) + c$$

$\square$

**Conséquence du théorème fondamental:**

- Toute fonction continue sur $I$ admet une primitive sur $I$
- Calcul de l'intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$. Soit

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

et $F(x)$ une primitive quelconque de $f$ sur $[a, b]$

$$A(x) = F(x) + c$$

  - Évaluation en $x = a$ : $\underbrace{A(a)}_{=0} = F(a) + c$

$$c = -F(a)$$

  - Évaluation en $x = b$

$$A(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) + c$$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b}$$

où $F$ est une primitive quelconque de $f$ sur $[a, b]$

**Exemples:**

**Autre exemple** Calculer la dérivée de la fonction

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt$$

Soit $G(x)$ une primitive de la fonction $g(t) = e^{t^2}$
D'après le théorème fondamentale

$$F(x) = G(x^2) - G(0)$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= [G(x^2) - G(0)]' \\
&= [G(x^2)]' - [\ \underbrace{G(0)}_{\text{constant}}\ ]' \\
&= [G(x^2)]' - 0 \\
&= G'(x^2) \cdot (x^2)' = g(x^2) \cdot 2x \\
&= e^{x^4} 2x
\end{aligned}$$

□

## 3.2 Intégrale indéfinie

### 3.2.1 Définition et propriétés

**Définition:** Soit $f$ définie sur $I$. On appelle **intégrale indéfinie** de $f$ sur $I$, l'ensemble de toutes les primitives de $f$ sur $I$. Elle se note

$$\int f(x)dx$$

$$\underbrace{\int f(x)dx}_{\text{intégrale indéfinie}} = \underbrace{F(x)}_{\text{primitive quelconque}} + \underbrace{c}_{\text{constante arbritraire}}$$

**Conséquences:**

1. $\int F'(x)dx = F(x) + c$
2. $[\int f(x)dx]' = f(x)$

**Propriétés de linéarité**

1. $[\int f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
   Soient $F$ et $G$ des primitives de $f$ et $g$.

$$F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad G'(x) = g(x)$$

$$\begin{aligned}
\int [f(x)+g(x)]dx &= \int [F'(x)+G'(x)]dx \\
&= \int [F(x)+G(x)]'dx \\
&= [F(x)+G(x)]+c \\
&= F(x)+c_1+G(x)+c_2 \\
&= \int f(x)dx + \int g(x)dx
\end{aligned}$$

□

2. De même
$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

**Quelques intégrales indéfinies déduites du calcul différentiel:**

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \quad n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + c,$ si $x > 0$ et si $x < 0$, $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{-1}{-x}dx = \ln(-x) + c$

  D'où
  $$\boxed{\int \frac{1}{x} = \ln|x| + c}$$

□

- $\int e^x = e^x + c$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c$
- $\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + c$
- $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cosh^2(x)}dx = \tanh(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sinh^2(x)}dx = -\coth(x) + c$

sectionRecherche de primitives

**Méthode basée sur l'observation**

On regarde si l'intégrant, à une constante multiplicative près, est la dérivée d'une fonction connue, ou la dérivée d'une fonction composée connue:

- $\int f'(x)dx = f(x) + c$
- $\int f'(u(x)) \cdot u'(x)dx = f(u(x)) + c$

**Exemples:**

1. $\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\int -a\sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\int [\cos(ax)]'dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\int \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\int (\sqrt{ax+b})'dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$
3. $\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\sqrt{u}}\, dx \frac{1}{3}\sqrt{x^2+1}^3 + c$
4. $\int \sin(2x)\cdot\sin^2(x)dx = \int 2\underbrace{\cos(x)}_{u'}\cdot\underbrace{\sin^3(x)}_{u^3}\,dx = \frac{1}{2}\sin^4(x) + c$
5. $\int \cos^2(x)dx$, on linéarise $\cos^2(x)$ à l'aide de la relation
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$
$$\implies \cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \text{ et } \sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$$
[missing the last part, check the drive]

**Intégration par parties**

Soit $u = u(x)$ et $v = v(x)$
$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$
et en intégrant rapport à $x$:
$$\int (u\cdot v)'dx = \int u'\cdot vdx + \int u\cdot v'dx$$
$$u\cdot v = \int u'\cdot vdx + \int u\cdot v'dx$$

$$\boxed{\int u'\cdot vdx = u\cdot v - \int u\cdot v'dx}$$

Méthode efficace si $\int u\cdot v'dx$ est plus facile à intégrer que $\int u'\cdot vdx$.

**Exemple:** $f(x) = x\cdot\sin(2x)$
$$\int x\cdot\sin(2x)dx$$
$$v = x \quad , \quad v' = 1$$
$$u' = \sin(2x) \quad , \quad u = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$\int \underset{\downarrow}{x}\cdot\underset{\uparrow}{\sin(2x)}dx$$
$$= x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2z)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx$$
$$= -\frac{x}{2}\cdot\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx$$
$$= -\frac{x}{2}\cdot\cos(2x) + \frac{1}{4}\int \sin(2x)dx + c$$

**Exemple surprenant:**

$$I = \int \frac{1}{x} dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \underbrace{\int x \left( -\frac{1}{x^2} \right)}_{=+\int \frac{1}{x} dx}$$

$$I = 1 + I$$

$$\underbrace{I - I}_{\neq 0} = 1 + c$$

**Autre exemple:**

$$\begin{aligned} I = \int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\sin(x)} &= e^x \sin(x) - \int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\cos(x)} dx \\ &= e^x \cdot \sin(x) - [e^x \cdot \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))dx] \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \underbrace{\int e^x \cdot \sin(x) dx}_{=I} \\ &\implies 2I = e^x[\sin(x) - \cos(x)] + c' \end{aligned}$$

$$I = \frac{e^x}{2}[\sin(x) - \cos(x)] + c$$

**Intégration par changement de variable**

On change de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant, fonction de $t$, soit plus facile à intégrer.
On choisit $\varphi$ bijectif pour pouvoir expliciter $x = \varphi(t)$ ( $\varphi$ bijectif et $\varphi \in \mathbb{C}^1$ ) pour calculer $\int f(x)dx$
Soit $F$ une primitive de $f$: $F'(x) = f(x)$ et

$$\begin{aligned} \int f(x)dx = \int F'(x)dx &= F(x) + c \\ &= F[\varphi(t)] + c = \int (F[\varphi(t)])' dt \\ &= \int F'[\varphi(t)]\dot{\varphi}(t)dt \\ &= \int f[\underbrace{\varphi(t)}_{=x}] \cdot \underbrace{\dot{\varphi}(t)dt}_{Ax} \end{aligned}$$

$$[x = \varphi(t) \implies dx = \dot{\varphi}(t)dx]$$

□

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \dot{\varphi}(t)dt}$$

**Exemples:**

1. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$
   Posons $t = \sqrt{1+x}, x > -1, t > 0, \qquad x = t^2 - 1, dx = 2tdt$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx &= \int \frac{t^2-1}{t}(2tdt)\\ &= 2\int (t^2-1)dt = 2[\frac{t^3}{3} - t] + c\\ \int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx &= 2[\frac{\sqrt{1+x}^3}{3} - \sqrt{1+x}] + c\end{aligned}$$

2. $\int \cos(\sqrt{x})dx$
   Posons $t = \sqrt{x}, x \geq 0, t \geq 0, \qquad x = t^2, dx = 2tdt$

$$\begin{aligned}\int \cos(\sqrt{x})dx &= \int \cos(t)\cdot 2tdt\\ &= 2\int \underset{\downarrow}{t}\cdot \underset{\uparrow}{\cos(t)}dt = 2[t\cdot\sin(t) - \int 1\cdot\sin(t)dt]\\ &= 2[t\cdot\sin(t) + \cos(t)] + c = 2[\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})] + c\end{aligned}$$

**Quelques changements de variables usuels**

1. Déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$
   Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}x \in [-1,1]$
   - $x = \sin(t), t \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right], x \in [-1,1], \sqrt{1-x^2} = \cos(t), dx = \cos(t)dt$
   - $x = \cos(t), t \in [0,\pi], x \in [-1,1], \sqrt{1-x^2} = \sin(t), dx = -\sin(t)dt$
2. Déduits de la relation $\cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 1$
   - Si l'intégrant est fonction $\sqrt{1+x^2}x \in \mathbb{R}$
     On peut poser $x = \sinh(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$
     $$dx = \cosh(t)dt, \quad \sqrt{1+x^2} = \cosh(t)$$
   - Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2-1}, \quad x \in ]-\infty,-1], \cup[1,+\infty[$
     On peut poser $\begin{cases} x = \cosh(t), & \text{pour } x \geq 1 \\ x = -\cosh(t), & \text{pour } x \leq -1 \end{cases} \quad (t \geq 0)$

**Exemples:**

1. $f(x) = x^3\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1]$
   Posons $s = \sin(t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
   $$\sqrt{1-x^2} = \cos(t), \quad dx = \cos(t)dt$$

