EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B

PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Calcul différentiel

3.1 Dérivée d'une fonction

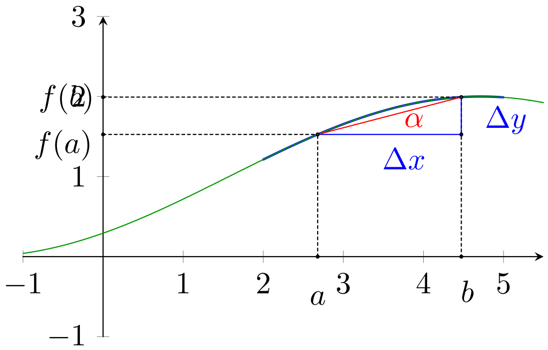
3.1.1 Définitions

Soit f définie sur un voisinage de x_0, posons $y = f(x)$. Une information **locale** sur le comportement de f sur un voisinage de x_0 est donné par le quotien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

appelé le rapport de Newton de f en x_0.

- Δx est l'accroissement de la variable indépendante x.
- Δy est l'accroissement correspondant liée à Δx.



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(x)$ est la pente sécente passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$

En gardant x_0 fixe, on fait tendre $\Delta x \to 0$
Alors

$$x_0 + \Delta x \to x_0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$$

si f est continue en x_0, alors

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

est une FI de type "$\frac{0}{0}$"
Trois cas peuvent se présenter

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'existe pas

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$

Exemple:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}, \quad x_0 = 0$$

3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \quad (a \in \mathbb{R})$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = 4$$

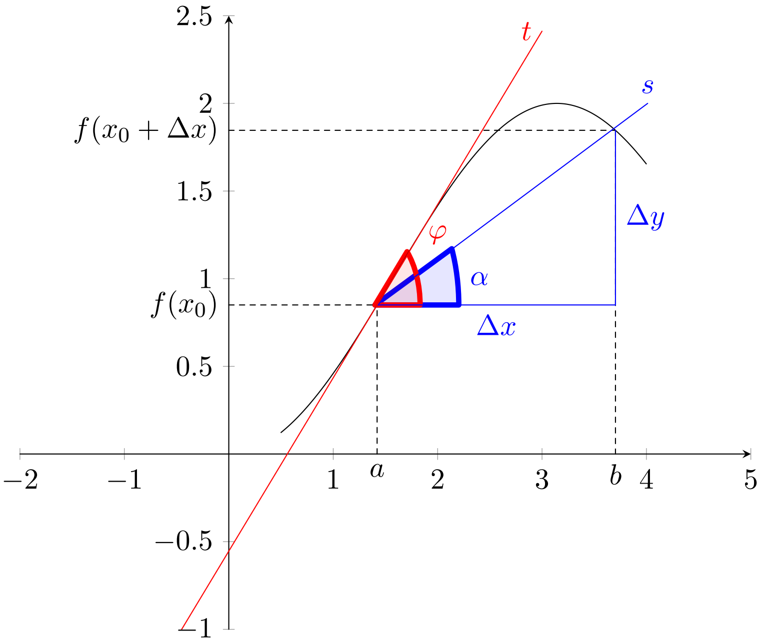
Définition: Soit f définie sur un voisinage de x_0. On dit que f est dérivable en x_0. Si

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existe et on note $f'(x_0)$ cette limite.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

est appelé **nombre dérivé** de f en x_0



La sécant s tends vers la "droite-limite" t.

$$\alpha \xrightarrow[\Delta \to 0]{} \varphi$$

Cette "droite-limite" est appelée la tangente à

$$y = f(x_0) \text{ en } x_0$$

La pente m de la tangente vaut

$$m = \tan(\varphi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Donc l'équivalente de t s'écrit

Tangente de $y = f(x)$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Théorème: Soit f définie sur un voisinage de x_0. Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0$$

Démonstration f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$
$$\implies \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)}_{:= r(\Delta x)} = 0$$

Donc

$$\lim_{\Delta x \to 0} r(\Delta x) = 0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$

Et lorsque $\Delta x \to 0$, on a

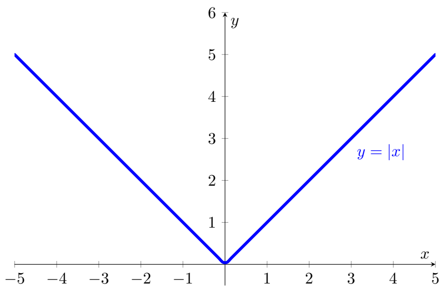
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot f'(x_0)}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \overbrace{r(\Delta x)}^{\to 0}}_{\to 0}$$

f est donc continue en x_0

□

⚠ La réciproque est fausse ⚠

Contre-exemple



$$f(x) = |x|, \quad x_0 = 0, \quad \lim_{x \to 0} |x| = 0, \quad |x|\Big|_{x=0} = 0$$

donc $|x|$ est continue en $x = 0$

Mais

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

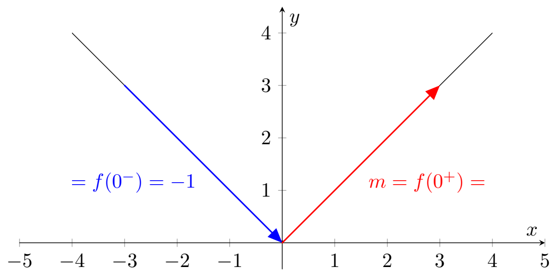
n'existe pas donc $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x \to 0$.

Définitions:

- On dit que f est dérivable à gauche en x_0, si
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe, on note ce nombre $f'(x_0^-)$ et il représente la pente de la demi-tangente à gauche en x_0.

- de même f est dérivable à droite en x_0, si
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe, $f'(x_0^+)$ et il représente la pente de la demi-tangente à droite en x_0.

Exemple:



$$f(0^-) = -1$$
$$f(0^+) = +1$$

Définitions: Si $I \subset \mathbb{D}_f$

- Si f est dérivable en tout $x_0 \in I$, on définit:
$$f' : I \to \mathbb{R},$$
$$x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
appelé la fonction dérivée de f sur I.

- Si f est dérivable sur I, et si f' est continue sur I, alors on dit que f est continument dérivable sur I et on note $f \in \mathbb{C}^1$

3.1.2 Règles de dérivation

(C.f. exercice facultatif série 8)

Soient f et g dérivable sur $I \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. Si $g(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$
$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
En particulier
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Théorème: Dérivée de la composée
Soit f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

Dérivée de la composée

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Démonstration

- Rappel:

$$r(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$
$$\implies f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$

avec

$$r(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

- Dérivée $g \circ f(x)$

$$g \circ f(x+h) = g(f(x+h))$$
$$= g(f(x) + \underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta})$$
$$= g(f(x)) + g'(f(x)) \cdot (\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta}) + r(\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta}) \cdot (\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta})$$

Donc

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + r(f(x+h) - f(x)) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Et

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x) + r(\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{\to 0} \cdot f'(x_0))$$

D'où

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

3.1.3 Dérivées de quelque fonctions

1. $f(x) = c$,
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$
2. $f(x) = x$,
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$
3. $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ à démontrer par récurrence
   - Vérification pour $n = 1$:
$$(x)' = 1 \text{ et } n \cdot x^{n-1}\Big|_{n=1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

- Démonstration du pas de récurrence:
  Hypothèse: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ pour un $x \in \mathbb{N}^*$ donné
  Conclusion: $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$
  Preuve:

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (x^n)' \\ &= x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n\end{aligned}$$

4. $f(x) = x^{-m}, \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad x \neq 0$

$$\begin{aligned}f'(x) = \left(\frac{1}{x^m}\right)' &= -\frac{m \cdot x^{m-1}}{(x^m)^2} \\ &= -m \cdot x^{m-1-2m} = -m \cdot x^{-m-1}\end{aligned}$$

Donc $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

5. $f(x) = x^{\frac{p}{q}}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}^*, \quad x > 0$

$$y = x^{\frac{p}{q}} \iff y^q = x^p$$

En dérivant les deux termes par rapport à x, on a

$$q \cdot y^{q-1} \cdot y' = p \cdot x^{p-1}$$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot y}{y^{q-1} \cdot y} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$

Donc

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad x > 0$$

En particulier

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Exemples:

1. Soit f une fonction

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [\,-1; 1\,]$$

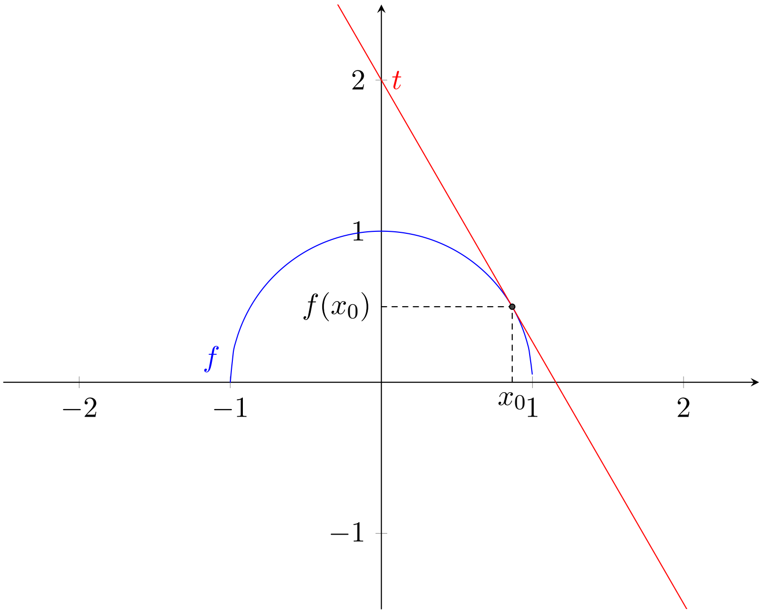
L'équation de t tangente à $y = f(x)$ en $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- $f(x_0) = \frac{1}{2}$
- $f'(x) = \frac{(-x^2)'}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1$

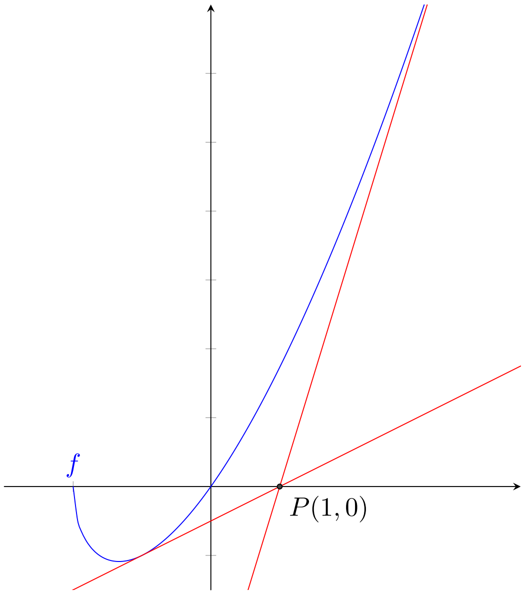
$$f'(x_0) = f'(x)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$t : y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



2. $f(x) = x \cdot \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$

   Tangente au graphe de f issues du point $P(1,0)$



$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$P \in t \implies y_p - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_p - x_p)$$
$$\implies 0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0)$$

avec $f(x_0) = x_0 \cdot \sqrt{2 + x_0}$,

$$f'(x) = \sqrt{2+x} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2+x}} =$$
$$= \frac{2 \cdot (2+x) + x}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \frac{3x+4}{2 \cdot \sqrt{2+x}}, \quad x \geq -2$$

Donc

$$-x_0 \cdot \sqrt{2+x_0} = \frac{3x_0+4}{2 \cdot \sqrt{2+x_0}} \cdot (1 - x_0)$$
$$\iff -2x_0(2+x_0) = 3x_0 + 4 - 3x_0^2 - 4x_0$$
$$\iff x_0^2 - 3x_0 - 4 - 0 \iff (x_0 - 4) \cdot (x_0 + 1) = 0$$
$$x_0 = -1 : \qquad t : y + 1 = \frac{1}{2}(x+1)$$
$$x_0 = 4 : \qquad t : 8x - \sqrt{6}y - 8 = 0$$

3.1.4 Dérivée d'ordre supérieure

Soit f dérivable sur I, si f' est dérivable sur I, on peut dériver f' sur I et on note

$$(f')' = f''$$

et ainsi de suite

$$(f'')' = f'''$$

etc.

