

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 1A  
PREPA-031(A)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

## Chapter 3

# Polynôme réels

### 3.1 Définition et opérations

**Définition:** Un polynôme en  $x$  à coefficients réels est une combinaison linéaire de puissance de  $x$ .

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

avec  $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, n$

On note  $P \in \mathbb{R}[x]$  "ensemble de polynôme en  $x$  à coefficients réels"

Le degré de  $P$ , noté  $\deg P$ , est la plus grande puissance de  $x$  dont le coefficient est non nul.

**Convention** Le polynôme nul est de degré  $-\infty$

Le sous-ensemble de  $\mathbb{R}[x]$  des polynômes de degré inférieur ou égale à  $n \in \mathbb{N}$  est notée  $\mathbb{P}_n[x]$

$$\mathbb{P}_n[x] = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \leq n\}$$

**Définition:** La somme de 2 polynômes  $P$  et  $Q$  se note  $P + Q$ . On l'obtient en additionnant les coefficients d'une même puissance

**Exemple:**

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 6$$

$$Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 3$$

Alors

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = x^2 + 5x - 3$$

**Remarque:**

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

**Définition:** L'amplification par  $\lambda \in \mathbb{R}$  d'un polynôme  $P$  donne un polynôme noté  $\lambda P$ . On obtient en multipliant chaque coefficient par  $\lambda$ .

**Exemple:**

$$P(x) = 3x^2 + 5x - 6 \quad \lambda = -\frac{2}{3}$$

Alors

$$(\lambda P)(x) = \lambda \cdot P(x) = -2x^2 - \frac{10}{3}x + 4$$

**Remarques:**

1.

$$\text{Si } \lambda \neq 0 \iff \deg(\lambda P) = \deg P$$

$$\text{Si } \lambda = 0 \iff \deg(\lambda P) = 0$$

2. Avec les lois (addition et amplification),  $\mathbb{R}[x]$  et  $\mathbb{P}_n[x]$  sont des espaces vectoriels.

**Définition:** Multiplication par un monôme.

Soit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

et

$$Q(x) = x^n$$

un monôme.

Leur produit est un polynôme. On l'obtient en distribuant la multiplication par  $x^n$ .

$$x^m(a_n x^n + \dots + a_0) = a_n x^{n+m} + a_{n-1} x^{n-1+m} + \dots + a_0 x^m$$

**Remarque:**

$$\deg(x^m P) = m + \deg P$$

**Définition:** Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes. Leur produit noté  $P \cdot Q$ . On l'obtient par distribution des produits et un regroupant les coefficients d'une même puissance de  $x$ .

**Exemple:**

$$P(x) = 3x^2 + 5x - 6 \quad Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 3$$

Alors

$$\begin{aligned} (PQ)(x) &= P(x) \cdot Q(x) \\ &= (3x^2 + 5x - 6) \cdot (-x^3 - 2x^2 + 3) \\ &= -3x^5 - 6x^4 + 9x^2 - 5x^4 - 10x^3 + 15x + 6x^3 + 12x^2 - 18 \\ &= -3x^5 - 11x^4 - 4x^3 + 21x^2 + 15x - 18 \end{aligned}$$

**Remarque:**

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

**Définition:** Soit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

Alors

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto P(x) \quad \text{"image par } P \text{ de } x" \end{aligned}$$

est une fonction polynomiale.

En particulier, l'évaluation de  $P$  en  $x_0 \in \mathbb{R}$  s'écrit

$$P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + \dots + a_0$$

$P$  évalué en  $x_0$

**Exemple:**

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \text{et} \quad x_0 = -2$$

Alors

$$P(x_0) = (-2)^2 - 5(-2) + 6 = 20$$

### 3.2 Binôme de Newton

**Définition:** Le polynôme en  $x$ .

$$P_n(x) = (x + a)^n, \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$$

est appelé binôme de Newton ( $x + a$  : binôme)

Calculons...

**Définition:** On note  $C_n^k$  le nombre de manières de choisir un sous-ensemble à  $k$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

On peut montrer que

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

où

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

est dit " $k$ -factorielle".

