EPFL

MAN

Mise à niveau

Physique

PREPA-033

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sylvain BRÉCHET

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 2

Mouvement dans le plan

2.1 Matière et espace

27/02/2019

La matière est faite d'atomes et de molécules. En mécanique classique, on peut considérer les molécules comme des petites billes en interaction.

- 5 états:
  1. Solide;
  2. Liquide;
  3. Gaz;
  4. Plasma;
  5. Condensat de Bose-Einstein;
- À l'échelle microscopique, on peut distinguer les atomes et les molécules.
- À l'échelle macroscopique, les atomes et les molécule forment un continuum de matière.
- Un object est un continuum

2.1.1 Grandeurs extensives et intensives

- **Grandeurs extensives**: grandeur physique qui, pour un ensemble d'objets, sont égalés à leur somme pour chaque objet.

  Exemple quantité de matière, quantité de mouvement, force, volume.
- **Grandeur intensives**: grandeurs physique qui sont indépendantes du nombre d'objets.

  Exemple vitesse, accélération, temperature.

2.1.2 Masse

Masse (M ou m): grandeur physique qui caractérise la quantité de matière d'un objet.

- Grandeur extensive

- Grandeur scalaire
- Grandeur conservée (Lavoisier)
- Masse constante $\Longrightarrow$ système fermé (lingot d'or)
- Masse variable $\Longrightarrow$ système ouvert (fusée)
- Unité physique (SI): kilogramme [kg]

2.1.3 Volume

Volume (V): grandeur physique scalaire et extensive qui caractérise la portion d'espace occupée par un objet.

- Unité physique (SI): mètre cube [m^3]

2.1.4 Masse volumique

Masse volumique (ρ): grandeur physique scalaire définie comme le rapport de la masse m et du volume V.

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{2.1}$$

- Unité physique (SI): [$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$]
- Grandeur qui caractérise une matière $\rho_{\text{eau}} = 1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}} = 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}; \rho_{\text{glace}} = 0.9\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}} = 0.9 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
- **Homogène**: un objet est homogène si sa masse volumique est la même partout (par ex. une planche de bois)
- **Inhomogène**: un objet est inhomogène si sa masse volumique varie d'un endroit à l'autre (par ex. un marteau avec manche en bois et tête en fer)

2.1.5 Densité

Densité (d): nombre sans dimension physique définie comme le rapport entre la masse volumique de l'objet et la masse volumique de l'eau.

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau}}} \tag{2.2}$$

2.1.6 Surface

Surface (s, σ): grandeur physique scalaire et extensible qui caractérise une portion de l'espace en à deux dimensions.

- Unité physique (SI): mètre carré [m^2]

2.1.7 Longueur

Longueur (l, x, r, s, d, L): grandeur physique scalaire et extensible de l'espace à une dimension.

- Unité physique (SI): mètre [m]

2.2 Référentiel

2.2.1 Point matériel

Représentation d'un object par rapport à un point auquel on associe toute la matière (masse) de l'objet.

- **Modèle**: idéalisation de la réalité
- **Limites**: pas de mouvement de rotation propre
- **Erreurs**: (i) quantitatif, (ii) qualitatif

2.2.2 Référentiel

- Object physique (indéformable) de référence par rapport auquel on décrit le mouvement.

  Exemple: terre, bateau, système solaire

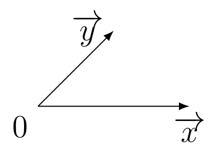
- Un ensemble de N points matériels ($N \geq 4$) non-complanaires et fixes les uns par rapport aux autres.

28/02/2019

2.2.3 Repère

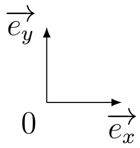
Un **repère** est une **entité géométrique**. Dans le plan, c'est à dire dans un espace à 2 dimensions, un repère est constitué de 2 vecteurs linéairement indépendants (i.e. non colinéaire) attachés à un point appelé l'**origine** O.

