EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B

PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 1

Suite de nombres réels

1.1 Définitions

26/02/2019

Définition Une suite de nombres réels est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a :&\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ &n \longmapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

a_n est le terme generale de la suite et n est le rang de a_n.
La suite $a_1, a_2, a_3, ...$, se note "(a_n)"
Exemples

1) La suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \frac{1}{3n-7}$ est la suite $-\frac{1}{4}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, ...$

2) $..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ n'est pas une suite (pas de premier élément). Mais $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$ est une suite dont l'ensemble des valeurs est $\mathbb{Z}$.

3) $a, a, a, a, ... \quad a \in \mathbb{R}, \quad a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ est une suite constante.

4) Chercher le terme general des suites définie par les premiers termes:

   a) $(a_n) : \overbrace{1, 6,}^{5} \overbrace{11, 16,}^{5} \overbrace{21, 26,}^{5}$
   $a_n = 5n - 4$

   b) $b_n : \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{10}{9}, \frac{17}{12}, \frac{26}{15}, \frac{37}{18}, ...$
   Difference des nominateurs: $3, 5, 7, 9, 11, ...$
   Difference des dénominateurs: $3, 3, 3, 3, 3, ...$
   $b_n = \frac{n^2+1}{3n}$

5) Suites définie par recurrence

   $c_{n+1} = 2 - \frac{1}{c_n}, \quad c_1 = \frac{3}{2}$

   $c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{3}, \quad c_3 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}, \quad c_4 = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$

   Conjecture: $c_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

   Demonstration par récurrence:

- Verification: $c_1 = \frac{3}{2} \quad \frac{n+2}{n+1}|_{n=1} = \frac{3}{2} \quad \checkmark.$
- Demonstration du pas de récurrence:
  - **Hypothèse**: $c_n = \frac{n+2}{n+1}$ pour un $n \in \mathbb{N}$*
  - **Conclusion**: $c_{n+1} = \frac{n+3}{n+2}$
  - **Preuve**:
    $c_{n+1} = 2 - \frac{1}{c_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = 2 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{2(n+1)-(n+1)}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}$

□

Définitions

1. (a_n) est majoré si

$$\exists M \in \mathbb{R} a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

   (M : majorant)

2. (a_n) est minoré si

$$\exists N \in \mathbb{R} \text{ t.q. } a_n \geq N, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

   (N: minorant)

3. (a_n) est bornée si elle amdet un majorant **et** un minorant
4. (a_n) est croissante si $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
   (Strictement croissante si $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$)
5. (a_n) est décroissant si $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
   (Strictement décroissante si $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$)
6. (a_n) est monotone si elle est croissant **ou** (ou exclusif) décroissant
   (Strictement monotone si elle est croissant ou strictement décroissant)

Exemples

1. $a_n = \frac{1}{n}, \quad (a_n)$ est strictement décroissante et borné:

$$0 < a_n \leq 1$$

2. $b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{\underbrace{n+1}_{>0}}$

   Donc (b_n) est strictement croissante.

1.2 Limite d'une suite

Définition On dit que la suite (a_n) converge vers a ($a \in \mathbb{R}$) si $\forall \epsilon > 0$, il existe un seuil

$$N \in \mathbb{N}^*(N = N(\epsilon)) \text{ t.q. } n > N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

$$|a_n - a| < \epsilon \iff -\epsilon < a_n - a < \epsilon \iff a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \iff a_n \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$$

Cet intervalle est appelé ϵ-voisinage de a. Si (a_n) admet (a_n) est convergente sinon elle divergente.

Définition plus intuitive de la limite de suite:
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ si et seulement si ϵ-voisinage de a contient persque tout les termes de la suite (tous les termes sauf nombre fini)

Exemples

1. $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

   $\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad [N \in \mathbb{N}^*$ quelconque $\square]$

2. Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

   Soit $\epsilon > 0$, montrons que $\exists N \in \mathbb{N}^*(N = N(\epsilon))$ t.q. $n \geq N \implies |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$

   $$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \iff |\frac{1}{n}| < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

3. La suite (b_n) définie par

   $$b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

   diverge car une infinitée de termes sont dans le voisinage de $(+1)$ ou de (-1) selon que n est pair ou impair

Theorèmes importants (sans demonstration)

1. Une suite qui converge admet une seule limite

2. Toute suite convergente est bornée.

   La reciproque est fausse.
   Contre-exemple: $a_n = (-1)^n$

3. Les règles de calcul:

   Soit (a_n) et (b_n) convergentes,

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

   (a) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

   (b) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

   $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$

   (c) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

   (d) si $b_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, et si $b \neq 0$, alors:
   $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

01/03/2019

4. **Théorème de comparaison**: Soient (a_n) et (b_n) convergantes, $a_n \to a, b_n \to b$

   $$\text{Si } \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0$$
   $$\text{alors } a \leq b$$

5. **Théorème des deux gendarmes**:
   Soient 3 suites (g_n), (d_n) et (a_n) telles que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ avec } g_n \leq a_n \leq d_n, \quad \forall n \geq n_0$$

   Alors si

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} d_n = l$$

   on a que (a_n) est convergente et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

6. Corollaire des 2 gendarmes soit (a_n) tel que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$$
$$\underbrace{-|a_n|}_{\to 0} \leq a_n \leq \underbrace{|a_n|}_{\to 0}$$

$\square$

7. Toute suite monotone est bornée et convergente.
   Plus précisément:
   - Toute suite croissante et majoré converge
   - Toute suite décroissante et minoré converge

3 exemples importants

1. Soient $q \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$, $\quad (a_n)$ la suite définie par $a_n = q^n$

$$a_n = q^n : \begin{cases} \text{diverge si } |q|>1 \\ \text{converge vers 0 si } |q|<1 \end{cases}$$

   Montrons que si $|q| < 1, \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$$|a_n| = |q^n| = |q|^n \text{ or } |q| < 1$$

   donc

$$\exists p > 0 \text{ t.q. } q = \frac{1}{1-p}$$

   Donc

$$|q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \implies \frac{1}{|q|^n} = (1+p)^n$$

$$= 1 + n \cdot p + ... + p^n \geq n \cdot p, \quad \text{donc } |q|^n \leq \frac{1}{n \cdot p}$$

$$|a_n| = |q|^n \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq |a_n| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}}_{\to 0}$$

D'après les 2 gendarmes: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

D'après son corollaire: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\square$

2. La série géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ et a_n définie par

$$a_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$$

Définition par la récurrence

$$a_{n+1} = a_n + q^n, \quad a_1 = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On réécrit le terme a_n

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + q^{n-1} \\ q \cdot a_n &= q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n \\ a_n - q \cdot a_n &= 1 - q^n \\ a_n(1-q) &= 1 - q^n \implies a_n = \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

(a_n) converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$

Exemples:

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ a_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \text{et } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ b_n &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \implies \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Le nombre e
   Soit

$$
\begin{aligned}
e_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \\
e_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
\frac{1}{k!} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3}_{>2} \cdot ... \cdot \underbrace{k}_{>2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

   Donc

$$
\begin{aligned}
e_n &\leq 1 + \frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\leq 1} \\
e_n &\leq 3
\end{aligned}
$$

$$2 \leq e_n \leq 3, \quad \forall n \geq 2$$

   Montrons encore que (e_n) est strictement croissante:

$$e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!}, \qquad \text{donc } e_{n+1} > e_n$$

   (e_n) croissante et majoré: elle converge.
   On note e sa limite.

$$
\begin{aligned}
e_n &= 2.71828 \\
e_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

   Autre caractéristique du nombre e:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1.3 Limite infinie

Définition La suite (a_n) tend vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$ si:

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}^*(N = N(A)) \text{ t.q. } n \geq N \implies f(x) > A$$

On écrit alors

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

On dit que (a_2) diverge vers $+\infty$

De même

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \iff \exists N \in \mathbb{N}^*(N = N(B)) \text{ t.q. } n \geq N \implies a_n > B$$

Exemple Montrons que $(a_n) = (n^2)$ diverge vers $+\infty$.
Soit $A > 0$ donné, montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $a_n > A$ si $n \geq N$.

$$a_n > A \iff n^2 > A \iff n \in]-\infty; \sqrt{A}[\cup]\sqrt{A}; +\infty[$$

Tout $N > \sqrt{A}$ convient car $n \leq N$ (avec $N \geq \sqrt{A}$) $\implies n^2 > A$