On pose

$$0! = 1$$

et

$$C_n^0 = 1 = C_0^0$$

**Remarque:** Une factorielle est vite très grande...

On calcul plutôt:

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)!}}{k! \cdot \cancel{(n-k)!}} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} \quad \begin{array}{l} \leftarrow k \text{ facteurs} \\ \leftarrow k \text{ facteurs} \end{array} \end{aligned}$$

**Propriétés:**

1.  $C_n^k = C_n^{n-k}$ ,  $k = 0, \dots, n$
2.  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$
3.  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

**Corollaire:** Le développement du binôme de Newton donne:

$$(x+a)^n = C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^k a^k x^{n-k} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} x^1 + C_n^n a^n x^0$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k a^k x^{n-k} \quad \text{remarque: il y a } n+1 \text{ termes}$$

En effet, dans le développement de

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a) \cdot (x+a) \cdot \dots \cdot (x+a)}_{n \text{ facteurs}}$$

le terme  $a^k x^{n-k}$  apparaît  $C_n^k$  fois, on a à choisir  $k$  fois le  $a$  et du coup on a  $n-k$  fois le  $x$ .

**Exemple:** Développer

$$(x-1)^6 = C_6^0 (-1)^0 x^6 + C_6^1 (-1)^1 x^5 + C_6^2 (-1)^2 x^4 + C_6^3 (-1)^3 x^3 + C_6^4 (-1)^4 x^2 + C_6^5 (-1)^5 x^1 + C_6^6 (-1)^6 x^0$$

$$= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

**Exemples:**

1. Donner le coefficient de  $x^{127}$  dans  $(x+2)^{129}$ .

Le terme en  $x^{127}$  est ( $k=2$ )

$$C_{129}^2 2^2 x^{127} = \frac{129 \cdot 128}{2-1} \cdot 2^2 x^{127} = 33024 x^{127}$$

2. Terme en  $x^8$  dans  $\left(\overbrace{4x^3}^x + \overbrace{\frac{3}{x^2}}^a\right)^{11}$

Le terme général ( $(k+1)^e$  terme) est

$$C_n^k \left(\frac{3}{x^2}\right)^k \cdot (4x^3)^{n-k} = C_{11}^k 3^k 4^{11-k} x^{-2k} x^{3(11-k)}$$

Il faut trouver

$$k \text{ t.q. } 33 - 5k = 8 \quad (k = 0, 1, \dots, 11)$$

$$k = 5$$

D'où le terme en  $x^8$  :  $C_{11}^5 3^5 4^{11-5} x^8 = \dots$

### 3.3 Zéro, schéma de Hörner, multiplication

**Théorème:** Soient  $P$  un polynôme avec  $\deg P \geq 1$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Alors il existe un unique polynôme

$$F \text{ t.q. } P(x) = F(x) \cdot (x - x_0) + P(x_0)$$

**Remarques:**

- $\deg F = \deg P - 1$
- Il est un cas particulier de division euclidienne

En effet, notons

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

et

$$F(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0$$

Alors

$$\begin{aligned} P(x) &= F(x) \cdot (x - x_0) + r && r: \text{à déterminer} \\ &= b_{n-1} x^n + b_{n-2} x^{n-1} + \dots + b_0 x - x_0 b_{n-1} x^{n-1} - x_0 b_{n-2} x^{n-2} - \dots - x_0 b_0 \end{aligned}$$

En additionnant toutes les lignes les, les  $b_k$  tombent

Donc les  $b_k$  existent (uniques) et  $r = P(x_0)$

Ce processus est résumé dans le schéma de Hörner

**Exemple:** Division euclidienne de

$$P(x) = 4x^3 + 2$$

par

$$x + 2$$

$$x_0 = -2$$

Ainsi :

$$4x^3 + 2 = (4x^2 - 8 + 16) \cdot (x + 2) \underbrace{-30}_{P(-2)}$$

**Corollaire:** Le reste de la division de  $P(x)$  par  $x - x_0$  est  $P(x_0)$ .

**Définition:** Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$ .  $x_0$  est un zéro de  $P$  (ou racine) si  $P(x_0) = 0$ .

**Corollaire:**  $x_0$  est un zéro de  $P(x)$  si et seulement si  $P$  est divisible par  $x - x_0$ .

**Exemple:**

$$x_0 = -1$$

est racine évidente de

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 9$$

$$P(-1) = 0$$

Alors  $P(x)$  est divisible par

$$x - x_0 = x + 1$$

Pour trouver la factorisation: diviser ou utiliser le schéma de Hörner.

