EPFL

MAN

Mise à niveau

Physique

PREPA-033

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sylvain BRÉCHET

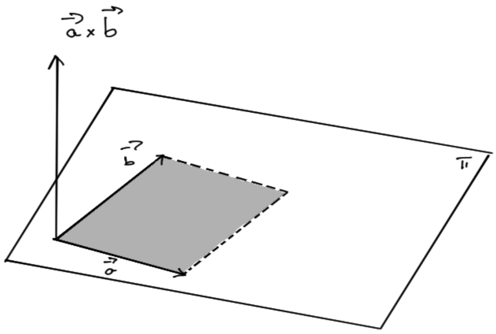
Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 6

Rotation en deux dimensions

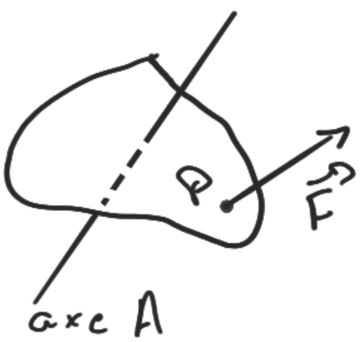
6.1 Produit vectoriel



- $\vec{a} \times \vec{b}$ est un produito
- $\vec{a} \times \vec{b}$ est orthogonal aux vecterus au plan $\pi(\vec{a}, \vec{b})$
- Le sens de $\vec{a} \times \vec{b}$

6.2 Moment de force

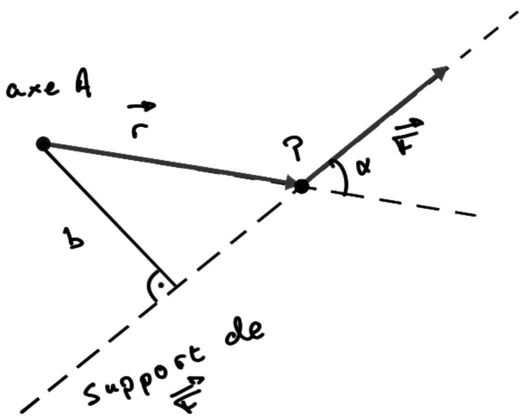
Si on veut mettre un objet en mouvement autour d'un axe fixe A, on doit appliquer une force $\vec{F}$ en un point P.



On constate que la mise en rotation dépend

1. de la force exercée $\vec{F}$
2. du point d'application P, plus précisément du bras de levier.

Bras de levier de $\vec{F}$ par rapport à l'axe A: distance de l'axe A à la droite par P et $\vec{F}$ (support de $\vec{F}$).



$$b = \|\vec{r}\| \sin(\alpha) \tag{6.1}$$

où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$.

La grandeur physique qui génère un mouvement de rotation est le moment de force définit comme le produit de levier fois la norme de la force:

$$M_A = b\|\vec{F}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\| \sin(\alpha) = \|\vec{r} \times \vec{F}\| \tag{6.2}$$

Le vecteur **moment de force** de $\vec{F}$ par rapport au point A lorsque la force est appliquée en P s'écrit:

$$\overrightarrow{M_A} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6.3}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$ et $M_A = \|\overrightarrow{M_A}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\| \sin(\alpha)$
Unité physique (SI): $[Nm]$

Remarques importantes

1. Le moment de force $\overrightarrow{M_A}$ du choix de A à préciser

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{M_A} = \vec{r} \times \vec{F} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A'}} = \vec{r}\,' \times \vec{F} = \vec{0} \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \vec{r} = \overrightarrow{AP} \\ \vec{r}\,' = \overrightarrow{A'P} \\ \|\vec{r}\| = \|\vec{r}\,'\| \end{array}$$

Donc $\overrightarrow{M_A} \neq \overrightarrow{M_{A'}}$

2. Le moment de force $\overrightarrow{M_A}$ induuit une rotation
   - autour de A
   - d'axe normal à $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$ et à $\vec{F}$
   - de sens donné par la règle de la main droite ou du tire-bouchon

   (a) Le pousse ou le tire-bouchon sort du plan : $\odot\overrightarrow{M_A}$ est sortant

Avec un choix de repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ où $\overrightarrow{e_z}$ sort du plan, i.e $\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{M_A} = M_A \overrightarrow{e_z} \quad \text{où } M_A = bF > 0 \tag{6.4}$$

(b) Le pousse ou le tire-bouchon entre dans le plan $\otimes \overrightarrow{M_A}$ est entrant

Avec un choix de repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ où $\overrightarrow{e_z}$ sort du plan:

$$\overrightarrow{M_A} = M_A \overrightarrow{e_z} \quad \text{où } M_A = -bF < 0 \tag{6.5}$$