Théorème importants

1. Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et si b_n converge ou $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $(a_n + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
2. Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
   - Si $\lambda > 0, (\lambda a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
   - Si $\lambda < 0, (\lambda a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$
3. Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b > 0$ ou si $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $(a_n \cdot b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
4. Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
5. Théorème du gendarme
   Soit $(a_n), (b_n)$ t.q. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ avec $a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0$
   si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
   (de manière analogue pour $a_n \to -\infty$)

Exemples Montrons que si $q > 1$, alors (q^n) diverge vers $+\infty$

$$q > 1 \implies \exists\, p > 0 \text{ t.q. } q = 1 + p$$
$$q^n = (1+p)^n = 1 + n \cdot p + ... + p^n > n \cdot p$$
$$\text{Or } \lim_{n\to\infty} np = p \cdot \lim_{n\to\infty} n = p \cdot +\infty = +\infty (p > 0)$$

Donc (q^n) diverge vers $+\infty$

Cas d'indétermination

- Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$
  On ne peut rien dire à priori de

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$$

- Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

  On ne peut rien dire à priori de

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$$

Chapter 2

Fonctions réelles d'une variable réelle

2.1 Définitions

Définition:

$$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

est une fonction réelle d'une variable réelle si tout $x \in A$ a au plus une image par f dans $\mathbb{R}$, notée $f(x)$
L'ensemble des $x \in A$ ayant une image par f est le domaine de définition de f : D_f
On note Im_f l'ensemble des $f(x) \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Im}_f = \Big\{ y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathrm{D}_f, y = f(x) \Big\}$$

Exemples

1.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \mathrm{D}_f = \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{Im}_f = \mathbb{R}_+$$

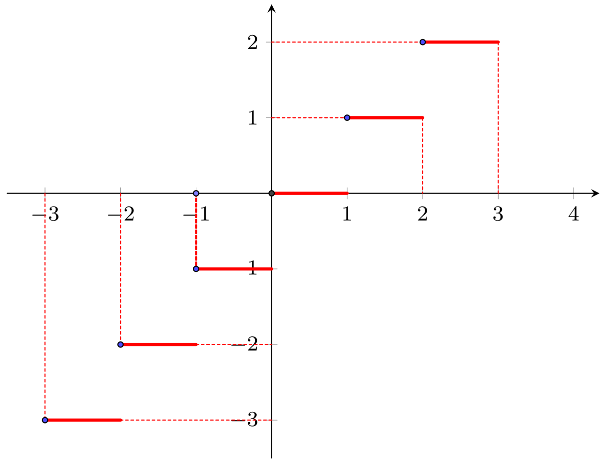
2.

$$\begin{aligned} g :& \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto E(x) \end{aligned}$$

où $E(x)$ est la partie entière de x, c'est le plus grand entier inférieur à x:

Exemples

$$E(3) = 3, \quad E(2.9) = 2, \quad , E(-2.5) = -3$$



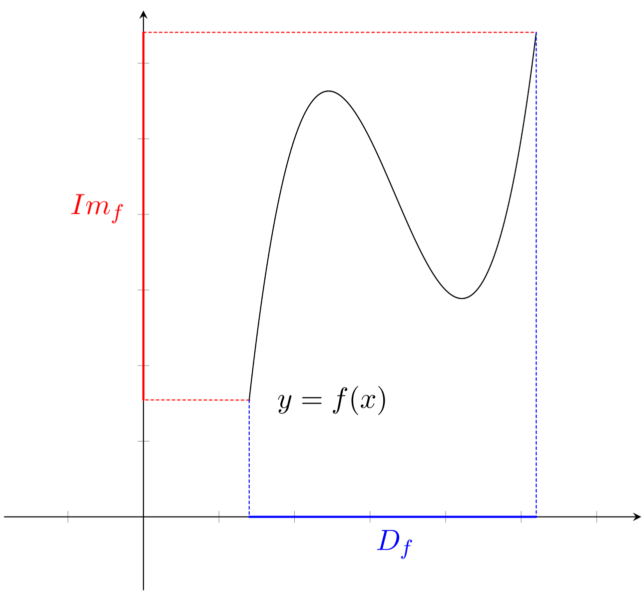
$$\mathrm{D}_g = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}_f = \mathbb{Z}$$

3.

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\mathrm{D}_2 = \mathbb{R} \backslash 1, \quad \mathrm{Im}_h =]0, +\infty[$$

Le graphe de f : G_f



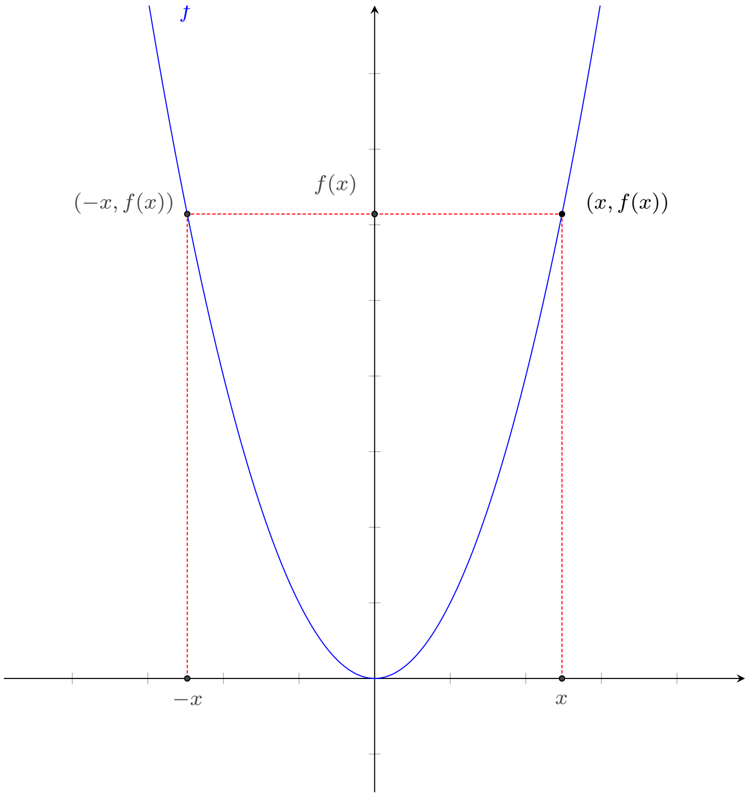
Definitions

1. **Parité** (y symétrique par rapport à O)

   (a) f est paire si

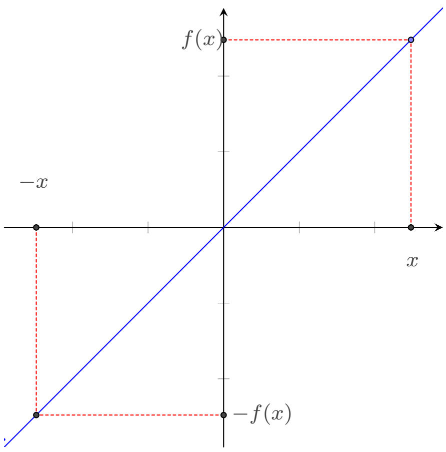
$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathrm{D}_f$$

Le graphe de f est alors symétrique $/O_y$



   (b) f est impaire si

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathrm{D}_f$$



Le graphe de f est alors symétrique $/0$

Exemples

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = |x|, \quad f_3(x) = \cos(x), \qquad \text{sont paires,}$$

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = \sin(x), \quad f_3(x) = \tan(x), \qquad \text{sont impaires.}$$

2. **Périodicité**

   f est périodique en $T \in \mathbb{R}$, si $\forall x \in D_f, \quad f(x+T) = f(x)$

   G_f période de f est le plus petit $T > 0$ tel que

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Exemples

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$\sin$ et $\cos$ sont 2π-périodique.
Donc f est est 2π-périodique.
Or $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$

Donc **la** période de f est $T = \pi$:

$$\begin{aligned} f(x+T) &= \frac{1}{2} \cdot \sin\big(2 \cdot (x+T)\big) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin(2x + \underbrace{2T}_{\text{période de sinus}}) \end{aligned}$$

$$2T = 2\pi \iff T = \pi$$

3. Monotonie

   (a) f est croissante si $\forall x_1, x_2 \in D_f$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

   Strictement croissante si

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

   (b) f est décroissante si $\forall x_1, x_2 \in D_f$:

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

   Strictement croissante si

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

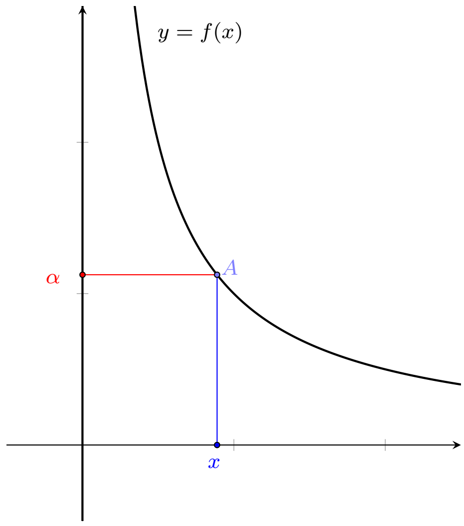
   (c) f est monotone si elle est croissante ou (exclusif) décroissante.

