EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1A

PREPA-031(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Polynôme réels

3.1 Définition et opérations

Définition: Un polynôme en x à coefficients réels est une combinaison linéaire de puissance de x.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$$

avec $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, ..., n$

On note $P \in \mathbb{R}[\, x\,]$ "ensemble de polynôme en x à coefficients réels"

Le degré de P, noté $\deg P$, est la plus grande puissance de x dont le coefficient est non nul.

Convention Le polynôme nul est de degré $-\infty$

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}[\, x\,]$ des polynômes de degré inférieur ou égale à $n \in \mathbb{N}$ est notée $\mathbb{P}_n[\, x\,]$

$$\mathbb{P}_n[\, x\,] = \{P \in \mathbb{R}[\, x\,] | \deg P \leq n\}$$

Définition: La somme de 2 polynômes P et Q se note $P + Q$. On l'obtient en additionnant les coefficients d'une même puissance

Exemple:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 6$$
$$Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 3$$

Alors

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = x^2 + 5x - 3$$

Remarque:

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

Définition: L'amplification par $\lambda \in \mathbb{R}$ d'un polynôme P donne un polynôme noté λP. On obtient en multipliant chaque coefficient par λ.

Exemple:

$$P(x) = 3x^2 + 5x - 6 \qquad \lambda = -\frac{2}{3}$$

Alors

$$(\lambda P)(x) = \lambda \cdot P(x) = -2x^2 - \frac{10}{3}x + 4$$

Remarques:

1.

$$\begin{aligned} \text{Si } \lambda \neq 0 &\iff \deg(\lambda P) = \deg P \\ \text{Si } \lambda = 0 &\iff \deg(\lambda P) = 0 \end{aligned}$$

2. Avec les lois (addition et amplification), $\mathbb{R}[\,x\,]$ et $\mathbb{P}_n[\,x\,]$ sont des espaces vectoriels.

Définition: Multiplication par un monôme.
Soit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

et

$$Q(x) = x^n$$

un monôme.
Leur produit est un polynôme. On l'obtient en distribuant la multiplication par x^n.

$$x^m(a_n x^n + ... + a_0) = a_n x^{n+m} + a_{n-1}x^{n-1+m} + ... + a_0 x^m$$

Remarque:

$$\deg(x^m P) = m + \deg P$$

Définition: Soient P et Q deux polynômes. Leur produit noté $P \cdot Q$. On l'obtient par distribution des produits et un regroupant les coefficients d'une même puissance de x.

Exemple:

$$P(x) = 3x^2 + 5x - 6 \quad Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 3$$

Alors

$$\begin{aligned} (PQ)(x) &= P(x) \cdot Q(x) \\ &= (3x^2 + 5x - 6) \cdot (-x^3 - 2x^2 + 3) \\ &= -3x^5 - 6x^4 + 9x^2 - 5x^4 - 10x^3 + 15x + 6x^3 + 12x^2 - 18 \\ &= -3x^5 - 11x^4 - 4x^3 + 21x^2 + 15x - 18 \end{aligned}$$

Remarque:

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

Définition: Soit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{R}[\,x\,]$$

Alors

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto P(x) \qquad \text{"image par } P \text{ de x"} \end{aligned}$$

est une fonction polynomiale.
En particulier, l'évaluation de P en $x_0 \in \mathbb{R}$ s'écrit

$$P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + ... + a_0$$

P évalué en x_0

Exemple:

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \text{et} \quad x_0 = -2$$

Alors

$$P(x_0) = (-2)^2 - 5(-2) + 6 = 20$$

3.2 Binôme de Newton

Définition: Le polynôme en x.

$$P_n(x) = (x+a)^n, \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$$

est appelé binôme de Newton ($x + a$: binôme)
Calculons...

