EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2B

PREPA-032(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Simon BOSSONEY

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 2

Espaces vectoriels

2.1 Espaces vectoriels

2.1.1 Définition

Un ensemble V muni de deux lois de composition

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

et

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

est appelé **espace vectoriel réel** , si

Espace vectoriel

1. $\forall x, y \in V, x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in V, (x + y) + z = (x + y) + z$
3. $\exists\, 0_V \in V | \forall x \in V, x + 0_V = x$
4. $\forall x \in V, \exists x' \in V | x + x' = 0_V$
5. $\forall x \in V, 1 \cdot x = x$
6. $\forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
7. $\forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
8. $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

Les éléments de V sont appelés des **vecteurs**.

Remarques:

- Pour un espace vectoriel V, l'élément 0_V est le seul élément de V qui satisfait

  $$x + 0_V = x \quad \forall x \in V$$

  En effet, si

  $$x + 0'_V = x \quad \forall x \in V$$

alors
$$0'_V = 0'_V + 0_V = 0_V$$
Cet élément unique est l'**élément neutre**.

- Pour $x \in V$, l'élément $x' \in V$ tel que $x + x' = 0_V$ est unique aussi. En effet, si $x'' \in V$ tel que
$$x + x'' = 0_V$$
alors
$$x'' = x'' + 0_V = x'' + (x + x') = (x'' + x) = 0_V + x' = x'$$
Cet élément unique est appelé l'**inverse** de x. On le note aussi $-x$

- On observe aussi que $0 \cdot x = 0_V$. En effet,
$$\begin{aligned} 0_V &= x + x' = 1 \cdot x + x' = (0+1) \cdot x + x' = (0+1) \cdot x + x' = (0 \cdot x + 1 \cdot x) + x' \\ &= 0 \cdot x + (1 \cdot x + x') = 0 \cdot x + (x + x') = 0 \cdot x + 0_V = 0 \cdot x \end{aligned}$$

- On remarque alors aussi, que $x' = -x = (-1) \cdot x$ car
$$\begin{aligned} x' &= x' + 0_V = x' + 0 \cdot x = x' + (1-1) \cdot x = x' + (x + (-1) \cdot x) \\ &= (x' + x) + (-1) \cdot x = 0_V + \cdot(-1) \cdot x = (-1) \cdot x \end{aligned}$$

- On utilisera la not la notation allégée λx pour $\lambda \cdot x$ et 0 pour 0_V.

- On a déjà remarqué que l'ensemble des solutions S d'un système linéaire homogène est un espace vectoriel. Cette structure caractérise de nombreux exemples en mathématiques.

Exemples:

1. $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel ($V = \mathbb{R}$)

2. $\mathbb{R}^2$(ou $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}$) est encore un exemple d'espace vectoriel où l'addition et la multiplication sont définis comme
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$
On a alors $0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ est un espace vectoriel dont le seul élément est l'élément neutre.

3. Un polynôme $p(x)$ est une somme formelle
$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n$$
où
$$a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$$
Le nombre entier n est appelé le degré du polynôme $p(x)$ si $a_n \neq 0$
L'ensemble des polynôme est $\mathbb{R}[x]$ et l'ensemble des polynôme de degré inférieur ou égal à n est $\mathbb{R}_n[x]$. L'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel où les lois de composition s'écrivent:
$$\begin{aligned} + : \quad & (a_0 + a_1 x + ... a_n x^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n \\ : \quad & \lambda(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = (\lambda a_0 + \lambda a_1 x^1 + ... + a_n x^n) \end{aligned}$$

4. Soit X en ensemble et $\mathbb{R}^X$ l'ensemble des fonctions de X vers $\mathbb{R}$. Les loi de composition sécrivent,

$$+ : (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad \cdot : (\lambda g)(x) = \lambda \cdot g(x)$$

L'élément neutre est la fonction nulle $0_{\mathbb{R}^X} : x \ni x \longmapsto 0$

5. On a une structure d'espace vectoriel sur les matrices $M_{p,q}(\mathbb{R})$ à p lignes et q colonnes. Si $A, B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ sont donnés par leurs coefficients $\{a_{ij}\}_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q}$ et $\{b_{ij}\}_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q}$, alors les coefficients de $A + \lambda B$ sont donnés par

$$\{a_{ij} + \lambda b_{ij}\}_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q}$$

6. Un example un plus abstrait est l'ensemble E_n des équations linéaires homogènes à n variables. Pour fixer les idées, on prend $n = 3$. Un élément de E_3 serait donné par une équation

$$< ax + by + cz = 0 >$$

On munit cet ensemble de lois d'addition et de multiplication:

$$< a_1x + b_1y + c_1z = 0 > +\lambda < a_2x + b_2y + c_2z = 0 >$$

$$=< (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z = 0 >$$

L'élément neutre est alors $0_{E_3} =< 0 = 0 >$ et l'inverse d'une équation $< ax + by + cz = 0 >$ est $< -ax - by - cz = 0 >$

L'avantage d'une structure d'espace vectoriel est la possibilité de former des sommes d'objets dans l'espace et d'obtenir d'autres éléments de cet espace:

2.1.2 Définition

Soient V un espace vectoriel et $v_1, ..., v_n \in V$. Une **combinaison linéaire** de $v_1, ..., v_n \in V$ est un vecteur $v \in V$ pour le quel il existe n nombres $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1, ..., \lambda_n v_n$$

L'ensemble de combinaisons linéaires de ces vecteurs est dénoté

$$\text{Vect}(v_1, ..., v_n)$$

Exemples:

1. Le polynôme $2x^3 - x + 3$ est une combinaison linéaire de $x^3 + x$ et $1 - x$. Il est aussi combinaison linéaire des monômes $1, x$ et x^3.

