

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 2B  
PREPA-032(B)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Simon BOSSONEY

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

## Chapter 4

# Théorème du rang

### 4.1 Rang d'une application linéaire

Comme l'image d'une application linéaire  $f : V \longrightarrow W$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ , on introduit la définition suivante

#### 4.1.1 Définition

Soit  $f : V \longrightarrow W$  une application linéaire. Le **rang** de  $f$  est par définition

$$\text{rang}(f) := \dim(\text{Im}(f))$$

Comme l'image d'une application linéaire est engendrée par les combinaisons linéaires des images par  $f$  des éléments d'une base de  $V$ , on a le résultat suivant:

#### 4.1.2 Théorème

Soient  $f : V \longrightarrow W$  une application linéaire  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  une base de  $V$ . Alors

$$\text{rang}(f) = \dim(\text{Vect}(f(b_1), \dots, f(b_n)))$$

□

Les vecteurs  $f(b_1), \dots, f(b_n)$  ne sont en général pas linéairement indépendants. En fait, il existe une relation très simple entre la dimension du noyau de  $f$  et son rang.

**Théorème du rang (deuxième version)** Soient  $f : V \longrightarrow W$  une application linéaire où  $V$  est de dimension finie  $n$ . Alors,

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rang}(f) = \dim(V) = n$$

**Démonstration:** Comme le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de  $V$ , il est de dimension finie et possède alors une base  $\{n_1, \dots, n_k\}$  avec  $k \leq n = \dim(V)$ . On peut compléter cette famille de vecteurs pour en obtenir une base de  $V$  en ajoutant  $r$  vecteurs  $b_1, \dots, b_r$  de  $V$  où  $r = n - k$ . On a alors,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(\underbrace{f(n_1), \dots, f(n_k)}_{=0_W}, \underbrace{f(b_1), \dots, f(b_r)}_{=0_W}) = \text{Vect}(f(b_1), \dots, f(b_r))$$

La famille  $\{f(b_1), \dots, f(b_r)\}$  est donc une famille génératrice de l'image de  $f$ .

Pour conclure, il faut montrer que cette famille est aussi une base de l'image de  $f$ , c'est-à-dire c'est une famille libre.

$$\text{Si } 0_W = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_r f(b_r) \iff 0_W = f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r)$$

$$\iff \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r \in \text{Ker}(f)$$

$$\iff \exists \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R} \mid \mu_1 n_1 + \dots + \mu_k n_k = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r$$

$$\iff \exists \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R} \mid \mu_1 n_1 + \dots + \mu_k n_k - \lambda_1 b_1 - \dots - \lambda_r b_r = 0_V$$

$$\iff \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0 = \mu_1 = \dots = \mu_k$$

□

**Exemple:** On considère l'application linéaire  $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $P(x) \longmapsto P(1)$ . Le rang de cette application linéaire ne peut pas excéder la dimension de l'espace vectoriel d'arrivée, i.e.

$$\text{rang}(f) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$$

Explicitement,

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \longmapsto P(1) = a + b + c + d$$

Ainsi,  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1)$  et  $\text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = 1$ . Le théorème du rang nous assure alors que

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[x]) - \text{rang}(f) = 4 - 1 = 3$$

## 4.2 Rang d'une famille de vecteurs

Déterminer le rang d'une application linéaire revient donc à calculer la dimension d'un espace vectoriel engendré par une certaine famille de vecteurs.

