EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1A

PREPA-031(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 1

Logique

26/02/2019

1.1 Propriétés, ensemble et proposition

1.1.1 Propriétés et ensemble

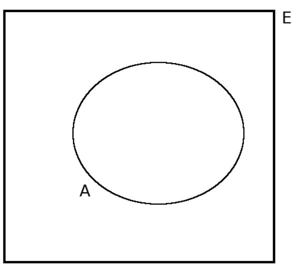
Définition Soit P une propriété définie sur un ensemble E (par ex. $\mathbb{R}$) pris en référentiel.
La proposition "x vérifie P" se note $P(x)$

Exemples $E = \mathbb{Z}$, P: propriété d'être pair.

- $P(-26)$ "-26 est pair" est vrai car on peux écrire $-26 = 2 * (-13)$
- $P(5)$ est fausse
- $P(x)$ signifie que $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $x = 2k$

A toute propriété P définie sur E est associé un ensemble $A \subset E$:

$$P(x) \iff x \in A$$



$$A = \{x \in E | P(x)\}$$

"A est l'ensemble des x de E vérifiant la propriété P". C'est l'ensemble solution au problème de trouver le x vérifiant P.

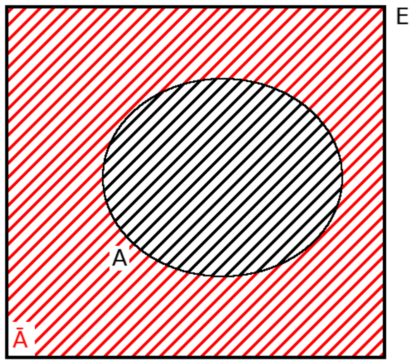
Cas possible:

- il y a une solution si et seulement si $A \neq \emptyset \iff \exists x \in E, x \in A$
- il n'y a pas de solution si et seulement si $A = \emptyset \iff \forall x \in E, x \notin A$

Negation: Propriété de non$P$

$$C_E(A) = \overline{A} = \{x \in E | \text{ non}P\}$$

"$\overline{A}$ est l'ensemble des x ne vérifiant pas P". C'est le **complémentaire** de A dans E.

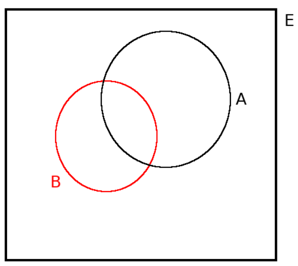


Exemples $E = \mathbb{R}$, $P(x) : x^2 < 64$

$$A = \{x \in \mathbb{R} | P(x)\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 < 64\} =]-8; 8[$$

Soit Q une autre propriété définie sur E et B l'ensemble correspondant

$$B = \{x \in E | Q(x)\}$$

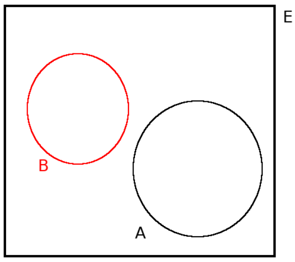


- L'ensemble des x vérifiant P **et** Q (les deux conditions sont imposée) est $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x \in E | P(x) et Q(x)\}$$

- L'ensemble vérifiant P **ou** Q (au moins une condition est satisfaite) est $A \cup B$
- non(P et Q) est équivalent à (non$P$ ou non$Q$)
  En effet $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- non(P ou Q) est équivalent à (non$P$ et non$Q$)
  En effet $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Remarque Si P et Q sont incompatible (ne peuvent pas être vérifiés en même temps) si $A \cap B = \emptyset$



1.1.2 Propositions

Soit P un propriété définie sur un référentiel E et A l'ensemble correspondant.

Définition Un proposition T est une affirmation (avec un verbe!) énoncée sur les éléments de E.

