EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B

PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Calcul différentiel

3.1 Axes paramétrés dans le plan

3.1.1 Introduction

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
On appelle un paramètre dans le plan, la donnée d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction

$$\overrightarrow{r} : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

$$\overrightarrow{r}(t) = x(t) \cdot \overrightarrow{e_1} + y(t) \cdot \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

La fonction $\overrightarrow{r}(t)$ est appellée fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$ sont les fonctions coordonnées de $\overrightarrow{r}(t)$
L'ensemble

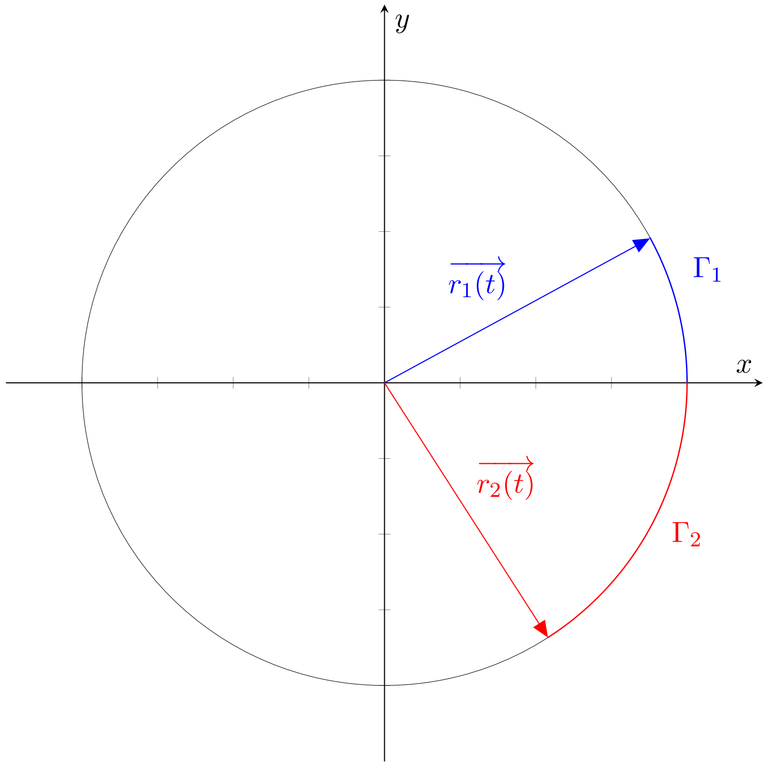
$$\Gamma = \{M(t) \in \mathbb{R}^2 | \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{r}(t), t \in I\}$$

est appelé la trajectoire de l'axe paramétré.
Intuitivement un axe paramétré est une trajectoire muni d'un mode de parcours.

Exemple:

$$\overrightarrow{r_1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et } \overrightarrow{r_2}(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

Soit 2 axes paramétrés différents ayant même trajectoire:



3.1.2 Fonction vectoriel

Soit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I$$

Une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in I$

1. Notation de limite

   - Définition:

     $$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$$

     Si

     $$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 < |t - t_0| < \delta \implies \|\vec{r}(t) - \vec{r_0}\| < \epsilon$$

     Définition analogue lorsque $t \to \pm\infty$

   - Proposition:

     $$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

     si et seulement si

     $$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \quad \textbf{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0$$

2. Notion de continuité

   Définition $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

   $$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

   en d'autres termes si et seulement si

   $$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } |t - t_0| < \delta \implies \|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\| < \epsilon$$

Proposition $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si et seulement si $x(t)$ et $y(t)$ continues en t_0 autrement dit si et seulement si

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x(t_0) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y(t_0)$$