Définition: On note C_n^k le nombre de manières de choisir un sous-ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments.
On peut montre que

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

où

$$k! k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

est dit "k-factorielle".
On pose

$$0! = 1$$

et

$$C_n^0 = 1 = C_0^0$$

Remarque: Une factorielle est vite très grande...
On calcul plutôt:

$$\begin{aligned} C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)}!}{k! \cancel{(n-k)}!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 1} \quad \begin{matrix} \leftarrow k \text{ facteurs} \\ \leftarrow k \text{ facteurs} \end{matrix} \end{aligned}$$

Propriétés:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}, \quad k = 0, ..., n$
2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad k = 1, ..., n-1$
3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

Corollaire: Le développement du binôme de Newton donne:

$$(x+a)^n = C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + ... + C_n^k a^k x^{n-k} + ... + C_n^{n-1} a^{n-1} x^1 + C_n^n a^n x^0$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k a^k x^{n-k}$$ remarque: il y a n+1 termes

En effet , dnas le développement de

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a) \cdot (x+a) \cdot ... \cdot (x+a)}_{n \text{ facteurs}}$$

le terme $a^k x^{n-k}$ apparait C_n^k fois, on a à choisir k fois le a et du coup on a $n-k$ fois le x.

Exemple: Développer

$$(x-1)^6 = C_6^0(-1)^0x^6 + C_6^1(-1)^1x^5 + C_6^2(-1)^2x^4 + C_6^3(-1)^3x^3 + C_6^4(-1)^4x^2 + C_6^5(-1)^5x^1 + C_6^6(-1)^6x^0$$
$$= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

Exemples:

1. Donner le coefficient de x^{127} dans $(x+2)^{129}$.

   Le terme en x^{127} est $(k = 2)$

$$C_{129}^2 2^2 x^{127} = \frac{129 \cdot 128}{2-1} \cdot 2^2 x^{127} = 33024x^{127}$$

2. Terme en x^8 dans $(\overbrace{4x^3}^{x} + \overbrace{\frac{3}{x^2}}^{a})^{11}$

   Le terme général ($(k+1)^e$ terme) est

$$C_n^k \left(\frac{3}{x^2}\right)^k \cdot (4x^3)^{n-k} = C_{11}^k 3^k 4^{11-k} x^{-2k} x^{3(11-k)}$$

   Il faut trouver

$$k \text{ t.q. } 33 - 5k = 8 \quad (k = 0, 1, ..., 11)$$

$$k = 5$$

   D'où le terme en x^8 : $C_{11}^5 3^5 4^{11-5} x^8 = ...$

3.3 Zéro, schéma de Hörmer, multiplication

Théorème: Soient P un polynôme avec $\deg P \geq 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique polynôme

$$F \text{ t.q. } P(x) = F(x) \cdot (x - x_0) + P(x_0)$$

Remarques:

- $\deg F = \deg P - 1$
- Il est un cas particulier de division euclidienne

En effet, notons

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

et

$$F(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_0$$

Alors

$$\begin{aligned} P(x) &= F(x) \cdot (x - x_0) + r && r\text{: à déterminer} \\ &= b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + ... + b_0 x - x_0 b_{n-1} x^{n-1} - x_0 b_{n-2} x^{n-2} - ... - x_0 b_0 \end{aligned}$$

En additionnant toute les lignes les, les b_k tombent
Donc les b_k existent (uniques) et $r = P(x_0)$
Ce processus est résumé dans le schéma de Hörner

Exemple: Division euclidienne de

$$P(x) = 4x^3 + 2$$

par

$$x + 2$$

$x_0 = -2$
Ainsi :

$$4x^3 + 2 = (4x^2 - 8 + 16) \cdot (x + 2) \underbrace{-30}_{P(-2)}$$

Corollaire: Le reste de la division de $P(x)$ par $x - x_0$ est $P(x_0)$.

Définition: Soit $P \in \mathbb{R}[\,x\,]$. x_0 est un zéro de P (ou racine) si $P(x_0) = 0$.

Corollaire: x_0 est un zéro de $P(x)$ si et seulement si P est divisible par $x - x_0$.

Exemple:

$$x_0 = -1$$

est racine évidente de

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 9$$

$$P(-1) = 0$$

Alors $P(x)$ est divisible par

$$x - x_0 = x + 1$$

Pour trouver la factorisation: diviser ou utiliser le schéma de Hörner.