- Proposition **simple**: sur un élément $x_0 \in E$.

$$T : P(x_0) \quad \text{"}x_0 \text{ vérifie } P\text{"}$$
$$\text{language ensembles} : T : x_0 \in A$$
$$\text{exemple} : T : \sqrt{2} \text{ est irrationel}$$

- Proposition **universelle**: P est vérifiée par tout x

$$T : \forall x \in E, \quad P(x) \quad \text{"quelque soit } x, x \text{ vérifie } P\text{"}$$
$$\text{language ensembles} : T : A = E$$
$$\text{exemple: } T : \text{un carré est positif ou nul}$$

- Proposition **existentielle**: P vérifie au moins un élément

$$T : \exists x \in E, \quad P(x) \quad \text{"il existe un } x \text{ qui vérifie } P\text{"}$$
$$\text{language ensembles} : T : A \neq \emptyset$$
$$\text{exemple: } T : \text{l'equation } \; x^2 = 2 \; \text{ a une solution}$$

Negation (proposition contraire, la negation porte sur le verbe)

- Proposition **simple**:

$$\text{non}T : \text{non}P(x_0) \quad \text{"}x_0 \text{ ne vérifie pas } P\text{"}$$
$$\text{language ensembles : non}T : x_0 \in A \text{ ou } x_0 \in \overline{A}$$
$$\text{exemple : non}T : \sqrt{2} \text{ est rationel}$$

- Proposition **universelle**:

$$\text{non}T : \exists x \in E, \quad \text{non}P(x) \quad \text{"il existe } x \text{ ne vérifiant pas } P\text{"}$$
$$\text{language ensembles : non}T : A \neq E \text{ ou encore } \overline{A} \neq \emptyset$$
$$\text{exemple: } T : \text{il existe un carré negatif}$$

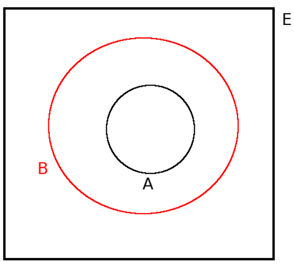
- Proposition **existentielle**:

$$\text{non}T : \forall x \in E, \quad \text{non}P(x) \quad \text{"quelque soit } x, x \text{ ne vérifie pas } P\text{"}$$
$$\text{language ensembles : non}T : A = \emptyset \text{ ou encore } \overline{A} = E$$
$$\text{exemple: } T : \text{l'equation } \ x^2 = 2 \text{ n'as pas de solution}$$

1.1.3 Implication et equivalence

Soient P et Q deux propriétés sur E et A et B les ensembles associés.

- "P implique Q": $P(x) \to Q(x)$
  Si x vérifie P, alors x vérifie Q (P est plus restreint que Q)
  Tous les éléments de A sont aussi éléments de B



Tous les éléments de A sont aussi des éléments de B:

$$\forall x \in A, x \in B$$

ou

$$\forall x \in E, \text{ si } x \in A \text{ alors } x \in B$$

ou encore

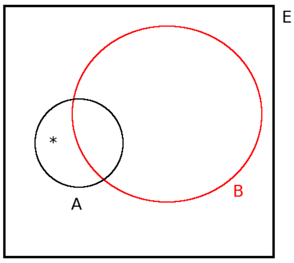
$$A \subset B$$

- P et Q sont équivalents, si et seulement si $P(x) \iff Q(x)$ si et seulement si $(P(x) \rightarrow Q(x))$ et $(P(x) \leftarrow Q(x))$ **(double implication)**

  Language ensemble: $A = B$ si et seulement si $(A \subset B)$ et $(B \subset A)$ **(double inclusion)**

Negation de l'implication

$$\begin{aligned} \text{non}(P \rightarrow Q) &\iff \text{non}(\forall x \in A, x \in B) \\ &\iff \exists x \in A, x \notin B \\ &\iff \exists x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\iff \exists x \in E, (P(x) \text{ et non} Q(x)) \end{aligned}$$



C'est donc une proposition existentielle.

