

EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1A
PREPA-031(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 4

Nombres complexes

4.1 Définitions, forme cartésienne

Rappel:

$$x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x] \text{ est irréductible}$$

On ne peut pas le factoriser comme

$$(x - a)(x - b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Nous voulons alors construire une extension des nombres réels \mathbb{R} permettant de résoudre ce type d'équation:

$$x^2 + 1 = 0$$

On introduit pour cela un "nombre" i ("imaginaire") tel que

$$i^2 = -1$$

Remarque: On connaît les rotations

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Rot}(\frac{\pi}{2})} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$$

On impose les mêmes règles de calcul que sur \mathbb{R} .

Remarque: Tout comme $i^2 = -1$, on a $(-i)^2 = ((-1)i)^2 = -1$ i et $-i$ sont les 2 racines (complexes) de -1 .

On admet l'écriture

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

Le symbole $\sqrt{\cdot}$ n'est plus réservé à la racine positive d'un réel positif.

Pour l'équation $x^2 + 1 = 0$, l'ensemble solution est $\mathbb{S} = \{-i, i\}$

D'où la factorisation

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

En effet

$$(x + i)(x - i) = x^2 \cancel{-ix} + \cancel{ix} - \underbrace{i^2}_{=-1} = x^2 + 1$$

Exemple: Résoudre en x :

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 = -1 \cdot 3$$

L'ensemble solution est alors

$$\mathbb{S} = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Nous allons donc manipuler des nombres de la forme cartésienne (ou algébrique)

$$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Définition: L'ensemble

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

est l'ensemble des nombres complexes.

Définition: Soit $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

- a : partie réelle de z $\quad \text{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$
- b : partie imaginaire de z $\quad \text{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

Ainsi,

$$z = \text{Re}(z) + i \cdot \text{Im}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Remarque: $i \cdot \mathbb{R} = \{i \cdot b \mid b \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des nombres imaginaires.

Définition: Opérations sur les nombres complexes

Soit $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$, $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.

1. Égalité

$$z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ \text{et} \\ b = b' \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{et} \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

2. Addition +

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

ou encore

$$\text{Re}(z + z') = \text{Re}(z) + \text{Re}(z') \quad \text{et} \quad \text{Im}(z + z') = \text{Im}(z) + \text{Im}(z')$$

en particulier

$$\text{Re}(2z) = 2\text{Re}(z) \quad \text{et} \quad \text{Im}(2z) = 2\text{Im}(z)$$

3. Multiplication 

$$z \cdot z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

ou encore

$$\text{Re}(zz') = \text{Re}(z)\text{Re}(z') - \text{Im}(z) - \text{Im}(z')$$

$$\text{Im}(zz') = \text{Re}(z)\text{Im}(z') - \text{Im}(z) - \text{Re}(z')$$

Remarque: Similitude avec $\cos(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha + \beta)$!

Cas particuliers: Pour $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

- $\lambda z = \lambda a + i\lambda b$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (amplification par un réel)
- $iz = ia + i^2b = -b + ia$ (amplification par i)
- $z^2 = z \cdot z = (a + ib)^2 = a^2 + b^2 + i2ab$ (carré)

Avec ces deux lois $+$ et \cdot étendant celles définies sur \mathbb{R} , $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps.

En effet,

- Élément neutre pour l'addition $0 = 0 + i0$
- L'opposé de $z = a + ib$ pour l'addition: $-z = -a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$
- Élément neutre pour la multiplication $1 = 1 + i0$
- L'inverse de $z = a + ib \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ pour la multiplication est

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

En effet,

$$z \cdot \frac{1}{z} = (a + ib) \cdot \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

L'inverse permet de définir la division dans \mathbb{C} :

Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_2} \cdot z_1 = \frac{z_1}{z_2}$$

Définition: Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Le nombre **conjugué complexe** (c.c.) de z , noté \bar{z} , est le nombre

$$\bar{z} = a - ib$$

Propriétés: Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

$$1. \quad \text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$2. \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$3. \quad \text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z) \quad \text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$$

$$4. \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$5. \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$6. \quad \bar{z} \cdot \bar{z'} = \text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)$$

$$7. \quad \begin{array}{l} \bar{z} = z \iff \text{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R} \\ \bar{z} = -z \iff \text{Re}(z) = 0 \iff z \in i\mathbb{R} \end{array}$$

Vérification par calcul direct

Définition: Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Le **module** de z , noté $|z|$, est le nombre réel positif (ou nul)

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ou encore

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)$$

Propriétés:

- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $|\bar{z}| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ [missing last points from that slide]
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

4.2 Puissances et racines

4.2.1 Exposants entiers

Définition: Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme pour les réels, on définit " z puissance n " comme

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ facteurs}}$$

De plus, si $z \neq 0$, on a les exposants nuls ou négatifs:

$$z^0 = 1 \quad z^{-1} = \frac{1}{z} \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

4.2.2 Racines complexes

Définition: Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$w \in \mathbb{C}$ est une racine n^e de z si w vérifie $w^n = z$.

