EPFL

MAN

Mise à niveau

Physique

PREPA-033

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sylvain BRÉCHET

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Dynamique

3.1 Première loi de Newton

Un objet a un mouvement rectiligne uniforme (MRU), ainsi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{cste}$ et $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si il ne subir aucune action extérieure. (force extérieure résultante est nulle)

Exemple: Un pock qui glace à vitesse constante $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{cste}$ sur la glace d'une patinoire.

Référentiel d'inertie Tout référentiel par rapport auquel le principe d'inertie est vérifié.

Exemple: La patinoire est un référentiel d'inertie pour le pock.

Contre-exemple: La patinoire qui est en rotation autour d'un axe vectoriel. Le pock bouge par rapport à la patinoire sans qu'on agisse sur lui.

3.2 Deuxième loi de Newton

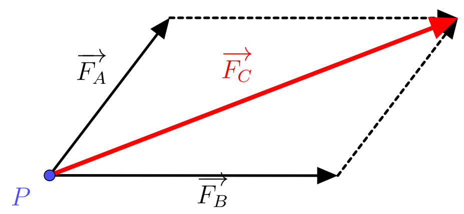
3.2.1 Force

Force ($\overrightarrow{F}$) grandeur physique qui modifie l'état de mouvement rectiligne uniforme (MRU) d'un objet.

Grandeur extensive

Grandeur vectorielle

La force satisfait la règle d'addition vectorielle (règle du parallélogramme)



$$\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = \overrightarrow{F_C}$$

Unité physique (SI): newton $[N]$ $\quad [kg \cdot \frac{m}{s^2}]$

3.2.2 Deuxième loi de Newton

Un objet a un mouvement accéléré ($\overrightarrow{v} = \overrightarrow{cste}$ et $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$)

Mathématiquement, on l'écrit:

$$\boxed{\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}} \tag{3.1}$$

où ici $\overrightarrow{F}$ est la résultante des forces extérieure qui s'exercent sur l'objet.

Remarques:

- La force est la cause, l'accélération est l'effet: l'objet de masse m subit une force $\overrightarrow{F}$ génère une accélération $\overrightarrow{a}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{F}$ sont parallèles et de même sens (i.e. $m > 0$)
- Plus la masse m de l'objet est grande, plus il est difficile de l'accéléré, c'est à dire de modifier sa vitesse.

Remarques générales:

1. Une force qui est opposée à la vitesse (triangle) va provoquer un ralentissement l'accélération $\overrightarrow{a}$ est opposé à la vitesse $\overrightarrow{v}$
2. Une force non-parallèle à la vitesse (force latéral) provoque un virage. La force est orientée vers l'intérieur du virage.
3. Si un objet est au repos, la résultante des forces que cet objet subit est nulle:

   Objet statique ($\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$) $\implies \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}, \quad \forall t$

   ⚠ La réciproque est fausse: si l'objet ne subit aucune force résultante, il n'est pas nécessairement au repos (MRU)

Méthodologie

Pour appliquer la deuxième loi de Newton dans un problème spécifique, il est recommandé de procéder de la manière suivante:

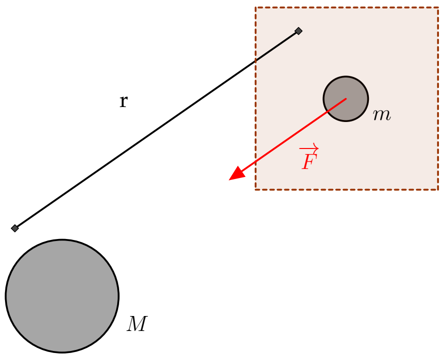
1. Faire une dessin
2. Choisir un référentiel d'inertie
3. Désigner l'objet considérée
4. Identifier toutes les forces extérieures exercées sur l'objet
5. Écrire la deuxième loi de Newton (vectoriellement)
6. Choisir un repère
7. Faire des projections

3.3 Forces particulières

3.3.1 Forces à distances

Elles sont exercées sans contact avec l'objet considéré.

1. **Force de la gravitation:** les masses s'attirent



$$||\vec{F}|| = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \tag{3.2}$$

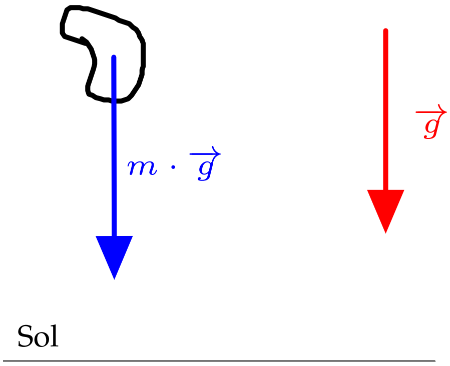
- Force proportionnelle au produit des masses
- Force inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sé-parent.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \text{ : constante universelle de la gravitation}$$

Exemples:

- La terre est attirée par le soleil
- La soleil est attirée par le terre

Près de la surface de la terre, le champ gravitationnel a une norme $g = \frac{G \cdot M}{r^2}$ qui est quasiment constant (car $r = cst$). Dans ce cas, la force de gravitation est appelé le **poids**.



$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} \tag{3.3}$$

où $\vec{g}$ est dirigé vers le centre de la terre et $||\vec{g}|| = g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$

Exemple: Objet en chute libre, la seul force que subit cet objet, c'est son poids. Alors

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \implies m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a} \implies \vec{a}(t) = \vec{g} = \overrightarrow{cste}, \quad \forall t$$

Remarques:

- L'accélération est constant et égale à $\vec{g}$ (MUA)
- L'accélération est indépendante de la masse.

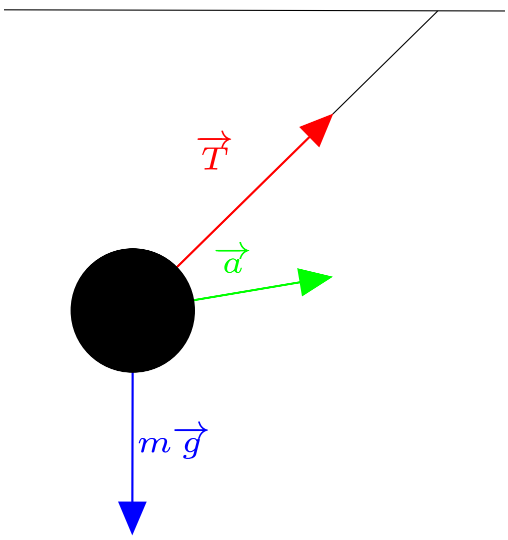
2. **Forces électrique**: les charges électrique de signes opposé s'attirent et les charges électriques de même signe se repoussent.

3. **Force magnétique**: Une charge électrique en mouvement est dérivée par un courant électriques.

3.3.2 Forces de contact

Les forces de contact sont exercées par traction (tension dans un fil), par pression (soutien d'une table) ou par cisaillement (frottement). Elles sont transmission par contact avec l'objet considéré.

Tension: pendule simple constitué d'une boule suspendue à un fil attaché au plafond.

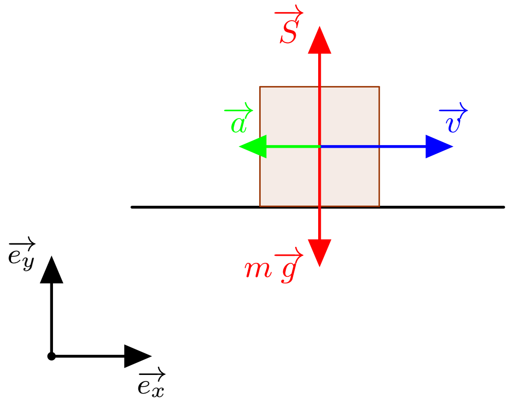


- **Loi du mouvement:**

$$m \cdot \vec{g} + \vec{T} = m \cdot \vec{a} \tag{3.4}$$

- À chaque instant la somme des forces tend à ramener le pendule à la position verticale. Il s'en suit un mouvement d'oscillation.

Soutien: Une boite qui glisse sur une table est soumise à son poids $m\vec{g}$, à la force de soutien $\vec{S}$ de la table et à une force de frottement $\vec{f}$ qui s'oppose au mouvement.



Loi de mouvement:

$$m \cdot \vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$$

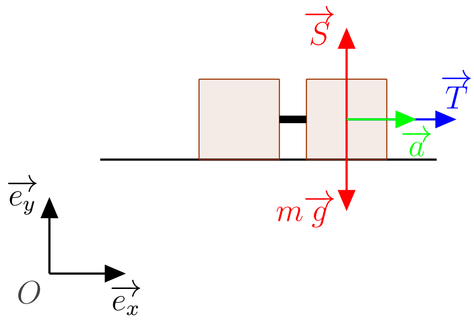
Projections sur les axes:

$$\begin{aligned} \text{selon } \vec{e_x} &: -f = m \cdot (-a) \\ \text{selon } \vec{e_y} &: -m \cdot g + S = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Comme la boite ne quitte pas la table, l'accélération est parallèles à la table. Ainsi,

$$\begin{cases} f = m \cdot a \\ S = m \cdot g \end{cases} \tag{3.6}$$

Traction: Une locomotive pousse un wagon avec une force de traction $\vec{T}$. Le wagon a un masse m et le frottement est négligeable.