Exemples $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et non-monotone sur $\mathbb{R}$.

Théorème Si f strictement monotone, alors l'équation:

$$f(x) = \alpha, \quad x \in \mathbb{R}$$

admet au plus une solution:



Demonstration dans ce cas:

$$f: \text{ strictement croissante } \implies f(x) = \alpha$$

admet au plus une solution

Demonstration par la contraposée:

Hypothèse: $f(x) = \alpha$ admet plus d'une solution

Conclusion: f non strictement croissant

Preuve: Soient $x_1 \neq x_2 \in D_f$ t.q. $f(x_1) = f(x_2) = \alpha$

Soit x_1 la plus petite, on a:

$$x_1 < x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)$$

f est non strictement croissante.

$\square$

4. Valeur absolue de f, soit:

$$f : D_f \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x)$$

on définit

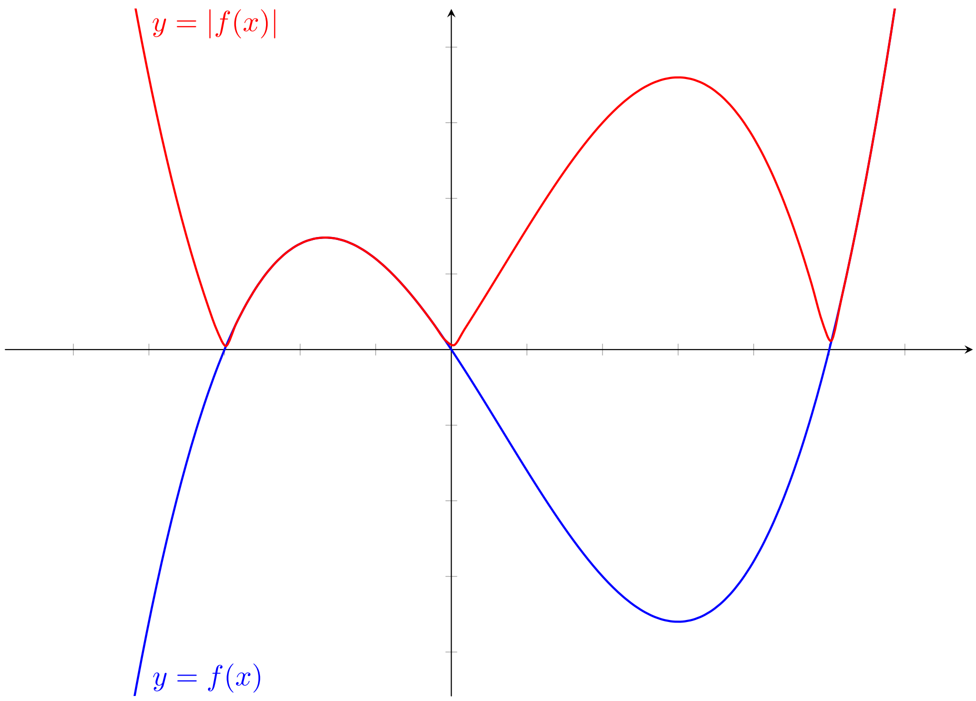
$$
\begin{aligned}
|f| : D_f &\to \mathbb{R}, \\
x &\mapsto |f|(x) = |f(x)|
\end{aligned}
$$

avec

$$
|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}
$$

On déduit le graphe de $|f|$ de celui de f en symétrisant $/0_x$ tous les points d'ordonnée négative.

Exemple $f(x) = x \cdot (x+3) \cdot (x-5)$



5. Compositions de Fonctions

Soient f, g deux fonctions, si $Im_g \subset D_f$ alors on définit

$$
f \circ g
$$

par

$$
f \circ g(x) = f\big(g(x)\big), \quad \forall x \in D_f
$$

Exemple

(a) Soit

$$
g(x) = \sqrt{x^2 - 1}
$$

et

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

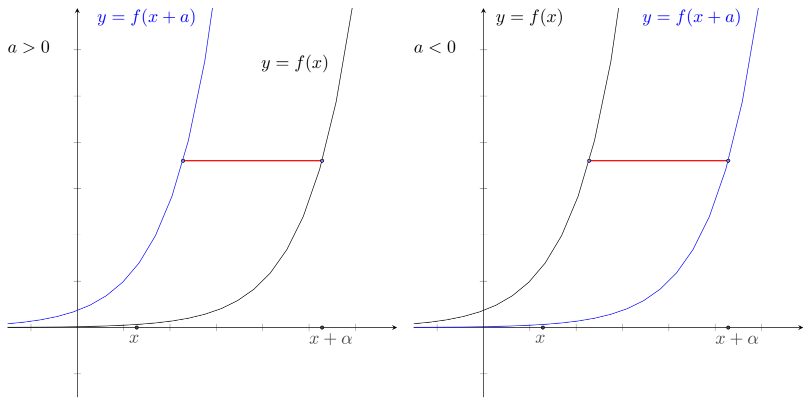
$$f \circ g(x) = f\left(\sqrt{x^2 - 1}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 + 1}$$
$$= \sqrt{x^2} = |x|$$

Mais $D_{f \circ g} =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\neq \mathbb{R}$

(b) $g = x + a$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + a)$$

Comment déduire le graphe de $f(x + a)$ de celui de f?



On déduit le graphe de $f(x + a)$ de celui de $f(x)$ par la translation de $(-a)$-unités parallèlement à $0x$.

6. Fonctions bornées

f est bornée sur D_f si

$$\exists M > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in D_f$$

Exemples

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ n'est pas bornée sur } D_f$$
$$g(x) = \frac{1}{x+1} \text{ et } h(x) = \cos x \text{ sont bornées sur } D_f$$

2.2 Surjection, injection, bijection

1. Surjection

$f : A \to B$ est dite surjective si tout $y \in B$ admet un antécédent par f dans A:

$$\forall y \in B, \exists x \in B \text{ t.q. } y = f(x)$$

En d'autres termes:

$$f \text{ est surjective si et seulement si } Im_f = B$$

Exemples

(a) La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto E(x) \end{aligned}$$

n'est pas surjective.
$y = \frac{1}{2}$ n'as pas d'antécédent
par contre

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z}, \\ x &\mapsto E(x) \end{aligned}$$

est surjective.

(b) La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{x^2}{x+1} \end{aligned}$$

On détermine Im_f

$$Im_f = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

Soit $y = f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
$y \in Im_f$ si x existe.
On cherche donc à résoudre l'équation

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

par rapport à x en considérant y comme un paramètre

$$\begin{aligned} x^2 &= y \cdot (x+1) \\ x^2 - y \cdot x + y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-y)^2 - 4 \cdot y = y \cdot (y-4) \\ \Delta \geq 0 &\iff y \in] -\infty; 0] \cup [4; +\infty[\end{aligned}$$

Donc $Im_f =] -\infty; 0] \cup [4; +\infty[$

2. Injection

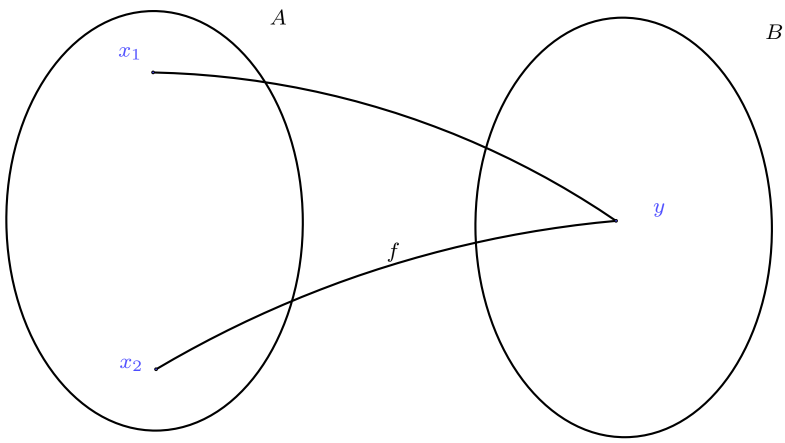
Définition: La fonction

$$f : A \to B \text{ est dite injective}$$

si

$$\forall x_1, x_2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Contre-exemple:

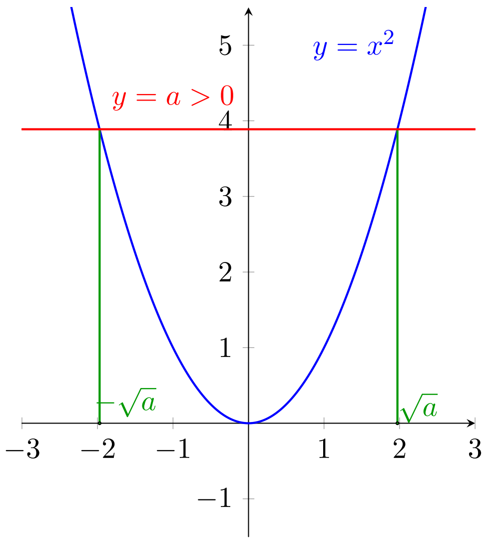


Énoncé contraposée en f injective si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Exemples:

(a) $f(x) = x^2$



$f(x) = x^2$ est injective sur $\mathbb{R}_+$ ou sur $\mathbb{R}_-$ mais non injective sur $\mathbb{R}$

(b) Repère de l'exemple sur la surjection

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad x \neq -1$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+1}=\frac{b^2}{b+1} &\iff a^2\cdot(b+1)=b^2\cdot(a+1)\\ &\iff a^2b+a^2-b^2a-b^2=0\\ &\iff ab\cdot(a-b)+(a+b)\cdot(a-b)=0\\ &\iff (a-b)\cdot[a\cdot b+(a+b)]=0\end{aligned}$$

$a\cdot b+a+b=0$ est un "générateur de contre-exemples".
En effet tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant cette relation est un contre-exemple à l'injectivité de f.

$$a=3,\qquad b=-\frac{3}{4}$$

Sont tels que $a\neq b$ et $f(a)=f(b)$.
f est non injective.

(c) Bijection et fonction réciproque

Définition: f est bijective si elle est injective **et** surjective
En d'autres termes $f:A\to B$ est bijective si tout $y\in B$ admet un unique antécédent.

Définition: $f:A\to B$ bijective si il existe une unique fonction, notée f^{-1}, appelée fonction réciproque de f
Vérifiant:

$$f^{-1}\circ f=id_A \qquad \text{et} \qquad f\circ f^{-1}=id_B$$

$$\begin{aligned}f^{-1}:B&\to A\\ x&\mapsto y=f^{-1}(x)\end{aligned}$$

avec

$$x=f(y)$$

Exemple:

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}&\to\\ x&\mapsto y=x-x^2\end{aligned}$$

Restreindre les ensembles de départ et d'arrivée de sorte que f devienne bijective.
Puis déterminer f^{-1}

- Surjection
  On cherche

$$Im_f=\{y\in\mathbb{R}\mid \exists x\in\mathbb{R}, y=f(x)\}$$

$$\begin{aligned}&y=x-x^2 \iff x^2-x+y=0\\ &\Delta=(-1)^2-4\cdot y=1-4y\\ &\Delta\geq 0 \iff y\leq\frac{1}{4}\\ &Im_f=]-\infty;\frac{1}{4}]\end{aligned}$$

- Injection Soit $a, b \in \mathbb{R},$ t.q. $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned} & a - a^2 = b - b^2 \\ \iff & a^2 - b^2 - a + b = 0 \\ \iff & (a-b)(a+b) - (a-b) = 0 \\ \iff & (a-b) \cdot [(a+b) - 1] = 0 \end{aligned}$$

Comment restreindre l'ensemble de départ et d'arrivée pour rendre f injective, sans modifier Im_f?
Il faut rendre le générateur de contre-exemple "inopérant".

$$a + b = 1 \implies a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - b$$

$$A = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \text{ ou } A = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

Alors

$$f : \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\to \left]-\infty; \frac{1}{4}\right]$$

est bijective.

Pour déterminer f^{-1} , ou résoudre

$$y = f(x)$$

par rapport à x en prenant y comme paramètre

$$y = x - x^2 \iff x^2 - x + y = 0$$

$$\begin{aligned} & \Delta = 1 - 4y \\ & x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y}}{2}, \qquad \left(y \in \left]-\infty; \frac{1}{4}\right]\right) \end{aligned}$$

Or

$$x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

donc

$$x = \frac{1 + \sqrt{1-4y}}{2}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} : \left]-\infty; \frac{1}{4}\right] &\to \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ x &\mapsto \frac{1+\sqrt{1-4y}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} id_A : A &\to A, \\ x &\mapsto A \\ id_B : B &\to B, \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

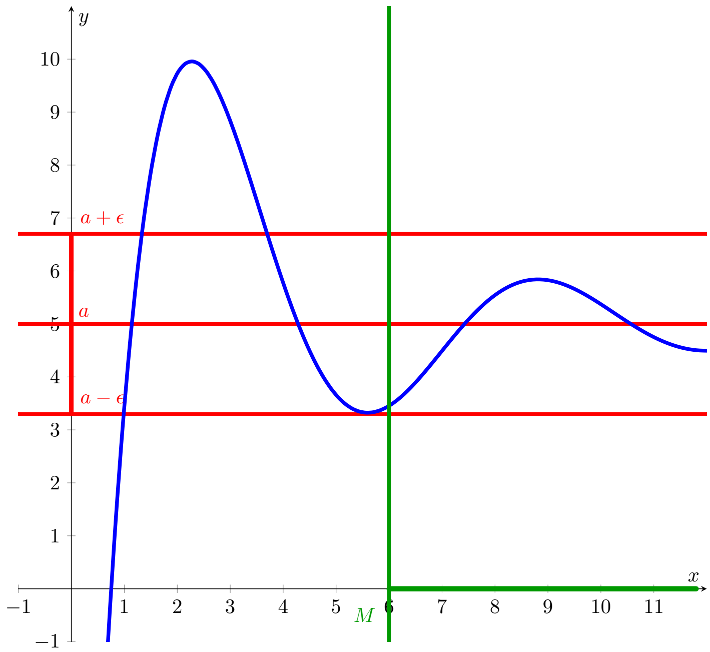
2.3 Limite d'une fonction

2.3.1 Limite à infini

Définitions:

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a, (a \in \mathbb{R})$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}(M = M(\epsilon)) \text{ t.q. } x \geq M(x \in D_{\text{déf}}) \implies |f(x) - a| < \epsilon$$



2. $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}(N = N(\epsilon)) \text{ t.q. } x < N(x \in D_{\text{déf}}) \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

Exemple: Montrons que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Soit $\epsilon > 0$ donné
Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} x < N &\implies |\frac{1}{x^2} - 0| < \epsilon \\ &\iff |\frac{1}{x^2}| < \epsilon \\ &\iff \frac{1}{x^2} < \epsilon \\ &\iff |x| > \frac{1}{\epsilon} \\ &\iff x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}; +\infty\right[\end{aligned}$$

Donc tout $N \leq -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ convient, car

$$x < N(\text{ avec } N \leq -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) \implies |\frac{1}{x^2} - 0| < \epsilon$$

$\square$

Théorème de caractérisation par les suites: f admet une limite $x \to \infty$ et

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

si et seulement si pour toute la suite x_n qui diverge vers ∞, on a

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = a$$

Exemple: Montrons que $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

- Soit $x_n = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{N}^*$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$
et
$$\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n \cdot \pi) = 0$$
- Soit $y_n = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$
et
$$\lim_{n\to\infty} \sin(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n \cdot \frac{\pi}{2}) = 1$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

Définitions: Limites impropre

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si
$$\forall A > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > M \implies f(x) > A$$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si
$$\forall B < 0, \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > M \implies f(x) < B$$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si
$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x < N \implies f(x) > A$$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si
$$\forall B < 0, \quad \exists N \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x < N \implies f(x) < B$$

Exemple:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

Soit $A > 0, \quad \exists ?N \in \mathbb{R}$ t.q. $x < N \implies$

$$\implies x^2 > A \iff |x| = \sqrt{A}$$
$$\implies x \in \left]-\infty; -\sqrt{A}\right] \cup \left]\sqrt{A}; +\infty\right[$$

Donc tout $x < N$ convient.

