EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2A

PREPA-032(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sacha FRIEDLY

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

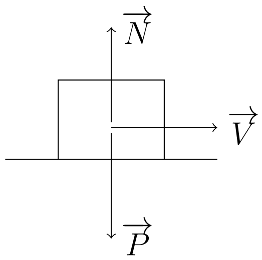
Chapter 1

Vecteurs & opération

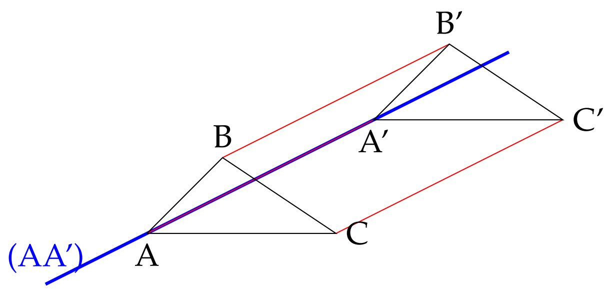
25/02/2019

Motivations:

1. Forces:



2. Déplacements:



Segements: $AA' \neq BB' \neq CC'$
Droites: $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$
Vecteurs: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$

Dans le plan ou l'espace, un vecteur est définie par:

1. une **direction**: "une" droite qui porte le vecteur
2. une **longueur/norme**
3. un **sens**

Bonne façon de penser: des flèches.
(Si on se fixe une origine: Ensemble des vecteurs $\implies$ Espace vectoriels)

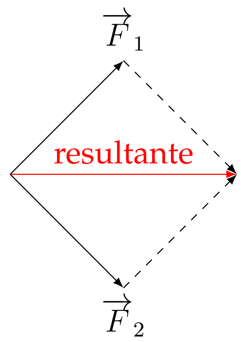
Conventions:

On notera les vecteurs : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ..., \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
La norme de $\vec{a}$: $\|\vec{a}\| \geq 0$ (avec choix d'**unité**!)
Le vecteur nul: $\vec{0}$ $\quad \|\vec{0}\| = 0$

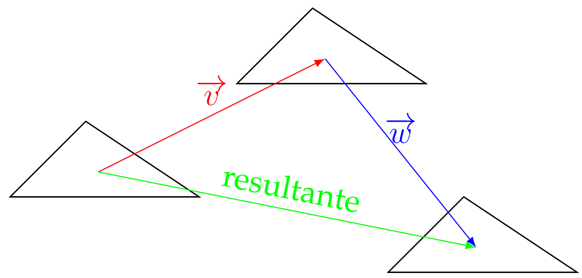
1.1 Addition vectorielle

Motivation:

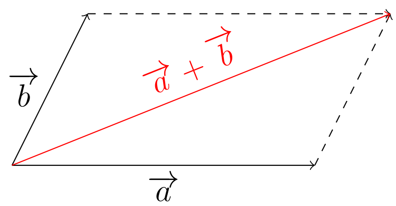
1. En physique:



2. Déplacements:



L'**addition** de deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ est définie par la règle du parallelogramme.

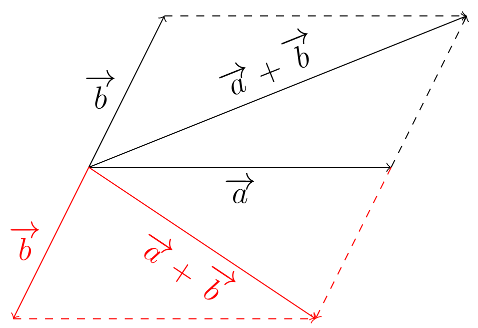


Propriétés

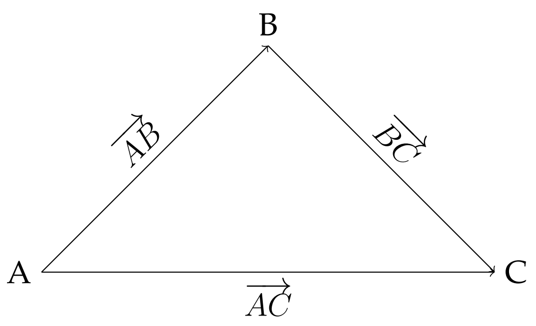
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\forall \vec{a}, \exists! \vec{a}'$ t.q. $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$
  On notera $\vec{a}' = -\vec{a}$ (appelé **opposé** de $\vec{a}$)

On peut définir une **soustraction**:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} := \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$$



