EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2B

PREPA-032(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Simon BOSSONEY

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Applications linéaires

3.1 Définition et propriétés

Parmi l'ensemble des fonctions d'un espace vectoriel V vers un espace vectoriel W, certaines respectent les lois d'addition et de multipliication par un nombre réel.

3.1.1 Définition

Soient V et W deux espaces vectoriels. Un **application linéaire** est une fonction

$$f : V \to W$$

telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \in W$$

Exemples:

1. Soit V un espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

   $$V \ni x \mapsto \lambda x \in V$$

   est une application de V dans V. On appelle ce type d'application un **homothetie**.

2. Une **rotation** dans le plan $\mathbb{R}^2$ des vecteurs autour de l'origine est une application linéaire.

3. La projection d'un vecteur de l'espace de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur un plan $\mathbb{R}^2$ le long d'un vecteur normal au plan est une application linéaire.

4. Soit $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions n fois continuement dérivables sur $\mathbb{R}$. La dérivée

   $$\mathbb{C}^n(\mathbb{R}) \ni f(x) \mapsto f'(x) \in \mathbb{C}^{n-1}(\mathbb{R})$$

5. L'intégrale

   $$C(\mathbb{R}) \ni f(x) \mapsto \int_0^x f(x)dx \in \mathbb{R}$$

   est une application linéaire des fonctions continues (ou plus généralement intégrables) vers $\mathbb{R}$.

6. L'évaluation d'un polynôme en une valeur particulière est un autre exemple d'application linéaire.

$$\mathbb{R}_n[\,x\,] \ni P(x) \mapsto P(x) \in \mathbb{R}$$

Propriétés:

1. Si

$$f : V \to W$$

alors

$$f(0_V) = 0_W$$

En effet,

$$0_W = f(0_V) - f(0_V) = f(0_V - 0_V) = f(0_V)$$

2. Une application linéaire

$$f : V \to W$$

est complètement déterminée dès qu'on connait son action sur une base B_V de V. En effet soit

$$B_V = \{v_1, ..., v_n\}$$

une base finie de V et soient

$$w_1 = f(v_1), ..., w_2 = f(v_n)$$

les images des éléments de cette base par f. Alors si $x \in V$, il existe une unique manière d'écrire linéaire des éléments de B_V:

$$x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

Mais alors,

$$f(x) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 w_1 + ...\lambda_n + w_n$$

Par conséquent, si deux applications linéaires

$$f, g : V \to W$$

sont égales sur une base de V, alors

$$f = g$$

et réciproquement

3.1.2 Définition

Soit

$$f : V \to W$$

une application linéaire entre deux espaces vectoriels V et W. On définit le **noyau**

$$Ker(f) \text{ de } f$$

come l'ensemble

$$Ker(f) \coloneqq \{x \in V : f(x) = 0_W\}$$

L'**image** $Im(f)$ est définie comme l'ensemble

$$Im(f) \coloneqq \{f(x) \in W : x \in V\}$$

On dit que l'image f est un sous-ensemble de W, alors que le noyau de f est une sous-ensemble de V.

3.1.3 Théorème

Soit $f : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels V et W. Alors $\text{Ker}(f)$ est une sous-espace vectoriel de V alors que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de W.

Démonstration:

- Le noyau de f est non-vide car

  $$f(0_V) = 0_W, \text{ i.e. } 0_V \in \text{Ker}(f)$$

  De plus, si $x, y \in \text{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

  $$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = 0_W + \lambda 0_W$$

  et

  $$x + \lambda y \in \text{Ker}(f)$$

- L'image de f est non-vide car

  $$0_W = f(0_V) \in \text{Im}(f)$$

  De plus, si $v = f(x),\ w = f(y)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

  $$v + \lambda w = f(x) + \lambda f(y) = f(x + \lambda y) \in \text{Im}(f)$$

□

Les images par f d'une famille génératrice de V générant $\text{Im}(f)$:

3.1.4 Théorème

Soient $f : V \to W$ une application linéaire entre des espaces vectoriels V et W et $\{v_1, ..., v_n\}$ une famille génératrice de V. Alors,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x_1), ..., f(x_n))$$

Démonstration: (he didn't do it in class)

□

3.1.5 Théorème

Soit $f : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels V et W. Alors

- f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_V\}$
- f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = W$
- f est bijective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_V\}$ et $\text{Im}(f) = W$

