EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2A

PREPA-032(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sacha FRIEDLY

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 4

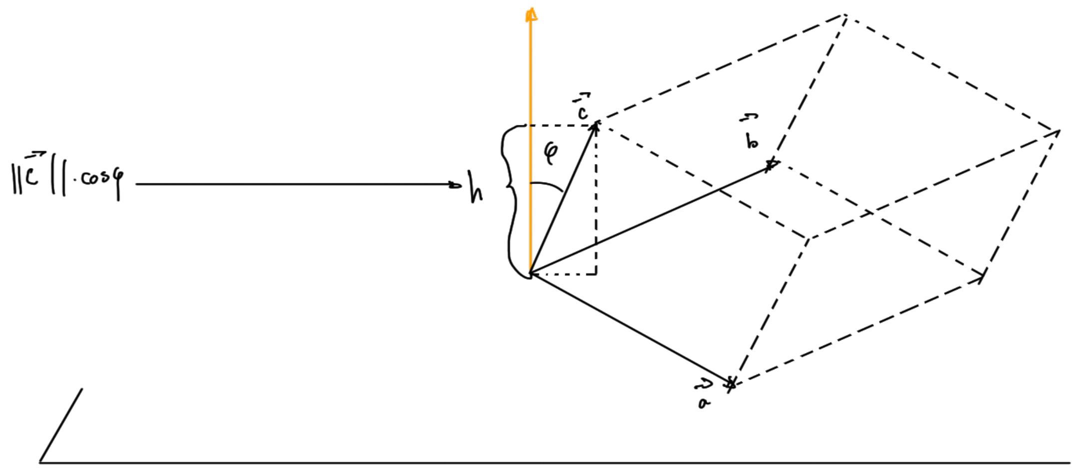
Produit mixte

Définition Le **produit mixte** des vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ (pris dans cette ordre!) est le scalaire défini par:

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] := (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$$

Sens géométrique:

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = \|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| \cdot \|\overrightarrow{c}\| \cdot \cos(\varphi)$$



$\implies |[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]|$ = Volume du parallélépipède déterminé par $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$

Propriétés

1. $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = 0 \iff \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ linéairement dépendants.
2. $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] > 0 \iff \overrightarrow{c}$ pointe dans le demi-plan espace "+" associée à $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ $\iff (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est orienté positivement
3. $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] < 0 \iff \overrightarrow{c}$ pointe dans le demi-plan espace "-" associée à $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ $\iff (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est orienté négativement

4. Dans un repère **orthonormée direct**, si
   [calcule literal du produit mixte sans faire le determinant 3x3...]

Trilinéaritée

$$[\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = \alpha_1[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] + \alpha_2[\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$$

[same for $\overrightarrow{b}$ and $\overrightarrow{c}$]

Alternance

$$[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}] = (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{c} = (-(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})) \cdot \overrightarrow{c} = -((\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}) = -[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$$

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}] = [\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$$