EPFL

MAN

Mise à niveau

Physique

PREPA-033

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sylvain BRÉCHET

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 9

Magnétostatique

9.1 Champ magnétique et force de Lorenz

Champ magnétique $\overrightarrow{B}$: grandeur vectorielle intensive définie en tout point de l'espace.

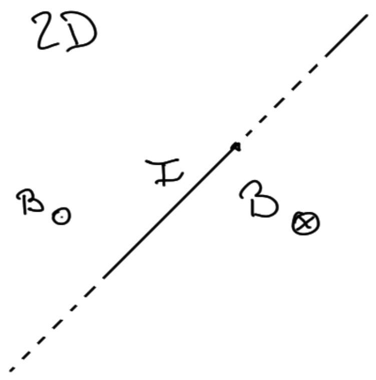
Force de Lorenz $\overrightarrow{F}$: En présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ généré par un aimant ou un fil parcouru par un courant, une particule de charge électrique q en mouvement à vitesse $\overrightarrow{v}$ subit une force de Lorentz (magnétique) $\overrightarrow{F}$

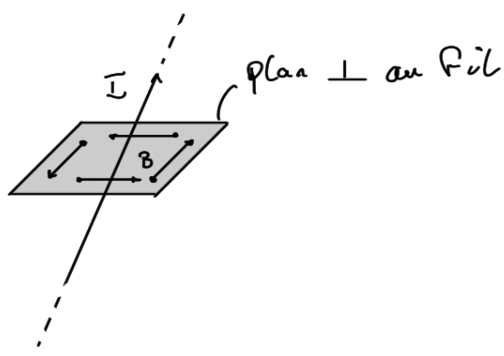
$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} \tag{9.1}$$

La force de Lorentz (magnétique) ne travaille pas, car elle est perpendiculaire au mouvement.
Unité physique du champ magnétique (SI): Tesla $[T]$: $\left[\frac{N}{C} \cdot \frac{s}{m}\right] = \left[\frac{kg}{A \cdot s^2}\right]$

9.1.1 Lignes de champs magnétiques générées par un courant

Lorqu'un fil est parcouru par un courant électrique $\overrightarrow{I}$, les lignes de champ magnétique $\overrightarrow{B}$ sont des cercles concentriques centrés sur le fil dans un plan orthogonal au fil.





Les lignes de champ magnétiques sont fermées.

Leur orientation par rapport à la direction de propagation du courant électrique $\overrightarrow{I}$ est donée par la règle de la main droite (ou du tir-bouchon) (loi d'Ampère).

9.1.2 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et constant

La loi du mouvement s'écrit,

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a} \tag{9.2}$$

Le mouvement de la particule a les propriétés suivantes:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{q}{m}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \times \vec{v} = 0 \implies \vec{a} \perp \vec{v}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2 = 0 \implies v = \text{cste}$$

L'accélération de la particule est une accélération centripète et la norme v de la vitesse est constante.

Deux cas:

1. Le mouvement est orthogonal au champ magnétique: $\vec{v} \perp \vec{B}$
2. Le mouvement est "quelconque".

1. Mouvement circulaire uniforme (MCU):

$$\vec{a} = \frac{-q}{m}\vec{B} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad \text{donc} \qquad \vec{\omega} = -\frac{q\,\vec{b}}{m} \quad \text{et} \quad \omega^2 = \frac{q^2B^2}{m^2} \tag{9.3}$$
$$\vec{a} = -\omega\,\vec{r} = -\frac{q^2B^2}{m^2}\vec{r} = \frac{q^2B^2}{m^2}R\vec{e_n} \qquad \text{où } \vec{r} = -R\vec{e_n}$$

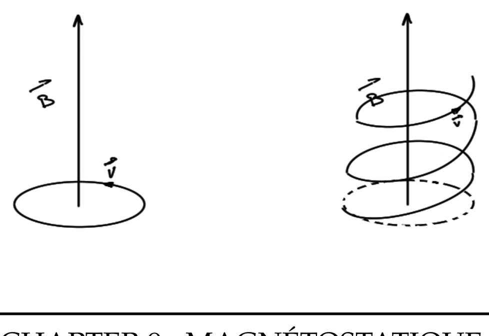
$$v = \omega R = \frac{|q|B}{m}R \implies R = \frac{mv}{|q|B} = \text{cste(rayon de courbure)} \tag{9.4}$$

