

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 1A  
PREPA-031(A)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

## Chapter 2

# Équations et inéquations sur les réels

### 2.1 Identité algébrique

Propriétés:

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  est un corps commutatif.
- L'identité remarquable. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ 
  1.  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
  2.  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
  3.  $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$      $a + b$  : expression conjugué de  $a - b$
  4.  $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$      $a^2 + ab + b^2$  : expression conjugué de  $a - b$
  5.  $a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Exemples: Amplifions par l'expression conjugué:

1.
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$
2.
$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}{x+1}, \quad (x \neq -1)$$

### 2.2 Ensemble solutions

Exemples:

1. Résoudre en  $x \in \mathbb{R}$ :

$$4x + 5 = 0$$

L'unique solution est  $x = -\frac{5}{4}$

L'ensemble solution est  $S = \{-\frac{5}{4}\}$

2. Résoudre en  $x \in \mathbb{R}$ :

$$2x \geq 3$$

L'ensemble solution  $S = [\frac{3}{2}; +\infty[$

**Définition:** Soient  $f, g$  deux fonctions définies sur  $D_{\text{déf}} \in \mathbb{R}$ .

Résoudre l'équation:

$$f(x) = g(x)$$

ou l'inéquation  $f(x) < g(x)$  (strict)

ou encore  $f(x) \leq g(x)$  (large)

C'est chercher l'**ensemble aux valeurs** de  $x$  vérifiant l'équation ou l'inéquation

$$S = \{x \in \mathbb{D}_{\text{déf}} \subset \mathbb{R} \mid \underbrace{x \text{ vérifie l'équation ou l'inéquation}}_{\text{proposition } P(x)}\}$$

- $\mathbb{R}$  : l'ensemble des valeurs à considérer (référentiel)
- $\mathbb{D}_{\text{déf}}$  : l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'expression  $P(x)$  a un sens.
- L'équation ou l'inéquation est contrainte ou propriété imposées

La résolution d'un problème passe par une succession de problème équivalents: les ensembles solutions sont identiques.

**Exemples:** Résoudre en  $x \in \mathbb{R}$

1.  $P(x) : \sqrt[3]{x} \leq 2$

- $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
- Équivalence:

$$\underbrace{\sqrt[3]{x} \leq 2}_{\text{proposition } P(x), \text{ ensemble } A} \implies \underbrace{x \leq 2^3 = 8}_{\text{proposition } Q(x), \text{ ensemble } B}$$

Ainsi

$$S = A = B = ] -\infty; 8 ]$$

2.  $P(x) : x^2 = 64$

- $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
- Implication

$$\underbrace{x^2 = 64}_{P(x):A} \iff \underbrace{x = 8}_{Q(x):B}$$


On a  $B = \{8\} \subset \{-8; 8\} = A = S$

3.  $P(x) : \sqrt{x} = -4$

- $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}_+$
- Implication:

$$\underbrace{\sqrt{x} = -4}_{P(x):A} \implies \underbrace{x = (-4)^2 = 16}_{Q(x):B}$$

Ainsi  $S = A = \emptyset \subset \{16\} = B$  on a des solutions "parasites"

 Savoir (et énoncé) ce qu'on cherche (on veut faire)

### 2.2.1 Équations et inéquations linéaires

**Définition:** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \cdot x = b$$

est une équation linéaire en  $x \in \mathbb{R}$

Clairement,  $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$

Pour résoudre une équation linéaire, **on cherche à isoler  $x$ : discussion selon  $a$**

- $a \neq 0$  (on peut diviser par  $a$ ):

$$ax = b \iff x = \frac{b}{a} \quad \text{d'où} \quad S = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

- $a = 0$  (on ne peut pas diviser par  $a$  !)

$$ax = b \iff 0x = b$$

– Si  $b = 0$  :  $0x = 0$ . Tout  $x \in \mathbb{R}$  est solution  $S = \mathbb{R}$

– Si  $b \neq 0$  :  $0x \neq 0$ . Aucun  $x$  est solution  $S = \emptyset$

**Exemple:** Résoudre en  $x \in \mathbb{R}$  l'équation

$$m^2 \cdot x - m - 4x = 2$$

en fonction de paramètre réel  $m$  (pour chaque  $m$  l'équation est différente)