2. L'équation $< 3x - y + 2z = 0 >$ est une combinaison linéaire des équations $< x = 0 >, < y + z = 0 >$ et $< z = 0 >$.

3. La fonction $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est combinaison linéaire de $\sin(x)$ et $\cos(x)$, mais aucune combinaison linéaire de ces fonctions ne peut donner la fonction $\exp(x)$

4. Une solution d'un système d'équations linéaires à n variables et k équation est une combinaison linéaire de $n - k$ solutions particulières de ce système.

Pour déterminer si un vecteur est combinaison linéaire de deux autres vecteurs, on peut souvent passer la résolution d'un système d'équations linéaires. On prend par exemple le polynôme $2x^2+3x-4$ et on vérifie s'il est une combinaison linéaires des polynôme x^2-2x+3 et x^2+x+1. Si c'est le cas, alors il doit exister des nombres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que,

$$\begin{aligned} 2x^2+3x-4 &= \lambda(x^2-2x+3)+\mu(x^2+x+1) \\ &= (\lambda+\mu)x^2+(\mu-2\lambda)x+(\mu+3\lambda) \end{aligned}$$

On doit résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda+\mu=2 \\ -2\lambda+\mu=3 \\ 3\lambda+\mu=-4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

On résout le système à l'aide d'opérations élementaires:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \longrightarrow L_3-3L_1]{L_2 \longrightarrow L_2+2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \longrightarrow 2L_2+3L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -16 \end{array}\right)$$

On voit que la dernière ligne interdit une solution: ces deux polynôme ne peuvent pas redonner le premier par combinaison linéaire.

2.1.3 Théorème

Soit V en espace vectoriel et $v_1, ..., v_n \in V$. Alors l'ensemble des combinaison linéaires de ces vecteurs Vect$(v_1, ..., v_n)$ est aussi un espace vectoriel.

Démonstration: On vérifie que Vect$(v_1, ..., v_n)$ est un espace vectoriel.

1. Si $v, w \in$ Vect$(v_1, ..., v_n)$ alors $v+w \in$ Vect$(v_1, ..., v_n)$. Ainsi,

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \quad \text{et} \quad w = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$$

   et alors on obtient,

$$v+w = (\lambda_1+\mu_1)v_1 + ... + (\lambda_n+\mu_n)v_n = w+v \in \text{Vect}(v_1, ..., v_n)$$

2. Soient $v, w, z \in$ Vect$(v_1, ..., v_n)$. Ainsi,

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n, \quad w = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n \quad \text{et} \quad z = \nu_1 v_1 + ... + \nu_n v_n$$

   et alors on obtient

$$\begin{aligned} (v+w)+z &= ((\lambda_1+\mu_1)v_1 + ... + (\lambda_n+\mu_n)v_n) + \nu_1 v_1 + ... + \nu_n v_n \\ &= \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n + ((\mu_1+\nu_1)v_1 + ... + (\mu_n+\nu_n)v_n) = v+(w+z) \end{aligned}$$

3. On a $0_{\text{Vect}(v_1,...,v_n)} = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_n = 0_V$

4. Si $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ et $v' = (-\lambda_1)v_1 + ... + (-\lambda_n)v_n$ alors $v' \in$ Vect$(v_1, ..., v_n)$ et $v+v' = 0_{\text{Vect}(v_1,...,v_n)} = 0_V$

Les autres points se vérifient de manière analogue et sont laissés au soin du lecteur.

□

Il est possible que pour générer toutes les combinaisons linéaires dans Vect$(v_1, ..., v_n)$, il ne soit pas nécessaire de retenir tous les vecteurs $v_1 + ... + v_n$. Ceci se produit quand l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaire des v_{n-1} vecteurs restants. Pour alléger les notations, on introduit

$$\text{Vect}(v_1, .., \cancel{v_j}, ..., v_n) := \text{Vect}(v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n)$$

2.1.4 Théorème

Soient V un espace vectoriel et $v_1, ..., v_n \in V$. Alors,

$$v_j \in \text{Vect}(v_1, ..., \cancel{v_j}, ..., v_n)$$

si et seulement si

$$\text{Vect}(v_1, ..., \cancel{v_j}, ..., v_n) = \text{Vect}(v_1, ..., v_n)$$

Démonstration: On montre cette égalité par double inclusion.

1. On suppose que $v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + ... + \lambda_n v_n$. Clairement,

$$\text{Vect}(v_1, ..., \cancel{v_j}, ..., v_n) \subset \text{Vect}(v_1, ..., v_n)$$

   En effet, il suffit de poser $\lambda_j = 0$ dans les combinaisons dans Vect$(v_1, ..., v_n)$

2. On montre l'inclusion réciproque. Soit $v \in \text{Vect}(v_1, ..., v_n)$ Alors il existe $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$$

...

