

EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1A
PREPA-031(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 1

Logique

26/02/2019

1.1 Propriétés, ensemble et proposition

1.1.1 Propriétés et ensemble

Définition Soit P une propriété définie sur un ensemble E (par ex. \mathbb{R}) pris en référentiel.

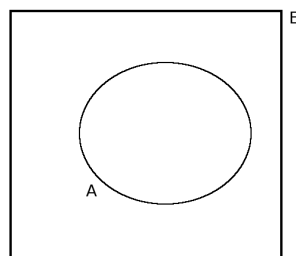
La proposition " x vérifie P " se note $P(x)$

Exemples $E = \mathbb{Z}$, P : propriété d'être pair.

- $P(-26)$ "-26 est pair" est vrai car on peut écrire $-26 = 2 * (-13)$
- $P(5)$ est fausse
- $P(x)$ signifie que $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $x = 2k$

A toute propriété P définie sur E est associé un ensemble $A \subset E$:

$$P(x) \iff x \in A$$



$$A = \{x \in E | P(x)\}$$

" A est l'ensemble des x de E vérifiant la propriété P ". C'est l'ensemble solution au problème de trouver le x vérifiant P .

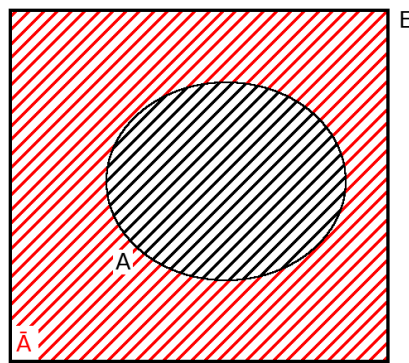
Cas possible:

- il y a une solution si et seulement si $A \neq \emptyset \iff \exists x \in E, x \in A$
- il n'y a pas de solution si et seulement si $A = \emptyset \iff \forall x \in E, x \notin A$

Negation: Propriété de non P

$$C_E(A) = \bar{A} = \{x \in E \mid \text{non} P\}$$

" \bar{A} est l'ensemble des x ne vérifiant pas P ". C'est le **complémentaire** de A dans E .

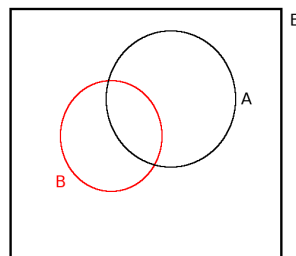


Exemples $E = \mathbb{R}$, $P(x) : x^2 < 64$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 64\} =]-8; 8[$$

Soit Q une autre propriété définie sur E et B l'ensemble correspondant

$$B = \{x \in E \mid Q(x)\}$$

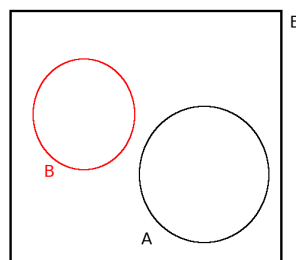


- L'ensemble des x vérifiant P et Q (les deux conditions sont imposées) est $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x \in E \mid P(x) \text{ et } Q(x)\}$$

- L'ensemble vérifiant P **ou** Q (au moins une condition est satisfaite) est $A \cup B$
- $\text{non}(P \text{ et } Q)$ est équivalent à $(\text{non}P \text{ ou } \text{non}Q)$
En effet $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ est équivalent à $(\text{non}P \text{ et } \text{non}Q)$
En effet $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Remarque Si P et Q sont incompatibles (ne peuvent pas être vérifiés en même temps) si $A \cap B = \emptyset$



1.1.2 Propositions

Soit P une propriété définie sur un référentiel E et A l'ensemble correspondant.

Définition Une proposition T est une affirmation (avec un verbe!) énoncée sur les éléments de E .