Définition par récurrence:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad n \in \mathbb{N}^*$$

avec $f^{(0)}(n) = f(x)$

Exemples:

1. $f(x) = x^p, \quad p \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p \cdot (p-1) \cdot .... \cdot (p-n+1) & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

2. $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f^{(3)}(x) = \sin(x), \quad f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

Conjecture:

$$f^{(x)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Définition par récurrence:

- Vérification:
  - $n = 0$: $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=0} = f^{(0)}(x)$
  - $n = 1$: $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=1} = -sin(x) = f'(x)$
- Démonstration du pas de récurrence:
  - Hypothèse:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pour un } n \in \mathbb{N} \text{ donné}$$

  - Conclusion:

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

  -

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = [f^n(x)]' = \left[\cos\left(c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right]' &= \\ &= \cos'\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)' \\ &= -\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = \cos\left(x + \left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

□

Remarque: Si f est n-fois dérivable sur I et si $f^{(n)}(x)$ est continue sur I, alors on note

$$f \in \mathbb{C}_I^n$$

Exemple:

$$\cos(x) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^\infty$$

3.2 Différentielles et approximations linéaires

3.2.1 Différentielles

Définitions:

- La différentielle de la variable indépendante x, notée dx est l'accroissement infinitésimale de cette variable

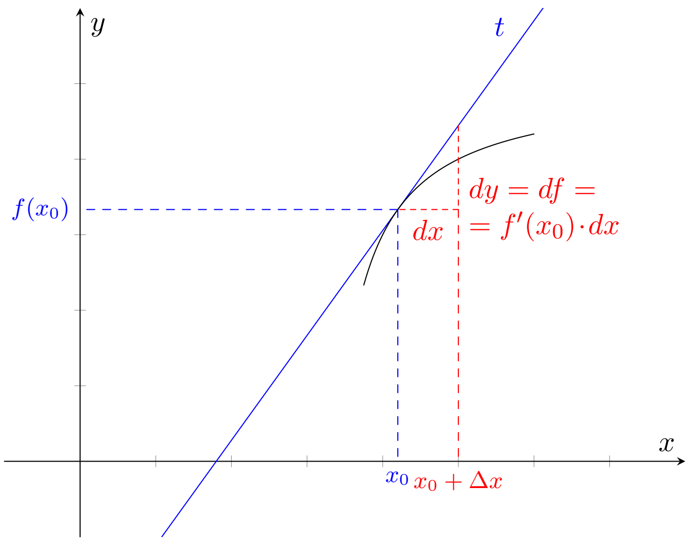
$$dx = \Delta x, \quad (\text{ lorsque } \Delta x \to 0)$$

- La différentielle de la variable dépendante y (ou de la fonction f), notée

$$dy \text{ ou } df$$

en x_0 est la fonction linéaire de dx définie par

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$



La différentielle dy en x_0 est l'accroissement des y correspondant à dx, mesuré sur la tangente au graphe de f en x_0.

La définition des différentielles induit la notation de Leibniz

$$dy = f'(x_0) \cdot dx \implies \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

3.2.2 Approximation linéaire

Rappel Soit f dérivable en x_0 On a

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\cdot f'(x_0) + h\cdot r(h)$$

avec

$$r(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} r(h) = 0$$

Donc si $h \to 0$,

$$\underbrace{h}_{\to 0}\cdot\underbrace{r(h)}_{\to 0}$$

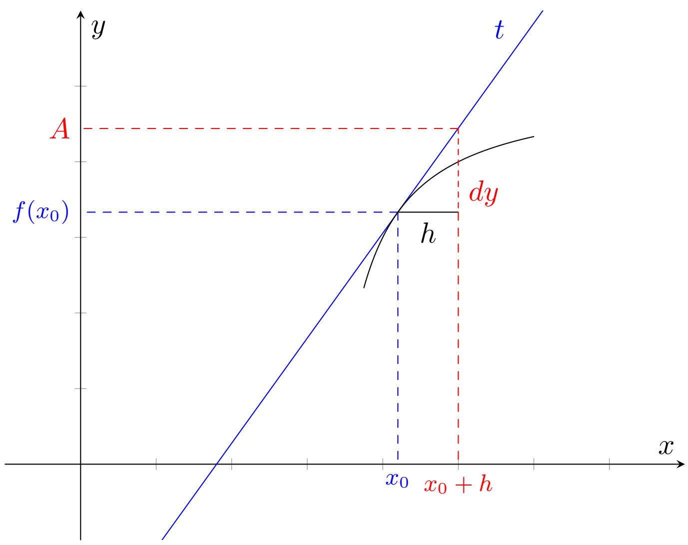
est négligeable et

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + h\cdot f'(x_0)$$

La quantité

$$A = f(x_0) + h\cdot f'(x_0)$$

est appelé l'**approxiamation linéaire** de f en x_0



A est l'ordonnée correspondant à x_0+h mesurée sur la tangente en x_0

Exemple: Évaluation de $\sqrt[3]{8.012}$ On détermine l'AL de $\sqrt[3]{8.012}$ en $x_0 = 8$

$$h = 0.012, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

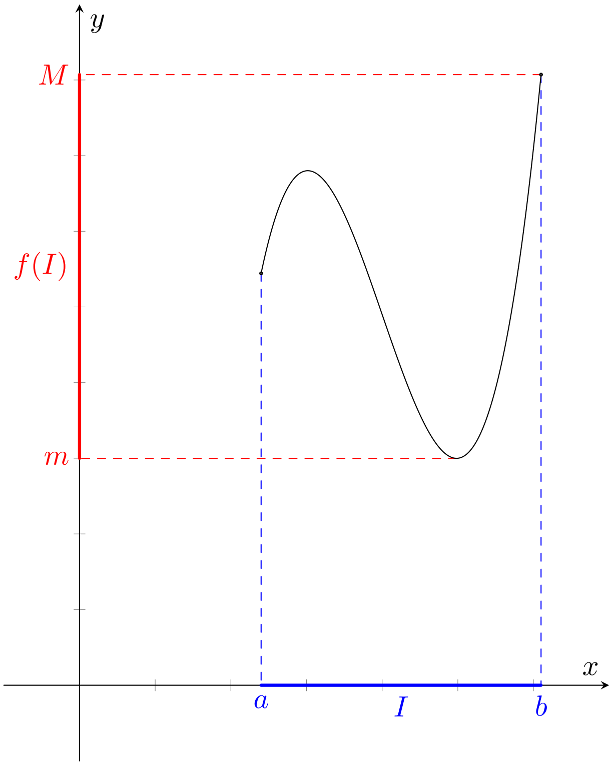
$$\begin{aligned} A =& f(x_0) + h\cdot f'(x_0) \\ & f(x_0) = f(8) = 2 \\ & f'(x_0) = f'(8) = \frac{1}{3\cdot\sqrt{x^2}}\Big|_{x=8} = \frac{1}{12} \\ A =& 2 + 0.0012\cdot\frac{1}{12} = 2.001 \end{aligned}$$

3.3 Théorème des accroissement finis

3.3.1 Préliminaire (sans démonstration)

Soit f continue sur $[\,a; b\,] = I$

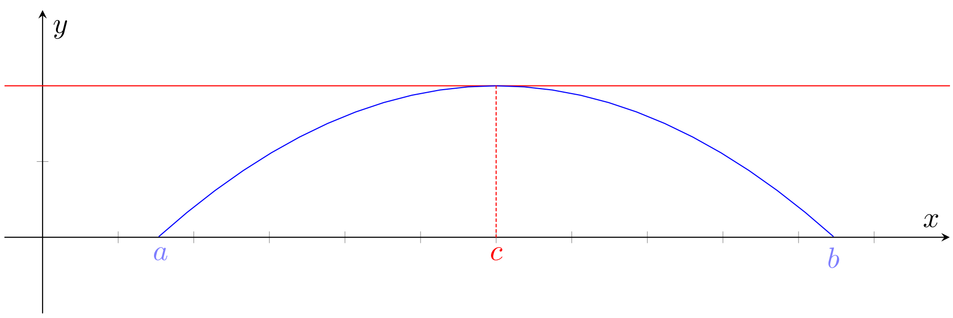
1. L'image de I par f est un intervalle fermé
2. f atteint sur $I = [\,a; b\,]$ son minimum et son maximum ($f(I) = [m, M]$)



3.3.2 Théorème de Rolle

Soit f continue sur $[\,a; b\,]$ et dérivable sur $]a; b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors

$$\exists c \in]a; b[\text{ t.q. } f'(c) = 0$$



Démonstration:

- Si $f(x) \equiv 0$ sur $[\,a; b\,]$, alors le théorème est vérifié

- Si $f(x) \not\equiv 0$, $f(x)$ prend des valeurs positifs ou négatives, on suppose que a et b sont zéros consécutif de f et que
$$f(x) > 0, \quad \forall x \in]a; b[$$
f est continue sur $[\, a; b\,]$, donc f atteint son max M. Soit x_0 l'abscisse de M. Alors $\forall h$ suffisamment petit pour que
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot \cdot r(h)$$
Or
$$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$
car
$$f(x_0) = M$$
est un max, donc
$$\begin{aligned} & f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq f(x_0) \\ \iff & h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq 0 \\ \iff & h \cdot [\, f'(x_0) + r(h)\,] \leq 0 \end{aligned}$$

- Si $h < 0$, on a
$$f'(x_0) + r(h) \geq \xrightarrow[h \to 0^-]{} f'(x_0) \geq 0$$

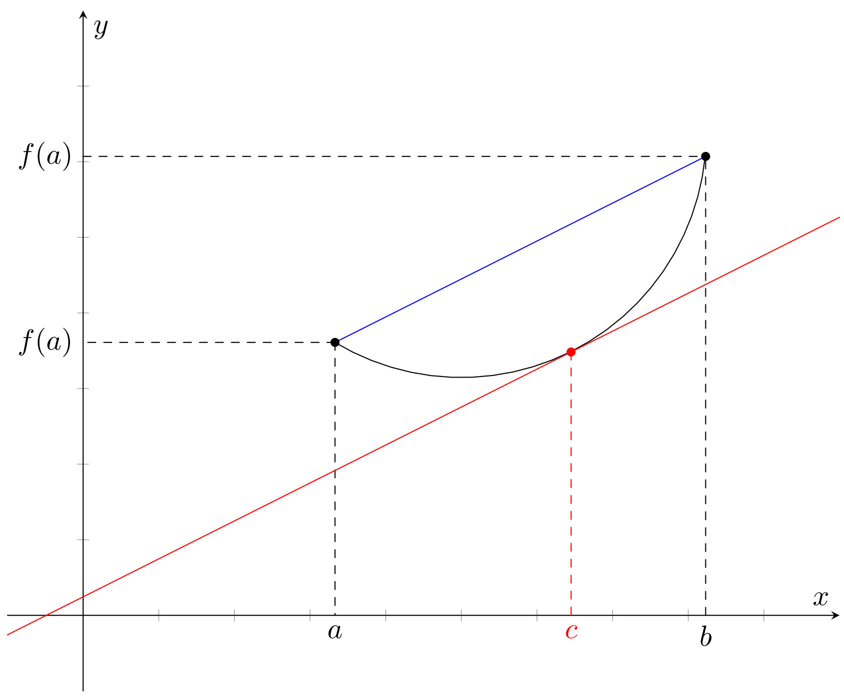
- Si $h > 0$, on a
$$f'(x_0) + r(h) \leq \xrightarrow[h \to 0^+]{} f'(x_0) \leq 0$$

D'où $f'(x_0) = 0, x_0 \coloneqq c$

$\square$

3.3.3 Théorème des accroissements finis

Soit f continue sur $[\, a; b\,]$ et dérivable sur $]a; b[$, alors
$$\exists c \in]a; b[\text{ t.q. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Démonstration: Soit

$$y(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{ordonné sur la courbe}} - \left[\underbrace{f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)}_{\text{ordonnée sur la sécante}}\right]$$

- g est continue sur $[\,a;b\,]$ car f l'est
- g est dérivable sur $]a;b[$ car f l'est
- De plus $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$

Donc d'après Rolle,

$$\exists c \in]a;b[\text{ t.q. } g'(c) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Autre expression de TAF.
Soit $x_0 = a$ et $x_0 + h = b$, $\quad (h > 0)$

$$\exists\, \theta\ ]0;1[\text{ t.q. } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0+\theta\cdot h)$$

$(x_0 + \theta\cdot h \in [\,x_0; x_0+h\,])$ (énoncé analogue pour $h < 0$)

Exemple: f définie sur $[\,1;3\,]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cdot(x-2)^2+4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- f continue en $x = 2$, car

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 = 4$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-4)^2 = 4$$

  et $f(2) = 4$

- Recherche de

$$x_0 \in]1;3[\text{ t.q. } f(x_0) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{1-\frac{7}{2}}{2} = -\frac{5}{4}$$

  – Sur $]1;2[$

$$f'(x_0) = -\frac{5}{4} \iff -(x_0-2) = -\frac{5}{4}$$
$$\iff x_0 = -\frac{1}{4} \notin]0;2[$$