- Repère quelconque:

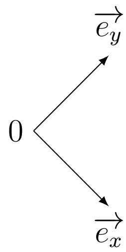


- Un repère est orthonormé si et seulement si les vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ sont orthogonales ($\overrightarrow{e_x} \perp \overrightarrow{e_y}$) et unitaires ($\|\overrightarrow{e_x}\| = \|\overrightarrow{e_y}\| = 1$)

- Repère horizontale-vertical $(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$



- Repère oblique $(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$

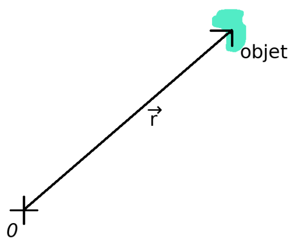


référentiel (physique: **réel**) $\Longleftrightarrow$ repère (géométrique: **virtuel**)

2.3 Vecteur position et déplacements

2.3.1 Vecteur position

- La position d'un objet (point materiel) dans le référentiel est donné par le vecteur position $\overrightarrow{r}$:



- Unité physique (SI): mètre [m]

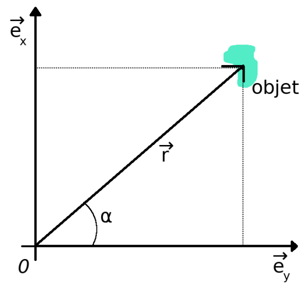
Vecteur Un vecteur possède 3 propriétés fondamentale:

- Direction
- Sens
- Norme

On le note par un symbole surmonté d'une flèche (manuscrit) ou en gras (caractère d'imprimerie)

Pour le vecteur position **r**, la **direction** est la droite passant pas O et l'objet, le **sens** est donné par le regard vers l'objet depuis O et la **norme** par la distance de O à l'objet.

- Le vecteur position $\vec{r}$ peut être décomposé dans le repère orthonormée $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$



- Vecteur position $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e_x} + y \cdot \vec{e_y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot r \\ \sin(\alpha) \cdot r \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$\text{où } r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

  x et y sont les **composants** du vecteurs position $\vec{r}$ dans le repère orthonormée $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$

- Comme l'objet peut se déplacer au cours du temps, sa position peut changer.

2.3.2 Temps

Temps (t ou T): grandeurs scalaire qui décrit l'évolution d'un système physique.

- Unité physique (SI): secondes [s]
- Comme un objet se déplace au cours du temps, son vecteur position est function du temps: $\vec{r} \equiv \vec{r}(t)$
- Vecteur position à l'instant t:

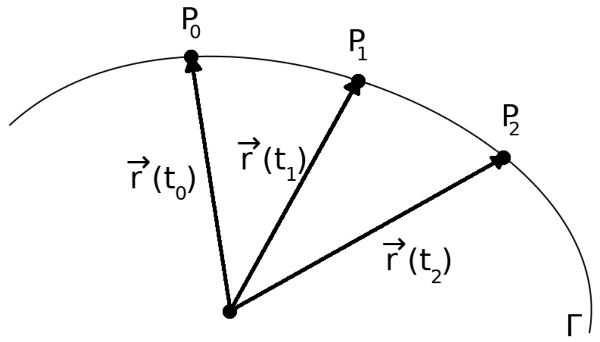
$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e_x} + y(t) \cdot \vec{e_y} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(\alpha(t)) \\ r(t) \cdot \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

- **Exemples**: horaires de train (Où? Quand?), GPS

2.3.3 Trajectoire

- Lieux géométrique des points de l'espace occupés par l'objet (point matériel) au cours du temps.

- Ensemble des points qui sont atteints par l'objet (courbe ou droite) représenté par Γ



$$\Gamma = \{P | \exists t, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}(t)\}$$

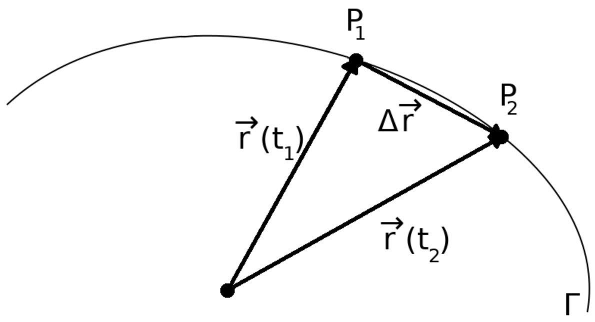
Exemples

1. Droite (chute libre)
2. Cercle (electron dans un champ magnétique)
3. Parabole (projectile)
4. Ellipse (planète)
5. Hyperbole (astéroïde)

La trajectoire répond à la question "où?" sans se préoccuper de la question "quand?".

