EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2B

PREPA-032(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Simon BOSSONEY

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Applications linéaires

3.1 Définition et propriétés

Parmi l'ensemble des fonctions d'un espace vectoriel V vers un espace vectoriel W, certaines respectent les lois d'addition et de multipliication par un nombre réel.

3.1.1 Définition

Soient V et W deux espaces vectoriels. Un **application linéaire** est une fonction

$$f : V \longrightarrow W$$

telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \in W$$

Exemples:

1. Soit V un espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

   $$V \ni x \longmapsto \lambda x \in V$$

   est une application de V dans V. On appelle ce type d'application un **homothetie**.

2. Une **rotation** dans le plan $\mathbb{R}^2$ des vecteurs autour de l'origine est une application linéaire.

3. La projection d'un vecteur de l'espace de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur un plan $\mathbb{R}^2$ le long d'un vecteur normal au plan est une application linéaire.

4. Soit $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions n fois continuement dérivables sur $\mathbb{R}$. La dérivée

   $$\mathbb{C}^n(\mathbb{R}) \ni f(x) \longmapsto f'(x) \in \mathbb{C}^{n-1}(\mathbb{R})$$

5. L'intégrale

   $$C(\mathbb{R}) \ni f(x) \longmapsto \int_0^x f(x)dx \in \mathbb{R}$$

   est une application linéaire des fonctions continues (ou plus généralement intégrables) vers $\mathbb{R}$.

6. L'évaluation d'un polynôme en une valeur particulière est un autre exemple d'application linéaire.

$$\mathbb{R}_n[\,x\,] \ni P(x) \longmapsto P(x) \in \mathbb{R}$$

Propriétés:

1. Si
$$f : V \longrightarrow W$$
alors
$$f(0_V) = 0_W$$
En effet,
$$0_W = f(0_V) - f(0_V) = f(0_V - 0_V) = f(0_V)$$

2. Une application linéaire
$$f : V \longrightarrow W$$
est complètement déterminée dès qu'on connait son action sur une base B_V de V. En effet soit
$$B_V = \{v_1, ..., v_n\}$$
une base finie de V et soient
$$w_1 = f(v_1), ..., w_2 = f(v_n)$$
les images des éléments de cette base par f. Alors si $x \in V$, il existe une unique manière d'écrire linéaire des éléments de B_V:
$$x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$
Mais alors,
$$f(x) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 w_1 + ...\lambda_n + w_n$$
Par conséquent, si deux applications linéaires
$$f, g : V \longrightarrow W$$
sont égales sur une base de V, alors
$$f = g$$
et réciproquement

3.1.2 Définition

Soit
$$f : V \longrightarrow W$$
une application linéaire entre deux espaces vectoriels V et W. On définit le **noyau**
$$Ker(f) \text{ de } f$$

come l'ensemble

$$Ker(f) \coloneqq \{x \in V : f(x) = 0_W\}$$

L'**image** $Im(f)$ est définie comme l'ensemble

$$Im(f) \coloneqq \{f(x) \in W : x \in V\}$$

On dit que l'image f est un sous-ensemble de W, alors que le noyau de f est une sous-ensemble de V.

3.1.3 Théorème

Soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels V et W. Alors Ker(f) est une sous-espace vectoriel de V alors que Im(f) est un sous-espace vectoriel de W.

Démonstration:

- Le noyau de f est non-vide car

  $$f(0_V) = 0_W, \text{ i.e. } 0_V \in \text{Ker}(f)$$

  De plus, si $x, y \in \text{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

  $$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = 0_W + \lambda 0_W$$

  et

  $$x + \lambda y \in \text{Ker}(f)$$

- L'image de f est non-vide car

  $$0_W = f(0_V) \in \text{Im}(f)$$

  De plus, si $v = f(x),\ w = f(y)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

  $$v + \lambda w = f(x) + \lambda f(y) = f(x + \lambda y) \in \text{Im}(f)$$

□

Les images par f d'une famille génératrice de V générant Im(f):

3.1.4 Théorème

Soient $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire entre des espaces vectoriels V et W et $\{v_1, ..., v_n\}$ une famille génératrice de V. Alors,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x_1), ..., f(x_n))$$

Démonstration: (he didn't do it in class)

□

3.1.5 Théorème

Soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels V et W. Alors

- f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_V\}$
- f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = W$
- f est bijective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_V\}$ et $\text{Im}(f) = W$