### 4.2.1 Définition

Soit  $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\}$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $V$ . Le **rang** de  $\mathcal{F}$  s'écrit,

$$\text{rang}(\mathcal{F}) := \dim(\text{Vect}(v_1, \dots, v_n))$$

Le lien avec le rang d'une application linéaire peut être établi en notant qu'une famille finie de vecteurs  $\mathcal{F} \subset V$  définit une application linéaire.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow V \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

On accepte à nouveau l'abus de notation qui consiste à utiliser le même symbole pour la famille finie de vecteurs et l'application linéaire qu'elle définit. Clairement, le rang de  $\mathcal{F}$  en tant qu'application linéaire est le même que celui de  $\mathcal{F}$  en tant que famille de vecteurs. D'après la 2<sup>e</sup> version du théorème du rang.

$$\text{rang}(\mathcal{F}) + \dim(\text{Ker}(\mathcal{F})) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Si  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Ker}(\mathcal{F}) \iff \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$

$$\iff \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \rangle \in L_{\mathcal{F}}$$

où on rappelle ici que pour une famille de vecteurs  $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , on note  $L_{\mathcal{F}}$  l'ensemble des relations de dépendance linéaire

$$L_{\mathcal{F}} = \{ \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \rangle \}$$

Cet ensemble est à son tour un espace vectoriel.

L'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \text{Ker}(\mathcal{F}) &\longrightarrow L_{\mathcal{F}} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \rangle \end{aligned}$$

L'application linéaire  $f$  définit une bijection entre  $\text{Ker}(\mathcal{F})$  et  $L_{\mathcal{F}}$ . Ces deux espaces vectoriels sont donc la même dimension.

**Théorème du rang (troisième version)** Soit  $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\}$  une famille de vecteurs de  $V$ . Alors

$$\text{rang}(\mathcal{F}) + \dim(L_{\mathcal{F}}) = n$$

□

## 4.3 Rang de matrices

Une matrice peut être considérée comme un ensemble de lignes ou des colonnes vues comme des vecteurs à coefficients réels.

### 4.3.1 Définition

Soit une matrice  $A = \{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

Pour  $1 \leq i \leq m$ , on note le vecteur ligne

$$l_i := (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$$

Pour  $1 \leq j \leq n$ , on note le vecteur colonne

$$c_j := (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$$

On définit alors,

$$\text{rang}(\text{lignes}(A)) = \dim(\text{Vect}(l_1, \dots, l_m))$$

$$\text{rang}(\text{colonnes}(A)) = \dim(\text{Vect}(c_1, \dots, c_n))$$

On rappelle ici que chaque  $l_i$  définit une équation linéaire homogène  $e_i$  à  $n$  variables par

$$e_i = \langle a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0 \rangle$$

Comme l'addition de deux équations linéaires homogènes se fait en additionnant les coefficients multipliant une variable  $x_j$  donnée, cette correspondance définit une application linéaire bijective entre  $\text{Vect}(l_1, \dots, l_m)$  et  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ . Ces deux espaces ont donc la même dimension. Ainsi, d'après le premier théorème du rang

$$\dim(\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)) + s = n$$

où  $s$  est la dimension de l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires constituées des  $m$  lignes de la matrice  $A$ . Par conséquent,

$$\dim(\text{Vect}(l_1, \dots, l_m)) + s = n \iff \text{rang}(\text{lignes}(A)) + s = n$$

D'autres part, si on considère la matrice  $A$  comme une application linéaire  $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \longmapsto \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

alors  $s = \dim(\text{Ker}(f_A))$  et  $\text{rang}(f_A) = \dim(\text{Im}(f_A))$ .

L'image de  $f_A$  est obtenue par combinaison linéaire des colonnes  $c_k = (a_{1k}, \dots, a_{mk})$  où  $1 \leq k \leq n$  de  $A$ :

$$\dim(\text{Im}(f_A)) = \dim(\text{Vect}(c_1, \dots, c_m)) = \text{rang}(\text{colonnes}(A))$$

Ainsi le deuxième théorème du rang s'écrit,

$$\dim(\text{Ker}(f_A)) + \dim(\text{Im}(f_A)) = n \iff \text{rang}(\text{colonnes}(A)) + s = n$$

**Théorème du rang (quatrième version)** Soit une matrice  $A = \{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Alors,

$$\text{rang}(\text{colonnes}(A)) = \text{rang}(\text{lignes}(A)) = \text{rang}(f_A)$$