EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2B

PREPA-032(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Simon BOSSONEY

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 1

Systèmes linéaires

1.1 Equations linéaires

Definition: Une équation linéaire à n variables est une équation de type:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

où $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ sont **fixés** et où $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ **variables**.

Si $b = 0$, on dit que l'équation est homogène.
Si $b \neq 0$, on dit que l'équation est inhomogène.

Une **solution** est donnée de n nombres réels $x_1, ..., x_n$ tel que l'équation est satisfaite.
La collection de $\mathcal{S}$ de toutes les solutions sera appelée **l'ensemble des solutions**

Exemple

$$x + 2y - 3z = 1 \tag{1.1}$$

Équation linéaire à trois variables, $x, y, z, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -3, b = 1$

Resolution (1.1) est équivalente à

$$x = 1 - 2y + 3z$$

Si on rassemble x, y et z en une colonne $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, on a que

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Choix $y = 1, z = 2$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Remarque (1.1) est équivalente à $2y = 1 - x + 3z \iff y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z$

On a alors:

$$\mathcal{S}' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ si $x = 1, z = 2$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4/03/2019

1.2 Système d'équation

Definition Un **système d'équation** linéaire est une famille de m équation linéaires à n variables.

$$\begin{aligned} &a_{11} \cdot x_{11} + ... + a_{1n} \cdot x_{1n} = b_1 \\ &\vdots \\ &a_{m1} \cdot x_{m1} + ... + a_{mn} \cdot x_{mn} = b_m \end{aligned}$$

où $\{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$ et $\{b_j\}_{1 \leq j \leq m}$ sont des **coefficients** (réels) du système.

$$a_{ij}$$

i: ligne, j: colonne

Une solution est un n-tuple $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ qui satisfait les m équation simultanément.
Un système linéaires est complètement déterminé par ses coefficients.
Les coefficients seront dit "**triangulaire supérieur**" si

$$a_{ij} = 0 \text{ dès que } i > j$$

Exemples

$$\begin{aligned} &i = 1 \quad x + y - z = 2 \\ &i = 2 \quad 0x + 2y + 3z = 1 \\ &i = 3 \quad 0x + 0y + z = 4 \end{aligned}$$

On "remonte" le système:

$$\begin{aligned} &\color{blue}{i = 2} \quad 2y + 12 = 1 \iff 2y = -11 \iff y = -\frac{11}{2} \\ &\color{blue}{i = 1} \quad x - \frac{11}{2} - 4 = 2 \iff x = \frac{23}{2} \end{aligned}$$

$$\implies S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ \frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

On peut collecter les coefficients en un tableau:

$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 2 \\ 3x + y + 2z - 4t &= 0 \\ 2y + z + 2t &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \tag{1.2}$$

- L'échange de deux lignes laisse l'ensemble des solutions S invariant.
- L'échange de deux colonnes (avec l'échange de variable correspondantes) laisse S invariant.
- La multiplication d'une ligne entière par un nombre **non nul** laisse S invariant.
- L'addition de deux lignes laisse S invariant.
- **À ne pas faire**:
  - multiplier une colonne par un nombre
  - additionner deux colonnes

$$(1.2) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 3 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{5} L_1$$

$$(1.2) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{7}{5} & -4 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$(1.2) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{7}{5} & -4 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$(1.2) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{11} & -\frac{20}{11} & -\frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{62}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}\right) \quad \begin{aligned} L_2 &\leftarrow \tfrac{5}{11} L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_2 \end{aligned}$$

$$z - \frac{62}{3}t = -\frac{23}{3} \iff z = -\frac{23}{3} + \frac{62}{3}t$$
$$y + \frac{7}{11} - \frac{20}{11}t = -\frac{6}{11} \iff y = -\frac{6}{11} - \frac{7}{11}z + \frac{20}{11}t$$
$$y = -\frac{6}{11} + \frac{161}{33} - \frac{441}{33}t + \frac{20}{11}t$$
$$y = \frac{143}{33} - \frac{374}{33}t$$
$$x - \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}z = \frac{2}{5} \iff x = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}z$$
$$x = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{143}{33} - \frac{374}{33}t\right) - \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{23}{3} + \frac{62}{3}t\right)$$
$$x = \frac{2}{5} + \frac{286}{165} - \frac{748}{165}t + \frac{25}{15} - \frac{62}{15}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{605}{165} \\ \frac{143}{33} \\ -\frac{22}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1430}{165} \\ -\frac{374}{33} \\ -\frac{62}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résumé Supposons que le système d'équation est équivalent à un système triangulaire supérieur à k équation non nul à un n variables.

- L'ensemble des solutions est paramétré par $n - k$ paramètres (ex. $4 - 3 = 1$)
- Une solution a la forme:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_{nn-k} \\ \vdots \\ v_{nn-k} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{605}{165} \\ \frac{143}{33} \\ -\frac{22}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n - k = 1, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1430}{165} \\ -\frac{374}{33} \\ -\frac{62}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux solutions alors

$$t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

  est encore une solution ($\forall t \in \mathbb{R}$)

  S est, dans ce cas, dit "**convexe**"

- Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux solutions alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

  est une solution à l'**équation homogène** (i.e. le système avec $b_1 = \ldots = b_n = 0$)

- La partie paramètre de S est l'ensemble des solutions un système homogène

- Cas où le système n'a pas de solutions ($S = \emptyset$)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & x & x & \ldots & x & x \\ 0 & 1 & x & x & x & x \\ \vdots & \ldots & 1 & x & x & x \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}x \end{array}\right)$$

- Considérons

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad C_1 \leftrightarrow C_3$$