Démonstration:

- f est injective si et seulement si
$$V \ni x \neq y \implies W \in f(x) \neq f(y) \in W$$
et dons si et seulement si
$$V \in x \neq y \in V \implies f(x) - f(y) \neq 0_W$$
ou encore si et seulement si
$$x - y \neq 0_V \implies f(x-y) \neq 0_W$$
et donc finalement si et seulement si
$$f(z) = 0_W \implies z = 0_V$$
- f est surjective si et seulement si
$$\forall w \in W, \exists x \in W : w = f(x)$$
ce qui signifie que
$$f(V) = W, \text{ i.e. } \text{Im}(f) = W$$
- f est bijective si et seulement si elle est simultanément injective et surjective.

3.1.6 Définition

Soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire entre deux vectoriels V et W. Soit $w \in W$. La **préimage** de w par f est l'ensemble

$$f^{-1}\{w\} := \{x \in V : f(x) = w\}$$

Propriétés:

1. La préimage de 0_W est le noyau de f : $f^{-1}\{0_W\} = \text{Ker}(f)$
2. f est injective si et seulement si $f^{-1}\{0_W\} = \{0_V\}$
3. $f^{-1}\{w\} \neq \emptyset \iff w \in \text{Im}(f)$
4. La préimage $f^{-1}\{w\}$ est soit vide, soit de la forme
$$f^{-1}\{w\} = x + \text{Ker}(f)$$
où $f(x) = w$

- En effet, comme $f(x) = w$ alors $x \in f^{-1}\{w\}$. De plus, si $y \in \text{Ker}(f)$ alors $f(x+y) = f(x) + f(y) = w + 0_W = w$ d'où $x + \text{Ker}(f) \subset f^{-1}\{w\}$
- Réciproquement, si $v \in f^{-1}\{w\}$ alors
$$f(v - x) = f(v) - f(x) = w - w = 0_W$$
de sorte que
$$v - x \in \text{Ker}$$
ou encore que
$$v \in x + \text{Ker}(f)$$
d'où
$$f^{-1}\{w\} \subset x + \text{Ker}(f)$$

$\square$

- La préimage par f d'un élément de W existe toujours, indépendamment de la bijectivité de f ou non. Il ne faut pas confondre $f^{-1}\{w\}$ avec $f^{-1}(w)$. Cette notation est strictement réservée à la fonction réciproque de f appliquée à w.

La fonction réciproque n'existe que si f est une bijection, alors que la préimage (ou l'image réciproque) de w par f existe toujours et est un sous-ensemble de V.

Remarque: On considère le système d'équations linéaire

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ y - z + 2t = 1 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

On peut voir la partie homogène de ce système comme une application linéaire de $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z + t \\ y - z + 2t \\ y + 2z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Le noyau de cette application n'est rien d'autre que l'ensemble des solutions du système homogène.

Le système a alors une solution si et seulement si $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans l'image de cette application.

Comme un application linéaire est définie dès qu'on connait son action sur une base, on peut déterminer son action sur la base canonique:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tout élément de l'image sera alors une combinaison linéaire des quatre vecteurs. Le système a alors une solution si et seulement si,

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

On peut par exemple choisir $\gamma = 1, \delta = 1, \alpha = -3$ et $\beta = 0$.

3.2 Représentation matricielle

Tout système linéaire peut être considéré comme une application linéaire. Réciproquement, toute application linéaire entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ peut être par mxn coefficients $\{a_{i,j}\}_{1\leq i\leq m, 1\leq n}$ tels que

$$f(x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
Plus précisément, on a

$$a_{ij} = f(e_j)_i$$

où e_j est le j^e vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Démonstration: Soit

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

On a alors

$$x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$$

On pose

$$w = f(x) = w_1f_1 + ... + w_mf_m$$

où $f_1, ..., f_m$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Par linéarité de f, on a alors

$$w_i = f(x)_i = f(x_1 + e_1 + ... + x_ne_n) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_je_j\right)_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_jf(e_j)_i = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_j$$

□

3.2.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. La matrice M_f donnée par les coefficients $\{a_{i,j}\}_{1\leq i\leq m, 1\leq n}$ est la **représentation** de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

Le colonnes de $M_f$sont les coefficients dans la base canonique $\{f_1, ..., f_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ des images par f des vecteurs de base de la base canonique $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

3.2.2 Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. La matrice M_f donnée par les coefficients $\{a_{ij}\}_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$ canoniques.

