

EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B
PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 1

Suite de nombres réels

1.1 Définitions

26/02/2019

Définition Une suite de nombres réels est une application de \mathbb{N}^* dans \mathbb{R}

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

a_n est le terme générale de la suite et n est le rang de a_n .

La suite a_1, a_2, a_3, \dots , se note " (a_n) "

Exemples

- 1) La suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \frac{1}{3n-7}$ est la suite $-\frac{1}{4}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \dots$
- 2) $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ n'est pas une suite (pas de premier élément). Mais $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ est une suite dont l'ensemble des valeurs est \mathbb{Z} .
- 3) a, a, a, a, \dots $a \in \mathbb{R}$, $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ est une suite constante.
- 4) Chercher le terme général des suites définie par les premiers termes:

a) $(a_n) : \overbrace{1, 6}^5, \overbrace{11, 16}^5, \overbrace{21, 26}^5,$
 $a_n = 5n - 4$

b) $b_n : \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{10}{9}, \frac{17}{12}, \frac{26}{15}, \frac{37}{18}, \dots$
Difference des numérateurs: 3, 5, 7, 9, 11, ...
Difference des dénominateurs: 3, 3, 3, 3, 3, ...
 $b_n = \frac{n^2+1}{3n}$

- 5) Suites définie par récurrence

$$c_{n+1} = 2 - \frac{1}{c_n}, \quad c_1 = \frac{3}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad c_3 = 2 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}, \quad c_4 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Conjecture: } c_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Démonstration par récurrence:

- Verification: $c_1 = \frac{3}{2} \quad \frac{n+2}{n+1}|_{n=1} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$.
- Demonstration du pas de récurrence:
 - **Hypothèse:** $c_n = \frac{n+2}{n+1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$
 - **Conclusion:** $c_{n+1} = \frac{n+3}{n+2}$
 - **Preuve:**

$$c_{n+1} = 2 - \frac{1}{c_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = 2 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{2(n+1)-(n+1)}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}$$

□

Définitions

1. (a_n) est majoré si

$$\exists M \in \mathbb{R} \ a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(M : majorant)

2. (a_n) est minoré si

$$\exists N \in \mathbb{R} \ \text{t.q.} \ a_n \geq N, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(N : minorant)

3. (a_n) est bornée si elle admet un majorant **et** un minorant
4. (a_n) est croissante si $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
(Strictement croissante si $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$)
5. (a_n) est décroissante si $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
(Strictement décroissante si $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$)
6. (a_n) est monotone si elle est croissant **ou** (ou exclusif) décroissant
(Strictement monotone si elle est strictement croissant ou strictement décroissant)

Exemples

1. $a_n = \frac{1}{n}$, (a_n) est strictement décroissante et borné:

$$0 < a_n \leq 1$$

$$2. \ b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0}$$

Donc (b_n) est strictement croissante.

1.2 Limite d'une suite

Définition On dit que la suite (a_n) converge vers a ($a \in \mathbb{R}$) si $\forall \epsilon > 0$, il existe un seuil

$$N \in \mathbb{N}^* (N = N(\epsilon)) \ \text{t.q.} \ n > N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

$$|a_n - a| < \epsilon \iff -\epsilon < a_n - a < \epsilon \iff a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \iff a_n \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$$

Cet intervalle est appelé ϵ -voisinage de a . Si (a_n) admet (a_n) est convergente sinon elle divergente.

Définition plus intuitive de la limite de suite:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ si et seulement si ϵ -voisinage de a contient presque tout les termes de la suite (tous les termes sauf nombre fini)

Exemples

1. $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad [N \in \mathbb{N}^* \text{ quelconque } \square]$$

2. Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Soit $\epsilon > 0$, montrons que $\exists N \in \mathbb{N}^* (N = N(\epsilon))$ t.q. $n \geq N \implies |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$

$$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \iff |\frac{1}{n}| < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

3. La suite (b_n) définie par

$$b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

diverge car une infinité de termes sont dans le voisinage de $(+1)$ ou de (-1) selon que n est pair ou impair

Theorèmes importants (sans démonstration)

1. Une suite qui converge admet une seule limite

2. Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse.

Contre-exemple: $a_n = (-1)^n$

3. Les règles de calcul:

Soit (a_n) et (b_n) convergentes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(d) si $b_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, et si $b \neq 0$, alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

01/03/2019

4. **Théorème de comparaison:** Soient (a_n) et (b_n) convergentes, $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

$$\text{Si } \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0 \\ \text{alors } a \leq b$$

5. Théorème des deux gendarmes:

Soient 3 suites (g_n) , (d_n) et (a_n) telles que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ avec } g_n \leq a_n \leq d_n, \quad \forall n \geq n_0$$

Alors si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = l$$

on a que (a_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

6. Corollaire des 2 gendarmes soit (a_n) tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

$$\underbrace{-|a_n|}_{\rightarrow 0} \leq a_n \leq \underbrace{|a_n|}_{\rightarrow 0}$$

□

7. Toute suite monotone est bornée et convergente.

Plus précisément:

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge

3 exemples importants

1. Soient $q \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, (a_n) la suite définie par $a_n = q^n$

$$a_n = q^n : \begin{cases} \text{diverge si } |q| > 1 \\ \text{converge vers 0 si } |q| < 1 \end{cases}$$

Montrons que si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

$$|a_n| = |q^n| = |q|^n \text{ or } |q| < 1$$

donc

$$\exists p > 0 \text{ t.q. } q = \frac{1}{1+p}$$

Donc

$$|q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \implies \frac{1}{|q|^n} = (1+p)^n$$

$$= 1 + n \cdot p + \dots + p^n \geq n \cdot p, \quad \text{donc } |q|^n \leq \frac{1}{n \cdot p}$$

$$|a_n| = |q|^n \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\underbrace{0}_{\rightarrow 0} \leq |a_n| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}}_{\rightarrow 0}$$

D'après les 2 gendarmes: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

D'après son corollaire: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

□

2. La série géométrique

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et a_n définie par

$$a_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

Définition par la récurrence

$$a_{n+1} = a_n + q^n, \quad a_1 = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On réécrit le terme a_n

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} \\ q \cdot a_n &= q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \\ a_n - q \cdot a_n &= 1 - q^n \\ a_n(1 - q) &= 1 - q^n \implies a_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

(a_n) converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1-q}$

Exemples:

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ a_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \text{et } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ b_n &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Le nombre e

Soit

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$e_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3 \cdot \dots \cdot k}_{>2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Donc

$$e_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\leq 1}$$

$$e_n \leq 3$$

$$2 \leq e_n \leq 3, \quad \forall n \geq 2$$

Montrons encore que (e_n) est strictement croissante:

$$e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!}, \quad \text{donc } e_{n+1} > e_n$$

(e_n) croissante et majorée: elle converge.

On note e sa limite.

$$e_n = 2.71828$$

$$e_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Autre caractéristique du nombre e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1.3 Limite infinie

Définition La suite (a_n) tend vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ si:

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}^* (N = N(A)) \text{ t.q. } n \geq N \implies f(x) > A$$

On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

On dit que (a_n) diverge vers $+\infty$

De même

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \iff \exists N \in \mathbb{N}^* (N = N(B)) \text{ t.q. } n \geq N \implies a_n > B$$

Exemple Montrons que $(a_n) = (n^2)$ diverge vers $+\infty$.

Soit $A > 0$ donné, montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $a_n > A$ si $n \geq N$.

$$a_n > A \iff n^2 > A \iff n \in]-\infty; \sqrt{A}[\cup]\sqrt{A}; +\infty[$$

Tout $N > \sqrt{A}$ convient car $n \leq N$ (avec $N \geq \sqrt{A}$) $\implies n^2 > A$

Théorème importants

1. Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et si b_n converge ou $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, alors $(a_n + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
2. Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
 - Si $\lambda > 0$, $(\lambda a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
 - Si $\lambda < 0$, $(\lambda a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$
3. Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b > 0$ ou si $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, alors $(a_n \cdot b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
4. Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, alors $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

5. Théorème du gendarme

Soit $(a_n), (b_n)$ t.q. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ avec $a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0$

si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

(de manière analogue pour $a_n \rightarrow -\infty$)

Exemples Montrons que si $q > 1$, alors (q^n) diverge vers $+\infty$

$$\begin{aligned} q > 1 &\implies \exists p > 0 \text{ t.q. } q = 1 + p \\ q^n &= (1 + p)^n = 1 + n \cdot p + \dots + p^n > n \cdot p \\ \text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} np &= p \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n = p \cdot +\infty = +\infty (p > 0) \end{aligned}$$

Donc (q^n) diverge vers $+\infty$

Cas d'indétermination

- Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$

On ne peut rien dire à priori de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

- Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

On ne peut rien dire à priori de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$$

Chapter 2

Fonctions réelles d'une variable réelle

2.1 Définitions

Définition:

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction réelle d'une variable réelle si tout $x \in A$ a au plus une image par f dans \mathbb{R} , notée $f(x)$

L'ensemble des $x \in A$ ayant une image par f est le domaine de définition de $f : D_f$

On note Im_f l'ensemble des $f(x) \in \mathbb{R}$

$$\text{Im}_f = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D_f, y = f(x) \right\}$$

Exemples

1.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = \mathbb{R}_+, \quad \text{Im}_f = \mathbb{R}_+$$

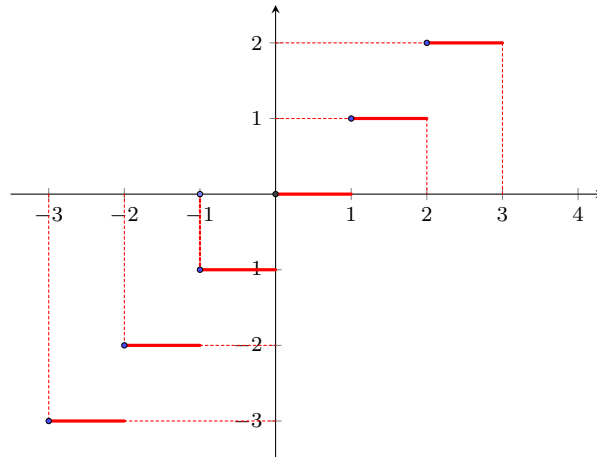
2.

