EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1A

PREPA-031(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Polynôme réels

3.1 Définition et opérations

Définition: Un polynôme en x à coefficients réels est une combinaison linéaire de puissance de x.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$$

avec $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, ..., n$

On note $P \in \mathbb{R}[\,x\,]$ "ensemble de polynôme en x à coefficients réels"

Le degré de P, noté $\deg P$, est la plus grande puissance de x dont le coefficient est non nul.

Convention Le polynôme nul est de degré $-\infty$

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}[\,x\,]$ des polynômes de degré inférieur ou égale à $n \in \mathbb{N}$ est notée $\mathbb{P}_n[\,x\,]$

$$\mathbb{P}_n[\,x\,] = \{P \in \mathbb{R}[\,x\,] | \deg P \leq n\}$$

Définition: La somme de 2 polynômes P et Q se note $P + Q$. On l'obtient en additionnant les coefficients d'une même puissance

Exemple:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 6$$
$$Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 3$$

Alors

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = x^2 + 5x - 3$$

Remarque:

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

Définition: L'amplification par $\lambda \in \mathbb{R}$ d'un polynôme P donne un polynôme noté λP. On obtient en multipliant chaque coefficient par λ.

Exemple:

$$P(x) = 3x^2 + 5x - 6 \qquad \lambda = -\frac{2}{3}$$

Alors

$$(\lambda P)(x) = \lambda \cdot P(x) = -2x^2 - \frac{10}{3}x + 4$$

Remarques:

1.

$$\begin{aligned} &\text{Si } \lambda \neq 0 \iff \deg(\lambda P) = \deg P \\ &\text{Si } \lambda = 0 \iff \deg(\lambda P) = 0 \end{aligned}$$

2. Avec les lois (addition et amplification), $\mathbb{R}[\,x\,]$ et $\mathbb{P}_n[\,x\,]$ sont des espaces vectoriels.

Définition: Multiplication par un monôme.
Soit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

et

$$Q(x) = x^n$$

un monôme.
Leur produit est un polynôme. On l'obtient en distribuant la multiplication par x^n.

$$x^m(a_n x^n + ... + a_0) = a_n x^{n+m} + a_{n-1}x^{n-1+m} + ... + a_0 x^m$$

Remarque:

$$\deg(x^m P) = m + \deg P$$

Définition: Soient P et Q deux polynômes. Leur produit noté $P \cdot Q$. On l'obtient par distribution des produits et un regroupant les coefficients d'une même puissance de x.

Exemple:

$$P(x) = 3x^2 + 5x - 6 \quad Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 3$$

Alors

$$\begin{aligned} (PQ)(x) &= P(x) \cdot Q(x) \\ &= (3x^2 + 5x - 6) \cdot (-x^3 - 2x^2 + 3) \\ &= -3x^5 - 6x^4 + 9x^2 - 5x^4 - 10x^3 + 15x + 6x^3 + 12x^2 - 18 \\ &= -3x^5 - 11x^4 - 4x^3 + 21x^2 + 15x - 18 \end{aligned}$$

Remarque:

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

Définition: Soit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{R}[\, x \,]$$

Alors

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto P(x) \qquad \text{"image par } P \text{ de x"} \end{aligned}$$

est une fonction polynomiale.
En particulier, l'évaluation de P en $x_0 \in \mathbb{R}$ s'écrit

$$P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + ... + a_0$$

P évalué en x_0

Exemple:

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \text{et} \quad x_0 = -2$$

Alors

$$P(x_0) = (-2)^2 - 5(-2) + 6 = 20$$

3.2 Binôme de Newton

Définition: Le polynôme en x.

$$P_n(x) = (x + a)^n, \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$$

est appelé binôme de Newton ($x + a$: binôme)
Calculons...

