EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1A

PREPA-031(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 5

Polynômes complexes

5.1 Définition

Un polynôme en z à coefficients complexes est une combinaison linéaire de puissances entières positives de z.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$$

avec $a_k \in \mathbb{C}_1, \quad k = 0, ..., n$

Remarque: Si z est une variable complexe, P définit une application.

$$\begin{aligned} P : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto P(z) \end{aligned}$$

Remarque: Les opérations restent les mêmes que sur $\mathbb{R}[x]$

5.2 Théorème fondamentale de l'algèbre

Théorème: Tout polynôme (non constant) $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ possède au moins une racine complexe.
On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Exemple: Le polynôme

$$P(z) = z^{17} + 122iz^3 - 12 - 12i$$

admet $z_0 = 1 + i$ comme racine.

Corollaire: Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[z]$ sont du premier degré. (On peut toujours factoriser $(z - z_0)$, z_0 une racine).

Corollaire: Formules de Viète

- $P_2(z) = az^2 + bz + c, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$

  Les racines existent: z_1 et z_2.

  Alors
  $$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad \text{où } z_1, z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $P_3(z) = az^3 + bz^2 + cz + d, \quad a \neq 0$

  Les racines existent:z_1, z_2 et z_3 et
  $$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a} \quad z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{c}{a} \quad z_1 z_2 z_3 = -\frac{d}{a}$$

- $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0, \quad a_n \neq 0$

  Les racines existent: $z_k, \quad k = 1, ..., n$ où
  $$z_1 + z_2 + ... + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

5.3 Décompositions dans $\mathbb{R}[x]$

Théorème: Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$ avec $a_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, ..., n$

Alors z racine de P
$$\begin{aligned}
&\iff P(z) = 0 \\
&\iff \overline{P(z)} = 0 \\
\iff \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0} &= \overline{a_n}\overline{z^n} + ... + \overline{a_0} \\
&= a_n \overline{z}^n + ... + a_0 = P(\overline{z})
\end{aligned}$$

Corollaire: Soit $P(z) = az^2 + bz + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

Alors $P(z)$ possède

- soit deux racines réelles, distinctes ou confondues
- soit deux racines complexes de partie imaginaire non nulle, mais conjuguées l'une de l'autre.

Théorème: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont

- soit du premier degré
- soit du second degré, à discriminant négatif

En effet, tout polynômes P à coefficients réels possède, vu comme un polynôme complexe, au moins une racine z_0.

- Si cette racine est réelle, $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ est divisible par $x - x_0$.
- Si cette racine n'est pas réelle ($\text{Im}(z_0) \neq 0$) $\overline{z_0}$ est aussi racine de P. P est aussi divisible par $(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - 2\text{Re}(z_0)x + |z_0|^2$

  C'est un polynôme réel à discriminant négatif.

$$\Delta' = (\text{Re}(z_0))^2 - |z_0|^2 = -(\text{Im}(z_0))^2 < 0$$

Exemple: Décomposer un facteur irréductible dans $\mathbb{R}[x]$

$$P(x) = x^4 + 1$$

- P est de coefficients réels et de degré 4, sans racine réelles: P a deux paires de racines complexes conjuguées.
- racine complexes de P : $x = (r, \varphi)$

$$x^4 = -1 = (1, \pi + k \cdot 2\pi) = (r^4, 4\varphi)$$

$$r^4 = 1 \iff r = 1 \quad (\text{car } r \in \mathbb{R}_+)$$

$\iff$

$$4\varphi = \pi + k \cdot 2\pi \qquad \iff \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les solutions sont

$$S = \left\{ \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} \right\}$$

- Factorisation:

$$\begin{aligned}
P(x) &= \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{i^2}{2}\right)\left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{i^2}{2}\right) \\
&= \underbrace{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}_{\text{irr. dans } \mathbb{R}[x_2]}\underbrace{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}_{\text{irr. dans } \mathbb{R}[x_2]}
\end{aligned}$$