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto E(x)$$

où $E(x)$ est la partie entière de x , c'est le plus grand entier inférieur à x :

Exemples

$$E(3) = 3, \quad E(2.9) = 2, \quad , E(-2.5) = -3$$



$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}, \quad \text{Im}_f = \mathbb{Z}$$

3.

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \text{Im}_h =]0, +\infty[$$

Le graphe de $f : \mathcal{G}_f$ 

Definitions**1. Parité** (y symétrique par rapport à O)

(a) f est paire si

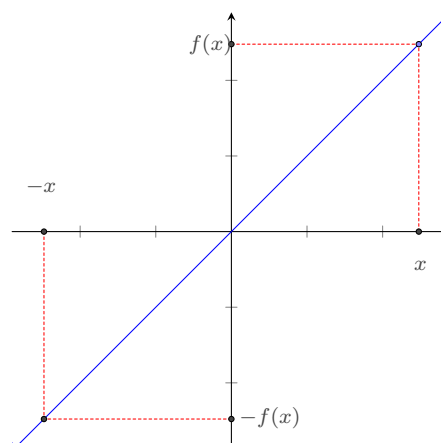
$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Le graphe de f est alors symétrique / O_y



(b) f est impaire si

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D_f$$



Le graphe de f est alors symétrique /0

Exemples

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = |x|, \quad f_3(x) = \cos(x), \quad \text{sont paires,}$$

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = \sin(x), \quad f_3(x) = \tan(x), \quad \text{sont impaires.}$$

2. Périodicité

f est périodique en $T \in \mathbb{R}$, si $\forall x \in D_f, \quad f(x+T) = f(x)$

G_f période de f est le plus petit $T > 0$ tel que

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Exemples

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

\sin et \cos sont 2π -périodique.

Donc f est 2π -périodique.

$$\text{Or } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$$

Donc la période de f est $T = \pi$:

$$\begin{aligned} f(x+T) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot (x+T)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin(2x + \underbrace{2T}_{\text{période de sinus}}) \end{aligned}$$

$$2T = 2\pi \iff T = \pi$$

3. Monotonie

(a) f est croissante si $\forall x_1, x_2 \in D_f$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

Strictement croissante si

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

(b) f est décroissante si $\forall x_1, x_2 \in D_f$:

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

Strictement décroissante si

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

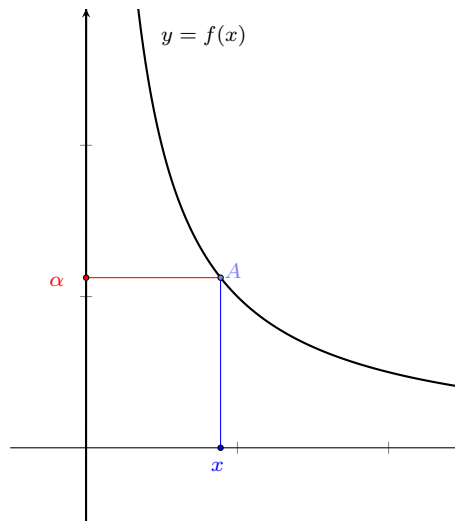
(c) f est monotone si elle est croissante ou (exclusif) décroissante.

Exemples $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_- , strictement croissante sur \mathbb{R}_+ et non-monotone sur \mathbb{R} .

Théorème Si f strictement monotone, alors l'équation:

$$f(x) = \alpha, \quad x \in \mathbb{R}$$

admet au plus une solution:



Démonstration dans ce cas:

$$f : \text{strictement croissante} \implies f(x) = \alpha$$

admet au plus une solution

Démonstration par la contraposée:

Hypothèse: $f(x) = \alpha$ admet plus d'une solution

Conclusion: f non strictement croissant

Preuve: Soient $x_1 \neq x_2 \in D_f$ t.q. $f(x_1) = f(x_2) = \alpha$

Soit x_1 la plus petite, on a:

$$x_1 < x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)$$

f est non strictement croissante.

□

4. Valeur absolue de f , soit:

$$\begin{aligned} f : D_f &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

on définit

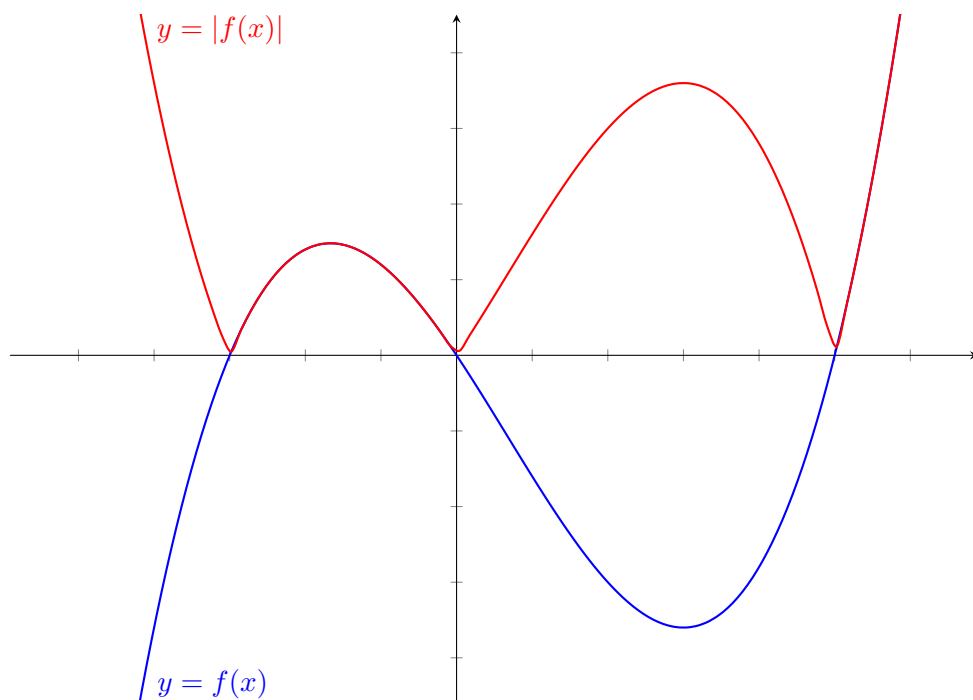
$$|f| : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto |f|(x) = |f(x)|$$

avec

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

On déduit le graphe de $|f|$ de celui de f en symétrisant / 0_x tous les points d'ordonnée négative.

Exemple $f(x) = x \cdot (x + 3) \cdot (x - 5)$



5. Compositions de Fonctions

Soient f, g deux fonctions, si $Im_g \subset D_f$ alors on définit

$$f \circ g$$

par

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in D_f$$

Exemple

(a) Soit

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

et

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

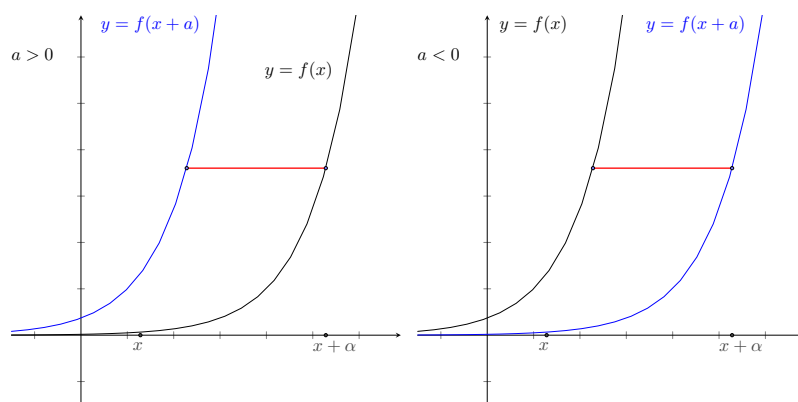
$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\left(\sqrt{x^2 - 1}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 + 1} \\ &= \sqrt{x^2} = |x| \end{aligned}$$

Mais $D_{f \circ g} =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\neq \mathbb{R}$

(b) $g = x + a$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + a)$$

Comment déduire le graphe de $f(x + a)$ de celui de f ?



On déduit le graphe de $f(x + a)$ de celui de $f(x)$ par la translation de $(-a)$ -unités parallèlement à $0x$.

6. Fonctions bornées

f est bornée sur D_f si

$$\exists M > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in D_f$$

Exemples

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ n'est pas bornée sur D_f

$g(x) = \frac{1}{x+1}$ et $h(x) = \cos x$ sont bornées sur D_f

2.2 Surjection, injection, bijection

1. Surjection

$f : A \rightarrow B$ est dite surjective si tout $y \in B$ admet un antécédent par f dans A :

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ t.q. } y = f(x)$$

En d'autres termes:

f est surjective si et seulement si $Im_f = B$

Exemples

(a) La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto E(x)$$

n'est pas surjective.

