

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 1B  
PREPA-033(B)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Olivier WORINGER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Chapter 3

## Calcul différentiel

### 3.1 Dérivée d'une fonction

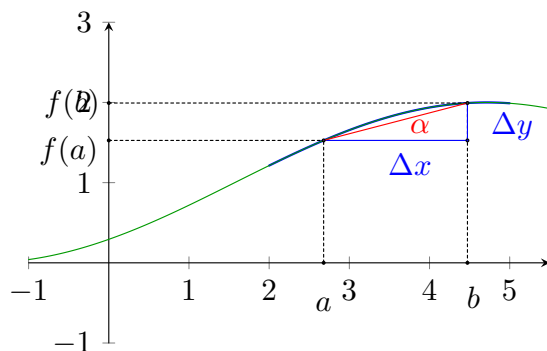
#### 3.1.1 Définitions

Soit  $f$  définie sur un voisinage de  $x_0$ , posons  $y = f(x)$ . Une information **locale** sur le comportement de  $f$  sur un voisinage de  $x_0$  est donné par le quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

appelé le rapport de Newton de  $f$  en  $x_0$ .

- $\Delta x$  est l'accroissement de la variable indépendante  $x$ .
- $\Delta y$  est l'accroissement correspondant liée à  $\Delta x$ .



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha) \text{ est la pente}$$

de la sécante passant par  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$

En gardant  $x_0$  fixe, on fait tendre  $\Delta x \rightarrow 0$

Alors

$$x_0 + \Delta x \rightarrow x_0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$$

si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

est une FI de type " $\frac{0}{0}$ "

Trois cas peuvent se présenter

1.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  n'existe pas

**Exemple:**

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$2. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

**Exemple:**

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}, \quad x_0 = 0$$

$$3. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = 4$$

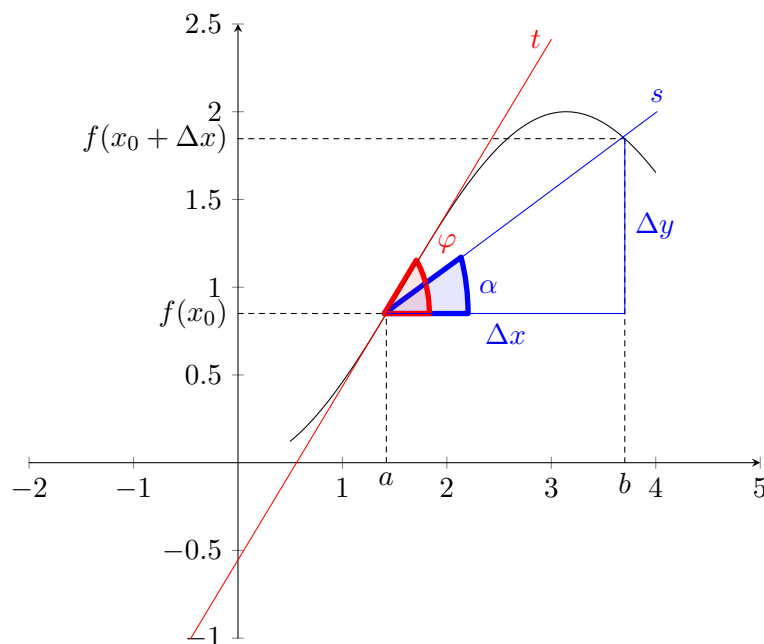
**Définition:** Soit  $f$  définie sur un voisinage de  $x_0$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$ . Si

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existe et on note  $f'(x_0)$  cette limite.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

est appelé **nombre dérivé** de  $f$  en  $x_0$



La sécant  $s$  tends vers la "droite-limite"  $t$ .

$$\alpha \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \varphi$$

Cette "droite-limite" est appelée la tangente à

$$y = f(x_0) \text{ en } x_0$$

La pente  $m$  de la tangente vaut

$$m = \tan(\varphi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Donc l'équivalente de  $t$  s'écrit

**Tangente de  $y = f(x)$**

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

**Théorème:** Soit  $f$  définie sur un voisinage de  $x_0$ . Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0$$

**Démonstration**  $f$  est dérivable en  $x_0$  donc

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= f'(x_0) \\ \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left( \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)}_{:=r(\Delta x)} &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta x) = 0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$

Et lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$ , on a

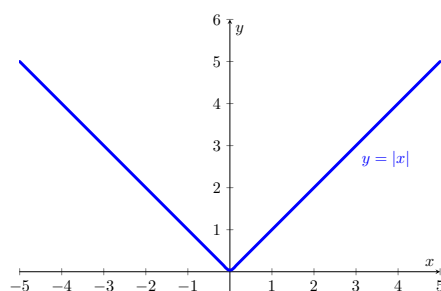
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot f'(x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \overbrace{r(\Delta x)}^{\rightarrow 0}}_{\rightarrow 0}$$

$f$  est donc continue en  $x_0$

□

⚠ La réciproque est fausse ⚠

**Contre-exemple**



$$f(x) = |x|, \quad x_0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad |x| \Big|_{x=0} = 0$$

donc  $|x|$  est continue en  $x = 0$

Mais

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

n'existe pas donc  $f(x) = |x|$  n'est pas dérivable en  $x \rightarrow 0$ .

**Définitions:**

- On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$ , si

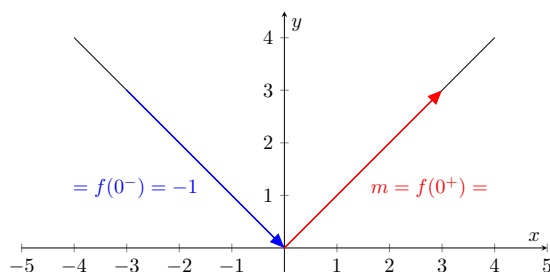
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, on note ce nombre  $f'(x_0^-)$  et il représente la pente de la demi-tangente à gauche en  $x_0$ .

- de même  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$ , si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe,  $f'(x_0^+)$  et il représente la pente de la demi-tangente à droite en  $x_0$ .

**Exemple:**

$$f(0^-) = -1$$

$$f(0^+) = +1$$

**Définitions:** Si  $I \subset \mathbb{D}_f$ 

- Si  $f$  est dérivable en tout  $x_0 \in I$ , on définit:

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

appelé la fonction dérivée de  $f$  sur  $I$ .

- Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , et si  $f'$  est continue sur  $I$ , alors on dit que  $f$  est continument dérivable sur  $I$  et on note  $f \in \mathbb{C}^1$

**3.1.2 Règles de dérivation**

(C.f. exercice facultatif série 8)

Soient  $f$  et  $g$  dérivable sur  $I \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Si  $g(x) \neq 0, \forall x \in I$

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

En particulier

$$\left( \frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

**Théorème:** Dérivée de la composée

Soit  $f$  dérivable en  $x_0$  et  $g$  dérivable en  $f(x_0)$ . Alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et

**Dérivée de la composée**

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

**Démonstration**

- Rappel:

$$r(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

$$\implies f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$

avec

$$r(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

- Dérivée  $g \circ f(x)$

$$\begin{aligned} g \circ f(x + h) &= g(f(x + h)) \\ &= g(f(x) + \underbrace{f(x + h) - f(x)}_{=\Delta}) \\ &= g(f(x)) + g'(f(x)) \cdot \underbrace{(f(x + h) - f(x))}_{=\Delta} + r(f(x + h) - f(x)) \cdot \underbrace{(f(x + h) - f(x))}_{=\Delta} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + r(f(x + h) - f(x)) \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x) + \underbrace{r(f(x + h) - f(x))}_{\rightarrow 0} \cdot f'(x_0)$$

D'où

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

### 3.1.3 Dérivées de quelque fonctions

1.  $f(x) = c$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

2.  $f(x) = x$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$

3.  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$   $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$  à démontrer par récurrence

- Vérification pour  $n = 1$ :

$$(x)' = 1 \text{ et } n \cdot x^{n-1} \Big|_{n=1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

- Démonstration du pas de récurrence:

**Hypothèse:**  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$  pour un  $x \in \mathbb{N}^*$  donné

**Conclusion:**  $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$

**Preuve:**

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (x^n)' \\ &= x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n\end{aligned}$$

4.  $f(x) = x^{-m}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \neq 0$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{m \cdot x^{m-1}}{(x^m)^2} \\ &= -m \cdot x^{m-1-2m} = -m \cdot x^{-m-1}\end{aligned}$$

Donc  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ,  $\forall x \in \mathbb{Z}$

5.  $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $x > 0$

$$y = x^{\frac{p}{q}} \iff y^q = x^p$$

En dérivant les deux termes par rapport à  $x$ , on a

$$\begin{aligned}q \cdot y^{q-1} \cdot y' &= p \cdot x^{p-1} \\ y' &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot y}{y^{q-1} \cdot y} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$