3. Si plusieurs forces $\overrightarrow{F_i}$ sont appliquées sur l'objet considéré aux points P_i, on calcule la somme des moments de force par rapport au même point A:

$$\overrightarrow{M_A} = \sum_i \overrightarrow{M_{A,i}} = \sum_i \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i} \quad \text{avec } \overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{AP_i} \tag{6.6}$$

Cas particulier: Si les forces $\overrightarrow{F_i}$ sont appliquées en des points P_i différents, i.e. $\overrightarrow{r_i} \neq \overrightarrow{r_j}$, si $i \neq j$, la résultante des moments de forces peut re non-nulle, i.e. $\overrightarrow{M_A} \neq \overrightarrow{0}$, même si la résultante des forces est nulle, i.e. $\sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}$. C'est le cas pour un couple de forces:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{F_2} = -\overrightarrow{F_1} \quad \text{et si} \quad \overrightarrow{r_2} = -\overrightarrow{r_1}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_1} + (-\overrightarrow{r_1}) \times (-\overrightarrow{F_1}) = 2\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_1} \neq \overrightarrow{0}$$

6.3 Statique

Si un objet au repos, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mouvement de déplacement du centre de masse ou de mouvement de rotation autour du centre de masse, la résultante des forces $\overrightarrow{F}$ et la résultantes des forces $\overrightarrow{M_A}$ par rapport à tout point fixe A du référentiel sont nulles.

$$\overrightarrow{F} = \sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0} \tag{6.7}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \sum_i \overrightarrow{M_{A,i}} = \overrightarrow{0} \quad \forall A \tag{6.8}$$

6.3.1 Disque, masse et contrepoids

Un disque de masse m_d et de rayon R tourne autour du son centre de masse A. Une barre de longueur l et de masse négligeable est fixée sur le disque. Une masse m se trouve à l'extrémité de la barre. Un contrepoids de masse M est attaché à un fil de masse négligeable enroulé autour du disque. L'objet est à l'équilibre.

Objet disque + masse + contrepoids

Forces extérieures poids $(m+M+m_d)\vec{g}$, soutien (en A) $\vec{S}$

Newton (équilibre)

$$\vec{F}^{ext} = (m+M+m_d)\vec{g} + \vec{S} = \vec{0}$$

Rotation autour de A (équilibre)

$$\overrightarrow{M_A^{ext}} = \overrightarrow{M_A}(m\vec{g}) + \overrightarrow{M_A}(M\vec{g}) + \overrightarrow{M_A}(m_d\vec{g}) + \overrightarrow{M_A}(\vec{S}) = \vec{0}$$

Choix de repère: $\otimes\vec{e_z}$ entrant

- $\overrightarrow{M_A}(m\vec{g}) = \vec{r_m} \times m\vec{g} = (-l\cos(\alpha)\vec{e_x} + \cancel{l\sin(\alpha)\vec{e_y}}) \times mg\vec{e_y} = -l\cos(\alpha)mg\vec{e_z}$
- $\overrightarrow{M_A}(M\vec{g}) = \vec{r_M} \times M\vec{g} = (R\vec{e_x} + L\vec{e_y}) \times Mg\vec{e_y} = RMg\vec{e_z}$
- $\overrightarrow{M_A}(m_d\vec{g}) = \vec{r_A} \times m_d\vec{g} = \overrightarrow{AA} \times m_d\vec{g} = \vec{0}$ où $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{M_A}(\vec{S}) = \vec{r_A} \times \vec{S} = \overrightarrow{AA} \times \vec{S} = \vec{0}$

Rotation autour de A:

$$\text{selon } \vec{e_z} : -l\cos(\alpha)mg + RMg = 0$$

Ainsi,

$$\cos(\alpha) = \frac{RM}{lm} > 0 \tag{6.9}$$

Remarques:

1. Pour que l'équilibre existe ($\cos(\alpha) \leq 1$), il faut que
$$\frac{RM}{lm} \leq 1 \iff l \geq \frac{Rm}{m}$$
2. Il y a deux types de solutions pour α: l'équilibre est stable pour $\alpha \geq 0$ et instable pour $\alpha < 0$
3. Pour $m \to \infty$, on a $\cos(\alpha) \to 0$ [...]

6.4 Théorème du moment cinétique

Observation Lorsqu'on n'agit pas sur un objet considéré comme un point matériel, il suit un MRU: vitesse et quantité de mouvement sont constantes (principe d'inertie de Galilée).

6.4.1 Point matériel

2ème loi de Newton (translation)

La force résultante $\vec{F}$ modifie la quantité de mouvement $\vec{P}$

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad \text{où} \quad \vec{P} = m\vec{v} \tag{6.10}$$

2ème loi de Newton (rotation)
Par analogie avec la translation, le moment de force $\overrightarrow{M_A}$ par rapport à un point fixe A modifie la "quantité de rotation" autour de A appelée le moment de rotation cinétique $\overrightarrow{L_A}$.