**Remarque:** Équation du 1<sup>er</sup> degré, en  $x$ , on cherche à **isoler  $x$** .

$$\underbrace{(m^2 - 4)}_a x = \underbrace{m + 2}_b$$

Discussion du coefficient de  $x$

- $m^2 - 4 \neq 0$ ,  $m \notin \{-2; 2\}$

$$\implies x = \frac{\cancel{m+2}}{(\cancel{m+2}) \cdot (m-2)} = \frac{1}{m-2}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{m-2} \right\}$$

- $m^2 - 4 = 0$ ,  $m \in \{-2; 2\}$

– si  $m = -2$

$$(m^2 - 4)x = m + 2 \iff 0x = 0 \\ S = \mathbb{R}$$

– si  $m = 2$

$$(m^2 - 4)x = m + 2 \iff 0x = 4 \\ S = \emptyset$$

**Résumé:**

- si  $m \notin \{-2; 2\}$ ,  $S = \left\{ \frac{1}{m-2} \right\}$
- si  $m = -2$ ,  $S = \mathbb{R}$
- si  $m = 2$ ,  $S = \emptyset$

**Définition:** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ 

$$ax > b$$

est une inéquation **linéaire** en  $x \in \mathbb{R}$ : on cherche à isoler  $x$ .D'où une discussion de  $a$ .

- $a > 0$ :

$$ax > b \iff x > \frac{b}{a}$$

$$S = \left] \frac{b}{a}; +\infty \right[$$

- $a = 0$ :

$$ax > b \iff 0x > b$$

- si  $b < 0$ , tout  $x$  est solution de  $S$ .

$$S = \mathbb{R}$$

- si  $b \geq 0$ , aucun  $x$  est solution de  $S$ .

$$S = \emptyset$$

- $a < 0$ :

$$ax > b \iff x < \frac{b}{a}$$

$$S = \left] -\infty; \frac{b}{a} \right[$$

**Remarque:** Résolution similaire pour  $ax \geq b$ ,  $ax < b$  et  $ax \leq b$ **Exemple:** Résoudre en  $x \in \mathbb{R}$  :  $m^2x - m - 4m \leq 2$  en fonction du paramètre  $m$ .**Remarque:** Inéquation linéaire, on cherche à isoler  $x$ 

$$(m^2 - 4)x \leq m + 2$$

Discussion du coefficient de  $x$ 

- Paramètre positif:

$$m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2) > 0 \implies m \in ] -\infty; -2 ] \cup [ 2; +\infty [$$

$$(m^2 - 4)x \leq m + 2 \iff x \leq \frac{m + 2}{(m - 2)(m + 2)} = \frac{1}{m - 2}$$

$$S = \left] -\infty; \frac{1}{m - 2} \right]$$

- Paramètre nul:

$$m^2 - 4 = 0 \iff m \in \{-2; 2\}$$

$$- m = -2$$

$$(m^2 - 4)x \leq m + 2 \iff 0x \leq 0$$

$$S = \mathbb{R}$$

$$- m = 2$$

$$(m^2 - 2)x \leq m + 2 \iff 0x \leq 4$$

$$S = \mathbb{R}$$

- Paramètre négatif:

$$m^2 - 4 < 0 \iff m \in ]-2; 2[$$

$$(m^2 - 4)x \leq m + 2 \iff x \geq \frac{1}{m+2}$$

$$S = \left[ \frac{1}{m-2}; +\infty[$$

### Résumé

- si  $m \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$ ,  $S = \left] -\infty; \frac{1}{m-2} \right]$
- si  $m \in \{-2; 2\}$ ,  $S = \mathbb{R}$
- si  $m \in ]-2; 2[$ ,  $S = \left[ \frac{1}{m-2}; +\infty[$

## 2.3 Équations et inéquations rationnelles

**Définition:** Une fonction rationnelle en  $x \in \mathbb{R}$  est un quotient de fonction polynomiale. Pour résoudre une équation  $f(x) = g(x)$  ou inéquations  $f(x) < g(x)$  sur la fonction rationnelle.