Donc

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad x > 0$$

En particulier

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

**Exemples:**

1. Soit  $f$  une fonction

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 1]$$

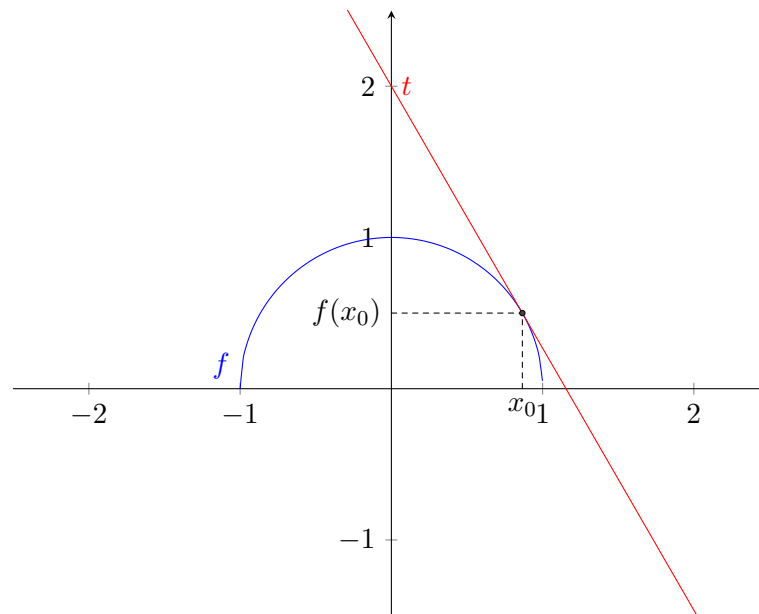
L'équation de  $t$  tangente à  $y = f(x)$  en  $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- $f(x_0) = \frac{1}{2}$
- $f'(x) = \frac{(-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1$

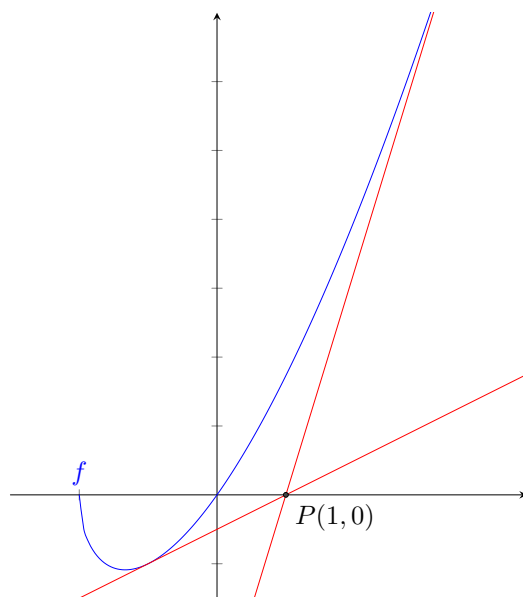
$$f'(x_0) = f'(x) \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$t : y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



2.  $f(x) = x \cdot \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$

Tangente au graphe de  $f$  issues du point  $P(1, 0)$



$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$P \in t \implies y_p - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_p - x_0)$$

$$\implies 0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0)$$

$$\text{avec } f(x_0) = x_0 \cdot \sqrt{2 + x_0},$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2+x} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \\ &= \frac{2 \cdot (2+x) + x}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \frac{3x+4}{2 \cdot \sqrt{2+x}}, \quad x \geq -2 \end{aligned}$$

Donc

$$-x_0 \cdot \sqrt{2+x_0} = \frac{3x_0+4}{2 \cdot \sqrt{2+x_0}} \cdot (1-x_0)$$

$$\iff -2x_0(2+x_0) = 3x_0+4 - 3x_0^2 - 4x_0$$

$$\iff x_0^2 - 3x_0 - 4 = 0 \iff (x_0 - 4) \cdot (x_0 + 1) = 0$$

$$x_0 = -1 : \quad t : y + 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$x_0 = 4 : \quad t : 8x - \sqrt{6}y - 8 = 0$$

### 3.1.4 Dérivée d'ordre supérieure

Soit  $f$  dérivable sur  $I$ , si  $f'$  est dérivable sur  $I$ , on peut dériver  $f'$  sur  $I$  et on note

$$(f')' = f''$$



et ainsi de suite

$$(f'')' = f'''$$

etc.

### Définition par récurrence:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad n \in \mathbb{N}^*$$

avec  $f^{(0)}(x) = f(x)$

### Exemples:

1.  $f(x) = x^p, \quad p \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1) & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

2.  $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f^{(3)}(x) = \sin(x), \quad f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

### Conjecture:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

### Définition par récurrence:

- Vérification:

- $n = 0$  :  $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=0} = f^{(0)}(x)$

- $n = 1$  :  $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=1} = -\sin(x) = f'(x)$

- Démonstration du pas de récurrence:

- Hypothèse:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pour un } n \in \mathbb{N} \text{ donné}$$

- Conclusion:

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

- 

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = \left[\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \\ &= \cos'\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)' = \\ &= -\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = \cos\left(x + \left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

□

**Remarque:** Si  $f$  est  $n$ -fois dérivable sur  $I$  et si  $f^{(n)}(x)$  est continue sur  $I$ , alors on note

$$f \in \mathbb{C}_I^n$$

**Exemple:**

$$\cos(x) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}$$

## 3.2 Différentielles et approximations linéaires

### 3.2.1 Différentielles

**Définitions:**

- La différentielle de la variable indépendante  $x$ , notée  $dx$  est l'accroissement infinitésimal de cette variable

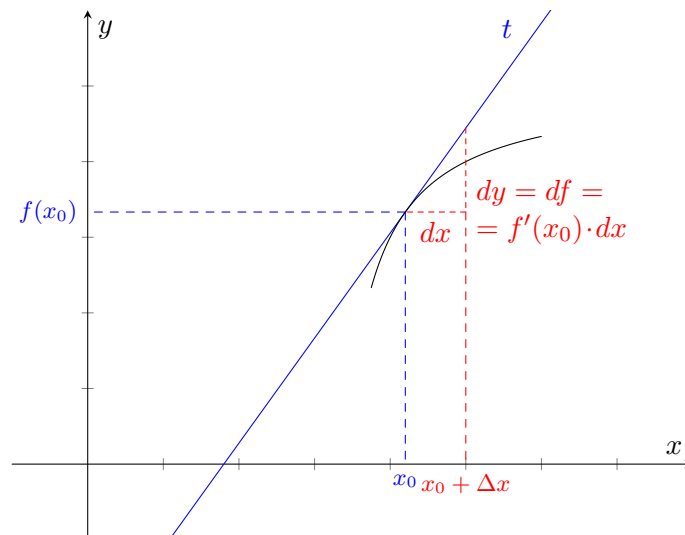
$$dx = \Delta x, \quad (\text{lorsque } \Delta x \rightarrow 0)$$

- La différentielle de la variable dépendante  $y$  (ou de la fonction  $f$ ), notée

$$dy \text{ ou } df$$

en  $x_0$  est la fonction linéaire de  $dx$  définie par

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$



La différentielle  $dy$  en  $x_0$  est l'accroissement des  $y$  correspondant à  $dx$ , mesuré sur la tangente au graphe de  $f$  en  $x_0$ .

La définition des différentielles induit la notation de Leibniz

$$dy = f'(x_0) \cdot dx \implies \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

### 3.2.2 Approximation linéaire

**Rappel** Soit  $f$  dérivable en  $x_0$  On a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h)$$

avec

$$r(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$$

Donc si  $h \rightarrow 0$ ,

$$\underbrace{h}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{r(h)}_{\rightarrow 0}$$

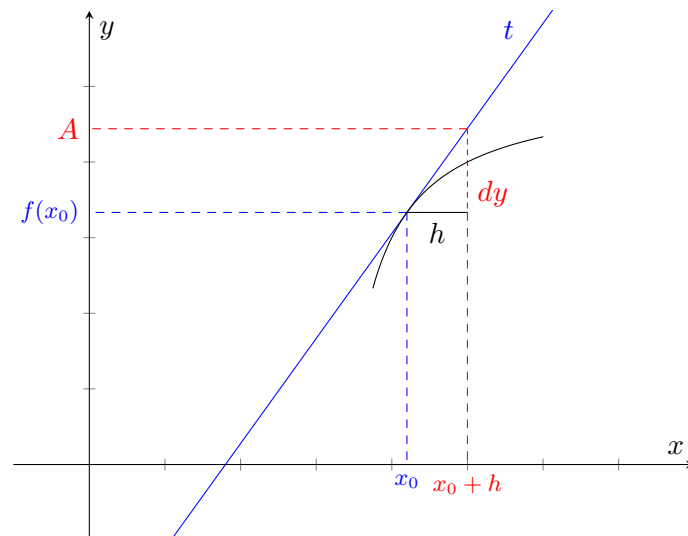
est négligeable et

$$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

La quantité

$$A = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

est appelé l'**approximation linéaire** de  $f$  en  $x_0$



$A$  est l'ordonnée correspondant à  $x_0 + h$  mesurée sur la tangente en  $x_0$

**Exemple:** Évaluation de  $\sqrt[3]{8.012}$  On détermine l'AL de  $\sqrt[3]{8.012}$  en  $x_0 = 8$

$$h = 0.012, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$A = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

$$f(x_0) = f(8) = 2$$

$$f'(x_0) = f'(8) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{x^2}} \Big|_{x=8} = \frac{1}{12}$$