Les colonnes de M_f sont les coefficients dans la base canonique $\{f_1, ..., f_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ des images par f des vecteurs de base de la base canonique $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$

La technique consistant à représenter une application linéaire par une matrice peut s'appliquer dans un cadre plus général. Avant de montrer cela, on définit deux applications linéaires d'un type particulier:

3.2.3 Définition

Soit $B = \{b_1, ..., b_n\}$ un base d'un espace vectoriel V. On peut considérer cette base comme une application linéaire:

$$B : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$$

Clairement, l'application B est linéaire. De plus, elle est injective. En effet, si $B(\lambda_1, ..., \lambda_n) = 0_V$, alors

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_n b_n = 0_V$$

et comme $\{b_1, ..., b_n\}$ est une base donc une famille libre de V, on doit avoir

$$0 = \lambda_1 = ... = \lambda_n$$

L'application B est surjective, car la famille $\{b_1, ..., b_n\}$ est une base de V, ainsi si $v \in V$ il existe des nombres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n = B(B(\lambda_1, ..., \lambda_n) = 0_V)$.

L'application B est donc bijective. Ainsi, il existe une application bijective réciproque définie comme:

$$[...]_B : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ces deux applications sont donc inverses l'une de l'autre. Elles vont nous permettre de représenter toute application linéaire entre des espaces vectoriels par une matrice.

Remarque: Il faudrait au sens strict distinguer une base B de l'application linéaire qu'elle génère entre $\mathbb{R}^n$ et V. Or, il existe une correspondance biunivoque entre les applications linéaires bijective entre $\mathbb{R}^n$ et V et les bases de V. En effet, si B est une base de V, on vient de voir comment elle génère une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^n$ et V.

Réciproquement, si

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

est une application linéaire bijective,

$$\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$$

forme une base de V, où $\{e_1, ..., e_n\}$ est la canonique de $\mathbb{R}^n$. En effet, si $v \in V$, il existe un élément $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tel que

$$v = f(\lambda_1, ..., \lambda_n) = f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$$

La famille $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ est donc génératrice de V. Cette famille est aussi libre car si

$$\lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n) = 0_V \implies f(\lambda_1, ..., \lambda_n) = 0_V \implies 0 = \lambda_1 = ... = \lambda_n$$

car f est injective.

On acceptera donc l'abus de notation qui consiste à considérer B comme une base et comme l'application linéaire qui lui correspond.

A présent, on va voir comment utiliser ces bases pour représenter une application linéaire par une matrice. Soit

$$f : V \longrightarrow W$$

une application linéaire entre des espaces vectoriels V et W de dimensions n et m respectivement. On choisit deux bases

$$B_V = \{v_1, ..., v_n\}$$

et

$$B_W = \{w_1, ..., w_n\}$$

Pour une vecteur $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, on peut donc écrire

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)$$

Les vecteurs $f(v_1), ..., f(v_n) \in W$ sont les images par f des vecteurs de base $v_1, ..., v_n \in V$. Ils possèdent donc des composantes selon la base choisie B_W de W. On pose alors,

$$[f(v_j)]_{B_W} \coloneqq \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

où

$$[...]_{B_W} : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

En prenant les composantes de $f(v) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)$ par rapport à la base B_W de W, on obtient

$$[f(v)]_{B_W} = [\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)]_{B_W} = \lambda_1 [f(v_1)]_{B_W} + ... + \lambda_n [f(v_n)]_{B_W}$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

3.2.4 Théorème

Soient $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire entre les espaces vectoriels V et W, et $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ et $B_W = \{w_1, ..., w_n\}$ des bases pour V et W respectivement.
Alors la matrice $A_{f,B_V,B_W} \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ de coefficients

$$a_{ij} = ([f(v_j)]_{B_W})_i$$

représente l'application linéaire f par la formule

$$[f(v)]_{B_W} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A_{f,B_V,B_W}[v]_{B_V}$$

où $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = [v]_{B_V}$

Exemple: On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ &P(x) \longmapsto P(1) + P'(1)(x-1) + P''(1)(x-1)^2 \end{aligned}$$

