

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 1A  
PREPA-031(A)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

## Chapter 5

# Polynômes complexes

### 5.1 Définition

Un polynôme en  $z$  à coefficients complexes est une combinaison linéaire de puissances entières positives de  $z$ .

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

avec  $a_k \in \mathbb{C}_1$ ,  $k = 0, \dots, n$

**Remarque:** Si  $z$  est une variable complexe,  $P$  définit une application.

$$\begin{aligned} P : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto P(z) \end{aligned}$$

**Remarque:** Les opérations restent les mêmes que sur  $\mathbb{R}[x]$

### 5.2 Théorème fondamentale de l'algèbre

**Théorème:** Tout polynôme (non constant)  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  possède au moins une racine complexe.

On dit que  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos.

**Exemple:** Le polynôme

$$P(z) = z^{17} + 122iz^3 - 12 - 12i$$

admet  $z_0 = 1 + i$  comme racine.

**Corollaire:** Les polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[z]$  sont du premier degré. (On peut toujours factoriser  $(z - z_0)$ ,  $z_0$  une racine).

**Corollaire:** Formules de Viète

- $P_2(z) = az^2 + bz + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{C}$  et  $a \neq 0$

Les racines existent:  $z_1$  et  $z_2$ .

Alors

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad \text{où } z_1, z_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $P_3(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ ,  $a \neq 0$

Les racines existent:  $z_1, z_2$  et  $z_3$  et

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a} \quad z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{c}{a} \quad z_1 z_2 z_3 = -\frac{d}{a}$$

- $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $a_n \neq 0$

Les racines existent:  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  où

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

**5.3 Décompositions dans  $\mathbb{R}[x]$** 

**Théorème:** Soit  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$  avec  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, \dots, n$

Alors  $z$  racine de  $P$

$$\iff P(z) = 0$$

$$\iff \overline{P(z)} = 0$$

$$\iff \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} = \overline{a_n} \overline{z^n} + \dots + \overline{a_0} \\ = a_n \overline{z}^n + \dots + a_0 = P(\overline{z})$$

**Corollaire:** Soit  $P(z) = az^2 + bz + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$

Alors  $P(z)$  possède

- soit deux racines réelles, distinctes ou confondues
- soit deux racines complexes de partie imaginaire non nulle, mais conjuguées l'une de l'autre.

**Théorème:** Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[x]$  sont

- soit du premier degré
- soit du second degré, à discriminant négatif

En effet, tout polynôme  $P$  à coefficients réels possède, vu comme un polynôme complexe, au moins une racine  $z_0$ .

- Si cette racine est réelle,  $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$  et  $P(x)$  est divisible par  $x - x_0$ .
- Si cette racine n'est pas réelle ( $\text{Im}(z_0) \neq 0$ )  $\overline{z_0}$  est aussi racine de  $P$ .  $P$  est aussi divisible par  $(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - 2\text{Re}(z_0)x + |z_0|^2$   
C'est un polynôme réel à discriminant négatif.

$$\Delta' = (\text{Re}(z_0))^2 - |z_0|^2 = -(\text{Im}(z_0))^2 < 0$$

**Exemple:** Décomposer un facteur irréductible dans  $\mathbb{R}[x]$

$$P(x) = x^4 + 1$$

- $P$  est de coefficients réels et de degré 4, sans racine réelles:  $P$  a deux paires de racines complexes conjuguées.
- racine complexes de  $P : x = (r, \varphi)$

$$x^4 = -1 = (1, \pi + k \cdot 2\pi) = (r^4, 4\varphi)$$

$$r^4 = 1 \iff r = 1 \quad (\text{car } r \in \mathbb{R}_+)$$

$$\iff$$

$$4\varphi = \pi + k \cdot 2\pi \iff \varphi = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les solutions sont

$$S = \left\{ \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} \right\}$$

- Factorisation:

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{i^2}{2}\right) \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{i^2}{2}\right) \\ &= \underbrace{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}_{\text{irr. dans } \mathbb{R}[x_2]} \underbrace{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}_{\text{irr. dans } \mathbb{R}[x_2]} \end{aligned}$$