Loi du mouvement:

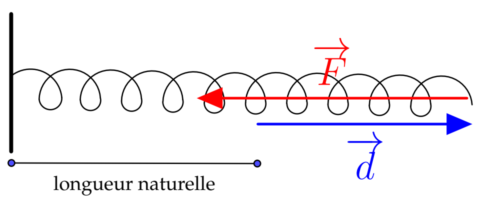
$$m \cdot \vec{g} + \vec{S} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \text{selon } \vec{e_x} &: T = m \cdot a \\ \text{selon } \vec{e_x} &: -m \cdot g + S = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} T = m \cdot a \\ S = m \cdot g \end{cases}$$

Force élastique Un ressort est formé d'un tige enroulée en spirale. Il a une certaine longueur au repos et un rigidité (difficulté à déforme). La force exercée par le ressort est proportionelle à son allongement $\vec{d}$ (vecteur déplacement de l'extrémité).

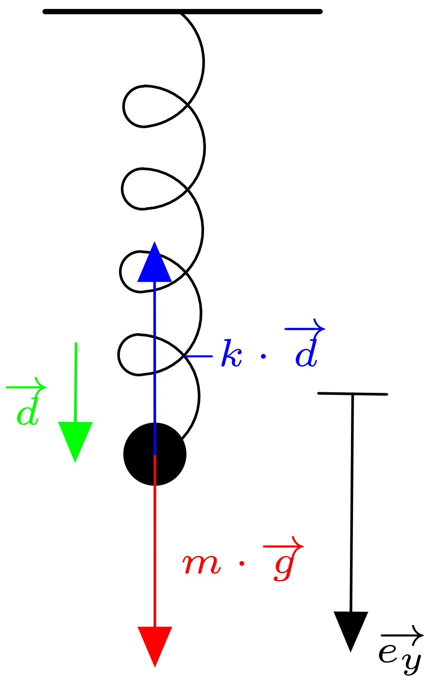


- Force élastique:

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{d} \tag{3.8}$$

- La constante de ressort k mesure sa rigidité.
- Unité physique de k: $\left[\frac{N}{kg}\right]$

Équilibre Objet immobile suspendu à un ressort



Loi du mouvement:

$$m \cdot \overrightarrow{g} - k \cdot \overrightarrow{d} = \overrightarrow{0} \tag{3.9}$$

$$\text{selon } \overrightarrow{e_y} : m \cdot g - k \cdot d = 0 \implies d = \frac{m \cdot g}{k}$$

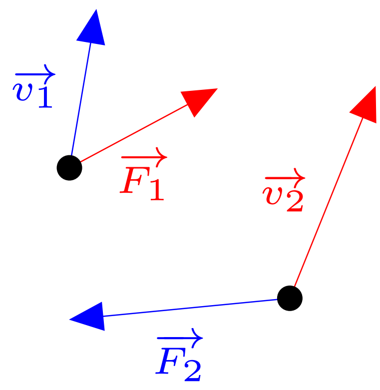
Si la période est faible, alors l'allongement sera faible également. Si la constante élastique est grande, alors l'allongement sera petit.

3.4 Quantité de mouvement

- On considère un objet de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$. La quantité de mouvement $\overrightarrow{P}$ va s'exprimer comme,
$$\overrightarrow{P} = m \cdot \overrightarrow{v} \tag{3.10}$$
- C'est une grandeur extensive et vectorielle
- Unité physique (SI): $[\frac{kg \cdot m}{s}]$
- Pour un objet de masse m constante, la 2$^{\text{ème}}$ de Newton s'écrit alors:
$$\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a} = m \cdot \dot{\overrightarrow{v}} = \frac{d}{dt}(m \cdot \overrightarrow{v}) = \dot{\overrightarrow{P}} \implies \overrightarrow{F} = \dot{\overrightarrow{P}} \tag{3.11}$$

3.4.1 Quantité de mouvement

- Come la quantité de mouvement est une grandeur extensive. La quantité de mouvement totale $\overrightarrow{P}$ d'un objet formé de n parties est la somme des quantité de mouvement de chaque parties.
$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + ... + \overrightarrow{P_n} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + ... + m_n\overrightarrow{v_n} \tag{3.12}$$
- Comme la force est une grandeur extensive, la force résultante totale $\overrightarrow{F}$ exercée sur un objet N parties est la somme des forces exercées sur chaque parties.



$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + ... + \overrightarrow{F_n} \tag{3.13}$$

Objet formé de deux parties:

$$\text{partie } 1 : \overrightarrow{F_1} = m_1 \cdot \overrightarrow{a_1}$$
$$\text{partie } 2 : \overrightarrow{F_2} = m_2 \cdot \overrightarrow{a_2}$$

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2}) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{P} = \dot{\overrightarrow{P}} \tag{3.14}$$

3.5 Centre de masse

Dans la 2^e loi de Newton: $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}$, l'accélération $\overrightarrow{a}$ est celle de l'objet. On considère un objet qui est formé de n parties dont les vecteurs position sont $\overrightarrow{r_i}$ où $i = 1, 2, ..., n$

Remarque: La quantité de mouvement totale s'écrit,

$$\overrightarrow{P} = m_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + ... + m_n \cdot \overrightarrow{v_n} = \frac{d}{dt}(m_1 \cdot \overrightarrow{r_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{r_2} + ... + m_n \cdot \overrightarrow{r_n}) = \frac{d}{dt}(m \cdot \overrightarrow{r_{\text{CM}}}) \tag{3.15}$$

Centre de masse

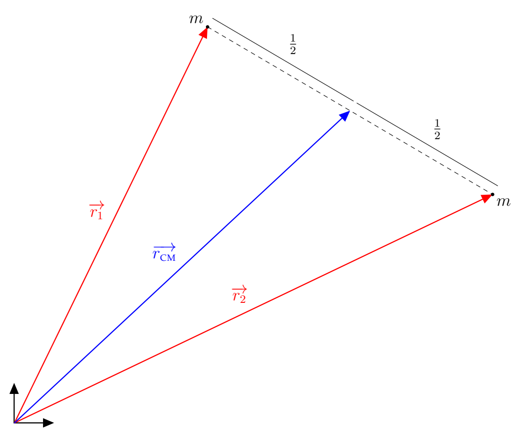
$$\overrightarrow{r_{\text{cm}}} = \frac{\overrightarrow{r_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{r_2} + ... + m_n \cdot \overrightarrow{r_n}}{m} \tag{3.16}$$

où $m = m_1 + m_2 + ... + m_n =$ cste est la masse de l'objet.

Le centre de masse est aussi appelé le centre de gravité. Il coïncide avec le barycentre (géométrique) si toutes les parties ont une masse identique.

3.5.1 Haltère symétrique

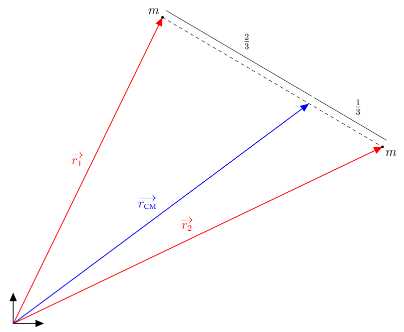
Le centre de masse (CM) d'une haltère symétrique est à équidistance (milieu) des 2 masses.



Centre de masse

$$\overrightarrow{r_{\text{CM}}} = \frac{m \cdot \overrightarrow{r_1} + m \cdot \overrightarrow{r_2}}{2m} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}) \tag{3.17}$$

3.5.2 Haltère asymétrique



Le centre de masse (CM) d'une haltère asymétrique n'est pas au milieu des masses.

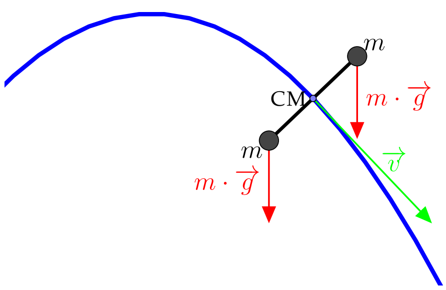
$$\overrightarrow{r_{\text{CM}}} = \frac{m \cdot \overrightarrow{r_1} + 2 \cdot m \cdot \overrightarrow{r_2}}{3m} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_1} + 2\overrightarrow{r_2}) \qquad (3.18)$$

- La quantité de mouvement $\overrightarrow{P}$ d'un objet c'est aussi celle d'une masse égale à la masse totale de l'objet située au centre de masse.

$$\overrightarrow{P} = \frac{d}{dt}(m \cdot \overrightarrow{r_{\text{CM}}}) = m \cdot \dot{\overrightarrow{r_{\text{CM}}}} = m \cdot \overrightarrow{v_{\text{CM}}}, \quad \text{où } m = \text{ cste} \qquad (3.19)$$

3.5.3 Haltère lancée

Lorsqu'on lance une haltère symétrique, les 2 masses peuvent avoir un mouvement de rotation propre autour du centre, mais le centre de masse a une trajectoire balistique.



Objet: haltère (masse $2m$)

Force: poids: $2m \cdot \overrightarrow{g}$

Loi du mouvement:

$$2 \cdot m \cdot \overrightarrow{g} = 2 \cdot m \cdot \overrightarrow{a_{\text{CM}}} \implies \overrightarrow{a_{\text{CM}}}(t) = \overrightarrow{g}, \quad \forall t \qquad (3.20)$$

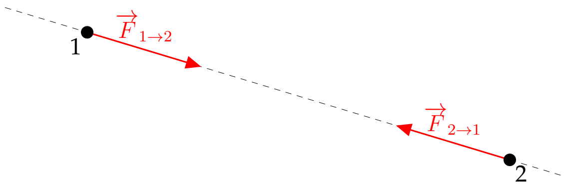
Remarque:

- Le mouvement du centre de masse est le mouvement global de l'objet (comme m de loin)
- La 2^e loi de Newton ne dit rien sur les mouvements internes à l'objet (rotations, vibrations, déformations, ...)