  – Sur $]2;3[$

$$f'(x_0) = -\frac{5}{4} \iff 2\cdot(x_0-4) = -\frac{5}{4}$$
$$\iff x_0 = -\frac{5}{8} + 4 = \frac{27}{8} > 3$$

Donc x_0 les hypothèses du TAF ne sont pas validés, car f est non-dérivable sur en $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = -4$$

3.4 Règle de Bernoulli, de l'Hospital

3.4.1 Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Soient f et g deux fonctions dérivables sur une voisinage de x_0 telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ avec $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ sur un voisinage pointé de x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est dont une FI de type "$\frac{0}{0}$"
Alors si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe ou est infinie, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Démonstration: Soit $D(x) = f(x_0 + h) \cdot g(x_0) - g(x_0 + h) \cdot f(x)$

$$D(x_0) = 0 \text{ et } D(x_0 + h) = 0$$

or D est continue et dérivable sur un voisinage de x_0
Donc d'après Rolle,

$$\exists \theta \in]0; 1[\text{ t.q. } D'(x_0 + \theta \cdot h)$$

$$\begin{aligned} D'(x) = & f(x_0 + h) \cdot g'(x) - g(x_0 + h) \cdot f'(x) \\ D'(x_0 + h) = 0 \implies & f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + \theta h) = g(x_0 + h) \cdot f'(x_0 + \theta h) \\ \iff & \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)} \end{aligned}$$

Et lorsque $h \to 0$, on a

$$\begin{aligned} & \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)} \\ \iff & \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

□

Remarque: Cette règle reste valable lorsque $x \to \pm\infty$
Soient f et g deux fonctions dérivables sur une voisinage de l'infini, telles que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ Alors si $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.4.2 Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Soient f et g deux fonctions dérivable sur un voisinage de x_0 (fini ou infini) et telles que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

Alors si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie, on a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Illustration de la démonstration

$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

est une FI de "$\frac{0}{0}$"

$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{f^2(x)}{g^2(x)}}_{L^2} = L^2 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

D'où

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{L} \text{ et } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

□

Exemples:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)}$: FI "$\frac{0}{0}$"

$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$: FI "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \text{ FI ''}\frac{\infty}{\infty}\text{''}$$
$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$: FI "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

4. $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$: FI "$0 \cdot \infty$"

$$= \lim_{x\to 0^+} = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} : \text{ FI ''}\frac{\infty}{\infty}\text{''}$$
$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

5. **Rappel:**

$$u(x)^{v(x)} \stackrel{\text{def}}{=} e^{v(x)\cdot\ln(u(x))}, \quad \forall u(x) > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x^x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)}$$

car exp et continuité et

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = 0 \text{ (cf. 4.) donc } \lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

□

3.5 Variation locale d'une fonction

3.5.1 Croissance, décroissance

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I

1. Si
$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in I$$
alors f strictement croissante sur I.
2. Si
$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in I$$
alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration: Pour tout $a, b \in I, a < b$ le TAF nous donne l'existence de

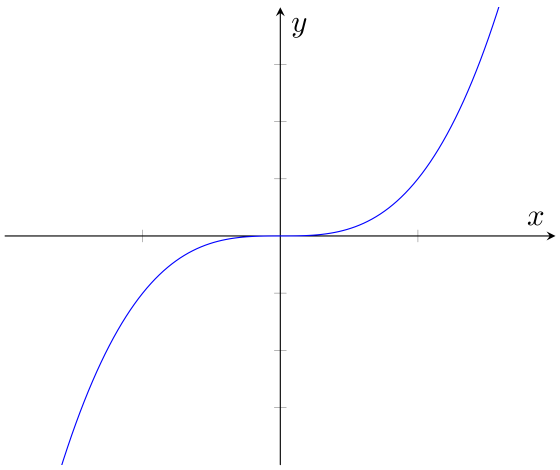
$$c \in]a;b[, \text{ t.q. } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad f(b)-f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$$

Or $b - a > 0$ donc

1. Si $f'(x) > 0$, alors
$$f'(c) > 0 \implies f(b) - f(a) > 0, \forall a < b \in I$$
donc f est strictement croissante sur I.
2. Si $f'(x) < 0$, alors
$$f'(c) < 0 \implies f(b) - f(a) < 0, \forall a < b \in I$$
donc f est strictement décroissante sur I.

⚠ La réciproque est **fausse**

Contre-exemple: $f(x) = x^3$



f est strictement croissante

3.5.2 Extrema

Définitions: Soient

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$$

et

$$c \in \mathbb{D}_f$$

- $f(c)$ est un maximum local de f si

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in]c-\delta; c+\delta[$$

- $f(c)$ est un maximum global de f si

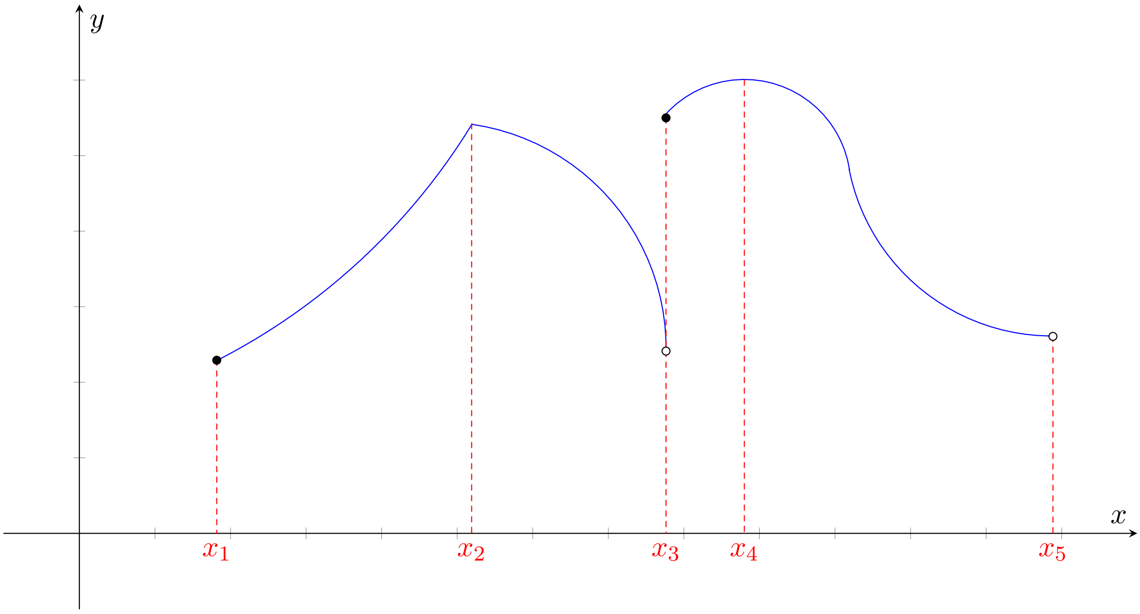
$$f(x) \leq f(c), \forall x \in \mathbb{D}_f$$

- $f(c)$ est un minimum local de f si

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } f(x) \geq f(c), \quad \forall x \in]c-\delta; c+\delta[$$

- $f(c)$ est un maximum global de f si

$$f(x) \geq f(c), \forall x \in \mathbb{D}_f$$



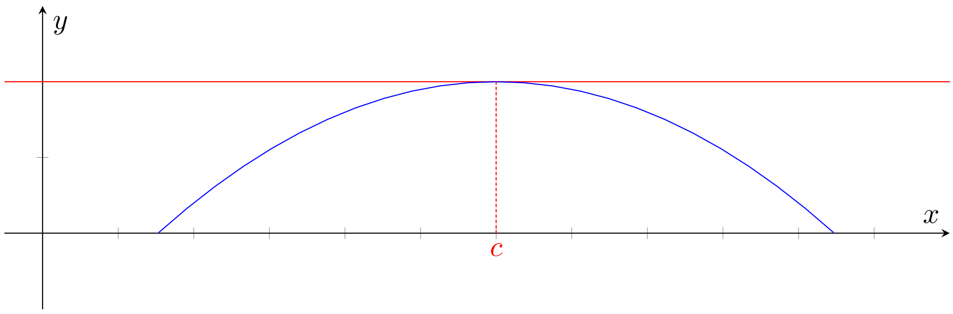
$f(x_1)$ est l'unique minimum local de f

$f(x_2), f(x_4)$ sont des maximums locaux

$f(x_3), \underbrace{f(x_5)}_{\text{n'existe pas}}$ ne sont des extremas locaux de f.

Théorème: Soit $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0. Alors si $f(x_0)$ est un extrema de f, on a $f'(x_0) = 0$

Démonstration: C.f. démonstration du théorème de Rolle



Remarque: La réciproque est **fausse**

Contre-exemple: $f(x) = x^3, x_0 = 0$

$$f'(0) = 3 \cdot x^2\Big|_{x=0} = 0$$

mais

$$f(0) = 0$$

n'est pas un extremum de f.

Théorème: Soit f continue sur I ouvert et dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$ Alors $f'(x_0)$ est une extremum de f si $f'(x)$ change de signe en x_0

Démonstration: Soit f continue sur $]x_0-\delta; x_0+\delta[(\delta>0)$ et dérivable sur

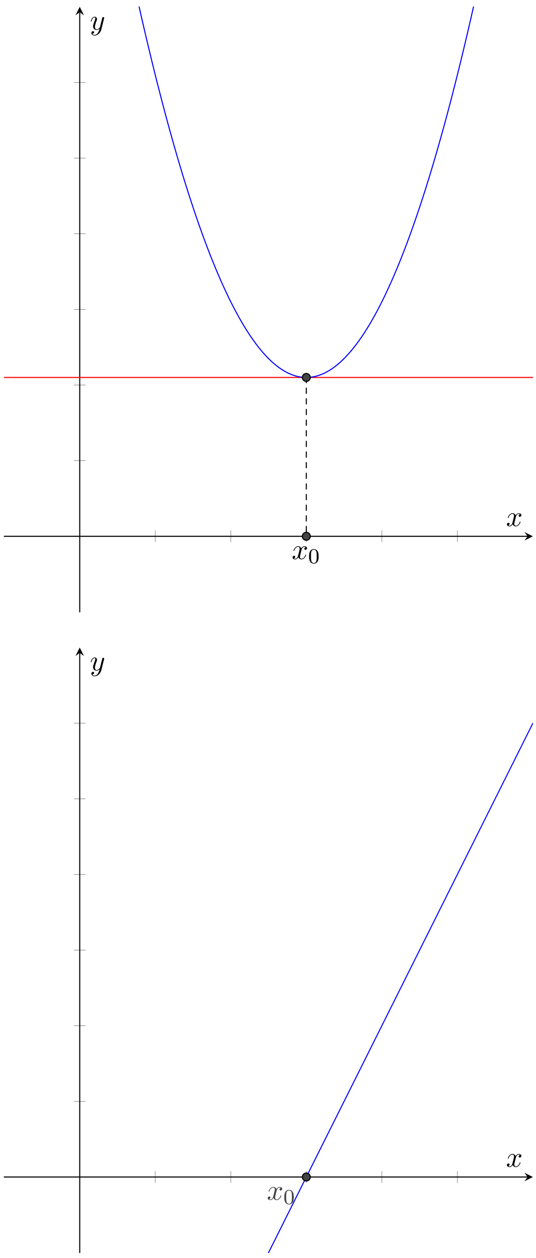
$$]x_0-\delta; x_0[\,\cup\,]x_0; x_0+\delta[$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(c)\cdot(x-x_0)$$

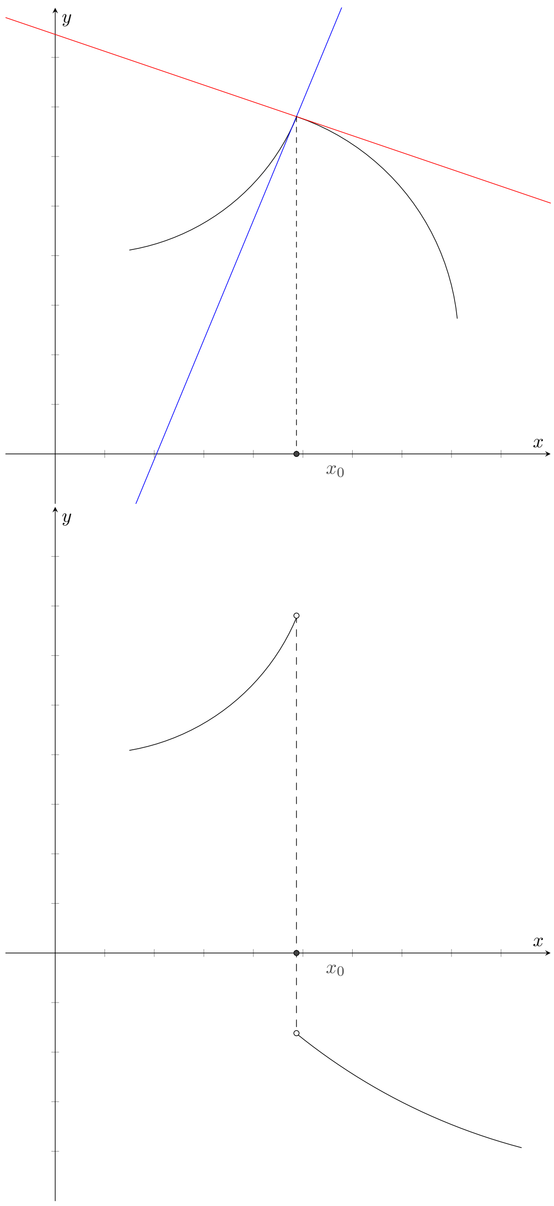
avec c entre x et x_0 (TAF)
f' change de signe en x_0 donc:

- $$\left.\begin{array}{l} \text{si } x-x_0<0, \text{ on a } f'(c)>0 \implies f(x)<f(x_0) \\ \text{si } x-x_0>0, \text{ on a } f'(c)<0 \implies f(x)<f(x_0) \end{array}\right\} f(x_0) \text{ est max}$$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{si } x-x_0<0, \text{ on a } f'(c)<0 \implies f(x)>f(x_0) \\ \text{si } x-x_0>0, \text{ on a } f'(c)>0 \implies f(x)>f(x_0) \end{array}\right\} f(x_0) \text{ est min}$$



extremum $f'(x_0)=0$



extremum $f'(x_0)$ n'existe pas

3.5.3 Remarques:

1. Attention!
$$\begin{cases} f(x_0) \text{ extremum de } f \not\Longrightarrow f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \not\Longrightarrow f(x_0) \text{ extremum de } f \end{cases}$$

2. Les abscisses x_0 des extrema de f sont à calculer dans les situation suivantes

   (a) Les bornes éventuelles de $\mathbb{D}_{\text{déf}}$ du domaine de continuité

   (b) $x_0 \in \mathbb{D}_f \backslash \mathbb{D}_{f'}$ (f définie en x_0, mais non-dérivable en x_0)

   (c) $f'(x_0) = 0$

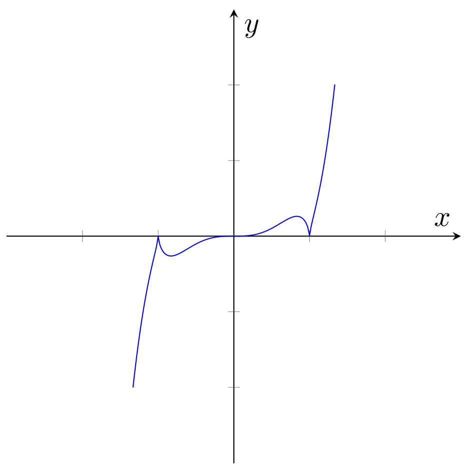
Exemple:
$$f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}, \quad f \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) =& 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (x^3-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (3x) \\ =& \frac{3x^2 \cdot (x^3-1) + 2x^5}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{5x^5 - 3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} \\ =& \frac{x^2 \cdot (5x^3-3)}{\sqrt[3]{x^3-1}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R} \backslash \{1\} \end{aligned}$$

Signe de $f'(x)$

x		0		$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	$-\infty \Vert +\infty$	$+$

- $(0,0)$ est un point à tangente horizontale mais pas un extremum
- En $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$, point à tangente horizontale et maximum
- En $x_0 = 1$, $\quad f'(x_0)$ n'existe pas mais $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$, c'est un point a tangente verticale et un maximum (point de rebroussement)
  Esquisse:



3. Autres points remarquables

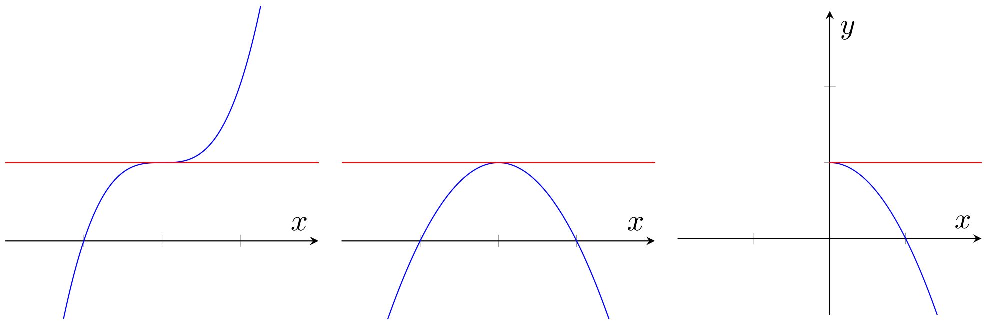
(a) Points à tangente horizontale. Soit

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$$

dérivable (éventuellement gauche, droite) en x_0 avec

$$f'(x_0) = 0(\text{ éventuellement } f'(x_0^-) = 0 \text{ et } f(x_0^+) = 0$$

Alors le graphe de f admet en x_0 une tangente (demi-tagente) horizonatle:



(b) Points à tangente verticale Soit f continue sur I et dérivable sur $I\backslash\{x_0\}$. Si

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = \infty$$

alors le graphe de f admet en x_0 une tangente (demi-tangente) verticale.

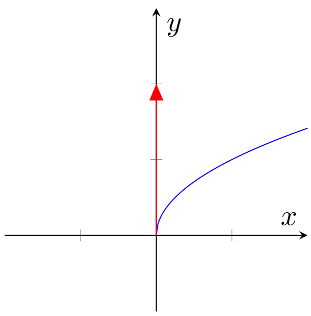
Exemples:

i. $f(x) = \sqrt{x}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_+, \quad x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}_+^*$$

f non dérivable en $x_0 = 0$ mais

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$



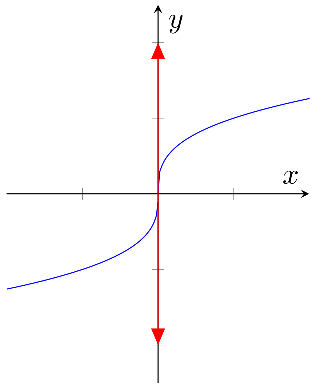
demi-tangente verticale en $x_0 = 0$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

f non dérivable en $x_0 = 0$ mais

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$$



x	0
$f'(x)$	$+ \quad +\infty \| +\infty \quad +$

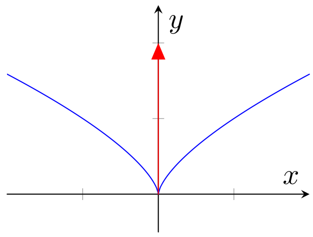
tangente verticale en $x_0 = 0$

iii. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}^*$$

f non dérivable en $x_0 = 0$, mais

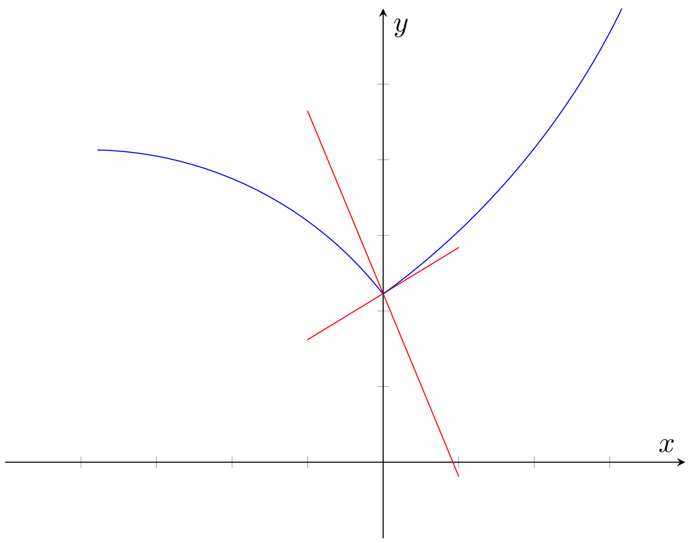
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$



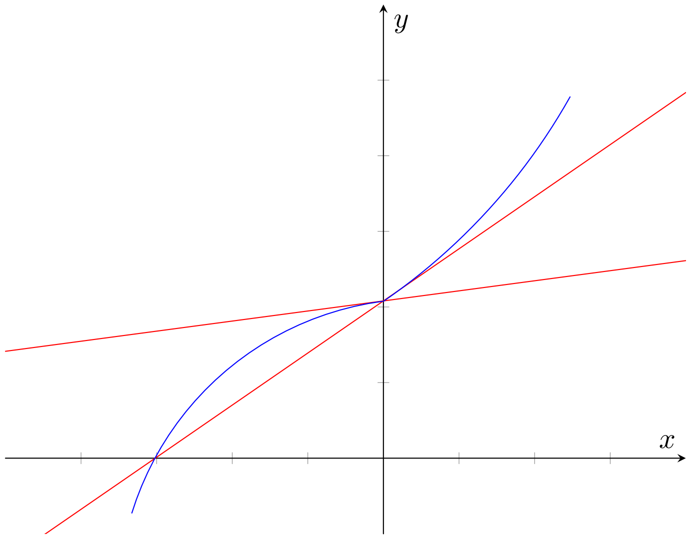
x	0
$f'(x)$	$- \quad -\infty \| +\infty \quad +$

(c) Points anguleux

Soit f continue sur I et dérivable sur $I \backslash \{x_0\} (x_0 \in \mathbb{D}_f \backslash \mathbb{D}_{f'})$. Le graphe de f admet un point anguleux en $x_0 = 0$ si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 avec $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$



point anguleux et extremum



point anguleux et non extremum

Pour déterminer la pente des 2 demi-tangentes:

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f'(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ et } f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On peut utiliser le théorème (série 9, exercice 9):
Si f est continue en x_0 et dérivable sur un voisinage pointé de x_0, alors si

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \text{ existe}$$

on a

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

Plus précisément

- Si $\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ existe, alors elle est égale à $f'(x_0^-)$
- Si $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ existe, alors elle est égale à $f'(x_0^+)$

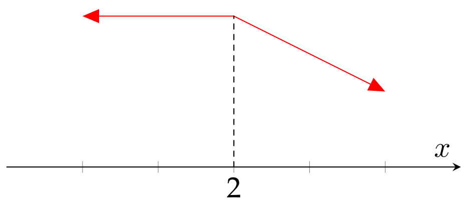
Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

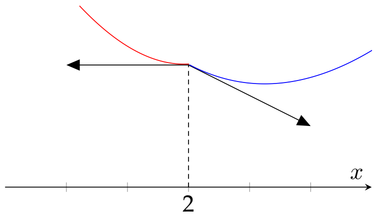
f est continue en $x = 2$ (à vérifier)

- $\lim_{x \to 2^-} f'(x) = -(x-2)\Big|_{x=2} = 0 = f'(2^-)$
- $\lim_{x \to 2^+} f'(x) = 2(x-4)\Big|_{x=2} = -4 = f'(2^+)$

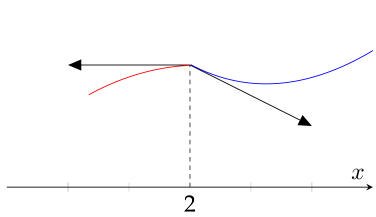
Le point $(2, 4)$ est un point anguleux de demi-tangente $m_+ = 0$ et $m_+ = -4$



Ce point anguleux est-il un extremum?



ou



Il faut étendre le signe de $f'(x)$ à gauche de $x_0 = 2$
Si $x < 2$, $f'(x) = -(x-2)$ d'où $f'(x) > 0 (x < 2)$
Le graphe de f admet donc ??? un maximum

4. Point de rebroussement

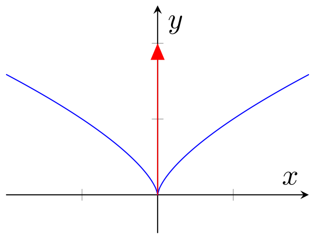
   Soit f continue en x_0 et dérivable sur un voisinage pointé de x_0. Le graphe de f admet un point de rebroussement en x_0 si et seulement si

   - La limite
   $$\lim_{x \to x_0} = \infty$$
   - $f'(x)$ change de signe en x_0

   Donc un point de rebroussement est toujours un extremum

Exemple:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x_0 = 0$$



Exemple complet:

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2} = \sqrt{x^2 \cdot (x+3)}, \quad \mathbb{D}_f [\,-3; +\infty[$$

f continue sur $\mathbb{D}_f$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{2 \cdot \sqrt{x^2(x+3)}} = \frac{3x \cdot (x+2)}{2\sqrt{x^2(x+3)}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{D}_f \backslash \{-3; 0\}$$

Signe de $f'(x)$

x		-3		-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	///	‖	+	0	-	‖	+

Points remarquables:

- $(-3, 0), \lim_{x \to 3^+} f'(x) = +\infty$
  Point à tangente verticale (borne de $\mathbb{D}_f$) et minimum

- $(-2, 2)$ est un maximum à tangente horizontale
- $(0, 0)$
  - À gauche

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{3x \cdot (x+2)}{2 \cdot \underbrace{|x|}_{=-x} \cdot \sqrt{x+3}} = -\sqrt{3}$$

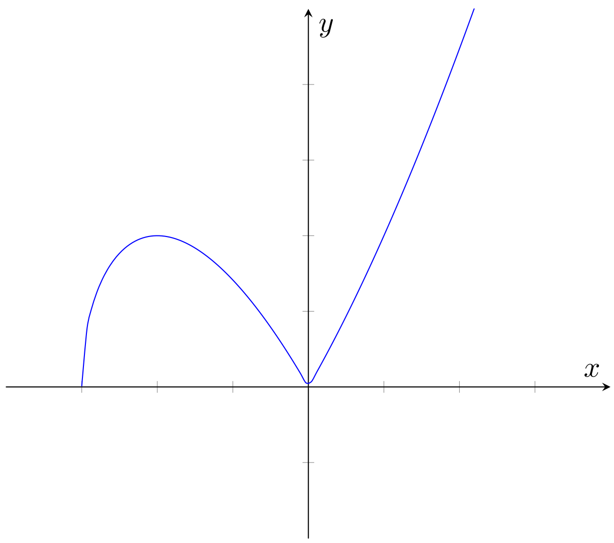
  - À droite

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x \cdot (x+2)}{2 \cdot \underbrace{|x|}_{=x} \cdot \sqrt{x+3}} = +\sqrt{3}$$

C'est un minimum et un point anguleux dont les demi-tangentes dont de pente

$$m_- = -\sqrt{3} \text{ et } m_+ = +\sqrt{3}$$

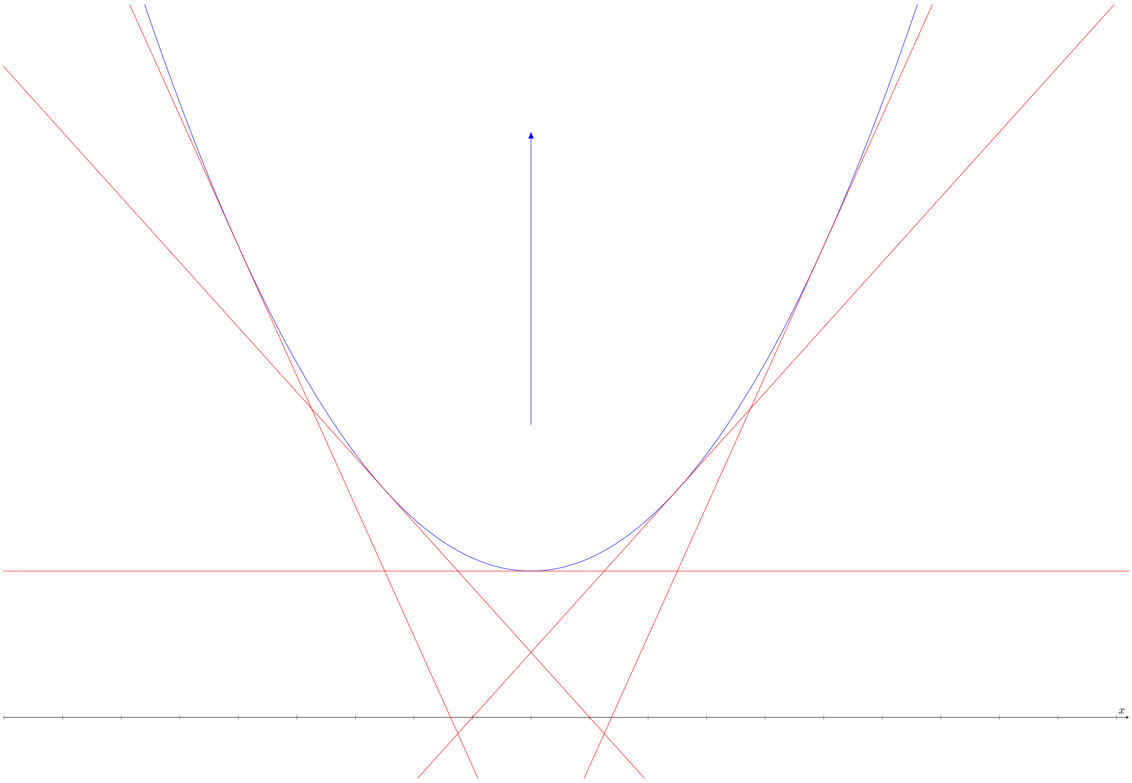
Esquisse du graphe:



3.5.4 Concavité, convexité

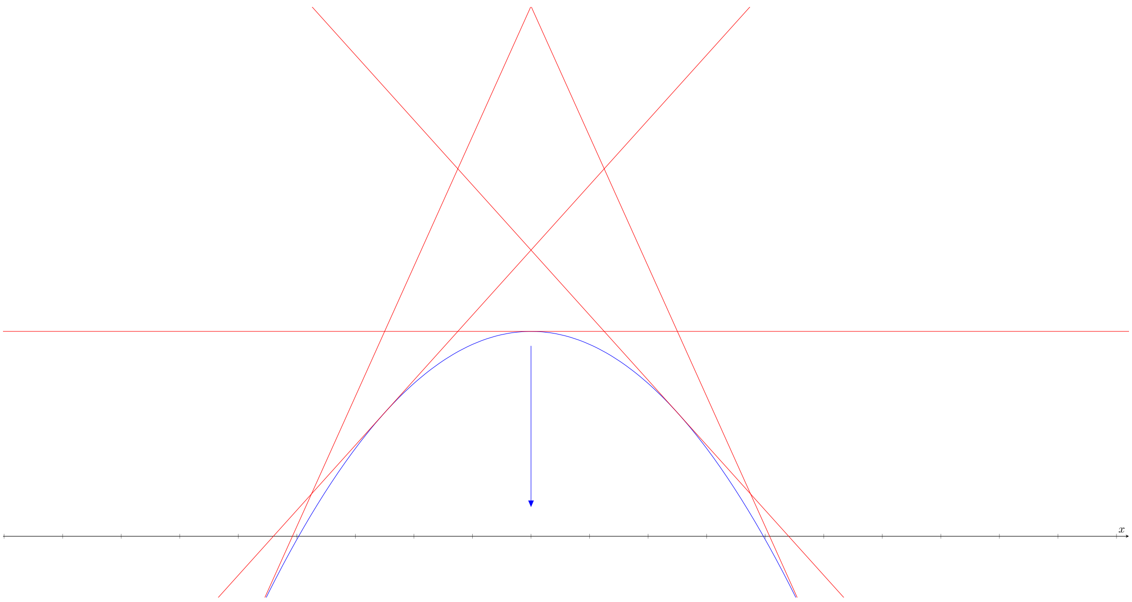
Définitions: Soit f 2 fois dérivable sur I

1. Si $f''(x) > 0, \forall x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I. On dit que le graphe de f est convexe (convexité orientée dans le sens des $y > 0$)



Le graphe de f est "au-dessus" de la tangente

2. Si $f''(x) < 0, \forall x \in I$, alors $f'(x)$ est strictement décroissante. On dit que le graphe de f est concave (convexité est orientée dans le sens des $y < 0$)



Le graphe de f est "en dessous" de la tangente.

Définition: Soit f continue sur I et 2 fois dérivable sur I sauf peut être en $x_0 \in I$. Alors le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion du graphe de f si $f''(x)$ change de signe en x_0.

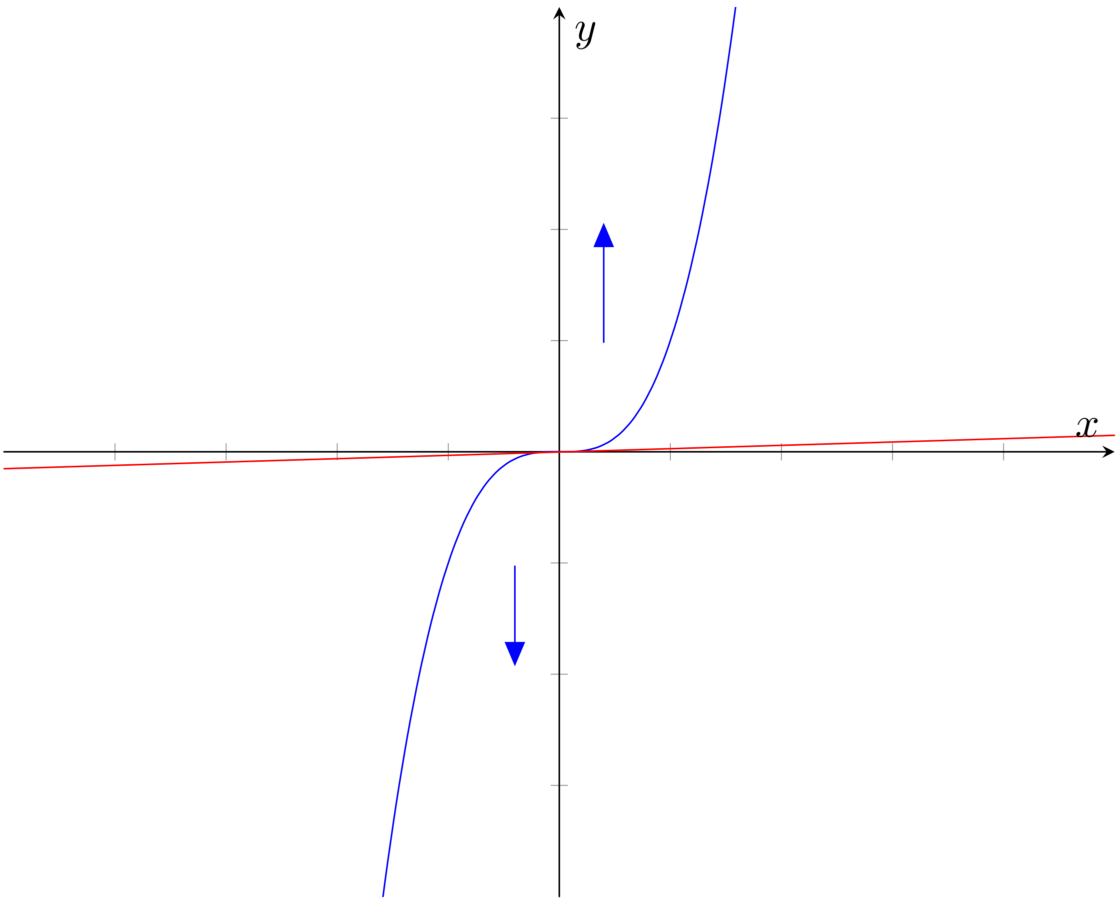
Exemples:

1. $f(x) = x^3 + x$

$$f'(x) = 3x^2 + 1, \quad f''(x) = 6x$$

x		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$(0, 0)$ est un point d'inflexion à tangente oblique ($m = f'(0) = 1$)



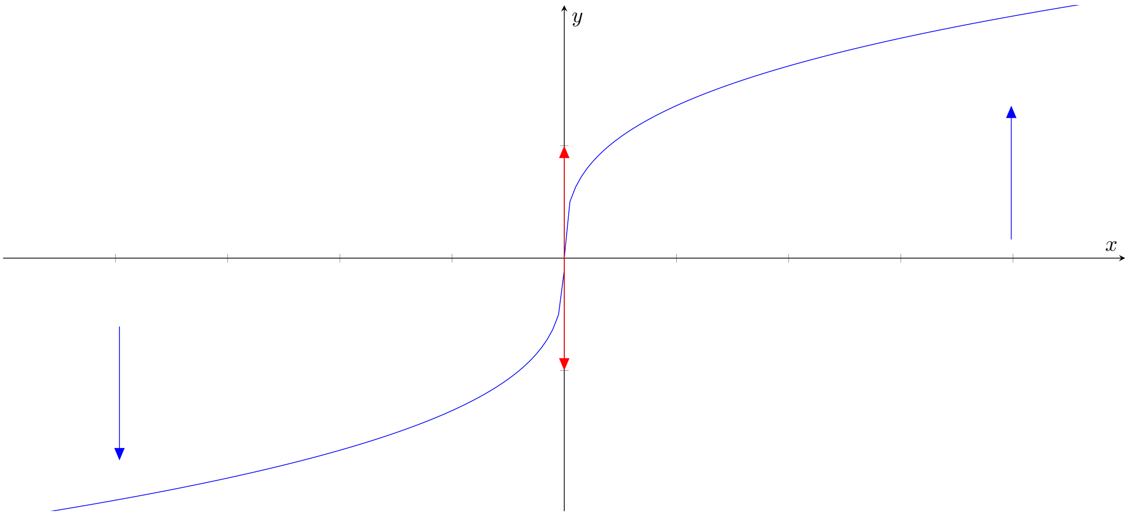
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f'(x)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, x \neq 0s$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

x		0	
$f''(x)$	$+$	$\|$	$-$

$(0, 0)$ est un point d'inflexion à tangente verticale ($\lim\limits_{x \to 0} f'(0) = +\infty$)