On vérifie d'abord qu'il s'agit bien d'une application linaire. Pour ce faire, on prend deux polynômes $P(x)$ et $Q(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ et on calcule

$$\begin{aligned} f(P(x) + \lambda Q(x)) &= (P + \lambda Q)(1) + (P + \lambda Q)'(1)(x-1) + (P + \lambda Q)''(1)(x-1)^2 \\ &= P(1) + \lambda Q(1) + (P'(1) + \lambda Q'(1))(x-1) + (P''(1) + \lambda Q''(1))(x-1)^2 \\ &= P(1) + P'(1)(x-1) + P''(x-1)^2 + \lambda(Q(1) + Q'(1)(x-1) + Q''(1)(x-1)^2) \\ &= f(P(x)) + \lambda f(Q(x)) \end{aligned}$$

Cette application est donc bien linéaire. On choisit maintenant des bases. Par exemple,

$$B_{\mathbb{R}_4[x]} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \quad \text{et} \quad B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x-1, (x-1)^2\}$$

On trouve alors les images des éléments $1, x, x^2, x^3, x^4$ de la base $B_{\mathbb{R}_4[x]}$ par f:

$$f(1) = 1; \quad f(x) = 1 + x - 1; \quad f(x^2) = 1 + 2(x-1) + 2(x-1)^2$$
$$f(x^3) = 1 + 3(x-1) + 6(x-1)^2; \quad f(x^4) = 1 + 4(x-1) + 12(x-1)^2$$

$$[f(1)]_{B_{\mathbb{R}_2[x]}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad [f(x)]_{B_{\mathbb{R}_2[x]}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad [f(x^2)]_{B_{\mathbb{R}_2[x]}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};$$
$$[f(x^3)]_{B_{\mathbb{R}_2[x]}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad [f(x^4)]_{B_{\mathbb{R}_2[x]}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

En rassemblant ces images dans des colonnes d'une matrices on obtient

$$A_{f,B_{\mathbb{R}_4[x]},B_{\mathbb{R}_2[x]}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

On vérifie que cette matrice représente bien l'application linéaire f sur le polynômes

$$P(x) = 1 - x + 2x^2 + x^4$$

$$P'(x) = -1 + 4x + 4x^3 \quad \text{et } P''(x) = 4 + 12x^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= P(1) + P'(1)(x-1) + P''(1)(x-1)^2 \\ &= 3 + 7(x-1) + 16(x-1)^2 \end{aligned}$$

Si on calcule les composantes de $P(x)$ dans la base $B_{\mathbb{R}_4[x]}$, on obtient

$$[1 - x + 2x^2 + x^4]_{B_{\mathbb{R}_4[x]}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'image de $P(x)$ dans la base $B_{\mathbb{R}_2[x]}$ s'écrit,

$$[f(1 - x + 2x^2 + x^4)]_{B_{\mathbb{R}_2[x]}} = A_{f,B_{\mathbb{R}_4[x]},B_{\mathbb{R}_2[x]}}[1 - x + 2x^2 + x^4]_{B_{\mathbb{R}_4[x]}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix} = [3 + 7(x-1) + 16(x-1)^2]_{B_{\mathbb{R}_4[x]}}$$

On a bien les coefficients de $f(P)(x)$ dans la base $B_{\mathbb{R}_2[x]}$

Remarques:

1. ⚠ La matrice qui représente une application linéaire dépend fortement des bases choisies. Dans l'exemple précédent, si on choisit

   $$B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}$$

   les images des vecteurs de base peuvent être développées et s'écrivent,

   $$f(1) = 1; \quad f(x) = x; \quad f(x^2)1 - 2x + 2x^2$$

   $$f(x^3) = 4 - 9x + 6x^2; \quad f(x^4) = 9 - 20x + 12x^2$$

   Dans ce cas, l'application linéaire f est représenté par

   $$A_{f,B_{\mathbb{R}_4[x]},B_{\mathbb{R}_2[x]}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & -20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Il est pratique de représenter une application linéaire par une matrice, mais parfois, il vaut mieux étudier l'application linéaire par des considérations directes sur sa définition.