2.2 Liberté et génération

2.2.1 Définition

Soit V un espace vectoriel. Une famille de vecteurs $\{v_1, ..., v_n\}$ de V est une **famille génératrice**

$$V = \text{Vect}\{v_1, ..., v_n\}$$

Exemple: Dans l'espace vectoriel E_4 des équations linéaires homogènes, on vérifie si les vecteurs

$$v_1 =< x + y - z = 0 >, v_2 =< 2y - z + t = 0 >, v_3 =< z + 2t = 0 > et v_4 =< x - y = 0 >$$

génèrent l'espace vectoriel E_4.
Il faut donc vérifier que

$$\forall (a, b, c, d), \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ t.q. } \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 =< ax + by + cz + dt = 0 >$$

$$\begin{cases} \alpha + \delta = a \\ \alpha + 2\beta - \delta = b \\ -\alpha - \beta + \gamma = c \\ \beta + 2\delta = d \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ -1 & -1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 2 & 0 & d \end{array}\right)$$

$\implies$ ce système doit avoir au moins une solution $\forall a, b, c, d$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}(b-a) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b)+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d - \frac{1}{2}(a+3b) - 2c \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{1}{2}(a+3b) - 2c \\ \gamma &= \frac{1}{2}(a+b) + c \\ \beta &= -a - b - 2c + d \\ \alpha &= \frac{3}{2}(a+b) + 2c - d \end{aligned}$$

La famille $\{v_1, ..., v_n\}$ est génératrice de E_4

2.2.2 Théorème

Soit un espace vectoriel V et $\{v_1, ..., v_n\}$ un famille génératrice. Alors

$$v_j \in \text{Vect}\{v_1, ..., \cancel{v_j}, ..., v_n\} \iff \text{la famille } \{v_1, ..., v_n\} \text{ est également génératrice}$$

Démonstration: On a l'équivalence:

$$\text{Vect}(v_1, ..., v_n) = \text{Vect}(v_1, ..., \cancel{v_j}, ..., v_n) \iff v_j \in \text{Vect}(v_1, ..., v_n)$$

La famille $\{v_1, ..., v_n\}$ est génératrice de V:

$$V = \text{Vect}(v_1, ..., v_n)$$

et si

$$v_j \in \text{Vect}(v_1, ..., \cancel{v_j}, ..., v_n) = \text{Vect}(v_1, ..., v_n) = V$$
$$\implies \{v_1, ..., \cancel{v_j}, ..., v_n\} \text{ est aussi génératrice de V}$$

□

Un famille génératrice peut être **dépeuplée** des vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres.

2.2.3 Définition

Soit V un espace vectoriel et $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ une famille de vecteurs de V. Une **relation de dépendance linéaire** est une relation du type:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0_V \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, ..., n$$

Remarque:

- On dit que celle relation est **triviale** $\iff \{v_1, ..., v_n\}$ est **libre**
$$\iff \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, ..., n$$
- Dans le cas contraire on dit que: $\{v_1, ..., v_n\}$ est **liée**
$\{v_1, ..., v_n\}$ sont **linéairement indépendants**
- On considère l'ensemble $L\{v_1, ..., v_n\}$ des relations linéaires:
$$< \lambda_1 v_1 + ...\lambda_n v_n = 0 >$$
pour une famille $\{v_1, ..., v_n\}$ donnée (Rel$(v_1, ..., v_n)$). Cet ensemble est un espace vectoriel.

2.2.4 Théorème

Soit V un espace vectoriel et $\{v_1, ..., v_n\}$ une famille de vecteurs de V.

1. Si $\{v_1, ..., v_n\}$ **libre** et $v \in$ Vect$(v_1, ..., v_n) \implies$
$$\exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \textbf{ unique } \text{ t.q. } v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$
2. Si $\{v_1, ..., v_n\}$ **liée** et $v \in$ Vect$(v_1, ..., v_n) \implies$
$$\exists \textbf{ inifinies } (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

Démonstration: On considère que $v \in$ Vect$(v_1, ..., v_n)$. On suppose que
$$\exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \text{ et } (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{t.q.} \quad v = \lambda_1 v_1 + ..\lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$$
Alors
$$0_V = v - v = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + ... + (\lambda_n - \mu_n)v_n$$
Comme les n-uplets sont distincts, il existe au moins un
$$j \in \{1, ..., n\} \text{ t.q. } \mu_j - \lambda_j \neq 0$$
On a alors une relation de dépendance linéaire non-triviale pour cette famille de vecteurs et $\{v_1, ..., v_n\}$ ne peux pas être libre.
Don si la famille est libre, le n-uplets est unique
On considère que $\{v_1, ..., v_n\}$ est liée et
$$v \in \text{Vect}(v_1, ..., v_n)$$
On a alors une relation de dépendance linéaire non-triviale:
$$\mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n = 0_V \text{ et } (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$
Alors, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on peut écrire:
$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n + \lambda 0_V = \lambda_1 v_1 + ...\lambda_n v_n + \lambda(\mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n) \\ &= (\lambda_1 + \lambda\mu_1)v_1 + ... + (\lambda_n + \lambda\mu_n)v_n \end{aligned}$$
□

De même on pouvait dépeupler une famille génératrice de vecteurs, on peut ajouter au une famille libre certains éléments tout en maintenant cette famille libre.

