

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 1A  
PREPA-031(A)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

## Chapter 6

# Séries de Taylor

### 6.1 Développement limités: polynôme de Taylor

**But:** On cherche un polynôme approchant au mieux une fonction  $f$  dans un voisinage d'un point donné. Critère: les variables locales (dérivées) coïncident.

**Définition:** Soit  $f$  une fonction réelle  $n + 1$  fois dérivable sur  $I = ]a, b[$  On appelle polynôme de Taylor (ou développement limité) de degré  $n$  de  $f$  en  $x_0 \in I$  le polynôme:

#### Développement limité

$$\begin{aligned} DL_{f,x_0}^{(n)}(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \end{aligned}$$

$f(x_0)$  est le terme constant et on vérifie que les dérivées coïncident:

$$k^{\text{e}} \text{ dérivée} : \left( DL_{f,x_0}^{(n)} \right)^{(k)} = f^{(k)}(x_0) \quad k = 0, \dots, n$$

**Exemple:**  $f(x) = \sin(x)$  dans un voisinage de  $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin(0) = 0 \\ f'(0) &= \cos(0) = 1 \\ f''(0) &= -\sin(0) = 0 \\ f'''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ f^{(4)}(0) &= \sin(0) = 0 \\ f^{(5)}(0) &= \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow DL_{f,x_0}^{(5)}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

**Remarque:** Avec le changement de variable  $x = x_0 + h$  développer  $f(x)$  au voisinage de  $x_0$  revient à chercher une approximation de  $f$  "en  $x_0$  plus un petit quelque chose".

$$\begin{aligned} DL_{f,x_0}^{(n)}(x_0 + h) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k \end{aligned}$$

**Exemple:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \sin(x) \quad \text{en} \quad x_0 = \frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) \\ f(x_0) &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ f'(x_0) &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ f''(x_0) &= -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ f'''(x_0) &= -\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ f^{(4)}(x_0) &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{à l'ordre 4} \quad DL_{f,\frac{\pi}{4}}^{(4)}(x) &= 1 + h - \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} \\ &= 1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} \end{aligned}$$

## 6.2 Approximation et reste

Pour qualifier l'approximation d'une fonction par un polynôme de Taylor, il convient d'estimer l'erreur (ou le reste), soit la différence  $f(x) - DL_{f,x_0}^{(n)}(x)$  notée

$$d^n f \Big|_{x_0} (x)$$

**Théorème:** Soit  $f$  une fonction réelle  $n + 1$  fois dérivable sur  $I = ]a, b[$  et  $x_0 \in I$ . Alors pour

$$x \in I, \quad \exists y_0 \in ]x_0, x[$$

$$d^n f \Big|_{x_0} (x) = f(x) - DL_{f,x_0}^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(y_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

**Conséquence:** en posant  $h = x - x_0$  (écart par rapport à  $x_0$ ), le  $d^n f|_{x_0}(x)$  est du type  $o(h^n)$  ("petit o de h")

C'est-à-dire une fonction de  $h$  tendant vers 0 **plus vite que  $h^n$**  lorsque  $h \rightarrow 0$ :

$$d^n f|_{x_0}(x_0 + h) = o(h^n)$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$

Ainsi

$$f(x) = DL_{f,x_0}^{(n)}(x_0 + h) + o(h^n)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

**Remarque:** Souvent, on donne le D.L. que l'on complète par  $o(h^n)$  pour contrôler l'ordre du développement.

**Exemple:** (voir formulaire)

$$X_0 = 0, \quad x = 0 + h : \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(h^n)$$

si  $|x| < 1$

$$x_0 = 0, \quad x = 0 + h : \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

**Remarque:** Connaissant le DL de  $f$  en  $x_0$ , on ne peut à priori rien dire sur le DL autour d'un autre point (sauf pour les polynômes).

On peut parfois utiliser des DL connues.

1. L'écriture d'un polynôme est une DL autour de  $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^2 - 7x + 3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &= \underbrace{3}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{-7x}_{1^{\text{e}} \text{ ordre}} + \underbrace{3x^2}_{2^{\text{e}} \text{ ordre}} \end{aligned}$$

Le polynôme de Taylor autour de  $x_0 = 1$  est

$$\begin{aligned} P(x) &= a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0 \\ &= \underbrace{a_0}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{a_1(x-1)}_{1^{\text{e}} \text{ ordre}} + \underbrace{a_2(x-1)^2}_{2^{\text{e}} \text{ ordre}} \end{aligned}$$

Les coefficients  $a_0, a_1, a_2$  s'obtiennent par identification des puissances de  $x$ .

Ou alors on pose

$$n = x - 1 \iff x = 1 + n$$

et on calcule

$$P(x) = P(1 + n)$$

2. Donnons le DL de  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $x_0$   
pour  $x_0 = 1, x = 1 + h$ , le DL est connu.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{1+h} \\ &= 1 - h + h^2 - h^3 + \dots + (-1)^n h^n + o(h^n) \quad (|h| < 1) \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n + o((x-1)^n) \quad (|x-1| < 1)\end{aligned}$$

Pour  $x_1 = 2$ , on peut ramener à un DL connu:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{2+h} + \frac{1}{2\left(1+\frac{h}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \dots + (-1)^n \left(\frac{h}{2}\right)^n + o\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2\right) \right)\end{aligned}$$

où  $h = x - 2$

### 6.3 DL d'une combinaison de fonctions

Le DL d'une combinaison de fonctions est la combinaison des DL individuels.