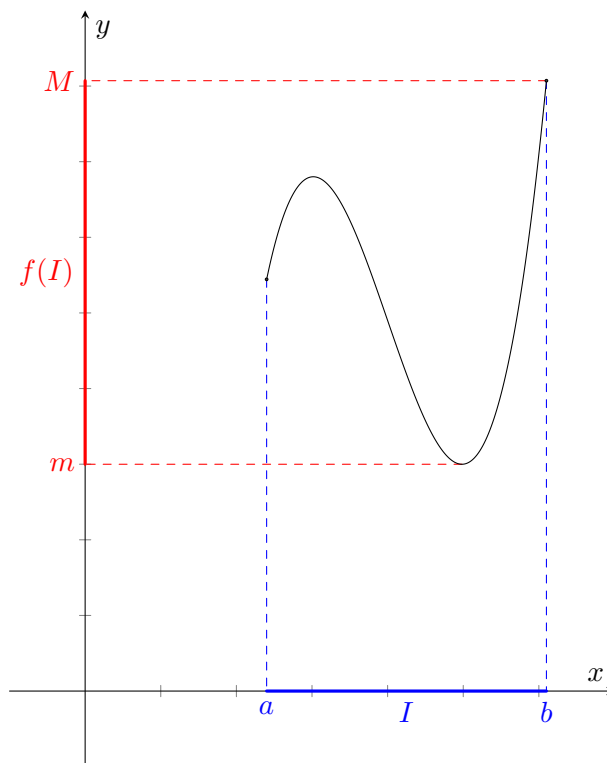
$$A = 2 + 0.0012 \cdot \frac{1}{12} = 2.001$$

### 3.3 Théorème des accroissements finis

#### 3.3.1 Préliminaire (sans démonstration)

Soit  $f$  continue sur  $[a; b] = I$

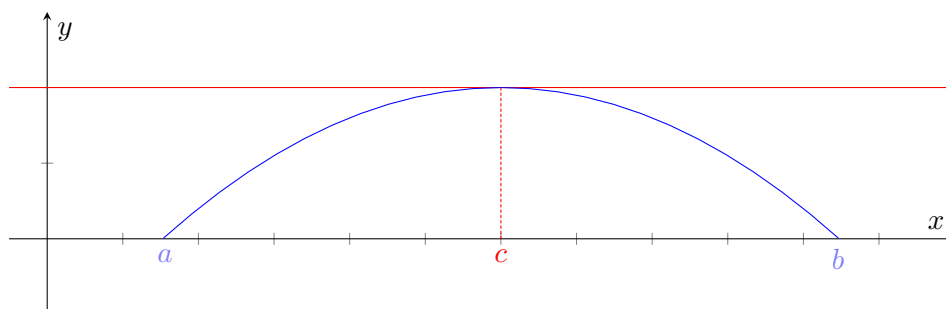
1. L'image de  $I$  par  $f$  est un intervalle fermé
2.  $f$  atteint sur  $I = [a; b]$  son minimum et son maximum ( $f(I) = [m, M]$ )



#### 3.3.2 Théorème de Rolle

Soit  $f$  continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$ . Si  $f(a) = f(b) = 0$ , alors

$$\exists c \in ]a; b[ \text{ t.q. } f'(c) = 0$$



**Démonstration:**

- Si  $f(x) \equiv 0$  sur  $[a; b]$ , alors le théorème est vérifié

- Si  $f(x) \not\equiv 0$ ,  $f(x)$  prend des valeurs positifs ou négatives, on suppose que  $a$  et  $b$  sont zéros consécutif de  $f$  et que

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in ]a; b[$$

$f$  est continue sur  $[a; b]$ , donc  $f$  atteint son max  $M$ . Soit  $x_0$  l'abscisse de  $M$ . Alors  $\forall h$  suffisamment petit pour que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h)$$

Or

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$

car

$$f(x_0) = M$$

est un max, donc

$$\begin{aligned} f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) &\leq f(x_0) \\ \iff h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) &\leq 0 \\ \iff h \cdot [f'(x_0) + r(h)] &\leq 0 \end{aligned}$$

- Si  $h < 0$ , on a

$$f'(x_0) + r(h) \geq \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} f'(x_0) \geq 0$$

- Si  $h > 0$ , on a

$$f'(x_0) + r(h) \leq \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f'(x_0) \leq 0$$

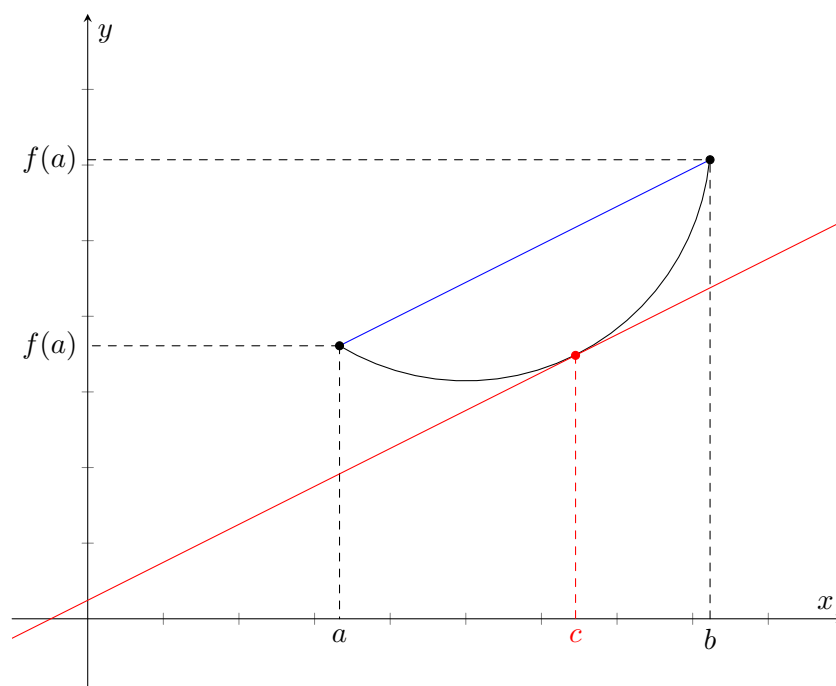
D'où  $f'(x_0) = 0, x_0 := c$

□

### 3.3.3 Théorème des accroissements finis

Soit  $f$  continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$ , alors

$$\exists c \in ]a; b[ \text{ t.q. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



**Démonstration:** Soit

$$y(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{ordonné sur la courbe}} - \left[ \underbrace{f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)}_{\text{ordonnée sur la sécante}} \right]$$

- $g$  est continue sur  $[a; b]$  car  $f$  l'est
- $g$  est dérivable sur  $]a; b[$  car  $f$  l'est
- De plus  $g(a) = 0$  et  $g(b) = 0$

Donc d'après Rolle,

$$\exists c \in ]a; b[ \text{ t.q. } g'(c) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Autre expression de TAF.

Soit  $x_0 = a$  et  $x_0 + h = b$ , ( $h > 0$ )

$$\exists \theta ]0; 1[ \text{ t.q. } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta \cdot h)$$

( $x_0 + \theta \cdot h \in [x_0; x_0 + h]$ ) (énoncé analogue pour  $h < 0$ )

**Exemple:**  $f$  définie sur  $[1; 3]$  par

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot (x - 2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x - 4)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- $f$  continue en  $x = 2$ , car

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 4)^2 = 4$$

et  $f(2) = 4$

- Recherche de

$$x_0 \in ]1; 3[ \text{ t.q. } f(x_0) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1 - \frac{7}{2}}{2} = -\frac{5}{4}$$

– Sur  $]1; 2[$

$$f'(x_0) = -\frac{5}{4} \iff -(x_0 - 2) = -\frac{5}{4}$$

$$\iff x_0 = -\frac{1}{4} \notin ]0; 2[$$

– Sur  $]2; 3[$

$$f'(x_0) = -\frac{5}{4} \iff 2 \cdot (x_0 - 4) = -\frac{5}{4}$$

$$\iff x_0 = -\frac{5}{8} + 4 = \frac{27}{8} > 3$$

Donc  $x_0$  les hypothèses du TAF ne sont pas validés, car  $f$  est non-dérivable sur en  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -4$$

### 3.4 Règle de Bernoulli, de l'Hospital

#### 3.4.1 Forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur un voisinage de  $x_0$  telles que  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  avec  $g(x) \neq 0$  et  $g'(x) \neq 0$  sur un voisinage pointé de  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est dont une FI de type  $\frac{0}{0}$

Alors si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe ou est infinie, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Démonstration:** Soit  $D(x) = f(x_0 + h) \cdot g(x) - g(x_0 + h) \cdot f(x)$

$$D(x_0) = 0 \text{ et } D(x_0 + h) = 0$$

or  $D$  est continue et dérivable sur un voisinage de  $x_0$

Donc d'après Rolle,

$$\exists \theta \in ]0; 1[ \text{ t.q. } D'(x_0 + \theta \cdot h)$$

$$\begin{aligned} D'(x) &= f(x_0 + h) \cdot g'(x) - g(x_0 + h) \cdot f'(x) \\ D'(x_0 + h) = 0 &\implies f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + \theta h) = g(x_0 + h) \cdot f'(x_0 + \theta h) \\ &\iff \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)} \end{aligned}$$

Et lorsque  $h \rightarrow 0$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)} \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

□

**Remarque:** Cette règle reste valable lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur un voisinage de l'infini, telles que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  Alors si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe ou est infinie on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### 3.4.2 Forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ "

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivable sur un voisinage de  $x_0$  (fini ou infini) et telles que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

Alors si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe ou est infinie, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

#### Illustration de la démonstration

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}{\frac{1}{f(x)}}$$

est une FI de " $\frac{0}{0}$ "

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{f^2(x)}{g^2(x)}}_{L^2} = L^2 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{L} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

□

#### Exemples:

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)}$ : FI " $\frac{0}{0}$ "

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$ : FI " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} \text{ FI } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$ : FI " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x)$ : FI " $0 \cdot \infty$ "

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} : \text{FI } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$



## 5. Rappel:

$$u(x)^{v(x)} \stackrel{\text{def}}{=} e^{v(x) \cdot \ln(u(x))}, \quad \forall u(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x)}$$

car exp et continuité et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0 \text{ (cf. 4.) donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$$

□

## 3.5 Variation locale d'une fonction

## 3.5.1 Croissance, décroissance

Soit  $f$  dérivable sur un intervalle ouvert  $I$

1. Si

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in I$$

alors  $f$  strictement croissante sur  $I$ .