**Définition:** Soit  $P$  un polynôme,  $\deg P \geq 1$ . Si  $x_0$  est un zéro de  $P$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$ , appelé la multiplicité de  $x_0$ , tel que

$$P(x) = (x - x_0)^n Q(x)$$

avec

$$Q(x_0) \neq 0$$

et

$$\deg Q = \deg P - n$$

**Remarques:**

- Cas particulier de division euclidienne
- $\deg F = \deg P - 1$
- $P(x_0)$  est le reste de division de  $P$  par  $x - x_0$
- $x_0$  est le zéro de  $P$  si et seulement si  $P(x_0) = 0$  si et seulement si  $x - x_0$  divise  $P$

### 3.4 Division euclidienne

**Théorème:** Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes tels que  $\deg P \geq \deg Q$ .

Il existe alors deux polynômes uniques  $F$  et  $R$  tels que

$$P(x) = F(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad (\text{avec } \deg R < \deg Q)$$

Cette décomposition est appelée la **division euclidienne** de  $P$  par  $Q$ .

Si  $R = 0$ , on dit que  $Q$  divise  $P$ .

**Exemple:** Donner la division euclidienne de

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 46x^2 + 88x - 23$$

par

$$Q(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrr}
 3x^4 & +2x^3 & -46x^2 & +88x & -23 \\
 3x^4 & -12x^3 & +15x^2 & & \\
 \hline
 & 14x^3 & -61x^2 & +83x & \\
 & 14x^3 & -56x^2 & +70x & \\
 \hline
 & & -5x^2 & +18x & -23 \\
 & & -5x^2 & +20x & -25 \\
 \hline
 & & & -2x & +2
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x^2 - 4x + 5 \\
 \hline
 3x^2 + 14x - 5
 \end{array}
 \end{array}$$

Ainsi:

$$3x^4 - 2x^3 - 46x^2 + 88x - 23 = (3x^2 + 14x - 5) \cdot (x^2 - 4x + 5) + (-2x + 2)$$

### 3.5 Décomposition en facteurs irréductibles

**Définition:** Un polynôme est dit irréductible s'il ne peut pas être décomposé en un produit de polynôme de degré plus petit (degré null par exemple)

**Théorème:** Dans  $\mathbb{R}[x]$ , les polynômes irréductibles sont dans la forme

- $ax + b$ ,  $a \neq 0$
- $ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  et  $\Delta b^2 - 4ac < 0$  (pas de racines réelles et donc pas de factorisation).

**Corollaire:** Tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[x]$  peut être décomposé en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[x]$

$$P(x) = a(x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_p)^{n_p} \cdot (x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^{m_1} \cdots (x^2 + \beta_qx + \gamma_q)^{m_q}$$

avec

- $a \in \mathbb{R}^*$
- racines réelles  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , toutes différentes
- $n_i \in \mathbb{N}^*$  : ordre (ou multiplicité) de  $x_i$
- $(\beta_j, \gamma_j)$   $j = 1, \dots, q$ , tous différentes et tels que  $\Delta_j = \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$
- $m_j \in \mathbb{N}^*$ ,  $j = 1, \dots, q$
- $n_1 + \dots + n_p + 2m_1 + \dots + 2m_q = \deg P$

**Exemple:**

$$P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1$$

**Remarque:**  $x_1 = 1$  annule  $P$  :  $P(1) = 0$ . Donc  $x - 1$  divise  $P$  :  $P(x) = (\dots)(x - 1)$   
Finalement  $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)(2x^2 + x + 1)$



### 3.6 Décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples

**Définition:** Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[x]$  deux polynômes. Leur quotient

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \deg Q \geq 0$$

est une fonction rationnelle.

Cherchons à exprimer  $f(x)$  comme une somme de fonctions rationnelles plus simples (p.ex intégrables)

**Exemple:** Considérons

$$P(x) = 2x^3 - 11$$

et

$$Q(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$$

**Remarque:** Comme  $\deg P < \deg Q$ , une division euclidienne n'est pas utile. Cherchons à factoriser  $Q(x)$

**Remarque:**

$$Q(1) = 0$$

On peut donc factoriser  $Q(x)$  par  $x - 1$  ...

$$Q(x) = (x - 1)^3(x^2 + x + 1)$$

On vérifie que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^3 - 11}{(x - 1)^3(x^2 + x + 1)} = \frac{-2}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2} + \frac{-3}{(x - 1)^3} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

**Remarque:** Les numérateurs associés au polynôme irréductible 1<sup>er</sup> degré,  $x - 1$ , sont de degré 0. Ceux associés à  $x^2 + x + 1$  (irréductible de degré 2) sont du 1<sup>er</sup> degré.