Une formulation de la règle du parallelogramme

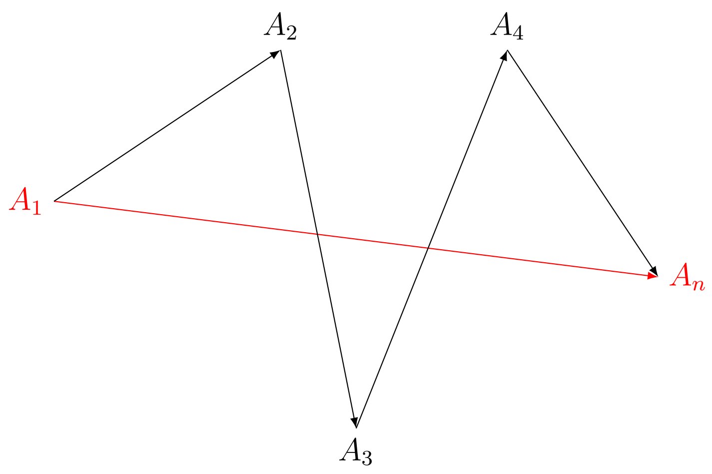


Règle de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \tag{1.1}$$

Remarque:

1. On peut l'iterer:



Pour les points $A_1, ..., A_n$

$$\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

2. Si $A = C$ dans (1.1):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \\ \Longrightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \end{aligned} \tag{1.2}$$

3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ n'implique pas (en général) $\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$
En fait a l'**inegalité triangle**:

Inegalité triangle

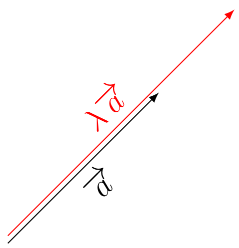
$$\|\overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$$

1.2 Multiplication par un scalaire

Si $\overrightarrow{a}$ est un vecteur et $\lambda \in \mathbb{R}$ (un scalaire), on définit $\lambda\overrightarrow{a}$ comme suit:

- Si $\lambda = 0$, alors $\lambda\overrightarrow{a} := \overrightarrow{0}$
- Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda\overrightarrow{a}$ a même direction
  $\hookrightarrow$ Si $\lambda > 0, \lambda\overrightarrow{a}$ le même sens que $\overrightarrow{a}$
  $\hookrightarrow$ Si $\lambda < 0, \lambda\overrightarrow{a}$ est de sens opposée à $\overrightarrow{a}$
  $\Longrightarrow$ $\lambda\overrightarrow{a}$ a longueur $\|\lambda\overrightarrow{a}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{a}\|$

Exemple $\lambda = \frac{3}{2}$



Propriétés

1. $\lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ou $\lambda = 0$
2. $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}, (-1)\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$
3. $\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = \mu(\lambda\overrightarrow{a}) = (\mu\lambda)\overrightarrow{a}$
4. $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$
5. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$

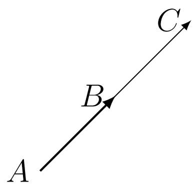
(Muni de "+" et de la multiplicatoin par des scalaires, les vecteurs forment un espace vectoriel)

On peut maintenant résoudre des equations:

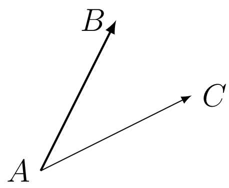
$$2\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{x}$$

1.3 "Vectorisation" de la géométrie

1. A, B, C sont alignés $\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$



Remarque:

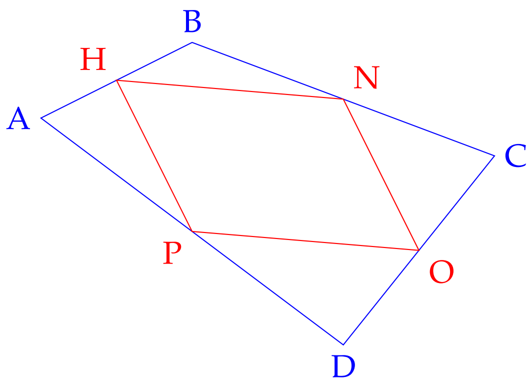


Les points si-dessus ne sont pas alignés: $\nexists\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$

2. 4 poitns = A, B, C, D froment un parallelogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \pm\overrightarrow{DC}$, ou $\overrightarrow{AD} \pm \overrightarrow{BC}$, ou $\overrightarrow{AC} = \pm\overrightarrow{BD}$

Theoremes

1. **Theorème (Vargninon)**: Les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque forment un parallelogramme.