2. Si

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in I$$

alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

**Démonstration:** Pour tout  $a, b \in I, a < b$  le TAF nous donne l'existence de

$$c \in ]a; b[, \text{ t.q. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

Or  $b - a > 0$  donc

1. Si  $f'(x) > 0$ , alors

$$f'(c) > 0 \implies f(b) - f(a) > 0, \forall a < b \in I$$

donc  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

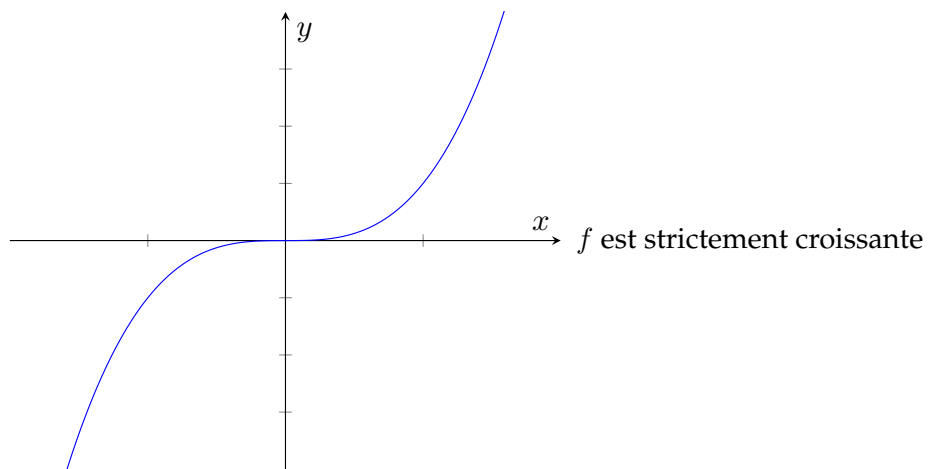
2. Si  $f'(x) < 0$ , alors

$$f'(c) < 0 \implies f(b) - f(a) < 0, \forall a < b \in I$$

donc  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

 La réciproque est **fausse**

**Contre-exemple:**  $f(x) = x^3$



### 3.5.2 Extrema

**Définitions:** Soient

$$f : \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$

et

$$c \in \mathbb{D}_f$$

- $f(c)$  est un maximum local de  $f$  si

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in ]c - \delta; c + \delta[$$

- $f(c)$  est un maximum global de  $f$  si

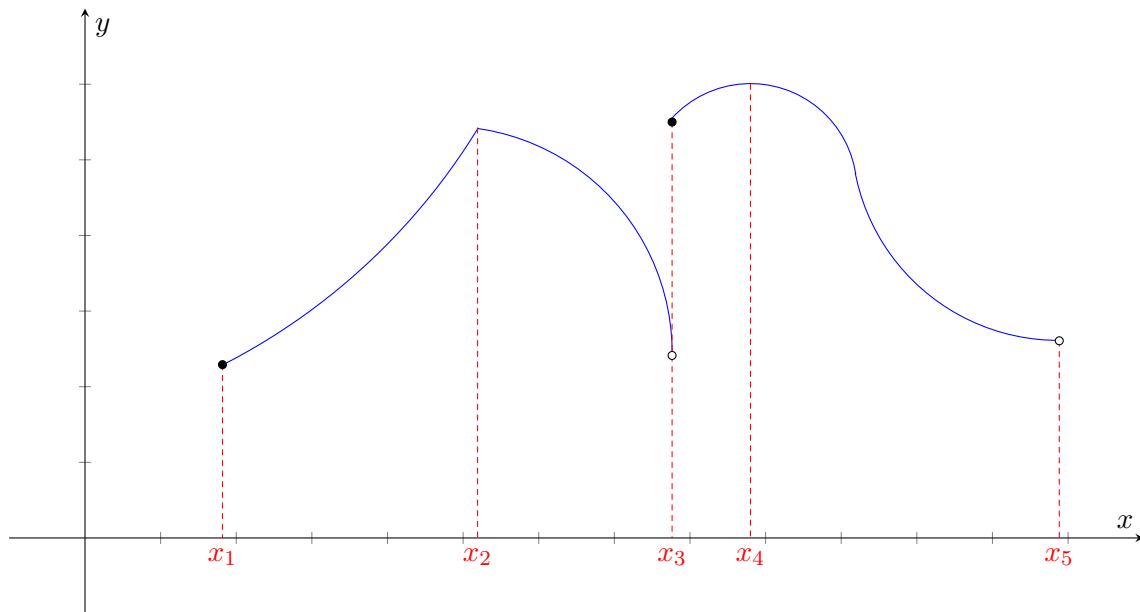
$$f(x) \leq f(c), \forall x \in \mathbb{D}_f$$

- $f(c)$  est un minimum local de  $f$  si

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } f(x) \geq f(c), \quad \forall x \in ]c - \delta; c + \delta[$$

- $f(c)$  est un minimum global de  $f$  si

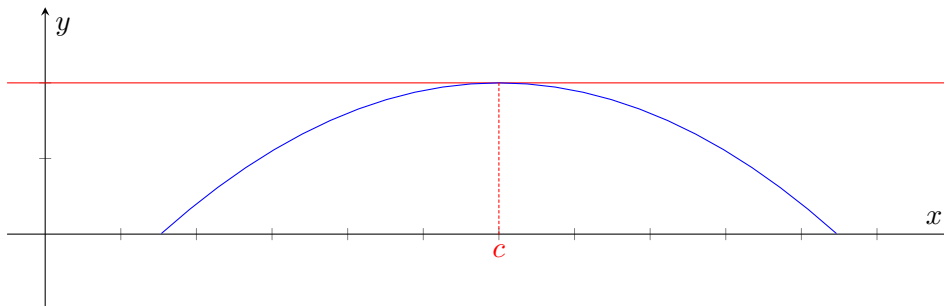
$$f(x) \geq f(c), \forall x \in \mathbb{D}_f$$



$f(x_1)$  est l'unique minimum local de  $f$   
 $f(x_2), f(x_4)$  sont des maximums locaux  
 $f(x_3), \underbrace{f(x_5)}_{\text{n'existe pas}}$  ne sont des extremas locaux de  $f$ .

**Théorème:** Soit  $f : \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $x_0$ . Alors si  $f(x_0)$  est un extrema de  $f$ , on a  $f'(x_0) = 0$

**Démonstration:** C.f. démonstration du théorème de Rolle



**Remarque:** La réciproque est fausse

**Contre-exemple:**  $f(x) = x^3, x_0 = 0$

$$f'(0) = 3 \cdot x^2 \Big|_{x=0} = 0$$

mais

$$f(0) = 0$$

n'est pas un extremum de  $f$ .

**Théorème:** Soit  $f$  continue sur  $I$  ouvert et dérivable sur  $I$  sauf peut-être en  $x_0 \in I$ . Alors  $f'(x_0)$  est une extremum de  $f$  si  $f'(x)$  change de signe en  $x_0$

**Démonstration:** Soit  $f$  continue sur  $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$  ( $\delta > 0$ ) et dérivable sur