 $y = \frac{1}{2}$ n'a pas d'antécédent
par contre

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \\ x \mapsto E(x)$$

est surjective.

(b) La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$$

On détermine Im_f

$$Im_f = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

 Soit $y = f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
 $y \in Im_f$ si x existe.

On cherche donc à résoudre l'équation

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

par rapport à x en considérant y comme un paramètre

$$x^2 = y \cdot (x+1) \\ x^2 - y \cdot x + y = 0$$

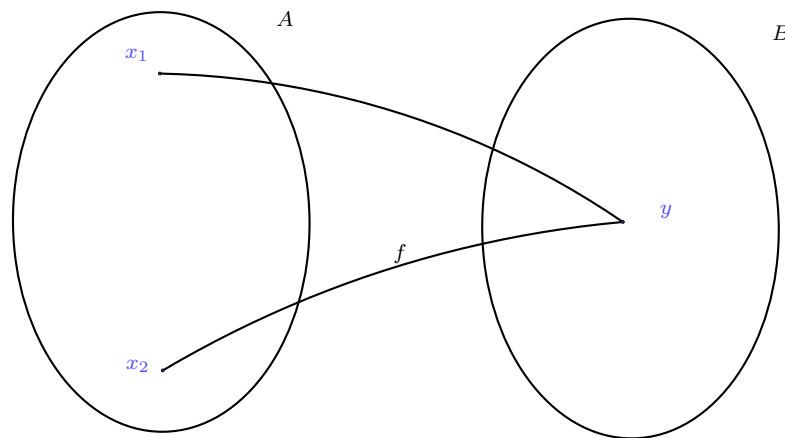
$$\Delta = (-y)^2 - 4 \cdot y = y \cdot (y-4) \\ \Delta \geq 0 \iff y \in]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$$

Donc $Im_f =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$ **2. Injection****Définition:** La fonction $f : A \rightarrow B$ est dite injective

si

$$\forall x_1, x_2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Contre-exemple:

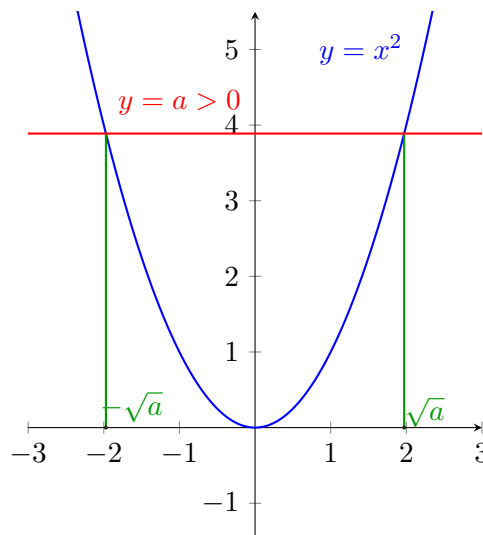


Énoncé contraposée en f injective si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Exemples:

(a) $f(x) = x^2$



$f(x) = x^2$ est injective sur \mathbb{R}_+ ou sur \mathbb{R}_- mais non injective sur \mathbb{R}

(b) Repère de l'exemple sur la surjection

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad x \neq -1$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{a+1} = \frac{b^2}{b+1} &\iff a^2 \cdot (b+1) = b^2 \cdot (a+1) \\
&\iff a^2b + a^2 - b^2a - b^2 = 0 \\
&\iff ab \cdot (a-b) + (a+b) \cdot (a-b) = 0 \\
&\iff (a-b) \cdot [a \cdot b + (a+b)] = 0
\end{aligned}$$

$a \cdot b + a + b = 0$ est un "générateur de contre-exemples".

En effet tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant cette relation est un contre-exemple à l'injectivité de f .

$$a = 3, \quad b = -\frac{3}{4}$$

Sont tels que $a \neq b$ et $f(a) = f(b)$.

f est non injective.

(c) Bijection et fonction réciproque

Définition: f est bijective si elle est injective **et** surjective

En d'autres termes $f : A \rightarrow B$ est bijective si tout $y \in B$ admet un unique antécédent.

Définition: $f : A \rightarrow B$ bijective si il existe une unique fonction, notée f^{-1} , appelée fonction réciproque de f

Vérifiant:

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

$$x \mapsto y = f^{-1}(x)$$

avec

$$x = f(y)$$

Exemple:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow$$

$$x \mapsto y = x - x^2$$

Restreindre les ensembles de départ et d'arrivée de sorte que f devienne bijective.

Puis déterminer f^{-1}

- Surjection

On cherche

$$Im_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

$$y = x - x^2 \iff x^2 - x + y = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot y = 1 - 4y$$

$$\Delta \geq 0 \iff y \leq \frac{1}{4}$$

$$Im_f =]-\infty; \frac{1}{4}]$$

- Injection Soit $a, b \in \mathbb{R}$, t.q. $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned}
 a - a^2 &= b - b^2 \\
 \iff a^2 - b^2 - a + b &= 0 \\
 \iff (a - b)(a + b) - (a - b) &= 0 \\
 \iff (a - b) \cdot [(a + b) - 1] &= 0
 \end{aligned}$$

Comment restreindre l'ensemble de départ et d'arrivée pour rendre f injective, sans modifier Im_f ?

Il faut rendre le générateur de contre-exemple "inopérant".

$$a + b = 1 \implies a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - b$$

$$A = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \text{ ou } A = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

Alors

$$f : \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\rightarrow \left] -\infty; \frac{1}{4} \right]$$

est bijective.

Pour déterminer f^{-1} , ou résoudre

$$y = f(x)$$

par rapport à x en prenant y comme paramètre

$$y = x - x^2 \iff x^2 - x + y = 0$$

$$\Delta = 1 - 4y$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y}}{2}, \quad \left(y \in \left] -\infty; \frac{1}{4} \right] \right)$$

Or

$$x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

donc

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 f^{-1} : \left] -\infty; \frac{1}{4} \right] &\rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\\
 x &\mapsto \frac{1 + \sqrt{1 - 4y}}{2}
 \end{aligned}$$

$$id_A : A \rightarrow A,$$

$$x \mapsto x$$

$$id_B : B \rightarrow B,$$

$$x \mapsto x$$

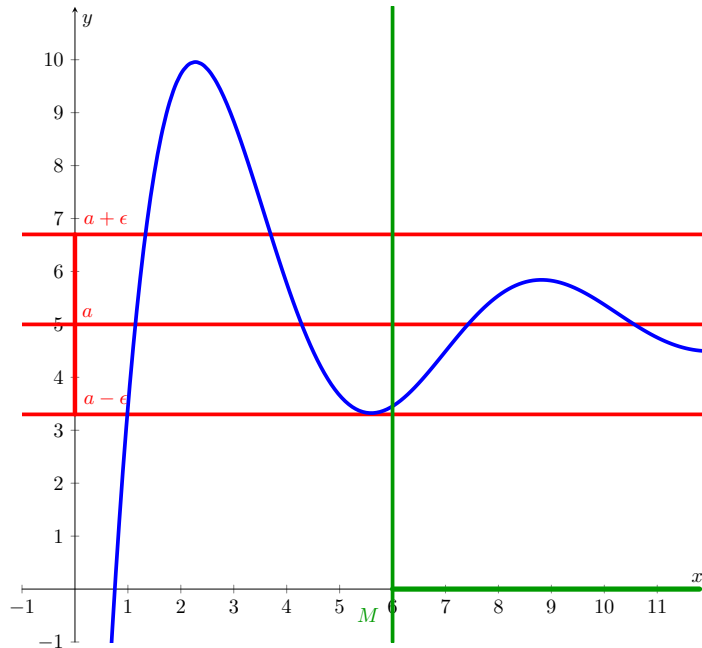
2.3 Limite d'une fonction

2.3.1 Limite à infini

Définitions:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a, (a \in \mathbb{R})$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} (M = M(\epsilon)) \text{ t.q. } x \geq M (x \in D_{\text{déf}}) \implies |f(x) - a| < \epsilon$$



2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} (N = N(\epsilon)) \text{ t.q. } x < N (x \in D_{\text{déf}}) \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

Exemple: Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Soit $\epsilon > 0$ donné

Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} x < N &\implies \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \epsilon \\ &\iff \left| \frac{1}{x^2} \right| < \epsilon \\ &\iff \frac{1}{x^2} < \epsilon \\ &\iff |x| > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \\ &\iff x \in \left] -\infty; -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right[\cup \left] \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}; +\infty \right[\end{aligned}$$

Donc tout $N \leq -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ convient, car

$$x < N \text{ (avec } N \leq -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) \implies \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \epsilon$$

□

Théorème de caractérisation par les suites: f admet une limite $x \rightarrow \infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

si et seulement si pour toute la suite x_n qui diverge vers ∞ , on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Exemple: Montrons que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ n'existe pas.

