EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1A

PREPA-031(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 2

Équations et inéquations sur les réels

2.1 Identité algébrique

Propriétés:

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.
- L'identité remarquable. Soient $a, b \in \mathbb{R}$
  1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
  2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
  3. $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ $\quad a + b$: expression conjugué de $a - b$
  4. $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ $\quad a^2 + ab + b^2$: expression conjugué de $a - b$
  5. $a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Exemples: Amplifions par l'expression conjugué:

1.
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

2.
$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}{x+1}, \quad (x \neq 1)$$

2.2 Ensemble solutions

Exemples:

1. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$:
$$4x + 5 = 0$$
L'unique solution est $x = -\frac{5}{4}$
L'ensemble solution est $S = \{-\frac{5}{4}\}$

2. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$:
$$2x \geq 3$$
L'ensemble solution $S = \left[\, \frac{3}{2}; +\infty \right[$

Définition: Soient f, g deux fonctions définies sur $D_{\text{déf}} \in \mathbb{R}$.
Résoudre l'équation:

$$f(x) = g(x)$$

ou l'inéquation $f(x) < g(x)$(strict)
ou encore $f(x) \leq g(x)$(large)
C'est chercher **l'ensemble aux valeurs** de x vérifiant l'équation ou l'inéquation

$$S = \{x \in \mathbb{D}_{\text{déf}} \subset \mathbb{R} | \underbrace{x \text{ vérifie l'équation ou l'inéquation}}_{\text{proposition } P(x)}\}$$

- $\mathbb{R}$: l'ensemble des valeurs à considerer (référentiel)
- $\mathbb{D}_{\text{déf}}$: l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'expression $P(x)$ a un sens.
- L'équation ou l'inéquation est contrainte ou propriété imposées

La résolution d'un problème passe par une succession de problème équivalents: les ensembles solutions sont identiques.

Exemples: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

1. $P(x) : \sqrt[3]{x} \leq 2$
   - $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
   - Équivalence:

   $$\underbrace{\sqrt[3]{x} \leq 2}_{\text{proposition } P(x), \text{ ensemble } A} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{x \leq 2^3 = 8}_{\text{proposition } Q(x), \text{ ensemble B}}$$

   Ainsi

   $$S = A = B = \,]-\infty; 8\,]$$

2. $P(x) : x^2 = 64$
   - $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
   - Implication

   $$\underbrace{x^2 = 64}_{P(x):A} \Longleftarrow \underbrace{x = 8}_{Q(x):B}$$

   On a $B = \{8\} \subset \{-8; 8\} = A = S$

3. $P(x) : \sqrt{x} = -4$
   - $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}_+$
   - Implication:

   $$\underbrace{\sqrt{x} = -4}_{P(x):A} \Longrightarrow \underbrace{x = (-4)^2 = 16}_{Q(x):B}$$

   Ainsi $S = A = \emptyset \subset \{16\} = B$ on a des solutions "parasites"

⚠ Savoir (et énoncé) ce qu'on cherche (on veut faire)

2.2.1 Équations et inéquations linéaires

Définition: Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \cdot x = b$$

est une équation linéaire en $x \in \mathbb{R}$

Clairement, $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$

Pour résoudre une équation linéaire, **on cherche à isoler x: discussion selon a**

- $a \neq 0$ (on peut diviser par a):

$$ax = b \iff x = \frac{b}{a} \quad \text{d'où} \quad S = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

- $a = 0$ (on ne peut pas diviser pas diviser par a !)

$$ax = b \iff 0x = b$$

  - Si $b = 0$: $0x = 0$. Tout $x \in \mathbb{R}$ est solution $S = \mathbb{R}$
  - Si $b \neq 0$: $0x \neq 0$. Aucun x est solution $S = \emptyset$

Exemple: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$ l'équation

$$m^2 \cdot x - m - 4x = 2$$

en fonction de paramètre réel m (pour chaque m l'équation est différente)

Remarque: Équation du 1$^{\text{er}}$ degré, en x, on cherche à **isoler** x.