- On différencie le domaine de définition  $\mathbb{D}_{\text{def}}$ .
- On passe **toutes** les expressions du même côté de l'égalité (ou inégalités) et on étudie le signe en factorisant.

**Exemple:** Résoudre en  $x$  l'inéquation  $x > \frac{4}{x}$

- $\mathbb{D}_{\text{def}} = \mathbb{R}$
- Inéquation rationnelle: on porte tout du même côté

$$\begin{aligned} x - \frac{4}{x} > 0 &\iff \frac{x^2 - 4}{x} > 0 \\ &\iff \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x} > 0 \end{aligned}$$

- tableau des signes (remarque: le valeurs remarquables sont  $-2, 0, 2$ )

$x$		$-2$		$0$		$2$	
		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
$x + 2$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x}$	$-$	$0$	$+$		$-$	$0$	$+$

$$S = ] - 2; 0[ \cup ] 2; +\infty[$$

## 2.4 sectoin missing

## 2.5 sectoin missing

## 2.6 Valeur absolue

**Définition:** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La valeur absolue de  $x$ , notée  $|x|$  est réel positif ou null

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Exemple:**

$$|-3| = -(-3) = 3 \quad |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

**Propriétés:** Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors

1.  $|x| \geq 0$
2.  $|x| = 0 \iff x = 0$
3.  $|x^2| = x^2$
4.  $|-x| = |x|$
5.  $x = \text{sgn}(x) \cdot |x|$  et  $|x| = \text{sgn}(x) \cdot x$
6.  $-|x| \leq x \leq |x|$
7.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (inégalité triangulaire)
8.  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

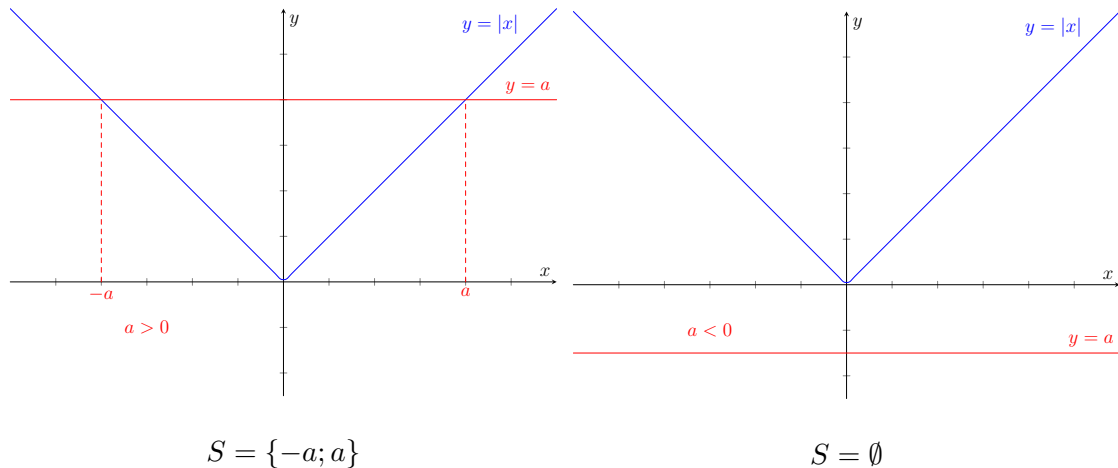
### 2.6.1 Equation à valeur absolue

**Remarque:** L'équation  $|x| = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ne peut clairement pas avoir de solutions en  $x \in \mathbb{R}$  si  $a < 0$

**Théorème:** On a l'équivalence

$$|x| = a \iff a \geq 0 \text{ et } \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$$

En effet,



**Remarque:** (généralisation)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles. On a l'équivalence

$$|f(x)| = g(x) \iff g(x) \geq 0 \text{ et } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

**Remarque:** On ne discute pas le signe de  $f(x)$ , mais seulement celui de  $g(x)$  (condition de positivité). On travaille donc sur le référentiel restreint  $\mathbb{D}_{\text{def}} \cap \mathbb{D}_{\text{positif}}$