**⚠ Attention à considérer suffisamment de termes ⚠**

**Exemple:** A l'aide d'un DL du sinus en  $x_0 = 0$ , calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(x) - 6x + x^3}{x^5}$$

Avec assez de termes, on a toutes les compensations.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(x) - 6x + x^2}{x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) - \cancel{6x} + \cancel{x^2}}{x^5} \\ &= \frac{6}{5!} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cdot o(x^5)}{x^5} = \frac{6}{5!}\end{aligned}$$

C'est bon pour la somme, produit, quotient, dérivées et primitives (⚠ constante d'intégration)

Pour une fonction composées  $g(y)$  où  $y = f(x)$  il suffit de considérer  $f(x) = f(x_0 + h)$  comme

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + u_{\searrow (\text{petit qqch})}$$

où

$$u = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

avec  $u \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  et

$$\begin{aligned}g(f(x_0 + h)) &= g(f(x_0) + u) \\ &= DL_{g, y_0}^{(m)}(y_0 + n) + o(n^m) \\ &= \sum_{l=0}^m \frac{g^{(l)}(y_0)}{l!} u^l + o(u^m)\end{aligned}$$

Il suffit d'injecter le DL de  $f(x)$  autour de  $x_0$  dans le DL de  $g(y)$  autour de  $y_0 = f(x_0)$

**Cas particulier:** Le quotient. Donner le DL à l'ordre  $n$  de l'inverse de  $f(x)$  en  $x_0$  ( $f(x_0) \neq 0$ ) à l'aide du DL de  $f$  en  $x_0$ :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0 + h)} = \frac{1}{f(x_0) + u}$$

$$\text{où } u = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k + o(h^n)$$

$$= \frac{1}{f(x_0)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{u}{f(x_0)}} = \frac{1}{f(x_0)} \cdot \left( 1 - \left( \frac{u}{f(x_0)} \right) + \left( \frac{u}{f(x_0)} \right)^2 - \left( \frac{u}{f(x_0)} \right)^3 + \dots \right)$$

On celle à prendre assez de termes des chaque puissance de  $\frac{u}{f(x_0)}$

**Exemple:** Donne le DL d'ordre 4 en  $x_0 = 0$  de

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \sin(x)} &= 1 + \sin(x) + \sin^2(x) + \dots \quad (|\sin(x)| < 1) \\ &= 1 + \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) \\ &\quad + \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)^2 \\ &\quad + (x + o(x^2))^3 \\ &\quad + (x + o(x))^4 \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

## 6.4 Séries de Taylor et fonctions analytiques

**Définition** On appelle **série entière** une expression de la forme

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k}_{S_n(x)}$$

"suite des somme parallèles"

**Théorème** Il existe  $R > 0$ , appelé rayon de convergence de  $A$ , tel que  $A(x)$  est bien défini (la série converge)

$$\forall x \in ]x_0 - R; x_0 + R[$$

De plus:

1. si

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

existe, alors

$$R = \frac{1}{L}$$

2. si

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

existe, alors

$$R = \frac{1}{L}$$

Si  $|x - x_0| < R$ , alors la série  $\sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$  converge Si  $|x - x_0| > R$ , alors la série  $\sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$  diverge Si  $|x - x_0| = R$ , le théorème ne permet pas de conclure.

**Définition** On appelle série de Taylor de  $f$  en  $x_0$  ( $f$  infiniment dérivable en  $x_0$ )

$$T_{f,x_0}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} DL_{f,x_0}^n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

**Définition** On dit que  $f$  est **analytique** au point  $x_0$ , de rayon  $R > 0$ , si

$$f(x) = T_{f,x_0}(x) \quad \forall x \in ]x_0 - R, x_0 + R[$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{f,x_0}^n(x) = 0 \quad \forall x \in ]x_0 - R, x_0 + R[$$

**Exemple**

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{si } |x| < 1$$

(série géométrique de raison  $x$ ) En d'autres termes, le développement en série de Taylor de  $f$  au point  $x_0 = 0$  est donnée par

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ainsi

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1$$

et donne

$$f^{(k)}(0) = k!$$

Rayon de convergence?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1 \implies R = 1$$

Si  $x = 1$ ,  $s_n(1) = n \rightarrow \infty$ , la série diverge. Si  $x = -1$ ,  $s_n(-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \implies$   
diverge

**Exemple** La fonction exponentielle

$$f(x) = \exp(x)$$

est définie et infiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec

$$f^{(k)}(x_0) = \exp(x_0) \quad \forall k \geq 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

On regarde d'abord  $T_{f,0}(x)$ : on a que

$$f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \geq 0 \implies T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Rayon de convergence:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 \implies R = \infty$$

la série converge sur  $\mathbb{R}$

Pour prouver que  $\exp(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$  on montre que

$$d_{f,0}^n(x) \longrightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Par le théorème  $R$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0$  entre 0 et  $x$  tel que

$$d_{f,0}^n(x) = \frac{\exp(y_0)}{(n+1)!} x^{n+1} = \exp(y_0) \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\rightarrow 0} \quad (n \rightarrow \infty)$$

□

Maintenant  $\exp(x)$  est en fait analytique en tout point  $x_0 \in \mathbb{R}$  car

$$\exp(x_0 + h) = \exp(x_0) \exp(h) = \exp(x_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \stackrel{h=x-x_0}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

**Exemple** Une fonction non analytique est donné par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$