2.2.5 Théorème

Soit V un espace vectoriel et $\{v_1, ..., v_n\}$ une famille de vecteurs libres:

$$\text{Si } v \notin \text{Vect}(v_1, ..., v_n) \text{ alors } \{v_1, ..., v_n, v\} \textbf{ est encore libre}$$

Démonstration: Si $\{v_1, ..., v_n\}$ n'était pas libre, il existerait une relation de dépendance linéaire:

$$\longrightarrow 0_V = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n \text{ non triviale}$$

Si $\mu = 0$, il existerait une relation de dépendance linéraie:

$$\longrightarrow 0_V = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n \text{ non triviale}$$

$$\implies \text{ Contradiction avec "}\{v_1, ..., v_n\}\text{ libre"}$$

Si $\mu \neq 0$, alors:

$$v = -\frac{1}{\mu}(\mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n) \text{ et } v \in \text{Vect}(v_1, ..., v_n)$$

$$\implies \text{ Si } v \notin \text{Vect}(v_1, ..., v_n) \implies \{v_1, ..., v_n, v\} \text{ libre}$$

2.3 Base et dimension

Dans le cours précédent on a définit les notions de famille génératrice et de famille libre d'un espace vectoriel donné. Une famille libre et génératrice $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ permet tout vecteur de l'espace vectoriel comme combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Un vecteur de Vect$(v_1, v_2, ..., v_n)$ peut s'écrire que d'une manière comme linéaire des vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Il est dès lors naturel de chercher une famille de vecteurs qui sera simultanément libre et génératrice.

2.3.1 Définition

Soit V un espace vectoriel, on dit que V est de **dimension finie** si et seulement si il possède une famille de vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ finie et génératrice.

Pour une telle famille de vecteurs, on peut établir une première comparaison entre famille libre et génératrice.

Lemme de Steinitz Soit V un espace vectoriel et $G = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$ une famille génératrice et $L = \{l_1, l_2, ..., l_n\}$ une famille libre. Alors

$$n \leq m$$

On peut maintenant utiliser le lemme de Steinitz pour montrer que tout espace vectoriel de dimension finie possède une famille libre et génératrice (en admettant l'axiome du choix, on peut montrer plus généralement, que tout espace vectoriel de dimension finie ou infinie possède une telle famille).

2.3.2 Corollaire

Soit V un espace vectoriel non-trivial de dimension finie. Alors V possède une famille de vecteur libres et génératrice.

Démonstration Si $V \neq \{0_v\}$, alors V possède au moins un vecteur non-nul de dimension finie, il existe alors une famille génératrice $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ avec $m \geq 1$

- La famille $L_1 := \{v_1\}$ est manifestement libre. Si elle est génératrice, le corollaire est démontré. Sinon il doit exister un vecteur non-nul $v_2 \in V$ tel que $v_2 \notin$ Vect(v_2). En vertu du résultat antérieur, on a alors que $L_2 := \{v_1, v_2\}$ est libre.
- On continue d'ajouter successivement des vecteurs non-générateurs par la famille libre, afin d'obtenir une chaine de famille libre.

$$L_1 \subset L_2 \subset ... \subset L_k \subset ...$$

où L_k est libre et possède k éléments. Cette chaîne ne peut pas être infinie, car par le lemme de Steinitz une famille libre ne peut pas avoir plus de m éléments. Il existe donc une famille L_n maximale dans cette chaine. Celle-ci doit être génératrice, car sinon il existerait un vecteur non-nul $v \in$ Vect($v_1, v_2, ..., v_n$) et $L_m \cup \{v\}$ serait encore libre contre disant le fait que L_n soit maximale.

□

- Dans le cas de l'espace vecteur trivial $\{0_v\}$, on pose par convention par que Vect(0_v) $= \{0_v\}$
- L'ensemble vide $\emptyset$ est une famille libre, mais non espace vectoriel car il ne contient pas l'élément neutre.

2.3.3 Définition

Soit V un espace vectoriel. Une famille $B \subset V$ qui est simultanément libre et génératrice est appelée une base **base** de V.

- Pour un vecteur $v \in V$ et une base $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, il existe donc un seul n-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tels que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, ..., n$$

Les nombres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont appelé les **composantes** du vecteurs v relativement à la base B

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exemple: On considère les quatre polynômes:

- $p_1(x) = 1 + x$
- $p_2(x) = x + x^2$
- $p_3(x) = 1 - x^2$
- $p_1(x) = 1 + x + x^2$

- Par construction la famille polynôme $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ est génératrice de V. On va chercher une base de l'espace vectoriel de V.
- Clairement, $\{p_1(x)\}$ est libre, mais Vect($p_1(x)$) $\neq V$. De plus, $p_2(x)$ n'est pas linéairement dépendant de $p_1(x)$. Ainsi, la famille $\{p_1(x), p_2(x)\}$ est libre.

- Par contre, $p_3(x) = p_1(x) - p_2(x)$. Ainsi, la famille $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ n'est pas une famille libre.

- On examine s'il y a une relation de dépendance linéaire entre les polynômes $p_1(x), p_2(x)$ et $p_4(x)$. Soit $p_4(x) = \alpha \cdot p_1(x) + \beta \cdot p_2(x)$

$$1 + x + x^2 = \alpha \cdot (1 + x) + \beta \cdot (x + x^2) = \alpha + (\alpha + \beta) \cdot x + \beta \cdot x^2$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \implies \text{ce système n'as pas de solutions. Donc, } p_4(x) \notin \text{Vect}(p_1(x), p_2(x))$$

- Par conséquent, la famille $\{p_1(x), p_2(x), p_4(x)\}$ est libre et génératrice tout V. En effet
$$V = \text{Vect}(p_1(x), p_2(x), \cancel{p_3(x)}, p_4(x)) = \text{Vect}(p_1(x), p_2(x), p_4(x))$$

- On vient donc de trouver un base pour V.