Nous admettons l'écriture $\sqrt[n]{z}$ pour désigner toutes les racines n^e de z complexes: $\sqrt{\cdot}$ est une fonction multivalente, pas comme sur \mathbb{R} .

D'où l'équivalence

$$w^n = z \quad \Longleftrightarrow \quad w = \underbrace{\sqrt[n]{z}}_{n \text{ valeurs}}$$

Exemple: $\sqrt{-1} = \pm i$: 2 valeurs

Propriétés: Soit $z \in \mathbb{C}$

- Toutes les propriétés des réels à exposants fractionnaires restent valables en posant

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

- $\sqrt[n]{|z|} = |\sqrt[n]{z}|$ **toutes les racines n^e de z sont de même module!**

Exemple:

$$\sqrt[3]{-1} = \begin{cases} -1 \text{ (évidemment)} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

En effet, $(-1)^3 = -1$

$$\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot (1 \pm i3\sqrt{3} - 9 \mp i3\sqrt{3}) = -1$$

Ou encore, en résolvant $z^3 = -1 \iff$

$$z^3 + 1 = 0 \iff (z+1) \underbrace{(z^2 - z + 1)}_{\text{comme avant}} = 0$$

Cas particuliers: Écrire \sqrt{z} sous la forme algébrique. Posons $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Nous cherchons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\sqrt{a+ib} = \alpha + i\beta$$

problème équivalent:

$$a + ib = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Plutôt que la relation $2\alpha\beta = b$, utilisons le carré du module.

$$\alpha^2 + \beta^2 = |\alpha + i\beta|^2 = |\sqrt{a+ib}|^2 = \sqrt{|a+ib|^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Alors

$$\sqrt{z} = \sqrt{a+ib} = \alpha + i\beta \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a = \operatorname{Re}(z) \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(b) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z)) \end{cases}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} \sqrt{i} = \alpha + i\beta &\iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = |i| = 1 \\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(1) = +1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta) = +1 \end{cases} \\ &\iff \sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Application: résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

Solution:

$$z_1, z_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\beta}}{2a}$$

4.3 Plan complexe

4.3.1 Isomorphisme entre \mathbb{C} et \mathbb{R}^2

Tout nombre complexe $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, peut être associé à un point M du plan, le plan complexe ou plan de Gauss. On dit que a est l'affixe de M .

En effet \mathbb{C} et \mathbb{R} sont isomorphes: il existe une application linéaire bijective de \mathbb{C} vers \mathbb{R}

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z &\longmapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \end{aligned}$$

et son inverse est

$$\begin{aligned} h^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto a + ib \end{aligned}$$

Exemple:

Remarque: z et \bar{z} sont symétrique par rapport à l'axe réel

4.3.2 Forme polaire

Tout point du plan (et donc du plan complexe) peut être donné sous forme polaire

Définition: Soit $z \in \mathbb{C}$

La forme polaire de z est la donnée

- de la distance $r = |z|$ de z à O : le module de z .
- de l'angle φ entre l'axe réel et le rayon-vecteur

Remarque: φ est noté $\arg(z)$, argument de z . φ n'est pas unique, mais défini à 2π près.

On écrit alors

$$z = (r, \varphi) \quad \text{avec} \quad r = |z| \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(z) \in \mathbb{R}$$

Remarque: On devrait écrire

$$z = (r, \varphi + k \cdot 2\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

mais une seule détermination suffit

Définition: Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **détermination principale** de l'argument de z .

$$\varphi = \arg(z) \in]-\pi; \pi[$$

Propriété: Soit $z = (r, \varphi) \in \mathbb{C}$. Alors

$$\bar{z} = (r, -\varphi)$$

Propriétés: Passage entre les formes polaire et cartésienne.