2. Mouvement hélicoïdal: $\vec{v} = \vec{v_\parallel} + \vec{v_\perp}$

$$\vec{a} = \frac{q}{m}(\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{q}{m}\underbrace{(\vec{v_\parallel} \times \vec{B})}_{=0} + \frac{q}{m}(\vec{v_\perp} \times \vec{B}) = \frac{q}{m}(\vec{v_\perp} \times \vec{B}) \implies \vec{v_\parallel} = \text{cste}$$

$$v_\perp = \frac{\overbrace{|q|B}^{=\omega}}{m}R[...] \tag{9.5}$$

[...]



9.1.3 Cyclotron, accélérateur de particules

Le cyclotron est un accélérateur de particules chargées, formé de deux demi-cylindre creux ("D" ou "dee") plongés dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme.
Dans chaque dee, les particules ont un MCU de rayon de courbure.

$$R = \frac{mv}{|q|B} \tag{9.6}$$

et une demi-période

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi m}{|q|B} \implies \nu = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m} \tag{9.7}$$

L'accélération est due à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ uniforme entre les dees.

$$ma = qE \implies a = \frac{q}{m}E \tag{9.8}$$

A chaque demi-tour, la vitesse augmente et donc le rayon de courbure augmente également.

9.1.4 Effet Hall

En présence d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et d'une champ magnétique $\overrightarrow{B}$, la force de Lorentz $\overrightarrow{F}$ exercée sur une charge en mouvement se généralise à,

$$\overrightarrow{F} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right) \tag{9.9}$$

Effet Hall: Un courant dans une feuille métallique plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ induit une tension transversale U_{12}

Sous l'effet de la force de Lorentz $\overrightarrow{F}$, les charges se séparent jusqu'à ce que la force électrique $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$ compense la force magnétique

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$$

$$q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = 0 \implies \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$$

Il apparait une tension transversale U_{12}.

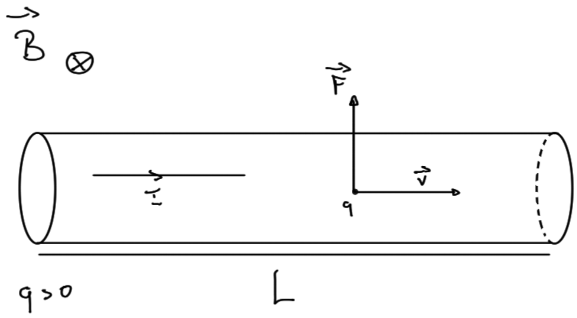
9.2 Force de Laplace

On considère une fil de longueur L parcouru par un courant $\overrightarrow{I}$ et plongé dans u nchamp magnétique.
Les porteurs de charges électrique q subissant une force de Lorentz (magnétqiue)

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$$

qui s'exerce sur le fil, ce qui donne une force de Laplace,

$$\overrightarrow{F} = L\overrightarrow{I} \times \overrightarrow{B} \tag{9.10}$$



9.2.1 Force de Lorentz magnétique et force de Laplace

La force extérieure résultante exercée sur un fil de longueur L est la résultante des forces de Lorentz magnétiques exercées sur tous les électrons de conducition:

$$\vec{F} = N(e\vec{v} \times \vec{B})$$

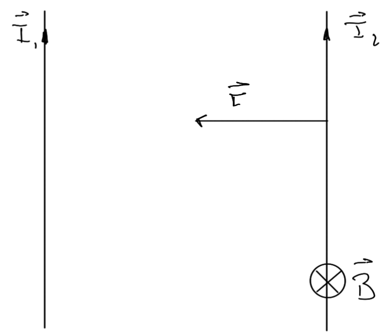
où $N =$ nombre d'électrons de conduction
Compte tenu que le courant $\vec{I} = enS\vec{v}$ où n est la densité des électrons de conduction et $N = nSL$,

$$\vec{F} = nSLe\vec{v} \times \vec{B} = L(enS\vec{v}) \times \vec{B} = L\vec{I} \times \vec{B}$$

La force de Lorentz magnétique $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$ est une force qui s'exerce à l'échelle microscopique sur un électrons.
La force de Laplace $\vec{F} = L\vec{I} \times \vec{B}$ est une force qui s'exerce à l'échelle macroscopique sur l'ensmble des électrons de conduction d'un fil.