- Soit $x_n = n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n \cdot \pi) = 0$$

- Soit $y_n = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

Définitions: Limites impropre

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > M \implies f(x) > A$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall B < 0, \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > M \implies f(x) < B$$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x < N \implies f(x) > A$$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall B < 0, \quad \exists N \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x < N \implies f(x) < B$$

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

Soit $A > 0$, $\exists N \in \mathbb{R}$ t.q. $x < N \implies$

$$\begin{aligned} \implies x^2 > A &\iff |x| = \sqrt{A} \\ \implies x \in]-\infty; -\sqrt{A}] \cup [\sqrt{A}; +\infty[\end{aligned}$$

Donc tout $x < N$ convient.

□

Opération sur les limites

1. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$ alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |a|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b}, \quad (\text{si } b \neq 0)$$

2. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$$

3. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$$

Cas d'indétermination Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} i(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = +\infty$$

alors on ne peut rien dire à priori des limites suivante

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) - i(x)) = \text{''}\infty - \infty\text{''}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \text{''}\frac{0}{0}\text{''}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{h(x)}{i(x)} \right) = \text{''}\frac{\infty}{\infty}\text{''}$$

Quelque théorème importants

1. Théorème des 2 gendarmes

Soient $d(x), g(x)$ toutes les fonctions telles que

$$\exists M > 0 \text{ avec } g(x) \leq x \leq d(x), \quad \forall x > M$$

Alors si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = a$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

Énoncé analogue pour $x \rightarrow -\infty$

Corollaire des 2 gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\underbrace{|f(x)|}_{\rightarrow 0} \leq f(x) \leq \underbrace{|f(x)|}_{\rightarrow 0} \quad \square$$

2. Théorème du gendarme(ou du chien méchant) Soient $f(x), g(x)$ toutes les fonctions telles que

$$\exists M > 0 \text{ avec } f(x) \geq g(x), \quad \forall x > M$$

Alors si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Énoncé analogue pour $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$

3. Théorème "0 · borné"

Soient f, g deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\exists M > 0$ avec $g(x)$ est borné sur $[M; +\infty[$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$$

[Par hypothèse

$$\exists A > 0 \text{ t.q. } |g(x)| \leq A, \quad x > M$$

$$0 \leq |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\rightarrow 0} \cdot A$$

Donc d'après les deux gendarmes: $|f(x) \cdot g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ d'après son corolaire: $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$]

Énoncé analogue pour $x \rightarrow -\infty$

Exemple: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\text{borné}} = 0$$

Or f est paire, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

4. Théorème " $\infty \cdot \text{signe constant}$ "

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) \geq m > 0$ sur un voisinage de $+\infty$.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) \leq m < 0$ sur un voisinage de $+\infty$.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

Énoncé analogue pour $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$

5. **Théorème " $\infty + \text{borné}$ "** Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x)$ est borné sur un voisinage de $+\infty$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

Énoncé analogue pour $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$

Exemples:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin(x)) = -\infty$

2. $f(x) = \frac{x \cdot \sin(x)}{(\cos(x) - 2) \cdot (x + \sqrt{x^4 + x^2})}, \quad x \rightarrow -\infty$

$$\frac{x \cdot \sin(x)}{(\cos(x) - 2) \cdot (x + \underbrace{|x|}_{=-x} \cdot \sqrt{x^2 + 1})}, \quad x < 0$$

$$\frac{\overbrace{\sin(x)}^{\text{borné}}}{\underbrace{(\cos(x) - 2)}_{\leq -1 < 0} \cdot \underbrace{(-1 \cdot \sqrt{x^2 + 1})}_{\rightarrow -\infty}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad ("0 \cdot \text{borné}')$$

2.3.2 Valeurs limite en x_0

Définition: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage pointé de x_0 , tout voisinage de x_0 , privé de x_0

Exemple: L'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

est appelé δ -voisinage pointé de x_0 .

En effet: $0 < |x - x_0| < \delta$

$$\iff x \in]x_0 - \delta; x_0[\cup]x_0; x_0 + \delta[$$

Définition: Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage pointé de x_0 .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \neq x_0)}} f(x) = a, \text{ si } \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ (\delta = \delta(\epsilon))$$

tels que

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ si et seulement si tout ϵ -voisinage de a contient l'image par f d'un ϵ -voisinage pointé de x_0

1. Théorème de caractérisation par les suites

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ si et seulement si pour toutes suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers x_0 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad (x_n \neq x_0)$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ n'existe pas

- Soit $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$x_n \rightarrow 1$$

et

$$f(x_n) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

- Soit $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ ($y_n > 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$$

mais

$$\begin{aligned} f(y_n) &= y_n^2 + 1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 2$$

Donc $\lim_{f(x)}$ n'existe pas

Définitions: Limite à gauche et à droite de x_0

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ Si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\epsilon)) \text{ t.q. } x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ Si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\epsilon)) \text{ t.q. } x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

Reprise de l'exemple précédent:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 2$$

Théorème $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Définition: Limites infinies en x_0

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(A)) \text{ t.q. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(A)) \text{ t.q. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < B$$

Exemple: Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Soit $A > 0$ donné, montrons que

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 < |x - 0| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > A$$

$$\frac{1}{x^2} > A \iff x^2 < \frac{1}{A} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{A}} \iff |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Donc tout $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$ convient, car

$$0 < |x - 0| < \delta, (\text{ avec } \delta \leq \frac{1}{\sqrt{A}}) \implies \frac{1}{x^2} > A$$

Définitions: Limites infinies à gauche et à droite en x_0

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > A$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) > A$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ si

$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) < B$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ si

$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) < B$$

Exemple: Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Soit $B > 0$ donné, montrons que

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 - \delta < x < 0 \implies \frac{1}{x} < B \implies \frac{1}{x} < B \iff x > \frac{1}{B}, \quad (x, B < 0)$$

Donc tout $\delta > 0$ vérifiant

$$\frac{1}{B} < -\delta < 0$$

convient ($\delta < -\frac{1}{B}$) car

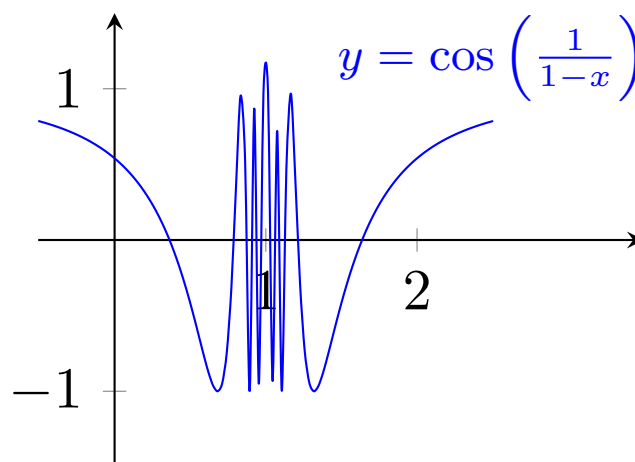
$$0 - \delta < x < 0 \quad (\text{avec } -\delta > \frac{1}{B}) \implies \frac{1}{x} > B$$

□

Remarque: Tous les théorèmes et règles de calcul concernant les limites lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ restent valables lorsque $x \rightarrow x_0$

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$$



$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{1-x^2}} &= 0 \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{1-x^2}} : \text{FI} &= \frac{0}{0}, \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (2-x)}{\sqrt[3]{(1-x^2) \cdot (x + \sqrt{2-x})}} &= \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+2)}{\sqrt[3]{(1-x) \cdot (1+x) \cdot (x + \sqrt{2-x})}} &= \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2 \cdot (x+2)}}{\sqrt[3]{-1-x} \cdot (x + \sqrt{2-x})} &= 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{x - \sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}_{\text{borné}} = 0$$

2.3.3 Infinitement petits équivalents (IPE)

Définition: Soient f et g 2 fonctions définies sur un voisinage pointé de x_0 .

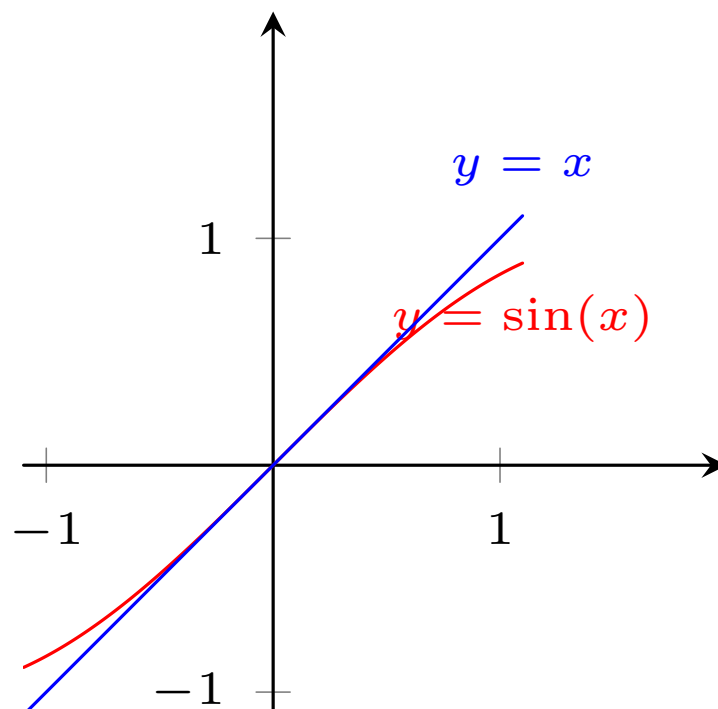
f et g sont des IPE ($x \rightarrow x_0$) si et seulement si

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (IP)
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (E)