- On peut aussi choisir de suivre le chemin inverse en commencant par la famille génératrice et en supprimant les éléments linéairement dépendant des autres.

- Les vecteurs de dépendance linéaire s'écrivent,

$$< \alpha \cdot p_1(x) + \beta \cdot p_2(x) + \gamma \cdot p_3(x) + \delta \cdot p_4(x) = 0 >$$

$$< (\alpha + \gamma + \delta) + (\alpha + \beta + \delta) \cdot x + (\beta - \gamma + \delta) \cdot x^2 = 0 >$$

- On est donc réduit à résoudre le système,

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \beta - \gamma + \delta = 0 \end{cases} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \color{red}{\alpha} & \color{red}{\beta} & \color{red}{\gamma} & \color{red}{\delta} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

- Solution:
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\alpha = \lambda)$$

- La relation de dépendance linéaire devient

$$< \lambda \cdot p_1(x) - \lambda \cdot p_2(x) - \lambda \cdot p_3(x) = 0 >$$

- Ainsi, on peut choisir d'éliminer un des trois polynôme $p_1(x), p_2(x)$ ou $p_3(x)$ (ce qui revient à poser que $\alpha = 0, \beta - 0$ ou $\gamma = 0$). Une fois que ce polynôme est éliminé, les trois polynôme restant seront linéairement indépendants. On a donc trouvé trois bases pour V:

$$\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\} \setminus \{p_k(x)\}, \quad \text{où } k = 1, 2, 3$$

- Une base permet d'identifier un espace vectoriel de dimension finie avec $\mathbb{R}^n$ (bijective).

- Deux bases différentes donneront des identifications différentes (composantes différentes).
- En particulier, un vecteur v sera représenté par deux n-uplets différents dans deux bases différents (composantes différentes)
- Il ne faut pas confondre le vecteur v avec le n-uplets qui le représente:
  le vecteur possède une existence en soi, alors que le n-uplets n'est est qu'un représentation qui dépend de la base choisie.
- Par contre, le nombre de n-uplets nécessaire pour identifier un vecteur donné est toujours le même. Il ne dépend pas de la base.

2.3.4 Théorème

Soient V un espace vectoriel et $B_1 = \{b_1, ..., b_n\}$ et $B_2 = \{c_1, ..., c_m\}$ deux bases libres pour V. Alors,

$$n = m$$

Démonstration: Puisque B_1 est une base, c'est en particulier une famille libre. Puisque B_2 est une base, c'est en particulier une famille génératrice. Par le lemme de Steinitz, on conclut alors que

$$n \leq m$$

En renversant les rôles de B_1 et B_2, on montre alors que

$$m \leq n$$

Ainsi,

$$m = n$$

2.3.5 Définition

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. La dimension de V est le nombre d'éléments d'une base de V.

Exemples:

1. La famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ est génératrice de V
2. La famille $\{v_2, v_3, v_4\}$ est libre
3. $< 2v_1 + v_2 - v_3 + v_4 + v_5 = 0 >$
4. $< 3v_1 - 3v_2 + v_3 - 4v_4 + 2v_5 = 0 >$

On cherche a montrer que la famille $\{v_2, v_3, v_4\}$ est une base de V et on veut déterminer sa dimension.

- Comme la famille $\{v_2, v_3, v_4\}$, il suffit de montrer qu'elle est génératrice de V.
- La famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ est génératrice, ainsi

$$V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$$

- D'après 3. :
$$v_5 = -2v_1 - v_2 + v_3 - v_4$$
Donc
$$V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, \cancel{v_5}) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

- D'après 4.:
$$3v_1 - 3v_2 + v_3 - 4v_4 + 2 \cdot (\overbrace{-2v_1 - v_2 + v_3 - v_4}^{=v_5}) = 0$$
$$-v_1 - 5v_2 + 3v_3 - 6v_4 = 0 \implies v_1 = -5v_1 + 3v_2 - 6v_4$$
Donc
$$V = \text{Vect}(\cancel{v_1}, v_2, v_3, v_4) = \text{Vect}(v_2, v_3, v_4)$$

- Ainsi, la famille $\{v_2, v_3, v_4\}$ est génératrice donc base de V. Elle contient 3 éléments. La dimension de V est de 3.

- On cherche à présent les coordonnées du vecteur v_5 dans la base $B = \{v_2, v_3, v_4\}$
$$v_5 = -2v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = -2 \cdot (-5v_1 + 3v_2 - 6v_4) - v_2 + v_3 - v_4 = 9v_2 - 5v_3 + 11v_4$$

- Coordonnées des vecteurs v_2, v_3, v_4 et v_5 dans la base B
$$[v_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [v_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [v_4]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$[v_4]_B = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

2.4 Sous-espace vectoriels

2.4.1 Définition

Soit V un espace vectoriel. Un **sous-espace vectoriel** de V est une un ensemble non vide de $W \subset V$, tel que $\forall x, y, \in W$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda y \in W$

2.4.2 Théorème

Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors, W muni des lois de compositions de V, est lui-même un espace vectoriel.