3.6 Troisième loi de Newton

Loi d'action-réaction

La force $\overrightarrow{F}_{1\to 2}$ exercée par la partie 1 sur la partie 2 d'un objet est de même norme, du même support et opposée à la force $\overrightarrow{F}_{2\to 1}$ exercée sur la partie 2 sur la partie 1



Mathématiquement, la troisième loi de Newton s'écrit,

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1} \implies \vec{F}_{1\to2} + \vec{F}_{2\to1} = \vec{0} \tag{3.21}$$

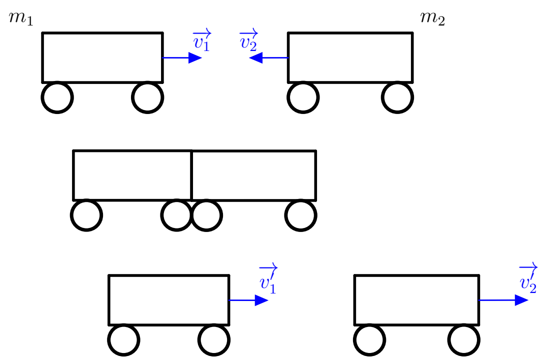
3.6.1 Deuxième loi de Newton

- On considère un objet constitué de différentes parties qui sont soit en contact, soit disjointes.
- Compte tenu de la 3^e loi de Newton, les forces internes à l'objet qui s'exercent entre les parties d'un objets s'annulent deux à deux lorsqu'on somme toutes les forces.
- Ainsi, seules les forces extérieurs, dont la résultante est notée $\vec{F}^{\text{est}}$, contribuer à modifier la quantité de mouvement totale $\vec{P}$ de l'objet (ou le mouvement du centre de masse).
- La 2^e loi de Newton s'écrit finalement,

$$\vec{F}^{\text{est}} = \dot{\vec{P}} = m \cdot \overrightarrow{a_{\text{CM}}}, \text{ ou si } m = \text{ cste} \tag{3.22}$$

Remarque: En absence de force extérieure résultante, la quantité de mouvement totale est constante.

3.6.2 Choc de 2 chariots sur un rail horizontal



Objet: deux chariots de masse m_1 et m_2

Forces extérieures: poids $m_1 \cdot \vec{g}$ et $m_2 \cdot \vec{g}$, forces de soutiens $\vec{S_1}$ et $\vec{S_2}$ qui se comprennent:

$$m_1 \cdot \vec{g} + \vec{S_1} + m_2 \cdot \vec{S_2} = \vec{0}$$

Remarque le mécanisme compliqué du chox ne joue aucun rôle (forces internes)

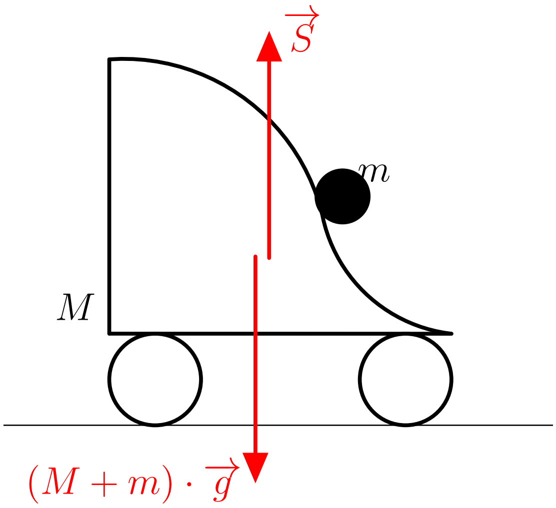
Comme la force externe résultante est nulle, $\overrightarrow{F^{\text{ext}}} = \vec{0}$, la quantité de mouvement totale est constante:

$$\vec{P} = \overrightarrow{\text{cste}}$$

$$\underbrace{m_1 \cdot \vec{v_1} + m_2 \cdot \vec{v_2}}_{\text{avant le choc}} = \underbrace{m_1 \cdot \vec{v_1'} + m_2 \cdot \vec{v_2'}}_{\text{après le choc}} \tag{3.23}$$

3.6.3 Chariot propulsé par un boulet

On considère un chariot qui est propulsé par un boulet qui s'en échappe.



Objet: chariot du masse M et du boulet de masse m

Forces (externes): poids $(M+m)\vec{g}$ et soutien du sol $\vec{S}$

selon $\vec{e_x}$:$F_x^{\text{est}} = 0$

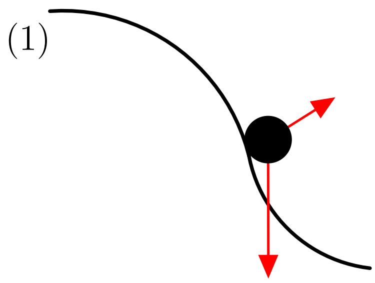
$$\Longrightarrow P_x = M \cdot V_x + m \cdot v_x = \text{ cste } (= 0)$$

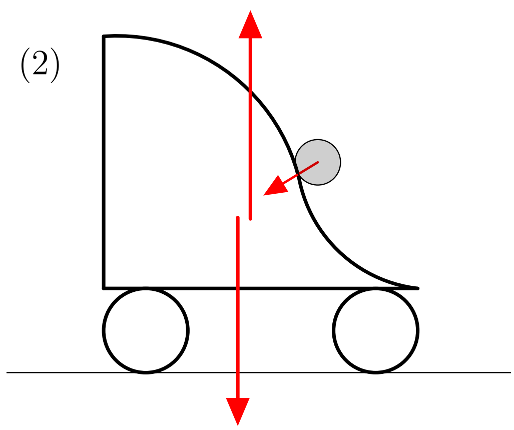
$$\Longrightarrow V_x = -\frac{m}{M} \cdot v_x \tag{3.24}$$

Le chariot et le boulet ont des vitesses de signe opposé.

Remarques:

- Selon $\vec{e_y}$, $F_y^{\text{est}} \neq 0$, car le boulet descend alors que le chariot reste à la même hauteur.
- Le boulet et le chariot peuvent être pris séparément.





Objet: boulet (1)

Forces: poids $m \cdot \vec{g}$, action du chariot $\vec{N}$,

$$m \cdot \vec{g} + \vec{N} = m \cdot \vec{a_m} \tag{3.25}$$

L'accélération est dirigée le long du plan incliné vers la droite.

Objet: chariot (2)

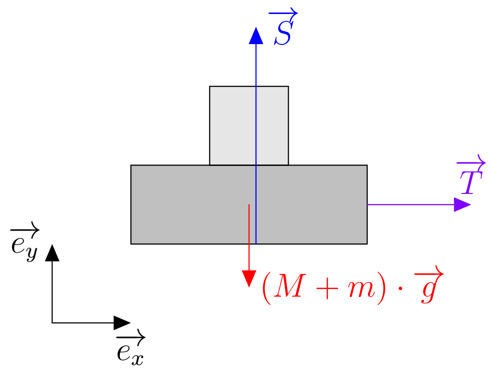
Forces: poids $M \cdot \vec{g}$, soutien du sol $\vec{S}$, réaction du chariot $\vec{N}$,

$$M \cdot \vec{g} + \vec{S} - \vec{N} = M \cdot \vec{a_M} \tag{3.26}$$

L'accélération est dirigée vers la gauche.

3.6.4 Blocs superposés

On considère un objet constitué de deux blocs superposés. L'un est tracté et glisse sans frottements sur le sol. L'autre bloc est posé sur le premier. Les deux blocs sont immobiles l'un par rapport à l'autre; leur accélération $\overrightarrow{a}$ est identique.

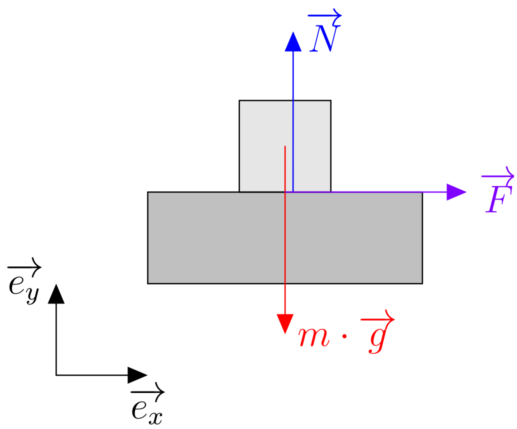


Objet: les deux blocs

Forces: Poids $(M+m)\cdot\overrightarrow{g}$, soutien $\overrightarrow{S}$, traction $\overrightarrow{T}$

$$\overrightarrow{T}+(M+m)\cdot\overrightarrow{g}+\overrightarrow{S}=(M+m)\cdot\overrightarrow{a}$$

$$\text{selon } \overrightarrow{e_x}: \quad T=(M+m)\cdot a \tag{3.27}$$



Objet: le bloc supérieur

Forces: Poids $m\cdot\overrightarrow{g}$, soutien du bloc inférieur $\overrightarrow{N}$, frottement $\overrightarrow{F}$

$$\overrightarrow{F}+m\cdot\overrightarrow{g}+\overrightarrow{N}=m\cdot\overrightarrow{a}$$

$$\text{selon } \overrightarrow{e_x}: \quad F=m\cdot a \tag{3.28}$$

A l'aide des équations du mouvement (3.27) et (3.28)

$$\begin{cases} T=(M+m)\cdot a & (3.27) \\ F=m\cdot a & (3.28) \end{cases}$$

On fixe l'expression de la norme F de la force du frottement

$$f=\frac{m}{m+M}\cdot T \tag{3.29}$$

Remarque: En considérant comme objet le bloc inférieur, on aurait obtenu la loi du mouvement suivante:

$$\overrightarrow{T}+M\overrightarrow{g}+\overrightarrow{S}-\overrightarrow{F}-\overrightarrow{N}=M\cdot\overrightarrow{a}$$