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \sin^2(t)\cdot\cos(t)[\cos(t)dt] \\
&= \int \sin^2(t)\cdot\cos^2(t)dt \\
&= \int \sin(t)[1-\cos^2(t)]\cdot\cos^2(t)dt \\
&= \int \sin(t)\cos^2(t) - \int \sin(t)\cdot\cos^4(t)dt \\
&= \frac{1}{3}\cos^3(t) + \frac{1}{5}\cos^5(t) + c \\
\int f(x)dx &= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^3 + \frac{1}{5}\sqrt{1-x^2}^5 + c
\end{aligned}$$

2. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+5}$

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2+4} = 2\cdot\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$$

On pose $\frac{x+1}{2} = \sinh(t), \quad x = 2\sinh(t)-1, \quad dx = 2\cosh(t)dt$

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx = 2\int\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx &= 2\int\cosh(t)[2\cosh(t)dt] \\
= 4\int\cosh^2(t)dt &= 2\int[\cosh(2t)+1]dt = \sinh(2t)+2t+c \\
= 2\sinh(t)\cdot\cosh(t)+2t+c &= \sqrt{x^2+2x+5}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c
\end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

$$\mathbb{D}_f = ]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$$

- Intégration sur $x \in [1;+\infty[$
  On pose $x = \cosh(t), \quad t > 0$

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{x^2-1}dx &= \int\sinh(t)[\sinh(t)dt] \\
&= \int\sinh^2(t)dt = \frac{1}{2}\int[\cosh(2t)-1] \\
&= \frac{1}{4}\sinh(2t) - \frac{1}{2}t + c \\
&= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{1}{2}t + c \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arg\,cosh}(x) + c
\end{aligned}$$

- Intégration sur $x \in ]-\infty;-1]$
  On pose $x = -\cosh(t), \quad t \geq 0, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)$

$$dx = -\sinh(t)dt, \quad t = \arg\cosh(-x)$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}dx &= \int \sinh(t)[-\sinh(t)dt] \\
&= -\int \sinh^2(t)dt = -\left[\frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{1}{2}t\right] + c \\
&= -\left[\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\cdot(-x) - \frac{1}{2}\arg\cosh(-x)\right] + c \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\arg\cosh(-x) + c
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \begin{cases} \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\arg\cosh(-x) + c & \textbf{si } x \leq -1 \\ \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arg\cosh(x) + c & \textbf{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Remarque:** Soit $P_2(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$, alors $\sqrt{P_2}$ est de type $\lambda\sqrt{1-y^2}$ et on peut poser $y = \sin(t)$ ou $y = \cos(t)$
- Si $\Delta < 0, \quad a > 0$, alors $\sqrt{P_2}$ est de type $\lambda\sqrt{y^2+1}$ et on peut poser $y = \sinh(t)$
- Si $\Delta > 0, \quad a > 0$, alors $\sqrt{P_2}$ est de type $\lambda\sqrt{y^2-1}$ et on peut poser $y = \pm\cosh(t)$

**Exemple:** $f(x) = \sqrt{-x(x+6)}$

$$\mathbb{D}_f = [-6; 0]$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2-6x} = \sqrt{-(x+3)^2+9} = 3\sqrt{1-\left(\frac{x+3}{3}\right)^2}$$

et on peut poser $\frac{x-3}{3} = \sin(t)$

**Intégration des fonctions rationnelles**

Pour intégrer une fonction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, on la décompose en éléments simples.

**Exemples:**

- $f(x) = \frac{x^6+2}{x^5+x^3}$

$$= \frac{(x^6+x^4)-x^4+2}{x^5+x^3} = x + \frac{2-x^4}{x^3(x^2+1)} = x + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

- $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-2)^2(x^2+3)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3} + \frac{Ex+F}{(x^2+3)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+3)^3}$

Ces éléments simples sont

1. de première espèce

- $\frac{1}{x-\alpha} = \int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + c$
- $\frac{1}{(x-\alpha)^2} = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} = -\frac{1}{x-\alpha} + c$
- $\frac{1}{(x-\alpha)^n} = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + c$

2. ou de deuxième espèce

$$\frac{px+q}{(x^2+2ax+b)^n}, \qquad \text{avec } \Delta' = a^2 - b < 0$$

Dans ce cours on n'intègre que des éléments simples de $2^e$ espèce dont le dénominateur est de multiplicité 1 ($n=1$)

$$\int \frac{px+q}{x^2+2ax+b} dx = \int \left[ \frac{\frac{p}{2}(2x+2a)}{x^2+2ax+b} + \frac{q-ap}{x^2+2ax+b} \right] dx$$

On commence donc à fire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur et l'intégration de $\frac{1}{x^2+2ax+b}$ donne un fonction arctangente.

$$\frac{1}{x^2+2ax+b} = \frac{1}{(x^2+2ax+a^2)+\underbrace{b-a^2}_{>0}} = \frac{1}{(x+a)^2+(b-a^2)} = \frac{\frac{1}{b-a^2}}{\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b-a^2}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{b-a^2}}}{\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)\right]'$$

En résumé:

$$\int \frac{px+q}{x^2+2ax+b} dx = \frac{p}{2}\ln(x^2+2ax+b) + \frac{q-ap}{\sqrt{b-a^2}} \cdot \arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + c$$

**Exemple:** $f(x) = \frac{-2x^3+6x^2-6x+10}{x^3+x^2+3x-5}$

**Division euclidienne**

$$\begin{array}{rrrr|l} -2x^3 & +6x^2 & -6x & +10 & x^3+x^2+3x-5 \\ \cline{5-5} -(-2x^3 & -2x^2 & -6x & +10) & -2 \\ \cline{1-4} 0 & +8x^2 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = -2 + \frac{8x^2}{x^3+x^2+3x-5} = -2 + \frac{8x^2}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

**Décomposition en éléments simples**

$$\frac{8x^2}{(x-1)\underbrace{(x^2+2x+5)}_{\Delta<0}} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

- $(x-1), x=1 : \frac{8}{8} = A \iff A = 1$
- $x, x \to \infty : 8 = A + B \iff B = 7$

- $x = 0 : 0 = -A + \frac{C}{5} \iff C = 5$

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{7x+5}{x^2+2x+5}$$

**Intégration de** $\frac{7x+5}{x^2+2x+5}$

$$\frac{7x+5}{x^2+2x+5} = \frac{\frac{7}{2}(2x+2)}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5}$$

et

$$\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$$

D'où

$$\int \frac{-2x^3+6x^2-6x+10}{x^3+x^2+3x-5} dx = \frac{7}{2}\ln(x^2+2x+5) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

**Intégration des fonctions rationnelles trigonométriques**

Soit $f$ une fonction rationnelle trigonométrique $f(x) = R(\cos(x), \sin(x))$ où $R(u,v)$ est rationnelle en $u, v$.

On peut calculer $\int f(x)dx$ en se ramenant à l'intégration d'une fonction rationnelle à l'aide d'un changement de variable. Le choix du changement de variable peut se faire à l'aide des tests de Bioche.

- Si le produit $f(x)dx$ est invariant lorsqu'on remplace $x$ par $(\pi - x)$, alors on pose

$$u = \sin(x) \quad x = \arcsin(u)$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du \quad \text{et } \cos(x) = \sqrt{1-u^2}$$

- Si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsque $x \leftrightarrow (-x)$, on pose

$$u = \cos(x), \quad x = \arccos(u)$$

$$dx = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \sin(x) = \sqrt{1-u^2}$$

- Si $f(x) \cdot dx$ est invariant par $x \leftrightarrow (\pi + x)$ On pose

$$u = \tan(x), \quad x = \arctan(u), \sin(x) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

- Si les 3 tests d'invariance sont négatif, on pose

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad x = 2\arctan(u), \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

**Exemples:**

1. $f(x) = \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}$

   **Test d'invariance sur** $f(x) \cdot dx$

   - $f(\pi - x) \cdot d(\pi - x) = \frac{\sin^3(\pi-x)}{1+\cos^3(\pi-x)} \cdot \underbrace{[(\pi - x)' dx]}_{=-1} = \frac{+\sin^3(x)}{1-\cos^3(x)} \neq f(x) \cdot dx$
   - $f(-x) \cdot d(-x) = \frac{-\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)} - dx = f(x)dx$
     On pose donc

$$u = \cos(x), \quad x = \arccos(x), \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

   **Changement de variable**

$$\int f(x)dx = \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u^3} \cdot \left(-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

$$= -\int \frac{1-u^2}{1+u^3} = +\int \frac{(u-1)(u+1)}{(u+1)(u^2-u+1)}du$$
$$= \int \frac{u-1}{\underbrace{u^2-u+1}_{\Delta<0}}du$$

$$\frac{u-1}{u^2-u+1} = \frac{\frac{1}{2}(2u-1)}{u^2-u+1} - \frac{\frac{1}{2}}{u^2-u+1}$$

   et

$$\frac{1}{u^2-u+1} = \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)+1}$$

   D'où

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln(u^2-u+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln(\cos^2(x) - \cos(x) + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\cos(x)-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