Démonstration: On vérifie les 8 propriétés qui définissent un espace vectoriel:

1. $\forall x, y, \in W : x + y = y + x$. En effet, $\lambda \in \mathbb{R} \implies x + \lambda y \in W$, il suffit de choisir $\lambda = 1$
2. $\forall x, y, z \in W : (x + y) + z = x + (y + z) \in W$, car W de la loi d'addition de V et que $x + y \in W$ et donc $(x + y) + z \in W$, Similairement, $y + z \in W$ et donc $x + (y + z) \in W$.
3. $0_W = 0_V \in W$. En effet, $O_V = x + (-1)x \in W$ où on peut choisir n'importe quel $x \in W$.

4. $x \in W \implies -x \in W$ car $-x = 0_V + (-x) = 0_W + (-1)x \in W$.

5. $\forall x \in W, 1 \cdot x \in W$ car $1 \cdot x = x \in W$.

6. $\forall x \in W, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \in W$ car l'action de $\mathbb{R}$ sur W est héritée de celle de $\mathbb{R}$ sur V, et que $\lambda x + \mu x = (0_V + \lambda x) + \mu x$, qui n'est autre que l'addition de deux élément dans W.

7. $\forall x \in W, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda(\mu x) \in W$, car l'action de $\mathbb{R}$ sur W est héritée de celle de $\mathbb{R}$ sur V, et que $(\lambda \cdot \mu)x = 0_W + (\lambda \cdot \mu)x \in W$.

8. $\forall x, y \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \in W$, car l'action de $\mathbb{R}$ sur W et l'addition dans W sont hérités de V, et que $\lambda x + \mu y = (0_W + \lambda x) + \mu y \in W$ où on a remarqué que la dernière addition parte sur des éléments de W.

$\square$

Exemples:

1. Pour un espace vectoriel V, on a trivialement les sous-espaces vectoriels $\{0_V\}$ et V.

2. L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à n variables est un sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$

3. Si $n < m$, alors $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$ par identification de $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ à $(x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$

4. Toute droite ou plan de l'espace passant par l'origine O sont des sous-espaces de l'espace..

5. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. L'ensemble $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ des fonctions continues en est un sous-espace vectoriel. De même, l'ensemble $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$ des fonctions n fois continument dérivables est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}(\mathbb{R})$. Les polynômes $\mathbb{R}[\,x\,]$ sont des fonctions indéfiniment dérivables et forment un sous-espace de $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$\mathbb{R}[\,x\,] \subset \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

6. Par définition, un sous-espace vectoriel hérite des lois de composition de l'espace vectoriel qui le contient. L'inclusion ensembliste $W \subset V$ ne suffit pas pour affirmer que W est un espace vectoriel. En effet, on a que $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$. Or l'élément neutre $0 \notin \mathbb{R}_+^*$. De plus. en multipliant un élément de $\mathbb{R}_+^*$ par un nombre négatif, on obtient un élément qui n'appartient pas à $\mathbb{R}_+^*$

7. Soient $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$, n vecteurs d'un espace vectoriel de V. Vect$(v_1, ..., v_n)$ est clairement un sous-espace vectoriel de V. De plus, si $W subset V$ est un sous-espace vectoriel de V, alors Vect$(v_1, ..., v_n) \subset W \iff \{v_1, ..., v_n\} \subset W$

   Par conséquent, Vect$(v_1, ..., v_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille de vecteurs $\{v_1, ..., v_n\}$

Un sous-espace vectoriel W de V est aussi un sous-ensemble de V. La dimension de W est toujours plus petite ou égale à celle de V:

2.4.3 Théorème

Soit W un sous-espace vectoriel de V. Si V est de dimension finie alors W est aussi de dimension finie et $\dim(W) \leq \dim(V)$

Ainsi, si V est de dimension finie, alors W l'est aussi. Il est donc possible de trouver une base B_W pour W. Par définition, B_W est une famille libre de W et donc de V.

Si Vect$(B_W) = V$, alors $B_W = B_V$ et dont W et V ont la même dimension. Dans le cas contraire, une base B_W de W. Dans tous les cas, $\dim(W) \leq \dim(V)$

2.4.4 Corolaire

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Soit B_W un base pour W. Il est posisble de trouver une base B_V de V telle que $B_W \subset B_V$.

Démonstration: Soit $B_W = \{w_1, ..., w_n\}$. Si Vect$(w_1, ..., w_n) \neq V$, il existe un vecteur $w_{n+1} \in V$ non-nul tel que $w_{n+1} \notin$ Vect$(w_1, ..., w_n) \neq V$. Par conséquent, $\{w_{n+1}\} \cup B_W$ est une famille libre de V. Par itération de ce procédé, on obtient une chaîne de familles libres de V:

$$B_W \subset \{w_{n+1}\} \cup B_W \subset ... \subset \{w_{n+1}, ...w_{n+m}\} \cup B_W$$

Cette chaîne doit être finie, car V est de finie. Le dernier élément de cette chaîne $\{w_{n+1}, ...w_{n+m}\} \cup B_W$ est une famille libre et génératrice de V et donc une base B_V de V.

2.4.5 Corolaire

Soient W et V deux espaces vectoriel de dimensions finies. Pour que W soit un sous-espace vectoriel de V, il faut et il suffit que toute base de W soit contenue dans V.

Théorème: Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de U. Alors leur intersection $V \cap W$ est aussi un sous-espace vectoriel de U.