Exemple Tout nombre pair est multiple de 4

$$T : \forall n \text{ pair}, n \text{ est multiple de } 4$$

5/03/2019

1.2 Méthode de preuve

Une théorie mathématique se construit sur des règles que l'on donne au départ au départ (les axiomes) et la logique.
Dans un univers de référence E, une proposition T est soit vrai, soit fausse (exclusif).

Exemples

1. La proposition

$$T : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

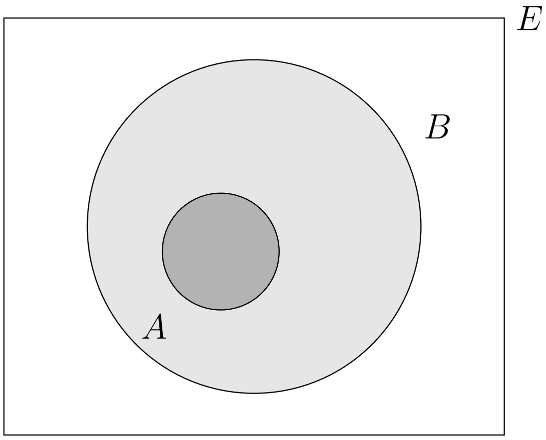
   Implicitement $E = \mathbb{R}$

2. Une implication

$$T : P \implies Q$$

- P est l'hypothèse: le référentiel restreint
- Q est la conclusion.

Remarque La vérité de Q n'est pas examinée "en dehors de P".



En se plaçant dans A (hypothèse P) on est dans B (conclusion Q)

Exemple La proposition

$$T : \text{si } a \text{ est pair, alors } a^2 \text{ est pair}$$

Implicitement E est $\mathbb{Z}$
Plus simplement:

$$T : \forall a \in \mathbb{Z}, \quad a \text{ est pair} \implies a^2 \text{ est pair}$$

Remarque Une proposition simple T peut toujours être vue comme une consequence de ce que l'on sait sur le référentiel.

1.2.1 Méthode directe

But: Montrer qu'une implication

$$T : P \implies Q$$

est vraie (on montre que la vérité de Q en utilisant quelque part l'hypothèse P).
On montre

$$P \implies Q$$

par une suite d'implications toutes vraies:

$$P \implies P_1, P_1 \implies P_2, \dots, P_n \implies P_{n+1}, \dots, P_N \implies Q$$

Exemples

1. Montrer

$$T : \forall a \in \mathbb{Z}, \text{si } \underbrace{a \text{ est pair}}_{P}, \text{ alors } \underbrace{a \text{ est pair}}_{Q}$$

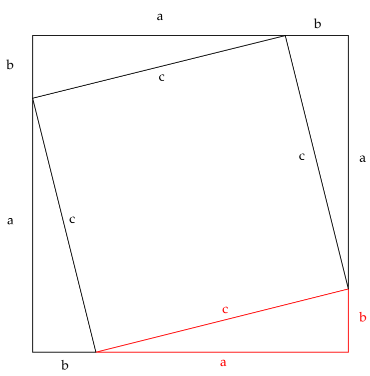
Soit $a \in \mathbb{Z}$ (a est quelconque)

$$\begin{aligned} a \text{ est pair} &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a = 2k \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = (2k)^2 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} \\ &\implies \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = 2 \cdot k' \\ &\implies a^2 \text{ est pair} \end{aligned}$$

2. La proposition

$$T: \text{ le théorème de Pythagore}$$

Soit un triangle rectangle



$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= c^2 + 4\frac{ab}{2} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

1.2.2 Méthode par l'absurde

But: Montrer qu'une proposition T est vraie.
On montre que T est vraie en montrant que non$T$ est faux. non$T$ est impossible car elle même une contradiction (absurdité).

$$T \text{ vraie} \iff [\,\text{non}T \implies \text{contradiction}\,]$$

Exemple T : dans $\mathbb{M}_N(\mathbb{R})$, l'élément neutre pour le produit matriciel est unique.