**Exemple:** Résoudre en  $x \in \mathbb{R}$

$$|x^2 + 2x - 5| = x + 1$$

- domaine de définition:  $\mathbb{D}_{\text{def}} = \mathbb{R}$
- équivalence:

$$|x^2 + 2x - 5| = x + 1 \iff x + 1 \geq 0 \text{ et } \begin{cases} x^2 + 2x - 5 = x + 1 & (1) \\ x^2 + 2x - 5 = -(x + 1) & (2) \end{cases}$$

- condition de positivité :  $x + 1 \geq 0$   
D'où  $\mathbb{D}_{\text{pos}} = [-1; +\infty]$
- équation (1)

$$\begin{aligned} (1) : x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x + 3) \cdot (x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } S_1 = \{-3, 2\}$$



**Remarque:**  $-3$  est à exclure:  $-3 \notin \mathbb{D}_{\text{pos}}$

- l'équation (2)

$$(2) : x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + 4) \cdot (x - 1) = 0$$

d'où  $S_1 = \{-4, 1\}$

- Solution:

$$S = \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap \mathbb{D}_{\text{pos}} \cap (S_1 \cup S_2) = \{1, 2\}$$

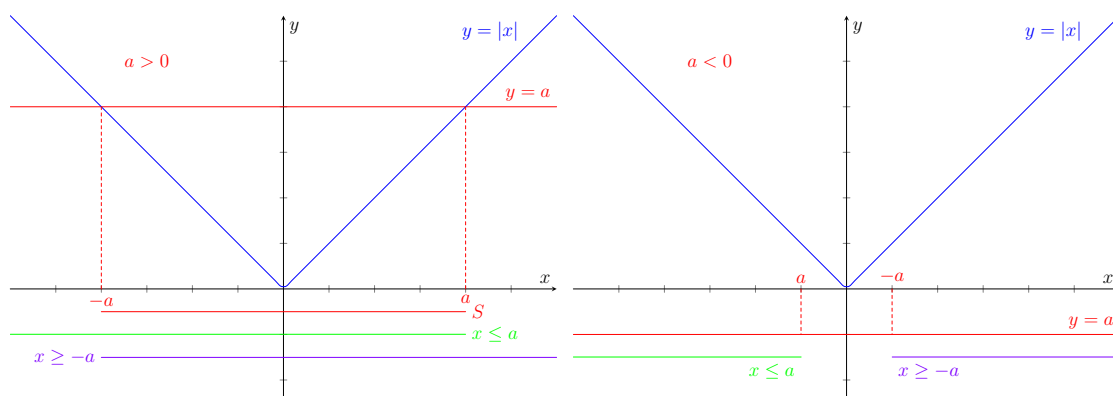
## 2.6.2 Inéquation à valeur absolue

**Remarque:** L'inéquation  $|x| \leq a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , ne peut pas avoir de solution si  $a < 0$ . On n'a pourtant besoin de discuter le signe de  $a$ !

**Théorème:** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On a l'équivalence

$$|x| \leq a \iff \begin{cases} x \leq a \\ \text{et} \\ x \geq -a \end{cases}$$

En effet,



$$S = [-a, a] = ]-\infty; a] \cap [-a; +\infty[$$

$$S = \emptyset = ]-\infty; a] \cap [-a; +\infty[$$

**Théorème:** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles. On a l'équivalence

$$|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \text{et} \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$$

**Remarques:**

1. On ne discutera pas le signe de  $f(x)$ , ni celui de  $g(x)$  (le cas trivial  $g(x) < 0$  est rejeté lors de l'intersection)
2. Idem avec l'inégalité stricte.

**Remarque:** L'inéquation  $|x| \leq a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  admet clairement tout  $x \in \mathbb{R}$  comme solution si  $a < 0$  (une valeur absolue est toujours grand qu'un nombre négatif). On ne discutera pourtant pas le signe de  $a$ !