2.3.4 Déplacement

Le vecteur déplacement est la variation du vecteur position au cours du temps. On considère les position P_1 et P_2 d'un objet aux temps t_1 et t_2 où $t_1 < t_2$.



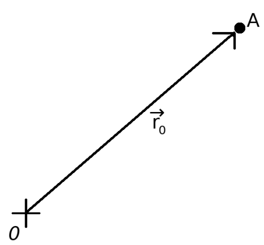
$$\overrightarrow{r_1} + \Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2}$$

- Déplacement le long de
$$\Gamma : \Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r}(t_1) - \overrightarrow{r}(t_1) \tag{2.5}$$

- **Exemple**: Le vecteur déplacement $\Delta\overrightarrow{r}$ entre Genève (position $\overrightarrow{r_1}$) et Lausanne (position $\overrightarrow{r_2}$) le long des voies le chemin de fer (trajectoire Γ)

Cas particuliers:

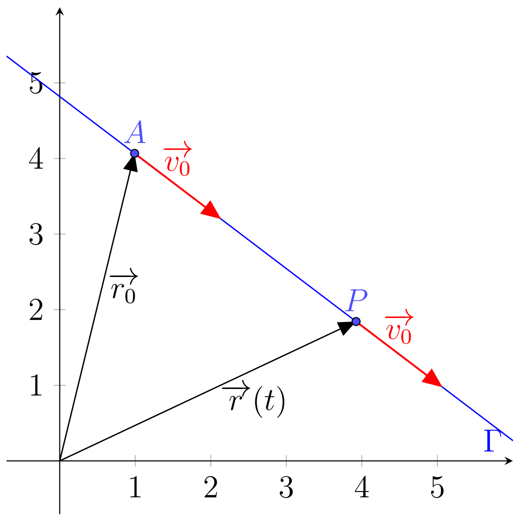
1. Objet immobile au point A



Vecteur position indépendant du temps t:

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{cste} \quad \forall t \tag{2.6}$$

2. Objet qui avance régulièrement sur une droite Γ qui passe par un point A l'instant t_0 : $\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{OA} = \vec{r_0}$



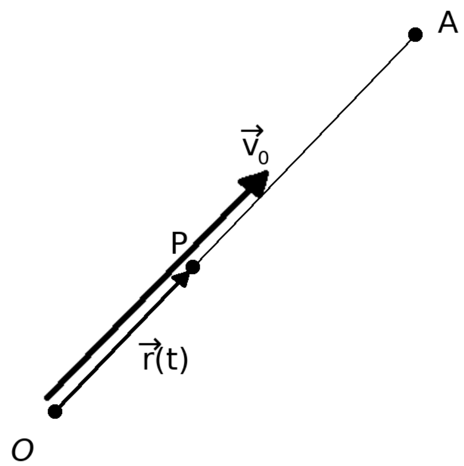
- Le vecteur déplacement $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r_0}$ est proportionnelle à sa durée $\Delta t = t - t_0$
- Il existe un vecteur directeur $\vec{v_0}$ de la droite tel que $\Delta\vec{r} = \vec{v_0} \cdot \Delta t$, ou encore

$$\vec{r}(t) = \vec{v_0} \cdot (t - t_0) + \vec{r_0} \tag{2.7}$$

3. L'objet est dit en mouvement rectiligne uniforme (MRU)

4. Dans le plan, on donne l'origine O et un point A. Un objet se déplace de O à A entre $t = 0$ et $t = t_A$

5. On cherche à déterminer l'équation horaire $\vec{r}(t)$ de l'objet en considérant que celui-ci passe en O à l'instant $t = 0$.



6. Conditions l'initiale et finale: $\vec{r}(0) = \vec{0}$ et $\vec{r}(t_A) = \overrightarrow{OA}$

7. Ainsi:
$$\overrightarrow{r}(t_A) = \overrightarrow{v_0} \cdot t_A = \overrightarrow{OA} \implies \overrightarrow{v_0} = \frac{\overrightarrow{OA}}{t_A} \tag{2.8}$$

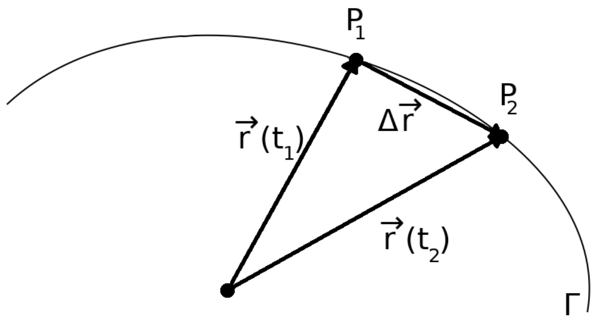
8. Finalement,
$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{v_0} \cdot t = \frac{t}{t_A} \cdot \overrightarrow{OA} \tag{2.9}$$