- Soit $z = (r, \varphi)$

Alors

$$\operatorname{Re}(z) = r \cdot \cos(\varphi)$$

et

$$\operatorname{Im}(z) = r \cdot \sin(\varphi)$$

d'où

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

- Soit $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

Alors

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple: $z = -\sqrt{3} - i$

- $|z| = \sqrt{3 + 1} = 2$
- $\cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin(\varphi) = -\frac{1}{2}$

d'où $\varphi = \arg(z) = -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Par exemple, pour $k = 0$ ou $k = 1$,

$$z = (2, -\frac{5\pi}{6}) = 2, \frac{7\pi}{6}$$

Conséquences:

1. Soient M et M_0 deux points du plan, d'affixe z et z_0 respectivement.
La distance de M à M_0 est $|z - z_0|$.
2. Équation d'un cercle de rayon 1, centré à l'origine: tous les points sont à distance 1 de O .

$$|z|^2 = z\bar{z} = 1^2$$

3. Équation d'un cercle centré en z_0 et de rayon R $|z - z_0| = R$ ou $|z - z_0|^2 = R^2$

4.3.3 Translation

Une translation dans le plan de Gauss est donnée par une addition

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 & a_1, b_1 &\in \mathbb{R} \\ z_2 &= a_2 + ib_2 & a_2, b_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\implies z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

Une translation de $t \in \mathbb{C}$ est une application linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C}

$$\begin{aligned} T_t &= \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z + t \end{aligned}$$

4.3.4 Similitude et formule de Moivre

Homothétie: dans \mathbb{C} , l'amplification par $\lambda \in \mathbb{R}$ est une homothétie (mise à l'échelle)

$$\begin{aligned} H_\lambda &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto H_\lambda(z) = \lambda z \end{aligned}$$

En effet

$$|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$$

et

$$\arg(\lambda z) = \begin{cases} \arg(z) & \text{si } \lambda > 0 \\ \arg(z) + \pi & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

En particulier $(-1) \cdot z = -z$ est le symétrique de z par rapport à O .

Remarque: L'amplitude par -1 est aussi une rotation d'angle π (ou $-\pi$) autour de O dans le cercle trigonométrique.

Comme $-1 = i^2$, on observe que multiplier par i revient faire une rotation de $\frac{\pi}{2}$!

$$-z = \text{Rot}_\pi(z) = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(z)) = \cdot i(iz)$$

avec

$$iz = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(z)$$

Ainsi

$$\arg(iz) = \arg(z) + \frac{\pi}{2} = \arg(z) + \arg(i)$$

Rotation dans \mathbb{C} la multiplication par un nombre w de module 1 ($|w| = 1$, $w = (1, \alpha)$, $\alpha = \arg(w)$) est une rotation d'angle $\alpha = \arg(w)$

$$\begin{aligned} R_\alpha &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto R_\alpha(z) = w \cdot z = (1, \alpha)z \end{aligned}$$

Similitude [missing end of slide]

$$S_w : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto S_w(z) = w \cdot z$$

(avec $S_w = H_\lambda \cdot \text{Rot}(\alpha)$)

En effet, si $z_1 = (r_1, \varphi_1)$ et $z_2 = (r_2, \varphi_2)$, alors

$$z_1 z_2 = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$$

Preuve

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2))) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Exemple: $z_1 = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{2})$ et $z_2 = (\sqrt{6}, -\frac{5\pi}{6})$

Calculer $z_1 z_2$.

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 2\sqrt{3}$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$

En particulier, si $z_1 = z_2 = z = (r, \varphi)$

$$z^2 = (r^2, 2\varphi)$$

et par récurrence,

$$z^n = (r^n, n\varphi) = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Exemple: Racine n^e de l'unité: cherchons z tel que

$$z^n = (r^n, n\varphi) = 1 = (\underbrace{1}_{\text{module de 1}}, \underbrace{0}_{\text{arg de 1}})$$

Alors:

- module: $r^n = 1 \implies r = 1$ (car $r \in \mathbb{R}_+$)
- argument: $n \cdot \varphi = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \implies \varphi = k \frac{2\pi}{n}$

Il y a donc n racines distinctes!

$$S = \left\{ \left(1, k \frac{2\pi}{n} \right) \middle| k = \underbrace{0, \dots, n-1}_{n \text{ valeurs}} \right\}$$

Pour $n = 5$

$$S = \left\{ \left(1, k \frac{2\pi}{5} \right) \middle| k = 0, \dots, 4 \right\}$$

Conséquences:

1. Division Inverse de
- $z = (r, \varphi)$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \left(\frac{1}{r}, -\varphi\right)$$

Quotient de $z_1 = (r_1, \varphi_1)$ et $z_2 = (r_2, \varphi_2)$ alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 - \varphi_2\right) \quad (r_2 \neq 0)$$