6.4.2 Théorème du moment cinétique

Le moment de force $\overrightarrow{M_A}$ évalué par rapport au point A est la cause de la dérivée temporelle du moment cinétique $\overrightarrow{L_A}$:

$$\boxed{\overrightarrow{M_A} = \frac{d\overrightarrow{L_A}}{dt} = \dot{\overrightarrow{L_A}}} \tag{6.11}$$

En prenant le produit vectoriel du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$ et de la deuxième loi de Newton (translation du point matériel P):

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \dot{\vec{P}} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) - \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=\vec{0}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P})\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{AP} \times \vec{P}) = \frac{d\overrightarrow{L_A}}{dt}$$

Le moment cinétique $\overrightarrow{L_A} = \overrightarrow{AP} \times \vec{P} \equiv \vec{r} \times \vec{P}$ est défini pour une rotation autour du point A.

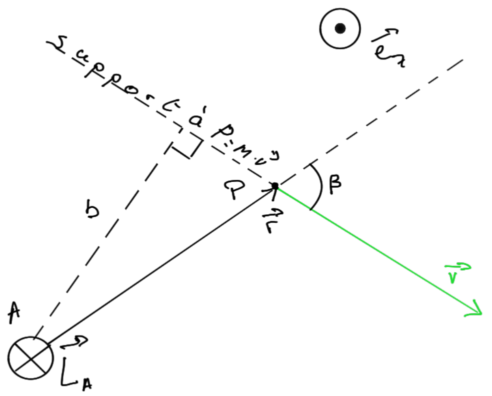
6.4.3 Moment cinétique

Le moment cinétique pour un mouvement de rotation autour d'un point fixe A d'un point matériel P est:

$$\overrightarrow{L_A} = \overrightarrow{AP} \times \vec{P} \equiv \vec{r} \times \vec{P} \tag{6.12}$$

Unité physique (SI): $[\frac{kg \cdot m^2}{s}]$

Remarque: Le moment cinétique peut être calculé la même manière que le moment de force: il est normal à $\vec{r}$ et à $\vec{P}$, donc sortant ou entrant.



- $\|\overrightarrow{L_A}\| = b\|\overrightarrow{P}\|$: bras de levier fois la quantité de mouvement
- $b = \|\overrightarrow{r}\|\sin(\beta)$ où β est l'angle formé par $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{P}$ (ou $\overrightarrow{v}$)
- $\overrightarrow{L_A} = L_A\overrightarrow{e_z}$ où $L_A = -bmv < 0$

6.4.4 Mouvement circulaire uniforme

Un objet de masse m a un mouvement circulaire uniforme si sa distance R au point fixe A est constante et que sa vitesse scalaire $v_0 = \text{cste}$.

- $\|\overrightarrow{P}\| = m\|\overrightarrow{v}\| = mv_0 = \text{cste}$
- $b = \|\overrightarrow{r}\| = R = \text{cste}$
- $\overrightarrow{L_A} = mRv_0\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\text{cste}} \implies \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{0}$

Un mouvement circulaire uniforme est caractérisé par um moment cinétique $\overrightarrow{L_A}$ est constant où A est le centre de la trajectoire circulaire.
La force $\overrightarrow{F}$ qui agit sur l'objet est une force radiale:

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = \dot{\overrightarrow{L_A}} = \overrightarrow{0} \quad \implies \quad \overrightarrow{F} \parallel \overrightarrow{r} \tag{6.13}$$

6.4.5 Mouvement rectiligne uniforme

Un point matériel a un mouvement rectiligne uniforme (MRU). Soit d la distance qui sépare le point A de la trajectoire du point matériel P de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{\text{cste}}$.

- $\|\overrightarrow{P}\| = m\|\overrightarrow{v}\| = mv_0 = \text{cste}$
- $b = d = \text{cste}$ (bras de levier)
- $$\overrightarrow{L_A} = mdv_0\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\text{cste}} \tag{6.14}$$

Un mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par un moment cinétique $\overrightarrow{L_A}$ constant par rapport à un point A quelconque. Si A sur la trajectoire $\overrightarrow{L_A} = \overrightarrow{0} \quad (d = 0)$

6.4.6 Section retirée par le prof

6.4.7 Système de points matériels (objet)

2e de Newton (translation)

$$\overrightarrow{F_i} = \dot{\overrightarrow{P_i}} = m_i \overrightarrow{a_i} \tag{6.15}$$

2e de Newton (rotation)

$$\overrightarrow{M_{A,i}} = \dot{\overrightarrow{L_{A,i}}} \tag{6.16}$$

La quantité de mouvement $\overrightarrow{P}$ et le moment cinétique $\overrightarrow{L_A}$ par rapport au point A sont des grandeurs extensives.
La quantité de mouvement totale de l'objet est :

$$\overrightarrow{P} = \sum_i \overrightarrow{P_i} \tag{6.17}$$

Le moment cinétique total l'objet par rapport au point A est:

$$\overrightarrow{L_A} = \sum_i \overrightarrow{L_{A,i}} \tag{6.18}$$

On applique la 3^e loi de Newton (action-réaction).