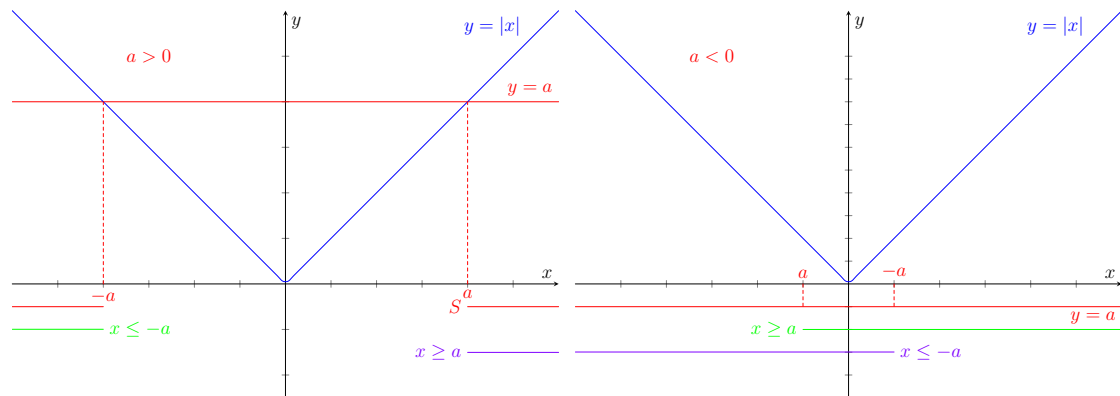
$$|x| \leq a, \quad a < 0 \text{ trivial : } S = \emptyset$$

$$|x| \geq a, \quad a < 0 \text{ trivial : } S = \mathbb{R}$$

**Théorème:** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On a l'équivalence

$$|x| \geq a \iff \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$$

En effet,



$$S = ] -\infty; -a ] \cup [ a; +\infty [$$

$$S = \mathbb{R} = ] -\infty; -a ] \cup [ a; +\infty [$$

**Théorème:** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles. On a l'équivalence

$$|f(x)| \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases}$$

**Remarques:**

1. On ne discutera ni le signe de  $f(x)$ , ni celui de  $g(x)$ . Le cas trivial  $g(x) < 0$  est traité par la réunion.
2. idem pour l'inégalité stricte.

**Exemple:** Résoudre en  $x \in \mathbb{R}$

$$|x| + \frac{x-1}{2} < 0$$

- domaine de définition:  $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$

- équivalence

$$|x| < -\frac{x-1}{2} \iff \begin{cases} x < -\frac{x-1}{2} & (1) \\ \text{et} \\ x > \frac{x-1}{2} & (2) \end{cases}$$

- inéquation (1). On isole  $x$

$$3x < 1 \text{ d'où } S_1 = ]-\infty; \frac{1}{3}[$$

- inéquation (1). On isole  $x$

$$x > -1 \text{ d'où } S_2 = ]-1; +\infty[$$

- Solution:

$$S = \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap S_1 \cap S_2 = \left] -1, \frac{1}{3} \right[$$

**Exemple:** Résoudre en  $x \in \mathbb{R}$

$$|x-2| > \frac{2x-4}{x}$$

- $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}^*$

- 

$$|x-2| < \frac{2x-4}{x} \iff \begin{cases} x-2 > \frac{2x-4}{x} & (1) \\ \text{ou} \\ x-2 < -\frac{2x-4}{x} & (2) \end{cases}$$

- inéquation (1)

$$\begin{aligned} x-2 - \frac{2x-4}{x} &> 0 \\ (x-2) \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right) &> 0 \\ \frac{(x-2)^2}{x} &> 0 \end{aligned}$$

d'où

$$S_1 = \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\} = ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

- inéquation (2)

$$\begin{aligned} x-2 + \frac{2x-4}{x} &< 0 \\ (x-2) \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right) &< 0 \\ \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{x} &< 0 \end{aligned}$$

d'où

$$S_1 = \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\} = ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

$x$	$-2$		$0$		$2$	
$x - 2$	-	-	-	-	-	0 +
$x + 2$	-	0	+	+	+	+
$x$	-	-	-	0	+	+
$\frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x}$	-	0	+		-	0 +

d'où

$$S_2 = ] - \infty; -2[ \cup ]0; 2[$$

- Solution:

$$S = \mathbb{D}_{\text{def}} \cap (S_1 \cup S_2)$$

$$s = ] - \infty; -2[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$$