Formule de Moivre

$$z^n = (r^n, n \cdot \varphi) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (r \neq 0)$$

et plus généralement

$$z^q = (r^q, q \cdot \varphi) \quad \forall q \in \mathbb{Q} \quad (r \neq 0)$$

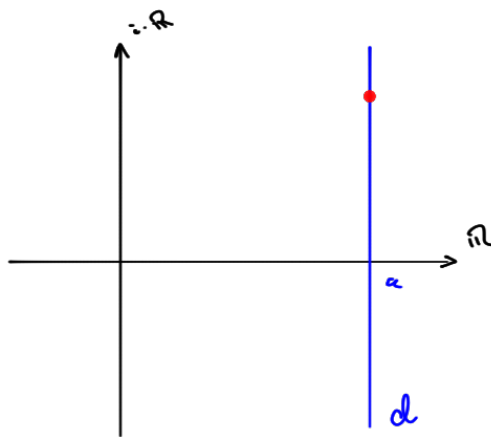
par équivalence

$$z = \sqrt[n]{w} \iff z^n = w$$

Remarque:

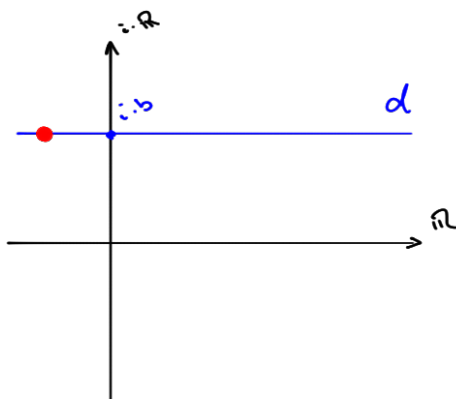
$$z^q = r^q \cdot (\cos(q\varphi) + i \cdot \sin(q\varphi)) \quad q \in \mathbb{Q}$$

2. Équation de droite verticale:



$$\begin{aligned} z \in d &\iff \operatorname{Re}(z) = a \\ &\iff z + \bar{z} = 2a \quad \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Droite horizontale d'ordonnée
- b



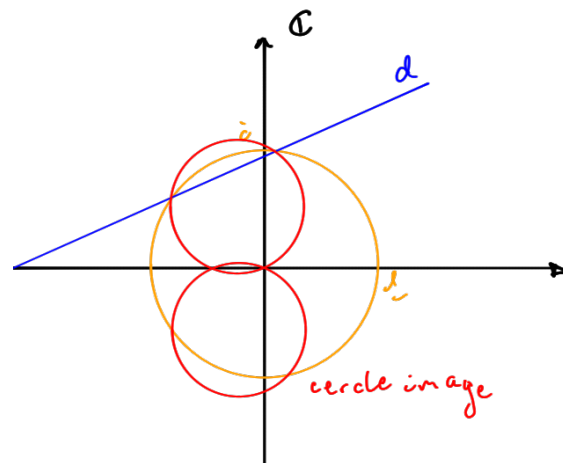
$$\begin{aligned} z \in d &\iff \operatorname{Im}(z) = b \\ &\iff z - \bar{z} = i2b \quad \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Remarque:

- Un point z sur le cercle unité est transformé en son conjugué \bar{z}
- Un point z hors du cercle unité est transformé en un point $\frac{a}{z}$ à l'intérieur.

Par conséquent

- Une droite passant par O donne une droite passant par O .
- Une droite ne passant pas par O donne un cercle passant par O !

Illustration

Cercle passant par O donne un cercle passant par O .

Pour vérifier, [?] l'équation d'une droite ou d'un cercle en z et définit l'image par $w = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{w}$

Exemple: Trois points donnés par leur affixe:

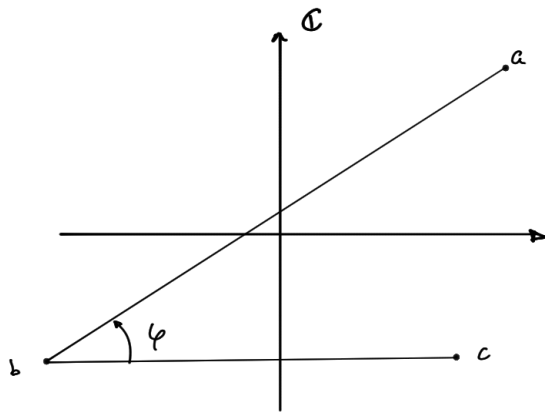
Donner l'angle \widehat{ABC}

$$A(a) \quad B(b) \quad C(c)$$

Il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que

$$a - b = s(c - b)$$

$$\implies \varphi = \arg(s) = \arg\left(\frac{a - b}{c - b}\right)$$



A partir de c , on obtient a .

- par une rotation autour de b
- par une homothétie