## **EPFL**

# MAN

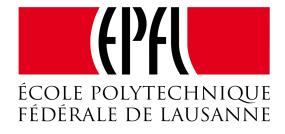
Mise à niveau

# Maths 2B Prepa-032(b)

Student: Arnaud FAUCONNET

Professor: Simon BOSSONEY

Printemps - 2019



### Chapter 1

## Systèmes linéaires

#### 1.1 Equations linéaires

**Definition:** Une équation linéaire à n variables est une équation de type:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

où  $a_1,...,a_n,b\in\mathbb{R}$  sont fixés et où  $x_1,...,x_n\in\mathbb{R}$  variables.

Si  $\underline{b} = \underline{0}$ , on dit que l'équation est homogène.

Si  $b \neq 0$ , on dit que l'équation est inhomogène.

Une **solution** est donnée de n nombres réels  $x_1, ..., x_n$  tel que l'équation est satisfaite. La collection de S de toutes les solutions sera appelée **l'ensemble des solutions** 

#### Exemple

$$x + 2y - 3z = 1 ag{1.1}$$

Équation linéaire à trois variables,  $x, y, z, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -3, b = 1$ 

**Resolution** (1.1) est équivalente à

$$x = 1 - 2y + 3z$$

Si on rassemble x, y et z en une colonne  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , on a que

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Choix y = 1, z = 2,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Remarque** (1.1) est équivalente à  $2y = 1 - x + 3z \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z$ 

On a alors:

$$\mathcal{S}' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = S'$$
 si  $x = 1, z = 2$ , on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4/03/2019

### 1.2 Système d'équation

**Definition** Un **système d'équation** linéaire est une famille de m équation linéaires à n variables.

$$a_{11} \cdot x_{11} + \dots + a_{1n} \cdot x_{1n} = b_1$$
  
 $\vdots$   
 $a_{m1} \cdot x_{m1} + \dots + a_{mn} \cdot x_{mn} = b_m$ 

où  $\{a_{ij}\}_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq m}$  et  $\{b_j\}_{1\leq j\leq m}$  sont des **coefficients** (réels) du système.

$$a_{ij}$$
  $i$ : ligne,  $j$ : colonne

Une solution est un n-tuple  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  qui satisfait les m équation simultanément.

Un système linéaires est complètement déterminé par ses coefficients.

Les coefficients seront dit "triangulaire supérieur" si

$$a_{ij} = 0$$
 dès que  $i > j$ 

#### **Exemples**

$$i = 1$$
  $x + y - z = 2$   
 $i = 2$   $0x+2y+3z = 1$   
 $i = 3$   $0x + 0y+z = 4$ 

On "remonte" le système:

$$i = 2$$
  $2y + 12 = 1 \iff 2y = -11 \iff y = -\frac{11}{2}$   
 $i = 1$   $x - \frac{11}{2} - 4 = 2 \iff x = \frac{23}{2}$ 

MATHS 2B

$$\implies S: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ \frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

On peut collecter les coefficients en un tableau:

$$5x - 2y + z = 2$$

$$3x + y + 2z - 4t = 0$$

$$2y + z + 2t = 1$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
(1.2)

- L'échange de deux lignes laisse l'ensemble des solutions S invariant.
- L'échange de deux colonnes (avec l'échange de variable correspondantes) laisse *S* invariant.
- La multiplication d'une ligne entière par un nombre **non nul** laisse S invariant.
- L'addition de deux lignes laisse *S* invariant.
- À ne pas faire:
  - multiplier une colonne par un nombre
  - additionner deux colonnes

$$(1.2) \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & | \frac{2}{5} \\ 3 & 1 & 2 & -4 & | 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & | 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1$$

$$(1.2) \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & | \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{7}{5} & -4 & | -\frac{6}{5} \\ 0 & 2 & 1 & 2 & | 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$(1.2) \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & | \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{7}{5} & -4 & | -\frac{6}{5} \\ 0 & 2 & 1 & 2 & | 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$(1.2) \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & | \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{11} & -\frac{20}{11} & | -\frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{62}{3} & | -\frac{23}{3} \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{5}{11}L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$z - \frac{62}{3}t = -\frac{23}{3} \iff z = -\frac{23}{3} + \frac{62}{3}t$$

$$y + \frac{7}{11} - \frac{20}{11}t = -\frac{6}{11} \iff y = -\frac{6}{11} - \frac{7}{11}z + \frac{20}{11}t$$

$$y = -\frac{6}{11} + \frac{161}{33} - \frac{441}{33}t + \frac{20}{11}t$$

$$y = \frac{143}{33} - \frac{374}{33}t$$

$$x - \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}z = \frac{2}{5} \iff x = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}z$$

$$x = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{143}{33} - \frac{374}{33}t\right) - \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{23}{3} + \frac{62}{3}t\right)$$

$$x = \frac{2}{5} + \frac{286}{165} - \frac{748}{165}t + \frac{25}{15} - \frac{62}{15}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{605}{\frac{143}{33}} \\ -\frac{22}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1430}{\frac{374}{33}} \\ -\frac{62}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Résumé** Supposons que le système d'équation est équivalent à un système triangulaire supérieur à k équation non nul à un n variables.

- L'ensemble des solutions est paramétré par n-k paramètres (ex. 4-3=1)
- Une solution a la forme:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_{nn-k} \\ \vdots \\ v_{nn-k} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{605}{165} \\ \frac{143}{33} \\ -\frac{22}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n-k=1, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1430}{165} \\ -\frac{374}{33} \\ -\frac{62}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Si 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
 et  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  sont deux solutions alors

$$t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

est encore une solution ( $\forall t \in \mathbb{R}$ )

S est, dans ce cas, dit "convexe"

• Si 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
 et  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  sont deux solutions alors

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{array}\right)$$

est une solution à l'**équation homogène** (i.e. le système avec  $b_1 = \ldots = b_n = 0$ )

- La partie paramètre de S est l'ensemble des solutions un système homogène
- Cas où le système n'a pas de solutions  $(S = \emptyset)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & x & x & \dots & x & x \\
0 & 1 & x & x & x & x \\
\vdots & \dots & 1 & x & x & x \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x
\end{array}\right)$$

Considérons

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_3$$