3. Notions de dérivabilité

Définition $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$

existe.
Cette limite s'appelle le vecteur dérivé de $\vec{r}(t)$ et est noté

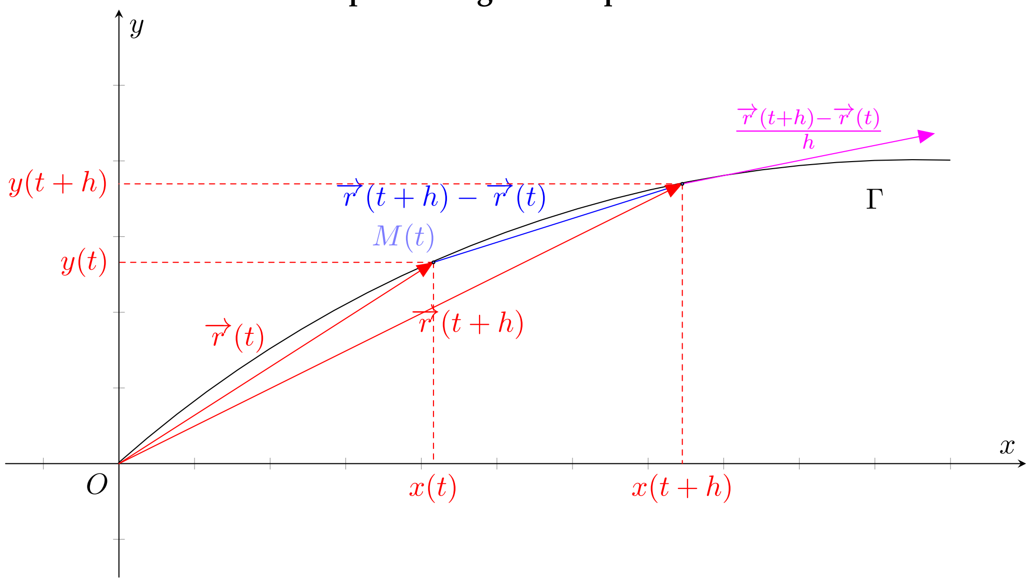
$$\dot{\vec{r}}(t) \text{ ou } \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t_0}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

Proposition $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si et seulement si $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivable en t_0 et

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique



$$\frac{\vec{r}(t+h)\vec{r}(t)}{h}$$

est un vecteur directeur de la sécante passant par les points $M(t)$ et $M(t+h)$ de la trajectoire Γ.
Lorsque $h \to 0$, le vecteur tend vers le vecteur dérivée $\dot{\vec{r}}(t)$
Donc si $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$, le vecteur dérivée est un vecteur direction de la tangente à Γ en $M(t)$.
La pente de la tangente à Γ à l'instant t est donc donnée par

$$m = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \quad \text{ou} \quad m = \lim \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

Si $\dot{\overrightarrow{r}}(t) = \overrightarrow{0}$ alors le vecteur tangente à Γ est donnée par $\ddot{\overrightarrow{r}}(t)$ (et si $\ddot{\overrightarrow{r}}(t) = \overrightarrow{0}$, par $\dddot{\overrightarrow{r}}(t)$, etc.)

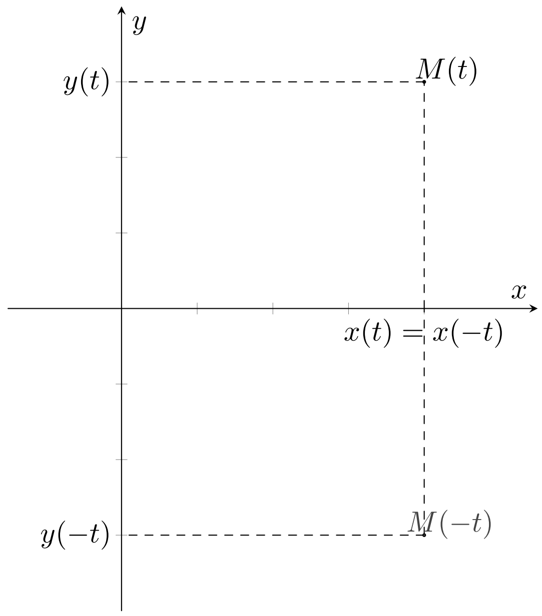
Ceci est une conséquence de la règle de BH:

$$m = \lim \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \overset{BH}{=} \lim \frac{\ddot{y}(t)}{\ddot{x}(t)}$$