$$\underbrace{(m^2 - 4)}_{a} x = \underbrace{m + 2}_{b}$$

Discussion du coefficient de x

- $m^2 - 4 \neq 0, \quad m \notin \{-2; 2\}$

$$\implies x = \frac{\cancel{m+2}}{(\cancel{m+2}) \cdot (m-2)} = \frac{1}{m-2}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{m-2} \right\}$$

- $m^2 - 4 = 0, \quad m \in \{-2; 2\}$
  - si $m = -2$

$$(m^2 - 4)x = m + 2 \iff 0x = 0$$
$$S = \mathbb{R}$$

  - si $m = 2$

$$(m^2 - 4)x = m + 2 \iff 0x = 4$$
$$S = \emptyset$$

Résumé:

- si $m \notin \{-2; 2\}$, $\quad S = \left\{\frac{1}{m-2}\right\}$
- si $m = -2$, $\quad S = \mathbb{R}$
- si $m = 2$, $\quad S = \emptyset$

Définition: Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$ax > b$$

est une inéquation **linéaire** en $x \in \mathbb{R}$: on cherche à isoler x.
D'où une discussion de a.

- $a > 0$:

$$ax > b \iff x > \frac{b}{a}$$

$$S = \left]\frac{b}{a}; +\infty\right[$$

- $a = 0$:

$$ax > b \iff 0x > b$$

  - si $b < 0$, tout x est solution de S.

$$S = \mathbb{R}$$

  - si $b \geq 0$, aucun x est solution de S.

$$S = \emptyset$$

- $a < 0$:

$$ax > b \iff x < \frac{b}{a}$$

$$S = \left]-\infty; \frac{b}{a}\right[$$

Remarque: Résolution similaire pour $ax \geq b, ax < b$ et $ax \leq b$

Exemple: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$: $m^2x - m - 4m \leq 2$ en fonction du paramètre m.

Remarque: Inéquation linéaire, on cherche à isoler x

$$(m^2 - 4)x \leq m + 2$$

Discussion du coefficient de x

- Paramètre positif:

$$m^2 - 4 = (m-2)(m+2) > 0 \implies m \in \,]-\infty; -2\,] \cup [\,2; +\infty[$$

$$(m^2 - 4)x \leq m + 2 \iff x \leq \frac{m+2}{(m-2)(m+2)} = \frac{1}{m-2}$$

$$S = \left]-\infty; \frac{1}{m-2}\right]$$

- Paramètre nul:
$$m^2 - 4 = 0 \iff m \in \{-2; 2\}$$
  - $m = -2$
$$(m^2 - 4)x \leq m + 2 \iff 0x \leq 0$$
$$S = \mathbb{R}$$
  - $m = 2$
$$(m^2 - 2)x \leq m + 2 \iff 0x \leq 4$$
$$S = \mathbb{R}$$
- Paramètre négatif:
$$m^2 - 4 < 0 \iff m \in]-2; 2[$$
$$(m^2 - 4)x \leq m + 2 \iff x \geq \frac{1}{m+2}$$
$$S = \left[\frac{1}{m-2}; +\infty \right[$$

Résumé

- si $m \in]-\infty; -2 [\cup]2; +\infty[$, $\quad S = \left]-\infty; \frac{1}{m-2}\right]$
- si $m \in \{-2; 2\}$, $\quad S = \mathbb{R}$
- si $m \in]-2; 2[$, $\quad S = \left[\frac{1}{m-2}; +\infty\right[$

2.3 Équations et inéquations rationelles

Définition: Une fonction rationnelle en $x \in \mathbb{R}$ est un quotient de fonction polynomiale. Pour résoudre une équation $f(x) = g(x)$ ou inéquations $f(x) < g(x)$ sur la fonction rationnelle.

- On différencie le domaine de définition $\mathbb{D}_{\text{déf}}$.
- On passe **toutes** les expression du même côté de l'égalité (ou inégalités) et on étudie le signe en factorisant.