2. $f(x) = \frac{1}{1+3\sin(2x)+7\cos^2(x)}$

   **Invariance**
   - $f(\pi - x) \cdot \underbrace{d(\pi - x)}_{=-dx} = \frac{1}{1-3\sin(2x)+7\cos^2(x)} \cdot -dx \neq f(x)dx$
   - $f(-x) \cdot \underbrace{d(-x)}_{=-dx} = \frac{1}{1-3\sin(2x)+7\cos^2(x)} \cdot (-dx) \neq f(x)dx$
   - $f(\pi + x) \cdot \underbrace{d(\pi + x)}_{=+dx} \frac{1}{1+3\sin(2x)+7\cos^2(x)} = f(x)dx$, on pose

$$u = \tan(x)$$

   **Changement de variable**

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{1+3\sin(2x)+7\cos^2(x)} = \int \frac{1}{1+6\cdot\frac{u}{1+u^2}+7\cdot\frac{1}{1+u^2}} \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

## 3.3 Applications géométriques du calcul intégral

### 3.3.1 Calcul d'aire géométrique

1. Aire du domaine $D$ limité par $\Gamma$, l'axe $O_x$, $x = a$ et $x = b$

   (a) $\Gamma$ défini par $y = f(x)$ ( $f$ continue )

$$A = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Si $f(x)$ change de signe sur $[a, b]$

$$A = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{x_0} + \int_{x_0}^b [-f(x)] \cdot dx$$
$$= \int_a^{x_0} f(x)dx - \int_{x_0}^b f(x)dx$$

Il est essentiel de faire une esquisse du domaine $D$.

**Remarque:** Si pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on pose $x = \varphi(t)$ ($\varphi$ bijectif et $C^{-1}$), alors

- Soit on revient en $x$: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$
- Soit on fait suivre les bornes en fonction de $t$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)] \cdot \dot{\varphi}(t)dt$$

**Exemple:** $D$ limité par

$$y = \sqrt{x^2 + 9}, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = 4$$

$$A = \int_0^4 f(x)dx$$
$$\int_0^4 \sqrt{x^2 + 9}dx$$
$$= 3\int_0^2 \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}dx$$

On pose $x = \sinh(t), \quad dx = 3\cosh(t)dt$

$$\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} = \cosh(t) \quad \text{et} \quad x \in [0, 4] \iff t \in [0, \operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{4}{3}\right)]$$

$$A = 3\int_0^a \cosh(t) \cdot [3\cosh(x)dt]$$

Posons $a = \arg\sinh\left(\frac{4}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
A &= 9\int_0^a \cosh^2(t)dt = 9\int_0^a \frac{\cosh(2t)+1}{2}dt \\
&= \frac{9}{2}\left[\frac{\sinh(2t)}{2} + t\right]\Big|_0^a \\
&= \frac{9}{2}\left[\sinh(t)\cdot\cosh(t) + t\right]\Big|_0^a \\
&= \frac{9}{2}\left[\frac{4}{3}\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2} + a - 0\right] \\
&= \frac{9}{2}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3} + a\right] = 10 + \arg\sinh\left(\frac{4}{3}\right)
\end{aligned}$$

$\square$

(b) $\Gamma$ est défini paramétriquement

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$A = \int_a^b |y|dx = \int_a^b ydx$$

$$A = \int_{t_a}^{t_b} y(t)\,[\dot{x}(t)dt]$$

**Exemple:** Vérifions que l'aire du disque unité vaut $\pi$

$$\Gamma = \begin{cases} \cos(t) \\ \sin(t) \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 y\cdot dx$$

Expression de $A$ en fonction de $t$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\cdot[\dot{x}(t)dt]$$

$$x(t) = 0 \implies t = \frac{\pi}{2}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = 1 \implies t = 0, \quad t_0 = 0$$

$$
\begin{aligned}
A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t) \underbrace{\underbrace{\dot{x}(t)}_{<0} \cdot \underbrace{dt}_{<0}}_{dx>0} \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t) \cdot [-\sin(t)dt] \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(t)dt = +\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - (0-0)\right\} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

□

2. Aire au domaine finie par deux courbes

- Points d'intersection
- Esquisse du domaine de $D$
- Calcul de l'aire $A$ de $D$

$$\mathcal{A} = \int_{x_A}^{x_B} |y_2 - y_1| dx = \int_{x_A}^{x_B} (y_2(x) - y_1(x))dx$$

**Attention!** Si $A$ et $B$ ne sont pas deux points d'intersections consécutifs.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{x_A}^{x_B} |y_1 - y_2| dx \\
&= \int_{x_A}^{x_0} (y_1 - y_2)dx + \int_{x_0}^{x_B} (y_2 - y_1)dx
\end{aligned}
$$

**Exemple 1:**

$$\Gamma_1 : y = -x^2 + 3, \quad \Gamma_2 : y = x^2 - 2x - 1$$

- Points d'intersection

$$
\begin{aligned}
y_1 = y_2 &\iff -x^2 + 3 = x^2 - 2x - 1 \\
&\iff 2x^2 - 2x - 4 = 0 \iff 2(x-2)(x+1) = 0 \\
&\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2
\end{aligned}
$$

- Esquisse de $D$

$$y_2 = x^2 - 2x - 1 \iff y + 22 = (x-1)^2 \quad S_2(1,-2)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)\cdot dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx \\ &= 2\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]\Big|_{-1}^{2} \\ &= 2\left[\left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)\right] \\ &= 2\left[-3 - \frac{1}{2} + 8\right] = () \end{aligned}$$

**Exemple 2:** $D$ limité par

$$y_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{x} \quad \text{et} \quad y_2 = \arcsin(x)$$

$$A = \int_0^1 (y_1 - y_2)dx = \int_0^1 \left[\frac{\pi}{2}\sqrt{x} - \arcsin(x)\right] dx$$

Recherche des primitives

- $\int \frac{\pi}{2}\sqrt{x}dx = \frac{\pi}{3}\sqrt{x}^3 + c$
- $\int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arcsin(x)}dx$

$$\begin{aligned} &= x\cdot\arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{x}^3 - x\cdot\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 \\ &= \left[\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - 0\right) - (0 - 0 - 1)\right] \\ &= 1 - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

**Remarque:** Si les 2 fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[a,b]$, alors on peut calculer l'aire $A$ de $D$ en décomposant $D$ en "tranches horizontales" de la façon suivante:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{y_0}^{y_1} (x_1 - x_2) dy \\
&= \int_{y_0}^{y_1} (x_1(y) - x_2(y)) dy
\end{aligned}
$$

avec

$$y = y_1(x) \iff x = x_1(y)$$

et

$$y = y_2(x) \iff x = x_2(y)$$

**Reprise de l'exemple précédent**

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x_2(y) - x_1(y)] dy$$

avec

$$y_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{x} \iff x = \left(\frac{2y}{\pi}\right)^2, \quad x_1(y) = \frac{4}{\pi^2} y^2$$

et

$$y_2 = \arcsin(x) \iff x = \sin(y), \quad x_2(y) = \sin(y)$$

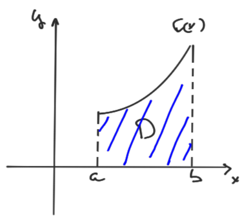
$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(y) - \frac{4}{\pi^2} y^2\right] dy \\
&= \left[-\cos(y) - \frac{4}{3\pi^2} y^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left[\left(0 - \frac{4}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{\pi^3}{8}\right) - (-1 - 0)\right)\right] = -\frac{\pi}{6} + 1
\end{aligned}
$$

### 3.3.2 Calcul de volume

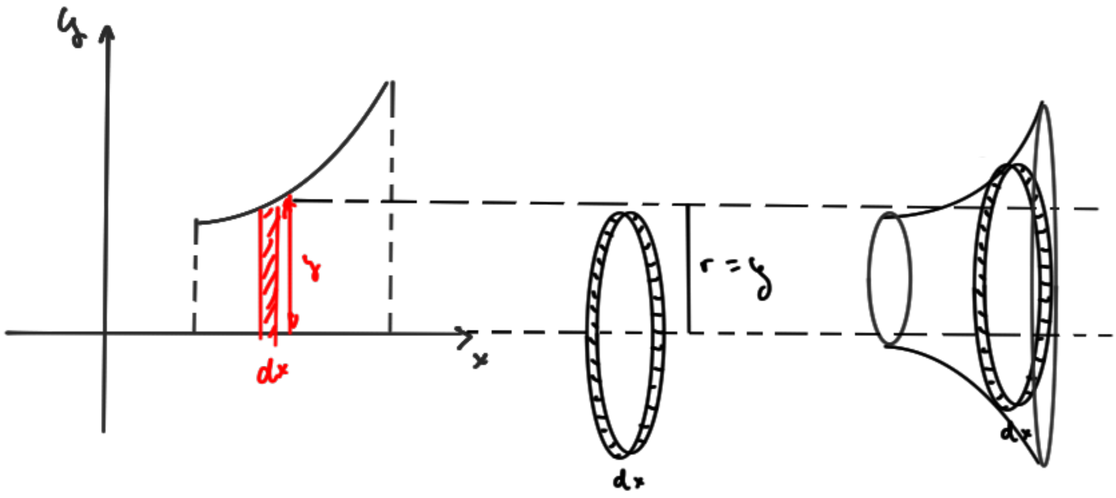
#### Volume d'un corps de révolution

Soit $f$ continue sur $[a, b]$ et $D$ le domaine du plan limité par

$$y = f(x), \quad y = 0, \quad x = a \quad \text{et} \quad x = b$$



On cherche à définir le volume $V$ le volume $V$ du corps de révolution engendré par la rotation du domaine $D$ autour de l'axe $O_x$