- Les forces intérieures s'annulent deux à deu :

  $$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = -\overrightarrow{F_{2\to 1}} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{F_{1\to 2}} + \overrightarrow{F_{2\to 1}} = \overrightarrow{0}$$

- Les moments de forces intérieures s'annulent aussi deux à deux:

  $$\overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F_{1\to 2}}) + \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F_{2\to 1}}) = \overrightarrow{0}$$

  En effet,

  $$\begin{matrix} \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F_{2\to 1}}) = b\|\overrightarrow{F_{2\to 1}}\|\overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F_{1\to 2}}) = -b\|\overrightarrow{F_{1\to 2}}\|\overrightarrow{e_z} \end{matrix} \quad \text{où} \quad \|\overrightarrow{F_{1\to 2}}\| = \|\overrightarrow{F_{2\to 1}}\|$$

Ainsi, seules les forces extérieures et les moments de forces extérieures déterminent le mouvement d'un objet:

$$\overrightarrow{F}^{ext} = \dot{\overrightarrow{P}} = m\overrightarrow{a_{CM}} \quad \text{et } \overrightarrow{M_A}^{ext} = \dot{\overrightarrow{L_A}} \tag{6.19}$$

6.4.8 Solide indéformable

On considère un objet solide indéformable en rotation autour d'un axe passant par un point A. Les positions relatives des parties de masse m_i ne changent pas ("tout bouge ensemble").

La dérivée temporelle de l'angle θ_i repérant la masse m_i est identique pour les m_i. C'est la vitesse angulaire de rotation ω_A du solide autour de A:

$$\theta = \omega_A \tag{6.20}$$

La vitesse scalaire de m_i (d'abscisse curviligne $s_i = r_i\theta_i$) est

$$v_i = \dot{s}_i = r_i\dot{\theta}_i = r_i\omega_A$$

Le moment cinétique de la masse m_i par rapport au point A s'écrit:

$$\overrightarrow{L_{A,i}} = L_{A,i} \cdot \overrightarrow{e_z} \quad \text{où} \quad L_{A,i} = m_i r_i^2 \omega_A$$

Le moment cinétique du solide par rapport à A s'écrit:

$$\overrightarrow{L_A} = \sum_i \overrightarrow{L_{A,i}} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega_A \overrightarrow{e_z} \equiv I_A \omega_A \overrightarrow{e_z} \tag{6.21}$$

Le **moment d'inertie** du solide par rapport à un axe de symétrie passant par A est défini comme,

$$I_A = \sum_i m_i r_i^2 \tag{6.22}$$

Unité phyisque (SI): $[kg \cdot m^2]$

C'est une caractéristique du solide dépendant de sa masse et de la répartition de celle-ci: plus la masse est loin de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie est grand.

Vitesse angulaires vectorielle $\overrightarrow{\omega_A}$: on associe à la rotations le vecteur $\overrightarrow{\omega_A}$ parallèle à l'axe de rotation, de sens donné par la règle du tir-bouchon et de norme ω_A (unité (SI): $\left[s^{-1}\right]$)

Remarque: La vitesse de la partie m_i en mouvement circulaire autour de A s'écrit:

$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{\omega_A} \times \overrightarrow{r_i} \tag{6.23}$$

Pour une rotation autour d'un axe de symétrie de l'objet:

$$\overrightarrow{L_A} = I_A \cdot \overrightarrow{\omega_A} \tag{6.24}$$

$$\overrightarrow{M_A} = I_A \cdot \dot{\overrightarrow{\omega_A}} \tag{6.25}$$

où $\dot{\overrightarrow{\omega_A}}$ est le vecteur accélération angulaire du solide autour de l'axe

Transaltion		**Rotation**
$\overrightarrow{F}^{ext} = m \cdot \dot{\overrightarrow{v_{CM}}}$	$\Longleftrightarrow$	$\overrightarrow{M_A} = I_A \cdot \dot{\overrightarrow{\omega_A}}$
$m =$ masse d'inertie		$I_A =$ moment d'inertie

6.4.9 Moments d'inertie

1. Anneau (cercle) ou cylindre creux, par rapport à l'axe de symétrie passant par le centre de masse:

$$\begin{aligned} \|\vec{r_i}\| &= R \quad \forall i \\ I_{CM} = \sum_i m_i r_i^2 &= \sum_i m_i R^2 = mR^2 \end{aligned} \tag{6.26}$$