Démonstration:

- f est injective si et seulement si
$$V \ni x \neq y \implies W \in f(x) \neq f(y) \in W$$
et dons si et seulement si
$$V \in x \neq y \in V \implies f(x) - f(y) \neq 0_W$$
ou encore si et seulement si
$$x - y \neq 0_V \implies f(x - y) \neq 0_W$$
et donc finalement si et seulement si
$$f(z) = 0_W \implies z = 0_V$$
- f est surjective si et seulement si
$$\forall w \in W, \exists x \in W : w = f(x)$$
ce qui signifie que
$$f(V) = W, \text{ i.e. } \text{Im}(f) = W$$
- f est bijective si et seulement si elle est simultanément injective et surjective.

3.1.6 Définition

Soit $f : V \to W$ une application linéaire entre deux vectoriels V et W. Soit $w \in W$. La **préimage** de w par f est l'ensemble

$$f^{-1}\{w\} := \{x \in V : f(x) = w\}$$

Propriétés:

1. La préimage de 0_W est le noyau de f : $f^{-1}\{0_W\} = \text{Ker}(f)$
2. f est injective si et seulement si $f^{-1}\{0_W\} = \{0_V\}$
3. $f^{-1}\{w\} \neq \emptyset \iff w \in \text{Im}(f)$
4. La préimage $f^{-1}\{w\}$ est soit vide, soit de la forme
$$f^{-1}\{w\} = x + \text{Ker}(f)$$
où $f(x) = w$

- En effet, comme $f(x) = w$ alors $x \in f^{-1}\{w\}$. De plus, si $y \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(x+y) = f(x) + f(y) = w + 0_W = w$ d'où $x + \mathrm{Ker}(f) \subset f^{-1}\{w\}$
- Réciproquement, si $v \in f^{-1}\{w\}$ alors

$$f(v-x) = f(v) - f(x) = w - w = 0_W$$

de sorte que

$$v - x \in \mathrm{Ker}$$

ou encore que

$$v \in x + \mathrm{Ker}(f)$$

d'où

$$f^{-1}\{w\} \subset x + \mathrm{Ker}(f)$$

$\square$

- La préimage par f d'un élément de W existe toujours, indépendamment de la bijectivité de f de f ou non. Il ne faut pas confondre $f^{-1}\{w\}$ avec $f^{-1}(w)$. Cette notation est strictement réservée à la fonction réciproque de f appliquée à w.

La fonction réciproque n'existe que si f est une bijection, alors que la préimage (ou l'image réciproque) de w par f existe toujours et est un sous-ensemble de V.

Remarque: On considère le système d'équations linéaire

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ y - z + 2t = 1 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

On peut voir la partie homogène de ce système comme une application linéaire de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z + t \\ y - z + 2t \\ y + 2z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Le noyau de cette application n'est rien d'autre que l'ensemble des solutions du système homogène.

Le système a alors une solution si et seulement si $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans l'image de cette application.

Comme un application linéaire est définie dès qu'on connait son action sur une base, on peut déterminer son action sur la base canonique:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tout élément de l'image sera alors une combinaison linéaire des quatre vecteurs. Le système a alors une solution si et seulement si,

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

On peut par exemple choisir $\gamma = 1, \delta = 1, \alpha = -3$ et $\beta = 0$.

3.2 Représentation matricielle

Tout système linéaire peut être considéré comme une application linéaire. Réciproquement, toute application linéaire entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ peut être par mxn coefficients $\{a_{i,j}\}_{1\leq i\leq m, 1\leq n}$ tels que

$$f(x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Plus précisément, on a

$$a_{ij} = f(e_j)_i$$

où e_j est le j^e vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Démonstration: Soit

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

On a alors

$$x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$$

On pose

$$w = f(x) = w_1f_1 + ... + w_mf_m$$

où $f_1, ..., f_m$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Par linéarité de f, on a alors

$$w_i = f(x)_i = f(x_1 + e_1 + ... + x_ne_n) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_je_j\right)_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_jf(e_j)_i = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_j$$

□

3.2.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. La matrice M_f donnée par les coefficients $\{a_{i,j}\}_{1\leq i\leq m, 1\leq n}$ est la **représentation** de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

Le colonnes de $M_f$sont les coefficients dans la base canonique $\{f_1, ..., f_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ des images par f des vecteurs de base de la base canonique $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.