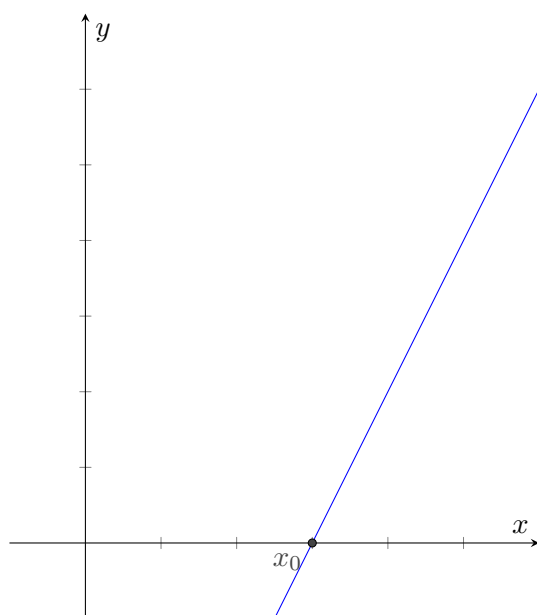
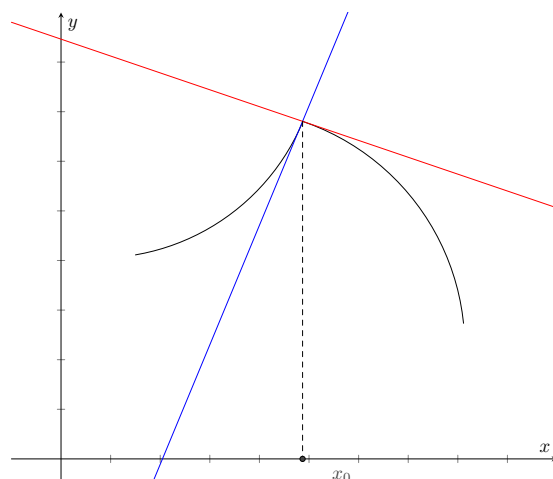
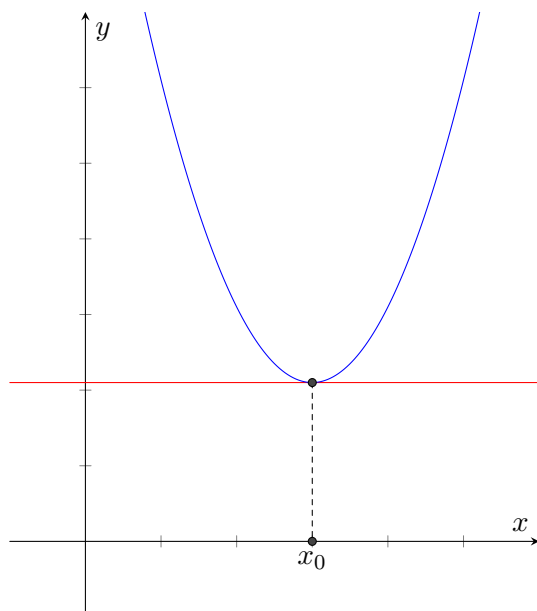
$$]x_0 - \delta; x_0[ \cup ]x_0; x_0 + \delta[$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(c) \cdot (x - x_0)$$

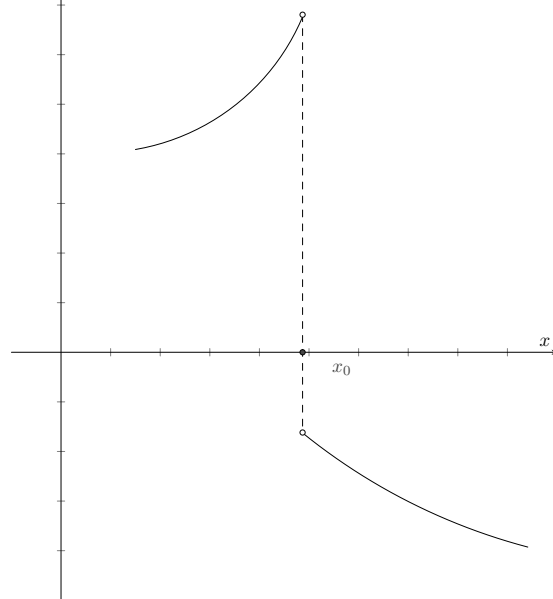
avec  $c$  entre  $x$  et  $x_0$  (TAF)

$f'$  change de signe en  $x_0$  donc:

- |  |   |                  |
|--|---|------------------|
| si $x - x_0 < 0$ , on a $f'(c) > 0 \implies f(x) < f(x_0)$ | } | $f(x_0)$ est max |
| si $x - x_0 > 0$ , on a $f'(c) < 0 \implies f(x) < f(x_0)$ |   |                  |
- |  |   |                  |
|--|---|------------------|
| si $x - x_0 < 0$ , on a $f'(c) < 0 \implies f(x) > f(x_0)$ | } | $f(x_0)$ est min |
| si $x - x_0 > 0$ , on a $f'(c) > 0 \implies f(x) > f(x_0)$ |   |                  |



extremum  $f'(x_0) = 0$



extremum  $f'(x_0)$  n'existe pas

### 3.5.3 Remarques:

1. **Attention!**

$$\begin{cases} f(x_0) \text{ extremum de } f \not\Rightarrow f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \not\Rightarrow f(x_0) \text{ extremum de } f \end{cases}$$

2. Les abscisses  $x_0$  des extrema de  $f$  sont à calculer dans les situation suivantes

- (a) Les bornes éventuelles de  $\mathbb{D}_{\text{déf}}$  du domaine de continuité
- (b)  $x_0 \in \mathbb{D}_f \setminus \mathbb{D}_{f'}$  ( $f$  définie en  $x_0$ , mais non-dérivable en  $x_0$ )
- (c)  $f'(x_0) = 0$

**Exemple:**

$$f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}, \quad f \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

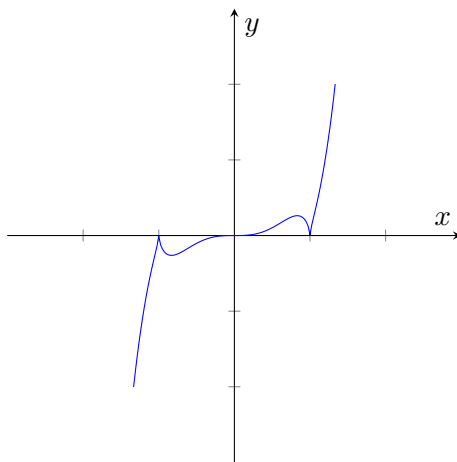
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (x^3 - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (3x) \\ &= \frac{3x^2 \cdot (x^3 - 1) + 2x^5}{\sqrt[3]{x^3 - 1}} = \frac{5x^5 - 3x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}} \\ &= \frac{x^2 \cdot (5x^3 - 3)}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

Signe de  $f'(x)$

$x$	0			$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$	1		
$f'(x)$	+	0	+	0	-	$-\infty$	$+\infty$

- $(0, 0)$  est un point à tangente horizontale mais pas un extremum
- En  $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ , point à tangente horizontale et maximum
- En  $x_0 = 1$ ,  $f'(x_0)$  n'existe pas mais  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \pm\infty$ , c'est un point à tangente verticale et un maximum (point de rebroussement)

Esquisse:



3. Autres points remarquables

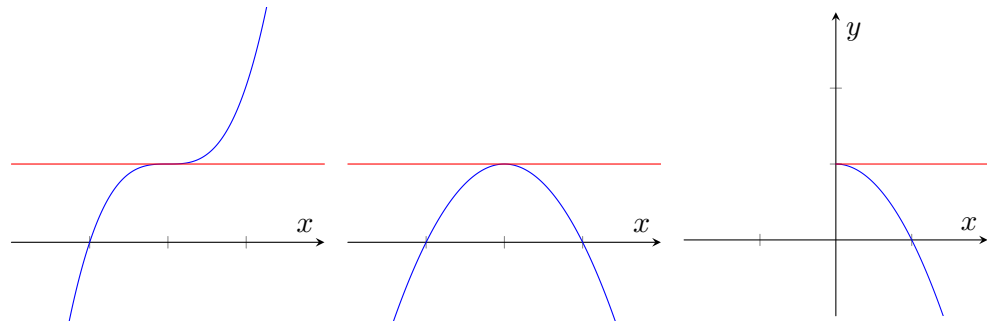
(a) Points à tangente horizontale. Soit

$$f : \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$

dérivable (éventuellement gauche, droite) en  $x_0$  avec

$$f'(x_0) = 0 \text{ (éventuellement } f'(x_0^-) = 0 \text{ et } f'(x_0^+) = 0)$$

Alors le graphe de  $f$  admet en  $x_0$  une tangente (demi-tangente) horizontale:



(b) Points à tangente verticale Soit  $f$  continue sur  $I$  et dérivable sur  $I \setminus \{x_0\}$ . Si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$$

alors le graphe de  $f$  admet en  $x_0$  une tangente (demi-tangente) verticale.

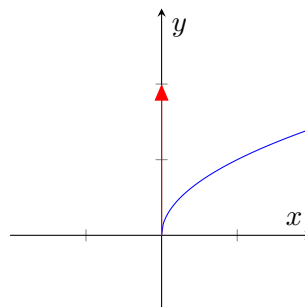
**Exemples:**

i.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_+$ ,  $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}_+^*$$

$f$  non dérivable en  $x_0 = 0$  mais

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$$



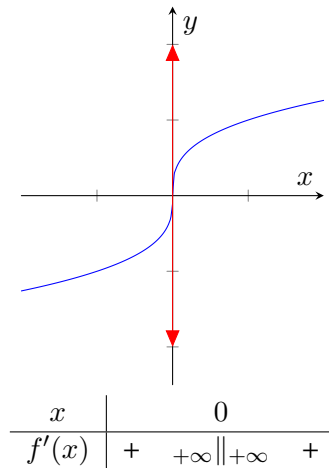
demi-tangente verticale en  $x_0 = 0$

ii.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ,  $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f$  non dérivable en  $x_0 = 0$  mais

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$$



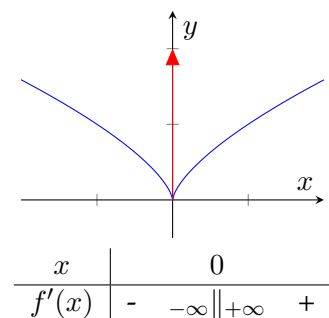
tangente verticale en  $x_0 = 0$

iii.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ,  $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}^*$$