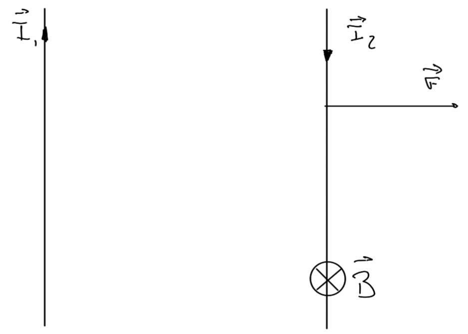
9.2.2 Deux fils parallèles parcourus par des courants

1. Courants orientés dans le même sens



Le courant $\vec{I_2}$ est plongé dans le champ magnétique $\vec{B_1}$ généré par le courant $\vec{I_1}$. Comme la force de Laplace $\vec{F}$ est orientée vers l'intérieur, les files se rapprochent (force attractive).

2.



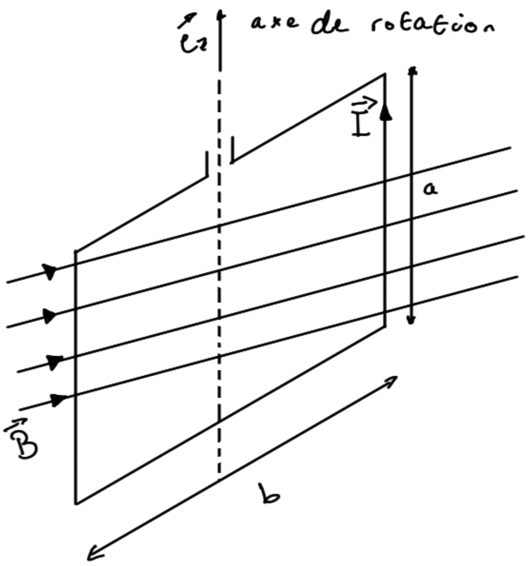
Le courant $\overrightarrow{I_2}$ est plongé dans le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ généré par le coutant $\overrightarrow{I_1}$. Comme la force de Laplace $\overrightarrow{F}$ est orientée vers l'extérieur, les files s'éloignent (force répulsive).

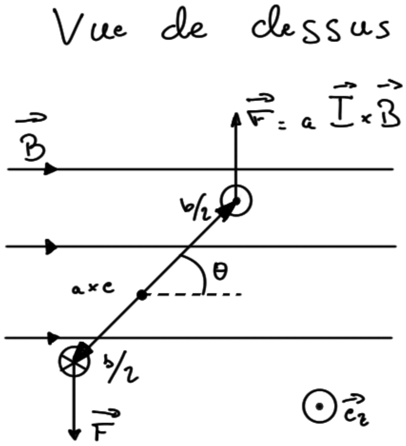
9.2.3 Galvanomètre

Un galvanomètre est un cadre rectangulaire de cotés "a" et "b" mobile autour d'un axe. Le cadre est plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme et constant. Lorsque le cadre est parcouru par un courant $\overrightarrow{I}$, ce dernier subit un moment de force de Laplace

$$\overrightarrow{M} = 2\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

compensé par un moment de force élastique $\overrightarrow{M}$ de constante élastique en tension C:





Moment de force de Laplace: (couple de forces $\overrightarrow{F}$ et $-\overrightarrow{F}$)

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times 2\overrightarrow{F} = 2\|\overrightarrow{r}\|\|\overrightarrow{F}\|\sin(\alpha)\overrightarrow{e_z} = 2\frac{b}{2}aIB\cos(\theta)\overrightarrow{e_z}$$