Définition: Soit P un polynôme, $\deg P \geq 1$. Si x_0 est un zéro de P, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, appelé la multiplicité de x_0, tel que

$$P(x) = (x - x_0)^n Q(x)$$

avec

$$Q(x_0) \neq 0$$

et

$$\deg Q = \deg P - n$$

Remarques:

- Cas particulier de division euclidienne
- $\text{deg}F = \text{deg}P - 1$
- $P(x_0)$ est le reste de division de P par $x - x_0$
- x_0 est le zéro d P si et seulement si $P(x_0) = 0$ si et seulement si $x - x_0$ divise P

3.4 Division euclidienne

Théorème: Soient P et Q deux polynômes tels que $\deg P \geq \deg Q$.
Il existe alors deux polynômes uniques F et R tels que

$$P(x) = F(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad (\text{avec } \deg R < \deg Q)$$

Cette décomposition est appelée la **division euclidienne** de P par Q.
Si $R = 0$, on dit que Q divise P.

Exemple: Donner la division euclidienne de

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 46x^2 + 88x - 23$$

par

$$Q(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +2x^3 & -46x^2 & +88x & -23 & x^2-4x+5 \\ \cline{6-6}
3x^4 & -12x^3 & +15x^2 & & & 3x^2+14x-5 \\ \cline{1-3}
 & 14x^3 & -61x^2 & +83x & & \\
 & 14x^3 & -56x^2 & +70x & & \\ \cline{2-4}
 & & -5x^2 & +18x & -23 & \\
 & & -5x^2 & +20x & -25 & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x & +2 &
\end{array}
$$

Ainsi:

$$3x^4 - 2x^3 - 46x^2 + 88x - 23 = (3x^2 + 14x - 5) \cdot (x^2 - 4x + 5) + (-2x + 2)$$

3.5 Décomposition en facteurs irréductibles

Définition: Un polynôme est dit irréductible s'il ne peut pas être décomposé en un produit de polynôme de degré plus petit (degré null par example)

Théorème: Dans $\mathbb{R}[x]$, les polynômes irréductibles sont dans la forme

- $ax + b, \quad a \neq 0$
- $ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ et $\Delta b^2 - 4ac < 0$ (pas de racines réelles et donc pas de factorisation).

Corollaire: Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ peut être décomposé en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$

$$P(x) = a(x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_p)^{n_p} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1} \cdots (x^2 + \beta_q x + \gamma_q)^{m_q}$$

avec

- $a \in \mathbb{R}^*$
- racines réelles $x_i, \quad i = 1, ..., p$, toutes différentes
- $n_i \in \mathbb{N}^*$: ordre (ou multiplicité) de x_i
- $(\beta_j, \gamma_j) \quad j = 1, ..., q$, tous différentes et tels que $\Delta_j = \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$
- $m_j \in \mathbb{N}^*, \quad j = 1, ..., q$
- $n_1 + ... + n_p + 2m_1 + ... + 2m_q = \deg P$

Exemple:

$$P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1$$

Remarque: $x_1 = 1$ annule P : $\quad P(1) = 0$. Donc $x - 1$ divise P : $P(x) = (...)(x - 1)$
Finalement $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)(2x^2 + x + 1)$

3.6 Décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples

Définition: Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ deux polynômes. Leur quotient

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \deg Q \geq 0$$

est une fonction rationnelle.
Cherchons à exprimer $f(x)$ comme une osmme de fonctions rationnelles plus simples (p.ex intégrables)

Exemple: Considérons

$$P(x) = 2x^3 - 11$$

et

$$Q(x)x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$$

Remarque: Comme $\deg P < \deg Q$, une division euclidienne n'est pas utile Cherchons à factoriser $Q(x)$

Remarque:

$$Q(1) = 0$$

On peut donc factoriser $Q(x)$ par $x - 1$ ...

$$Q(x) = (x-1)^3(x^2 + x + 1)$$

On vérifie que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^3 - 11}{(x-1)^3(x^2+x+1)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{-3}{(x-1)^3} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Remarque: Les numérateurs associés au polynôme irréductible 1^{er} degré, $x - 1$, sont de degré 0. Ceux associés à $x^2 + x + 1$ (irréductible de degré 2) sont du 1^{er} degré.

Définition: La décomposition d'une fonction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en éléments simples est son écriture comme une somme de fonctions rationnelles où le dénominateur de chaque terme est uniquement une puissance d'un polynôme irréductible.