□

Opération sur les limites

1. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = b$ alors

$$\lim_{x\to\infty} |f(x)| = |a|, \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b, \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{a}{b}, \quad (\text{ si } b \neq 0)$$

2. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ alors

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$$

3. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ alors

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$$

Cas d'indétermination Si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} i(x) = +\infty, \lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$$

alors on ne peut rien dire à priori des limites suivante

$$\lim_{x\to\infty} (h(x) - i(x)) = \text{"}\infty - \infty\text{"}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{h(x)}{i(x)}\right) = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Quelque théorème importants

1. **Théorème des 2 gendarmes**

   Soient $d(x), g(x)$ toutes les fonctions telles que

   $$\exists M > 0 \text{ avec } g(x) \leq x \leq d(x), \quad \forall x > M$$

   Alors si

   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} d(x) = a$$

   on a

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

   Énoncé analogue pour $x \to -\infty$

   Corollaire des 2 gendarmes

   $$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

   $$[\underbrace{|f(x)|}_{\to 0} \leq f(x) \leq \underbrace{|f(x)|}_{\to 0} \quad \square]$$

2. **Théorème du gendarme**(ou du chien méchant) Soient $f(x), g(x)$ toutes les fonctions telles que

   $$\exists M > 0 \text{ avec } f(x) \geq g(x), \quad \forall x > M$$

   Alors si

   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

   on a

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

   Énoncé analogue pour $x \to -\infty, y \to -\infty$

3. **Théorème "**$0 \cdot$ borné**"**

   Soient f, g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\exists M > 0$ avec $g(x)$ est borné sur $[M; +\infty[$

   Alors

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$$

   [Par hypothèse

   $$\exists A > 0 \text{ t.q. } |g(x)| \leq A, \quad x > M$$

   $$0 \leq |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\to 0} \cdot A$$

   Donc d'après les deux gendarmes: $|f(x) \cdot g(x)| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ d'après son corolaire: $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$]

   Énoncé analogue pour $x \to -\infty$

Exemple: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad x \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\text{borné}} = 0$$

Or f est paire, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

4. **Théorème "**$\infty \cdot$ signe constant **"**

   - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) \geq m > 0$ sur un voisinage de $+\infty$.
     Alors
     $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$$
   - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) \leq m < 0$ sur un voisinage de $+\infty$.
     Alors
     $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

   Énoncé analogue pour $x \to -\infty, y \to -\infty$

5. **Théorème "**$\infty +$ **borné"** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x)$ est borné sur un voisinage de $+\infty$. Alors
   $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

   Énoncé analogue pour $x \to -\infty, y \to -\infty$

Exemples:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + \sin(x)) = -\infty$

2. $f(x) = \frac{x \cdot \sin(x)}{(\cos(x)-2)\cdot(x+\sqrt{x^4+x^2})}, \quad x \to -\infty$

$$\frac{x \cdot \sin(x)}{(\cos(x) - 2) \cdot (x + \underbrace{|x|}_{=-x} \cdot \sqrt{x^2+1})}, \quad x < 0$$

$$\frac{\overbrace{\sin(x)}^{\text{borné}}}{\underbrace{(\cos(x) - 2)}_{\leq -1 < 0} \cdot \underbrace{(-1 \cdot \sqrt{x^2+1})}_{\to -\infty}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \qquad (\text{"}0 \cdot \text{ borné"})$$

2.3.2 Valeurs limite en x_0

Définition: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage pointé de x_0, tout voisinage de x_0, privé de x_0

Exemple: L'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} | 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

est appelé δ-voisinage pointé de x_0.
En effet: $0 < |x - x_0| < \delta$

$$\iff x \in]x_0 - \delta; x_0[\cup]x_0; x_0 + \delta[$$

Définition: Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage pointé de x_0.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \neq x_0)}} f(x) = a, \text{ si } \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ (\delta = \delta(\epsilon))$$

tels que

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ si et seulement si tout ϵ-voisinage de a contient l'image par f d'un ϵ-voisinage pointé de x_0

1. **Théorème de caractérisation par les suites**
   $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ si et seulement si pour toutes suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers x_0 : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0, \quad (x_n \neq x_0)$
   On a

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrons que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas

- Soit $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$x_n \to 1$$

  et

$$f(x_n) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

- Soit $y_n = 1 + \frac{1}{n} (y_n > 1)$

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 1$$

  mais

$$\begin{aligned} f(y_n) &= y_n^2 + 1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = 2$$

Donc $\lim\limits_{f(x)}$ n'existe pas

Définitions: Limite à gauche et à droite de x_0

- $\lim_{n \to x_0^-} f(x) = a$ Si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\epsilon)) \text{ t.q. } x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

- $\lim_{n \to x_0^+} f(x) = a$ Si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\epsilon)) \text{ t.q. } x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

Reprise de l'exemple précédent:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 2$$

Théorème $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Définition: Limites infinies en x_0

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(A)) \text{ t.q. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(A)) \text{ t.q. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < B$$

Exemple: Montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Soit $A > 0$ donné, montrons que

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 < |x - 0| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > A$$

$$\frac{1}{x^2} > A \iff x^2 < \frac{1}{A} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{A}} \iff |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Donc tout $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$ convient, car

$$0 < |x - 0| < \delta, (\text{ avec } \delta \leq \frac{1}{\sqrt{A}}) \implies \frac{1}{x^2} > A$$

Définitions: Limites infinies à gauche et à droite en x_0

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > A$$
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) > A$$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ si
$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) < B$$
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si
$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) < B$$

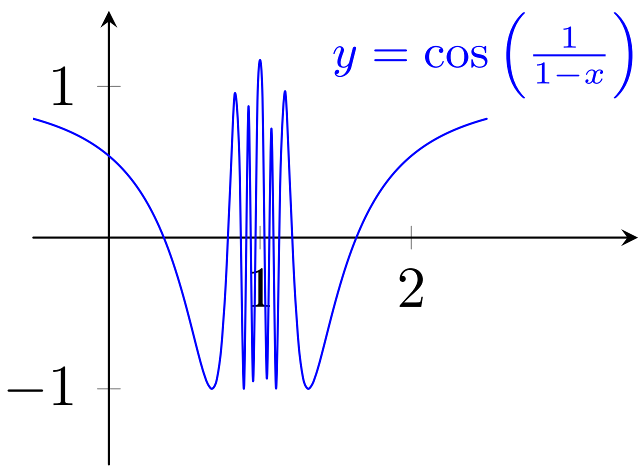
Exemple: Montrons que $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Soit $B > 0$ donné, montrons que
$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 - \delta < x < 0 \implies \frac{1}{x} < B \implies \frac{1}{x} < B \iff x > \frac{1}{B}, \quad (x, B < 0)$$
Donc tout $\delta > 0$ vérifiant
$$\frac{1}{B} < -\delta < 0$$
convient ($\delta < -\frac{1}{B}$) car
$$0 - \delta < x < 0 \quad (\text{avec } -\delta > \frac{1}{B}) \implies \frac{1}{x} > B$$

$\square$

Remarque: Tout les théorèmes et règles de calcul concernant les limites lorsque $x \to \pm\infty$ restent valables lorsque $x \to x_0$

Exemple:
$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{2 - x}}{\sqrt[3]{1 - x^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1 - x}\right)$$



$$\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{1-x^2}} = 0$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{1-x^2}} : \text{ FI } \quad „\frac{0}{0}“$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-(2-x)}{\sqrt[3]{(1-x^2)}\cdot(x+\sqrt{2-x})} =$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+2)}{\sqrt[3]{(1-x)\cdot(1+x)}\cdot(x+\sqrt{2-x})} =$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot(x+2)}{\sqrt[3]{-1-x}\cdot(x+\sqrt{2-x})} = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}_{\text{borné}} = 0$$

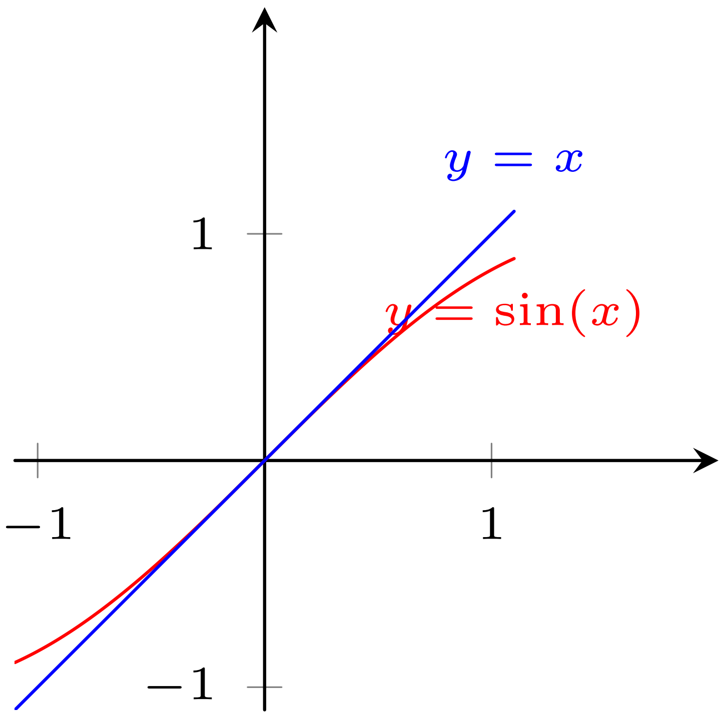
2.3.3 Infiniment petits équivalents (IPE)