Démonstration: On sait que $0_V \in V, W \implies 0_V \in V \cap W \neq= \emptyset$ Soit $x, y \in V, W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $x + \lambda y \in V, W \implies x + \lambda y \in V \cap W$

Exemples:

1. Soient un espace vectoriel de $U = \mathbb{R}^2$ et

$$V = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad W = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Clairement, V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On cherche à déterminer $V \cap W$. Un vecteur appartenant à $V \cap W$ si et seulement si on peut l'écrire comme combinaison linéaire de chaque paire de vecteurs:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Une résolution de ce système donne

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = \lambda; \lambda_3 = -\lambda; \lambda_4 = 2\lambda \quad \text{où} \lambda \in \mathbb{R}$$

L'intersection est une droite dans $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine:

$$V \cap W = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Soient V l'ensemble des polynômes de degré 3 s'annulant en 1 et W l'ensemble des polynômes de degré 3 s'annulant en 2. Clairement ,$V, W \subset \mathbb{R}^3[\, x \,]$. Ainsi, $V \cap W$ est l'ensemble des polynômes de degré 3 s'annulant en 1 et 2. Ils s'écrivent

$$V \cap W = \{(x-1) \cdot (x-2)(ax+b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Si l'intersection de deux sous-espaces vectoriels redonne un espace vectoriel, il n'en est pas de même pour les autres opérations ensemblistes.

Le complément d'un sous-esapce vectoriel en est un exemple. Si W est un sous-espace vectoriel de V, le complément de W dans V est noté $V \backslash W$ n'est pas un sous-espace vectoriel de V. En effet, si W est une droite du plan V passant par l'origine O, son complément $V \backslash W$ est le plan moins la droite. En particulier, $V \backslash W$ ne contient pas l'élément neutre O.

L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un espace vectoriel (sauf si l'un est déjà contenue dans l'autre). En effet, l'union de es droites non-colinéaires passant par l'origine est une croix. Les vecteurs obtenus par comabinaisons linéaires des vecteurs directeurs de deux droites ne sont en général pas eux-même des vecteurs directeurs de ces droites.

En revanche, si $V, W \subset V$ alors Vect$(V \cup W)$ est un sous-espace de U: c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois V et W.

2.5 Retour sur les systèmes linéaires

Les notions de sous-espaces vectoriels et de dimension vont maintenant nous permettre d'affiner notre compréhension de systèmes d'équations. On rappelle que les solutions d'un système linéaire homogène à n variables constitue un espace vectoriel. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Cela se voit facilement puisque $(0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ est solution d'un tel système, et que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont des solutions, alors $x + \lambda y$ en est une aussi.

Pour un système d'équations linéaires inhomogènes, l'ensemble de solution est soit vide, soit la somme d'une solution particulière et des solutions de la partie homogène. Cet ensemble est donc soit vide, soit une translation dans $\mathbb{R}^n$ d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\{a_{i,j}, b_i\}_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ les coefficients d'un système de m équations à n variables. La partie homogène possède alors un ensemble de solutions $S \subset \mathbb{R}^n$ qui est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Il possède alors une base finie. On dénote $\{h_1, ..., h_s\} \subset \mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs qui forment une base de l'ensemble des solutions S. On a,

$$\dim(S) = s \leq n$$

Cette base peut être complétée pour obtenir une base de $\mathbb{R}^n$. On note $\{b_{s+1}, ..., b_{s+r}\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\{h_1, ..., h_s, b_{s+1}, ..., b_{s+r}\}$ forment une base $\mathbb{R}^n$ où $s + r = n$

On suppose d'abord que le système est sous forme triangulaire supérieure. Le nombre de paramètre qui sont nécessaire pour décrire l'ensemble des solutions S correspond à la dimension de S. Comme la forme est triangulaire supérieure, il y a que $n - s = r$ équations non-nulles:

photo 1 (huge matrix)

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r-1} & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1r+s} & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2r-1} & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2r+s} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rr+s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

- m lignes (équations)
- $n = r + s$ colonnes (variables)

r colonnes, dimension de $S = s$

- Chaque équations est une vecteur de E_n.
- On note $e_1 :=< a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 >$ est générallement $e_i :=< a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = 0 >$ où $1 \leq i \leq m$. On a clairement que Vect$(e_1, ..., e_n) =$ Vect$(e_1, ..., e_m) \subset E_n$ est un sous-espace vectoriel de E_n. Sa dimension est manifestement égale à $r = n - s$. On a donc un premier résultat:

$$\dim(\text{Vect}(e_1, ..., e_m)) + \dim(S) = n$$

- Si le système n'est pas sous forme triangulaire supérieure, on le met sous cette forme à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes des coefficients qui définissent le système:

1. Échange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j \iff e_i \leftrightarrow e_j$
2. Échange de deux colonnes : $C_i \leftrightarrow C_j$
3. Multiplication d'une linge par un scalaire $\lambda \neq 0$:
$$L_i \longrightarrow \lambda L_i \iff e_i \longrightarrow \lambda \cdot e_i$$
4. Addition d'un multiple d'une ligne à une autre:
$$L_i \longrightarrow L_i + \lambda L_j \iff e_i \longrightarrow e_i + \lambda \cdot e_j$$

Théorème du rang (première version): Soit $\{a_{ij}, b_i\}_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ les coefficients d'un système d'équations linéaires à n variables. Soient

$$e_i =< a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = 0 >$$

les équations linéaires formées par les lignes de ce système linéaire,

$$r = \dim(\text{Vect}(e_1, ..., e_m))$$

et s la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène. Alors

$$r + s = n$$

□

Le théorème s'intitule ainsi à cause de la notion de rangL

2.5.1 Définition

Soitent $\{a_{ij}, b_i\}_{1\leq i\leq m; 1\leq j\leq n}$ les coefficients d'un système linéaire à n variables. Soient $e_i =< a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = 0 >$ les équations linéaires formées par les lignes de m système
Alors,

$$r = \dim(\text{Vect}(e_1, ..., e_m))$$

est appelé le **rang** du système linéaire.