La section de corps par le plan d'équation $x = x_0$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon

$$r = y(x_0) = f(x_0)$$

et d'aire

$$A(x_0) = \pi r^2 = \pi f^2(x_0)$$

La somme de Reimann

$$\sum_{k=1}^{n} \pi f^2(t_k) \cdot \Delta x_k$$

est une approximation du volume cherché d'autant plus précis que $n$ est grand et les $\Delta x_k$ petits.
Or

$$\sum_{k=1}^{n} \pi f^2(t_k) \cdot \Delta x_k$$

converge car si $f$ est continue, $\pi f^2$ l'est aussi et

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(t_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Par définition

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Le "volume élémentaire"a pour expression

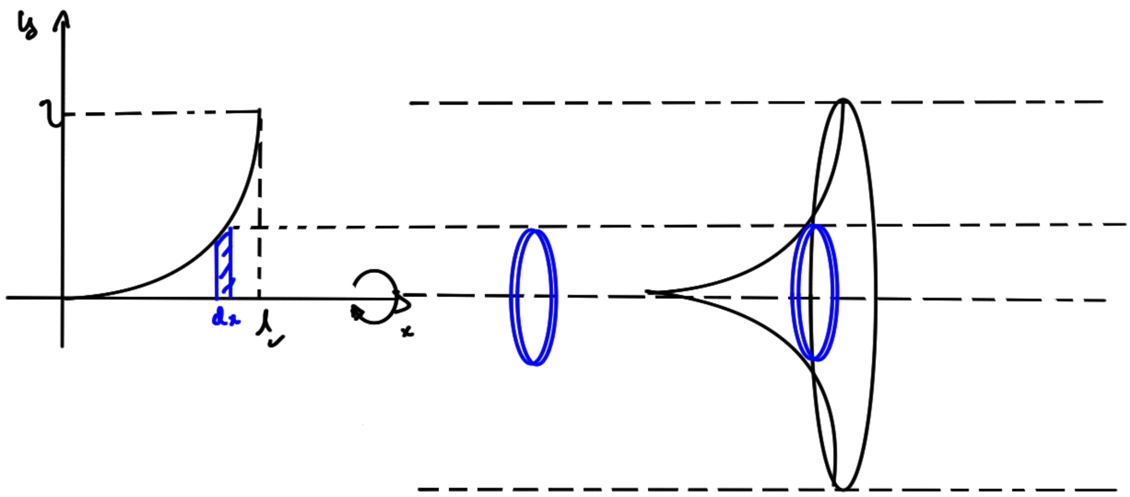
$$dV = \underbrace{\pi f^2(x)}_{=A(x)} \cdot dx$$

où $A(x)$ est l'aire de la section du corps par le plan $(x = x_0)$ perpendiculaire à l'axe de rotation.

**Exemples:**

1. $f(x) = 2x^3, \quad x \in [0,1]$

   $D$ limité par $y = f(x), \quad y = 0 \quad$ et $\quad x = 1$ Rotation autour de $O_x$




La section de ce corps par le plan $x = x_0$ perpendiculaire à l'axe de rotation est un disque d'aire

$$A(x_0) = \pi r^2$$

avec

$$r = y = f(x_0)$$

$$A(x_0) = \pi f^2(x_0)$$

et

$$V = \int_0^1 A(x)dx$$

$$V = \int_0^1 \pi f^2(x)dx = \pi \int_0^1 \left(2x^3\right)^2 dx$$
$$= \pi \int_0^1 4x^6 dx = \pi \frac{4}{7}x^7\Big|_0^1 = \frac{4}{7}\pi$$

2. $f(x) = 2x^3, \quad x \in [0,1]$

   $D$ limité par $y = f(x), \quad y = 2, \quad x = 0$

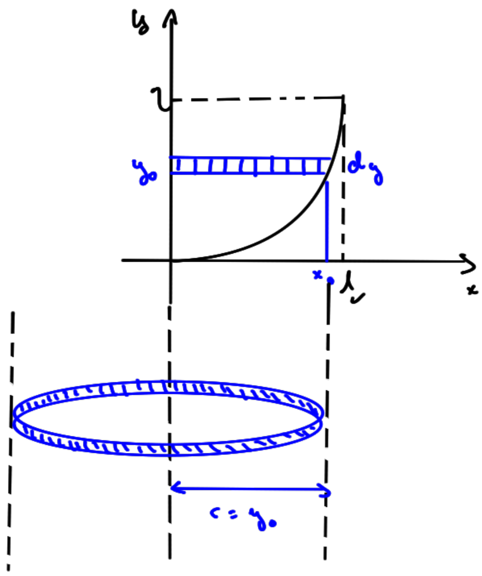
   Axe de rotation: $x = 0$

   La section de ce corps par le plan $x = y_0$ perpendiculaire à l'axe de rotation est un disque d'aire

$$A(y_0) = \pi r^2$$

avec

$$r = x(y_0)$$



$$A(y_0) = \pi x(y_0)$$

et

$$V = \int_0^2 A(y)dy = \int_0^2 \pi x^2(y)dy$$

$$y = 2x^3 \iff x = \sqrt[3]{\frac{y}{2}}$$

$$V = \pi \int_0^2 \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2}}\right)^2 dy$$

$$V = \pi \frac{6}{5} \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \Big|_0^2 = \frac{6}{5}\pi$$

3. $f(x) = 2x^3, \quad x \in [0, 1]$

   $D$ limité par $y = f(x), \quad y = 0, \quad x = 1$

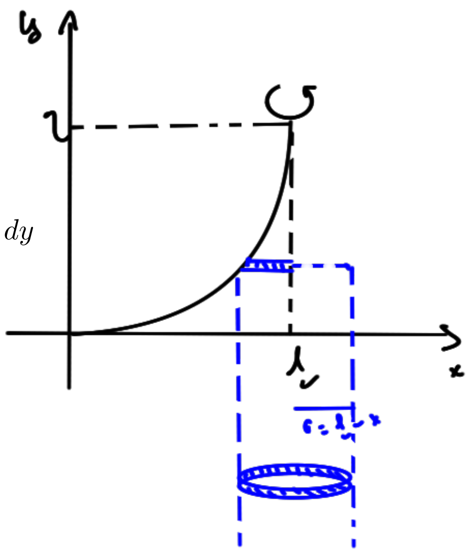
   Axe de rotation: $x = 1$

   La section de ce corps par le plan $y = y_0$ perpendiculaire à l'axe de rotation est un disque d'aire

   $$A(y_0) = \pi r^2$$

   avec

   $$r = 1 - x_0 = 1 - x(y_0)$$



$$A(y_0) = \pi\,(1 - x(y_0))^2$$

et

$$V = \int_0^2 \pi\,[1 - x(y)]^2\,dy = \pi \int_0^2 \left[1 - \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 dy$$

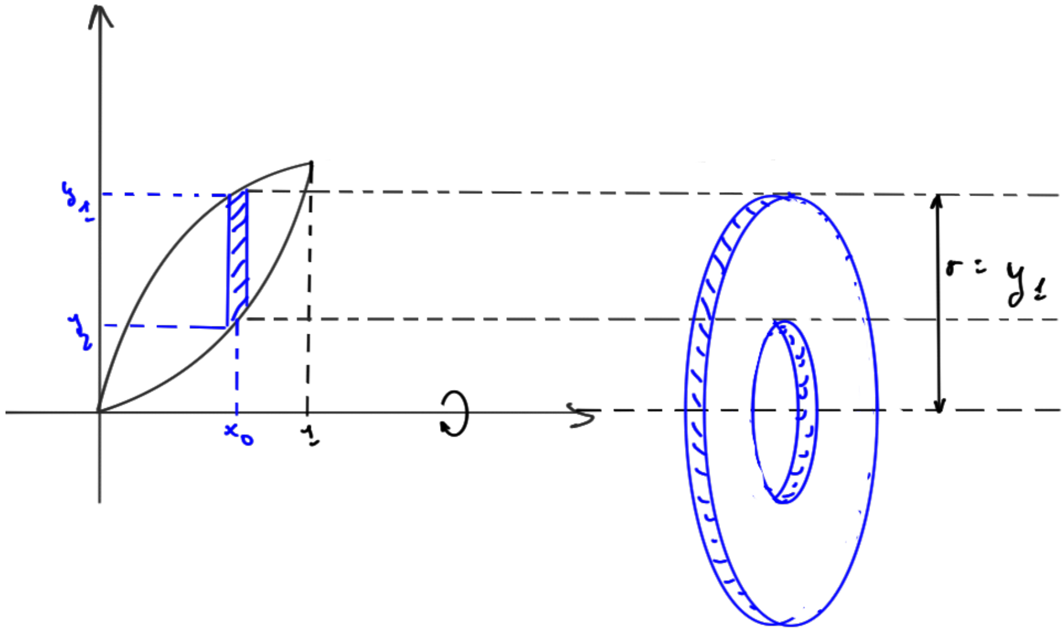
$$= \pi \int_0^2 \left[1 - 2\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] dy$$

$$= \pi \left[y - 3\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{5}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\right]_0^2$$

$$= \pi \left[\left(2 - 3 + \frac{6}{5}\right) - 0\right] = \frac{\pi}{5}$$

4. Volume du corps engendré par la rotatoin autour de $O_x$ du domaine $D$ limité par

   $$y_1 = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad y_2 = x^2$$




L'aire de la section par $x = x_0$ est une couronne de rayon extérieur $R = y_1(x_0)$ et de rayon intérieur $r = y_2(x_0)$