9. **Rencontre**: Lorsque deux objets se trouvent à la même position au même temps t_r, il y a rencontre
$$\exists t_r \overrightarrow{r_1}(t_1) = \overrightarrow{r_2}(t_r) \tag{2.10}$$

2.4 Vecteur vitesse

2.4.1 Vitesse moyenne

On considère un objet en position initiale P_1 au temps initiale t_1 et en position finale P_2 au temps finale t_2



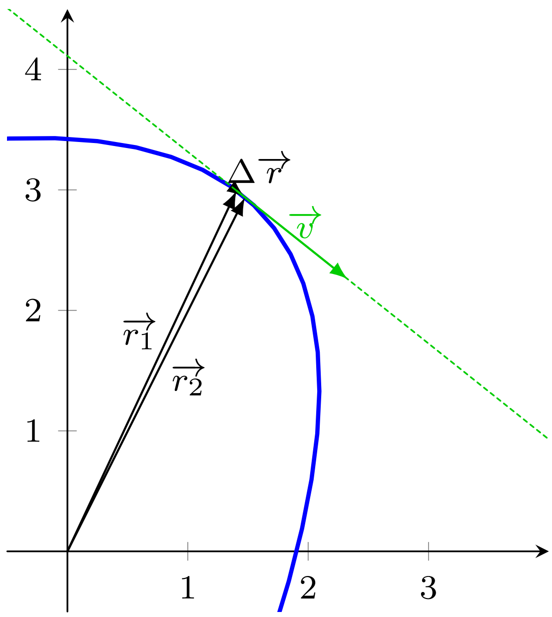
- Position initiale: $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r}(t_1)$
- Position finale: $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r}(t_2)$
- Déplacement: $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$
- Intervalle de temps: $\Delta t = t_2 - t_1$

- La **vitesse moyenne** ($\overrightarrow{v_{moy}}$) de l'objet est définie comme le rapport entre le déplacement $\Delta\overrightarrow{r}$ et l'intervalle de temps Δt
$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t} \tag{2.11}$$
- Unité physique (SI): mètre par secondes [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]

- La vitesse moyenne ne donne que la position finale $\vec{r_2}$ par rapport à la position initiale $\vec{r_1}$ et non les positions intermédiaires

$$\vec{r_2} = \vec{r_1} + \overrightarrow{v_{moy}} \cdot \Delta t \tag{2.12}$$

- C'est la vitesse constante qu'il faudrait maintenir pour faire le déplacement $\Delta\vec{r}$ durant l'intervalle du temps Δt.



- Dans la limite où l'intervalle de Δt est très petit, le déplacement

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \tag{2.13}$$

donne la direction et le sens de mouvement est juste après le temps t_1.

- Le déplacement $\Delta\vec{r}$ devient vecteur directeur de la tangente à la trajectoire en $\vec{r_0}$

- La **vitesse instantanée** ou **vitesse** de l'objet est définie comme la vitesse moyenne dans la limite d'un intervalle du temps infinitésimale.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \tag{2.14}$$

Propriétés de la vitesse

6/03/2019

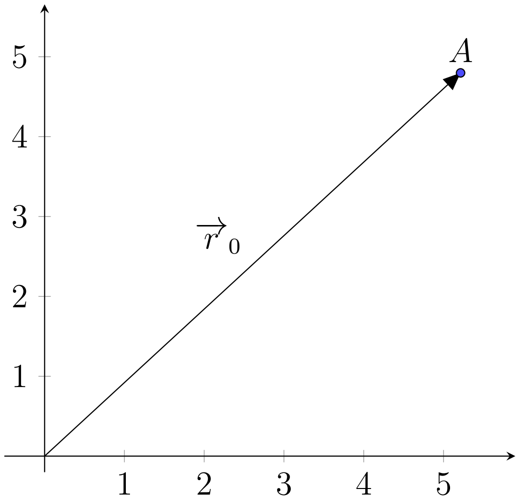
- Taux de variation de la position par rapport au temps (dérivée)