Exemple: Résoudre en x l'inéquation $x > \frac{4}{x}$

- $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
- Inéquation rationnelle: on porte toute du même côté

$$x - \frac{4}{x} > 0 \iff \frac{x^2 - 4}{x} > 0$$
$$\iff \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x} > 0$$

- tableau des signes (remarque: le valeurs remarquables sont $-2, 0, 2$)

x		-2		0		2	
		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x}$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

$$S =]-2; 0[\cup]2; +\infty[$$

2.4 sectoin missing

2.5 sectoin missing

2.6 Valeur absolue

Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x, notée $|x|$ est réel positif ou null

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple:

$$|-3| = -(-3) = 3 \qquad |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

Propriétés: Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x^2| = x^2$
4. $|-x| = |x|$
5. $x = \text{sgn}(x) \cdot |x|$ et $|x| = \text{sgn}(x) \cdot x$
6. $-|x| \leq x \leq |x|$
7. $|x+y| \leq |x| + |y|$(inégalité triangulaire)
8. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

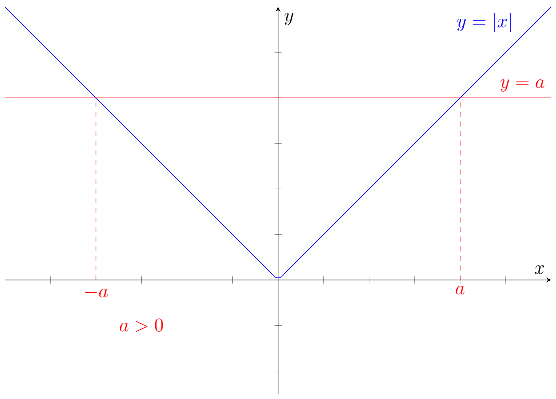
2.6.1 Equation à valeur absolue

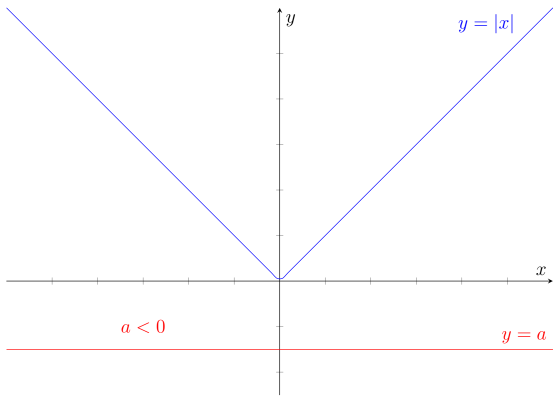
Remarque: L'équation $|x| = a, \quad a \in \mathbb{R}$ ne peut clairement pas avoir de solutions en $x \in \mathbb{R}$ si $a < 0$

Théorème: On a l'équivalence

$$|x| = a \iff a \geq 0 \text{ et } \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$$

En effet,





$S = \{-a; a\}$ $S = \emptyset$

Remarque: (généralisation)
Soient f et g deux fonctions rélles. On a l'équivalence

$$|f(x)| = g(x) \iff g(x) \geq 0 \text{ et } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Remarque: On ne discute pas le signe de $f(x)$, mais seulement celui de $g(x)$ (condition de positivité). On travaille donc sur le référentiel restreint $\mathbb{D}_{\text{déf}} \cap \mathbb{D}_{\text{positif}}$

Exemple: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

$$|x^2 + 2x - 5| = x + 1$$

- domaine de définition: $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
- équivalence:

$$|x^2 + 2x - 5| = x + 1 \iff x + 1 \geq 0 \text{ et } \begin{cases} x^2 + 2x - 5 = x + 1 & (1) \\ x^2 + 2x - 5 = -(x + 1) & (2) \end{cases}$$