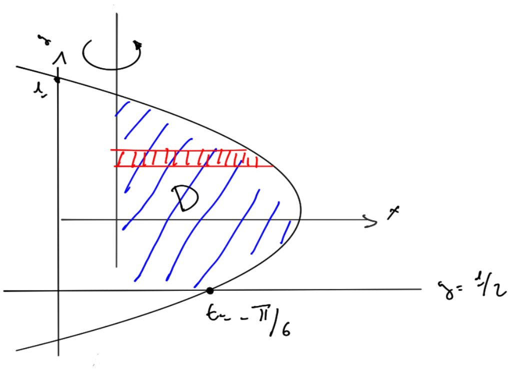
L'aire de cette section est

$$A(x_0) = \pi R^2 - \pi r^2$$
$$A(x_0) = \pi\left[y_1^2(x_0) = y_2^2(x_0)\right]$$

et

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx \\ &= \int_0^1 \pi\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx \\ &= \pi\int_0^1 (x - x^4)dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\pi \end{aligned}$$

5. Reprise de l'exercice 7 de la série 19




$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

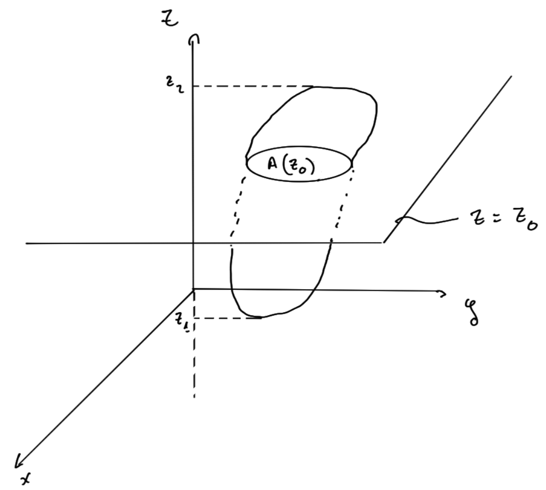
L'aire de la section par $y = y_0, y(x_0)$ est un disque d'aire $\pi r^2$ avec $r = 1 - x_0$

$$A(y(t_0)) = \pi r^2 = \pi \left[1 - x(t_0)\right]^2$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{y_0}^{y_1} A(y)dy \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} A(y(t)) \cdot \dot{y}(t)dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi \left[1 - x(t)\right]^2 \cdot \dot{y}(t)dx \\
&[...] \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\cos(t) - 4\cos^2(t) + 4\left(1 - \sin^2(t)\right) \cdot \cos(t)\right] dt \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(5\cos(t) - 2[1 + \cos(2t)] - 4\sin^2(t) \cdot \cos(t)\right) dt \\
&= \pi \cdot \left[5\sin(t) - 2t - \sin(2t) - \frac{4}{3}\sin^3(t)\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \pi \cdot \left[\sqrt{3} + \frac{7}{3} - \pi\right]
\end{aligned}$$

**Volume d'un corps de sections d'aires connues**

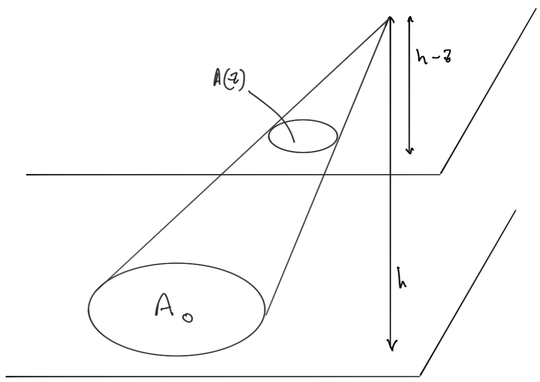
On considère un corps dont les sections par des plans $\parallel$ à $x_0y$ sont connues. Dans le plan $z = z_0 \quad (z_1 \leq z_0 \leq z_2)$ l'aire de la section vaut $A(z_0)$




Le volume de ce corps est alors donné par

$$V = \int_{z_1}^{z_2} A(z)dz$$

**Exemple:** On considère un cône de hauteur $h$ et dont la base est une courbe formée plane définissant une aire $A_0$




Les sections de ce cône par des plans parallèles sont des figures homothétiques, plus précisément:

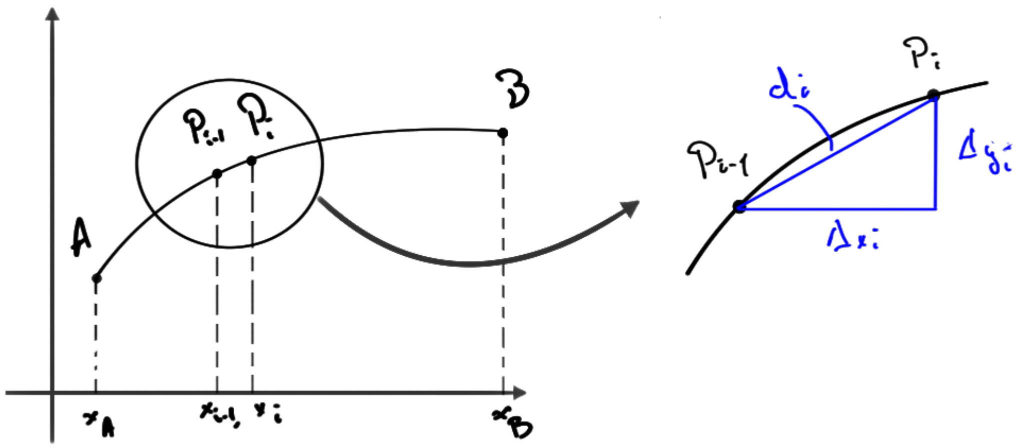
$$\frac{A(z)}{A_0} = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2$$

### 3.3.3 Longueur d'un arc de courbe

Soit $f$ une fonction $C^1$ sur $[x_A, x_B]$. On cherche à définir la longueur $S$ de l'arc de $\Gamma$ définir par

$$y = f(x), \quad x_A \leq x \leq x_B$$

Soit $(x_0 = x_A, x_1, ..., x_n = x_B)$ une partition de $[x_A, x_B]$ avec $x_{i-1} < x_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n$ et $P_1$ le point d'abscisse $x_i$ de $\Gamma$.




avec

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} 1 \leq i \leq n$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

et

$$d_i = \delta(P_{i-1}, P_i)$$

$$d_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad \text{(Pythagore)}$$

Or d'après TAF,

$$\exists x_{i-1} \leq c_1 \leq x_i \text{ t.q. } \Delta y_i = f'(c_1) \cdot \Delta x_i$$

où

$$\begin{aligned} d_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(c_i) \cdot \Delta x_i]^2} \\ &= \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \cdot \Delta x_i \quad (\Delta x_i > 0) \end{aligned}$$

Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \cdot \Delta x_i$$

$S_n$ est une approximation de $S$ d'autant plus précise que $n$ est grand et les $\Delta x_i$ sont petits. $S_n$ est une somme de Reimann de la fonction $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ qui est continue car $f$ est $C^1$. Donc cette somme de Reimann converge:

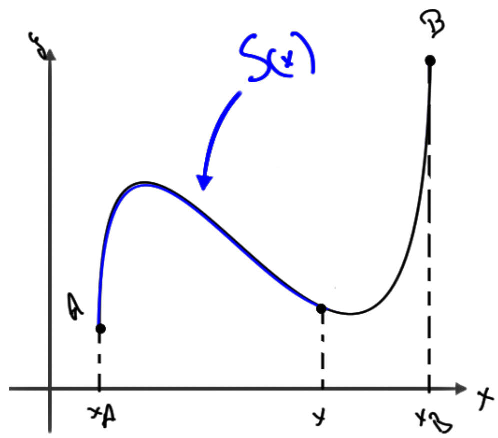
$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} S_n = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Par définition

$$S = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Soit

$$S(x) = \int_{x_A}^{x} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad x_A \leq x \leq x_B$$




$$dS = S'(x) dx$$

Et d'après le théorème fondamentale

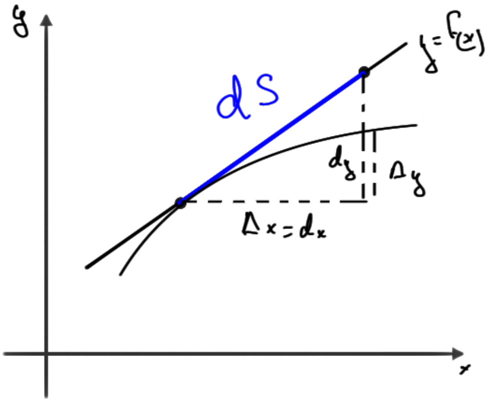
$$S'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_A}^{x} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

d'où

$$dS = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (dx > 0)$$

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = (dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Interprétation géométrique




**Remarques:**

1. Si $f$ est bijective sur $[x_A, x_B]$, on peut calculer $S$ en intégrant par rapport à $x$ ou à $y$

$$S = \int_\Gamma dS = \int_\Gamma \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (x_1 > x_2)$$

$$S = \int_\Gamma \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy \quad (y_1 < y_2)$$

2. Si $\Gamma$ est défini paramétriquement

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [t_1, t_2]$$

$$\begin{aligned} S &= \int_\Gamma \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \end{aligned}$$

**Exemples:**

1. Longueur de l'arc défini par

$$y = f(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 5$$

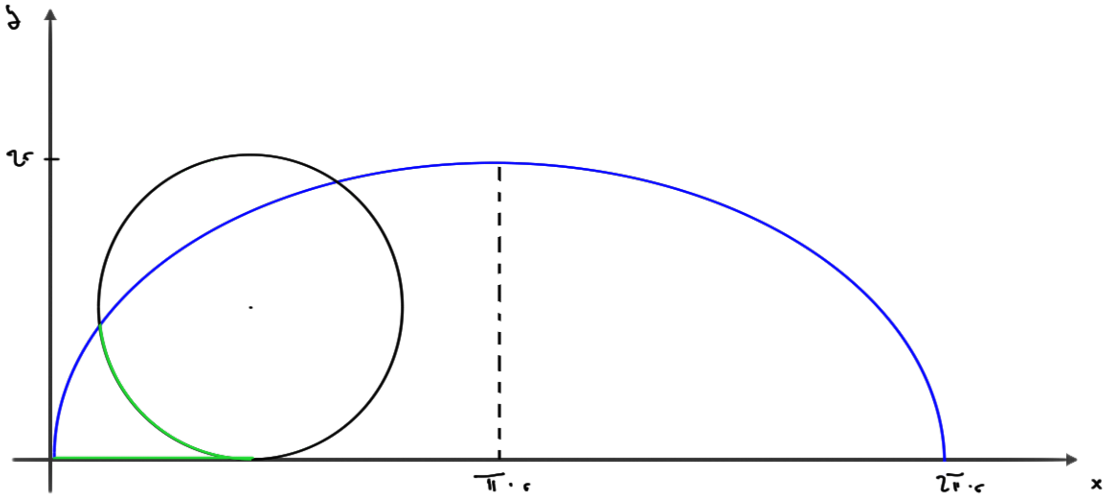
$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{4}\right)}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{x}{4}} dx = \frac{8}{3} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 \\ &= \frac{8}{3} \left[\left(1 + \frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{8}{3} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1\right] = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

2. Longueur d'une arche de cycloïde.

   La cycloïde est la trajectoire d'un point fixe sur un cercle qui roule sur une droite



$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = r(t - \sin(t)) \\ y(t) = r(1 - \cos(t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

avec

$$\dot{x}(t) = r(1 - \cos(t)) \quad \text{et } \dot{y}(t) = r\sin(t)$$

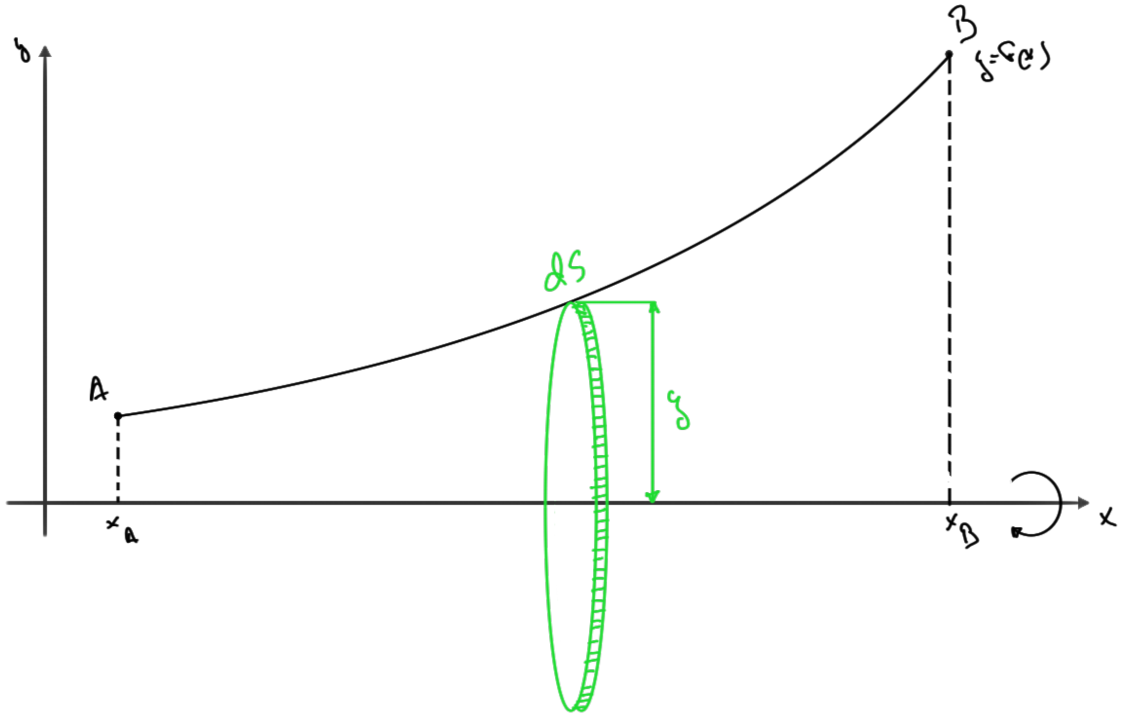
$$\begin{aligned} \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) &= r^2 \left[ (1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \right] \\ &= r^2 \left[ 1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) \right] \\ &= r^2 \left[ 2 - 2\cos(t) \right] \\ &= 4r^2 \left[ \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2r \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2r \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= -2r \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = -4r[-1 - 1] = 8r \end{aligned}$$

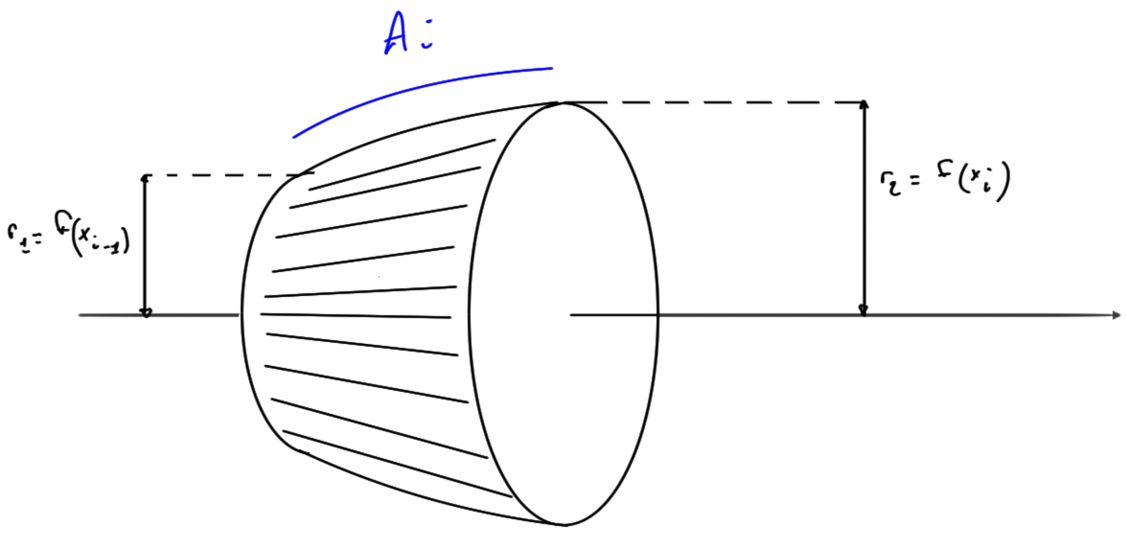
3.