2. Disque ou cylindre plein, par rapport à l'axe de symétrie passant par le centre de masse:

$$I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2 \tag{6.27}$$

3. Sphère par rapport à un axe de symétrie passant par le centre de masse:

$$I_{CM} = \frac{2}{3} mR^2 \text{ (intérieur vide)} \tag{6.28}$$

4. Boule par rapport à un axe de symétrie passant par le centre de masse:

$$I_{CM} = \frac{2}{5} mR^2 \text{ (intérieur plein)} \tag{6.29}$$

5. Tige mince par rapport à un axe de symétrie passant par le centre de masse:

$$I_{CM} = \frac{1}{12} mL^2 \tag{6.30}$$

6. **Règle de Steiner**: connaissant I_{CM} par rapport à un axe passant par le centre de masse, on cherche à déterminer I_A par rapport à un axe parallèle passant par A.

$$\vec{r_i} = \overrightarrow{r_{CM}} + \vec{r_i'} \quad \text{où } \overrightarrow{r_{CM}} = \vec{d}$$

$$r_i^2 = (\vec{d} + \vec{r_i'}) \cdot (\vec{d} + \vec{r_i'}) = d^2 + 2 \cdot \vec{d} \cdot \vec{r_i'} r_i'^2$$

$$I_A = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i d^2 + 2\vec{d} \cdot \left(\sum_i m_i \vec{r_i'} \right) + \sum_i m_i r_i'^2$$

$$= md^2 + 2\vec{d} \cdot m \underbrace{\overrightarrow{r'_{CM}}}_{=\vec{0}} = I_{CM}$$

$$I_A = I_{CM} + md^2 \vec{r_i} \overrightarrow{r_{CM}} \tag{6.31}$$

6.4.10 Fil enroulé sur une roue d'axe vertical

On considère un fil de masse négligeable enroulé sur une roue de rayon R et d'axe vertical fixe. On tire sur le fil avec une force $\vec{F}$ constante.

Objet Roue de masse m et rayon R

Forces horizontales $\overrightarrow{F}$ et soutien $\overrightarrow{S}$

Translation (CM immobile): $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{S} = \overrightarrow{0}$

Rotation (par rapport à $A \equiv CM$): $\overrightarrow{M_a}(\overrightarrow{F}) = \dot{\overrightarrow{L_A}} = I_A \dot{\overrightarrow{\omega_A}}$

selon $\overrightarrow{e_z}$: $RF = I_A \dot{\omega}_A \implies \dot{\omega}_A = \frac{RF}{I_A}$

1. **Anneau**: $\dot{\omega}_A = \frac{RF}{mR^2} = \frac{F}{mR}$
2. **Disque**: $\dot{\omega}_A = \frac{RF}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2F}{mR}$

(même masse m et rayon R)

6.4.11 Glisseur entrainé par un contre poids

On considère un glisseur de masse M sur un rail à air horizontal. Il est attaché à un fil qui coulisse sur une poulie de moment d'inertie I_A et il est entrainé par un contre poids de masse m.

Méthode : On considère un glisseur, le contrepoids et ensuite les lines entre les objets.

1. **Objet** : glisseur de masse M (translation horizontale)

   Forces : poids $M\overrightarrow{g}$, soutien $\overrightarrow{S}$, tension du fil $\overrightarrow{T}$

   Newton : $M\overrightarrow{g} + \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} = M\overrightarrow{a_M}$

   $$\text{selon } \overrightarrow{e_x} : T = Ma_M$$

2. **Objet** : contrepoids (translation verticale)

   Forces : poids $m\overrightarrow{g}$, tension $\overrightarrow{T}'$

   Newton : $m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T}' = m\overrightarrow{a_m}$

   $$\text{selon } \overrightarrow{e_y} : mg - T' = ma_m$$

3. **Objet** : poulie (rotation)

   Forces : poids $m'\overrightarrow{g}$, soutien $\overrightarrow{N}$, tensions $-\overrightarrow{T}$ et $-\overrightarrow{T}'$

   Rotation par rapport à A :

   $$\underbrace{\overrightarrow{M_A}(m'\overrightarrow{g})}_{=\overrightarrow{0}} + \underbrace{\overrightarrow{M_A}}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{M_A}(-\overrightarrow{T}) + \overrightarrow{M_A}(-\overrightarrow{T}') = I_A \dot{\overrightarrow{\omega_A}}$$

   $$\text{selon } \overrightarrow{e_z} : -RT + RT' = I_A \dot{\omega}_A$$

   Si le moment d'inertie est non-nul, i.e. $I_A \neq 0$, alors les normes de normes de tension sont différentes, i.e. $T \neq T'$

4. **Liaison glisseur - poulie**: La vitesse scalaire v_M du glisseur est la même que celle d'un point sur le bord de la poulie (frottement statique) dont la vitesse angulaire est ω_A.