- condition de positivité : $x + 1 \geq 0$
  D'où $\mathbb{D}_{\text{pos}} = [\,-1; +\infty\,]$
- équatoin (1)

$$\begin{aligned} (1) : & x^2 + x - 6 = 0 \\ & (x + 3) \cdot (x - 2) = 0 \end{aligned}$$

d'où $S_1 = \{-3, 2\}$

Remarque: -3 est à exclure: $-3 \notin \mathbb{D}_{\text{pos}}$

- l'équation (2)

$$\begin{aligned}(2) :& x^2 + 3x - 4 = 0\\ &(x+4)\cdot(x-1) = 0\end{aligned}$$

d'où $S_1 = \{-4, 1\}$

- Solution:

$$S = \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap \mathbb{D}_{\text{pos}} \cap (S_1 \cup S_2) = \{1, 2\}$$

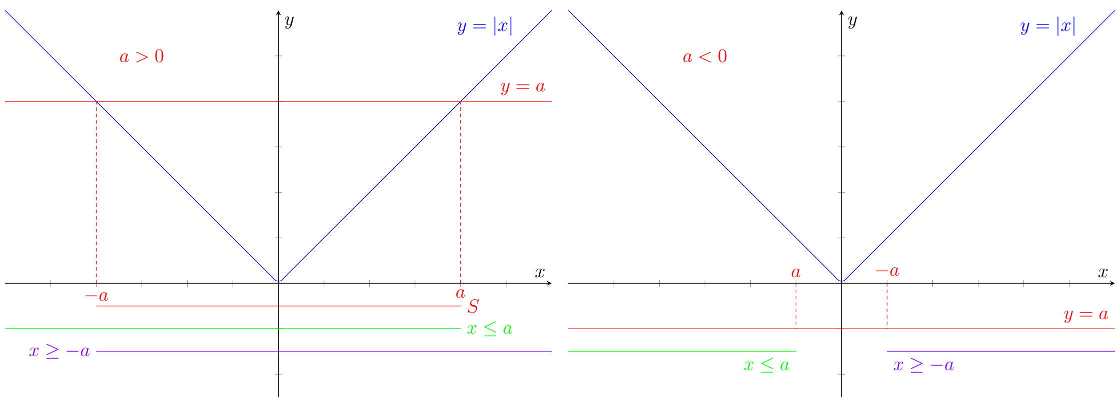
2.6.2 Inéquation à valeur absolue

Remarque: L'inéquation $|x| \leq a, \quad a \in \mathbb{R}$, ne peut pas avoir de solution si $a < 0$. On n'a pourtant besoin de discuter le signe de a!

Théorème: Soit $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$|x| \leq a \iff \begin{cases} x \leq a \\ \text{et} \\ x \geq -a \end{cases}$$

En effet,



$S = [\,-a, a\,] = \,]-\infty; a\,] \cap [\,-a; +\infty[$ $\qquad$ $S = \emptyset = \,]-\infty; a\,] \cap [\,-a; +\infty[$

Théorème: Soient f et g deux fonctions réelles. On a l'équivalence

$$\boxed{|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \text{et} \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}}$$

Remarques:

1. On ne discutera pas le signe de $f(x)$, ni celui de $g(x)$ (le cas trivial $g(x) < 0$ est rejeté lors de l'intersection)
2. Idem avec l'inégalité stricte.

Remarque: L'inéquation $|x| \leq a, \quad a \in \mathbb{R}$ admet clairement tout $x \in \mathbb{R}$ comme solution si $a < 0$ (une valeur absolue est toujours grand qu'un nombre négatif). On ne discutera pourtant pas le signe de a!

