

EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B
PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Calcul différentiel

3.1 Dérivée d'une fonction

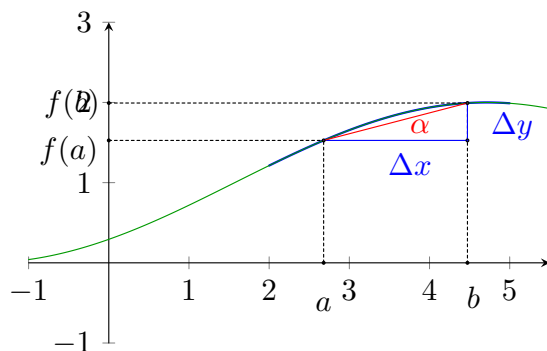
3.1.1 Définitions

Soit f définie sur un voisinage de x_0 , posons $y = f(x)$. Une information **locale** sur le comportement de f sur un voisinage de x_0 est donné par le quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

appelé le rapport de Newton de f en x_0 .

- Δx est l'accroissement de la variable indépendante x .
- Δy est l'accroissement correspondant liée à Δx .



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha) \text{ est la pente}$$

de la sécante passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$

En gardant x_0 fixe, on fait tendre $\Delta x \rightarrow 0$

Alors

$$x_0 + \Delta x \rightarrow x_0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$$

si f est continue en x_0 , alors

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

est une FI de type " $\frac{0}{0}$ "

Trois cas peuvent se présenter

1. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'existe pas

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$2. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

Exemple:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}, \quad x_0 = 0$$

$$3. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = 4$$

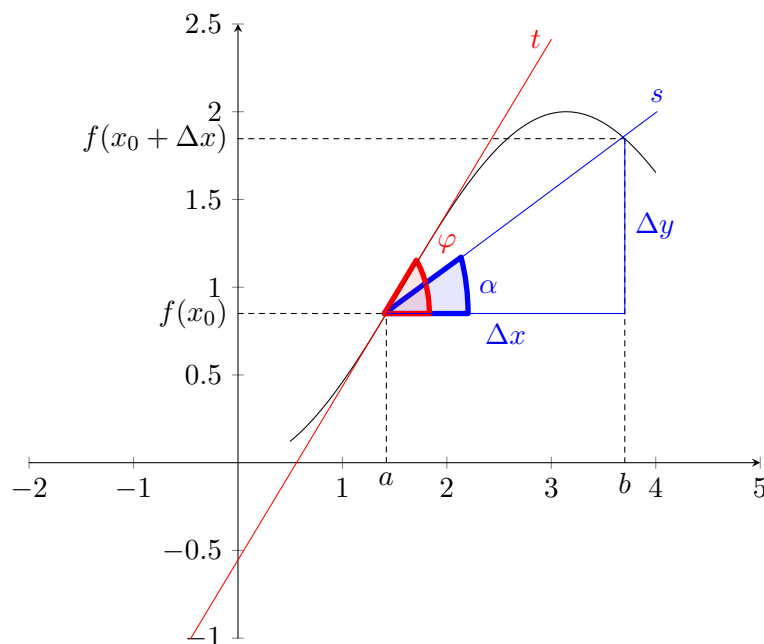
Définition: Soit f définie sur un voisinage de x_0 . On dit que f est dérivable en x_0 . Si

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existe et on note $f'(x_0)$ cette limite.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

est appelé **nombre dérivé** de f en x_0



La sécant s tends vers la "droite-limite" t .

$$\alpha \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \varphi$$

Cette "droite-limite" est appelée la tangente à

$$y = f(x_0) \text{ en } x_0$$

La pente m de la tangente vaut

$$m = \tan(\varphi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Donc l'équivalente de t s'écrit

Tangente de $y = f(x)$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Théorème: Soit f définie sur un voisinage de x_0 . Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0$$

Démonstration f est dérivable en x_0 donc

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= f'(x_0) \\ \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)}_{:=r(\Delta x)} &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta x) = 0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$