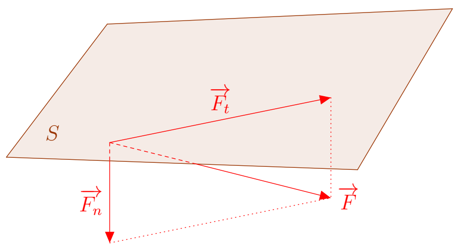
où les signes négatifs sont le résultat de la 2^e loi de Newton

$$\text{selon } \overrightarrow{e_x}: T-F=m\cdot a \tag{3.30}$$

Les équations du mouvement (3.27), (3.28) et (3.30) sont linéairement dépendantes

3.7 Pression

On considère une force $\vec{F}$ exercée sur la surface S d'un objet:



On décompose la force $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{F_n} + \vec{F_t} \tag{3.31}$$

où

- $\vec{F_n}$ = force normale, de compression
- $\vec{F_t}$ = force tangente, de cisaillement

3.7.1 Pression moyenne

- La pression moyenne est définie comme le rapport de la norme de la force normale et de la surface.

$$p_{moy} = \frac{\|\vec{F_n}\|}{S} \tag{3.32}$$

- Elle nous donne la répartition moyenne de la force normale sur la surface de l'objet.
- Unité physique de la pression (SI): Pascale $[Pa]$ = $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ = $\left[\frac{kg}{m \cdot s^2}\right]$

Exemple: Une personne de masse $m = 64kg$ se tient sur un talon. On calcule la pression moyenne exercée sur le pieds du voisin.

- À l'équilibre, la force exercée sur le sol est le poids de la personne $m \cdot \vec{g}$. Ainis,

$$p_{moy} = \frac{m \cdot g}{S} \tag{3.33}$$

- Talon plat:

$$S = 16cm^2 \implies p_{moy} = \frac{640N}{16 \cdot 10^{-4}m^2} = 4 \cdot 10^5 Pa$$

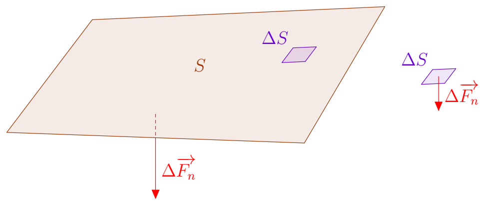
- Talon plat:

$$S = 1cm^2 \implies p_{moy} = \frac{640N}{1 \cdot 10^{-4}m^2} = 64 \cdot 10^5 Pa$$

Pour exercer la même pression sur le sol avec un talon plat qu'avec un talon aiguille, il faudrait que la personne porte 15 autre personnes de masse identiques.

3.7.2 Pression locale

La force normale $\vec{F_n}$ n'agit à priori pas de la même manière sur toute la surface d'air S. En divisant la surface en éléments d'air ΔS, on met en évidence la contribution de $\Delta\vec{F_n}$ sur chaque ΔS.



Surface totale: $S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots$

Force normale: $F_n = \Delta F_{n,1} + \Delta F_{n,2} + \ldots$

Pression locale:

$$p(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\|\Delta \vec{F_n}\|}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}$$

Remarque: La pression est

1. Un scalaire positif, $p \geq 0$
2. Définie en tout point $\vec{r}$ de la surface, à priori différente d'un à un autre: c'est une fonction de l'espace (et du temps)

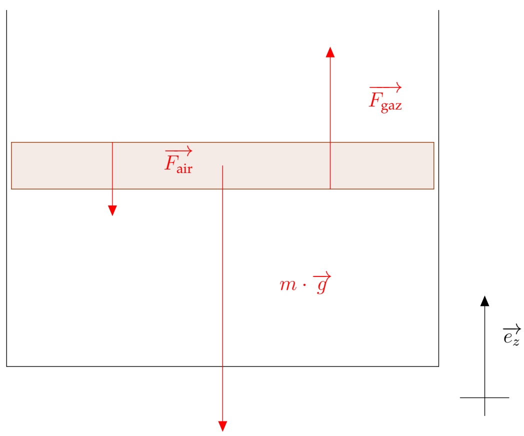
$$p \equiv p(\vec{r}, t)$$

Cas particuliers Si la force normale est uniforme sur la surface S, alors la pression est identique en tout point et est égale à la pression moyenne. Ainsi

$$\|\vec{F_n}\| = p \cdot S \tag{3.34}$$

Exemple: La pression de l'air due aux chocs des molécules d'aires sur les faces.

3.7.3 Gaz dans un cylindre



Objet: piston

Forces: poids $m \cdot \vec{g}$ et forces de pression $\vec{F}_{\text{air}}$ et $\vec{F}_{\text{gaz}}$

$$m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{\text{air}} + \vec{F}_{\text{gaz}} = \vec{0} \quad \text{(à l'équilibre)}$$

$$\text{selon } \vec{e_x} : -m \cdot g - p_{\text{air}} \cdot S + p_{\text{air}} \cdot S = 0 \implies$$

$$p_{\text{gaz}} = p_{\text{air}} + \frac{m \cdot g}{S}$$

3.7.4 Loi des gaz parfaits

Un gaz parfait est un modèle de gaz idéalisé. Lorsque la pression d'un gaz est suffisamment basse, les gaz réels peuvent être modélisé par les modèles de gaz parfait.. Dans le cas contraire, ils sont décrit par le mode du gaze de Van der Waals.

Équations d'état du gaz parfait

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T = n \cdot R \cdot T \tag{3.35}$$

où

- p est la pression du gaz $[Pa]$
- V est le volume occupé par le gaz $[m^3]$
- T la température du gaz $[K]$
- k est la constante de Boltzmann: $x = 1.38 \cdot 10^{-23} \left[\frac{J}{K}\right]$
- N_A est le nombre d'Avogadro: $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ molécules
- n est le nombre de moles de gaz: $n = \frac{N}{N_A}$
- R est la constante de gaz parfait: $R = N_A \cdot k = 8.31 \left[\frac{J}{K \cdot mol}\right]$

3.8 Hydrostatique

3.8.1 Définition d'un fluide

Si on applique une force tangentielle de cisaillement $\overrightarrow{F_t}$ pour obtenir un petit déplacement tangentiel d, le corps s'oppose à ce cisaillement.

- Le corps est **solide** s'il faut exercer une force de cisaillement en continu pour maintenir un déplacement.

  Exemple: Modèle linéaire

  $$F_t = k \cdot d \quad \text{(force élastique)}$$

  En régime élastique, le solide reprend sa forme initiale si on supprime la force de cisaillement.

- Le corps est un **fluide**, si la force de cisaillement nécessaire pour maintenir le déplacement diminue au cours du temps. Après un temps suffisamment grand, plus aucun cisaillement n'est nécessaire, le fluide s'est adapté à la contrainte.

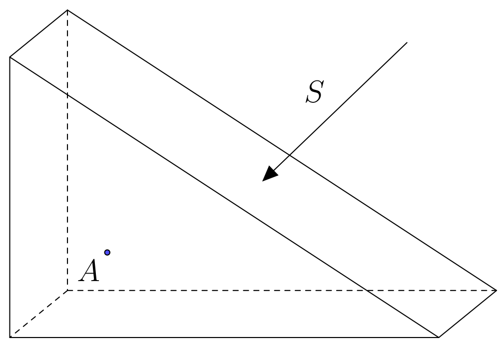
  Exemple: Modèle exponentiel

  $$F_t = k \cdot d \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

  Si on maintient ce cisaillement (même très faible), le fluide se transforme continuellement.

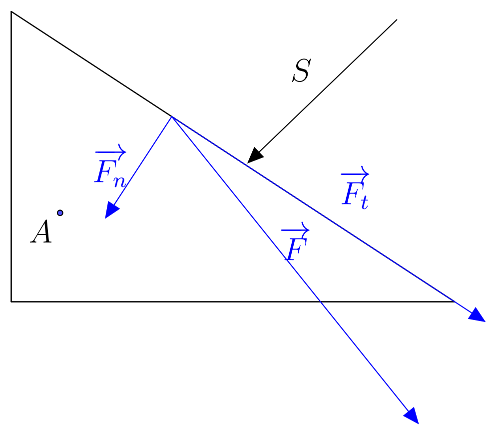
3.8.2 Forces dans un fluide au repos

L'hydrostatique est l'étude des fluides au repos.



Dans un fluide, on considère un petit volume autour du point A.