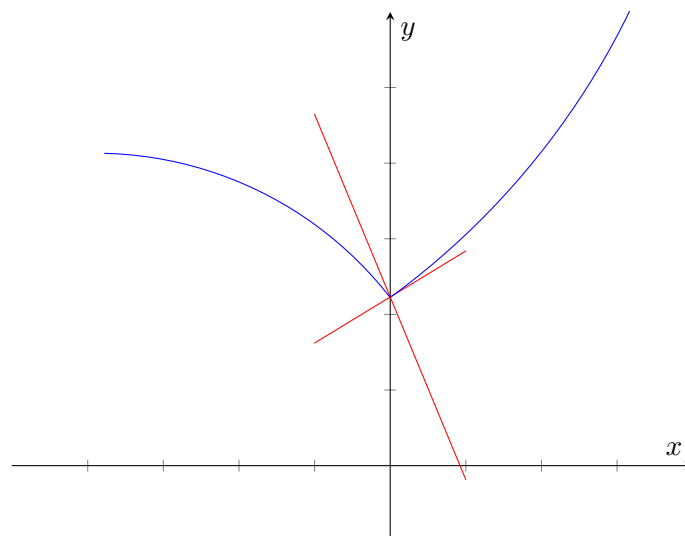
$f$  non dérivable en  $x_0 = 0$ , mais

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$$

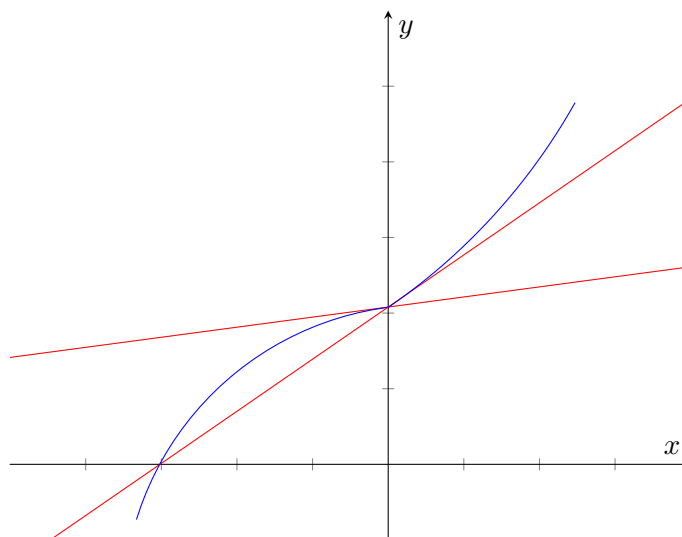


### (c) Points anguleux

Soit  $f$  continue sur  $I$  et dérivable sur  $I \setminus \{x_0\}$  ( $x_0 \in \mathbb{D}_f \setminus \mathbb{D}_{f'}$ ). Le graphe de  $f$  admet un point anguleux en  $x_0 = 0$  si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  avec  $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$



point anguleux et extremum



point anguleux et non extremum

Pour déterminer la pente des 2 demi-tangentes:

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ et } f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On peut utiliser le théorème (série 9, exercice 9):

Si  $f$  est continue en  $x_0$  et dérivable sur un voisinage pointé de  $x_0$ , alors si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \text{ existe}$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

Plus précisément

- Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$  existe, alors elle est égale à  $f'(x_0^-)$
- Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$  existe, alors elle est égale à  $f'(x_0^+)$

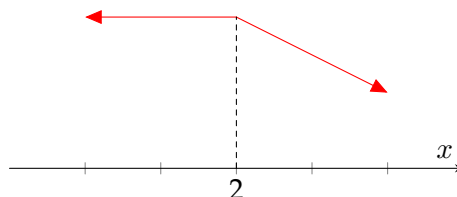
**Exemple:**

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$f$  est continue en  $x = 2$  (à vérifier)

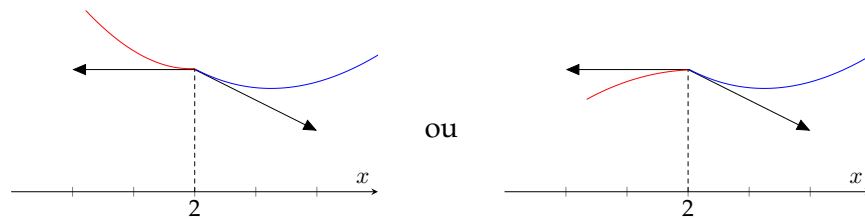
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -(x-2) \Big|_{x=2} = 0 = f'(2^-)$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 2(x-4) \Big|_{x=2} = -4 = f'(2^+)$

Le point  $(2, 4)$  est un point anguleux de demi-tangente  $m_+ = 0$  et  $m_- = -4$





Ce point anguleux est-il un extremum?



Il faut étendre le signe de  $f'(x)$  à gauche de  $x_0 = 2$

Si  $x < 2$ ,  $f'(x) = -(x - 2)$  d'où  $f'(x) > 0 (x < 2)$

Le graphe de  $f$  admet donc ??? un maximum

#### 4. Point de rebroussement

Soit  $f$  continue en  $x_0$  et dérivable sur un voisinage pointé de  $x_0$ . Le graphe de  $f$  admet un point de rebroussement en  $x_0$  si et seulement si

- La limite

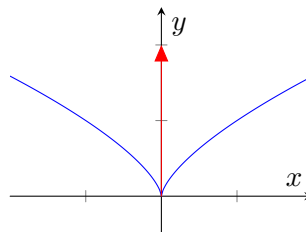
$$\lim_{x \rightarrow x_0} = \infty$$

- $f'(x)$  change de signe en  $x_0$

Donc un point de rebroussement est toujours un extremum

**Exemple:**

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x_0 = 0$$



**Exemple complet:**

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2} = \sqrt{x^2 \cdot (x + 3)}, \quad \mathbb{D}_f[-3; +\infty[$$

$f$  continue sur  $\mathbb{D}_f$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{2 \cdot \sqrt{x^2(x + 3)}} = \frac{3x \cdot (x + 2)}{2\sqrt{x^2(x + 3)}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{D}_f \setminus \{-3; 0\}$$

Signe de  $f'(x)$

$x$	-3	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	///	+	0 -	+

Points remarquables:

- $(-3, 0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3+} f'(x) = +\infty$

Point à tangente verticale (borne de  $\mathbb{D}_f$ ) et minimum

- $(-2, 2)$  est un maximum à tangente horizontale
- $(0, 0)$ 
  - À gauche

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x \cdot (x+2)}{2 \cdot \underbrace{|x|}_{=-x} \cdot \sqrt{x+3}} = -\sqrt{3}$$

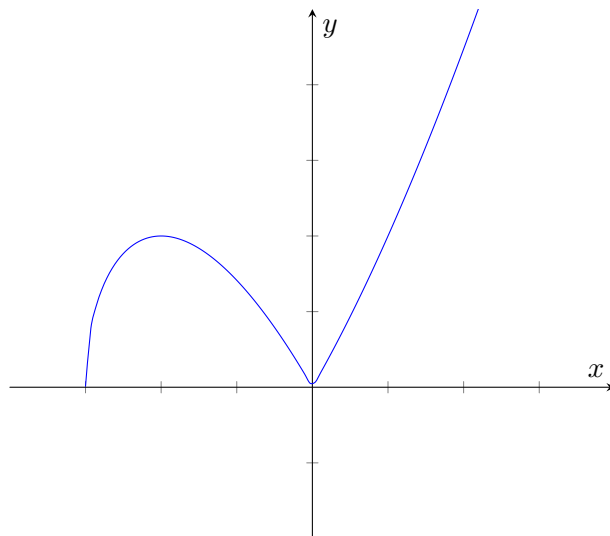
- À droite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x \cdot (x+2)}{2 \cdot \underbrace{|x|}_{=x} \cdot \sqrt{x+3}} = +\sqrt{3}$$