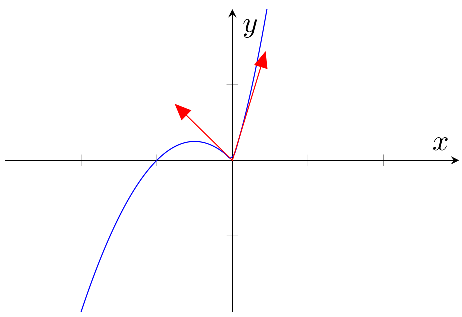


3. $f(x) = (x+1)\cdot(x+2\cdot|x|) = \begin{cases} 3x^2+3x & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2-x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x+3 & \text{si } x > 0 \\ -2x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}^*$$

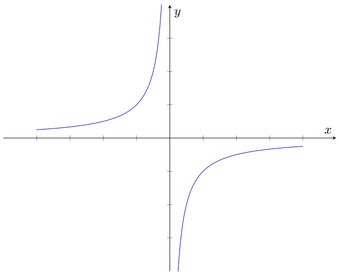
$$f''(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \mathbb{D}_{f''} = \mathbb{D}_{f'}$$

$(0,0)$ est un point d'inflection et un point anguleux $(m_- = -1, m_+ = 3)$ et un minumum.

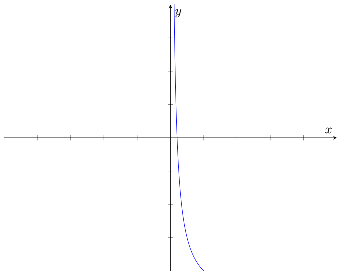


3.5.5 Branches infinies

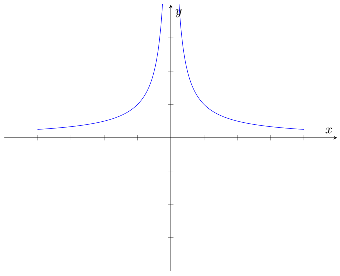
1. Asymptote verticale. Soit f définie sur un voisinnage pointé de x_0 (éventuellement gauche ou droite). Alors le graphe de f amdet une asymptote verticale $x = x_0$, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

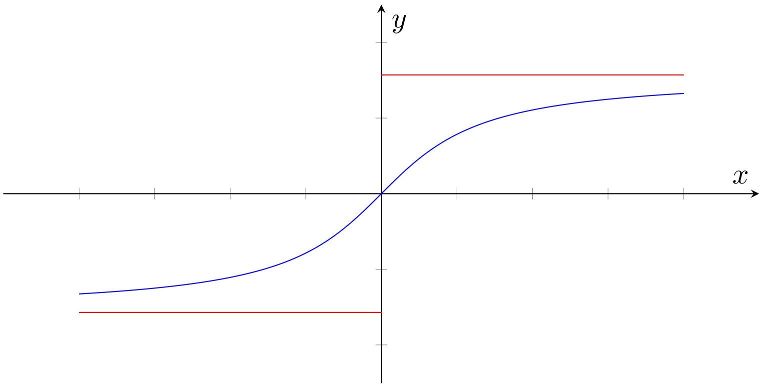


$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

2. Asymptote horizontale

   Soit f définie sur un voisinage de l'infini le graphe de f admet une asymptote horizontale si
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0 (y_0 \text{ fini})$$
   Équation de asymptote horizontale
$$y = y_0$$

   Exemple:
$$f(x) = \arctan(x), x \in \mathbb{R}$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

3. Asymptote oblique

   Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$
   Le graphe de f admet une asymptote oblique d'équation
$$y = ax + b, \text{ si } \lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$
   Si la droite d'équation $y = ax + b$ est un asymptote oblique de f, alors
$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{(f(x) - (ax + b))}_{:=r(x)}$$

avec

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$$

$$f(x) = ax + b + r(x)$$

$$\frac{f(x)}{x} = a + \underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{r(x)}{x}}_{\to 0}$$

On cherche b:

$$f(x) - ax = b + r(x)$$

et

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b$$

si b existe, alors f admet une asymptote oblique:

$$y = ax + b$$

Exemple: $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}, \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} = \pm\infty$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique:

- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}$
- $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3 + 2x^2) - x^3}{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 x} \cdot \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} = \frac{2x^2}{x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} + x^2 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + x^2} \to \frac{2}{3}$$

$$AO : y = x + \frac{2}{3}$$

3.5.6 Schema de l'étude complète d'une fonction

Schema de l'étude complète d'une fonction

1. Domaine d'étude

   Domaine de définition, de continuité, périodicité pointé, restriction ou éventuelle du domaine d'étude.

2. Limites aux "points frontières" de $\mathbb{D}_{\text{déf}}$ et $\mathbb{D}_{\text{cont}}$

   Étude des branches infinies

3. Dérivés, points remarquables et extrema (pas les points d'inflexion (sauf si demandés))

4. Tableau de variation et graphe

Exemple: $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2-4|}$
$\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$, f continue sur $\mathbb{R}$
Étude sur $\mathbb{R}$

- Limites aux "points frontière"
  - $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+2\cdot\sqrt{x^2-4}) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1-2\sqrt{2-\frac{4}{x^2}}\right) = +\infty \quad (x<0)$$

    Recherche d'une intervalle asymptote oblique
    * $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$
    * $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim\limits_{x\to\infty} 2(x+\sqrt{x^2-4}) = 2\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-(x^2-4)}{x-\sqrt{x^2-4}} = 0$

$$AO : y = -x(x\to-\infty)$$

  - $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+2\sqrt{x^2-4}) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(1+2\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right) = +\infty(x>0)$$

    Recherche d'une éventuelle asymptote oblique:
    * $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +3$
    * $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\cdot(\sqrt{x^2-4}-x) = 0$

$$AO : y = 3x(x\to+\infty)$$

- Dérivée

$$f(x) = \begin{cases} x+2\sqrt{x^2-4} & \text{si } x\in]-\infty;-2\,]\cup[\,2;+\infty[\\ x+2\sqrt{4-x^2} & \text{si } x\in]-2;2[\end{cases}$$

  - Si

$$x\in]-\infty;-2\,]\cup[\,2;+\infty[$$

$$f'(x) = 1+2\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}+2x}{\sqrt{x^2-4}}, x\neq\pm2$$

x		-2		$+2$	
$f'(x)$	$-$	$-\infty\|$	$///$	$\|+\infty$	$+$

$$\lim_{x\to-2^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to2^+} f'(x) = +\infty$$

  - Si $x\in]-2,2[$

$$f'(x) = 1-2\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-2x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \iff \sqrt{4-x^2}=2x, \quad x\geq0$$

$$\iff 4-x^2=4x^2 \iff 5x^2=4$$

$$\iff x=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

x		-2		$\frac{2}{5}$		$+2$	
$f'(x)$	$///$	$\Vert+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty\Vert$	$///$

$$\lim_{x\to -2^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty$$

Signe de $f'(x)$

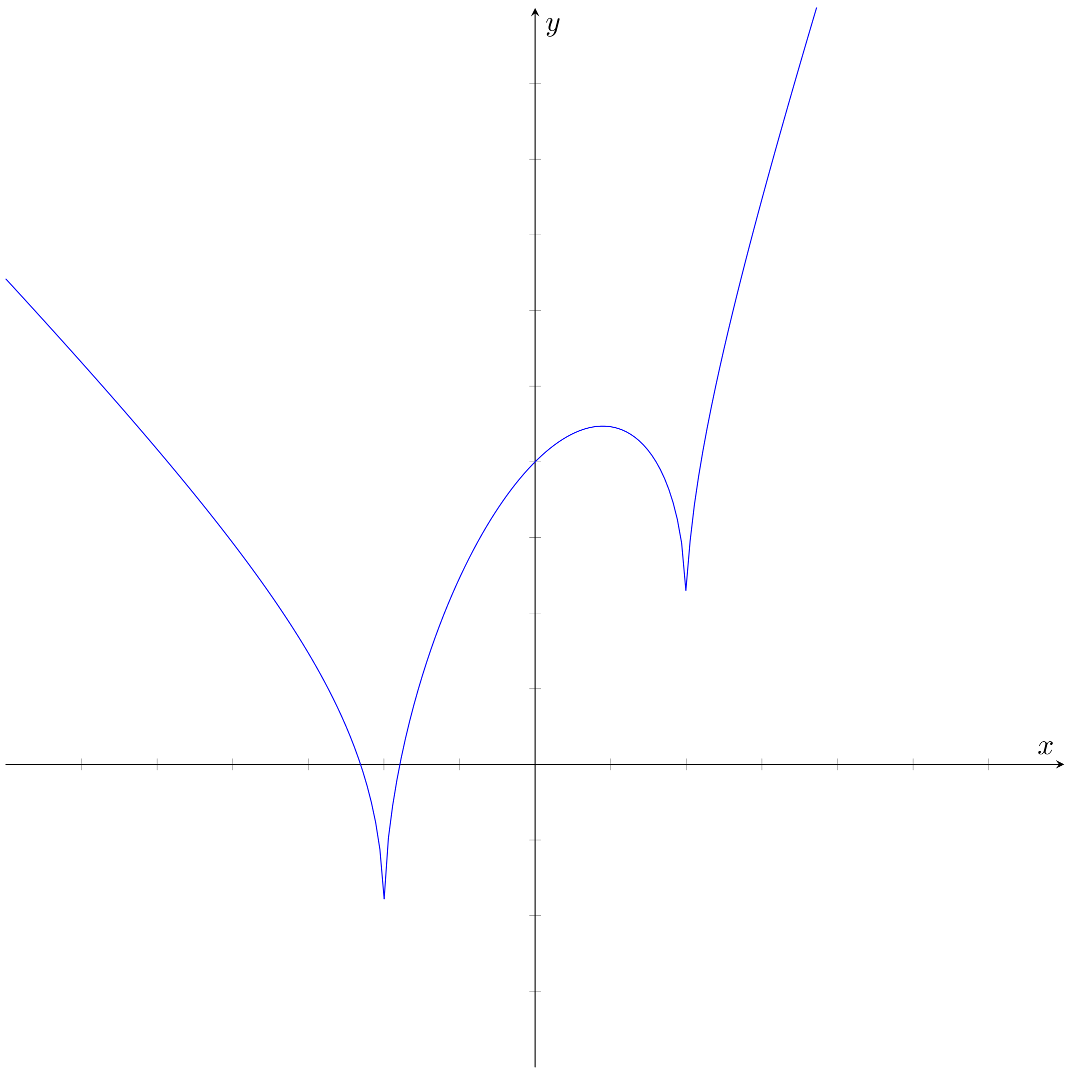
x	$-\infty$	-2		$\frac{2}{5}$		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\infty\Vert+\infty$	$+$	0	-	$-\infty\Vert+\infty$	$+$

Extrema

- $(-2,-2)$ minimum et point de rebroussement
- $(\frac{2}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5})$ maximum à tangente horizontale
- $(2,2)$ minimum et point de rebroussement

- Tableau de variation

x	$-\infty$	-2		$\frac{2}{5}$		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\infty\Vert+\infty$	$+$	0	-	$-\infty\Vert+\infty$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$	2	$\nearrow +\infty$
	AO	PR		TH		PR	AO
	$y=-x$	min		max		min	$y=3x$



3.6 Axes paramétrés dans le plan

3.6.1 Introduction

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$
On appelle un paramètre dans le plan, la donnée d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction

$$\vec{r} : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e_1} + y(t) \cdot \vec{e_2} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

La fonction $\vec{r}(t)$ est appellée fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$ sont les fonctions coordonnées de $\vec{r}(t)$
L'ensemble