### 3.3.4 Aire d'une surface de révolution

Soit $f \in C^1_{[x_A,xB]}$. On cherche à définir l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de $y = f(x)$ autour de $O_x$




La "surface-élémentaire" est un tronc de cône




dont l'aire $A_i$ est donnée par

$$A_i = \overbrace{2\pi \underbrace{\frac{r_1+r_2}{2}}_{\text{rayon moyen}}}^{\text{circonférence moyenne}} \cdot di$$

$$A_i = 2\pi\frac{f(x_{i-1} + f(x_i))}{2} \cdot d_i$$

La somme de Riemann correspondante converge vers

$$A = \int_\Gamma \underbrace{2\pi \cdot f(x)}_{\text{circonférence}} \cdot \underbrace{ds}_{\substack{\text{élément de} \\ \text{longueur d'aire}}}$$

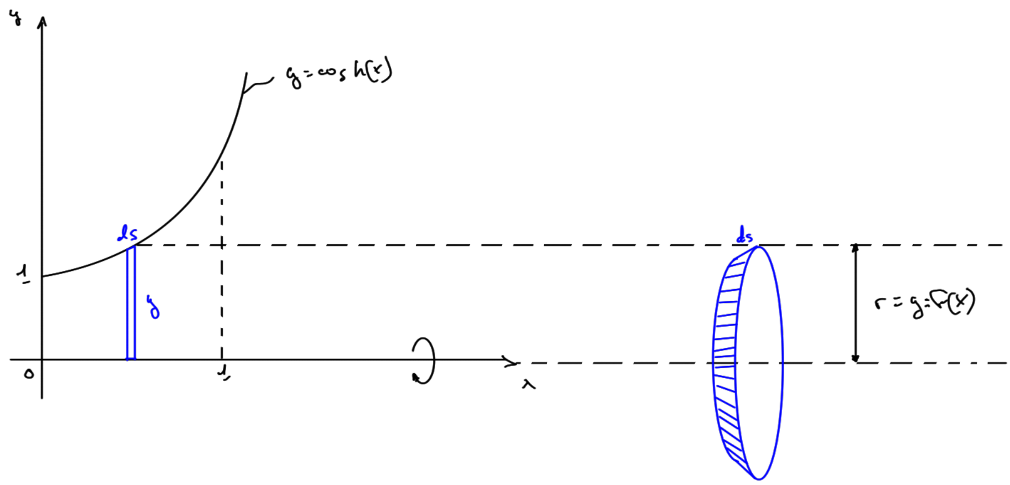
qui définit l'aire cherchée.
On peut intégrer $A$ par rapport à $x$ ou $y$

$$A = \int_\Gamma 2\pi f(x) ds = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (x_1 < x_2)$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi y \sqrt{x'^2(y) + 1} dy \quad (y_1 < y_2)$$

**Exemples:**

1. $y = \cosh(x), \quad x \in [0, 1]$
   Rotation autour de $0_x$

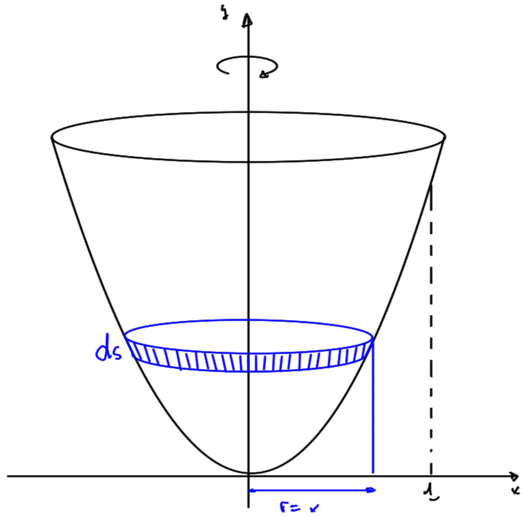



$$A = \int_\Gamma 2\pi y ds = \int_0^1 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

avec $y'^2(x) = \sinh^2(x)$

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 \cosh(x) \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \cosh^2(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{\cosh(2x) + 1}{2} dx \\ &= \pi \left[ \frac{\sinh(2x)}{2} + x \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} [\sinh(2) + 2] \end{aligned}$$

2. Aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de $y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$ autour de $O_y$



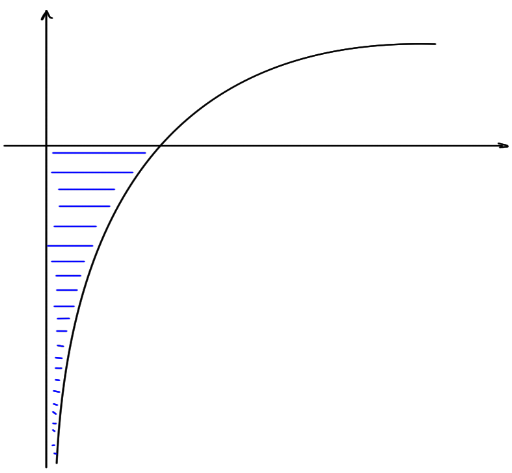

$$A = \int_\Gamma 2\pi r ds = \int_\Gamma 2\pi x ds$$

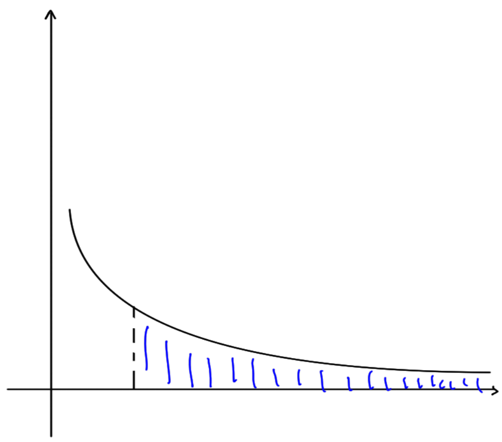
- Intégration par rapport $x$

$$\begin{aligned}
A = & \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \\
= & \int_0^1 \pi x \sqrt{1 + 4x^2} dx \\
= & 2\pi \left[ \frac{1}{12} \sqrt{1 + 4x^2}^3 \right]_0^1 \\
= & 2\pi \cdot \left[ \frac{\sqrt{5}^3}{12} - 1 \right] \cdot \frac{1}{12} \\
= & \frac{\pi}{6} \left[ \sqrt{125} - 1 \right]
\end{aligned}$$

## 3.4 Intégrales impropres (ou généralisées)

Il s'agit de généraliser l'intégrale de Riemann à des domaines non bornés.





### 3.4.1 Intégrale sur un intervalle ouvert borné

1. Soit $f$ continue sur $]a,b]$. On cherche à définir $\int_a^b f(x)dx$

   **Définition:** On appelle intégrale impropre de $f$ sur $]a,b]$ la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

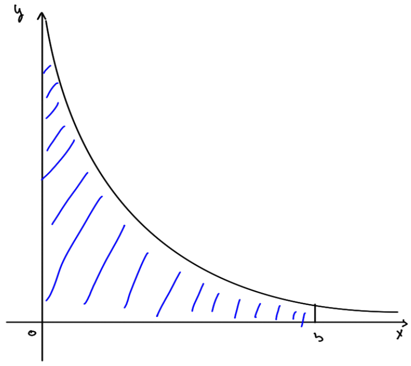
   qu'on note $\int_a^b f(x)dx$ ou

$$\int_{a^+}^b f(x)dx$$

   Si cette limite existe, on dit que l'intégrale impropre converge ("$\int_a^b f(x)dx < \infty$") Sinon, elle est divergente.