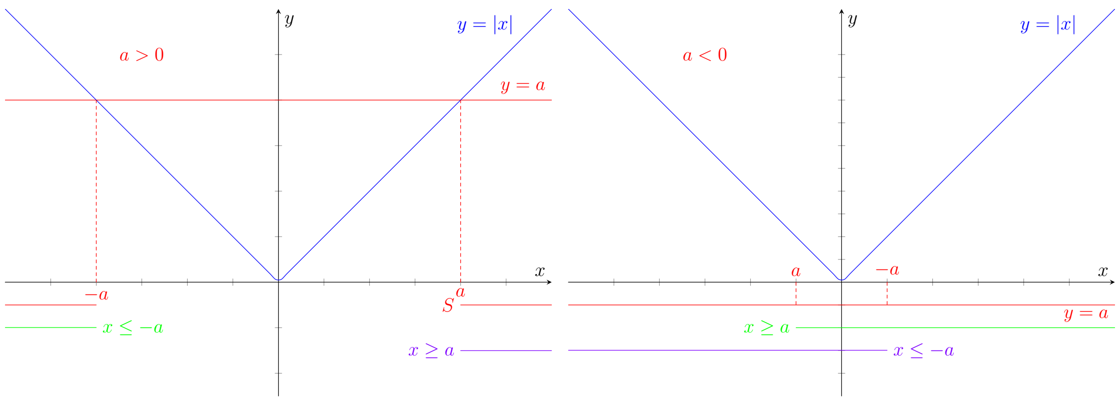
$$|x| \leq a, \quad a < 0 \text{ trivial } : \quad S = \emptyset$$

$$|x| \geq a, \quad a < 0 \text{ trivial } : \quad S = \mathbb{R}$$

Théorème: Soit $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$|x| \geq a \iff \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$$

En effet,



$$S = \,]-\infty; -a\,] \cup [\,a; +\infty\,[\qquad\qquad S = \mathbb{R} = \,]-\infty; -a\,] \cup [\,a; +\infty\,[$$

Théorème: Soient f et g deux fonctions réelles. On a l'équilavence

$$|f(x)| \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases}$$

Remarques:

1. On ne discutera ni le signe de $f(x)$, ni celui de $g(x)$. Le cas trivial $g(x) < 0$ est traité par la réunion.
2. idem pour l'inégalité stricte.

Exemple: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

$$|x| + \frac{x-1}{2} < 0$$

- domaine de définition: $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$

- équivalence

$$|x| < -\frac{x-1}{2} \iff \begin{cases} x < -\frac{x-1}{2} & (1) \\ \text{et} \\ x > \frac{x-1}{2} & (2) \end{cases}$$

- inéquation (1). On isole x

$$3x < 1 \text{ d'oú } S_1 = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$$

- inéquation (1). On isole x

$$x > -1 \text{ d'oú } S_2 =]-1; +\infty[$$

- Solution:

$$S = \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap S_1 \cap S_2 = \left]-1, \frac{1}{3}\right[$$

Exemple: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

$$|x-2| > \frac{2x-4}{x}$$

- $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}^*$
-

$$|x-2| < \frac{2x-4}{x} \iff \begin{cases} x-2 > \frac{2x-4}{x} & (1) \\ \text{ou} \\ x-2 < -\frac{2x-4}{x} & (2) \end{cases}$$

- inéquation (1)

$$\begin{aligned} x - 2 - \frac{2x-4}{x} &> 0 \\ (x-2)\cdot\left(1 - \frac{2}{x}\right) &> 0 \\ \frac{(x-2)^2}{x} &> 0 \end{aligned}$$

d'où

$$S_1 = \mathbb{R}_+^* \backslash \{2\} =]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

- inéquation (2)

$$\begin{aligned} x - 2 + \frac{2x-4}{x} &< 0 \\ (x-2)\cdot\left(1 + \frac{2}{x}\right) &< 0 \\ \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x} &< 0 \end{aligned}$$

d'où

$$S_1 = \mathbb{R}_+^* \backslash \{2\} =]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

x		-2		0		2	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x}$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

d'où

$$S_2 =]-\infty;-2[\,\cup\,]0;2[$$

- Solution:

$$S = \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap (S_1 \cup S_2)$$

$$s =]-\infty;-2[\,\cup\,]\,0;2\,[\,\cup\,]2;+\infty[$$

2.7 Racines

2.7.1 Racines positives (ou arithmétique)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Graphe de x^n

Définition: Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$
Le **réel positif** x vérifiant $x^n = a$ est appelé n^{e} racine positive de a.

Exemple: $\sqrt{-4}$ n est pas définie
$\sqrt[3]{-27} = 3$: racine cubique
-2 n'est pas une racine de 4.