Et lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, on a

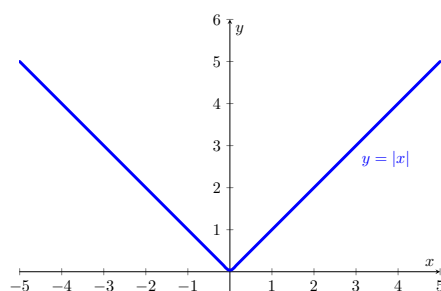
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot f'(x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \overbrace{r(\Delta x)}^{\rightarrow 0}}_{\rightarrow 0}$$

f est donc continue en x_0

□

⚠ La réciproque est fausse ⚠

Contre-exemple



$$f(x) = |x|, \quad x_0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad |x| \Big|_{x=0} = 0$$

donc $|x|$ est continue en $x = 0$

Mais

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

n'existe pas donc $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x \rightarrow 0$.

Définitions:

- On dit que f est dérivable à gauche en x_0 , si

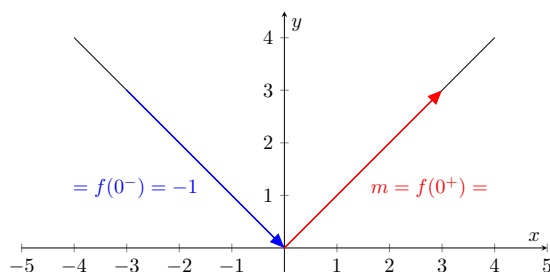
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, on note ce nombre $f'(x_0^-)$ et il représente la pente de la demi-tangente à gauche en x_0 .

- de même f est dérivable à droite en x_0 , si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, $f'(x_0^+)$ et il représente la pente de la demi-tangente à droite en x_0 .

Exemple:

$$f(0^-) = -1$$

$$f(0^+) = +1$$

Définitions: Si $I \subset \mathbb{D}_f$

- Si f est dérivable en tout $x_0 \in I$, on définit:

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

appelé la fonction dérivée de f sur I .

- Si f est dérivable sur I , et si f' est continue sur I , alors on dit que f est continument dérivable sur I et on note $f \in \mathbb{C}^1$

3.1.2 Règles de dérivation

(C.f. exercice facultatif série 8)

Soient f et g dérivable sur $I \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Si $g(x) \neq 0, \forall x \in I$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

En particulier

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Théorème: Dérivée de la composée

Soit f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

Dérivée de la composée

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Démonstration

- Rappel:

$$\begin{aligned} r(\Delta x) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \\ \implies f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x) \end{aligned}$$

avec

$$r(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

- Dérivée $g \circ f(x)$

$$\begin{aligned} g \circ f(x + h) &= g(f(x + h)) \\ &= g(f(x) + \underbrace{f(x + h) - f(x)}_{=\Delta}) \\ &= g(f(x)) + g'(f(x)) \cdot \underbrace{(f(x + h) - f(x))}_{=\Delta} + r(f(x + h) - f(x)) \cdot \underbrace{(f(x + h) - f(x))}_{=\Delta} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + r(f(x + h) - f(x)) \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x) + \underbrace{r(f(x + h) - f(x))}_{\rightarrow 0} \cdot f'(x_0)$$

D'où

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

3.1.3 Dérivées de quelque fonctions

1. $f(x) = c$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

2. $f(x) = x$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$

3. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ à démontrer par récurrence

- Vérification pour $n = 1$:

$$(x)' = 1 \text{ et } n \cdot x^{n-1} \Big|_{n=1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

- Démonstration du pas de récurrence:

Hypothèse: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ pour un $x \in \mathbb{N}^*$ donné

Conclusion: $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$

Preuve:

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (x^n)' \\ &= x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n\end{aligned}$$

4. $f(x) = x^{-m}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $x \neq 0$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{m \cdot x^{m-1}}{(x^m)^2} \\ &= -m \cdot x^{m-1-2m} = -m \cdot x^{-m-1}\end{aligned}$$

Donc $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

5. $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$

$$y = x^{\frac{p}{q}} \iff y^q = x^p$$

En dérivant les deux termes par rapport à x , on a

$$\begin{aligned}q \cdot y^{q-1} \cdot y' &= p \cdot x^{p-1} \\ y' &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot y}{y^{q-1} \cdot y} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$

Donc

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad x > 0$$

En particulier

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Exemples:

1. Soit f une fonction

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 1]$$

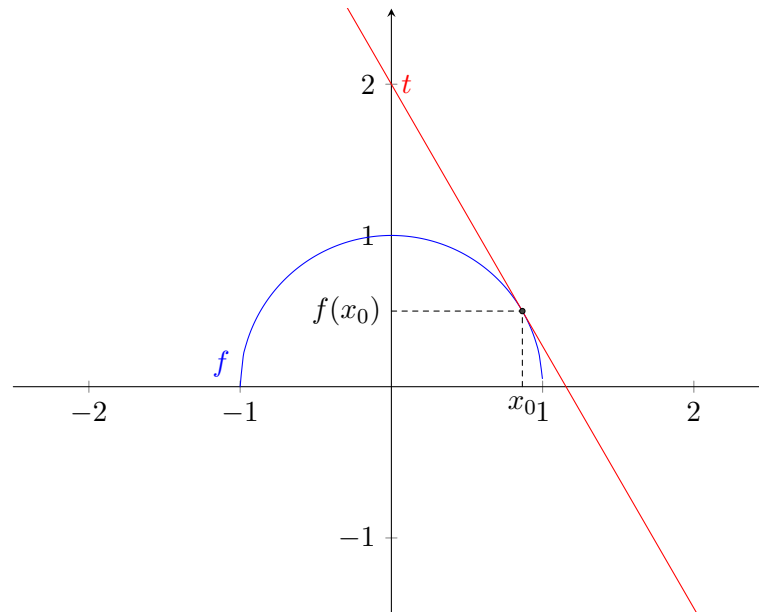
L'équation de t tangente à $y = f(x)$ en $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- $f(x_0) = \frac{1}{2}$
- $f'(x) = \frac{(-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1$

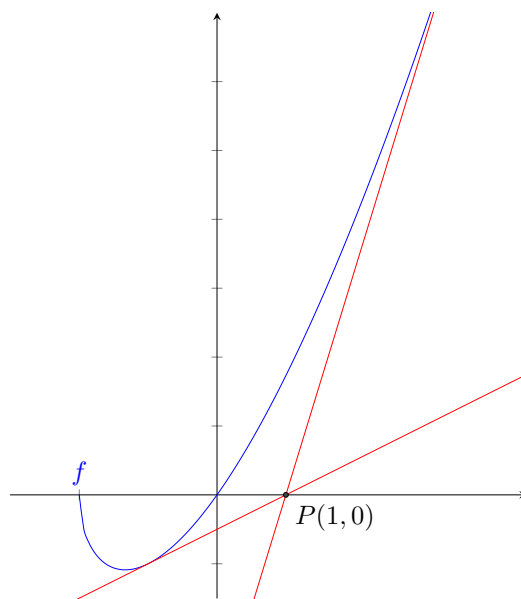
$$f'(x_0) = f'(x) \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$t : y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



2. $f(x) = x \cdot \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$

Tangente au graphe de f issues du point $P(1, 0)$



$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$P \in t \implies y_p - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_p - x_0)$$

$$\implies 0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0)$$

$$\text{avec } f(x_0) = x_0 \cdot \sqrt{2 + x_0},$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2+x} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \\ &= \frac{2 \cdot (2+x) + x}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \frac{3x+4}{2 \cdot \sqrt{2+x}}, \quad x \geq -2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} -x_0 \cdot \sqrt{2+x_0} &= \frac{3x_0+4}{2 \cdot \sqrt{2+x_0}} \cdot (1-x_0) \\ \iff -2x_0(2+x_0) &= 3x_0+4-3x_0^2-4x_0 \\ \iff x_0^2-3x_0-4 &= 0 \iff (x_0-4) \cdot (x_0+1) = 0 \\ x_0 = -1 : \quad t : y+1 &= \frac{1}{2}(x+1) \\ x_0 = 4 : \quad t : 8x - \sqrt{6}y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

3.1.4 Dérivée d'ordre supérieure

Soit f dérivable sur I , si f' est dérivable sur I , on peut dériver f' sur I et on note

$$(f')' = f''$$

et ainsi de suite

$$(f'')' = f'''$$

etc.