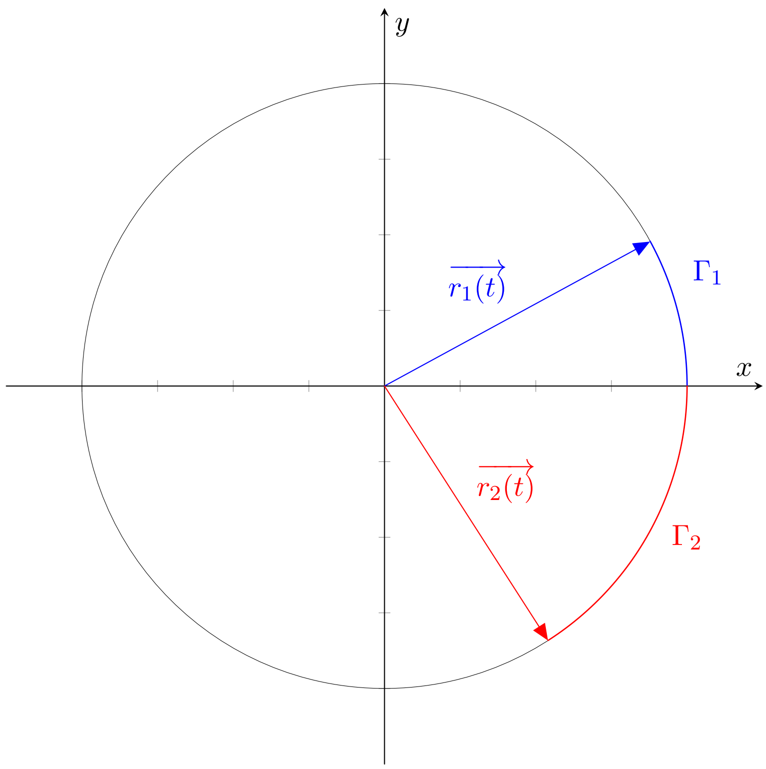
$$\Gamma = \{M(t) \in \mathbb{R}^2 | \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t), t \in I\}$$

est appelé la trajectoire de l'axe paramétré.
Intuitivement un axe paramétré est une trajectoire muni d'un mode de parcours.

Exemple:

$$\vec{r_1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et } \vec{r_2}(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

Soit 2 axes paramétrés différents ayant même trajectoire:



3.6.2 Fonction vectoriel

Soit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I$$

Une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in I$

1. Notation de limite

   - Définition:
     $$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$$
     Si
     $$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 < |t - t_0| < \delta \implies \|\vec{r}(t) - \vec{r_0}\| < \epsilon$$
     Définition analogue lorsque $t \to \pm\infty$
   - Proposition:
     $$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$
     si et seulement si
     $$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \quad \textbf{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0$$

2. Notion de continuité

   Définition $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si
   $$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$
   en d'autres termes si et seulement si
   $$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } |t - t_0| < \delta \implies \|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\| < \epsilon$$

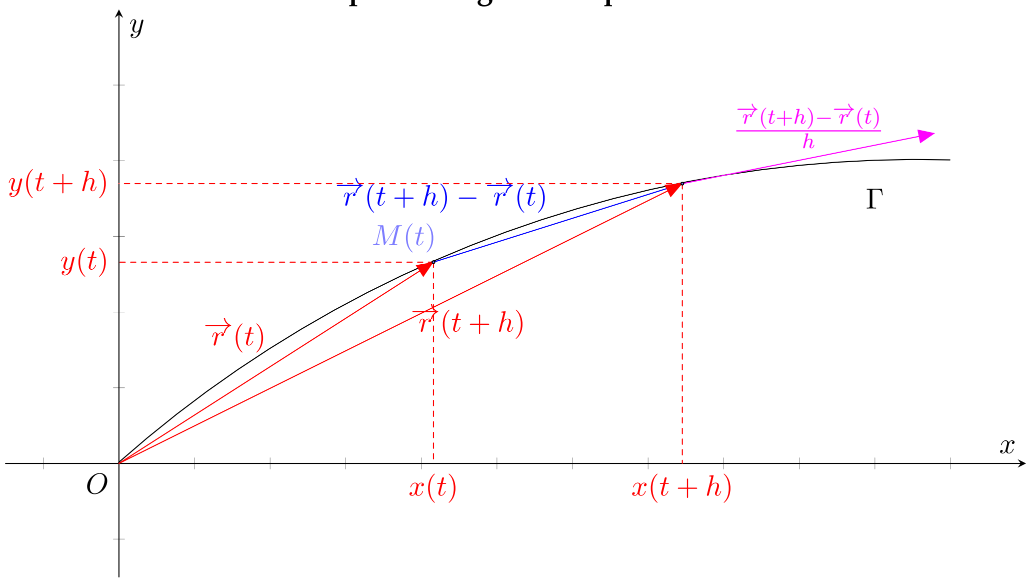
   Proposition $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si et seulement si $x(t)$ et $y(t)$ continues en t_0 autrement dit si et seulement si
   $$\lim_{t \to t_0} x(t) = x(t_0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y(t_0)$$

3. Notions de dérivabilité

   Définition $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si
   $$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$
   existe.
   Cette limite s'appelle le vecteur dérivé de $\vec{r}(t)$ et est noté
   $$\dot{\vec{r}}(t) \text{ ou } \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t_0}$$
   $$\dot{\vec{r}}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

   Proposition $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si et seulement si $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivable en t_0 et
   $$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique



$$\frac{\vec{r}(t+h)\vec{r}(t)}{h}$$

est un vecteur directeur de la sécante passant par les points $M(t)$ et $M(t+h)$ de la trajectoire Γ.

Lorsque $h \to 0$, le vecteur tend vers le vecteur dérivée $\dot{\vec{r}}(t)$

Donc si $\dot{\vec{r}}(t) \neq \vec{0}$, le vecteur dérivée est un vecteur direction de la tangente à Γ en $M(t)$.

La pente de la tangente à Γ à l'instant t est donc donnée par

$$m = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \quad \text{ou} \quad m = \lim \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

Si $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{0}$ alors le vecteur tangente à Γ est donnée par $\ddot{\vec{r}}(t)$ (et si $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{0}$, par $\dddot{\vec{r}}(t)$, etc.)

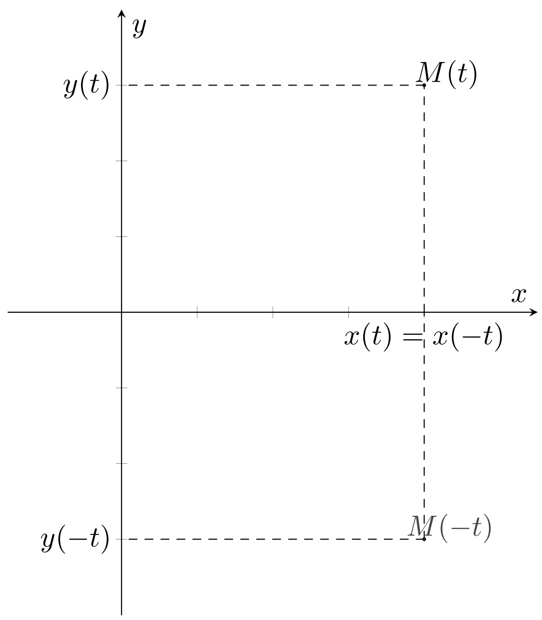
Ceci est une conséquence de la règle de BH:

$$m = \lim \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \overset{BH}{=} \lim \frac{\ddot{y}(t)}{\ddot{x}(t)}$$

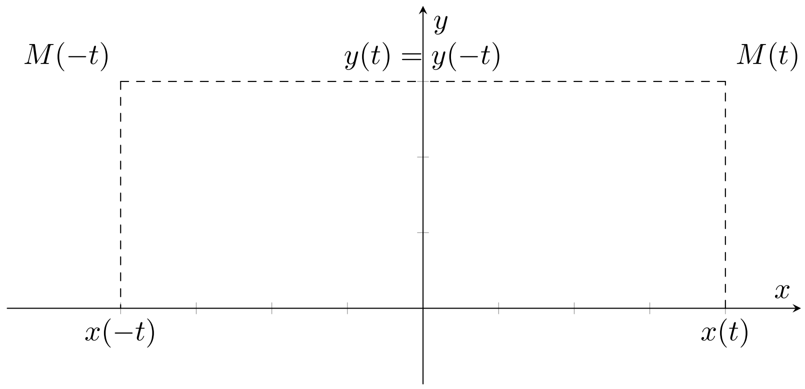
3.6.3 Quelques éléments de l'étude d'un axe paramétré

Symétries déductibles de la parité des fonctions coordonnées

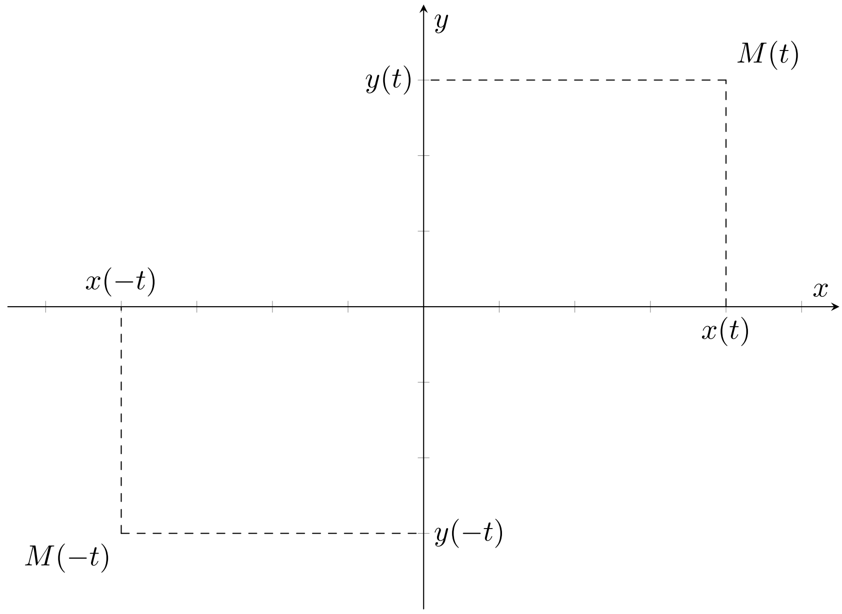
1. Si $x(t)$ est pair et $y(t)$ impair alors Γ est symétrique $/0_x$



2. Si $x(t)$ est impaire et $y(t)$ est pair alors Γ est symétrique $/0_y$



3. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont impaires alors Γ est symétrique $/0$

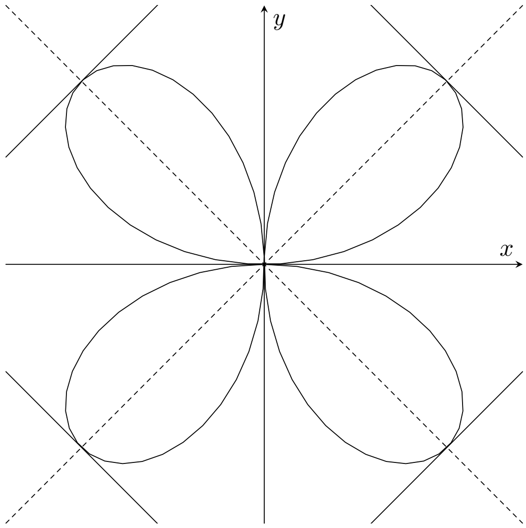


Points doubles, points multiples A est un point double de Γ si

$$\exists t_1 \neq t_2 \in I \text{ t.q. } A \equiv M(t_1) \equiv M(t_2)$$

Exemple:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t)\cdot\cos(t) \\ \sin(2t)\cdot\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [\,0; 2\pi[$$



$$t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$\Longrightarrow M(t) = 0$$

0 est un point multiple d'ordre 4

Point stationnaire $M(t_0)$ est un point stationnaire de Γ si $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{0}$ autrement dit si et seulement si $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$.

Dans ce cas la pente m de la tangente en ce point est donnée par

$$m = \lim_{t\to t_0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \quad (\text{FI : } "\frac{0}{0}")$$

(éventuellement BH)

Autres points remarquables Si $t_0 \in I$ tel que $\vec{r}$ soit continue en t_0 alors:

- Si
$$m = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0 \quad \text{ou} \lim_{t\to t_0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0$$
Γ admet un point à tangente horizontale.