- Vector (direction, sens, norme)

- Tangente à la trajectoire dans le sens du mouvement

Cas particuliers

1. Objet immobile qui se trouve au point A



Vecteur vitesse nulle (position constante):

$$\vec{v}(t) = \vec{0}, \quad \forall t \tag{2.15}$$

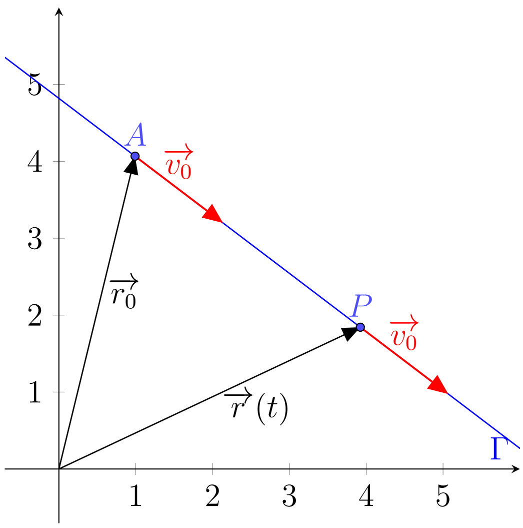
car $\vec{r}(t) = \overrightarrow{0A} = \vec{r_0}$ (2.6)

Vérification:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r_0} - \vec{r_0}}{\Delta t} = \vec{0}$$

□

2. Objet qui avance à vitesse constante



- Vecteur de vitesse constant

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} = \overrightarrow{cste} \tag{2.16}$$

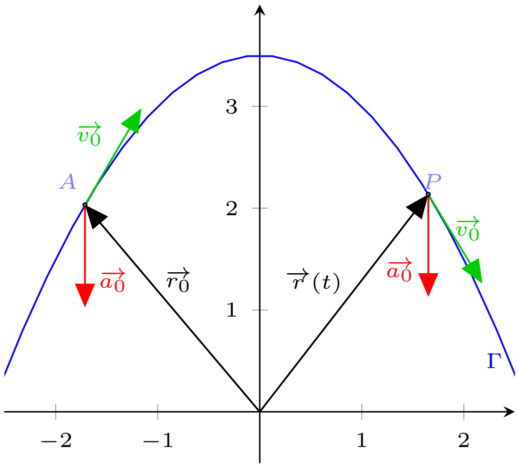
- Vitesse et vitesse moyenne identiques

$$\vec{r}(t) = \vec{V_0} \cdot (t - t_0) + \vec{r_0} \quad (2.7)$$

Mouvement rectiligne uniforme à vitesse constante (MRU).

Vérification $\vec{v}(t) \underset{(2.14)}{\overset{(2.7)}{=}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t - t_0) + \vec{r_0} - \vec{v}(t - t_0) - \vec{r_0}}{\Delta t} = \vec{V_0}$

3. Objet qui passe par A l'instant t_0, i.e. $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OA} = \vec{r_0}$, avec une vitesse $\vec{v_0}$, et dont la vitesse change régulièrement.



- La variation de vitesse

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v_0}$$

est proportionnellement à la durée

$$\Delta\vec{t} = t - t_0$$

- Il existe un vecteur $\vec{a_0}$ tel que

$$\Delta\vec{v} = \vec{a_0} \cdot \Delta t$$

Ainsi,

$$\vec{v}(t) = \vec{a_0} \cdot (t - t_0) + \vec{v_0} \tag{2.17}$$

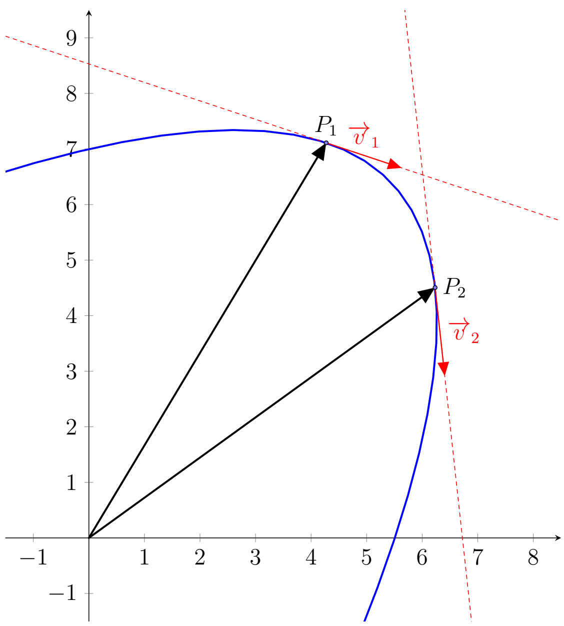
- Mouvement uniformément accéléré (MUA) (2.17)
- Le vecteur position $\vec{r}(t)$ s'écrit:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v_0} \cdot (t - t_0) + \vec{r_0} \tag{2.18}$$