En coupe,



Le fluide environnant exercent une force $\overrightarrow{F}$ sur chaque face de surface S:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_t} + \overrightarrow{F_n} \tag{3.36}$$

Comme le fluide est au repos il n'exerce pas réellement de cisaillement (sinon il se déforment):

$$\overrightarrow{F_t} = \overrightarrow{0}$$

. Ainsi la force $\overrightarrow{F}$ est normale à la face

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_n}$$

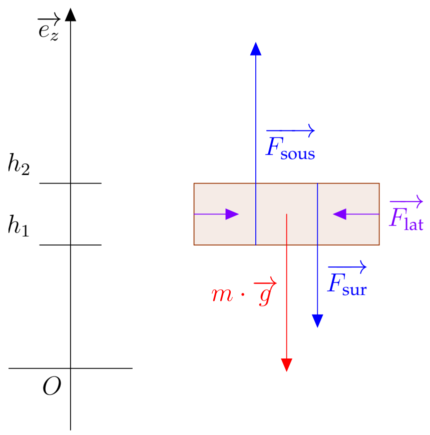
3.8.3 Loi de Pascal

L'intensité de la force exercée par le fluide sur la surface ne dépend pas de l'orientation de la surface. Elle dépend de la taille de la surface et de sa position $\overrightarrow{r}$ dans le fluide. Il suffit de connaître la pression (force par unité de surface) de fluide $p(\overrightarrow{r})$.

Remarque: Lors de chocs sur une surface, les molécules changent de quantité de mouvement et subissent une force de la part de la surface. La 3^e loi de Newton implique que les molécules exercent une force, nommée de pression.

3.8.4 Loi d'hydrostatique

On considère un fluide au repos, soummis à la force de la gravité. Par experience, la pression augmente avec la profondeur (oreilles).



Objet: parallélépipède rectangle de fluide entre deux niveaux h_1 et h_2

Forces poids $m \cdot \overrightarrow{g}$ et forces de pression verticale $\overrightarrow{F_{\text{sur}}}$ et $\overrightarrow{F_{\text{sous}}}$ et latérales $\overrightarrow{F_{\text{lat}}}$

$$m \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_{\text{sous}}} + \overrightarrow{F_{\text{sur}}} + \overrightarrow{F_{\text{lat}}} - \overrightarrow{F_{\text{lat}}}$$

$$\text{selon } \overrightarrow{e_z} : -m \cdot g - F_{\text{sur}} + \overrightarrow{F_{\text{sous}}} = 0$$

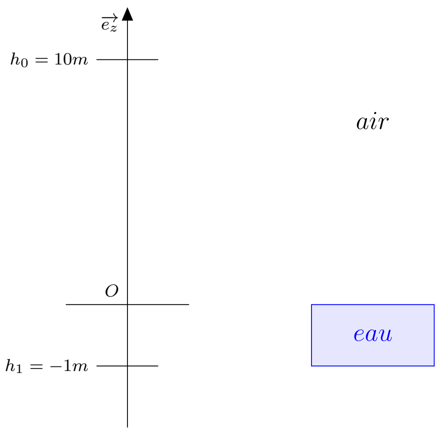
- Fluide homogène: $-\rho_{fl} \cdot (h_2 - h_1) \cdot S \cdot g - p(h_2) \cdot S + p(h_1) \cdot S = 0$

$$p(h_1) - p(h_2) = \rho_{fl} \cdot g(h_2 - h_1) \tag{3.37}$$

- La différence de pression entre deux niveaux est due au poids du fluide par unité de surface entre les niveaux.

3.8.5 Pression d'une colonne d'air et d'eau

Connaissant la pression de l'air $p(h_0) = p_0 = 1atm$ à une hauteur de $10m$ au dessus du niveau de l'eau, on chercher à déterminer la pression $p(h_1)$ à $1m$ de profondeur dans l'eau



Dans l'air:

$$p(0) - p(h_0) = \rho_{\text{air}} \cdot g \cdot (h_0 - 0), \quad (h_0 > 0)$$

Dansl l'eau:

$$p(h_1) - p(0) = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (0 - h_1), \quad (h_1 < 0)$$

Ainsi,

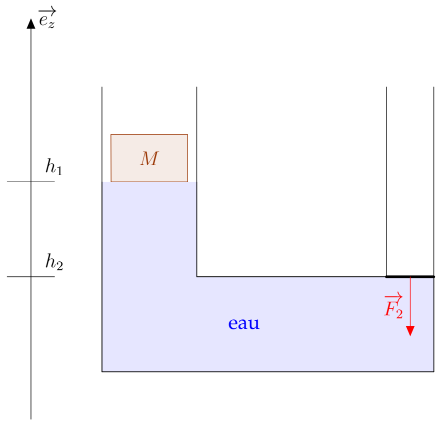
- $p(0) = p(h_0) + \rho_{\text{air}} \cdot g \cdot h_0 = (1.013 \cdot 10^5 + 1.3 \cdot 9.81 \cdot 10)Pa = 1.014 \cdot 10^5 Pa$
- $p(h_1) = p(0) + \rho_{\text{eau}} g \cdot (-h_1) = (1.014 \cdot 10^5 + 1.3 \cdot 9.81 \cdot 1)Pa = 1.112 \cdot 10^5 Pa$

Remarques:

- La vibration de pression de l'air peu souvent être négligée
- Pour $1m$ de profondeur dans l'eau, la pression augmente de 10%

3.8.6 Surfaces connecté par un fluide

- La pression est identique en tous points d'un même niveau. Dans les vases communicants, les niveaux à l'air libre sont les mêmes (sinon le fluide ne serait pas au repos)
- Soient deux colonnes de sections S_1 et S_2 reliées par l'eau



Quelle force $\vec{F_2}$ faut-il exercer à droite pour maintenir une différence de niveau $\Delta h = h_1 - h_2$ entre les colonnes d'eau?

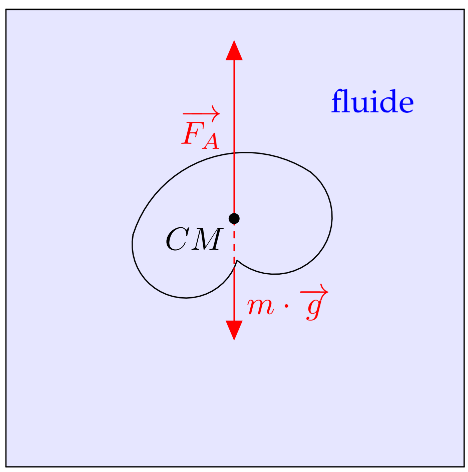
- Au niveaux de h_2, la pression est la même dans les 2 colonnes

$$\cancel{p_a} + \frac{F_2}{S_2} = \cancel{p_a} + \frac{M_a}{S_1} + \rho_{\text{eau}} g \cdot (h_1 - h_2) \implies F_2 = M \cdot g \cdot \frac{S_2}{S_1} + \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h_2 - h_1) cdtoS_2$$

- En choisissant S_2 petite, F_2 peut être petite. C'est le principe de fonctionnement d'une propre hydraulique.

3.8.7 Principe d'Archimède

La pression augmente avec la profondeur, donc un corps immergé subit une résultante des forces de pression dirigée vers le haut appelée poussée d'Archimède $\vec{F_A}$.



Objet: élément de fluide de masse m et de volume V_{fl}

Forces: $m \cdot \vec{g}$ poids, forces de pression (poussée d'Arhcimède)

$$m \cdot \vec{g} + \vec{F_A} = \vec{0} \implies \vec{F_A} = -\rho_{\text{fl}} \cdot V_{\text{fl}} \cdot \vec{g}$$

Le point d'application de la poussée d'Archimède est le centre de masse de l'élément de fluide.

Si on remplace l'élément de fluide par un autre corps au repos de même forme et de même volume, les forces exercées par le fluide environnant ne changent pas.

Poussée d'Archimède:

$$\overrightarrow{F_A} = -\rho_{\text{fl}} \cdot V_{\text{im}} \cdot \overrightarrow{g} \tag{3.38}$$

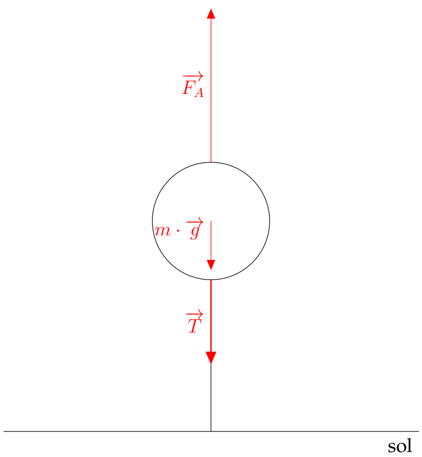
où V_{im} est le volume immergé du corps.

Remarque: Comme la poussée d'Archimède est une conséquence de la loi de l'hydrostatique qui donne la différence de pression dans un même fluide, un corps flottant entre deux fluides subit deux poussées d'Archimède, selon le volume immergé dans chacun des fluides.

Exemple: Un ballon sur l'eau se trouve partiellement dans l'eau et partiellement dans l'air.