   Dans l'exemple précédent, si on veut calculer le noyau et l'image de f, par exemple, on remarque que si

   $$P(x) \in \text{Ker}(f) \iff P(1)+P'(1)(x-1)+P''(x-1)^2 = 0 \iff P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$$

   Ainsi, le noyau s'écrit
   $$P(x) = (x-1)^3(ax+b)$$
   où $a, b \in \mathbb{R}$

   En effet
   $$P'(x) = (x-1)^2(3(ax+b) + a(x-1))$$
   $$P''(x) = (x-1)^2(6(ax+b) + 6a(x-1))$$

   Pour trouver l'image, on utilise le fait que $\{1, x-1, (x-1)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Ainsi, tout polynôme $Q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ peut s'écrire comme,

   $$Q(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2$$

   Les nombres a, b, c doivent correspondre au polynôme $P(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ et à ses dérivées premières et seconde évalués en $x = 1$. Ce polynôme est $P(x) = a+b(x-1)+\frac{c}{2}(x-1)^2$

   Ainsi,
   $$P(1) = a; \quad P'(1) = b; \quad P''(1) = c$$
   et donc
   $$Q(x) = f(P)(x) = P(1) + P'(1)(x-1) + P''(1)(x-1)^2$$

   Par conséquent, l'image de f est $\mathbb{R}_2[x]$ tout entier.

3.3 Compositions d'applications linéaires

3.3.1 Définition

Soient V et W deux espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(V, W)$, l'ensemble des applications linéaires de V dans W.

3.3.2 Théorème

L'ensemble des application linéaires $\mathcal{L}(V, W)$ entre les espaces V et W est un espace vectoriel.

Démonstration:

1. $\forall f, g \in \mathcal{L}(V, W), \forall x \in V; \quad f, g : V \longrightarrow W$

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

2. $\forall f, g, h \in \mathcal{L}(V, W), \forall x \in V; \quad f, g, h : V \longrightarrow W$
$$(f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g+h)(x)$$
3. $\exists 0_{\mathcal{L}(V,W)} \in \mathcal{L}(V, W) | \forall f \in \mathbb{L}(V, W), \forall x \in V$
$$f(x) + 0_{\mathbb{L}(V,W)}(x) = f(x) \implies 0_{\mathbb{L}(V,W)}(x) = 0_W \quad \forall x$$
4. $\forall f \in \mathcal{L}(V, W), \exists f' \in \mathbb{L}(V, W) | \forall x \in V \quad f(x) + f'(x) = 0_W$
5. $\forall f \in \mathbb{L}(V, W), \quad \forall x \in V; \quad 1 \cdot f(x) = f(x)$
6. $\forall f \in \mathbb{L}(V, W), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
$$(\lambda + \mu) \cdot f(x) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(x)$$
7. $\forall f \in \mathbb{L}(V, W), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
$$\lambda \cdot (\mu \cdot f(x)) = (\lambda\mu) \cdot f(x)$$
8. $\forall f, g \in \mathbb{L}(V, W), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (f+g)(x) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$

□

On peut aussi composer les applications linéaires

3.3.3 Théorème

Soient U, V, W trois espaces vectoriels et soient $f : V \longrightarrow W$ et $g : W \longrightarrow U$ deux applications linéaires. Alors la **composition** de ces applications linéaires $g \circ f : V \longrightarrow U$ est une application linéaire.

Démonstration: Comme les applications linéaires [missing this paragraph, slide 3]
Pour que la compositions entre les applications linéaires $f : V \longrightarrow W$ et $g : T \longrightarrow U$ existe, il faut que les espaces vectoriels W et T soit égaux. Dans ce cas on dit que les applications linéaires sont **compatible**.

Exemples:

1. Soient
$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x] \\ & P(x) = ax^2 + bx + c \longmapsto p'(x) = 2ax + b \\ g :& \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & Q(x) = dx + c \longmapsto \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \\ & g \circ f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \quad P(x) = ax^2 + bx + c \longmapsto \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Le noyau de cette application linéaire Ker$(g \circ f)$ contient tous les polynômes constant de la forme $P(x) = c$, car $a = b = 0$
Si on avait choisi une application linéaire $g : \mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la composition $g \circ f$ n'existerait pas parce que ces applications sont incompatibles, car l'espace d'arrivée $\mathbb{R}_1[x]$ de f, diffère de l'espace vectoriel de départ de $\mathbb{R}_4[x]$ de g.

2. Soient
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$
et
$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$
Ainsi $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:
$$(g \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (x+y)+(x-y) \\ (x+y)-(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
Donc
$$g \circ f$$
[missing this part end of this example]

3.4 Composition de matrices

3.4.1 Définition

L'ensemble des matrices $M_{mxn}(\mathbb{R})$ à m lignes et n colonnes satisfait une loi d'addition et une loi de multiplication par un scalaire.