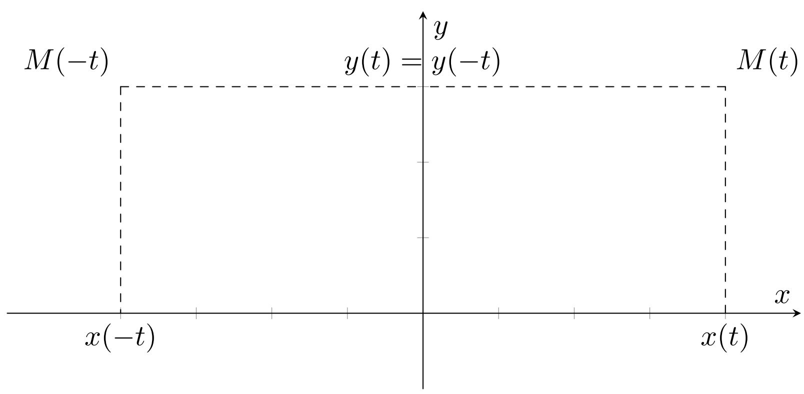
3.1.3 Quelques éléments de l'étude d'un axe paramétré

Symétries déductibles de la parité des fonctions coordonnées

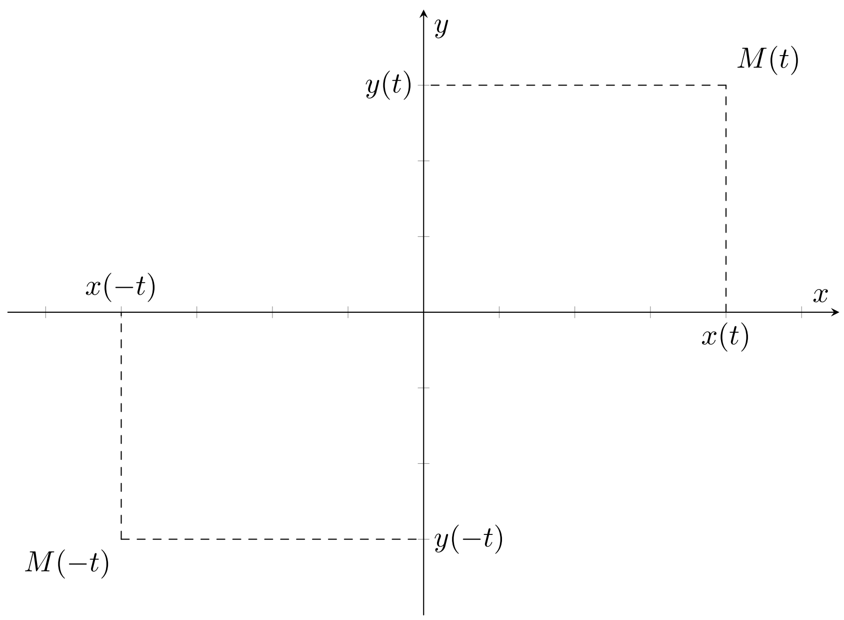
1. Si $x(t)$ est pair et $y(t)$ impair alors Γ est symétrique $/0_x$



2. Si $x(t)$ est impaire et $y(t)$ est pair alors Γ est symétrique $/0_y$



3. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont impaires alors Γ est symétrique $/0$