Propriétés: Soient $a, b \in \mathbb{R}_+, \quad m, n \in \mathbb{N}^*$

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
2. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
3. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

Remarque: Ce sont les même règles que celle puissances en posant

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}, \quad a \in \mathbb{R}_-^*, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$$

Exemple:

$$7^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{7^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$$

$$\sqrt{3x^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{3} \cdot |x|$$

2.7.2 Racines réelles (ou zéros)

Définition: Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $x^n = a$ est une n^{e} racine **réelle** de a.

Exemple:

- 2 et -2 sont les solutions à
$$x^2 = 4$$
Ce sont les 2 racines carrées réelles de 4.
- -3 est racine cubique réelle de -27. En effet
$$(-3)^3 = -27$$

Discussion graphique de l'équation en x
$$x^n = a$$

- n pair

Remarque: Axe de symétrie en $x = 0$

- si $a > 0$: 2 racines distinctes:
$$S = \{-\sqrt[n]{a}, +\sqrt[n]{a}\}$$
- si $a = 0$: racine double:
$$S = \{0\}$$
- si $a < 0$: pas de racines
$$S = \emptyset$$

- n impair

Remarque: Centre de symétrie à l'origine. $\forall a \in \mathbb{R}$, il y a une unique solution

Remarque: Pour un n impair, on admet l'écriture
$$-\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a}$$
d'où
$$S = \{\sqrt[n]{a}\}$$

Exemple:
$$\left.\begin{array}{ll} x^4 = 16 & \text{exposant } n = 4 \text{ pair} \\ & 16 > 0 \end{array}\right\} \text{2 solution distinctes}$$
$$S = \{-\sqrt[4]{16}, \sqrt[4]{16}\} = \{-2, 2\}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} x^3+8=0 &\iff x^3=-8 \text{ (exposant } n=3 \text{ impair)} \\ &\implies S=\{\sqrt[3]{-8}\}=\{-2\} \end{aligned}$$

Conséquences:

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & \text{si } n \text{ impair} \\ |a| & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

- Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ (condition de positivité). Alors

$$\begin{aligned} a=b &\iff a^n=b^n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ a<b &\iff a^n<b^n \end{aligned}$$

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et n impair. Alors

$$\begin{aligned} a=b &\iff a^n=b^n \\ a<b &\iff a^n<b^n \end{aligned}$$

(car x^{na} est strictement croissante)

2.7.3 Équations et inéquations rationnelles

Dans une équation / inéquation du type

$$\sqrt{f}=g \quad \sqrt{f}<g \quad \sqrt{f}>g$$

on "veut élever au carré" pour faire tomber la $\sqrt{}$
C'est en ordre si $\sqrt{f} \geq 0$ (c'est le cas!) et $g \geq 0$ (condition de positivité). D'où la discussion du signe de g.

Théorème: Soient f et g 2 fonctions réelles.
Sur le domaine de définition (dont la condition $f(x)>0$), on a l'équivalence

$$\boxed{\sqrt{f(x)}=g(x) \iff g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(x)=g^2(x)}$$

En effet si $g(x)<0$, il n'y a pas de solution, car $\sqrt{f(x)}>0$

Théorème: Soient f, g 2 fonctions réelles sur $\mathbb{D}_{\text{déf}}$, on a l'équivalence

$$\boxed{\sqrt{f(x)} \leq g(x) \iff g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(x) \leq g^2(x)}$$

En effet, si $g(x)<0$, il n'y a pas de solution.