Preuve par l'absurde On suppose non$T$ et on montre que cela conduit à une contradiction.

$$\text{non}T: \text{ dans } \mathbb{M}_N(\mathbb{R}) \text{ il existe plus d'un élément neutre pour le produit matriciel}$$

Notons I_n et N_n des éléments neutre, avec $I_n \neq N_n$.
Alors

$$I_n = I_n \cdot N_n = N_n$$

D'où la contradiction avec

$$I_n \neq N_n$$

Remarque Cas d'une proposition universelle sur l'ensemble E

$$T : \forall x \in E, \quad x \text{ vérifie } P$$

Par l'absurde, on doit montrer l'implication

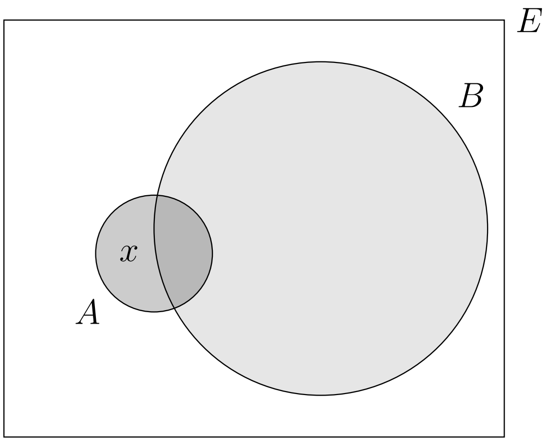
$$[\, \exists x \in E,\ x \text{ vérifie non} P \,] \implies \text{contradiction}$$

(mise en défaut de l'existence d'un contre-exemple)
Cela est équivalent à dire

$$\forall x \in E,\ [\, x \text{ vérifie non} P \implies \text{contradiction} \,]$$

(aucun élément n'est un contre-exemple)

Rappel ⚠ Si T est une implication $P \implies Q$, sa négation non$T$ n'est par une proposition universelle.



$$\begin{aligned} T : \forall x \in E, &\quad P(x) \implies Q(x) \\ \text{non}T : \exists x \in E, &\quad P(x) \text{ et } \text{non}Q(x) \end{aligned}$$

1.2.3 Méthode indirecte ou contraposée

But Montrer qu'une implication

$$T : P \implies Q$$

est vraie.