2.5 Vecteur accélération

2.5.1 Accélération moyenne

On considère un objet en position initiale P_1 au temps initiale t_1 et en position finale P_2 au temps finale t_2.



- Vitesse initiale: $\vec{v_1} = \vec{v}(t_1)$
- Vitesse finale: $\vec{v_2} = \vec{v}(t_2)$
- Variation de vitesse: $\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$
- Intervalle de temps: $\Delta t = t_2 - t_1$

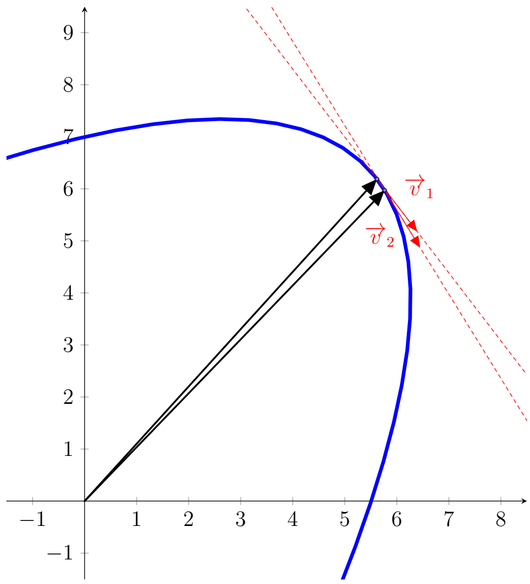
- L'**accélération moyenne** $\overrightarrow{a_{moy}}$ est définie comme le rapport entre la variation de la vitesse $\Delta\vec{v}$ et l'intervalle Δt

$$\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{2.19}$$

- Unité physique (SI): mètres par secondes $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
- L'accélération moyenne donne que la vitesse finale $\vec{v_2}$ par rapport à la vitesse initiale $\vec{v_1}$ et non les vitesses intermédiaire

$$\vec{v_2} = \vec{v_1} + \overrightarrow{a_{moy}} \cdot t \tag{2.20}$$

- C'est l'accélération constante qu'il faudrait maintenir pour effectuer une variation de vitesse $\Delta\vec{v}$ en un intervalle de temps Δt



Dans la limite où l'intervalle de temps Δt est très petit, la variation de vitesse $\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ donne la direction et le sens de l'accélération juste après t_1.

Le vecteur variation de vitesse $\Delta\vec{v}$ devient le vecteur directeur de l'accélération.

- L'**accélération instantanée** ou **accélération** de l'objet est déterminé comme l'accélération moyenne dans la limite d'un intervalle de temps infinitésimale.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{2.21}$$

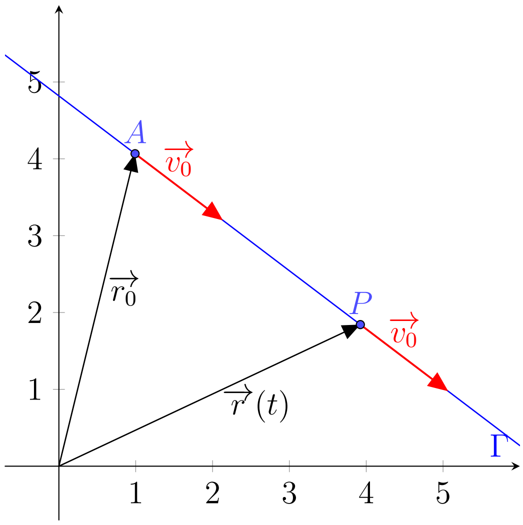
$$\Longrightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}(t) \tag{2.22}$$

Propriétés de l'accélération

- Taux de variation de la variation vitesse par rapport au temps (dérivée)
- Vecteur (direction, sens, norme)
- Toujours dirigée vers l'intérieur de la trajectoire (courbe)
- Selon la tangente à la trajectoire le vecteur accélération va décrire un changement de norme du vecteur vitesse
- Selon la normale à la tangente: changement de direction du vecteur vitesse

Cas particuliers

1. Objet qui avance à vitesse constante $\vec{v_0}$ et qui passe par le point A à l'instant t_0 : $\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{OA} = \vec{r_0}$. La vitesse est constante (MRU) et donc l'accélération est nulle.