$$v_M = R\omega_A \implies a_M = R\dot{\omega}_A$$

5. **Liaison poulie - contrepoids**: La vitesse v_m du contrepoids est la même que celle d'un point du bord de la poulie.

$$v_m = R\omega_A \implies a_m = R\dot{\omega}_A \implies a_M = a_m = a$$

6. **Résolution**: $\omega \equiv \omega_A$ et $I_{CM} \equiv I_A$

$$\left.\begin{array}{l} T = Ma = MR\dot{\omega} \\ mg - T' = ma = mR\dot{\omega} \\ -RT + RT' = I_{CM}\dot{\omega} \end{array}\right\} \implies mgR = (MR^2 + mR^2 + I_{CM})\dot{\omega}$$

$$\implies \dot{\omega} = \frac{mgR}{mR^2 + mR^2 + I_{CM}} \tag{6.32}$$

$$\implies a = \frac{m}{M + m + \frac{I_{CM}}{R^2}} g = R\dot{\omega}$$

6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point

Objet: solide

Forces: $m\vec{g}$ poids, $\vec{S}$ soutien

Rotation par rapport à A:

$$\overrightarrow{M_A^{ext}} = \overrightarrow{M_A}(m\vec{g}) = I_A\dot{\overrightarrow{\omega_A}}$$

$$\text{selon } \vec{e_z} : -d\sin(\alpha)mg = I_A\dot{\omega}_A = I_A\ddot{\alpha}$$

Soit

$$\Omega^2 = \frac{mgd}{I_A} > 0 \implies \ddot{\alpha} = -\Omega^2\sin(\alpha) \tag{6.33}$$

Dans l'approximation des petits angles: $\alpha << 1 \implies \sin(\alpha) \simeq \alpha$

$$\ddot{\alpha} = -\Omega^2\alpha \quad \text{(oscillateur harmonique)} \tag{6.34}$$

Plus I_A est grand, plus la période d'oscillation est longue.
[missing lesson 9/05/2019]

6.5 missing

6.6 Théorème de l'énergie cinétique d'un solide

6.6.1 Théorème de l'énergie cinétique du centre de masse

Le théorème de l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse d'une position initiale $\overrightarrow{r_1}$ à une position finale $\overrightarrow{r_2}$ s'écrit

$$E_{cin,CM}(2) - E_{cin,CM}(1) = \omega_{1\to 2}^{ext} \tag{6.35}$$

où $E_{cin,CM} = \frac{1}{2}mV_{CM}^2$ et $\omega_{1\to 2}^{ext} = \int_1^2 \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r_{CM}}$ avec $\overrightarrow{F}^{ext}$ est la résulatnte des forces extérieures.
La dérivée temporelle de l'énergie cinétique du centre de masse s'écrit

$$\dot{E}_{cin,CM} = \overrightarrow{F}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_{CM}} \tag{6.36}$$

6.6.2 Théorème de l'énergie cinétique d'un corps

Un corps est un ensemble de points matériels
L'énergie cinétique du corps s'écrit:

$$E_{cin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{6.37}$$

La variation de l'énergie cinétique est due au travail des forces qui s'exercent sur chaque point matériel.

$$\dot{E}_{cin} = \sum_i \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{v_i} = \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \overrightarrow{v_i} + \sum \overrightarrow{F_i}^{int} \cdot \overrightarrow{v_i} \tag{6.38}$$

Ainsi

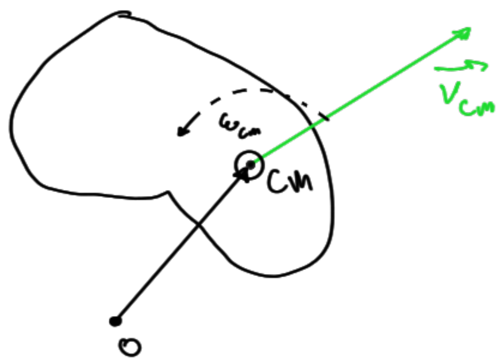
$$dE_{cin} = \sum_i \overrightarrow{F_i} \cdot d\overrightarrow{r_i} = \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} d\overrightarrow{r_i} + \sum \overrightarrow{F_i}^{int} \cdot d\overrightarrow{r_i} = \delta\omega^{ext} + \delta\omega^{int} \tag{6.39}$$

La variation d'énergie cinétique (totale) est donnée par le travail des forces extérieures et intérieures

$$E_{cin}(2) - E_{cin}(1) = \omega_{1\to 2}^{ext} + \omega_{1\to 2}^{int} \tag{6.40}$$

6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

Le mouvement d'un solide indéformable est caractérisé par la vitesse $\overrightarrow{v_{CM}}$ du centre de masse et la vitesse angulaire de rotation autour du centre de masse $\overrightarrow{\omega_{CM}}$