Preuve: À voir $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PO}$

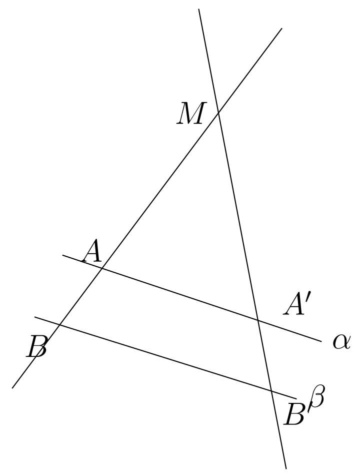
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

De même:

$$\overrightarrow{PO} = ... = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\implies \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$\implies \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PO}$$

2. **Theorème de Thalès** "version vectoriel"



$$M, A, B \text{ alignés } \implies \exists\lambda \text{ t.q. } \overrightarrow{MA} = \lambda\overrightarrow{MB} \tag{1.3}$$

$$M, A', B' \text{ alignés } \implies \exists\lambda' \text{ t.q. } \overrightarrow{MA'} = \lambda'\overrightarrow{MB'} \tag{1.4}$$

Thalès: $\lambda = \lambda'$

Remarque

De (1.3): $\|\overrightarrow{MA}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{MB}\|$
De (1.4): $\|\overrightarrow{MA'}\| = |\lambda'|\|\overrightarrow{MB'}\|$

Preuve

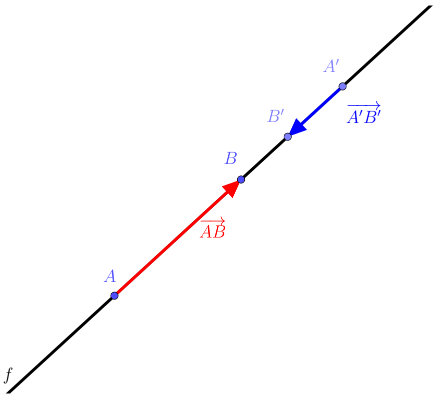
$$\overrightarrow{MA} = \lambda\overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} = \lambda(\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'B})$$
$$\underbrace{\overrightarrow{MA'}}_{\lambda'\overrightarrow{MB'}} - \lambda\overrightarrow{MB'} = \lambda\overrightarrow{B'B} - \underbrace{\overrightarrow{A'A}}_{\text{comme } \overrightarrow{A'A} \parallel \overrightarrow{B'B},\, \exists\mu\in\mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{A'A} = \mu\overrightarrow{B'B}}$$
$$(\lambda - \lambda')\overrightarrow{MB} = (\lambda - \mu)\overrightarrow{B'B}$$

Si une de ces parenthèse est non-nulle, alors on pourrait écrire $\overrightarrow{MB}$, come multiple de $\overrightarrow{B'B}$ (ou vice-versa), ce qui signifierait qu'ils sont parallèles.
On a donc $\underbrace{\lambda - \lambda' = 0}_{\lambda = \lambda'}$ et $\underbrace{\lambda - \mu = 0}_{\lambda = \mu}$

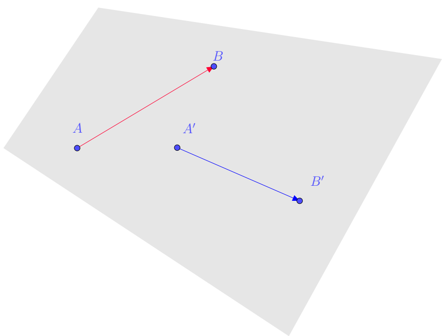
$\square$

1.4 Repères

Définition Un vecteur directeur d'une droite / d'un plan est n'importe quel vecteur obtenu à partir de deux points A, B sur cette droite / plan.



L'ensemble des vecteurs d'une droite forment un espace vectoriel, de dimension 1.

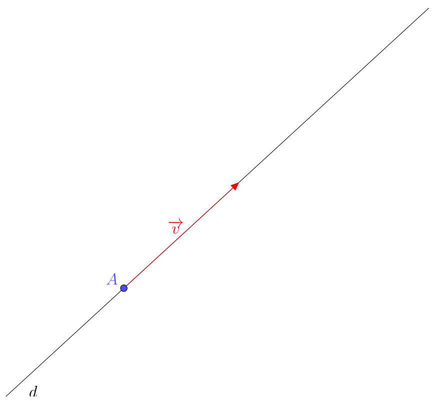


L'ensemble des vecteurs directeurs d'un plan forme un espace vectoriel de dimension 2.

$$\text{Base: } \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$$

$\overrightarrow{v_1}$ ou $\overrightarrow{v_2}$: n'importe quel vecteurs non-nuls, non-colinéaires.