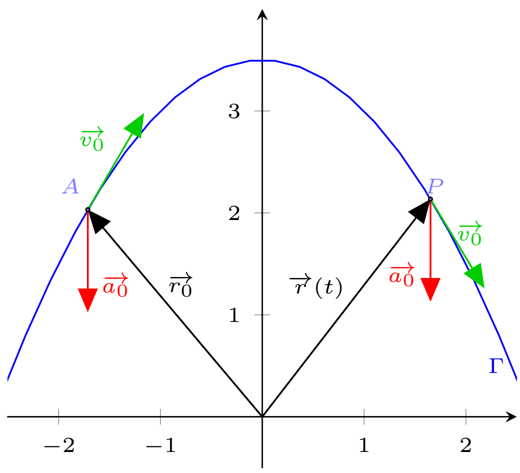


- $\vec{a}(t) = \vec{0}$
- $\vec{v}(t) = \vec{v_0}$ (2.23)
- $\vec{r}(t) = \vec{v_0}(t \cdot t_0) + \vec{r_0}$

Vérification: $\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(\Delta t + t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v_0} - \vec{v_0}}{\Delta t} = \vec{0}$

□

2. Objet qui passe par le point A l'instant t_0 : $\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{OA} = \vec{r_0}$ avec vitesse $\vec{v_0}$: $\vec{v}(t_0)$ et dont l'accélération $\vec{a_0}$ est constante.



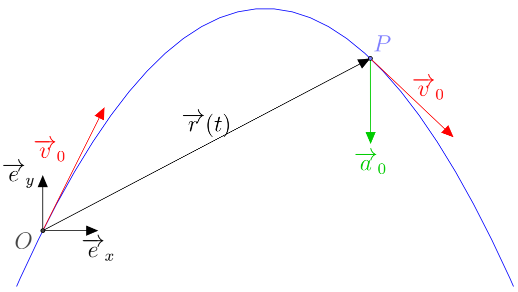
- $\vec{a}(t) = \vec{a_0} = \overrightarrow{cste}$
- $\vec{v}(t) = \vec{a_0} \cdot (t - t_0) + \vec{v_0}$ (2.24)
- $\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \cdot \vec{a_0} \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v_0} \cdot (t - t_0) + \vec{r_0}$

Vérification:

$$\vec{a}(t) \overset{(2.21)}{\underset{(2.24)}{=}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a_0} \cdot (t - \Delta t - t_0) + \vec{v_0} - \vec{a_0} \cdot (t - t_0) - \vec{v_0}}{\Delta t} = \vec{a_0}$$

□

On veut montrer que la trajectoire est une parabole d'axe verticale. On choisit l'origine O sur la trajectoire Γ et l'origine du temps $t = 0$ lorsque l'objet passe en O. On prend prend $\vec{e_x}$ perpendiculaire à $\vec{a_0}$ et $\vec{e_y}$ parallèle à $\vec{a_0}$.



- Équation horaire:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a_0} \cdot t^2 + \vec{v_0} \cdot t$$

$$\text{Selon } \vec{e_x} : x(t) = v_{0_x} \cdot t \qquad (2.25)$$

$$\text{Selon } \vec{e_y} : y(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_{0_y} \cdot t \qquad (2.26)$$

$$(2.25) \implies t(x) = \frac{x}{v_{0_x}} \qquad (2.27)$$

(2.27) $\to$ (2.26) : Équation de la trajectoire

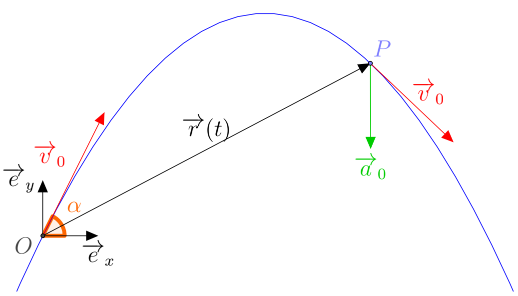
$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot \left(\frac{x}{v_{0_x}}\right)^2 + v_{0_y} \cdot \frac{x}{v_{0_y}} = -\frac{a_0}{2 \cdot v_{0_x}} \cdot x^2 + \frac{v_{0_y}}{v_{0_x}} \cdot x \qquad (2.28)$$

Cette expression du second degré en x décrit une parabole.