Loi d'addition On peut additionner deux matrices $A, B \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ si elles ont le même nombre de lignes et de colonnes

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=A} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}}_{=A+B}$$

Loi de multiplication par un scalaire La multiplication d'une matrice $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ consiste simplement à multiplier chaque coefficients de A par λ:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

3.4.2 Théorème

L'ensemble $M_{mxn}(\mathbb{R})$ des matrices à m lignes et n colonnes est un espace vectoriel

On peut effectuer la composition de deux applications linéaires qui sont représentées par des matrices. La représentation de cette composition est le produit vectoriel de ces matrices.

Soit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Soient B_v et B_w des bases des espaces vectoriels V et W de dimensions n et m respectivement. Les vecteurs $v \in V$ et $w \in W$ sont représentés dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ par les applications linéaire $[...]_{B_V} \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^n)$ et $[...]_{B_W} \in \mathcal{L}(W, \mathbb{R}^m)$. La matrice A_{f,B_V,B_W} qui représente l'application linéaire f dans $M_{mxn}(\mathbb{R})$ par rapport aux bases $B_V \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, V)$ et $B_W \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, W)$ s'écrit: $A_{f,B_V,B_W} = [...]_{B_W} \circ f \circ B_V$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "{[...]_{B_W}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "B_V"] \arrow[r, "A_{f,B_V,B_W}"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V & W \arrow[d, "B_W"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "B_V"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

3.4.3 Définition

La matrice $C \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ obtenue par le **produit matriciel** des matrices $A \in M_{mxp}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{pxn}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $C = AB$, s'écrit en composantes comme,

$$c_{ij} = \sim_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1j} + ... + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

Exemple:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 12 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=C}$$

3.4.4 Définition

Deux matrices A et B sont **compatibles** si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde

3.4.5 Définition

La matrice $I_n \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ telle que

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est appelée la matrice identité.

3.4.6 Théorème

Le produit matriciel possède les propriétés suivantes:

1. $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 \quad \forall A \in M_{mxp}(\mathbb{R}), \quad \forall B_1, B_2 \in M_{pxn}(\mathbb{R})$
2. $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B \quad \forall A_1, A_2 \in M_{mxp}(\mathbb{R}), \quad \forall B \in M_{pxn}(\mathbb{R})$
3. $(\lambda A)(\mu B) = \lambda\mu AB \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall A \in M_{mxp}(\mathbb{R}), \quad \forall B \in M_{pxn}(\mathbb{R})$
4. $(AB)C = A(BC) \quad \forall A \in M_{mxp}(\mathbb{R}) \quad \forall B \in M_{pxq}(\mathbb{R}) \quad \forall C \in M_{qxn}(\mathbb{R})$
5. $\forall A \in M_{mxn}(\mathbb{R}), \quad I_m(A) = AI_m = A$

Démonstration: On démonte la propriété $4)$. Soient

$$U = AB \quad \text{et} \quad V = BC \quad \text{où} \quad u_{ik} = \sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lk} \quad \text{et} \quad v_{lj} = \sum_{k=1}^{q} b_{lk}c_{kj}$$

$$\begin{aligned} (UC)_{ij} &= \sum_{k=1}^{q} u_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{al}b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{p} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{lk}c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^{p} a_{il}v_{lj} = (AV)_{ij} \\ &\implies ((AB)C)_{ij} = (A(BC))_{ij} \end{aligned}$$

□

Soient $A \in M_{mxp}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{mxn}(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $X \in M_{pxn}(\mathbb{R})$ tel que $AX = B$

Ainsi, les coefficients de B satisfont la relation

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}x_{kj}$$

La j^e colonne de la matrice B s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} x_{kj} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, les colonnes de la matrice B peuvent s'écrire comme combinaison linéaires des colonnes de la matrice A.

Identités du calcul

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $1 \cdot A = A$
6. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$
7. $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$
8. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
9. $(AB)C = A(BC)$
10. $A(B + C) = AB + AC$
11. $(A + B)C = AC + BC$
12. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
13. $I_m A = AI_n = A$

Remarques:

1. Le produit matriciel n'est en général pas commutatif $AB \neq BA$

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = AB \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = BA \end{aligned}\right. \implies AB \neq BA$$

2. $\exists A | A^n = 0$ si $A \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 = 0$$

La matrice A est une matrice **nilpatente** d'indice $n = 2$