

EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B
PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 1

Suite de nombres réels

1.1 Définitions

26/02/2019

Définition Une suite de nombres réels est une application de \mathbb{N}^* dans \mathbb{R}

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

a_n est le terme générale de la suite et n est le rang de a_n .

La suite a_1, a_2, a_3, \dots , se note " (a_n) "

Exemples

- 1) La suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \frac{1}{3n-7}$ est la suite $-\frac{1}{4}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \dots$
- 2) $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ n'est pas une suite (pas de premier élément). Mais $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ est une suite dont l'ensemble des valeurs est \mathbb{Z} .
- 3) a, a, a, a, \dots $a \in \mathbb{R}$, $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ est une suite constante.
- 4) Chercher le terme général des suites définie par les premiers termes:

a) $(a_n) : \overbrace{1, 6}^5, \overbrace{11, 16}^5, \overbrace{21, 26}^5,$
 $a_n = 5n - 4$

b) $b_n : \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{10}{9}, \frac{17}{12}, \frac{26}{15}, \frac{37}{18}, \dots$
Difference des numérateurs: 3, 5, 7, 9, 11, ...
Difference des dénominateurs: 3, 3, 3, 3, 3, ...
 $b_n = \frac{n^2+1}{3n}$

- 5) Suites définie par récurrence

$$c_{n+1} = 2 - \frac{1}{c_n}, \quad c_1 = \frac{3}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{3}, \quad c_3 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{5}{4}, \quad c_4 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{6}{5}$$

$$\text{Conjecture: } c_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Démonstration par récurrence:

- Verification: $c_1 = \frac{3}{2} \quad \frac{n+2}{n+1}|_{n=1} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$.
- Demonstration du pas de récurrence:
 - **Hypothèse:** $c_n = \frac{n+2}{n+1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$
 - **Conclusion:** $c_{n+1} = \frac{n+3}{n+2}$
 - **Preuve:**

$$c_{n+1} = 2 - \frac{1}{c_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = 2 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{2(n+1)-(n+1)}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}$$

□

Définitions

1. (a_n) est majoré si

$$\exists M \in \mathbb{R} \ a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(M : majorant)

2. (a_n) est minoré si

$$\exists N \in \mathbb{R} \ \text{t.q.} \ a_n \geq N, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(N : minorant)

3. (a_n) est bornée si elle admet un majorant **et** un minorant
4. (a_n) est croissante si $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
(Strictement croissante si $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$)
5. (a_n) est décroissante si $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
(Strictement décroissante si $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$)
6. (a_n) est monotone si elle est croissant **ou** (ou exclusif) décroissant
(Strictement monotone si elle est strictement croissant ou strictement décroissant)

Exemples

1. $a_n = \frac{1}{n}$, (a_n) est strictement décroissante et borné:

$$0 < a_n \leq 1$$

$$2. \ b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0}$$

Donc (b_n) est strictement croissante.

1.2 Limite d'une suite

Définition On dit que la suite (a_n) converge vers a ($a \in \mathbb{R}$) si $\forall \epsilon > 0$, il existe un seuil

$$N \in \mathbb{N}^* (N = N(\epsilon)) \ \text{t.q.} \ n > N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

$$|a_n - a| < \epsilon \iff -\epsilon < a_n - a < \epsilon \iff a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \iff a_n \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$$

Cet intervalle est appelé ϵ -voisinage de a . Si (a_n) admet (a_n) est convergente sinon elle divergente.

Définition plus intuitive de la limite de suite:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ si et seulement si ϵ -voisinage de a contient presque tout les termes de la suite (tous les termes sauf nombre fini)

Exemples

1. $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad [N \in \mathbb{N}^* \text{ quelconque } \square]$$

2. Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Soit $\epsilon > 0$, montrons que $\exists N \in \mathbb{N}^* (N = N(\epsilon))$ t.q. $n \geq N \implies |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$

$$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \iff |\frac{1}{n}| < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

3. La suite (b_n) définie par

$$b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

diverge car une infinité de termes sont dans le voisinage de $(+1)$ ou de (-1) selon que n est pair ou impair

Theorèmes importants (sans démonstration)

1. Une suite qui converge admet une seule limite

2. Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse.