Définition: On note C_n^k le nombre de manières de choisir un sous-ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments.
On peut montre que

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

où

$$k! k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

est dit "k-factorielle".
On pose

$$0! = 1$$

et

$$C_n^0 = 1 = C_0^0$$

Remarque: Une factorielle est vite très grande...
On calcul plutôt:

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)!}}{k! \cancel{(n-k)!}} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 1} \quad \begin{matrix} \leftarrow k \text{ facteurs} \\ \leftarrow k \text{ facteurs} \end{matrix} \end{aligned}$$

Propriétés:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}, \quad k = 0, ..., n$
2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad k = 1, ..., n-1$
3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

Corollaire: Le développement du binôme de Newton donne:

$$(x+a)^n = C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + ... + C_n^k a^k x^{n-k} + ... + C_n^{n-1} a^{n-1} x^1 + C_n^n a^n x^0$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k a^k x^{n-k}$$ remarque: il y a n+1 termes

En effet , dnas le développement de

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a)\cdot(x+a)\cdot ... \cdot(x+a)}_{n \text{ facteurs}}$$

le terme $a^k x^{n-k}$ apparait C_n^k fois, on a à choisir k fois le a et du coup on a $n-k$ fois le x.

Exemple: Développer

$$(x-1)^6 = C_6^0(-1)^0 x^6 + C_6^1(-1)^1 x^5 + C_6^2(-1)^2 x^4 + C_6^3(-1)^3 x^3 + C_6^4(-1)^4 x^2 + C_6^5(-1)^5 x^1 + C_6^6(-1)^6 x^0$$
$$= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

Exemples:

1. Donner le coefficient de x^{127} dans $(x+2)^{129}$.

   Le terme en x^{127} est $(k=2)$

   $$C_{129}^2 2^2 x^{127} = \frac{129\cdot 128}{2-1}\cdot 2^2 x^{127} = 33024x^{127}$$

2. Terme en x^8 dans $(\overbrace{4x^3}^{x} + \overbrace{\frac{3}{x^2}}^{a})^{11}$

   Le terme général ($(k+1)^e$ terme) est

   $$C_n^k\left(\frac{3}{x^2}\right)^k\cdot(4x^3)^{n-k} = C_{11}^k 3^k 4^{11-k} x^{-2k} x^{3(11-k)}$$

   Il faut trouver

   $$k \text{ t.q. } 33-5k = 8 \quad (k = 0, 1, ..., 11)$$
   $$k = 5$$

   D'où le terme en x^8 : $C_{11}^5 3^5 4^{11-5} x^8 = ...$

3.3 Zéro, schéma de Hörmer, multiplication

Théorème: Soient P un polynôme avec $\deg P \geq 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique polynôme

$$F \text{ t.q. } P(x) = F(x) \cdot (x - x_0) + P(x_0)$$

Remarques:

- $\deg F = \deg P - 1$
- Il est un cas particulier de division euclidienne

En effet, notons

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

et

$$F(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_0$$

Alors

$$\begin{aligned} P(x) &= F(x) \cdot (x - x_0) + r & r\text{: à déterminer} \\ &= b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + ... + b_0 x - x_0 b_{n-1}x^{n-1} - x_0 b_{n-2}x^{n-2} - ... - x_0 b_0 \end{aligned}$$

En additionnant toute les lignes les, les b_k tombent
Donc les b_k existent (uniques) et $r = P(x_0)$
Ce processus est résumé dans le schéma de Hörner

Exemple: Division euclidienne de

$$P(x) = 4x^3 + 2$$

par

$$x + 2$$

$x_0 = -2$
Ainsi :

$$4x^3 + 2 = (4x^2 - 8 + 16) \cdot (x + 2) \underbrace{-30}_{P(-2)}$$

Corollaire: Le reste de la division de $P(x)$ par $x - x_0$ est $P(x_0)$.

Définition: Soit $P \in \mathbb{R}[\,x\,]$. x_0 est un zéro de P (ou racine) si $P(x_0) = 0$.

Corollaire: x_0 est un zéro de $P(x)$ si et seulement si P est divisible par $x - x_0$.

Exemple:

$$x_0 = -1$$

est racine évidente de

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 9$$

$$P(-1) = 0$$

Alors $P(x)$ est divisible par

$$x - x_0 = x + 1$$

Pour trouver la factorisation: diviser ou utiliser le schéma de Hörner.

Définition: Soit P un polynôme, $\deg P \geq 1$. Si x_0 est un zéro de P, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, appelé la multiplicité de x_0, tel que

$$P(x) = (x - x_0)^n Q(x)$$

avec

$$Q(x_0) \neq 0$$

et

$$\deg Q = \deg P - n$$