Moment de force de rappel élastique:

$$\overrightarrow{M} = -C\theta\overrightarrow{e_z}$$

où $C > 0$

État d'équilibre: (moment de force résultant nul)

$$\vec{r} \times 2\vec{F} - C\theta\vec{e_z} = \vec{0} \implies baIB\cos(\theta) - C\theta = 0 \implies I = \frac{C\theta}{Bab\cos(\theta)} \tag{9.11}$$

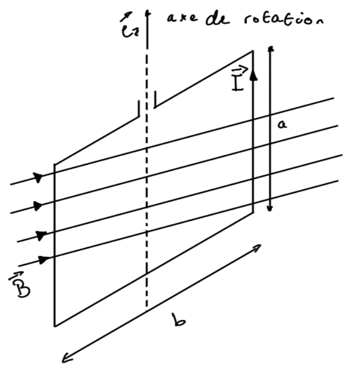
On a ainsi construit un ampèremètre qui permet de mesurer le courant électrique I proportionnel à l'angle de déviation θ si $\theta << 1$

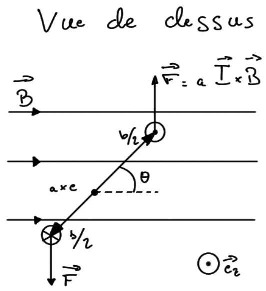
9.2.4 Moteur à courant continu

Le moteur électrique à courant continu est basé sur le même principe que le galvanomètre si ce n'est qu'il n'y a pas de force élastique de rappel et que le courant est inversé à chaque demi-tour afin que le moment de force de Laplace

$$\vec{M} = IBab\cos(\theta)\vec{e_z}$$

soit toujours orienté dans le même sens.





Moment de force:

$$\vec{M} = IBab\cos(\theta)\vec{e_z}$$

1. $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \implies \vec{M} \quad \odot$
2. $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \implies \vec{M} \quad \otimes$

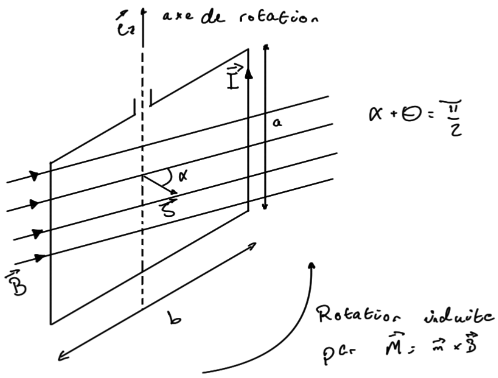
En inversant le sens du courant $\vec{I}$ lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$ le cadre tourne toujours dans le même sens.

9.3 Moment dipolaire magnétique

On considère un carde parcouru par un courant $\vec{I}$, plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Le moment dipolaire magnétique $\vec{m}$ du cadre s'écrit,

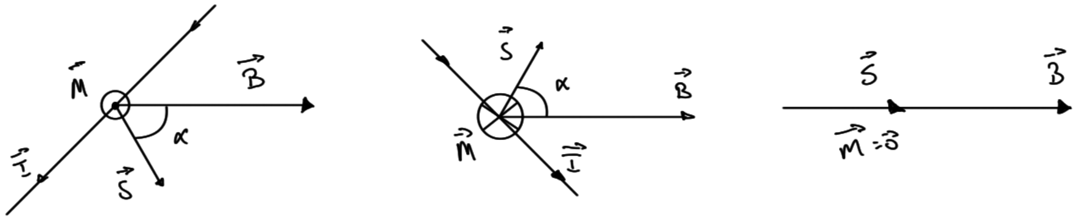
$$\vec{m} = I\vec{S} \tag{9.12}$$

où $\vec{S}$ est le vecteur surface de norme ab et d'orientation définie par la règle de la main droite dans le sens du courant $\vec{I}$.