3.8.8 Applications de la force d'Archimède

1. Ballon de foire retenu au sol par un fil.



Objet: ballon

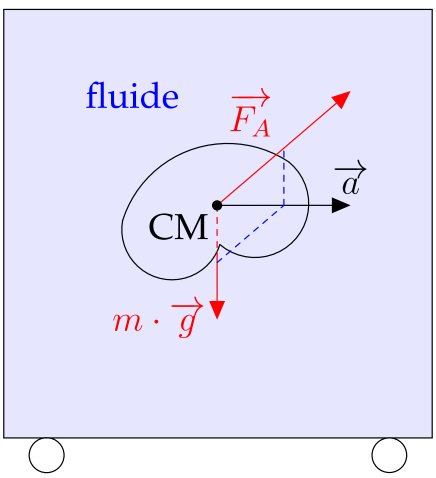
Forces: poids $m \cdot \overrightarrow{g}$, tension $\overrightarrow{T}$, poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$

$$m \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F_A} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{T} = -m \cdot \overrightarrow{g} - \overrightarrow{F_A} = (\rho_{\text{air}} \cdot V - m) \cdot \overrightarrow{g} \tag{3.39}$$

Le fil est vertical et tendu si $\rho_{\text{air}} \cdot V - m > 0$

2. Fluide qui se trouve dans un chariot accéléré



Objet: élément de fluide

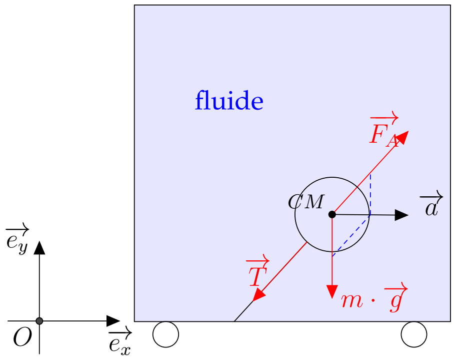
Forces: poids $m \cdot \overrightarrow{g}$, forces de pression (poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$)

$$m \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_A} = m \cdot \overrightarrow{a} \tag{3.40}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{F_A} = -\underbrace{\rho_{\text{fl}} \cdot V_{\text{im}}}_{=m} \cdot (\overrightarrow{g} - \overrightarrow{a})$$

⚠ $\overrightarrow{F_A}$ n'est pas verticale (hydrodynamique si $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$)

3. Ballon de foire au plancher d'un chariot accéléré



Objet: ballon

Forces: poids $m \cdot \overrightarrow{g}$, tension du fil $\overrightarrow{T}$, poussée d'Archimède

$$m \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{T} = m \cdot \overrightarrow{a} \quad (3.41)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{T} = -m\cdot(\overrightarrow{g}-\overrightarrow{a})-\overrightarrow{F_A} = (\rho_{\text{air}}\cdot V - m)\cdot(\overrightarrow{g}-\overrightarrow{a})$$

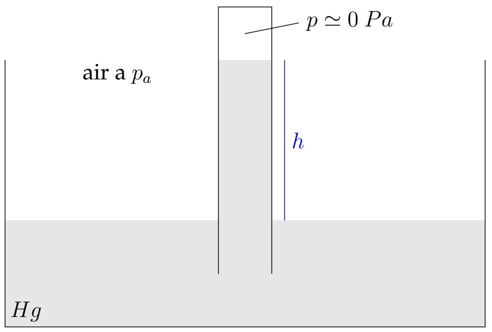
Le fil est tendu si et seulement si $\rho_{\text{air}} \cdot V - \underbrace{m}_{\rho_{\text{gaz}}\cdot V} > 0$ et l'angle est donné par:

$$\tan(\alpha) = \frac{T_x}{T_y} = \frac{-(\rho_{\text{air}} \cdot V - m)\cdot a}{-(\rho_{\text{air}} \cdot V - m)\cdot g} = \frac{a}{g}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{g}\right) \quad (3.42)$$

3.8.9 Unité de pression: le $mmHg$

La pression atmosphérique peut être donnée par la hauteur d'une colonne de liquide dans un tube.



- Un tube vide, fermé supérieurement, plong dans du mercure (Hg). Sans l'effet de la pression ambiante p_a, le mercure monte dans le tube.
- La pression p_a est partout la même au niveau de l'interface air-mercure.

Sous la colonne de mercure,

$$p_{Hg} = p_a = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h \iff h = \frac{p_a}{\rho_{Hg} \cdot g} \quad (3.43)$$

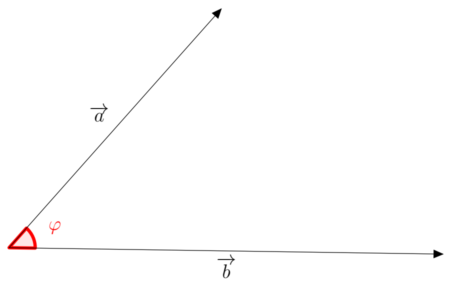
A une atmosphère, la hauteur de la colonne est de $760mm$, on a la relation,

$$\frac{h}{760mm} = \frac{p_a}{1atm} \quad (3.44)$$

3.9 Deux intermèdes

3.9.1 Produit scalaire

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Leur produit scalaire s'écrit:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\phi) \tag{3.45}$$

où ϕ est l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Le produit scalaire est une mesure du parallélisme de deux vecteurs.

Propriétés:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Si l'angle est aigu: $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \iff \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
- si l'angle est obtus: $\phi \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \iff \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$
- Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux: $\phi \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Si $\vec{a} \equiv \vec{b} \implies \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\|$ et $\cos(\phi) = \cos(0) = 1 \implies \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

Cas particuliers

$$\|\vec{b}\| = 1 \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\phi)$$

est la projection (avec signe) du vecteur $\vec{a}$ le long du vecteur unitaire $\vec{b}$. On peut ainsi obtenir les composantes d'un vecteur $\vec{a}$ dans un repère orthonormée $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ par produit scalaire:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e_x}$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e_y}$$

3.9.2 Dérivée temporelle d'un produit

La dérivé temporelle d'un produit (algébrique, scalaire, vectoriel) se calcule come suit:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(AB) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(AB)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[A(t+\Delta t) \cdot B(t+\Delta t) - A(t) \cdot B(t)\right] \\
\Delta(AB) &= A(t+\Delta t) \cdot B(t+\Delta t) - A(t) \cdot B(t+\Delta t) + A(t) \cdot B(t+\Delta t) - A(t) \cdot B(t) \\
&= (A(t+\Delta t) - A(t)) \cdot B(t+\Delta t) + A(t) \cdot (B(t+\Delta t) - B(t)) \\
&= \Delta A \cdot B(t+\Delta t) + A(t) \cdot \Delta B \\
\frac{d}{dt}(AB) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(AB)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \cdot \overbrace{B(t+\Delta t)}^{\to B(t)} + \lim_{\Delta t \to 0} A(t) \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} t) - B(t))
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(AB) = \dot{A}B + A\dot{B} \tag{3.46}$$

Pour un vecteur $\overrightarrow{v} = v \cdot \overrightarrow{e_t}$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{v} = \frac{d}{dt}(v \cdot \overrightarrow{e_t}) = \dot{v} \cdot \overrightarrow{e_t} + v \cdot \dot{\overrightarrow{e_t}} \tag{3.47}$$

Remarque: Le premier terme $\dot{v} \cdot \overrightarrow{e_t}$ correspond à la dérivée du vecteur $\overrightarrow{v}$ lorsque sa norme varie et son orientation reste constante. Le deuxième $v \cdot \dot{\overrightarrow{e_t}}$ correspond à la dérivée du vecteur $\overrightarrow{v}$ lorsque son orientation varie mais sa norme v reste constante.
Pour le carré de la norme du vecteur $\overrightarrow{v}$:

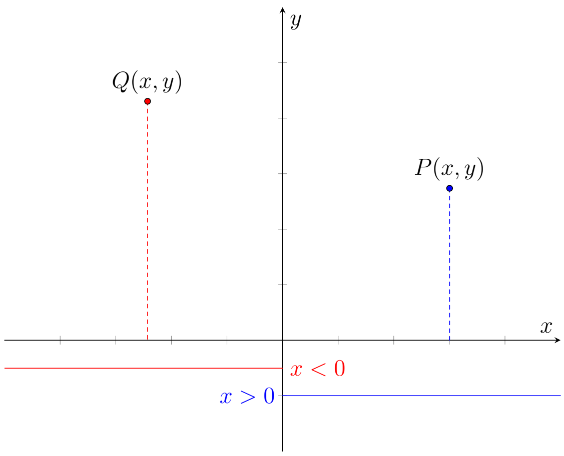
$$\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}) = \dot{\overrightarrow{v}} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \dot{\overrightarrow{v}} = 2 \cdot \overrightarrow{v} \cdot \dot{\overrightarrow{v}} \tag{3.48}$$

Remarque: Lorsque le norme du vecteur $\overrightarrow{v}$ est constante et $\dot{\overrightarrow{v}} \neq 0$, le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthohonale à sa dérivée temporelle $\dot{\overrightarrow{v}}$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{v} \cdot \dot{\overrightarrow{v}} = 0$

3.10 Repère lié au mouvement

3.10.1 Abscisse curviligne, repère

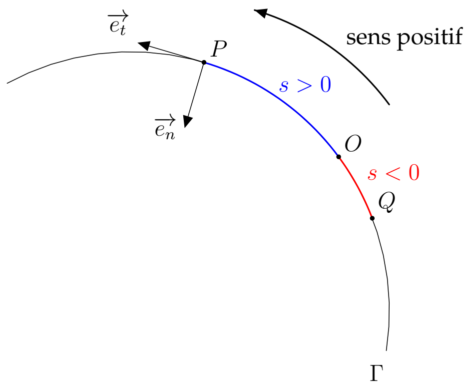
Rappel: Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$



- x est la coordonnée d'abscisse et $\overrightarrow{e_x}$ donne le sens positif:
- $x > 0$: P est devant O selon $\overrightarrow{e_x}$
- $x < 0$: Q est derrière O selon $\overrightarrow{e_x}$

Généralisation à une courbe Γ du plan: On prend un point O sur Γ comme origine et on choisit un sens positif de parcours. La position d'un objet sur Γ est donné par la longueur s (avec signe) mesurée le long de Γ.