Définition par récurrence:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad n \in \mathbb{N}^*$$

avec $f^{(0)}(x) = f(x)$

Exemples:

1. $f(x) = x^p, \quad p \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1) & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

2. $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f^{(3)}(x) = \sin(x), \quad f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

Conjecture:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Définition par récurrence:

- Vérification:

- $n = 0$: $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=0} = f^{(0)}(x)$

- $n = 1$: $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=1} = -\sin(x) = f'(x)$

- Démonstration du pas de récurrence:

- Hypothèse:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pour un } n \in \mathbb{N} \text{ donné}$$

- Conclusion:

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

-

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = \left[\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \\ &= \cos'\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)' = \\ &= -\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = \cos\left(x + \left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

□

Remarque: Si f est n -fois dérivable sur I et si $f^{(n)}(x)$ est continue sur I , alors on note

$$f \in \mathbb{C}_I^n$$

Exemple:

$$\cos(x) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}$$

3.2 Différentielles et approximations linéaires

3.2.1 Différentielles

Définitions:

- La différentielle de la variable indépendante x , notée dx est l'accroissement infinitésimal de cette variable

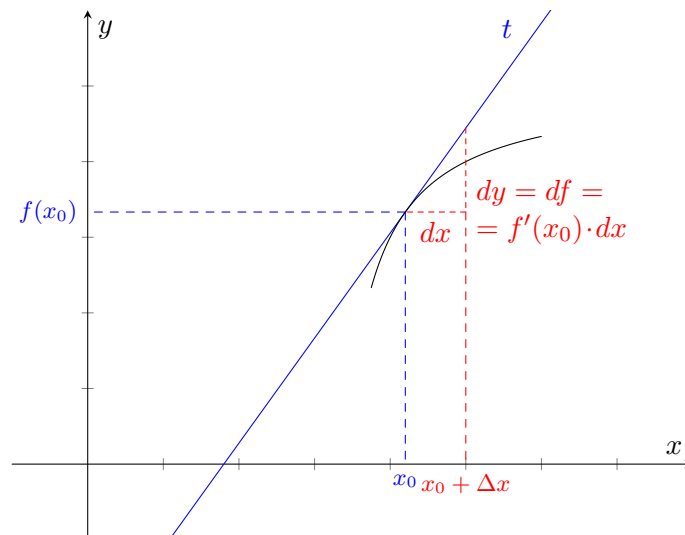
$$dx = \Delta x, \quad (\text{lorsque } \Delta x \rightarrow 0)$$

- La différentielle de la variable dépendante y (ou de la fonction f), notée

$$dy \text{ ou } df$$

en x_0 est la fonction linéaire de dx définie par

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$



La différentielle dy en x_0 est l'accroissement des y correspondant à dx , mesuré sur la tangente au graphe de f en x_0 .

La définition des différentielles induit la notation de Leibniz

$$dy = f'(x_0) \cdot dx \implies \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

3.2.2 Approximation linéaire

Rappel Soit f dérivable en x_0 On a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h)$$

avec

$$r(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$$

Donc si $h \rightarrow 0$,

$$\underbrace{h}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{r(h)}_{\rightarrow 0}$$

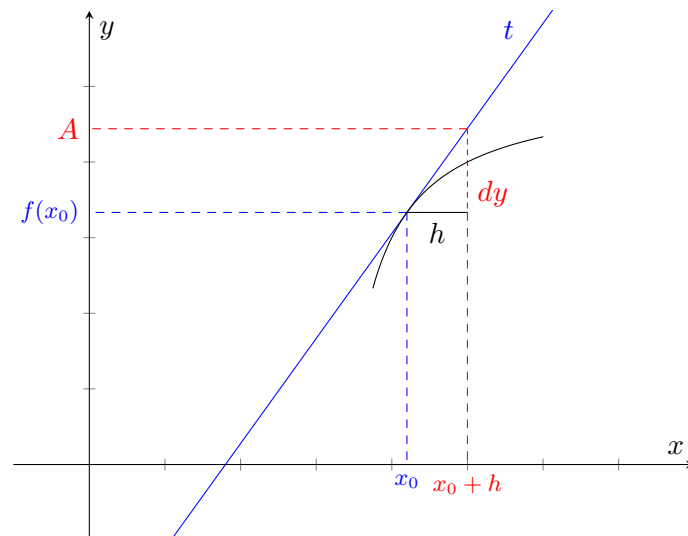
est négligeable et

$$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

La quantité

$$A = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

est appelé l'**approximation linéaire** de f en x_0



A est l'ordonnée correspondant à $x_0 + h$ mesurée sur la tangente en x_0

Exemple: Évaluation de $\sqrt[3]{8.012}$ On détermine l'AL de $\sqrt[3]{8.012}$ en $x_0 = 8$