Définition Soit une droite, et



- A un point quelconque sur d
- $\overrightarrow{v} \neq 0$ un vecteur de d

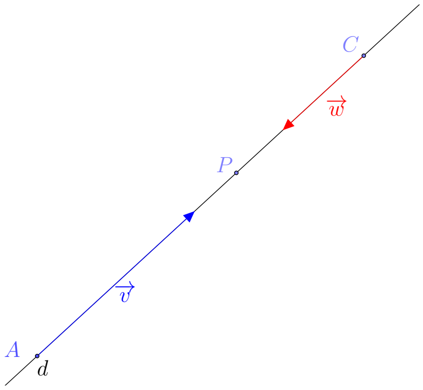
$(A, \overrightarrow{v})$ est un repère de d

Si un repère $(A, \overrightarrow{v})$ est donné (pour d), alors tout point $P \in d$ peut se décrire ainsi:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{v}$$

(λ est la coordonnée de $P \in d$ relativement au repère $(A, \overrightarrow{v})$)
En faisant varier $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient (à l'aide de $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{v}$) tous les points de la droite.
$\implies$ description paramétrique de d (paramètre: λ)

Changement de repère: (sur une droite)



Soit une droite α, avec un repère $(A, \vec{v})$
Si $P \in d$, alors $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$, où λ est la coordonnée de P relativement à $(A, \vec{v})$
Si $(C, \vec{w})$ est un repère pour d, comment calculer la coordonnée P relativement à $(C, \vec{w})$?

Supposons que C a pour coordonnée y dans $(A, \vec{v})$:

$$\overrightarrow{AC} = y \cdot \vec{v}$$

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v}, \quad \vec{w} \neq \vec{0}$$

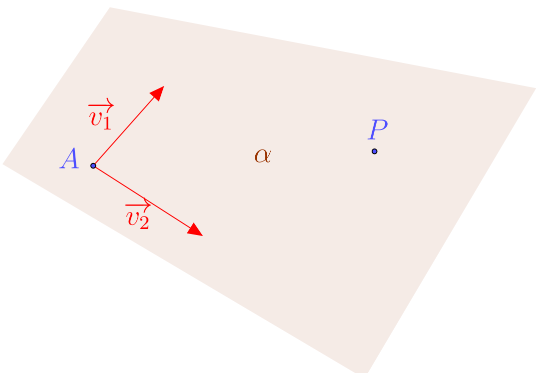
On cherche λ' t.q. $\overrightarrow{CP} = \lambda \vec{w}$, $\quad \lambda'$ coordonnée de P relativement à $(C, \vec{w})$
Or:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}\\ &= -\overrightarrow{AC} + \lambda \vec{v}\\ &= -y \cdot \vec{v} + \lambda \vec{v} = (\lambda - y)\vec{v} = \frac{\lambda - y}{\alpha} \cdot \vec{w}\\ \implies \lambda' &= \frac{\lambda - y}{\alpha}\end{aligned}$$

Définition Soit π un plan, et

- $A \in \pi$ un point quelconque
- $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ deux vecteurs non-nuls et non-colinéaires directeurs de π

$\implies (A, \vec{v_1}, \vec{v_2})$ est un repère pour π



Tout point $P \in \pi$ peut se décrire:

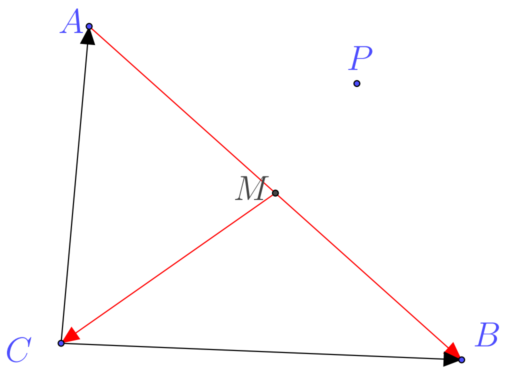
$$\boxed{\exists x, y \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{AP} = x \cdot \vec{v_1} + y \cdot \vec{v_2}}$$

(x, y): coordonnées de P sur π relativement au repère $(A, \vec{v_1}, \vec{v_2})$

De même on définit un repère dans l'espace $(A, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ où $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ sont non-complanaires, non-nuls (le triplet $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ doit former un parallélépipède non-dégénéré, de volume "positif")

Changement de repère: (dans le plan)