Exemple: On considère le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + 4y - 3z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Sa partie homogène correspond alors à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3\longrightarrow 2L_3-L_1+L_2]{L_2\longrightarrow L_2+L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en conclut que le rang de ce système $r = 2$ et que sa dimension $s = 1$. Si on cherche la dimension de l'ensemble des équations générées par les lignes des coefficients, on peut écrire les équations linéaires homogènes comme des vecteurs

$$e_1 =< x + 2y + z = 0 >, \quad e_2 =< -x + 4y - 3z = 0 >, \quad e_2 =< x - y + z = 0 >$$

et on remarque que $e_2 = e_1 - 2e_3$, alors que e_1 et e_3 sont linéairement indépendants. On en conclut que

$$r = \dim(\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)) = \dim(\text{Vect}(e_1, e_3)) = 2 = 3 - 1 = n - s$$

Il existe une interprétation géométrique simple des situations rencontrées dans la résolution de systèmes d'équations linéaires. En effet, chaque équation linéaire homogène non-nulle à n variables est un système à une équation. On a alors

$$\dim(S) = s = n - r = n - 1$$

C'est ce qu'on appelle un **hyperplan** de dimension $n - 1$ qui est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$

Réciproquement, on peut associer à chaque hyperplan une équation linéaire e (ou λe avec $\lambda \neq 0$) homogène. En effet, si $\pi \subset \mathbb{R}^n$ est un hyperplan, c'est à dire un sous-espace de dimension $n - 1$, il existe alors une base constituée de $(n - 1)$ vecteurs $b_1, ..., b_{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$. On peut alors construire un système d'équations linéaires (écrit sous forme matricielle) à partir des vecteurs b_j où $1 \leq j \leq n - 1$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $\{(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} (b_1)_1 & (b_1)_2 & ... & (b_1)_n & 0 \\ (b_2)_1 & (b_2)_2 & ... & (b_2)_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ (b_{n-1})_1 & (b_{n-1})_2 & ... & (b_{n-1})_n & 0 \end{array}\right)$$

Ce système a un rang $r = n - 1$, car les équations linéaires formées des coefficients de la base de π sont $n - 1$ équations linéairement indépendantes. L'ensemble des solutions de ce système est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ a une dimension $(s = n - r = 1)$ qui est généré par un seul vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ non-nul.

Avec les composantes de ce vecteur $(v_1, ..., v_n)$ on forme une équation linéaire homogène:

$$v_1 x_1 + ... + v_n x_x = 0$$

dont l'espace des solutions S_v est alors un sous-espace de dimension $n - 1$. Comme les vecteurs b_j où $1 \leq j \leq n - 1$ sont des solutions de cette équation par contradiction, on a que

$$S_v = \text{Vect}(b_1, ..., b_{n-1}) = \pi$$

Exemple: Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'hyperplan engendré par 3 vecteurs:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On forme alors le système linéaire homogène suivant:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

L'ensemble des solutions est alors de dimension 1. On peut prendre t comme paramètre et on trouve

$$z = t, \quad y = -t, \quad x = -t, \quad \Longleftrightarrow \quad S = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } t \in \mathbb{R} \right\}$$

- L'hyperplan recherché est alors donné par l'équation $-x - y + z + t = 0$.

- Un système homogène est constitué en général de plus d'une équation linéaire. S'il est constitué de m équations on a alors m hyperplans dont l'intersection constitue l'ensemble des solutions de ce système.

- Si une (ou plusieurs) de ces équations peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des équations restantes, cela signifie que l'hyperplan correspond à cette première équation (ou l'intersection de plusieurs hyperplans) contient déjà l'intersection des hyperplans restants. Il suffit donc de considérer qu'une partie des m hyperplans, en l'occurrence ceux dont les équations sont linéairement indépendantes et génèrent les m équations par combinaison linéaires.

- Chaque sous espace vectoriel $\mathbb{R}^s \subset \mathbb{R}^n$ avec $s < n$ peut être considéré comme l'intersection de $n - s$ hyperplans linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$, ou de manière équivalente, comme l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes de rang $n - s$.

Exemple: On reprend l'exemple précédent en considérant l'hyperplan à deux dimensions que est généré par les vecteurs b_1 et b_3 pour trouver l'ensemble des solutions, on résout le système,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \longrightarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}(-t - z); \quad x = -z$$

$$z = 2z' \text{ et } t = 2t' \quad \text{alors} \quad y = -z' - t' \text{ et } x = -2z'$$

Ainsi,

$$S = \left\{ t' \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : t', z' \in \mathbb{R} \right\}$$

où

$$\dim(S) = 2$$

Système d'équations linéaires équivalent:

$$\begin{cases} -y + 2t = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$