Contre-exemple: $a_n = (-1)^n$

3. Les règles de calcul:

Soit (a_n) et (b_n) convergentes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(d) si $b_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, et si $b \neq 0$, alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

01/03/2019

4. **Théorème de comparaison:** Soient (a_n) et (b_n) convergentes, $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

$$\text{Si } \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0 \\ \text{alors } a \leq b$$

5. Théorème des deux gendarmes:

Soient 3 suites (g_n) , (d_n) et (a_n) telles que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ avec } g_n \leq a_n \leq d_n, \quad \forall n \geq n_0$$

Alors si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = l$$

on a que (a_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

6. Corollaire des 2 gendarmes soit (a_n) tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

$$\underbrace{-|a_n|}_{\rightarrow 0} \leq a_n \leq \underbrace{|a_n|}_{\rightarrow 0}$$

□

7. Toute suite monotone est bornée et convergente.

Plus précisément:

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge

3 exemples importants

1. Soient $q \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, (a_n) la suite définie par $a_n = q^n$

$$a_n = q^n : \begin{cases} \text{diverge si } |q| > 1 \\ \text{converge vers 0 si } |q| < 1 \end{cases}$$

Montrons que si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

$$|a_n| = |q^n| = |q|^n \text{ or } |q| < 1$$

donc

$$\exists p > 0 \text{ t.q. } q = \frac{1}{1+p}$$

Donc

$$|q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \implies \frac{1}{|q|^n} = (1+p)^n$$

$$= 1 + n \cdot p + \dots + p^n \geq n \cdot p, \quad \text{donc } |q|^n \leq \frac{1}{n \cdot p}$$

$$|a_n| = |q|^n \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\underbrace{0}_{\rightarrow 0} \leq |a_n| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}}_{\rightarrow 0}$$

D'après les 2 gendarmes: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

D'après son corollaire: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

□

2. La série géométrique

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et a_n définie par

$$a_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

Définition par la récurrence

$$a_{n+1} = a_n + q^n, \quad a_1 = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On réécrit le terme a_n

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} \\ q \cdot a_n &= q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \\ a_n - q \cdot a_n &= 1 - q^n \\ a_n(1 - q) &= 1 - q^n \implies a_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

(a_n) converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1-q}$

Exemples:

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ a_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \text{et } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ b_n &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Le nombre e

Soit

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$e_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3 \cdot \dots \cdot k}_{>2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Donc

$$e_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\leq 1}$$

$$e_n \leq 3$$

$$2 \leq e_n \leq 3, \quad \forall n \geq 2$$

Montrons encore que (e_n) est strictement croissante:

$$e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!}, \quad \text{donc } e_{n+1} > e_n$$

(e_n) croissante et majorée: elle converge.

On note e sa limite.

$$e_n = 2.71828$$

$$e_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Autre caractéristique du nombre e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1.3 Limite infinie

Définition La suite (a_n) tend vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ si:

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}^* (N = N(A)) \text{ t.q. } n \geq N \implies f(x) > A$$

On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

On dit que (a_n) diverge vers $+\infty$

De même

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \iff \exists N \in \mathbb{N}^* (N = N(B)) \text{ t.q. } n \geq N \implies a_n > B$$

Exemple Montrons que $(a_n) = (n^2)$ diverge vers $+\infty$.

Soit $A > 0$ donné, montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $a_n > A$ si $n \geq N$.

$$a_n > A \iff n^2 > A \iff n \in]-\infty; \sqrt{A}[\cup]\sqrt{A}; +\infty[$$

Tout $N > \sqrt{A}$ convient car $n \leq N$ (avec $N \geq \sqrt{A}$) $\implies n^2 > A$

Théorème importants

1. Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et si b_n converge ou $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, alors $(a_n + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
2. Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
 - Si $\lambda > 0$, $(\lambda a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
 - Si $\lambda < 0$, $(\lambda a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$
3. Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b > 0$ ou si $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, alors $(a_n \cdot b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
4. Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, alors $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

5. Théorème du gendarme

Soit $(a_n), (b_n)$ t.q. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ avec $a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0$

si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

(de manière analogue pour $a_n \rightarrow -\infty$)

Exemples Montrons que si $q > 1$, alors (q^n) diverge vers $+\infty$

$$\begin{aligned} q > 1 &\implies \exists p > 0 \text{ t.q. } q = 1 + p \\ q^n &= (1 + p)^n = 1 + n \cdot p + \dots + p^n > n \cdot p \\ \text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} np &= p \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n = p \cdot +\infty = +\infty (p > 0) \end{aligned}$$

Donc (q^n) diverge vers $+\infty$

Cas d'indétermination

- Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$

On ne peut rien dire à priori de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

- Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

On ne peut rien dire à priori de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$$