

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 1B  
PREPA-033(B)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Olivier WORINGER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Chapter 1

## Suite de nombres réels

### 1.1 Définitions

26/02/2019

**Définition** Une suite de nombres réels est une application de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

$a_n$  est le terme générale de la suite et  $n$  est le rang de  $a_n$ .

La suite  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , se note " $(a_n)$ "

#### Exemples

- 1) La suite  $(a_n)$  définie par son terme général  $a_n = \frac{1}{3n-7}$  est la suite  $-\frac{1}{4}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \dots$
- 2)  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  n'est pas une suite (pas de premier élément). Mais  $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$  est une suite dont l'ensemble des valeurs est  $\mathbb{Z}$ .
- 3)  $a, a, a, a, \dots$   $a \in \mathbb{R}$ ,  $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$  est une suite constante.
- 4) Chercher le terme général des suites définie par les premiers termes:

a)  $(a_n) : \overbrace{1, 6}^5, \overbrace{11, 16}^5, \overbrace{21, 26}^5,$

$$a_n = 5n - 4$$

b)  $b_n : \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{10}{9}, \frac{17}{12}, \frac{26}{15}, \frac{37}{18}, \dots$

Difference des numérateurs: 3, 5, 7, 9, 11, ...

Difference des dénominateurs: 3, 3, 3, 3, 3, ...

$$b_n = \frac{n^2+1}{3n}$$

- 5) Suites définie par récurrence

$$c_{n+1} = 2 - \frac{1}{c_n}, \quad c_1 = \frac{3}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad c_3 = 2 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}, \quad c_4 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Conjecture:  $c_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Démonstration par récurrence:

- Verification:  $c_1 = \frac{3}{2} \quad \frac{n+2}{n+1}|_{n=1} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$ .
- Demonstration du pas de récurrence:
  - **Hypothèse:**  $c_n = \frac{n+2}{n+1}$  pour un  $n \in \mathbb{N}^*$
  - **Conclusion:**  $c_{n+1} = \frac{n+3}{n+2}$
  - **Preuve:**

$$c_{n+1} = 2 - \frac{1}{c_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = 2 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{2(n+1)-(n+1)}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}$$

□

## Définitions

1.  $(a_n)$  est majoré si

$$\exists M \in \mathbb{R} \ a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(M : majorant)

2.  $(a_n)$  est minoré si

$$\exists N \in \mathbb{R} \ \text{t.q.} \ a_n \geq N, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(N : minorant)

3.  $(a_n)$  est bornée si elle admet un majorant **et** un minorant
4.  $(a_n)$  est croissante si  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$   
(Strictement croissante si  $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ )
5.  $(a_n)$  est décroissante si  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$   
(Strictement décroissante si  $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ )
6.  $(a_n)$  est monotone si elle est croissant **ou** (ou exclusif) décroissant  
(Strictement monotone si elle est strictement croissant ou strictement décroissant)

## Exemples

1.  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $(a_n)$  est strictement décroissante et borné:

$$0 < a_n \leq 1$$

$$2. \ b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0}$$

Donc  $(b_n)$  est strictement croissante.

## 1.2 Limite d'une suite

**Définition** On dit que la suite  $(a_n)$  converge vers  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) si  $\forall \epsilon > 0$ , il existe un seuil

$$N \in \mathbb{N}^* (N = N(\epsilon)) \ \text{t.q.} \ n > N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

$$|a_n - a| < \epsilon \iff -\epsilon < a_n - a < \epsilon \iff a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \iff a_n \in ]a - \epsilon, a + \epsilon[$$

Cet intervalle est appelé  $\epsilon$ -voisinage de  $a$ . Si  $(a_n)$  admet  $(a_n)$  est convergente sinon elle divergente.

Définition plus intuitive de la limite de suite:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  si et seulement si  $\epsilon$ -voisinage de  $a$  contient presque tout les termes de la suite (tous les termes sauf nombre fini)

### Exemples

1.  $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad [N \in \mathbb{N}^* \text{ quelconque } \square]$$

2. Montrons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Soit  $\epsilon > 0$ , montrons que  $\exists N \in \mathbb{N}^* (N = N(\epsilon))$  t.q.  $n \geq N \implies |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$

$$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \iff |\frac{1}{n}| < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

3. La suite  $(b_n)$  définie par

$$b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

diverge car une infinité de termes sont dans le voisinage de  $(+1)$  ou de  $(-1)$  selon que  $n$  est pair ou impair

### Theorèmes importants (sans démonstration)

1. Une suite qui converge admet une seule limite

2. Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse.