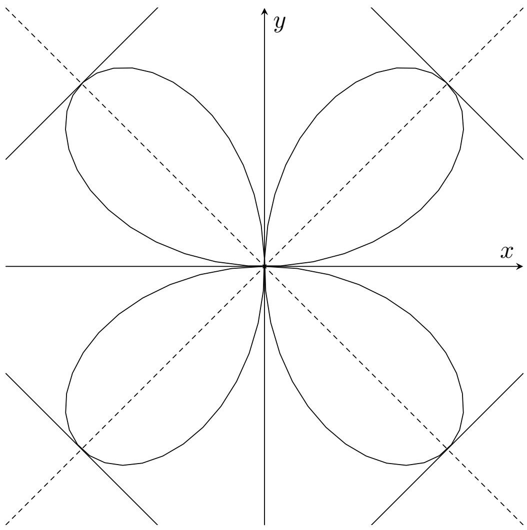


Points doubles, points multiples A est un point double de Γ si

$$\exists t_1 \neq t_2 \in I \text{ t.q. } A \equiv M(t_1) \equiv M(t_2)$$

Exemple:

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) \cdot \cos(t) \\ \sin(2t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [\,0; 2\pi[$$



$$t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$
$$\implies M(t) = 0$$

0 est un point multiple d'ordre 4

Point stationnaire $M(t_0)$ est un point stationnaire de Γ si $\dot{\overrightarrow{r}}(t) = \overrightarrow{0}$ autrement dit si et seulement si $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$.

Dans ce cas la pente m de la tangente en ce point est donnée par

$$m = \lim_{t \to t_0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \quad (\text{FI : } ``\frac{0}{0}")$$

(éventuellement BH)

Autres points remarquables Si $t_0 \in I$ tel que $\overrightarrow{r}$ soit continue en t_0 alors:

- Si

$$m = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0 \quad \text{ou} \lim_{t \to t_0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0$$

Γ admet un point à tangente horizontale.

Exemple: Si $\dot{y}(t_0) = 0$ et $\dot{x}(t_0) \neq 0$

- Si

$$m = \lim_{t \to t_0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \infty$$

alors Γ admet une tangente verticale en $M(t_0)$

Exemple: Si $\dot{x}(t_0) = 0$ et $\dot{y}(t_0) \neq 0$

Exemple:

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1-2t} \\ y(t) = \frac{t^3}{1-2t} \end{cases} , \quad t \in \mathbb{D}_{\text{déf}}$$

Montrons que Γ admet un point stationnaire, puis esquisse Γ au voisinage de ce point

$$\dot{x}(t) = \frac{2t(1-2t) - t^2(-2)}{(1-2t)^2} = \frac{-2t^2 + 2t}{(1-2t)^2}$$

$$\dot{x}(t) = 0 \iff t = o \text{ ou } t = 1$$

$$\dot{y}(t) = \frac{3t^2(1-2t) - t^3(-2)}{(1-2t)^2} = \frac{t^2(-4t+3)}{(1-2t)^2}$$

$$\dot{y}(t) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = \frac{3}{4}$$

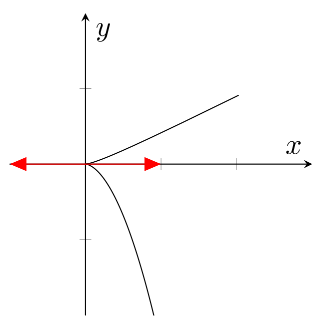
Unique point stationnaire en $t = 0$:

C'est l'origine. La pente en ce point est donnée par

$$m = \lim_{t \to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0$$

O est un point stationnaire à tangente horizontale

t		0	
$\dot{x}$	-	0	+
$\dot{y}$	+	0	+



Branches infinies On dit que Γ trajectoire de $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ admet une branche infinie en t_0 (fini ou infini) si et seulement si

$$\lim_{t \to t_0} \|\overrightarrow{OM}(t)\| = +\infty$$

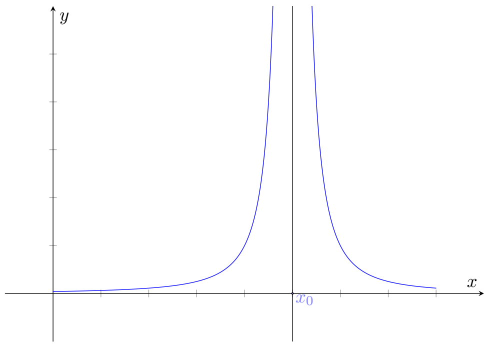
autrement dit si et seulement si

$$x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty \quad \text{ou} \quad y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty$$