Exemple A, B, C : triangle



Repère 1: $(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$
Si P est dans le plan,

$$\exists(x, y) \text{ t.q. } \overrightarrow{CP} = x \cdot \overrightarrow{CB} + y \cdot \overrightarrow{CA}$$

Si M est milieu de AB, alors
Repère 2: $(M, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MC})$

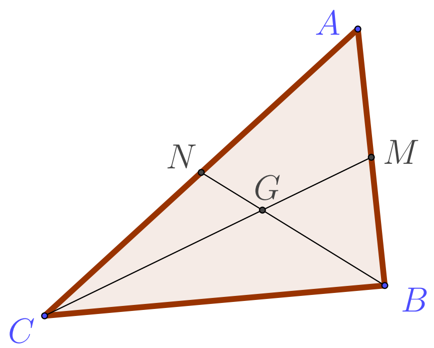
Question Coordonnées de P, (x', y'), relativement au repère 2?

$$\overrightarrow{MP} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{MC}$$

(x', y') en fonction de (x, y)

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{MC} + x \cdot \overrightarrow{CB} + y \cdot \overrightarrow{CA} \implies$$
$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\implies (1 - x - y) \cdot \overrightarrow{MC} + \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$\implies \begin{cases} x' = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \\ y' = 1 - x - y \end{cases}$$

Application Intersection entre deux droites.



M: milieu de AB
N: milieu de AC
But: calculer le point d'intersection

$$G := (NB) \cap (MC)$$

- Exprimons G dans $(C, \overrightarrow{CM})$: $\overrightarrow{CG} = \lambda\overrightarrow{CM}$
- Exprimons G dans $(B, \overrightarrow{BN})$: $\overrightarrow{BG} = \mu\overrightarrow{BN}$
- Exprimons les coordonnées de G dans $(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$, en fonction de $\boxed{\lambda}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG} &= \lambda\overrightarrow{GM} = \lambda(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM})\\ &= \lambda\overrightarrow{CB} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{BA}\\ &= \lambda\overrightarrow{CB} + \frac{\lambda}{2}(-\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})\\ &= \frac{\lambda}{2}\cdot\overrightarrow{CB} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

- Exprimons les coordonnées de G dans $(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$, en fonction de $\boxed{\mu}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG}\\ \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{CB} + \mu\overrightarrow{BN}\\ &= \overrightarrow{CB} + \mu\cdot(-\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA})\\ &= 1-\mu\cdot\overrightarrow{CB} + \frac{\mu}{2}\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases}\frac{\lambda}{2} = 1-\mu \implies \frac{\lambda}{2} = 1-\lambda \implies \frac{3}{2}\lambda = 1 \implies \lambda = \mu = \frac{2}{3}\\ \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{2} \implies \lambda = \mu\end{cases}$$

Donc

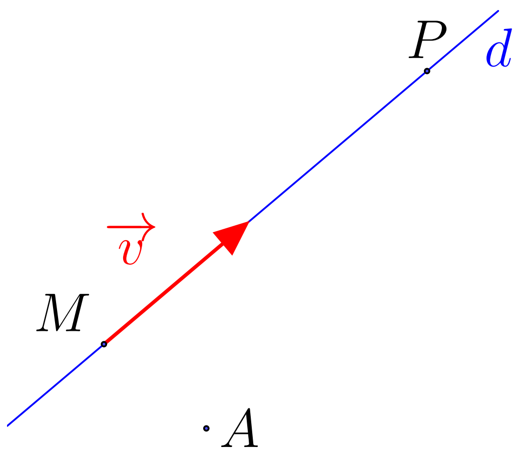
$$(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) : \overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

11/03/2019

1.5 Droites et plans

1.5.1 Représentation paramétrique

Droite



$$\forall P \in d, \exists\lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{v}$$

$\overrightarrow{MP}$: dans le repère $(A, \overrightarrow{v})$

Si $A \notin d$, dans le repère $(A, \overrightarrow{v})$

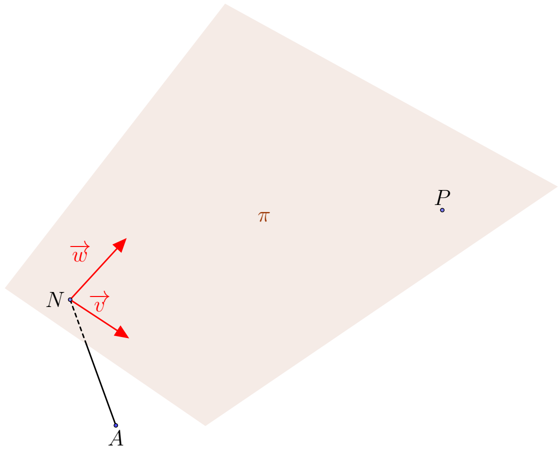
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$$