2.5.2 Tir au canon

On tire un obus avec vitesse initiale $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec le sol. On néglige les frottements de l'air. L'obus a une trajectoire balistique.

$$\vec{a}(t) = \vec{g} + \overrightarrow{cste} \qquad (2.29)$$



$$\vec{v}(t) = \vec{g} \cdot t + \vec{v_0} \qquad (2.30)$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g} \cdot t^2 + \vec{v_0} \cdot t \qquad (2.31)$$

où

$$\vec{g} = -g \cdot \vec{e_y}$$

et

$$\vec{v_0} = \underbrace{V_0 \cdot \cos(\alpha)}_{v_{0_x}} \cdot \vec{e_x} + \underbrace{v_0 \cdot \sin(\alpha)}_{v_{0_y}} \cdot \vec{e_y}$$

- Hauteur maximale h : $\vec{v_y}(t_h) = 0$

$$\vec{V_y}(t_h) \overset{(2.30)}{=} -y \cdot t_h + \overrightarrow{v_{0_y}} = 0 \implies t_h = \frac{\overrightarrow{v_{0_y}}}{y} = \frac{\vec{v_0} \cdot \sin(\alpha)}{y} \qquad (2.32)$$

$$h = y(t_h) \overset{(2.31)}{=} -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_h^2 + \overrightarrow{v_{0_y}} \cdot t_h \overset{(2.32)}{=} \frac{\vec{v_0}^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g} \qquad (2.33)$$

- Temps de vol: $y(t_v) = 0$

$$y(t_h) \overset{(2.31)}{=} -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_h^2 + \overrightarrow{v_{0_y}} \cdot t_h = 0 \implies t_v \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_v + \overrightarrow{v_{0_y}} \right)$$

$$\implies t_v = 0 \quad \text{ou} \quad t_v = \frac{2 \cdot \overrightarrow{v_{0_y}}}{g} = \frac{2 \cdot \overrightarrow{v_0} \cdot \sin(\alpha)}{g} \tag{2.34}$$

7/03/2019

- Distance horizontale (portée):

$$d = x(t_v) \overset{(2.31)}{=} v_{0_x} \cdot t_v = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g} \tag{2.35}$$

- Équation de la trajectoire Γ:

$$(2.28) : g(x) = -\frac{a_0}{2v_{0_x}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{0_y}}{v_{0_x}} \cdot x = -\frac{g}{2v_0 \cdot \cos^2(\alpha)} \tag{2.36}$$

- Point de la trajectoire $P(x_p, y_p)$: (où $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$)

$$(2.36) : y_p = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot (1 + \tan^2(\alpha)) \cdot x_p^2 + \tan(\alpha) \cdot x_p$$

$$\implies \frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} \cdot \tan^2(\alpha) - x_p \cdot (1 + \tan(\alpha)) + \frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} + y_p = 0 \tag{2.37}$$

C'est une équation du 2° degrés en $\tan(x)$ qui est fonction de la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ et des coordonnées x_p et y_p du point P.

- Discriminent de l'équation du 2° ordre en $\tan(\alpha)$(2.37)

$$\Delta = x_p^2 - 4 \cdot \frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} \cdot \left(\frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} + y_p \right) = x_p^2 \cdot \left(1 - \frac{2g}{v_0^2} \cdot \left(\frac{g x_p^2}{2v_0^2} + y_p \right) \right) \tag{2.38}$$

- On doit distinguer 3 cas:

  1. $\Delta > 0$: il y a deux angles α possibles (angles complémentaire). Le point P est à portée du canon avec deux trajectoire possibles.
  2. $\Delta = 0$ il y a un angle α possible. Tous les points (x, y) vérifiant $\Delta = 0$ se trouvent une parabole, dite de sécurité, d'équation.

  $$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \tag{2.39}$$

  3. $\Delta < 0$: il n'y a donc pas d'angles de tir possible. P est au delà de la parabole de sécurité.