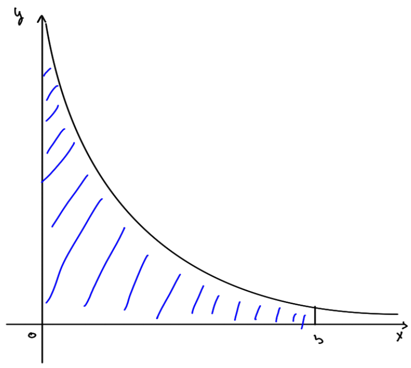
   **Exemples:** (b>0)

   (a) $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$



$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_\epsilon^b$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}[2\sqrt{b}-2\sqrt{\epsilon}] = 2\sqrt{b}$$

   (b) $\int_0^b \frac{dx}{x}$



$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{dx}{x} &= \lim_{\epsilon \to 0^+} [\ln(x)]_\epsilon^b \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} [\ln(b) - \ln(\epsilon)] = +\infty\end{aligned}$$

(c) De façon générale:

$$\boxed{\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 0}$$

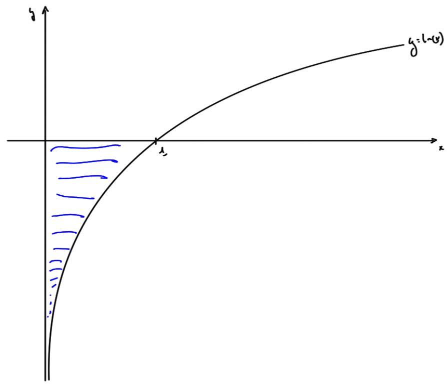
**Démonstration:**

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]$$

- Si $\alpha < 1$ : $\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \infty$
- Si $\alpha \geq 1$ : $\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$

□

(d) $\int_0^1 \ln(x)dx$



$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x)dx &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \ln(x)dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} [x \cdot \ln(x) - x]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} [(1 \cdot 0 - 1) - (\epsilon \cdot \ln(\epsilon) - \epsilon)] \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} [-1 + \epsilon - \epsilon \cdot \ln(\epsilon)]\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \cdot \ln(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\ln(\epsilon)}{\frac{1}{\epsilon}} \overset{BH}{=} \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\frac{1}{\epsilon}}{-\frac{1}{\epsilon^2}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} (-\epsilon) = 0$$

D'où

$$\int_0^1 \ln(x)dx = -1$$

□

2. Soit $f$ continue $[a, b[$. On définit de façon analogue l'intégrale impropre de $f$ sur $[a, b[$:

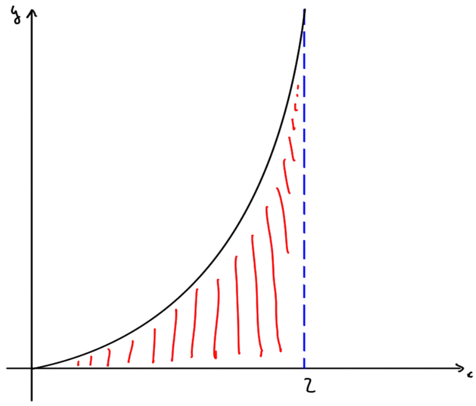
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

que l'on note aussi

$$\int_a^{b^-} f(x)dx$$

**Exemple:**

$$\int_0^2 \frac{x}{2-x}dx$$




$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x}{2-x}dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{2-\epsilon}\frac{x}{2-x}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{2-\epsilon}\left[-1+\frac{2}{2-x}\right]dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-x-2\ln(2-x)\right]t_0^{2-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\epsilon-2-2\ln(\epsilon)+2\ln(2)\right] = +\infty\end{aligned}$$

3. Si $f$ continue sur $]a,b[$ On définit $\int_a^b f(x)dx$ par

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ou $c$ est quelconque dans $]a,b[$. L'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si les 2 intégrales impropres

$$\int_{a^+}^c f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_c^{b^-} f(x)dx$$

convergent.

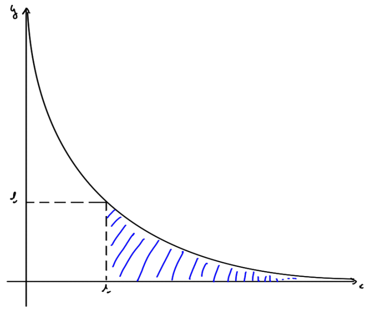
### 3.4.2 Intégrales sur un intervalle non bornée

1. Soit $f$ continue sur $[a,+\infty[$. On définit l'intégrale impropre:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{l\to+\infty}\int_a^l f(x)dx$$

**Exemples:**

(a) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$



$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{l \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{l \to +\infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty}$$
$$= \lim_{l \to +\infty} \left[ -\frac{1}{l} - (-1) \right] = 1$$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{l \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{l \to +\infty} [\ln(x)]_1^{+\infty} = \lim_{l \to +\infty} [\ln(l) - 0] = +\infty$

(c) De façon général: $\alpha > 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

**Démonstration:** [...]

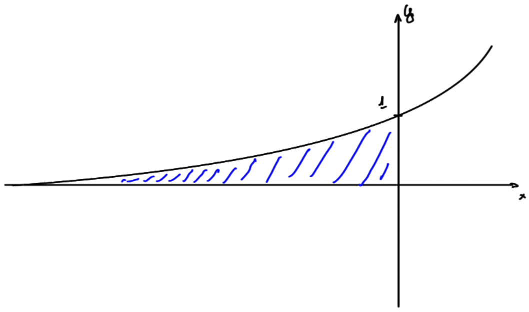
2. Si $f$ est continue sur $]-\infty, b]$, on définit

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{l \to -\infty} \int_l^b f(x)dx$$

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ est dite convergente si et seulement si cette limite existe (est finie).

**Exemple:**

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx$$




$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{l \to -\infty} \int_l^0 e^x dx$$
$$= \lim_{l \to -\infty} [e^x]_l^0 = \lim_{l \to -\infty} \left[ e^0 - e^l \right] = 1$$

3. Si $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. On définit l'intégrale impropres

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si les 2 intégrales convergent.

**Exemple:** $(a > 0)$

$$\int_{-a}^{+a} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-a}^{a} = 0$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \int_{-\infty}^{0} x dx + \int_{0}^{+\infty} x dx$$

diverge car les deux intégrales $\int_{-\infty}^{0} x dx$ et $\int_{0}^{+\infty} x dx$ divergent.

**Remarques:** Soit $f$ continue

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe et est non nulle alors $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ diverge
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ existe et est non nulle alors $\int_{-\infty}^{b} f(x) dx$ diverge

**Exemples:**

- $\int_{1}^{+\infty} \ln(x) dx$ diverge car $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+2}{x+1} dx$ diverge car $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1 \neq 0$

### 3.4.3 Critères de comparaison

**Critères de comparaison**

Soient $f$ et $g$ continues telles que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty[$$

- Si $\int_{a}^{+\infty} g(x) dx$ converge, alors $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ converge.
- Si $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ diverge, alors $\int_{a}^{+\infty} g(x) dx$ diverge.

**Exemples:**

1. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ pour

$$x \in [1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^3}$$

or

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \quad \text{converge} \quad (\alpha = 3 > 1)$$

donc $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}$ converge aussi.

2. $\int_{1}^{+\infty} e^{(-x^2)} dx$ pour

$$x \in [1, +\infty[, e^{(-x^2)} \leq e^{-x}$$

car $\left(x \leq x^2 \implies e^{(-x^2)} \leq e^{-x}\right)$ or

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{l \to -\infty} \int_{1}^{l} e^{-x} dx = \lim_{l \to -\infty} \left[-e^{-x}\right]_{1}^{l} = +\frac{1}{e}$$

Donc $\int_1^{+\infty} e^{(-x^2)} dx$ converge.

3. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

$$= \int_1^2 = \frac{dx}{\sqrt{(x-1)\underbrace{(x+1)}_{\geq 2}}} \leq \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \overset{u=x-1}{=} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{u}}$$

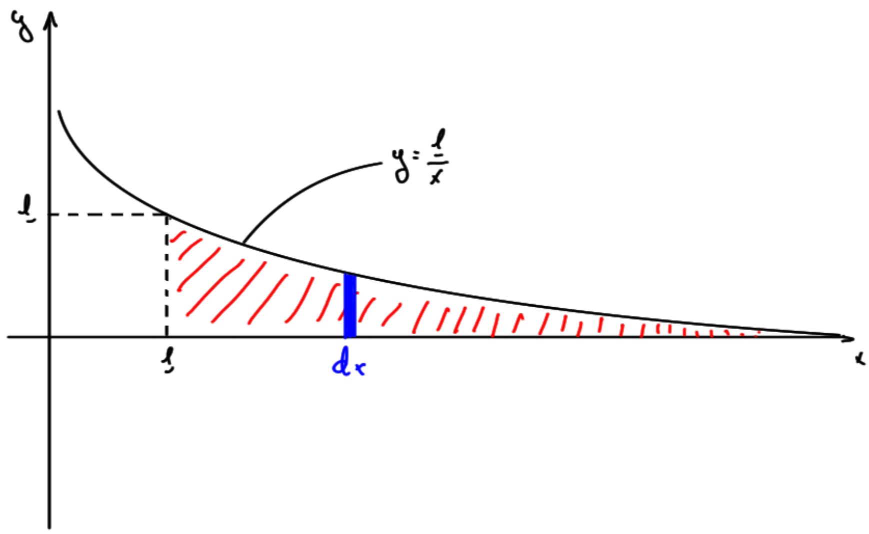
converge car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

### 3.4.4 Exemple étonant:

La trompète de Gabriel
Soit $f(x) = \frac{1}{x}(x \geq 1)$
Soit $D$ le domaine non borné limité par

$$y = f(x), \quad y = 0 \quad \text{et} \quad x = 1$$

En faisant tourner $D$ autour de $O_x$, on obtient un corps de révolution de volume finie. En effet,




$$\int_1^{+\infty} \pi f^2(x) = \pi \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{=1} = \pi = V$$

**L'aire de ce corps est donnée par**

$$\begin{aligned}
\int 2\pi f(x) \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'^2(x)} dx}_{ds} =& 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx \\
=& 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} dx \\
\geq& 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} dx \\
=& 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty
\end{aligned}$$