Trois cas peuvent se présenter

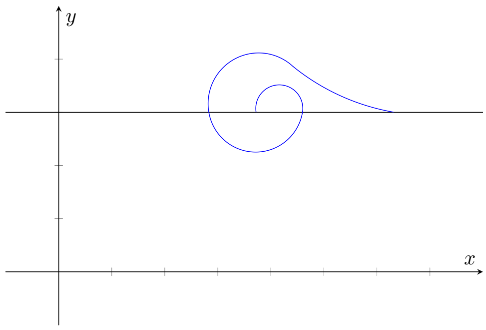
1. $$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty$$

   alors Γ admet une AV: $x = x_0$



2. $$\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0$$

   alors Γ admet une AH: $y = y_0$



3. $$\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty$$

   Γ admet une intervalle AO:
   $$y = mx + h$$
   avec
   $$m = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$$
   et
   $$h = \lim_{t \to t_0} [\, y(t) - m \cdot x(t)]$$

Remarque: Les instants t_0 qui définissent les branches infinies de Γ sont à chercher aux bornes (finies ou inifinies) du domaine de définition ou de continuité.

Exemple:

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1-2t} \\ y(t) = \frac{t^3}{1-2t} \end{cases} \qquad \mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{1}{2} \right\} = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

3.1.4 Étude d'une courbe paramétrée

Le folium de Descartes

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad \mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

- $x(t)$ et $y(t)$ ni périodique, ni pairs, ni impairs, pas de symétrie évidente.
  Étude sur $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
- Limite aux "points frontières" de $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
  - $t \to \pm\infty$

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$$
$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0$$

$$M(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} (0,0)$$

    (mais comment?)
  - $t \to -1$

$$\lim_{t\to-1} x(t) = \infty, \lim_{t\to-1} y(t) = \infty$$

    Recherche d'une éventuelle AO:
    * $\lim_{t\to-1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-1} \frac{3t^2}{2t} = -1$
    * $\lim_{t\to-1}(y(t) - (-1)x(t))$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t\to-1} \frac{3t^2+3t}{1+t^3} \\ &= \lim_{t\to-1} \frac{3t(t+1)}{t+1)(t^2-t+1)} \\ &= \lim_{t\to-1} \frac{3t}{t^2-t+1} \end{aligned}$$

Donc le folium de Descartes amdet (lorsque $t \to -1$) un AO:

$$AO: \quad y = -x - 1$$

- Dérivées

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3\frac{(1+t^3) - t(3t^2)}{(1+t^3)^2} \\ &= 3\frac{-2t^3+1}{(1+t^3)^2} \end{aligned}$$

Signe de $\dot{x}(t)$

t	$-\infty$	-1		$2^{-\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$\dot{x}(t)$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= 3\frac{2t(1+t^3)-t^2(3t^2)}{(1+t^3)^2}\\ &= 3\frac{t(-t^3+2)}{(1+t^3)^2}\end{aligned}$$

Signe de $\dot{y}(t)$

t	$-\infty$	-1		0		$2^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$\dot{y}(t)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

- Points remarquables

  Pas de zéros communs à $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$, donc pas de points stationnaires