Représentation paramétrique de d

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \lambda\cdot\overrightarrow{v}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

λ : paramètre

Plan



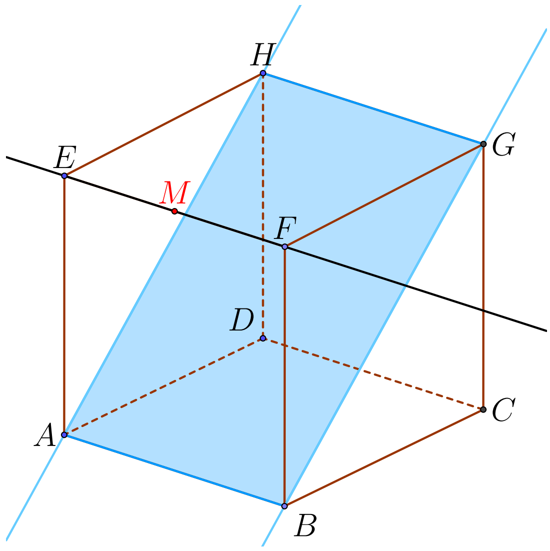
$\forall P \in \pi, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.q. $\overrightarrow{NP} = \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{w}$

Si $A \notin \pi$

Représentation paramétrique de π

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AN} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{w}, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Exemple: Un cube



Droite EF:

- **Repère:** $(E, \overrightarrow{EF})$

$$\boxed{\overrightarrow{EP} = \lambda \cdot \overrightarrow{EF}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})}$$

- **Repère:** $(A, \overrightarrow{AB})$

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})} \quad (1.5)$$

Si M est le milieu de $\overrightarrow{EF}$, comment décrire le segment MF? $\to$ On restreint les valeurs du paramètre.
Dans l'équation (1.5), avec:

- $\lambda = 0, \quad P = E$
- $\lambda = 1, \quad P = F$
- $\lambda = \frac{1}{2}, \quad P = M$

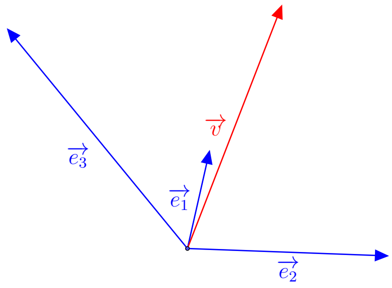
Segment MF c'est l'ensemble des P associés aux valeurs $\lambda \in [\,\frac{1}{2}; 1\,]$

Plan $ABGH$:

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AH}, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})}$$

Por ne garder que le rectangle $[ABGH]$: restreindre les valeurs de λ et μ: $\lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$

Équations paramétriques en composantes: Dans un repère de l'espace $(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$



Soit $\overrightarrow{v}$ quelconque:

$$\overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta \cdot \overrightarrow{e_2} + \gamma \cdot \overrightarrow{e_3}$$

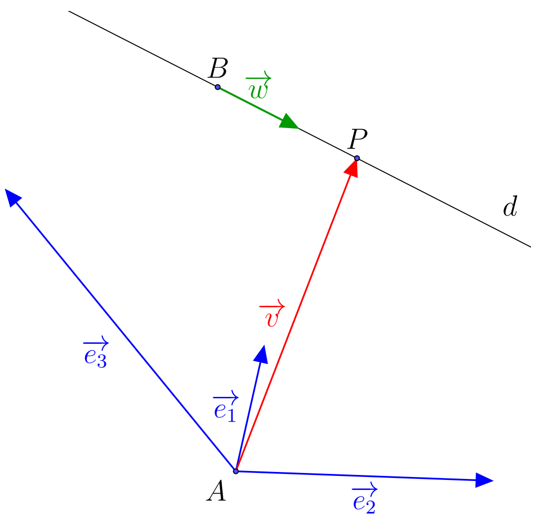
α, β, γ : **composantes** de $\overrightarrow{v}$ relativement au repère

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{plutôt:} \quad \overrightarrow{v}|_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Utile si $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \\ \delta \end{pmatrix}$, alors:

- $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \alpha + \mu \\ \beta + \nu \\ \gamma + \delta \end{pmatrix}$
- si $t \in \mathbb{R}$, $\quad t \cdot \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} t \cdot \alpha \\ t \cdot \beta \\ t \cdot \gamma \end{pmatrix}$