La vitesse d'un point matériel du solide s'écrit:

$$\vec{v_i} = \overrightarrow{v_{CM}} + \vec{v_i}' = \overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{\omega_{CM}} \times \vec{r_i}'$$

où $\vec{v_i}' = \overrightarrow{\omega_{CM}} \times \vec{r_i}'$

car le point matériel de masse m_i a un mouvement circulaire autour du centre de masse

Son énergie cinétique s'écrit,

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{\omega_{CM}} \times \vec{r_i}'\right)^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E_{cin} &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(v_{CM}^2 + 2\overrightarrow{v_{CM}} \cdot (\overrightarrow{\omega_{CM}} \times \vec{r_i}') + \omega_{CM}^2 r_i^2\right) \\
&= \frac{1}{2}mV_{CM}^2 + \overrightarrow{v_{CM}} \cdot \left(\overrightarrow{\omega_{CM}} \times m\underbrace{\overrightarrow{r_{CM}}'}_{=\vec{0}}\right) + \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_i m_i r_i'^2}_{=I_{CM}}\right)\omega_{CM}^2 \\
&= \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2
\end{aligned}$$

L'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse $E_{cim,CM}$ et de l'énergie cinétique de rotation propre $E_{cin,rot}$ du solide autour du centre de masse

$$E_{cin} = E_{cin,CM} + E_{cin,rot} \tag{6.41}$$

où

$$E_{cin,CM} = \frac{1}{2}mV_{Cm}^2 \tag{6.42}$$

et

$$E_{rot,CM} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \tag{6.43}$$

6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable s'écrit,

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{cin} &= \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_i} + \sum_i \overrightarrow{F_i}^{int} \cdot \overrightarrow{v_i} \\
&= \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_i} + \sum_i \overrightarrow{F_i}^{int} \cdot (\overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{\omega_{CM}} \times \overrightarrow{r_i}') \\
&= \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_i} + \sum_i \overrightarrow{F_i}^{int} \cdot \overrightarrow{v_{CM}} + \sum_i \overrightarrow{F_i}^{int} \cdot (\overrightarrow{\omega_{CM}} \times \overrightarrow{r_i}')
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b} \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a})$

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{cin} &= \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_i} + \left(\sum_i \overrightarrow{F_i}^{int}\right) \cdot \overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{\omega_{CM}} \cdot \left(\sum_i \overrightarrow{r_i}' \times \overrightarrow{F_i}^{int}\right) \\
&= \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_i} + \underbrace{\overrightarrow{F}^{int}}_{=\overrightarrow{0}} \cdot \overrightarrow{v_{CM}} + \underbrace{\overrightarrow{M_{CM}}^{int}}_{=\overrightarrow{0}} \overrightarrow{\omega_{CM}} \\
&= \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_i}
\end{aligned}$$

La variation de l'énergie cinétique est due au travail des forces extérieures $\overrightarrow{F_i}^{ext}$ qui s'exercent sur chaque point matériel i.

$$\dot{E}_{cin} = \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_i}$$

On multiplie cette relation par l'intervalle de temps infinitésimal dt. Ainsi

$$dE_{cin} = \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot d\overrightarrow{r_i} = \delta\omega^{ext} \tag{6.44}$$

Par intégration de (1) et (2), on obtient le théorème de l'énergie cinétique,

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}(2) - E_{cin}(1) = \omega^{ext}_{1\to 2} = \sum_i \int_1^2 \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot d\overrightarrow{r_i} \tag{6.45}$$

Remarque: Pour un solide indéformable, les forces intérieures ne travaillent pas (⚠ pas vrai pour les liquides)

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique s'écrit,

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{cin} &= \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_i} = \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} (\overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{\omega_{CM}} \times \overrightarrow{r_i}') \\
&= \sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{\omega_{CM}} \cdot \left(\sum_i \overrightarrow{r_i}' \times \overrightarrow{F_i}^{ext}\right) \\
&= \left(\sum_i \overrightarrow{F_i}^{ext}\right) \cdot \overrightarrow{v_{CM}} + \left(\overrightarrow{M_{CM}}^{ext}\right) \cdot \overrightarrow{\omega_{CM}} \\
&= \overrightarrow{F}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_{CM}} + \overrightarrow{M_{CM}}^{ext} \cdot \overrightarrow{\omega_{CM}}
\end{aligned}$$