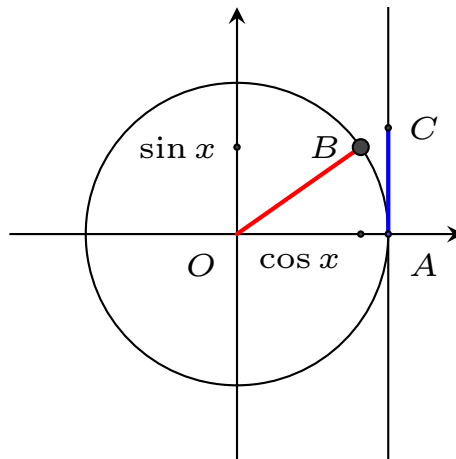
On écrit alors $f \sim g$ ($x \rightarrow x_0$)

Montrons que

$$\sin(x) \sim x \quad x \rightarrow 0$$



Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$



$$\begin{aligned}
 & \dim(\triangle AOB) < \dim(\widehat{OAB}) < \dim(\triangle OAC) \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin(x) < \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(x) \\
 \Leftrightarrow & \sin(x) < x < \tan(x) \\
 \Leftrightarrow & 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{\cos(x)}_{\rightarrow 1} < \frac{\sin(x)}{x} < 1
 \end{aligned}$$

Théorème des 2 gendarmes:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Or $\frac{\sin(x)}{x}$ est paire donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

De plus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

donc

$$\sin(x) \sim x \quad (x \rightarrow 0)$$

Propriété: Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 , alors

$$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$$

⚠ Attention: En général

$$f_1 \sim g_1 \text{ et } f_2 \sim g_2 \not\Rightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$$

Contre-exemple:

$$x \sim (x + x^2) \text{ et } x \sim (-x + x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

Or

$$\frac{x - x}{(x + x^2) + (-x + x^2)} = \frac{0}{2x^2} !$$

D'où la règles d'utilisation des IPE.

Dans un calcul de limit on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une **expression factorisée** et jamais dans une somme.

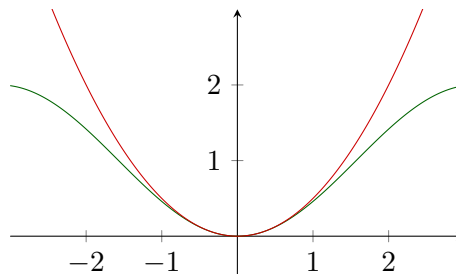
Exemples:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) = 0$ et

$$1 - \cos(x) = 2 \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \sim 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

donc

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}, \quad (x \rightarrow 0)$$



2. $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\rightarrow 1} = 1$$

Donc

$$\tan(x) \sim x \quad (x \rightarrow 0)$$

Exemple servant d'avertissement:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(x) - \sin(2x)}{x^3}$$

Lorsque $x \rightarrow 0$ $2 \cdot \sin(x) \sim 2x$

et $\sin(2x) \sim 2x$

Mais

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(x) - \sin(2x)}{x^3} \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{2x - 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(x) - \sin(2x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot (1 - \cos(x))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = 1$$

2.4 Continuité

Définition: Soit f définie sur un voisinage de x_0 . f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cette définition comporte 3 exigences:

1. $f(x_0)$ existe ($x_0 \in \mathbb{D}_{\text{def}}$)
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe (vaut $a \in \mathbb{R}$)
3. $a = f(x_0)$

Définition analytique f est continue en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } (x - x_0) < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Définition: f est continue sur un ensemble $I =]a, b[$ si f est continue en tout $x_0 \in I$ et on écrit $f \in \mathbb{C}_I^0$ (la O^e dérivé de f continue sur l'intervalle I)

Exemples:

1. Montrons que $\sin(x) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$

Soit $\epsilon > 0$ donné

$$\begin{aligned} |\sin(x) - \sin(x_0)| &= \left| 2 \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq \\ &\leq \left| 2 \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq \left| 2 \cdot \frac{x-x_0}{2} \right| = |x - x_0| \end{aligned}$$

Donc tout $\delta \leq \epsilon$ convient car

$$|x - x_0| < \delta \quad (\text{avec } \delta \leq \epsilon) \implies |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$$

□

Corollaire $\cos(x) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$ car $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

2. Montrer que \sqrt{x} est contenue sur \mathbb{R}_+^*

Montrons que $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} \right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

Or

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon \iff |x - x_0| < \epsilon \sqrt{x_0}$$

Donc tout

$$\delta \leq \epsilon \cdot \sqrt{x_0}$$

convient car

$$|x - x_0| < \delta \quad (\delta \leq \epsilon \cdot \sqrt{x_0}) \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$$

Propriétés: Soit f, g continues en x_0 alors

- $|f|$ est continue en x_0
- $f \pm g$ sont continue en x_0
- $f \cdot g$ est continue en x_0
- si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Ces propriétés sont la conséquence des propriétés sur la limite en x_0

Théorème: Soit f et g deux fonctions. f définie sur un voisinage pointé de x_0 . Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ et si g est continue en a , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = g(a)$$

Corollaire: Soient f continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue sur en x_0

[

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) \\ &= g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) \text{ car } g \text{ est continue} \\ &= g(f(x_0)) \text{ car } f \text{ est continue} \\ &= g \circ f(x_0) \end{aligned}$$

□

]

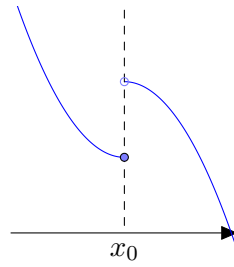
Exemples:

- $f(x) = \text{cste}$ est $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$ [$\delta > 0$ qcq □]
 - $f(x) = x$ est $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$ [$\delta \leq \epsilon$ □]
 - Donc toutes fonctions polynomiales sont $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$
 - Et toutes les fonctions naturelles sont \mathbb{C}^0 sur leur $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
- Les fonctions $\tan(x)$ et $\cot(x)$ sont \mathbb{C}^0 sur leur $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
- $f(x) = \sin^2(\sqrt{x^2 + 1})$ est $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$ comme composé de fonctions

Définitions: Continuité gauche, droite

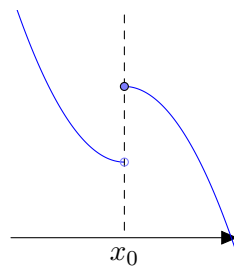
- f est continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$



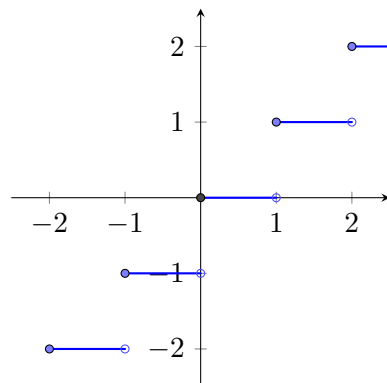
- f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$



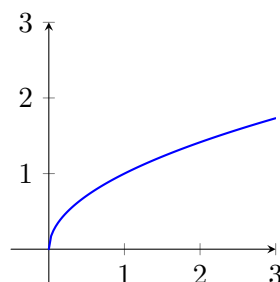
Exemples:

1. $f(x) = E(x)$, $x_0 \in \mathbb{Z}$



f continue à droite en x_0 et discontinue à gauche en x_0

2. $g(x) = \sqrt{x}$

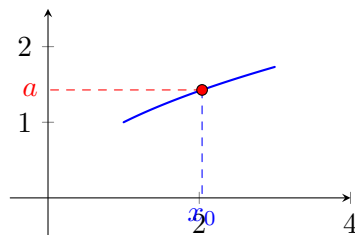


g est continue à droite en $x_0 = 0$

Définitions:

- On dit que f est continue sur $[a; b]$ si elle continue sur $]a; b[$, continue à droite en $x = a$ et à gauche en $x = b$
- Soit f définie sur voisinage pointé de x_0 avec $x_0 \notin \mathbb{D}_f$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe (vaut } a \in \mathbb{R})$$



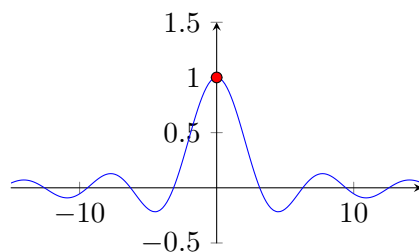
On peut alors définir $\tilde{f}(x)$ continue en x_0 en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ a & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ est appelé la **prolongée par continuité** de f en x_0 .

Exemple:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad x_0 = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ est } \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$$

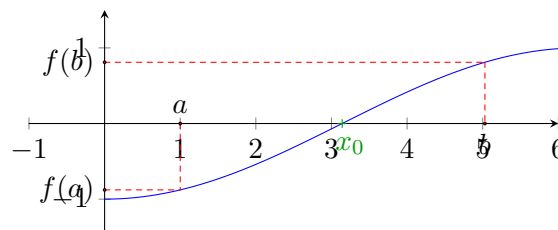
Théorème de la valeur intermédiaire Soit f continue sur $[a; b]$, si

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

alors

$$\exists x_0 \in [a; b] \text{ t.q. } f(x_0) = 0$$

Illustration du cas $f(a) < 0, f(b) > 0$



Démonstration: algorithme de la bisection.