Définition Soit la proposition

$$T : P \implies Q$$

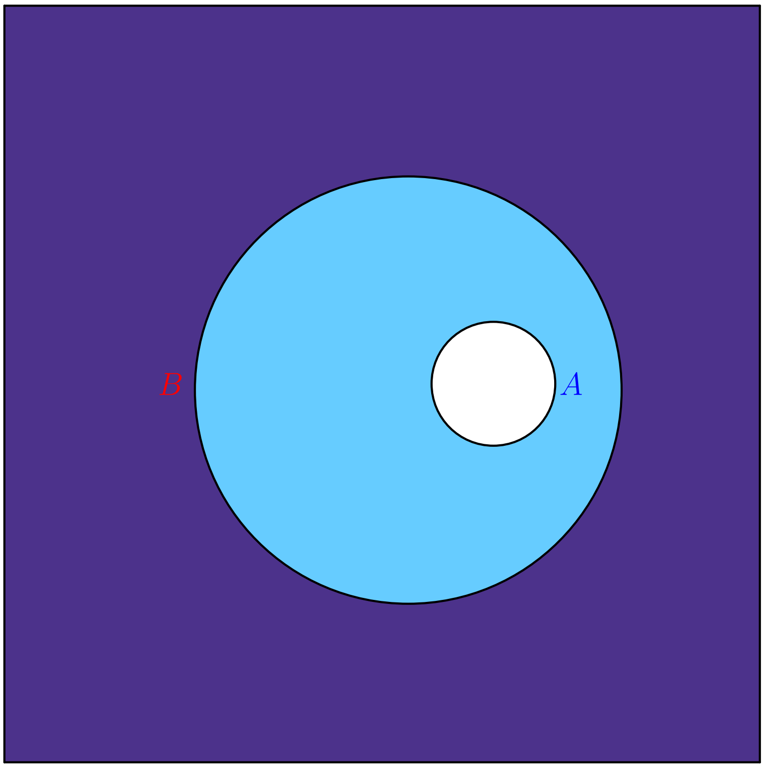
la proposition

$$C : \text{ non}Q \implies \text{non}P$$

est la contraposée de T.

C et T sont équivalent. En effet

$$T : A \subset B \qquad\qquad C : \overline{B} \subset \overline{A}$$



Exemple Démontrer

$$T : \forall a \in \mathbb{Z}, \text{ si } a^2 \text{ est pair}, \text{ alors } a \text{ est pair}$$

Remarque méthode directe, pas facile!
Preuve par contraposée:

$$C : \forall a \in \mathbb{Z}, \text{ si } \underbrace{a \text{ est impair}}_{\text{non}Q}, \text{ alors } \underbrace{a^2 \text{ est impair}}_{\text{non}P}$$

En effet (directement)

$$\begin{aligned}
a \text{ est impair} &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a = 2k+1 \\
&\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{k' \in \mathbb{Z}} + 1 \\
&\implies \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = 2k' + 1 \\
&\implies a^2 \text{ est impair}
\end{aligned}$$

Donc C est vraie et donc T est vraie.

1.2.4 Méthode par induction (ou par récurrence)

But montrer qu'une proposition $T(n)$ dépendant d'un entier positif n est vraie à partir d'un certain rang n_0:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad [\, \forall n \geq n_0, T(n) \text{ vraie }]$$

Théorème d'induction Une proposition $T(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$ si et seulement si

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $T(n_0)$ vraie.
2. $\forall n \geq n_0$ [$T(n)$ vraie $\implies$ $T(n+1)$ vraie]

Exemple Soit le nombre suivant (définition)

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Démontrer la proposition suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)! - 1$$

Notons

$$T(n) : S_n = (n+1)! - 1$$

1. Prenons $n_0 = 1$, vérifions $T(n_0)$
   (a) Calculons $S_{n_0} = S_1 = 1 \cdot 1! = 1$ (définition)
   (b) D'autres part $(n_0+1)! - 1 = 2! - 1 = 1 \quad \checkmark$.
2. A montrer

$$\forall n \geq n_0 = 1 :$$

Hypothèse	$T(n) : S_n = (n+1)! - 1$
Conclusion	$T(n+1) : S_n = (n+2)! - 1$

En effet

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= S_n + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1) \\ &= (1 + n + 1) \cdot (n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

□

1.2.5 Le contre-exemple

But Montrer qu'une proposition universelle est fausse.
Soit une proposition universelle

$$T : \forall x \in EE, \quad x \text{ vérifie } P$$

T est fausse si et seulement si non$T$ est vraie. On montera donc que la proposition existentielle non$T$ est vraie.

$$\text{non}T : \exists x \in E, x \text{ vérifie non}P$$

On montre avec l'existence d'un x ne vérifiant pas P: un contre-exemple.

Exemple

$$T: \text{ tous les nombres premiers sont impairs}$$

T est fausse, donnons un contre-exemple selon la négation de T .

$$\text{non}T: \text{ il existe un nombre premier qui est pair}$$

Par exemple $n = 2$ (**remarque**: c'est le seul)
Formellement

$$\begin{aligned} T :& \forall a \in \mathbb{N}^*, \quad a \text{ premier } \implies a \text{ impair} \\ \text{non}T :& \exists a \in \mathbb{N}^*, \quad a \text{ premier et } a \text{ pair} \end{aligned}$$