Abscisse curviligne

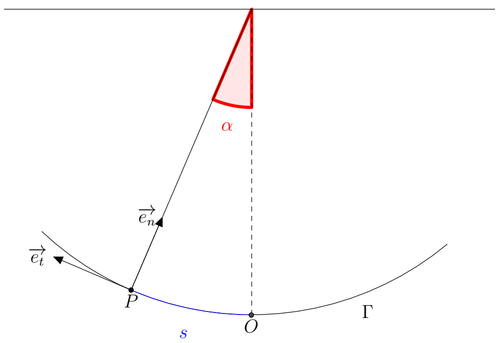


- s est l'abscisse curviligne
- $s > 0$: P est devant O selon $\vec{e_t}$
- $s < 0$: Q est derrière O selon $\vec{e_t}$

On définit un repère orthonormé mobile lié au point matériel $P(P, \vec{e_t}, \vec{e_n})$ qui se déplace avec P le long de Γ.

1. $\vec{e_t}$ est un vecteur normé, tangent à la trajectoire Γ et donnant le sens positif du parcours
2. $\vec{e_n}$ un vecteur normé, normal à Γ et formant en P un angle $\frac{\pi}{2}$ avec $\vec{e_t}$ (orienté vers l'intérieur)

Exemple:



Abscisse curviligne: $s = L \cdot \alpha$ où $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\alpha > 0$: gauche

$\alpha < 0$: droite

3.10.2 Vitesse scalaire

En tout point de la trajectoire Γ d'un objet, la vitesse est toujours tangente à la trajectoire s'écrit,

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e_t}$$

où v est la composante scalaire de la vitesse le long de la trajectoire Γ et $\vec{e_t}$ est le vecteur unitaire tangent.

- La vitesse scalaire est définie comme la dérivée temporelle de l'abscisse curviligne:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \tag{3.49}$$

- Unité physique (SI): $\left[\frac{m}{s}\right]$

Remarque: $\|\overrightarrow{v}\| = v$ (vitesse instantanée)

Exemple: Trajet Lausanne-Evian:

- Vitesse moyenne:

$$\|\overrightarrow{V_{\text{moy}}}\| = \|\frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t}\| - \frac{15km}{1.5h} = 10\frac{km}{h}$$

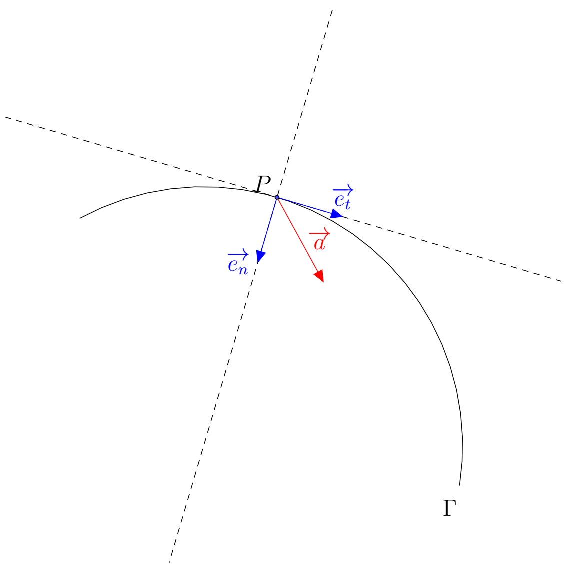
- Vitesse scalaire moyenne:

$$V_{\text{moy}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120km}{1.5h} = 80\frac{km}{h}$$

$$\Longrightarrow \|\overrightarrow{v_{\text{moy}}}\| \neq V_{\text{moy}}$$ ⚠

3.10.3 Accélération tangentielle et normale

En tout point P de la trajectoire Γ d'un objet, l'accélération se décompose dans un repère $(P, \overrightarrow{e_t}, \overrightarrow{e_n})$ comme suit:



Accélération:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n} \tag{3.50}$$

Accélération tangentielle:

$$\overrightarrow{a_t} = a_t \cdot \overrightarrow{e_t} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_t}) \cdot \overrightarrow{e_t} \text{ où } \|\overrightarrow{e_t}\| = 1$$

Accélération normale:

$$\overrightarrow{a_n} = a_n \cdot \overrightarrow{e_n} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_n}) \cdot \overrightarrow{e_n} \text{ où } \|\overrightarrow{e_n}\| = 1$$

1. L'accélération tangentielle scalaire est l'accélération le long de la trajectoire et donc la dérivée temporelle de la vitesse scalaire.

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v} = \ddot{s} \tag{3.51}$$

Unité physique (SI): $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

- $a_t > 0$: v augmente (l'objet va plus vite dans le sens $\overrightarrow{e_t}$)
- $a_t < 0$: v diminue (l'objet va plus lentement dans le sens $\overrightarrow{e_t}$)

2. L'accélération normale scalaire est la dérivée temporelle de la direction de la vitesse $\overrightarrow{v}$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \tag{3.52}$$

où R est le rayon de courbure de la trajectoire à un instant donné (rayon du cercle osculateur passant par trois points infiniment proches de la trajectoire).

Unité physique (SI): $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

L'accélération normale est toujours orientée vers l'intérieur de la trajectoire.

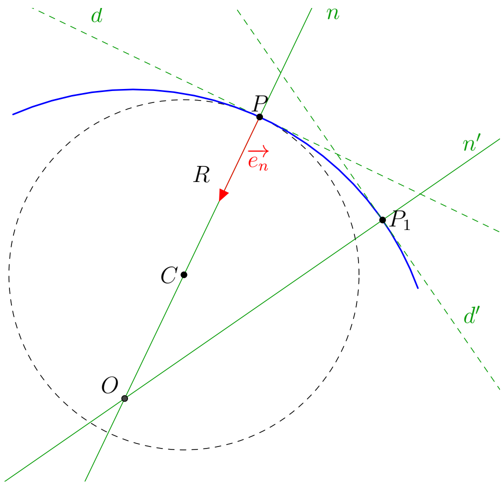
Remarque: Les relations (3.51) et (3.52) sont une conséquence des intermèdes 3.9, comme on va le montrer.

En effet, l'accélération s'écrit comme,

$$\overrightarrow{a} = \dot{\overrightarrow{v}} = \frac{d}{dt}(v \cdot \overrightarrow{e_t}) = \dot{v} \cdot \overrightarrow{e_t} + v \cdot \dot{\overrightarrow{e_t}}$$

Comme $\|\overrightarrow{e_t}\|^2 = 1$; $\frac{d}{dt}\|\overrightarrow{e_t}\|^2 = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{e_t} \cdot \overrightarrow{e_t}) = \dot{\overrightarrow{e_t}} \cdot \overrightarrow{e_t} + \overrightarrow{e_t} \cdot \dot{\overrightarrow{e_t}} = 2 \cdot \overrightarrow{e_t} \cdot \dot{\overrightarrow{e_t}} = 0$ La dérivée temporelle $\dot{\overrightarrow{e_t}}$ est donc soit nulle, soit normale à $\overrightarrow{e_t}$. Ainsi $\overrightarrow{a_t} = \dot{v} \cdot \overrightarrow{e_t}$ et $\overrightarrow{a_n} = v \cdot \dot{\overrightarrow{e_t}}$

On considère maintenant un objet sur une trajectoire à deux instant proche t et $t' = t + \Delta t$



- A l'instant t: position $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$, tangente d, normale n, vitesse $\overrightarrow{v}$
- Le cercle osulateur est un cercle de centre C et de rayon R
- A l'instant $t' = t + \Delta t$: position $\overrightarrow{r}' = \overrightarrow{OP}'$, tangente d', normale n', vitesse $\overrightarrow{v}'$

- L'intersection des normales n et n' définit l'origine O. Ainsi

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r} = \overrightarrow{v}' \cdot \overrightarrow{r} = 0$$

- Alors, avec

$$\Delta \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}' - \overrightarrow{r}$$

et

$$\Delta \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}' - \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{v} \cdot \Delta \overrightarrow{r} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r}' - \underbrace{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r}}_{=0} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r}' - \underbrace{\overrightarrow{v}' \cdot \overrightarrow{r}'}_{=0} a = -\Delta \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r}'$$

- En divisant par Δt, on obtient:

$$\overrightarrow{v} \cdot \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} = -\frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{r}'$$

- Dans la limite d'un déplacement infinitésimal,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{v} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \cdot \vec{r}' \tag{3.53}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v};\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a};\ \lim_{\Delta t \to 0} \vec{r}' \cdot (t + \Delta t) = \vec{r}(t)$$

De plus, dans la limite d'un déplacement infinitésimal, le point P' se trouve sur le cercle osulateur passant par P. Ainsi, l'origine coïncide avec le centre du cercle osulateur, i.e.

$$O \equiv C$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{r}' = \vec{r} = \overrightarrow{CP} = -R \cdot \vec{e_n}$$

Donc (3.53) devient

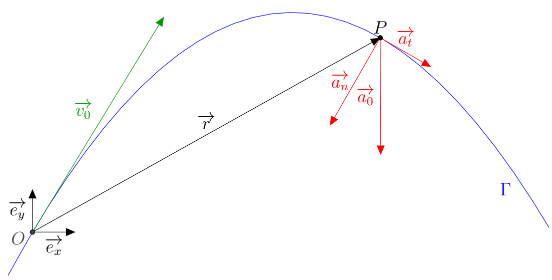
$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 = -\vec{a} \cdot \vec{r} = -(\cancel{a_t \cdot \vec{e_t}} + a_n \cdot \vec{e_n}) \cdot (-R \cdot \vec{e_n}) = R \cdot a_n \cdot \underbrace{\vec{e_n} \cdot \vec{e_t}}_{=1} = R \cdot a_n$$