Définition: Soient f et g 2 fonctions définies sur un voisinage pointé de x_0.
f et g sont des IPE $(x \to x_0)$ si et seulement si

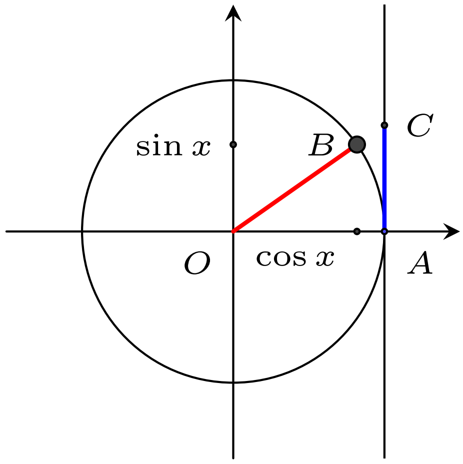
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad$ (IP)
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad$ (E)

On écrit alors $f \sim g \quad (x \to x_0)$
Montrons que

$$\sin(x) \sim x \quad x \to 0$$



Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$



$$\begin{aligned}
& \dim(\Delta AOB) < \dim(O\hat{A}B) < \dim(\Delta OAC) \\
\iff & \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin(x) < \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(x) \\
\iff & \sin(x) < x < \tan(x) \\
\iff & 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \\
\iff & \underbrace{\cos(x)}_{\to 1} < \frac{\sin(x)}{x} < 1
\end{aligned}$$

Théorème des 2 gendarmes:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Or $\frac{\sin(x)}{x}$ est paire donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

De plus

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$$

donc

$$\sin(x) \sim x \quad (x \to 0)$$

Propriété: Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0, alors

$$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$$

⚠ Attention: En général

$$f_1 \sim g_1 \text{ et } f_2 \sim g_2 \;\;\not\Longrightarrow\;\; f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$$

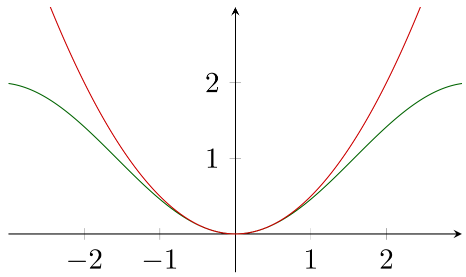
Contre-exemple:

$$x \sim (x + x^2) \text{ et } x \sim (-x + x^2) \quad (x \to 0)$$

Or
$$\frac{x-x}{(x+x^2)+(-x+x^2)}=\frac{0}{2x^2}\ !$$
D'où la règles d'utilisation des IPE.

Dans un calcul de limit on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une **expression factorisée** et **jamais** dans une somme.

Exemples:

1. $\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))=0$ et
$$1-\cos(x)=2\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\sim 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}$$
donc
$$1-\cos(x)\sim\frac{x^2}{2},\quad (x\to 0)$$


2. $\lim_{x\to 0}\tan(x)=0$ et
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$$
et
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1}=1$$
Donc
$$\tan(x)\sim x\quad (x\to 0)$$

Exemple servant d'avertissement:
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)-\sin(2x)}{x^3}$$

$$\begin{aligned}\text{Lorsque } x\to 0 \quad & 2\cdot\sin(x)\sim 2x\\ \text{et}\quad & \sin(2x)\sim 2x\end{aligned}$$

Mais
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)-\sin(2x)}{x^3}\neq\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2x-2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)-\sin(2x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)\cdot(1-\cos(x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=1$$

2.4 Continuité

Définition: Soit f définie sur un voisinage de x_0. f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cette définition comporte 3 exigences:

1. $f(x_0)$ existe ($x_0 \in \mathbb{D}_{\text{déf}}$)
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe (vaut $a \in \mathbb{R}$)
3. $a = f(x_0)$

Définition analytique f est continue en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } (x - x_0) < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Définition: f est continue sur un ensemble $I =]\, a, b\, [$ si f est continue en tout $x_0 \in I$ et on écrit $f \in C_I^0$ (la O^e dérivé de f continue sur l'intervalle I)

Exemples:

1. Montrons que $\sin(x) \in C_{\mathbb{R}}^0$
   Soit $\epsilon > 0$ donné

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = |2 \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)| \leq$$
$$\leq |2 \cdot \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)| \leq |2 \cdot \frac{x - x_0}{2}| = |x - x_0|$$

   Donc tout $\delta \leq \epsilon$ convient car

$$|x - x_0| < \delta \quad (\text{avec } \delta \leq \epsilon) \implies |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$$

$\square$

   Corollaire $\cos(x) \in C_{\mathbb{R}}^0$ car $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

2. Montrer que $\sqrt{x}$ est contenue sur $\mathbb{R}_+^*$
   Montrons que $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = |\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}| \leq |\frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

   Or

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon \iff |x - x_0| < \epsilon\sqrt{x_0}$$

   Donc tout

$$\delta \leq \epsilon \cdot \sqrt{x_0}$$

   convient car

$$|x - x_0| < \delta \quad (\delta \leq \epsilon \cdot \sqrt{x_0}) \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$$

Propriétés: Soit f , g continues en x_0 alors

- $|f|$ est continue en x_0
- $f \pm g$ sont continue en x_0
- $f \cdot g$ est continue en x_0
- si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Ces propriété sont la conséquence des propriétés sur la limite en x_0

Théorème: Soit f et g deux fonctions. f définie sur un voisinage pointé de x_0. Si $\lim\limits_{x \to x_0} =$ a et si g est continue en a, alors

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(a)$$

Corollaire: Soient f continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue sur en x_0
[

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) &= \lim_{x \to x_0} g(f(x)) \\
&= g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \text{ car } g \text{ est continue} \\
&= g(f(x_0)) \text{ car } f \text{ est continue} \\
&= g \circ f(x_0)
\end{aligned}$$

$\square$

]

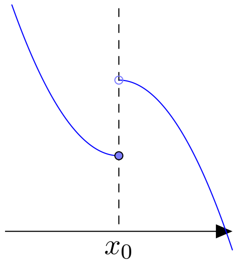
Exemples:

1. - $f(x) =$ cste est $C^0_{\mathbb{R}}$ [$\delta > 0$ qcq $\square$]
   - $f(x) = x$ est $C^0_{\mathbb{R}}$ [$\delta \leq \epsilon \square$]
   - Donc toutes fonctions polynomiales sont $C^0_{\mathbb{R}}$
   - Et toutes les fonctions naturelles sont C^0 sur leur $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
2. Les fonctions $\tan(x)$ et $\cot(x)$ sont C^0 sur leur $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
3. $f(x) = \sin^2(\sqrt{x^2+1})$ est $C^0_{\mathbb{R}}$ comme composé de fonctions

Définitions: Continuité gauche, droite

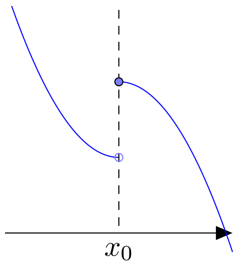
- f est continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$



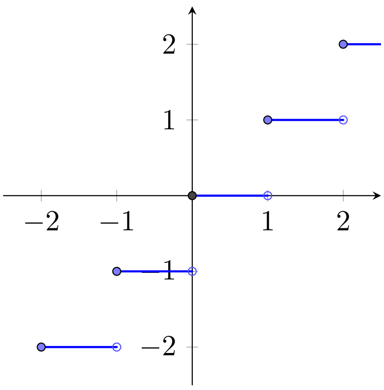
- f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$



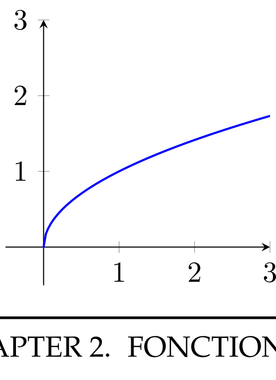
Exemples:

1. $f(x) = E(x), \quad x_0 \in \mathbb{Z}$



f continue à droite en x_0 et discontinue à gauche en x_0

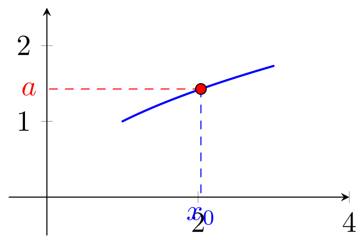
2. $g(x) = \sqrt{x}$



g est continue à droite en $x_0 = 0$

Définitions:

- On dit que f est continue sur $[\,a;b\,]$ si elle continue sur $]a;b[$, continue à droite en $x = a$ et à gauche en $x = b$
- Soit f définie sur voisinage pointé de x_0 avec $x_0 \notin \mathbb{D}_f$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe (vaut } a \in \mathbb{R})$$



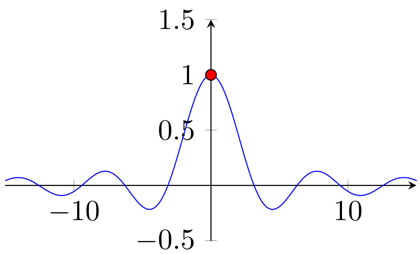
On peut alors définie $\tilde{f}(x)$ continue en x_0 en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ a & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ est appelé la **prolongée par continuité** de f en x_0.