On coupe l'intervalle $[a; b]$ en $x = \frac{a+b}{2}$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \quad x_0 = \frac{a+b}{2}$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, alors on pose

$$I_1 = [a_1; b_1] \text{ avec } a_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } b_1 = b$$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, alors on pose

$$I_1 = [a_1; b_1] \text{ avec } b_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } a_1 = a$$

On réitère le découpage sur l'intervalle $I_1 = [a_1; b_1]$ et ainsi de suite :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ et alors $\frac{a_n+b_n}{2}$
- Soit on obtient (a_n) et (b_n) , $n \in \mathbb{N}^*$, 2 suites telles que

- $f(a_n) < 0 < f(b_n)$
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b$

(a_n) est croissante et majorée

(b_n) est décroissante et minorée

Donc ces suites sont convergentes

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-b}{2^n} \right) = 0$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \text{ (car les deux limites existent)}$$

Posons

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

Or f est continue sur $[a; b]$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0)$$

Mais

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Donc

$$f(a_n) = f(b_n) = 0$$

D'où

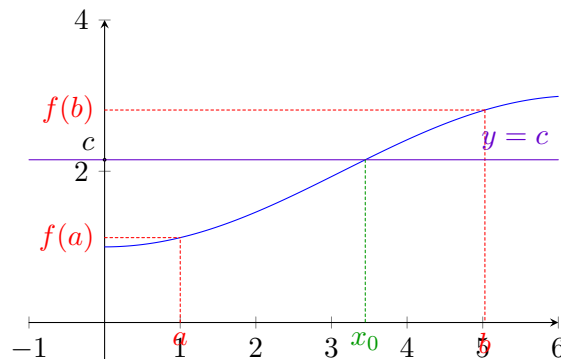
$$f(x_0) = 0$$

□

Corollaire: Soit f continue sur $[a; b]$

Si c est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors

$$\exists x_0 \in [a; b] \text{ t.q. } f(x_0) = c$$



Théorème: Soit f continue sur $[a; b]$

- Si f est strictement croissante sur $[a; b]$ alors f est bijective de $[a; b]$ sur $[f(a); f(b)]$
- Si f est strictement décroissante sur $[a; b]$ alors f est bijective de $[a; b]$ sur $[f(b); f(a)]$

Démonstration: Soit f strictement croissante.

Le théorème de la valeur intermédiaire nous donne l'existence d'un antécédent pour tout $y \in [f(a); f(b)]$ et cet antécédent est **unique** car f est strictement monotone.

□

Chapter 3

Calcul différentiel

3.1 Dérivée d'une fonction

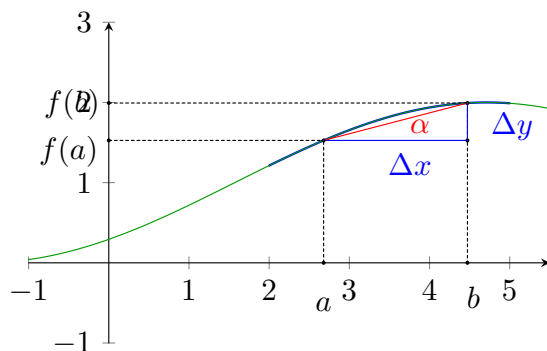
3.1.1 Définitions

Soit f définie sur un voisinage de x_0 , posons $y = f(x)$. Une information **locale** sur le comportement de f sur un voisinage de x_0 est donné par le quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

appelé le rapport de Newton de f en x_0 .

- Δx est l'accroissement de la variable indépendante x .
- Δy est l'accroissement correspondant liée à Δx .



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha) \text{ est la pente}$$

de la sécante passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$

En gardant x_0 fixe, on fait tendre $\Delta x \rightarrow 0$

Alors

$$x_0 + \Delta x \rightarrow x_0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$$

si f est continue en x_0 , alors

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

est une FI de type " $\frac{0}{0}$ "

Trois cas peuvent se présenter

1. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'existe pas

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$2. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

Exemple:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}, \quad x_0 = 0$$

$$3. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \quad (a \in \mathbb{R})$$

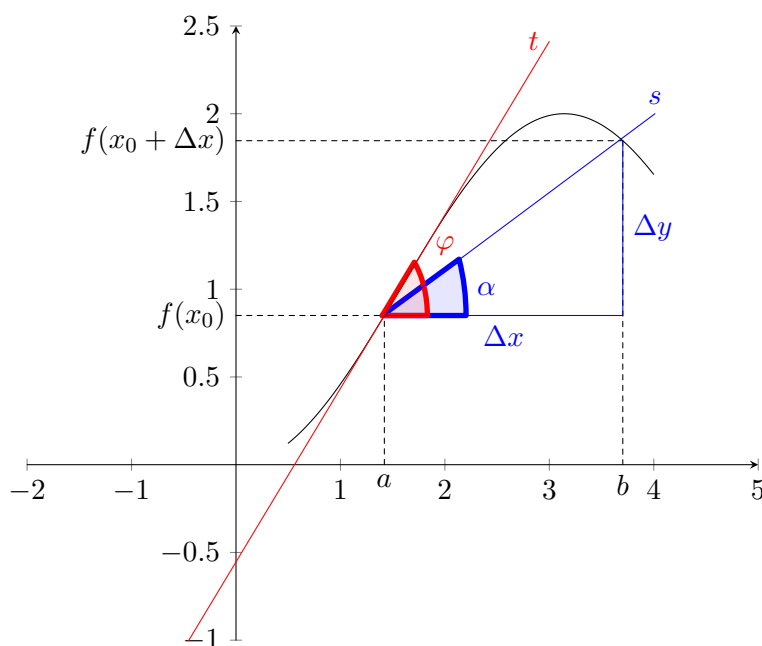
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = 4$$

Définition: Soit f définie sur un voisinage de x_0 . On dit que f est dérivable en x_0 . Si

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existe et on note $f'(x_0)$ cette limite.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

est appelé **nombre dérivé** de f en x_0 La sécant s tends vers la "droite-limite" t .

$$\alpha \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \varphi$$

Cette "droite-limite" est appelée la tangente à

$$y = f(x_0) \text{ en } x_0$$

La pente m de la tangente vaut

$$m = \tan(\varphi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Donc l'équivalente de t s'écrit

Tangente de $y = f(x)$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Théorème: Soit f définie sur un voisinage de x_0 . Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0$$

Démonstration f est dérivable en x_0 donc

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= f'(x_0) \\ \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)}_{:=r(\Delta x)} &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta x) = 0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$

Et lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, on a

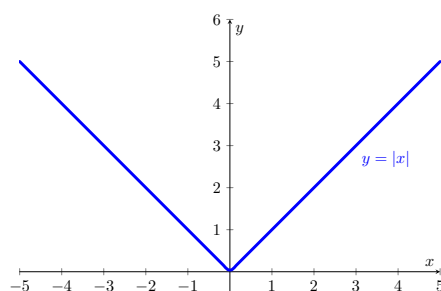
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot f'(x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \overbrace{r(\Delta x)}^{\rightarrow 0}}_{\rightarrow 0}$$

f est donc continue en x_0

□

⚠ La réciproque est fausse ⚠

Contre-exemple



$$f(x) = |x|, \quad x_0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad |x| \Big|_{x=0} = 0$$

donc $|x|$ est continue en $x = 0$

Mais

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

n'existe pas donc $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x \rightarrow 0$.

Définitions:

- On dit que f est dérivable à gauche en x_0 , si

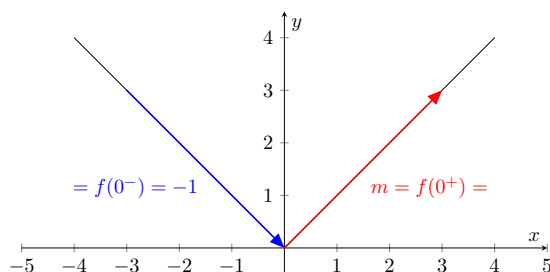
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, on note ce nombre $f'(x_0^-)$ et il représente la pente de la demi-tangente à gauche en x_0 .

- de même f est dérivable à droite en x_0 , si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, $f'(x_0^+)$ et il représente la pente de la demi-tangente à droite en x_0 .

Exemple:

$$f(0^-) = -1$$

$$f(0^+) = +1$$

Définitions: Si $I \subset \mathbb{D}_f$

- Si f est dérivable en tout $x_0 \in I$, on définit:

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

appelé la fonction dérivée de f sur I .