C'est un minimum et un point anguleux dont les demi-tangentes ont de pente

$$m_- = -\sqrt{3} \text{ et } m_+ = +\sqrt{3}$$

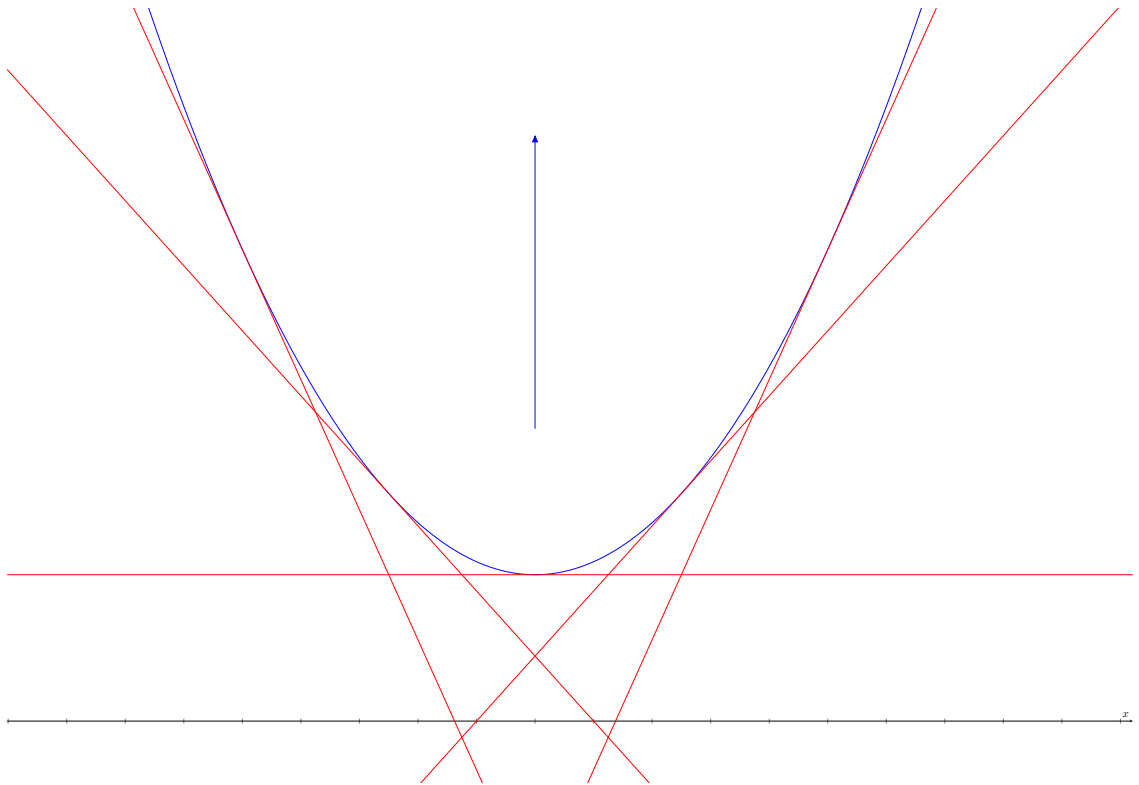
Esquisse du graphe:



### 3.5.4 Concavité, convexité

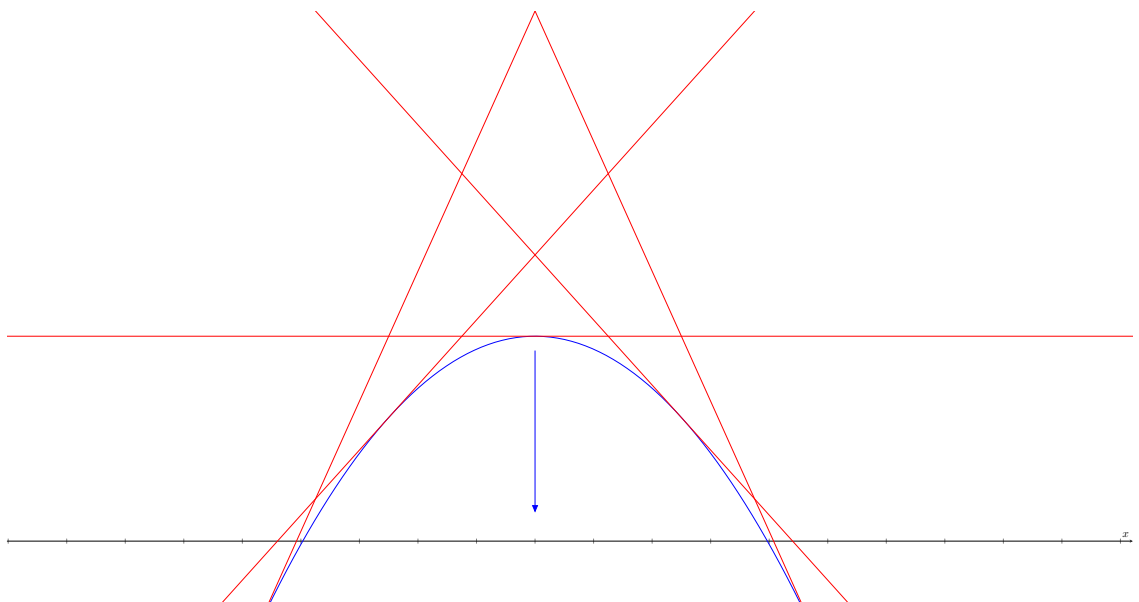
**Définitions:** Soit  $f$  2 fois dérivable sur  $I$

1. Si  $f''(x) > 0, \forall x \in I$ , alors  $f'$  est strictement croissante sur  $I$ . On dit que le graphe de  $f$  est convexe (convexité orientée dans le sens des  $y > 0$ )



Le graphe de  $f$  est "au-dessus" de la tangente

2. Si  $f''(x) < 0, \forall x \in I$ , alors  $f'(x)$  est strictement décroissante. On dit que le graphe de  $f$  est concave (convexité est orientée dans le sens des  $y < 0$ )



Le graphe de  $f$  est "en dessous" de la tangente.

**Définition:** Soit  $f$  continue sur  $I$  et 2 fois dérivable sur  $I$  sauf peut être en  $x_0 \in I$ . Alors le point  $(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion du graphe de  $f$  si  $f''(x)$  change de signe en  $x_0$ .

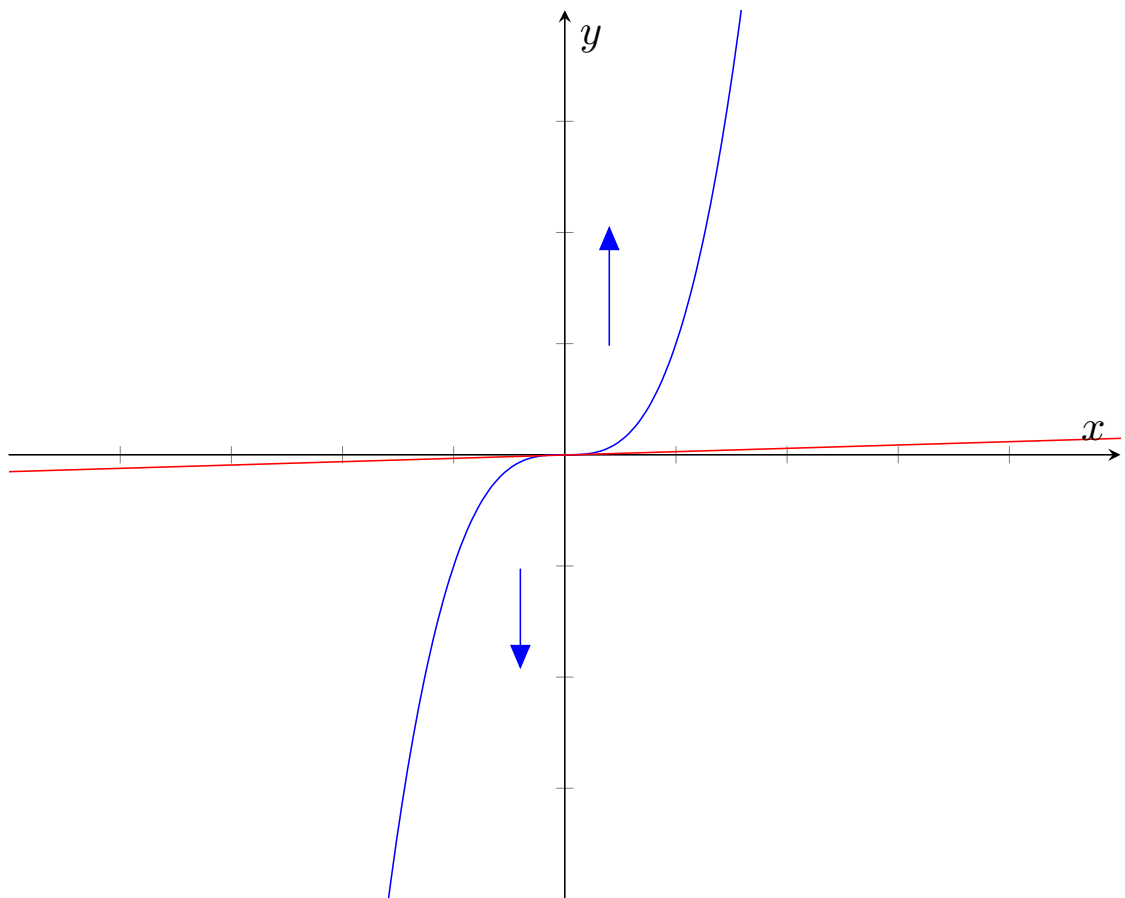
**Exemples:**

1.  $f(x) = x^3 + x$

$$f'(x) = 3x^2 + 1, \quad f''(x) = 6x$$

$x$	0
$f''(x)$	- 0 +

$(0, 0)$  est un point d'inflexion à tangente oblique ( $m = f'(0) = 1$ )