Contre-exemple:  $a_n = (-1)^n$

3. Les règles de calcul:

Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergentes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(d) si  $b_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ , et si  $b \neq 0$ , alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

01/03/2019

4. **Théorème de comparaison:** Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergentes,  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

$$\text{Si } \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0 \\ \text{alors } a \leq b$$

### 5. Théorème des deux gendarmes:

Soient 3 suites  $(g_n)$ ,  $(d_n)$  et  $(a_n)$  telles que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ avec } g_n \leq a_n \leq d_n, \quad \forall n \geq n_0$$

Alors si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = l$$

on a que  $(a_n)$  est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

### 6. Corollaire des 2 gendarmes soit $(a_n)$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

$$\underbrace{-|a_n|}_{\rightarrow 0} \leq a_n \leq \underbrace{|a_n|}_{\rightarrow 0}$$

□

### 7. Toute suite monotone est bornée et convergente.

Plus précisément:

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge

### 3 exemples importants

1. Soient  $q \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ,  $(a_n)$  la suite définie par  $a_n = q^n$

$$a_n = q^n : \begin{cases} \text{diverge si } |q| > 1 \\ \text{converge vers 0 si } |q| < 1 \end{cases}$$

Montrons que si  $|q| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

$$|a_n| = |q^n| = |q|^n \text{ or } |q| < 1$$

donc

$$\exists p > 0 \text{ t.q. } q = \frac{1}{1+p}$$

Donc

$$|q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \implies \frac{1}{|q|^n} = (1+p)^n$$

$$= 1 + n \cdot p + \dots + p^n \geq n \cdot p, \quad \text{donc } |q|^n \leq \frac{1}{n \cdot p}$$

$$|a_n| = |q|^n \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\underbrace{0}_{\rightarrow 0} \leq |a_n| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}}_{\rightarrow 0}$$

D'après les 2 gendarmes:  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

D'après son corollaire:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

□

## 2. La série géométrique

Soit  $q \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  et  $a_n$  définie par

$$a_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

Définition par la récurrence

$$a_{n+1} = a_n + q^n, \quad a_1 = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On réécrit le terme  $a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} \\ q \cdot a_n &= q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \\ a_n - q \cdot a_n &= 1 - q^n \\ a_n(1 - q) &= 1 - q^n \implies a_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

$(a_n)$  converge si et seulement si  $|q| < 1$  et dans ce cas  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1-q}$

Exemples:

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ a_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \text{et } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ b_n &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Le nombre  $e$ 

Soit

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$e_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3 \cdot \dots \cdot k}_{>2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Donc

$$e_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\leq 1}$$

$$e_n \leq 3$$

$$2 \leq e_n \leq 3, \quad \forall n \geq 2$$

Montrons encore que  $(e_n)$  est strictement croissante:

$$e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!}, \quad \text{donc } e_{n+1} > e_n$$

$(e_n)$  croissante et majorée: elle converge.

On note  $e$  sa limite.

$$e_n = 2.71828$$

$$e_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Autre caractéristique du nombre  $e$ :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

### 1.3 Limite infinie

**Définition** La suite  $(a_n)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  si:

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}^* (N = N(A)) \text{ t.q. } n \geq N \implies f(x) > A$$

On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

On dit que  $(a_n)$  diverge vers  $+\infty$

De même

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \iff \exists N \in \mathbb{N}^* (N = N(B)) \text{ t.q. } n \geq N \implies a_n > B$$

**Exemple** Montrons que  $(a_n) = (n^2)$  diverge vers  $+\infty$ .

Soit  $A > 0$  donné, montrons qu'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  t.q.  $a_n > A$  si  $n \geq N$ .

$$a_n > A \iff n^2 > A \iff n \in ]-\infty; \sqrt{A}[ \cup ]\sqrt{A}; +\infty[$$

Tout  $N > \sqrt{A}$  convient car  $n \leq N$  (avec  $N \geq \sqrt{A}$ )  $\implies n^2 > A$

### Théorème importants

1. Si  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$  et si  $b_n$  converge ou  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ , alors  $(a_n + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
2. Si  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ 
  - Si  $\lambda > 0$ ,  $(\lambda a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
  - Si  $\lambda < 0$ ,  $(\lambda a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$
3. Si  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$  et  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b > 0$  ou si  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ , alors  $(a_n \cdot b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
4. Si  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ , alors  $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

### 5. Théorème du gendarme

Soit  $(a_n), (b_n)$  t.q.  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$  avec  $a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0$

si  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

(de manière analogue pour  $a_n \rightarrow -\infty$ )

**Exemples** Montrons que si  $q > 1$ , alors  $(q^n)$  diverge vers  $+\infty$

$$\begin{aligned} q > 1 &\implies \exists p > 0 \text{ t.q. } q = 1 + p \\ q^n &= (1 + p)^n = 1 + n \cdot p + \dots + p^n > n \cdot p \\ \text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} np &= p \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n = p \cdot +\infty = +\infty (p > 0) \end{aligned}$$

Donc  $(q^n)$  diverge vers  $+\infty$

### Cas d'indétermination

- Si  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$  et  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$

On ne peut rien dire à priori de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$



- Si  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$  et  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

On ne peut rien dire à priori de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$$