Procédure

1. Si $\deg P \geq \deg Q$, on effectue d'abord la division euclidienne:

   $$P = FQ + R \iff \frac{P}{Q} = F + \frac{R}{Q}$$

   où $F \in \mathbb{R}[x]$ et $\deg R <\geq Q$.

   Pour la décomposition de $\frac{R}{Q}$, voir ci-dessous.

2. Si $\deg P < \deg Q$, on décompose Q en produit de facteurs irréductibles. Pour Q unitaire (on peut toujours mettre un réel en évidence)

$$Q(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_p)^{n_p} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1} \cdots (x^2 \beta_q x + \gamma_q)^{m_q}$$

On peut montrer qu'il suffit alors de déterminer les coefficients

A_{ij}, B_{kl}, C_{kl} dans le développement suivant:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + ... + \frac{A_{1n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} \\
&+ \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + ... + \frac{A_{2n_2}}{(x - x_2)^{n_2}} \\
&+ \frac{A_{p1}}{x - x_2} + \frac{A_{p2}}{(x - x_2)^2} + ... + \frac{A_{pn_p}}{(x - x_2)^{n_p}} \\
&+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^2} + ... + \frac{B_{1m}x + C_{1m}}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^m} \\
&+ \frac{B_{q1}x + C_{q1}}{x^2 + \beta_q x + \gamma_q} + \frac{B_{q2}x + C_{q2}}{(x^2 + \beta_q x + \gamma_q)^2} + ... + \frac{B_{qm}x + C_{qm}}{(x^2 + \beta_q x + \gamma_q)^m}
\end{aligned}$$

Un terme du type $\frac{A}{(x - x_0)^k}$ est dit de première espèce et un terme de type $\frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k}$ de 2e espèce.

3. Pour déterminer les coefficients, ou peut
   - Mettre au même dénominateur la somme des éléments simples et comparer les coefficients du numérateur obtenu à ceux de $P(x)$.
   - Évaluer l'égalité en x_0 bien choisi, après une éventuelle multiplication par $(x - x_0)^k$
   - Faire la limite $x \longrightarrow \infty$, après une éventuelle multiplication par x^k.

Exemple:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 10, \quad Q(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$$

Décomposons $\frac{P}{Q}$ en éléments simples.

1. Division euclidienne: pas nécessaire, car $\deg P < \deg Q$

2. Factoriser $Q(x)$. Observation: $Q(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$ donc

$$Q(x) = (x - 1)^2 (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

3. Éléments simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{c}{x + 1} + \frac{dx + e}{x^2 + x + 1}$$

4. Pour déterminer les coefficients
   - Soit on met au même dénominateur

- Soit on évacue:

$$\frac{x^4-2x^3+5x-10}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{dx+e}{x^2+x+1}$$

Multiplions par $(x-1)^2$

$$\frac{x^4-2x^3+5x-10}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)} = a(x-1)+b+\frac{c}{x+1}\cdot(x-1)^2+\frac{dx+e}{x^2+x+1}\cdot(x-1)^2$$

et évaluer en $x=1$:

$$\Longrightarrow\ -\frac{6}{6} = 0+b+0+0 \qquad \Longrightarrow\ b=-1$$

Multiplions par $(x+1)$

$$\Longrightarrow\ -\frac{12}{4} = 0+0+c+0 \qquad \Longrightarrow\ c=-3$$

Multiplions par x et $x \longrightarrow \infty$

$$\Longrightarrow\ 1 = a+0+c+d \qquad \Longrightarrow\ a+d=4$$

Évaluer en $x=0$

$$\Longrightarrow\ -\frac{10}{7} = -a+b+c+e \qquad \Longrightarrow\ -a+e=-6$$

Évaluer en $x=2$

$$\Longrightarrow\ 0 = a+b+\frac{c}{3}+\frac{2d+e}{7} \qquad \Longrightarrow\ 7a+2d+e=14$$

Finalement

$$a=2 \quad b=-1 \quad c=-3 \quad d=2 \quad e=-4$$

d'où

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-3}{x+1} + \frac{2x-4}{x^2+x+1}$$