**Définition:** La décomposition d'une fonction  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  en éléments simples est son écriture comme une somme de fonctions rationnelles où le dénominateur de chaque terme est uniquement une puissance d'un polynôme irréductible.

#### Procédure

1. Si  $\deg P \geq \deg Q$ , on effectue d'abord la division euclidienne:

$$P = FQ + R \iff \frac{P}{Q} = F + \frac{R}{Q}$$

où  $F \in \mathbb{R}[x]$  et  $\deg R < \deg Q$ .

Pour la décomposition de  $\frac{R}{Q}$ , voir ci-dessous.

2. Si  $\deg P < \deg Q$ , on décompose  $Q$  en produit de facteurs irréductibles. Pour  $Q$  unitaire (on peut toujours mettre un réel en évidence)

$$Q(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_p)^{n_p} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1} \cdots (x^2 + \beta_q x + \gamma_q)^{m_q}$$

On peut montrer qu'il suffit alors de déterminer les coefficients

$A_{ij}, B_{kl}, C_{kl}$  dans le développement suivant:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} \\ & + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2n_2}}{(x - x_2)^{n_2}} \\ & + \frac{A_{p1}}{x - x_p} + \frac{A_{p2}}{(x - x_p)^2} + \cdots + \frac{A_{pn_p}}{(x - x_p)^{n_p}} \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1m_1}x + C_{1m_1}}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1}} \\ & + \frac{B_{q1}x + C_{q1}}{x^2 + \beta_q x + \gamma_q} + \frac{B_{q2}x + C_{q2}}{(x^2 + \beta_q x + \gamma_q)^2} + \cdots + \frac{B_{qm_q}x + C_{qm_q}}{(x^2 + \beta_q x + \gamma_q)^{m_q}} \end{aligned}$$

Un terme du type  $\frac{A}{(x-x_0)^k}$  est dit de première espèce et un terme de type  $\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$  de 2<sup>e</sup> espèce.

3. Pour déterminer les coefficients, on peut

- Mettre au même dénominateur la somme des éléments simples et comparer les coefficients du numérateur obtenu à ceux de  $P(x)$ .
- Évaluer l'égalité en  $x_0$  bien choisi, après une éventuelle multiplication par  $(x - x_0)^k$
- Faire la limite  $x \rightarrow \infty$ , après une éventuelle multiplication par  $x^k$ .

**Exemple:**

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 10, \quad Q(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$$

Décomposons  $\frac{P}{Q}$  en éléments simples.

1. Division euclidienne: pas nécessaire, car  $\deg P < \deg Q$
2. Factoriser  $Q(x)$ . Observation:  $Q(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$  donc

$$Q(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1)$$

3. Éléments simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{c}{x + 1} + \frac{dx + e}{x^2 + x + 1}$$

4. Pour déterminer les coefficients

- Soit on met au même dénominateur

- Soit on évacue:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 5x - 10}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{dx+e}{x^2+x+1}$$

Multiplions par  $(x-1)^2$

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 5x - 10}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)} = a(x-1) + b + \frac{c}{x+1} \cdot (x-1)^2 + \frac{dx+e}{x^2+x+1} \cdot (x-1)^2$$

et évaluer en  $x = 1$ :

$$\implies -\frac{6}{6} = 0 + b + 0 + 0 \implies b = -1$$

Multiplions par  $(x+1)$

$$\implies -\frac{12}{4} = 0 + 0 + c + 0 \implies c = -3$$

Multiplions par  $x$  et  $x \rightarrow \infty$

$$\implies 1 = a + 0 + c + d \implies a + d = 4$$

Évaluer en  $x = 0$

$$\implies -\frac{10}{7} = -a + b + c + e \implies -a + e = -6$$

Évaluer en  $x = 2$

$$\implies 0 = a + b + \frac{c}{3} + \frac{2d+e}{7} \implies 7a + 2d + e = 14$$

Finalement

$$a = 2 \quad b = -1 \quad c = -3 \quad d = 2 \quad e = -4$$

d'où

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-3}{x+1} + \frac{2x-4}{x^2+x+1}$$