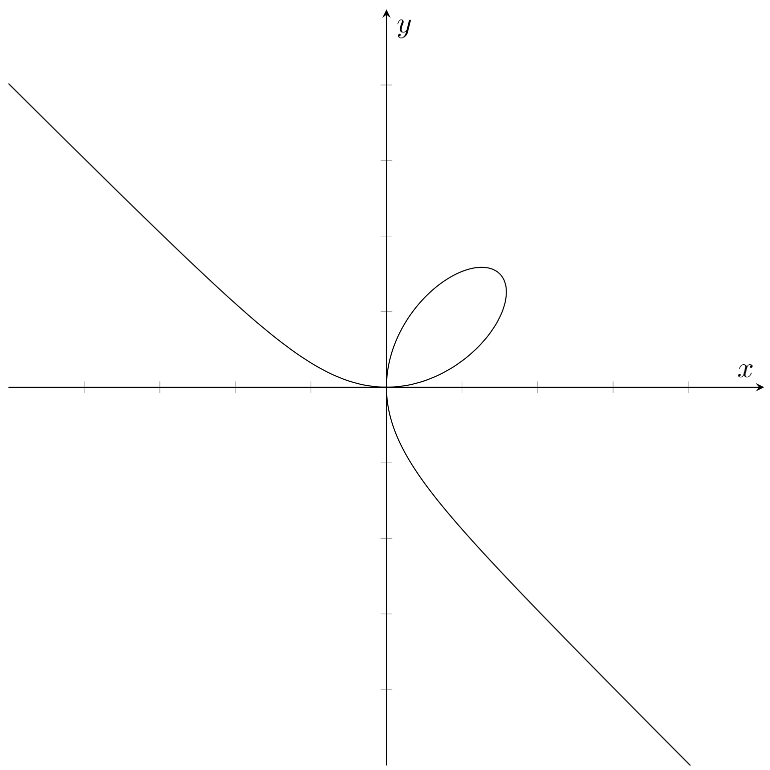
  - en $t=0$, $M(0,0)$ est un point à TH
  - en $t=2^{\frac{1}{3}}$, $M(2^{\frac{1}{3}},2^{\frac{2}{3}})$ est un point à TH
  - en $t=2^{-\frac{1}{3}}$, $M(2^{\frac{2}{3}},2^{\frac{1}{3}})$ est un point à TV
  - lorsque $t\to\pm\infty$, $M(t)\to(0,0)$ et

  $$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{t(-t^3+2)}{-2t^2+1}=\infty$$

  Donc $M(t)\to(0,0)$ le long d'une "tangente" verticale.

- Tableau de variation

t	$-\infty$	-1		0		$2^{-\frac{1}{3}}$		$2^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$\dot{x}(t)$	$+$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$
$x(t)$	$0\nearrow+\infty$	$\Vert$	$-\infty\nearrow$	0	$\nearrow$	$2^{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	$2^{\frac{1}{3}}$	$\searrow 0$
$\dot{y}(t)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
$y(t)$	$0\searrow-\infty$	$\Vert$	$+\infty\searrow$	0	$\nearrow$	$2^{\frac{1}{3}}$	$\nearrow$	$2^{\frac{2}{3}}$	$\searrow 0$
	$M\to 0$	AO		TH		TV		TH	$M(t)\to 0$
	"TV"	$y=-x-1$		TH		TV		TH	"TV"



3.1.5 Le limaçon de Pascal

Soient γ le cercle de centre O et de rayon $1, A(2,0)$ et P un point courant de γ. Soient d la tangente à γ en P et M la projection orthogonale de A sur d. Le lien de M lorsque P décrit γ s'appelle le limaçon de Pascal.