- Si f est dérivable sur I , et si f' est continue sur I , alors on dit que f est continument dérivable sur I et on note $f \in \mathbb{C}^1$

3.1.2 Règles de dérivation

(C.f. exercice facultatif série 8)

Soient f et g dérivable sur $I \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Si $g(x) \neq 0, \forall x \in I$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

En particulier

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Théorème: Dérivée de la composée

Soit f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

Dérivée de la composée

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Démonstration

- Rappel:

$$\begin{aligned} r(\Delta x) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \\ \implies f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x) \end{aligned}$$

avec

$$r(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

- Dérivée $g \circ f(x)$

$$\begin{aligned} g \circ f(x + h) &= g(f(x + h)) \\ &= g(f(x) + \underbrace{f(x + h) - f(x)}_{=\Delta}) \\ &= g(f(x)) + g'(f(x)) \cdot \underbrace{(f(x + h) - f(x))}_{=\Delta} + r(f(x + h) - f(x)) \cdot \underbrace{(f(x + h) - f(x))}_{=\Delta} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + r(f(x + h) - f(x)) \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x) + \underbrace{r(f(x + h) - f(x))}_{\rightarrow 0} \cdot f'(x_0)$$

D'où

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

3.1.3 Dérivées de quelque fonctions

1. $f(x) = c$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

2. $f(x) = x$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$

3. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ à démontrer par récurrence

- Vérification pour $n = 1$:

$$(x)' = 1 \text{ et } n \cdot x^{n-1} \Big|_{n=1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

- Démonstration du pas de récurrence:

Hypothèse: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ pour un $x \in \mathbb{N}^*$ donné

Conclusion: $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$

Preuve:

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (x^n)' \\ &= x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n\end{aligned}$$

4. $f(x) = x^{-m}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $x \neq 0$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{m \cdot x^{m-1}}{(x^m)^2} \\ &= -m \cdot x^{m-1-2m} = -m \cdot x^{-m-1}\end{aligned}$$

Donc $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

5. $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$

$$y = x^{\frac{p}{q}} \iff y^q = x^p$$

En dérivant les deux termes par rapport à x , on a

$$\begin{aligned}q \cdot y^{q-1} \cdot y' &= p \cdot x^{p-1} \\ y' &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot y}{y^{q-1} \cdot y} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$

Donc

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad x > 0$$

En particulier

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Exemples:

1. Soit f une fonction

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 1]$$

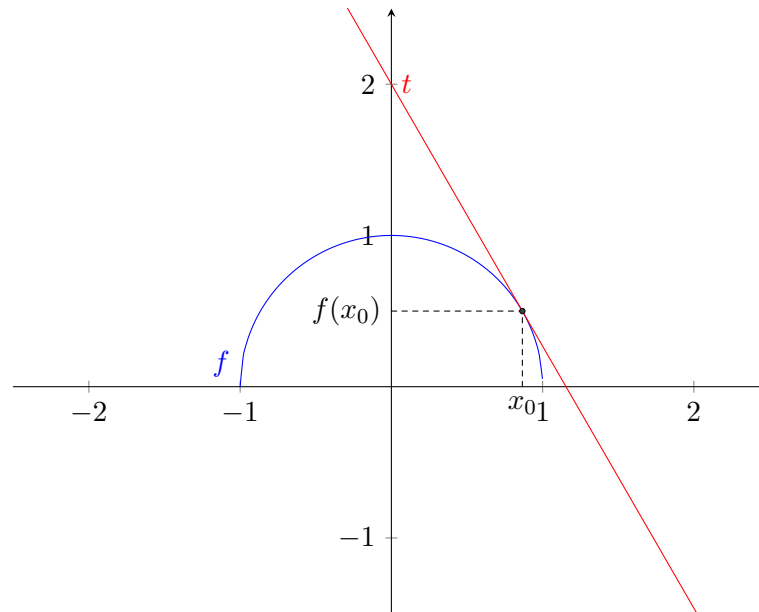
L'équation de t tangente à $y = f(x)$ en $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- $f(x_0) = \frac{1}{2}$
- $f'(x) = \frac{(-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1$

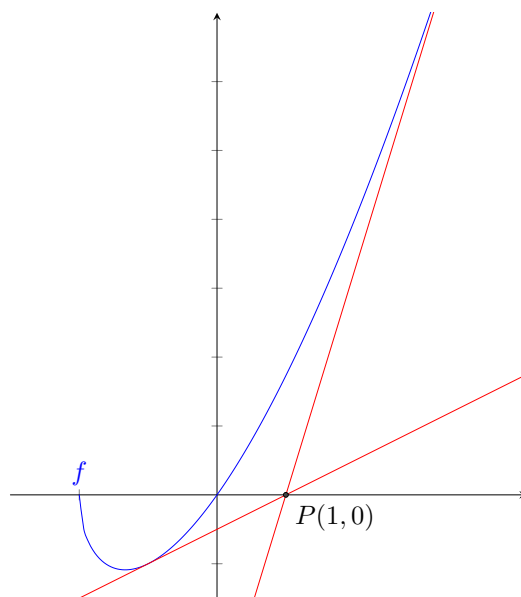
$$f'(x_0) = f'(x) \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$t : y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



2. $f(x) = x \cdot \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$

Tangente au graphe de f issues du point $P(1, 0)$



$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$P \in t \implies y_p - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_p - x_0)$$

$$\implies 0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0)$$

$$\text{avec } f(x_0) = x_0 \cdot \sqrt{2 + x_0},$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2+x} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \\ &= \frac{2 \cdot (2+x) + x}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \frac{3x+4}{2 \cdot \sqrt{2+x}}, \quad x \geq -2 \end{aligned}$$

Donc

$$-x_0 \cdot \sqrt{2+x_0} = \frac{3x_0+4}{2 \cdot \sqrt{2+x_0}} \cdot (1-x_0)$$

$$\iff -2x_0(2+x_0) = 3x_0+4-3x_0^2-4x_0$$

$$\iff x_0^2 - 3x_0 - 4 = 0 \iff (x_0 - 4) \cdot (x_0 + 1) = 0$$

$$x_0 = -1 : \quad t : y + 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$x_0 = 4 : \quad t : 8x - \sqrt{6}y - 8 = 0$$

3.1.4 Dérivée d'ordre supérieure

Soit f dérivable sur I , si f' est dérivable sur I , on peut dériver f' sur I et on note

$$(f')' = f''$$

et ainsi de suite

$$(f'')' = f'''$$

etc.

Définition par récurrence:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad n \in \mathbb{N}^*$$

avec $f^{(0)}(x) = f(x)$

Exemples:

1. $f(x) = x^p, \quad p \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1) & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

2. $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f^{(3)}(x) = \sin(x), \quad f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

Conjecture:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Définition par récurrence:

- Vérification:

- $n = 0$: $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=0} = f^{(0)}(x)$

- $n = 1$: $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=1} = -\sin(x) = f'(x)$

- Démonstration du pas de récurrence:

- Hypothèse:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pour un } n \in \mathbb{N} \text{ donné}$$

- Conclusion:

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

-

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = \left[\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \\ &= \cos'\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)' = \\ &= -\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = \cos\left(x + \left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

□

Remarque: Si f est n -fois dérivable sur I et si $f^{(n)}(x)$ est continue sur I , alors on note

$$f \in \mathbb{C}_I^n$$

Exemple:

$$\cos(x) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}$$

3.2 Différentielles et approximations linéaires

3.2.1 Différentielles

Définitions:

- La différentielle de la variable indépendante x , notée dx est l'accroissement infinitésimal de cette variable

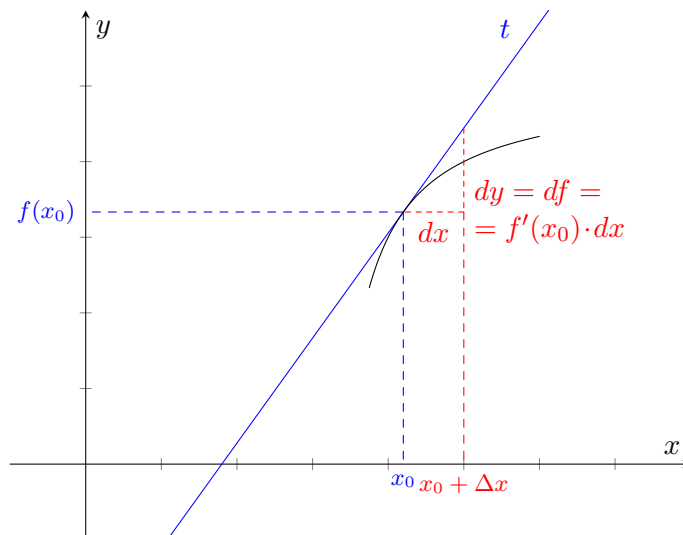
$$dx = \Delta x, \quad (\text{lorsque } \Delta x \rightarrow 0)$$

- La différentielle de la variable dépendante y (ou de la fonction f), notée

$$dy \text{ ou } df$$

en x_0 est la fonction linéaire de dx définie par

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$



La différentielle dy en x_0 est l'accroissement des y correspondant à dx , mesuré sur la tangente au graphe de f en x_0 .