Exemple:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad x_0 = 0$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{est } C^0_{\mathbb{R}}$$

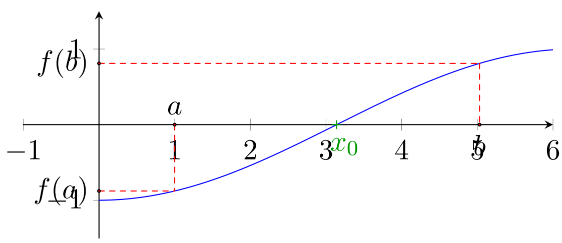
Théorème de la valeur intermédiare Soit f continue sur $[\,a;b\,]$, si

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

alors

$$\exists x_0 \in [\,a;b\,] \text{ t.q. } f(x_0) = 0$$

Illustration du cas $f(a) < 0, f(b) > 0$



Démonstration: algorithm de la bisection.
On coupe l'intervalle $[\,a;b\,]$ en $x = \frac{a+b}{2}$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \quad x_0 = \frac{a+b}{2}$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, alors on pose

$$I_1 = [\, a_1 ; b_1 \,] \text{ avec } a_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } b_1 = b$$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, alors on pose

$$I_1 = [\, a_1 ; b_1 \,] \text{ avec } b_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } a_1 = a$$

On réitère le découpage sur l'intervalle $I_1 = [\, a_1 ; b_1 \,]$ et ainsi de suite :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ et alors $\frac{a_n+b_n}{2}$
- Soit on obtient (a_n) et $(b_n), n \in \mathbb{N}^*$, 2 suites telles que
  - $f(a_n) < 0 < f(b_n)$
  - $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
  - $a \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_1 \leq b$

(a_n) est croissante et majorée

(b_n) est décroissante et minorée

Donc ces suites sont convergentes

Or

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a-b}{2^n}\right) = 0$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} (b_n) \text{ (car les deux limites existent)}$$

Posons

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} (b_n)$$

Or f est continue sur $[\, a ; b \,]$ alors

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0)$$

Mais

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Donc

$$f(a_n) = f(b_n) = 0$$

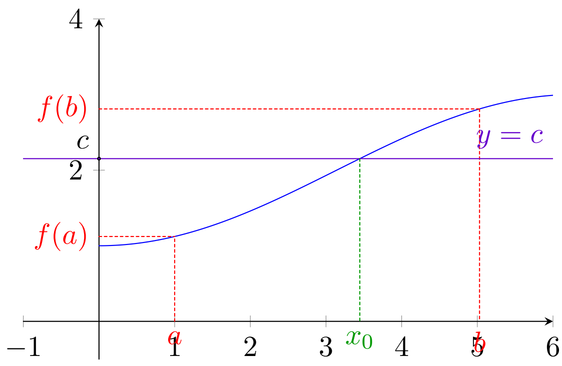
D'où

$$f(x_0) = 0$$

□

Corollaire: Soit f continue sur $[\,a;b\,]$
Si c est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors

$$\exists x_0 \in [\,a;b\,] \text{ t.q. } f(x_0) = c$$



Théorème: Soit f continue sur $[\,a;b\,]$

- Si f est strictement croissante sur $[\,a;b\,]$ alors f est bijective de $[\,a;b\,]$ sur $[\,f(a);f(b)\,]$
- Si f est strictement décroissante sur $[\,a;b\,]$ alors f est bijective de $[\,a;b\,]$ sur $[\,f(b);f(a)\,]$

Démonstration: Soit f strictement croissante.
Le théorème de la valeur intermédiaire nous donne l'existence d'un antécédent pour out $y \in [\,f(a);f(b)\,]$ et cet antécédent est **unique** car f est strictement monotone.

□

Chapter 3

Calcul différentiel

3.1 Dérivée d'une fonction

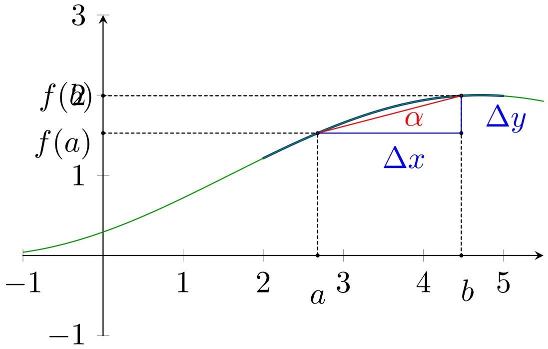
3.1.1 Définitions

Soit f définie sur un voisinage de x_0, posons $y = f(x)$. Une information **locale** sur le comportement de f sur un voisinage de x_0 est donné par le quotien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

appelé le rapport de Newton de f en x_0.

- Δx est l'accroissement de la variable indépendante x.
- Δy est l'accroissement correspondant liée à Δx.



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(x)$ est la pente sécente passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$

En gardant x_0 fixe, on fait tendre $\Delta x \to 0$
Alors

$$x_0 + \Delta x \to x_0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$$

si f est continue en x_0, alors

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

est une FI de type "$\frac{0}{0}$"
Trois cas peuvent se présenter

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'existe pas

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$

Exemple:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}, \quad x_0 = 0$$

3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \quad (a \in \mathbb{R})$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = 4$$

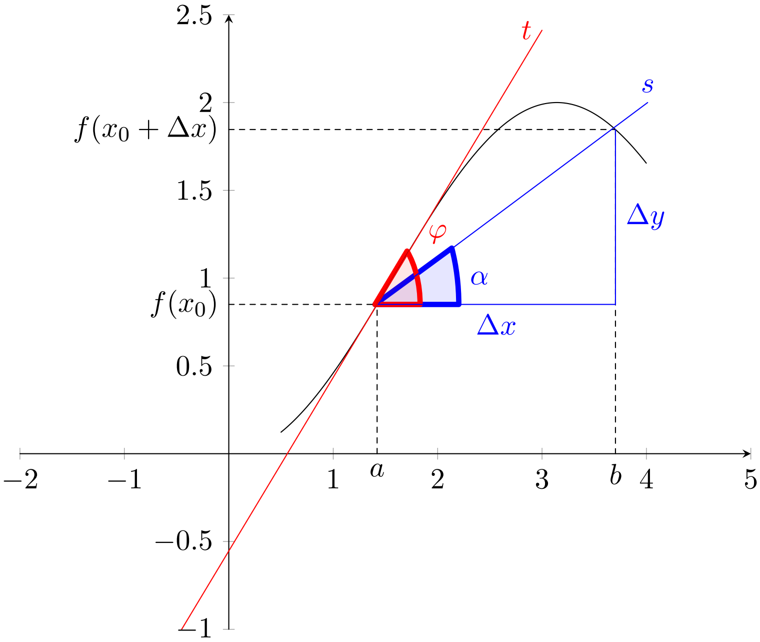
Définition: Soit f définie sur un voisinage de x_0. On dit que f est dérivable en x_0. Si

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existe et on note $f'(x_0)$ cette limite.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

est appelé **nombre dérivé** de f en x_0



La sécant s tends vers la "droite-limite" t.

$$\alpha \xrightarrow[\Delta \to 0]{} \varphi$$

Cette "droite-limite" est appelée la tangente à

$$y = f(x_0) \text{ en } x_0$$

La pente m de la tangente vaut

$$m = \tan(\varphi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Donc l'équivalente de t s'écrit

Tangente de $y = f(x)$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Théorème: Soit f définie sur un voisinage de x_0. Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0$$