- Équations paramétriques de lieu de M
  - Choix du paramètre:
  $$t \in [\,0, 2\pi\,]$$
  ou mieux
  $$t \in [\,-\pi, +\pi\,]$$
  Donc
  $$P(\cos(t), \sin(t))$$
  - Équations de d et de (AM)
  $$d : \begin{pmatrix} x - \cos(t) \\ y - \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = 0 \iff x\cos(t) + y\sin(t) - 1 = 0$$
  $$m_d = -\cot(t) \implies m_{(AM)} = \tan(t)$$
  $$(AM) : y - 0 = \tan(t)(x-2)$$
  - M est défini par $\{M\} = d \cap (AM)$
  $$M : \begin{cases} x\cos(t) + y\sin(t) = 1 \\ y = \tan(t)(x-2) \end{cases} \iff \begin{cases} x\cos(t) + y\sin(t) = 1 \\ x + \sin(t) - y\cos(t) = 2\sin(t) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\cos(t) \\ \cdot\sin(t) \end{array} \right.$$
  $$\iff \begin{cases} x\cos^2(t) + y\sin(t)\cos(t) = \cos(t) & (1) \\ x\sin^2(t) + y\cos(t)\sin(t) = 2\sin^2(t) & (2) \end{cases}$$
  $$(1) + (2) \implies x = \cos(t) + 2\sin^2(t)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\cos(t)+y\sin(t)=1 \\ x\sin(t)-y\cos(t)=2\sin(t) \end{array}\right. \left|\begin{array}{l}\cdot\sin(t)\\ \cdot(-\cos(t))\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x\cos(t)\sin(t)+y\sin^2(t)=\sin(t) & (1) \\ -x\cos(t)\sin(t)+y\cos^2(t)=-2\sin(t)\cos(t) & (2) \end{array}\right.$$

$$(1)+(2) y=\sin(t)-2\sin(t)\cos(t)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos(t)+2\sin^2(t) \\ y(t)=\sin(t)-2\sin(t)\cos(t) \end{array}\right.$$

- Étude de l'arc paramétré $x(t)$ est pair et $y(t)$ est impair
  Donc Γ est symétrique $/0_x$
  Étude sur $[\,0;\pi\,]$
  - Limite aux points frontières

$$x(0)=1, y(0)=0$$
$$x(\pi)=-1, y(\pi)=0$$

  - Dérivées

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=-\sin(t)+4\sin(t)\cos(t)\\ &=\sin(t)(-1+4\cos(t))\end{aligned}$$

$$\dot{x}(t)=0 \iff \sin(t)=0 \quad \text{ou} \quad \cos(t)=\frac{1}{4} \iff t=0 \quad \text{ou} \quad t=180^\circ$$

ou

$$t=\text{arccos}(\frac{1}{4})\simeq 75^\circ$$

t		0		75		180	
$\dot{x}(t)$	//	0	+	0	−	0	//

$$\dot{y}(t)=\cos(t)-2\cos(2t)=\cos(t)-2(\cos^2(t)-1)$$

$$\dot{y}(t)=0 \iff 4\cos^2(t)-\cos(t)-2=0$$

$$\Delta=1+32=33$$

$$\cos(t)=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}=\left\{\begin{array}{l}\simeq -0,6\\ \simeq +0,8\end{array}\right.$$

$$t\simeq 32^\circ \quad \text{ou} \quad t\simeq 126^\circ$$

t		0		32		126		180
$\dot{y}(t)$	//	-	0	+	0	-		//

Pas de point stationnaire, mais:

* en $t_1 = 0, M(1, 0)$: TH
* en $t_2 \simeq 32°, M(1, 4; -0, 4)$: TH
* en $t_3 \simeq 75°, M(2, 1; 0, 5)$: TV
* en $t_4 \simeq 126°, M(0, 7; 1, 8)$: TH
* en $t_5 \simeq 180°, M(-1; 0)$: TV

t		t_1		t_2		t_3		t_4		t_5	
$\dot{x}(t)$	//	0	+	|	+	0	-	|	-	0	//
$x(t)$	//	|	$1 \nearrow 1.4$	|	$\nearrow 2.1$	|	$\searrow 0.7$	|	$\searrow -1$	|	//
$\dot{y}(t)$	//	|	-	0	+	|	+	0	-	|	//
$y(t)$	//	|	$0 \searrow -0.4$	|	$\nearrow 0.5$	|	$\nearrow 1.8$	|	$\searrow 0$	|	//
		TV		TH		TV		TH		TV