et

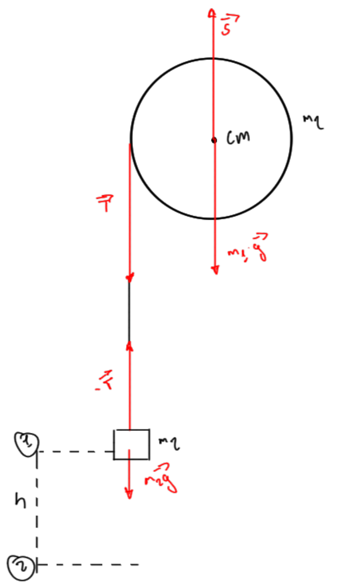
$$\dot{E}_{cin} = \dot{E}_{cin,CM} + \dot{E}_{cin,CM} \tag{6.46}$$

ainsi,

$$\dot{E}_{cin,CM} = \overrightarrow{F}^{ext} \cdot \overrightarrow{v_{CM}} \tag{6.47}$$

$$\dot{E}_{cin,rot} = \overrightarrow{M_{CM}}^{ext} \cdot \overrightarrow{\omega_{CM}} \tag{6.48}$$

6.7 Poulie entraînée par une masse



Une poulie est entraînée par une masse initialement au repos. Quelle est la vitesse v de la masse après une chute d'une hauteur h?

Objet 1 : poulie de masse m_1

Forces poids $m_1\overrightarrow{g}$, soutien $\overrightarrow{S}$, tension $\overrightarrow{T}$

Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2 - 0 = \omega_{1\to 2}^{ext} = \omega_{1\to 2}(\overrightarrow{T}) \tag{6.49}$$

Objet masse d'entraînement m_2

Forces poids $m_1\overrightarrow{g}$, tension $-\overrightarrow{T}$

Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2}m_2v^2 - 0 = \omega_{1\to 2}^{ext} = \omega_{1\to 2}(m_2\overrightarrow{g}) + \omega_{1\to 2}(-\overrightarrow{T}) = mgh + \omega_{1\to 2}(-\overrightarrow{T}) \tag{6.50}$$

On somme les équations (6.49) et (6.50),

$$\frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh + \omega_{1\to 2}(\overrightarrow{T}) + \omega_{1\to 2}(-\overrightarrow{T})$$

où $\omega_{1\to 2}(\overrightarrow{T}) + \omega_{1\to 2}(-\overrightarrow{T}) = 0$
ainsi

$$\frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh \tag{6.51}$$

Compte tenu de la liaison,

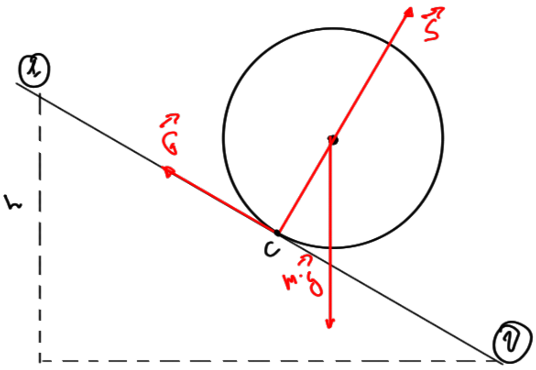
$$V = R\omega_{CM} \implies \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2 = \frac{1}{2}\frac{I_{CM}}{R^2}v^2$$

on a une relation entre v et h:

$$\frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)\cdot v^2 = m_2gh \implies v^2 = \frac{2gh}{1+\frac{I_{CM}}{R^2}} < 2gh \tag{6.52}$$

Remarque: En chute libre: $v^2 = 2gh$

6.7.1 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



Une roue initialement au repos roule sans glisser sur un plan incliné. Que vaut la vitesse de la roue après une descente d'une hauteur h?

Objet roue

Forces poids $m \cdot \vec{g}$, soutien $\vec{S}$, frottement statique $\vec{f}$

Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega_{CM}^2 - 0 = \omega_{1\to 2}^{ext} = \omega_{1\to 2}(m\vec{g}) + \omega_{1\to 2}(\vec{f}) \tag{6.53}$$

Comme pour un roulement sans glissement la vitesse du point de contact C est nulle. Ainsi,

$$\vec{v_C} = \vec{0} \implies d\vec{r_C} = \vec{0} \implies \omega_{1\to 2}(\vec{f}) = \int_1^2 \vec{f} codtd\vec{r_c} = \vec{0}$$

Ainsi la force de frottement **statique** $\vec{f}$ ne travaille pas!

Ainsi

$$\omega_{1\to 2}(\vec{f}) = 0 \tag{6.54}$$

de plus

$$\omega_{1\to 2}(m\vec{g}) = mgh \tag{6.55}$$

Donc la relation (6.53) devient

$$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega_{CM}^2 = mgh \tag{6.56}$$

Avec la liaison,

$$V = V_{CM} = R\omega_{CM}$$

on obtient une relation entre v et h:

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{CM}}{R^2}\right) r^2 = mgh \implies v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{CM}}{mR^2}} < 2gh \tag{6.57}$$

Remarque: Cette vitesse est la même que celle du contrepoids de contrepoids de l'exemple précédent.