$$h = 0.012, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$A = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

$$f(x_0) = f(8) = 2$$

$$f'(x_0) = f'(8) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{x^2}} \Big|_{x=8} = \frac{1}{12}$$

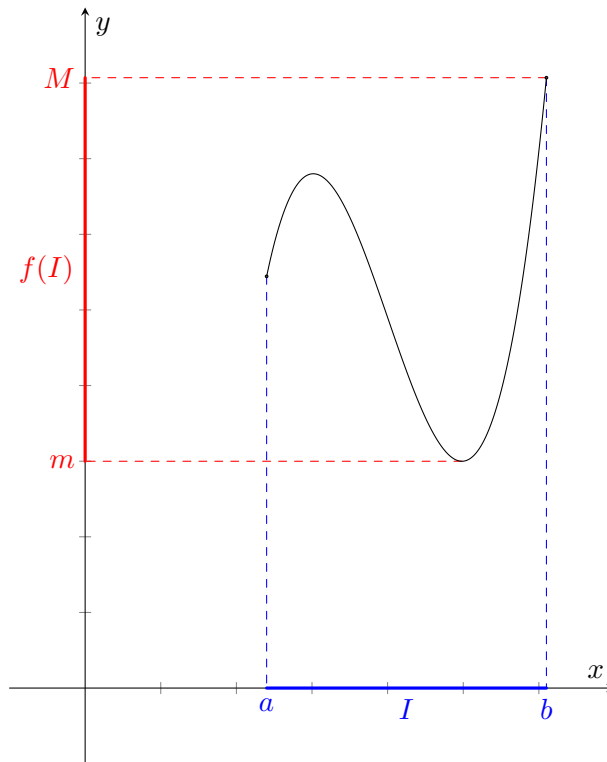
$$A = 2 + 0.0012 \cdot \frac{1}{12} = 2.001$$

3.3 Théorème des accroissements finis

3.3.1 Préliminaire (sans démonstration)

Soit f continue sur $[a; b] = I$

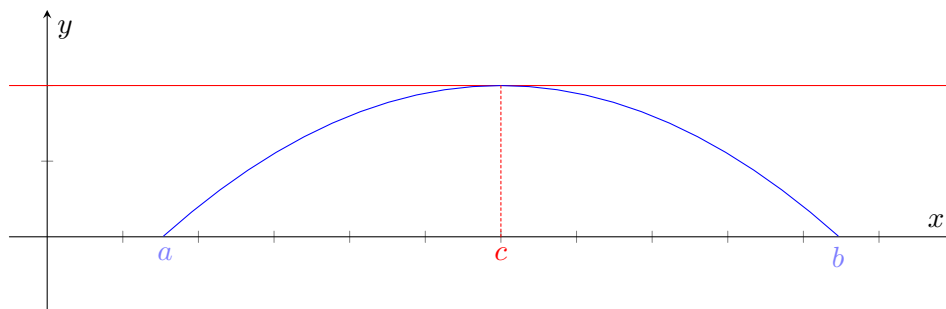
1. L'image de I par f est un intervalle fermé
2. f atteint sur $I = [a; b]$ son minimum et son maximum ($f(I) = [m, M]$)



3.3.2 Théorème de Rolle

Soit f continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors

$$\exists c \in]a; b[\text{ t.q. } f'(c) = 0$$



Démonstration:

- Si $f(x) \equiv 0$ sur $[a; b]$, alors le théorème est vérifié

- Si $f(x) \neq 0$, $f(x)$ prend des valeurs positives ou négatives, on suppose que a et b sont finis 26/03/19

29/03/2019