Si d est la droite $(B, \overrightarrow{w})$:



$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{w}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(relativement au repère $(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$)

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad P(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}, \quad B(x_B, y_B, z_B)$$

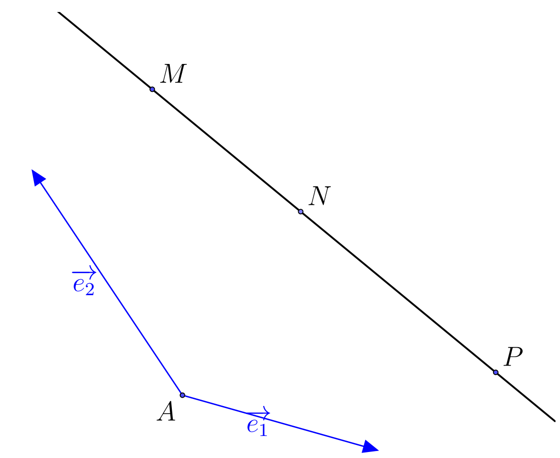
$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

En composantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_B + \lambda \cdot w_1 \\ y &= y_B + \lambda \cdot w_2 \\ z &= z_B + \lambda \cdot w_3 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \textbf{équation paramétrique en composantes}$$

Exercice: Dans un repère du plan: $(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$



On a $M(1,2), \quad N(3,-4)$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{e_1} + 2 \cdot \overrightarrow{e_2}, \quad \overrightarrow{AN} = 3 \cdot \overrightarrow{e_1} - 4 \cdot \overrightarrow{e_2}$$

Droite (MN) ?

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} \\ &= \overrightarrow{AM} + \lambda \cdot \overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies (MN) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Est-ce que $H(-1,3) \in (MN)$ **?** Si $H \in (MN)$, alors il doit exister $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q.

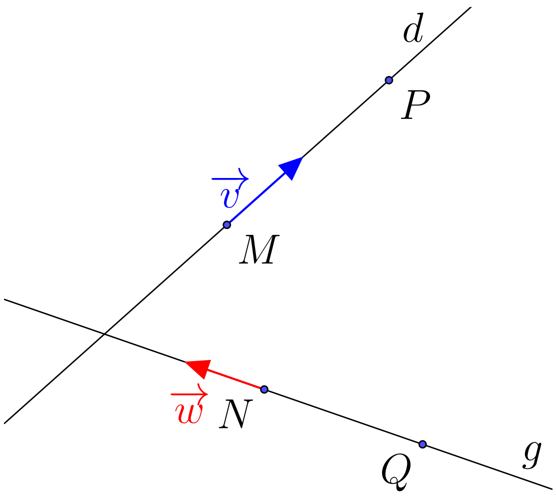
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2\lambda \implies 2\lambda = -2 \implies \lambda = -1 \\ 3 = 2 - 6\lambda \implies -6\lambda = 1 \implies \lambda = -\frac{1}{6} \end{cases} \tag{1.6}$$

$\implies$ il n'existe aucun λ solution de (1.6)

$\implies$ Donc $H \notin (MN)$

Si $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **est-ce que** $d = d(M, \overrightarrow{v}), g = g(N, \overrightarrow{w})$ **s'intersectent? Si oui, quelles sont les coordonnées du point d'intersection?**



$$d : \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \lambda \overrightarrow{v}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$g : \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AN} + \mu \overrightarrow{w}, \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Pour que d et g s'intersectent, il doit exister une paire (λ, μ) t.q. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}$
On cherche donc λ, μ t.q.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AP}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AQ}}$$

$$\begin{cases} 4\lambda + \mu = 2 & (1) \quad (1)-(2) \implies 5\lambda = -4 \implies \lambda = -\frac{4}{5} \\ \lambda - \mu = -6 & (2) \quad (2) \implies \mu = \lambda + 6 \implies \mu = \frac{-4+30}{5} = \frac{26}{5} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ d et g s'intersectent.
Points d'intersection:

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda = 1 + 4 \cdot -\frac{4}{5} = \frac{5-16}{5} = -\frac{11}{5} \\ \\ y = 2 + \lambda = 2 + -\frac{4}{5} = \frac{10-4}{5} = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Exemple: Dans l'espace:

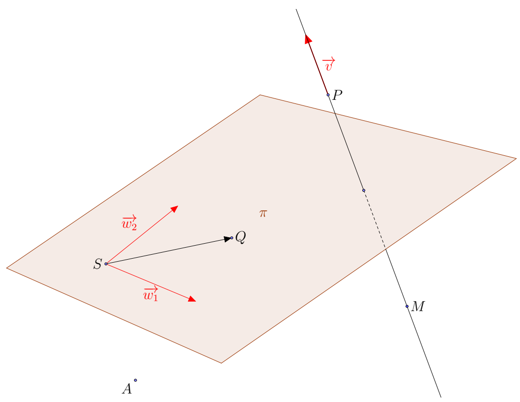
$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Est-ce que d et g s'intersectent?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

n'a **pas** de solution $\implies d \cap g = \emptyset$
Droites d et g sont **gauches**: leurs vecteurs directeurs sont non-colinéaire, et elles ne s'intersectent pas.
Intersection de d avec le plan $\pi = \pi(S, \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$?



$S\ (0,0,2)$
$M\ (1,0,2)$
$\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{w_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} d : \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} & \lambda \in \mathbb{R} \\ \pi : \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AS} + \alpha \cdot \overrightarrow{w_1} + \beta \cdot \overrightarrow{w_2} & \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ On cherche λ, α, β tels que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{6}$$

Intersection I :

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda = a - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ y &= \lambda = -\frac{1}{6} \\ z &= 2 - \lambda = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

Donc $I(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{13}{6})$

II Plans dans l'espace

Dans le repère de l'espace

$\boxed{\text{ax + by + cz + d = 0}}$ $\rightarrow$ n'est **pas** l'équation d'un droite dans l'espace

décrit un plan! En effet: (supposons $c \neq 0$)

$$z = -\frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$$

Donc tout triplet (x, y, z) qui satisfait (*) peut s'écrire ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{d}{c} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Plus généralement, comment trouver des directions indépendantes seulement à partir de l'équation cartésienne du plans $\pi : ax + by + cd = 0$?

$\rightarrow$ On choisit des points (au moins 3)

$$\begin{aligned} A \in \pi &\implies ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\ B \in \pi &\implies ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \end{aligned}$$

$$a \underbrace{(x_B - x_A)}_{v_1} + b \underbrace{(y_B - y_A)}_{v_2} + c \underbrace{(z_B - z_A)}_{v_3} = 0$$

Donc $\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ est directeur de } \pi \iff av_1 + bv_2 + cv_3 = 0}$

Plan: **équation cartésienne** $\implies$ **équation paramétrique**

- chercher/choisir un $A(x_0, y_0, z_0)$ t.q. $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$
- trouver deux directions indépendantes avec $v_1 + bv_2 + cv_3 = 0$

Exemple Dans un repère : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans la premiere: $x = 1 + (y-3) + 3(z-1)$

$$x - y - 3z + 5 = 0$$

Dans le cas générale:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \ (**)$$

$\rightarrow$ Comment obtenir les a, b, c de l'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$?

Affirmation: l'équation cartésienne associé à (**) est de la forme

$$\boxed{\underbrace{(v_2u_3 - v_3u_2)}_{a}\, x + \underbrace{(-u_3u_1 - u_1v_3)}_{b}\, y + \underbrace{(-v_2u_1 - v_1v_2)}_{c}\, z = \text{ cste } \leftarrow \text{ se trouve en choisissant un point}}$$

En effet : Il suffit de vérifier que

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \text{ et } au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$$

En général: Une droite d (dans l'espace) est décrite par deux **équations cartésienne**:

$$d : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \leftarrow \text{c'est un plan}\alpha! \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \text{c'est un plan}\beta! \end{cases}$$

$$\implies d = \alpha \cap \beta$$

⚠ Il y a une infinité des paires de plans qui décrivent la même droite!

Équation cartésienne $\implies$ **équation paramétrique?** Si d est donné comme en ($\mathring{*}$), comment trouver un vecteur directeur $\vec{v}$?

$\vec{v}$ doit être directeur à la fois pour α **et** pour β !

Affirmation on peut par exemples prendre

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} bc' - b'c \\ a'c - ac' \\ ab' - a'b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Vérifions $\vec{v}$ dirige α, car

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = a(bc' - b'c) - b(a'c - ac') + c(ab' - a'b) = 0$$

$\vec{v}$ dirige β, car

$$a'v_1 + b'v_2 + c'v_3 = (\text{ faire !}) = 0$$

Exemple

$$d : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y = 0 \quad c' = 0 \end{cases}$$

Pour formule : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - (-1)1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dirige d

Donc $A(0, 0, 1) \in d$

$$\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$