Le moment de force de Laplace s'écrit,

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = I\vec{S} \times \vec{B} = Iab\sin(\alpha)\vec{e_z} \tag{9.13}$$

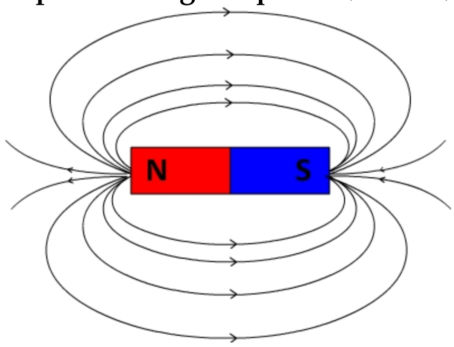


Le moment $\vec{m}$ tend à l'aligner sur le champ magnétique $\vec{B}$.

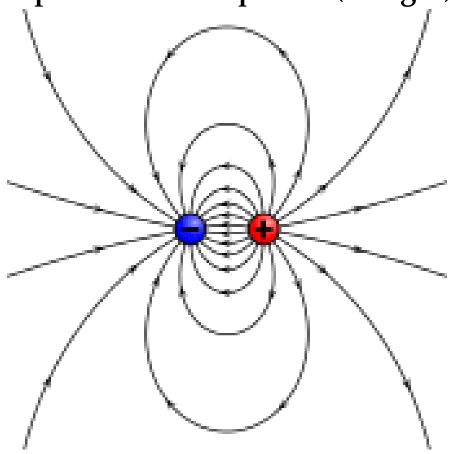
9.3.1 Aimants et lignes de champ magnétique

Un aimant peut être vu comme un dipole magnétique (ou comme un ensemble macroscopique de boucles de courant microscopique)
Un aimant génère des lignes de champ magnétique qui sont orientées du pole nord vers le pole sud de l'aimant.

Dipole magnétique (aimant)



Dipole électrique (charges)



9.3.2 Force magnétique entre aimants

Lorsqu'un aimant est plongé dans un champ mangétique $\vec{B}$ non-uniforme généré par un autre aimant, il subit une force magnétiqu:

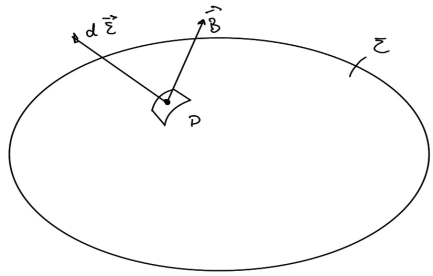
1. Force attractive exercée entre deux poles différents:

9.4 Flux magnétique

Le flux infinitésimal $d\Psi_B$ du champ magnétique $\vec{B}$ à traver une surface infinitésimale $d\vec{\Sigma}$ est une grandeur définie comme,

$$d\Psi_B = \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} \tag{9.14}$$

1. Si $\overrightarrow{B}$ et $d\overrightarrow{\Sigma}$ sont orthogonaux, $d\Psi_B = 0$
2. Si $\overrightarrow{B}$ et $d\overrightarrow{\Sigma}$ sont parallèles, $d\Psi_B > 0$
3. Si $\overrightarrow{B}$ et $d\overrightarrow{\Sigma}$ sont anti-parallèles, $d\Psi_B < 0$

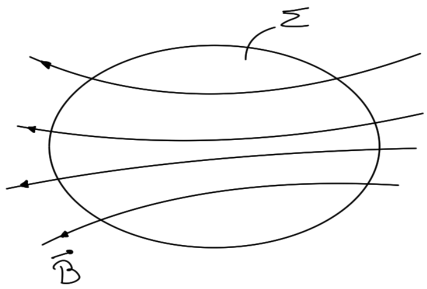


Le flux Ψ_B du champ magnétique à travers une surface fermée d'aire Σ est obtenu par intégration de $d\Psi_B$:

$$\Psi_B = \oint_{\Sigma} d\Psi_B = \oint_{\Sigma} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{\Sigma} \tag{9.15}$$

Comme il n'existe pas de charges magnétiques (appelés aussi monopoles magnétiques), il n'y a pas de source ou de surface fermée d'aire Σ:

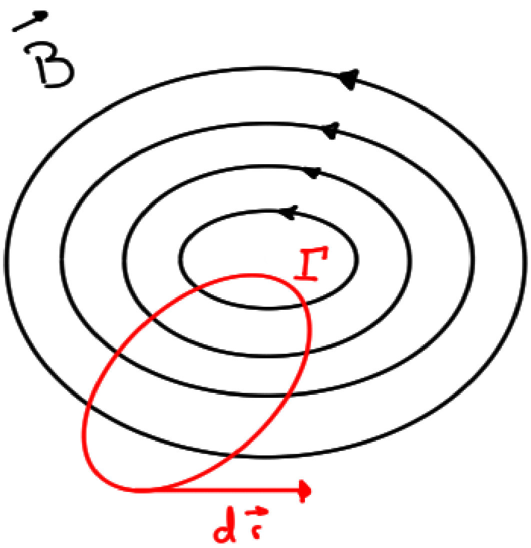
$$\Psi_B = \oint \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{\Sigma} = 0 \tag{9.16}$$



Loi de Gauss magnétique

9.5 Loi d'Ampère

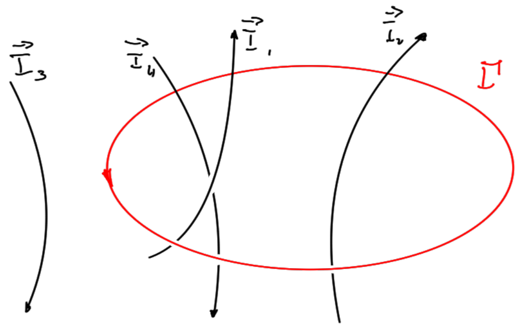
On considère une courbe fermée Γ dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$



La circulation du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ le long de Γ est proportionnelle aux courants enlacés I^{en}

$$\mathcal{C}_B = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{r} = \mu_0 I^{en} \tag{9.17}$$

Loi d'Ampère où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{kg \cdot m}{A^2 s^2}\right]$ est la perméabilité magnétique du vide.



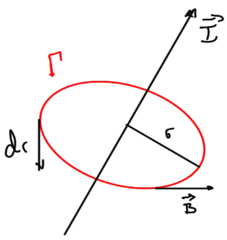
L'orientation positive des courants enlacés est définie par la règle de la main droite:

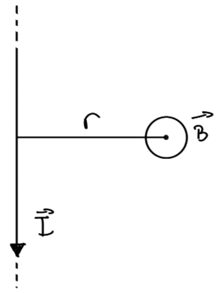
$$I^{en} = I_1 + I_2 - I_4$$

9.5.1 Champ magnétique généré par un fil rectiligne infini

Symétries

1. $\vec{b}$ est perpendiculaire au fil
2. Les lignes de champ magnétique $\vec{B}$ sont des cercles concentriques centrées sur le fil
3. $\|\vec{B}\|$ dépend que de la distance r au fil.





Circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long du cercle Γ.

$$\mathcal{C}_B = \oint_\Gamma \vec{B} d\vec{r} \xrightarrow{\vec{B} \| d\vec{r}} \oint_B ds \xrightarrow[B=\text{cste}]{r=\text{cste}} B \oint_\Gamma ds = B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\implies B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{9.18}$$

9.5.2 Champ magnétique dans un solénoïde

Hypothèse

1. $\vec{B}$ est uniforme à l'intérieur
2. $\vec{B} \simeq \vec{0}$ à l'extérieur (loin de la bobine)
3. Longueur $>>$ rayon ($L >> r$) et N spires

Chemin fermé Γ: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$
Circulation du champ magnétique le long des quatre branches

1. $1 \to 2$: $\vec{B} \cdot d\vec{r} = B_\Gamma ds, \quad B_\Gamma = $ cste
2. $1 \to 2$: $\vec{B} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \vec{B} \perp d\vec{r}$
3. $1 \to 2$: $\vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$ car
4. $1 \to 2$: $\vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$