Théorème: Soient f, g 2 fonctions réelles sur $\mathbb{D}_{\text{déf}}$ on a l'équivalence

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \begin{cases} g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ g(x) \geq 0 \text{ et } f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

En effet si $g(x) < 0$, tout x est solution :

$$\sqrt{f(x)} > 0 > \underbrace{g}_{<0}$$

Exemple:

1. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$
$$\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 4x - 6$$
   - $\mathbb{D}_{\text{déf}}$: $x^2 - 3x + 6 \geq 0$
     comme $\Delta < 0, \mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
   - Condition de positivité.
$$4x - 6 \geq 0$$
$$\implies \mathbb{D}_{\text{pos.}} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$$
   - Sur $\mathbb{D}_{\text{pos}}$, on peut élever au carré (équivalence!)
$$x^2 - 3x + 6 = (4x - 6)^2 = 16x^2 - 48x + 36$$
$$\begin{aligned} 15x^2 - 45x + 30 &= 0 \\ x^2 - 3x + 3 &= 0 \\ (x-2)\cdot(x-1) &= 0 \end{aligned}$$
$$x = 1 \text{ ou } x = 2$$
   - Solution
$$S = \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap \mathbb{D}_{\text{pos.}} \cap \{1; 2\} = \{2\}$$

2. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$
$$\sqrt{x + m^2} = x + m$$
   - $\mathbb{D}_{\text{déf}} = [-m^2; +\infty[$
   - Condition de positivité:
$$x + m > 0$$
$$\mathbb{D}_{\text{pos.}} = [-m; +\infty[$$
   - Dans $\mathbb{D}_{\text{pos}}$ élever au carré:
$$x + m^2 = (x+m)^2 = x^2 + 2xm + m^2$$
$$\begin{aligned} x^2 + 2mx - x &= 0 \\ x \cdot (x + 2m - 1) &= 0 \end{aligned}$$
$$x = 0 \text{ ou } x = 1 - 2m$$

- Voyons pour quelle valeur de m les 2 valeurs sont solution
  - $x = 0$
$$x = 0 \in \mathbb{D}_{\text{déf}} = [-m^2; +\infty[$$
    ceci est vérifié $\forall m \in \mathbb{R}$
$$x = 0 \in \mathbb{D}_{\text{pos.}} = [-m; +\infty[$$
    est vérifié $\forall m \geq 0$
    Donc $x = 0$ est solution $\forall m \in \mathbb{R}_+$
  - $x = 1 - 2m$
$$\begin{aligned} & 1 - 2m \in [-m^2; +\infty[\\ \iff & 1 - 2m \geq -m^2 \\ \iff & m^2 - 2m + 1 \geq 0 \\ \iff & (m-1)^2 \geq 0 \\ \iff & m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & 1 - 2m \in [-m; +\infty[\\ \iff & 1 - 2m \geq -m \\ \iff & m^2 - 2m + 1 \geq 0 \\ \iff & m \leq 1 \end{aligned}$$
    Donc $x = 1 - 2m$ est solution si $m \leq 1$
    - $m < 0 : S = \{1 - 2m\}$
    - $m \in [\,0, 1\,] : S = \{0, 1 - 2m\}$
    - $m > 1 : S = \{0\}$

3. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$
$$\sqrt{6 - x} \leq 3 + 2x$$
   - $\mathbb{D}_{\text{déf}} =]-\infty; 6\,]$
   - Condition de positivité
$$3 + 2x \geq 0 \iff \mathbb{D}_{\text{pos.}} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$$
   - Dans $\mathbb{D}_{\text{pos.}}$ élever au carré:
$$6 - x \leq (3 + 2x)^2 = 9 + 12x + 4x^2$$
$$\begin{gathered} 4x^2 + 13x + 3 \geq 0 \\ (4x+1) \cdot (x+3) \geq 0 \end{gathered}$$
$$\implies S =]-\infty; -3\,] \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$$
   - Solution finale
$$S_{\text{fin}} = \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap \mathbb{D}_{\text{pos.}} \cap S = \left[-\frac{1}{4}; 6\right]$$

4. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$
$$\sqrt{-x^2 - x + 6} \geq x + 1$$

   - $\mathbb{D}_{\text{déf}}$:
$$\begin{aligned} & -x^2 - x + 6 \geq 0 \\ \iff & ? \\ \iff & ? \end{aligned}$$

   - Solution:
$$\begin{aligned} S &= \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap (S_1 \cap S_2) \\ &= [\,-3; 2\,] \cap]-\infty; 1\,] = [\,-3; 1\,] \end{aligned}$$