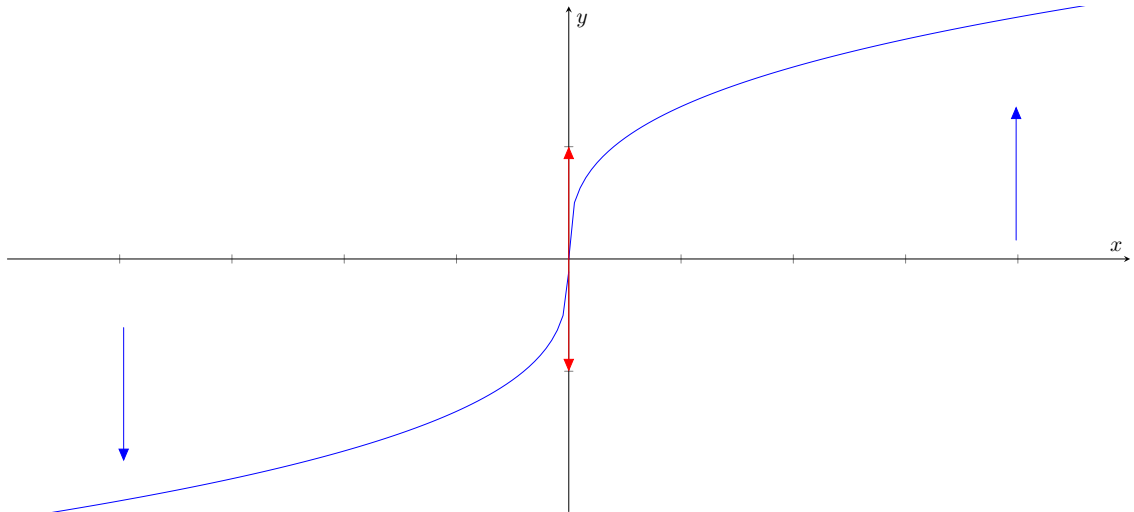
2.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \neq 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

$x$	0
$f''(x)$	+    -

$(0, 0)$  est un point d'inflexion à tangente verticale ( $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$ )

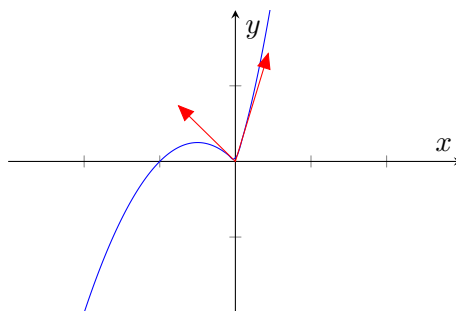


$$3. f(x) = (x+1) \cdot (x+2 \cdot |x|) = \begin{cases} 3x^2 + 3x & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x + 3 & \text{si } x > 0 \\ -2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}^*$$

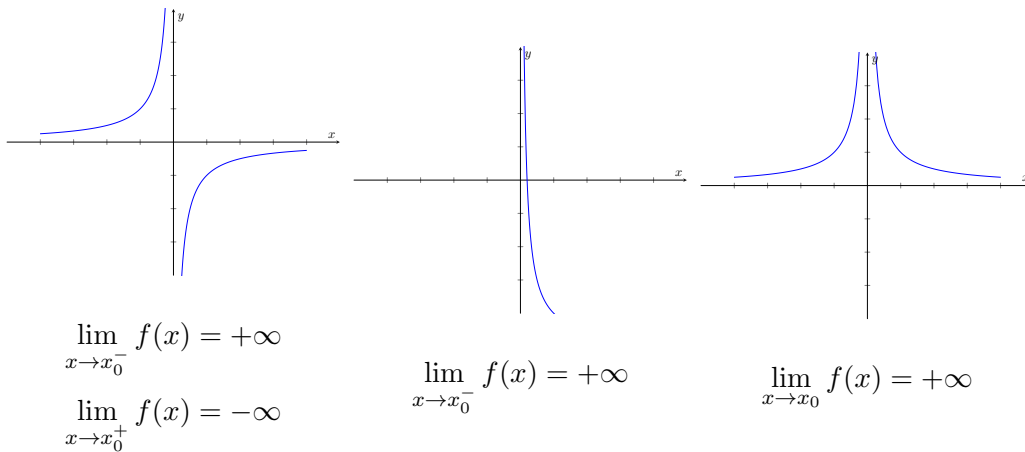
$$f''(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \mathbb{D}_{f''} = \mathbb{D}_{f'}$$

$(0,0)$  est un point d'inflexion et un point anguleux ( $m_- = -1, m_+ = 3$ ) et un minimum.



### 3.5.5 Branches infinies

1. Asymptote verticale. Soit  $f$  définie sur un voisinage pointé de  $x_0$  (éventuellement gauche ou droite). Alors le graphe de  $f$  admet une asymptote verticale  $x = x_0$ , si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$



## 2. Asymptote horizontale

Soit  $f$  définie sur un voisinage de l'infini le graphe de  $f$  admet une asymptote horizontale si

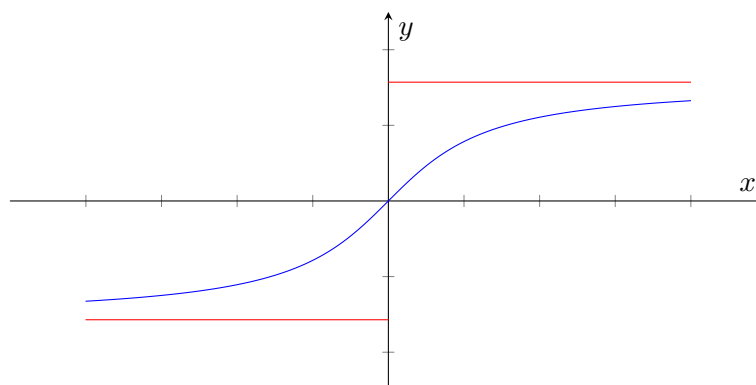
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0 (y_0 \text{ fini})$$

Équation de asymptote horizontale

$$y = y_0$$

**Exemple:**

$$f(x) = \arctan(x), x \in \mathbb{R}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

## 3. Asymptote oblique

Soit  $f$  définie sur un voisinage de l'infini telle que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Le graphe de  $f$  admet une asymptote oblique d'équation

$$y = ax + b, \text{ si } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Si la droite d'équation  $y = ax + b$  est un asymptote oblique de  $f$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{(f(x) - (ax + b))}_{:=r(x)}$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = 0$$

$$f(x) = ax + b + r(x)$$

$$\frac{f(x)}{x} = a + \underbrace{\frac{b}{x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{r(x)}{x}}_{\rightarrow 0}$$

On cherche  $b$ :

$$f(x) - ax = b + r(x)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

si  $b$  existe, alors  $f$  admet une asymptote oblique:

$$y = ax + b$$

**Exemple:**  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}, \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} = \pm\infty$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x^3 + 2x^2) - x^3}{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} \cdot \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} + x^2 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + x^2} \rightarrow \frac{2}{3}$$

$$AO : y = x + \frac{2}{3}$$

### 3.5.6 Schema de l'étude complète d'une fonction

#### Schema de l'étude complète d'une fonction

##### 1. Domaine d'étude

Domaine de définition, de continuité, périodicité pointée, restriction ou éventuelle du domaine d'étude.

##### 2. Limites aux "points frontières" de $\mathbb{D}_{\text{def}}$ et $\mathbb{D}_{\text{cont}}$

Étude des branches infinies

##### 3. Dérivés, points remarquables et extrema ( pas les points d'inflexion (sauf si demandés) )

##### 4. Tableau de variation et graphe

**Exemple:**  $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$

$\mathbb{D}_{\text{def}} = \mathbb{R}$ ,  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$

Étude sur  $\mathbb{R}$

- Limites aux "points frontière"

–  $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2\sqrt{x^2 - 4}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 + 2\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right) = +\infty \quad (x < 0)$$

Recherche d'une intervalle asymptote oblique

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(x + \sqrt{x^2 - 4}) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 4)}{x - \sqrt{x^2 - 4}} = 0$$

$$AO : y = -x(x \rightarrow -\infty)$$

–  $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2\sqrt{x^2 - 4}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left( 1 + 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right) = +\infty (x > 0)$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique:

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +3$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot (\sqrt{x^2 - 4} - x) = 0$$

$$AO : y = 3x(x \rightarrow +\infty)$$

- Dérivée

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\sqrt{x^2 - 4} & \text{si } x \in ]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[ \\ x + 2\sqrt{4 - x^2} & \text{si } x \in ]-2; 2[ \end{cases}$$

– Si

$$x \in ]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

$$f'(x) = 1 + 2 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4} + 2x}{\sqrt{x^2 - 4}}, x \neq \pm 2$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -2 & & +2 \\ \hline f'(x) & - & -\infty & // / // & +\infty & + \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = +\infty$$

– Si  $x \in ]-2, 2[$

$$f'(x) = 1 - 2 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - 2x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \iff \sqrt{4 - x^2} = 2x, \quad x \geq 0$$

$$\iff 4 - x^2 = 4x^2 \iff 5x^2 = 4$$

$$\iff x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



$x$					
$f'(x)$	///	-2	$\frac{2}{5}$	+	2
	///	$  _{+\infty}$	0	-	$-\infty  $

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -\infty$$

Signe de  $f'(x)$

$x$	$-\infty$	-2	$\frac{2}{5}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	$-\infty  _{+\infty}$	+	0	-
				$-\infty  _{+\infty}$	+

Extrema

- $(-2, -2)$  minimum et point de rebroussement
- $(\frac{2}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5})$  maximum à tangente horizontale
- $(2, 2)$  minimum et point de rebroussement

• Tableau de variation

$x$	$-\infty$	-2	$\frac{2}{5}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	$-\infty  _{+\infty}$	+	0	-
$f(x)$	$+\infty \searrow$	-2	$\nearrow 2\sqrt{5}$	$\searrow 2$	$\nearrow +\infty$
	AO	PR	TH	PR	AO
	$y = -x$	min	max	min	$y = 3x$