La définition des différentielles induit la notation de Leibniz

$$dy = f'(x_0) \cdot dx \implies \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

3.2.2 Approximation linéaire

Rappel Soit f dérivable en x_0 On a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h)$$

avec

$$r(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$$

Donc si $h \rightarrow 0$,

$$\underbrace{h}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{r(h)}_{\rightarrow 0}$$

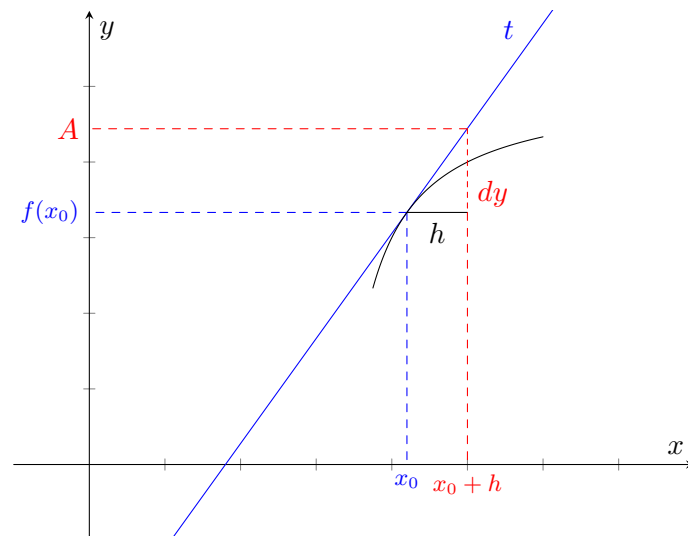
est négligeable et

$$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

La quantité

$$A = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

est appelé l'**approximation linéaire** de f en x_0



A est l'ordonnée correspondant à $x_0 + h$ mesurée sur la tangente en x_0

Exemple: Évaluation de $\sqrt[3]{8.012}$ On détermine l'AL de $\sqrt[3]{8.012}$ en $x_0 = 8$

$$h = 0.012, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$A = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

$$f(x_0) = f(8) = 2$$

$$f'(x_0) = f'(8) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{x^2}} \Big|_{x=8} = \frac{1}{12}$$

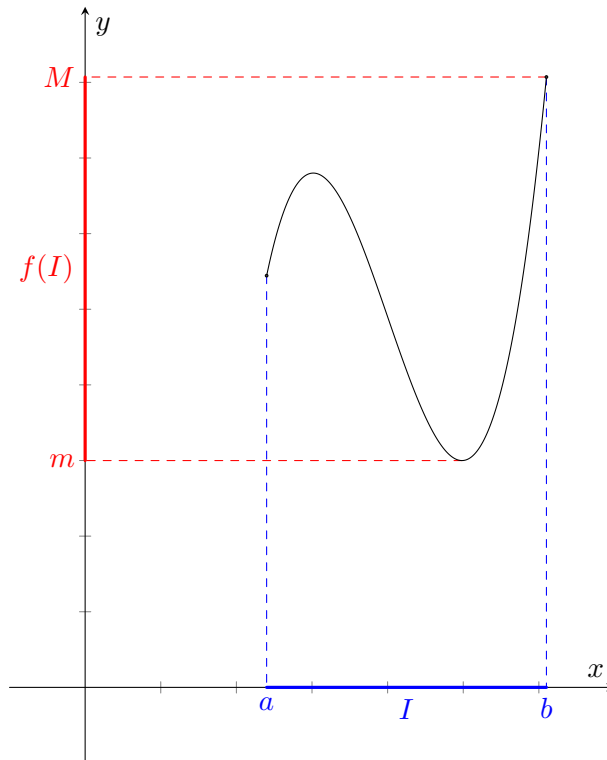
$$A = 2 + 0.0012 \cdot \frac{1}{12} = 2.001$$

3.3 Théorème des accroissements finis

3.3.1 Préliminaire (sans démonstration)

Soit f continue sur $[a; b] = I$

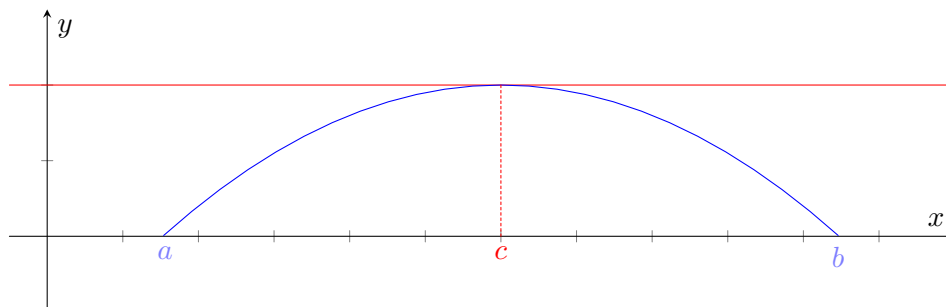
1. L'image de I par f est un intervalle fermé
2. f atteint sur $I = [a; b]$ son minimum et son maximum ($f(I) = [m, M]$)



3.3.2 Théorème de Rolle

Soit f continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors

$$\exists c \in]a; b[\text{ t.q. } f'(c) = 0$$



Démonstration:

- Si $f(x) \equiv 0$ sur $[a; b]$, alors le théorème est vérifié
- Si $f(x) \not\equiv 0$, $f(x)$ prend des valeurs positives ou négatives, on suppose que a et b sont

3.4 Règle de Bernoulli, de l'Hospital

3.4.1 Forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0 telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ avec $g'(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ sur un voisinage pointé de x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est dont une FI de type $\frac{0}{0}$

Alors si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe ou est infinie, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Démonstration: Soit $D(x) = f(x_0 + h) \cdot g(x) - g(x_0 + h) \cdot f(x)$

$$D(x_0) = 0 \text{ et } D(x_0 + h) = 0$$

or D est continue et dérivable sur un voisinage de x_0

Donc d'après Rolle,

$$\exists \theta \in]0; 1[\text{ t.q. } D'(x_0 + \theta \cdot h)$$

$$\begin{aligned} D'(x) &= f(x_0 + h) \cdot g'(x) - g(x_0 + h) \cdot f'(x) \\ D'(x_0 + h) = 0 &\implies f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + \theta h) = g(x_0 + h) \cdot f'(x_0 + \theta h) \\ &\iff \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)} \end{aligned}$$

Et lorsque $h \rightarrow 0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)} \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

□

Remarque: Cette règle reste valable lorsque $x \rightarrow \pm\infty$

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de l'infini, telles que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ Alors si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.4.2 Forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ "

Soient f et g deux fonctions dérivable sur un voisinage de x_0 (fini ou infini) et telles que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

Alors si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Illustration de la démonstration

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}{\frac{1}{f(x)}}$$

est une FI de " $\frac{0}{0}$ "

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{f^2(x)}{g^2(x)}}_{L^2} = L^2 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{L} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

□

Exemples:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)}$: FI " $\frac{0}{0}$ "

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$: FI " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} \text{ FI } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$: FI " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x)$: FI " $0 \cdot \infty$ "

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} : \text{FI } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

5. Rappel:

$$u(x)^{v(x)} \stackrel{\text{def}}{=} e^{v(x) \cdot \ln(u(x))}, \quad \forall u(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x)}$$

car exp et continuité et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0 \text{ (cf. 4.) donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$$

□

3.5 Variation locale d'une fonction

3.5.1 Croissance, décroissance

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I

1. Si

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in I$$

alors f strictement croissante sur I .

2. Si

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in I$$

alors f est strictement décroissante sur I .

Démonstration: Pour tout $a, b \in I, a < b$ le TAF nous donne l'existence de

$$c \in]a; b[, \text{ t.q. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

Or $b - a > 0$ donc

1. Si $f'(x) > 0$, alors

$$f'(c) > 0 \implies f(b) - f(a) > 0, \forall a < b \in I$$

donc f est strictement croissante sur I .

2. Si $f'(x) < 0$, alors

$$f'(c) < 0 \implies f(b) - f(a) < 0, \forall a < b \in I$$

donc f est strictement décroissante sur I .

⚠ La réciproque est **fausse**

Contre-exemple: $f(x) = x^3$

((fig. 1))

f est strictement croissante

3.5.2 Extrema

Définitions: Soient

$$f : \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$

et

$$c \in \mathbb{D}_f$$

- $f(c)$ est un maximum local de f si

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in]c - \delta; c + \delta[$$

- $f(c)$ est un maximum global de f si

$$f(x) \leq f(c), \forall x \in \mathbb{D}_f$$

- $f(c)$ est un minimum local de f si

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } f(x) \geq f(c), \quad \forall x \in]c - \delta; c + \delta[$$

- $f(c)$ est un minimum global de f si

$$f(x) \geq f(c), \forall x \in \mathbb{D}_f$$

((fig. 2))

$f(x_1)$ est la réciproque minimum local de f

$f(x_2), f(x_4)$ sont des maximums locaux

$f(x_3), \underbrace{f(x_5)}_{\text{n'existe pas}}$ ne sont des extremas locaux de f .

Théorème: Soit $f : \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0 . Alors si $f(x_0)$ est un extrema de f , on a $f'(x_0) = 0$

Démonstration: C.f. démonstration du théorème de Rolle

((fig. 3))

Remarque: La réciproque est **fausse**

Contre-exemple: $f(x) = x^3, x_0 = 0$

$$f'(0) = 3 \cdot x^2 \Big|_{x=0} = 0$$

mais

$$f(0) = 0$$

n'est pas un extremum de f .

Théorème: Soit f continue sur I ouvert et dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$. Alors $f'(x_0)$ est une extremum de f si $f'(x)$ change de signe en x_0

Démonstration: Soit f continue sur $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ ($\delta > 0$) et dérivable sur

$$]x_0 - \delta; x_0[\cup]x_0; x_0 + \delta[$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(c) \cdot (x - x_0)$$

avec c entre x et x_0 (TAF)

f' change de signe en x_0 donc:

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{l} \text{si } x - x_0 < 0, \text{ on a } f'(c) > 0 \implies f(x) < f(x_0) \\ \text{si } x - x_0 > 0, \text{ on a } f'(c) < 0 \implies f(x) < f(x_0) \end{array} \right\} f(x_0) \text{ est max}$$

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{l} \text{si } x - x_0 < 0, \text{ on a } f'(c) > 0 \implies f(x) > f(x_0) \\ \text{si } x - x_0 > 0, \text{ on a } f'(c) < 0 \implies f(x) > f(x_0) \end{array} \right\} f(x_0) \text{ est min}$$

((fig. 4))

((fig. 5))