Démonstration f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$
$$\implies \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)}_{:= r(\Delta x)} = 0$$

Donc

$$\lim_{\Delta x \to 0} r(\Delta x) = 0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$

Et lorsque $\Delta x \to 0$, on a

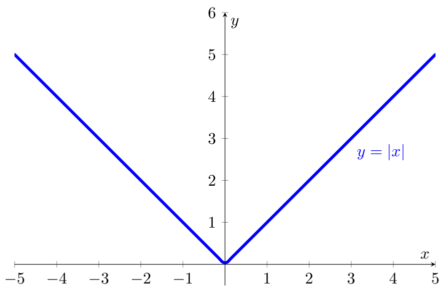
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot f'(x_0)}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \overbrace{r(\Delta x)}^{\to 0}}_{\to 0}$$

f est donc continue en x_0

□

⚠ La réciproque est fausse ⚠

Contre-exemple



$$f(x) = |x|, \quad x_0 = 0, \qquad \lim_{x \to 0} |x| = 0, \quad |x|\Big|_{x=0} = 0$$

donc $|x|$ est continue en $x = 0$

Mais

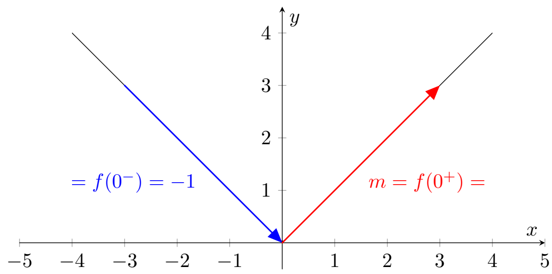
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

n'existe pas donc $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x \to 0$.

Définitions:

- On dit que f est dérivable à gauche en x_0, si
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe, on note ce nombre $f'(x_0^-)$ et il représente la pente de la demi-tangente à gauche en x_0.
- de même f est dérivable à droite en x_0, si
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe, $f'(x_0^+)$ et il représente la pente de la demi-tangente à droite en x_0.

Exemple:



$$f(0^-) = -1$$
$$f(0^+) = +1$$

Définitions: Si $I \subset \mathbb{D}_f$

- Si f est dérivable en tout $x_0 \in I$, on définit:
$$f' : I \to \mathbb{R},$$
$$x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
appelé la fonction dérivée de f sur I.
- Si f est dérivable sur I, et si f' est continue sur I, alors on dit que f est continument dérivable sur I et on note $f \in C^1$

3.1.2 Règles de dérivation

(C.f. exercice facultatif série 8)
Soient f et g dérivable sur $I \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. Si $g(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$
$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
En particulier
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Théorème: Dérivée de la composée
Soit f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

Dérivée de la composée

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Démonstration

- Rappel:
$$r(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$
$$\implies f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$
avec
$$r(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

- Dérivée $g \circ f(x)$
$$\begin{aligned} & g \circ f(x+h) = g(f(x+h)) \\ =& g(f(x) + \underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta}) \\ =& g(f(x)) + g'(f(x)) \cdot (\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta}) + r(\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta}) \cdot (\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta}) \end{aligned}$$
Donc
$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + r(f(x+h) - f(x)) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
Et
$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x) + r(\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{\to 0} \cdot f'(x_0))$$
D'où
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

3.1.3 Dérivées de quelque fonctions

1. $f(x) = c$,
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$
2. $f(x) = x$,
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$
3. $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ à démontrer par récurrence
   - Vérification pour $n = 1$:
$$(x)' = 1 \text{ et } n \cdot x^{n-1}\Big|_{n=1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

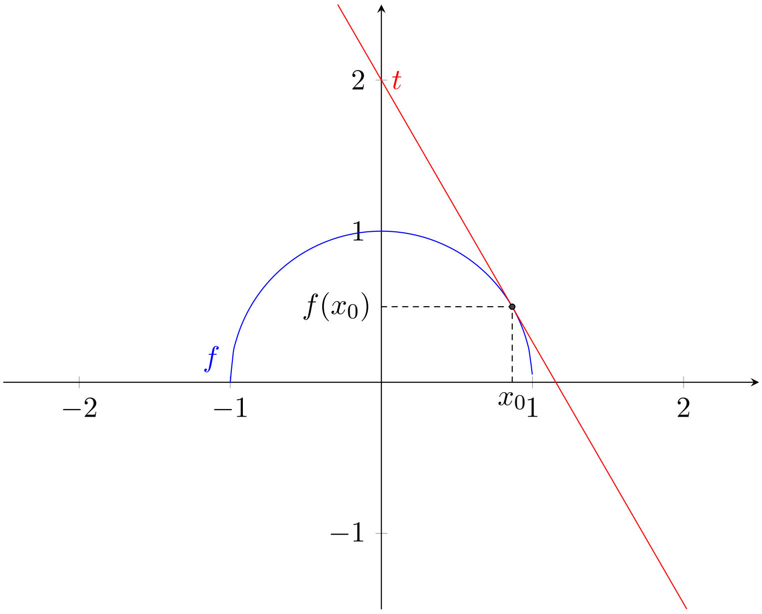
- Démonstration du pas de récurrence:
  Hypothèse: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ pour un $x \in \mathbb{N}^*$ donné
  Conclusion: $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$
  Preuve:
$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (x^n)' \\ &= x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n\end{aligned}$$

4. $f(x) = x^{-m}, \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad x \neq 0$
$$\begin{aligned}f'(x) = \left(\frac{1}{x^m}\right)' &= -\frac{m \cdot x^{m-1}}{(x^m)^2} \\ &= -m \cdot x^{m-1-2m} = -m \cdot x^{-m-1}\end{aligned}$$
Donc $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad \forall \in \mathbb{Z}$

5. $f(x) = x^{\frac{p}{q}}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}^*, \quad x > 0$
$$y = x^{\frac{p}{q}} \iff y^q = x^p$$
En dérivant les deux termes par rapport à x, on a
$$q \cdot y^{q-1} \cdot y' = p \cdot x^{p-1}$$
$$\begin{aligned}y' &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot y}{y^{q-1} \cdot y} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$
Donc
$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad x > 0$$
En particulier
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

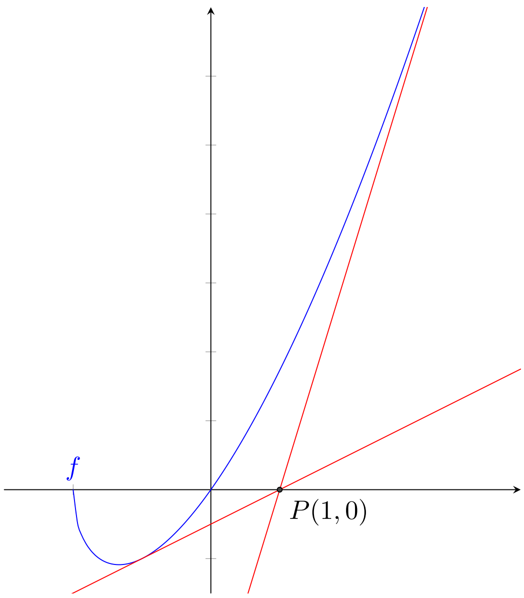
Exemples:

1. Soit f une fonction
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [\,-1; 1\,]$$
L'équation de t tangente à $y = f(x)$ en $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$
   - $f(x_0) = \frac{1}{2}$
   - $f'(x) = \frac{(-x^2)'}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1$
$$f'(x_0) = f'(x)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$
$$t : y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



2. $f(x) = x \cdot \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$

   Tangente au graphe de f issues du point $P(1,0)$



$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$P \in t \implies y_p - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_p - x_p)$$

$$\implies 0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0)$$

avec $f(x_0) = x_0 \cdot \sqrt{2 + x_0}$,

$$f'(x) = \sqrt{2+x} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2+x}} =$$

$$= \frac{2 \cdot (2+x) + x}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \frac{3x+4}{2 \cdot \sqrt{2+x}}, \quad x \geq -2$$

Donc

$$-x_0 \cdot \sqrt{2+x_0} = \frac{3x_0+4}{2 \cdot \sqrt{2+x_0}} \cdot (1 - x_0)$$

$$\iff -2x_0(2+x_0) = 3x_0 + 4 - 3x_0^2 - 4x_0$$

$$\iff x_0^2 - 3x_0 - 4 - 0 \iff (x_0 - 4) \cdot (x_0 + 1) = 0$$

$$x_0 = -1 : \qquad t : y + 1 = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$x_0 = 4 : \qquad t : 8x - \sqrt{6}y - 8 = 0$$