Ainsi,

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

3.10.4 Trajectoire balistique

On cherche à déterminer, l'accélération au point P de Γ



- Équation de la parabole:

$$y(x) = -\frac{a_0}{2V_{0x}^2} \cdot x^2 + \frac{V_{0y}}{V_{0x}} \cdot x$$

où $a_0 > 0 \quad V_{0x}, V_{0y} > 0$

- Pente de la tangente $P(x,y)$:

$$m = \frac{dy}{dx} = -\frac{a_0}{V_{0x}^2} \cdot x + \frac{V_{0y}}{V_{0x}}$$

Vecteurs $\vec{e_t}, \vec{e_n}$ et $\vec{a_0}$

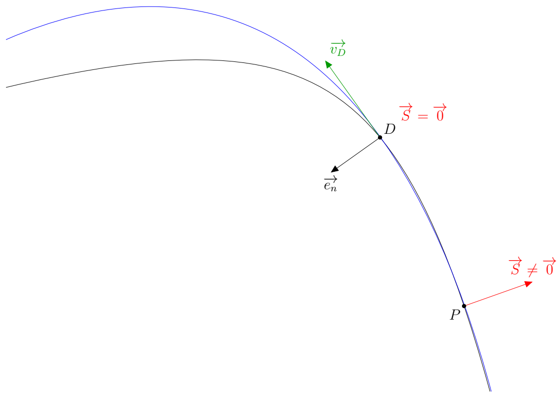
$$\vec{e_t} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}; \quad \vec{e_n} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$a_t = \vec{a_0} \cdot \vec{e_t} = \frac{-a_0 m}{\sqrt{1+m^2}}; \quad a_n = \vec{a_0} \cdot \vec{e_n} = \frac{a_0}{\sqrt{1+m^2}}$$

3.10.5 Condition de décrochement

Un objet se déplaçant sur un support subit une force de soutien $\overrightarrow{S}$ normale au support.



- Si l'objet quitte le support, le soutien $\overrightarrow{S}$ devient nul au point de décrochement D:
$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{0} \tag{3.54}$$
- La condition de décrochement est le le mieux décrite en projection selon $\overrightarrow{e_n}$.

3.10.6 Mouvement circulaire

On considère un objet sur une trajectoire circulaire Γ de rayon R. Une force tangentielle $\overrightarrow{F_t}$ peut accélérer ou freiner l'objet. Une force normale $\overrightarrow{F_n}$ permet la rotation de l'objet

Objet: Point matériel de masse m

Forces: tangentielle $\overrightarrow{F_t}$ et normale $\overrightarrow{F_n}$

Newton: $\overrightarrow{F_t} + \overrightarrow{F_n} = m \cdot \overrightarrow{a}$

$$\text{selon } \overrightarrow{e_t} : F_t = m \cdot a_t = m \cdot \dot{v}$$

$$\text{selon } \overrightarrow{e_n} : F_n = m \cdot a_n = m \cdot \frac{V^2}{R} \tag{3.55}$$

où R est le rayon de courbure de la trajectoire circulaire Γ

Description angulaire:

- Pour un choix de l'origine O sur Γ, l'abscisse curviligne s est liée à l'angle φ,
$$S = R \cdot \varphi \tag{3.56}$$
- En dérivant la relation (3.56) par rapport au temps, on obtient la vitesse scalaire,
$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi}$$
où
$$R = \text{ cste} \tag{3.57}$$
où $\dot{\varphi}$ est la dérivée temporelle de l'angle φ. Cette **vitesse angulaire** est souvent notée
$$\omega = \dot{\varphi} \tag{3.58}$$

- L'unité physique de la vitesse angulaire (SI): $[s^{-1}]$
- La vitesse scalaire s'écrit alors

$$v = R \cdot \dot{\varphi} = R \cdot \omega \implies \omega = \frac{V}{R} \tag{3.59}$$

- L'accélération tangentielle devient,

$$a_t = \dot{v} = R \cdot \ddot{\varphi} = R \cdot \dot{\omega} = R \cdot \alpha \tag{3.60}$$

où $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ est **l'accélération angulaire**

- Unité physique de l'accélération angulaire (SI) : $[s^{-2}]$
- L'accélération normale s'écrit,

$$a_n = \frac{V^2}{R} = R \cdot \omega^2 \tag{3.61}$$

- La force tangentielle F_t s'écrit,

$$F_t = m \cdot a_t = m \cdot R \cdot \dot{\omega} = m \cdot R \cdot \alpha \tag{3.62}$$

- La force normale F_n peut être exprimée comme,

$$F_n = m \cdot a_n = m \cdot R \cdot \omega^2 \tag{3.63}$$

3.10.7 Orbite gravitationnelle circulaire

Un satellite est en orbite circulaire de rayon R autour de la terre de masse M. Le mouvement est uniforme, i.e. $\omega =$ cste. La force tangentielle doit être nulle, i.e. $F_t = 0$. La force normale est la force de la gravitation:

$$F_n = \frac{GMm}{R^2} = mR\omega^2 \implies GM = R^3\omega^2 \implies \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \tag{3.64}$$

La période de révolution est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{Gm}} \tag{3.65}$$

En élevant au carré (3.65), on obtient

$$\frac{T^3}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{ cste} \tag{3.66}$$

qui est la 3e loi de Kepler.

3.10.8 Bille dans un demi anneau en relation

Une bille glisse dans un demi anneau de rayon R en rotation autour de son axe vertical de symétrie à vitesse angulaire constante ω

Objet: bille de masse m

Forces: poids $m \cdot \vec{g}$, soutien $\vec{S}$ (plan vertical)

Newton: $m \cdot \vec{g} + \vec{S} = m \cdot \vec{a}$ À l'équilibre, l'angle $\alpha =$ cste

$$\begin{aligned}
&\text{selon } \vec{e_z} : -m \cdot g + S\cos(\alpha) = 0 \\
&\text{selon } \vec{e_n} : S\sin(\alpha) = m \cdot a_n = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot R \cdot \sin(\alpha) \cdot \omega^2 \\
&\qquad \implies \frac{\cancel{S} \cdot \sin(\alpha)}{\cancel{S}\cos(\alpha)} = \frac{\cancel{m} R\sin(\alpha)\omega^2}{\cancel{m} g} \\
&\implies \sin(\alpha)\left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{R\omega^2}{g}\right) = 0 \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

À l'équilibre, l'angle α doit satisfaire la relation:

$$\sin(\alpha)\left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{R\omega^2}{g}\right) = 0 \quad (3.67)$$

Il existe deux solutions possibles :

1. $\sin(\alpha) = 0 \implies \alpha = 0$ est toujours solution

2. $\cos(\alpha) = \frac{g}{R\omega^2}$ est solution si et seulement si $\frac{g}{R\omega^2} \leq 1 \implies \omega^2 \geq \frac{g}{R} \implies \omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$

Ainsi,

- Si $\omega^2 < \frac{g}{R}, \alpha = 0$ est la seule solution: à faible vitesse angulaire ω la bille reste au bas de l'anneau.

- Si $\omega^2 \geq \frac{g}{R}, \alpha = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$ est la solution stable: à partir d'une vitesse angulaire seuil $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$, la bille remonte le long du demi anneau.

3.10.9 Pendule conique

Une masse m suspendue à un fil décrit un cercle horizontal à vitesse angulaire ω et l'angle d'inclinaison α constant.

Objet: boule de masse m

Forces: poids $m\overrightarrow{g}$, tension $\overrightarrow{T}$

Newton: $m \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} = m \cdot \overrightarrow{a}$ À l'équilibre, l'angle α est constant:

$$\text{selon } \overrightarrow{e_z} : -m \cdot g + T \cdot \cos(\alpha) = 0$$
$$\text{selon } \overrightarrow{e_n} : T \cdot \sin(\alpha) = m \cdot a_n = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot L \cdot \sin(\alpha$$
$$\implies \frac{\cancel{T}\sin(\alpha)}{\cancel{T}\cos(\alpha)} = \frac{\cancel{m}L\sin(\alpha)\omega^2}{\cancel{m}g}$$

$$\implies \sin(\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{L\omega^2}{g}\right) = 0 \quad (3.68)$$

L'angle α doit satisfaire la relation:

$$\implies \sin(\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{L\omega^2}{g}\right) = 0 \quad (3.68)$$

Il existe deux solutions possibles:

1. $\sin(\alpha) = 0 \implies \alpha = 0$ est toujours solution
2. $\cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2}$ est solution si et seulement si $\frac{g}{L\omega^2} \leq 1 \implies \omega^2 \geq \frac{g}{L} \implies \omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}}$

Ainsi,

- Si $\omega^2 < \frac{g}{L}, \alpha = 0$ est la seule solution stable: à faible vitesse angulaire ω le pendule est vertical
- Si $\omega^2 \geq \frac{g}{L}, \alpha = \arccos\left(\frac{g}{L\omega^2}\right)$ est la solution stable: à partir d'une vitesse angulaire seuil $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$,le pendule commence à s'incliner et la masse remonte. Si $\omega \to \infty$, alors $\alpha \to \frac{\pi}{2}$