  Exemple: Si $\dot{y}(t_0) = 0$ et $\dot{x}(t_0) \neq 0$

- Si
$$m = \lim_{t\to t_0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \infty$$
alors Γ admet une tangente verticale en $M(t_0)$

  Exemple: Si $\dot{x}(t_0) = 0$ et $\dot{y}(t_0) \neq 0$

Exemple:

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1-2t} \\ y(t) = \frac{t^3}{1-2t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{D}_{\text{déf}}$$

Montrons que Γ admet un point stationnaire, puis esquisse Γ au voisinage de ce point

$$\dot{x}(t) = \frac{2t(1-2t) - t^2(-2)}{(1-2t)^2} = \frac{-2t^2 + 2t}{(1-2t)^2}$$

$$\dot{x}(t) = 0 \iff t = o \text{ ou } t = 1$$

$$\dot{y}(t) = \frac{3t^2(1-2t) - t^3(-2)}{(1-2t)^2} = \frac{t^2(-4t+3)}{(1-2t)^2}$$

$$\dot{y}(t) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = \frac{3}{4}$$

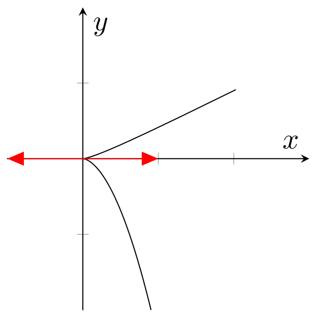
Unique point stationnaire en $t = 0$:

C'est l'origine. La pente en ce point est donnée par

$$m = \lim_{t \to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0$$

O est un point stationnaire à tangente horizontale

t		0	
$\dot{x}$	-	0	+
$\dot{y}$	+	0	+



Branches infinies On dit que Γ trajectoire de $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ admet une branche infinie en t_0 (fini ou infini) si et seulement si

$$\lim_{t \to t_0} \|\overrightarrow{OM}(t)\| = +\infty$$

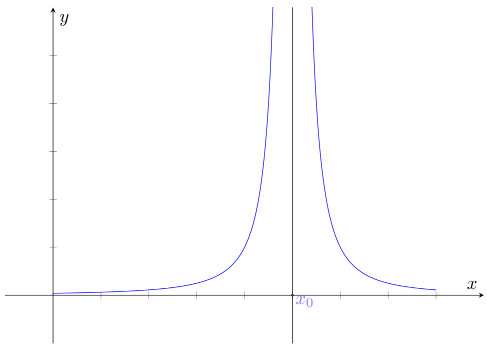
autrement dit si et seulement si

$$x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty \quad \text{ou} \quad y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty$$

Trois cas peuvent se présenter

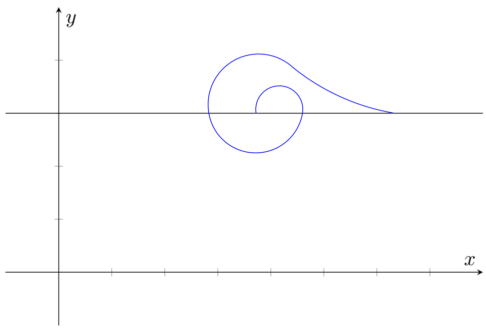
1. $$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty$$

   alors Γ admet une AV: $x = x_0$



2. $$\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0$$

   alors Γ admet une AH: $y = y_0$



3.
$$\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = \infty$$

Γ admet une intervalle AO:
$$y = mx + h$$

avec
$$m = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$$

et
$$h = \lim_{t\to t_0} [\, y(t) - m \cdot x(t)]$$

Remarque: Les instants t_0 qui définissent les branches infinies de Γ sont à chercher aux bornes (finies ou inifinies) du domaine de définition ou de continuité.

Exemple:

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1-2t} \\ y(t) = \frac{t^3}{1-2t} \end{cases} \qquad \mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

3.6.4 Étude d'une courbe paramétrée

Le folium de Descartes

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad \mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

- $x(t)$ et $y(t)$ ni périodique, ni pairs, ni impairs, pas de symétrie évidente.
  Étude sur $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
- Limite aux "points frontières" de $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
  - $t \to \pm\infty$
  $$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$$
  $$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0$$
  $$M(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} (0,0)$$
  (mais comment?)
  - $t \to -1$
  $$\lim_{t\to -1} x(t) = \infty, \lim_{t\to -1} y(t) = \infty$$
  Recherche d'une éventuelle AO:
    * $\lim_{t\to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to -1} \frac{3t^2}{2t} = -1$

$* \ \lim_{t\to -1}(y(t)-(-1)x(t))$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t\to -1} \frac{3t^2+3t}{1+t^3} \\ &= \lim_{t\to -1} \frac{3t(t+1)}{t+1)(t^2-t+1)} \\ &= \lim_{t\to -1} \frac{3t}{t^2-t+1} \end{aligned}$$

Donc le folium de Descartes amdet (lorsque $t \to -1$) un AO:

$$AO: \quad y = -x-1$$

- Dérivées

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3\frac{(1+t^3)-t(3t^2)}{(1+t^3)^2} \\ &= 3\frac{-2t^3+1}{(1+t^3)^2} \end{aligned}$$

Signe de $\dot{x}(t)$

t	$-\infty$	-1		$2^{-\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$\dot{x}(t)$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= 3\frac{2t(1+t^3)-t^2(3t^2)}{(1+t^3)^2} \\ &= 3\frac{t(-t^3+2)}{(1+t^3)^2} \end{aligned}$$

Signe de $\dot{y}(t)$

t	$-\infty$	-1		0		$2^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$\dot{y}(t)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$

- Points remarquables

  Pas de zéros communs à $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$, donc pas de points stationnaires

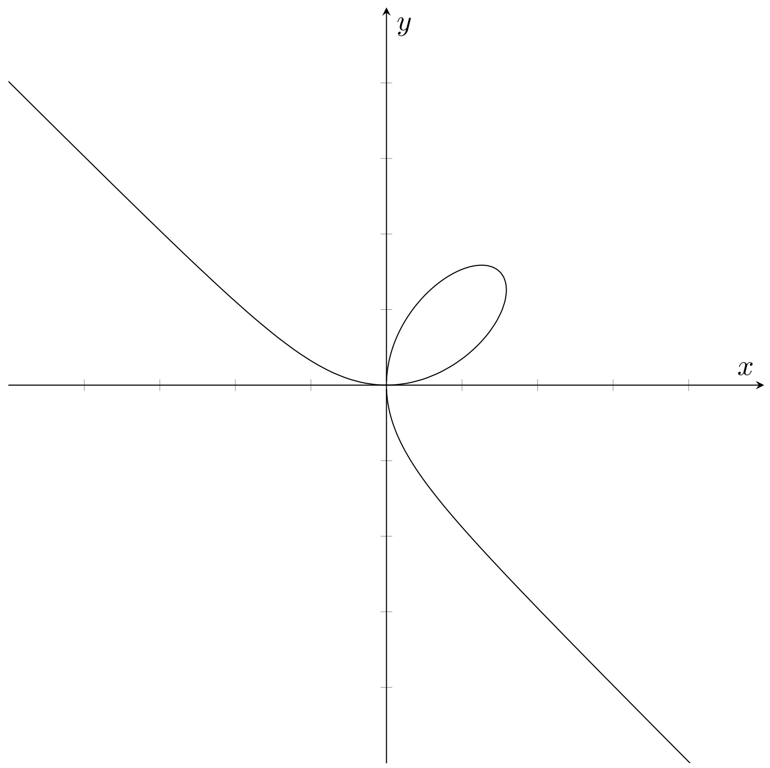
  – en $t = 0$, $M(0,0)$ est un point à TH
  – en $t = 2^{\frac{1}{3}}$, $M(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}})$ est un point à TH
  – en $t = 2^{-\frac{1}{3}}$, $M(2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$ est un point à TV
  – lorsque $t \to \pm\infty$, $M(t) \to (0,0)$ et

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t(-t^3+2)}{-2t^2+1} = \infty$$

  Donc $M(t) \to (0,0)$ le long d'une "tangente" verticale.

- Tableau de variation

t	$-\infty$	-1		0		$2^{-\frac{1}{3}}$		$2^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$\dot{x}(t)$	$+$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$
$x(t)$	$0 \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow$	$2^{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	$2^{\frac{1}{3}}$	$\searrow 0$
$\dot{y}(t)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
$y(t)$	$0 \searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	$2^{\frac{1}{3}}$	$\nearrow$	$2^{\frac{2}{3}}$	$\searrow 0$
	$M \to 0$	AO		TH		TV		TH	$M(t) \to 0$
	"TV"	$y = -x - 1$		TH		TV		TH	"TV"



3.6.5 Le limaçon de Pascal

Soient γ le cercle de centre O et de rayon $1, A(2,0)$ et P un point courant de γ. Soient d la tangente à γ en P et M la projection orthogonale de A sur d. Le lien de M lorsque P décrit γ s'appelle le limaçon de Pascal.

photo 4 (he added the angle from the photo 2)

- Équations paramétriques de lieu de M

  - Choix du paramètre:

$$t \in [\,0, 2\pi\,]$$

    ou mieux

$$t \in [\,-\pi, +\pi\,]$$

    Donc

$$P(\cos(t), \sin(t))$$

– Équations de d et de (AM)

$$d : \begin{pmatrix} x-\cos(t) \\ y-\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = 0 \iff x\cos(t) + y\sin(t) - 1 = 0$$

$$m_d = -\cot(t) \implies m_{(AM)} = \tan(t)$$

$$(AM) : y - 0 = \tan(t)(x-2)$$

– M est défini par $\{M\} = d \cap (AM)$

$$M : \begin{cases} x\cos(t) + y\sin(t) = 1 \\ y = \tan(t)(x-2) \end{cases} \iff \begin{cases} x\cos(t) + y\sin(t) = 1 \\ x + \sin(t) - y\cos(t) = 2\sin(t) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\cos(t) \\ \cdot\sin(t) \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} x\cos^2(t) + y\sin(t)\cos(t) = \cos(t) & (1) \\ x\sin^2(t) + y\cos(t)\sin(t) = 2\sin^2(t) & (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \implies x = \cos(t) + 2\sin^2(t)$$

$$\begin{cases} x\cos(t) + y\sin(t) = 1 \\ x\sin(t) - y\cos(t) = 2\sin(t) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\sin(t) \\ \cdot(-\cos(t)) \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} x\cos(t)\sin(t) + y\sin^2(t) = \sin(t) & (1) \\ -x\cos(t)\sin(t) + y\cos^2(t) = -2\sin(t)\cos(t) & (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2) y = \sin(t) - 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + 2\sin^2(t) \\ y(t) = \sin(t) - 2\sin(t)\cos(t) \end{cases}$$

- Étude de l'arc paramétré $x(t)$ est pair et $y(t)$ est impair
  Donc Γ est symétrique $/0_x$
  Étude sur $[\,0;\pi\,]$

  – Limite aux points frontières

$$x(0) = 1, y(0) = 0$$
$$x(\pi) = -1, y(\pi) = 0$$

  – Dérivées

$$\dot{x}(t) = -\sin(t) + 4\sin(t)\cos(t)$$
$$= \sin(t)(-1 + 4\cos(t))$$

$$\dot{x}(t) = 0 \iff \sin(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(t) = \frac{1}{4} \iff t = 0 \quad \text{ou} \quad t = 180^\circ$$

ou

$$t = \arccos(\frac{1}{4}) \simeq 75^\circ$$

t		0		75		180	
$\dot{x}(t)$	//	0	+	0	−	0	//

$$\dot{y}(t) = \cos(t) - 2\cos(2t) = \cos(t) - 2(\cos^2(t) - 1)$$

$$\dot{y}(t) = 0 \iff 4\cos^2(t) - \cos(t) - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 32 = 33$$

$$\cos(t) = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} = \begin{cases} \simeq -0,6 \\ \simeq +0,8 \end{cases}$$

$$t \simeq 32^\circ \quad \text{ou} \quad t \simeq 126^\circ$$

t		0		32		126		180
$\dot{y}(t)$	//	-	0	+	0	-	|	//

Pas de point stationnaire, mais:

- en $t_1 = 0, M(1,0)$: TH
- en $t_2 \simeq 32^\circ, M(1,4;-0,4)$: TH
- en $t_3 \simeq 75^\circ, M(2,1;0,5)$: TV
- en $t_4 \simeq 126^\circ, M(0,7;1,8)$: TH
- en $t_5 \simeq 180^\circ, M(-1;0)$: TV

t		t_1		t_2		t_3		t_4		t_5	
$\dot{x}(t)$	//	0	+	|	+	0	-	|	-	0	//
$x(t)$	//	|	$1 \nearrow 1.4$	|	$\nearrow 2.1$	|	$\searrow 0.7$	|	$\searrow -1$	|	//
$\dot{y}(t)$	//	|	-	0	+	|	+	0	-	|	//
$y(t)$	//	|	$0 \searrow -0.4$	|	$\nearrow 0.5$	|	$\nearrow 1.8$	|	$\searrow 0$	|	//
		TV		TH		TV		TH		TV