- Proposition **simple**: sur un élément $x_0 \in E$.

$$T : P(x_0) \quad \text{"}x_0 \text{ vérifie } P\text{"}$$

$$\text{langage ensembles : } T : x_0 \in A$$

$$\text{exemple : } T : \sqrt{2} \text{ est irrationnel}$$

- Proposition **universelle**: P est vérifiée par tout x

$$T : \forall x \in E, \quad P(x) \quad \text{"quelque soit } x, x \text{ vérifie } P\text{"}$$

$$\text{langage ensembles : } T : A = E$$

$$\text{exemple: } T : \text{un carré est positif ou nul}$$

- Proposition **existentielle**: P vérifie au moins un élément

$$T : \exists x \in E, \quad P(x) \quad \text{"il existe un } x \text{ qui vérifie } P\text{"}$$

$$\text{langage ensembles : } T : A \neq \emptyset$$

$$\text{exemple: } T : \text{l'équation } x^2 = 2 \text{ a une solution}$$

Negation (proposition contraire, la negation porte sur le verbe)

- Proposition **simple**:

$$\text{non}T : \text{non}P(x_0) \quad "x_0 \text{ ne vérifie pas } P"$$

$$\text{langage ensembles} : \text{non}T : x_0 \in A \text{ ou } x_0 \in \bar{A}$$

$$\text{exemple} : \text{non}T : \sqrt{2} \text{ est rationel}$$

- Proposition **universelle**:

$$\text{non}T : \exists x \in E, \quad \text{non}P(x) \quad "il \text{ existe } x \text{ ne vérifiant pas } P"$$

$$\text{langage ensembles} : \text{non}T : A \neq E \text{ ou encore } \bar{A} \neq \emptyset$$

$$\text{exemple} : T : \text{il existe un carré négatif}$$

- Proposition **existentielle**:

$$\text{non}T : \forall x \in E, \quad \text{non}P(x) \quad "quelque soit } x, x \text{ ne vérifie pas } P"$$

$$\text{langage ensembles} : \text{non}T : A = \emptyset \text{ ou encore } \bar{A} = E$$

$$\text{exemple} : T : \text{l'équation } x^2 = 2 \text{ n'as pas de solution}$$

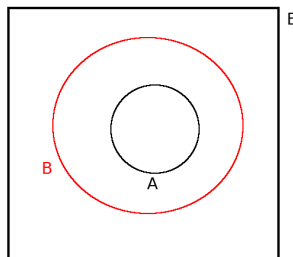
1.1.3 Implication et equivalence

Soient P et Q deux propriétés sur E et A et B les ensembles associés.

- " P implique Q ": $P(x) \rightarrow Q(x)$

Si x vérifie P , alors x vérifie Q (P est plus restreint que Q)

Tous les éléments de A sont aussi éléments de B



Tous les éléments de A sont aussi des éléments de B :

$$\forall x \in A, x \in B$$

ou

$$\forall x \in E, \text{ si } x \in A \text{ alors } x \in B$$

ou encore

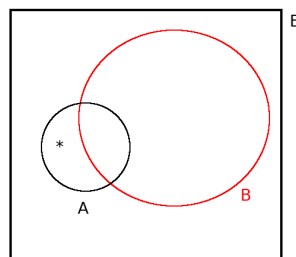
$$A \subset B$$

- P et Q sont équivalents, si et seulement si $P(x) \iff Q(x)$ si et seulement si $(P(x) \rightarrow Q(x))$ et $(P(x) \leftarrow Q(x))$ (**double implication**)

Language ensemble: $A = B$ si et seulement si $(A \subset B)$ et $(B \subset A)$ (**double inclusion**)

Negation de l'implication

$$\begin{aligned} \text{non}(P \rightarrow Q) &\iff \text{non}(\forall x \in A, x \in B) \\ &\iff \exists x \in A, x \notin B \\ &\iff \exists x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\iff \exists x \in E, (P(x) \text{ et } \text{non}Q(x)) \end{aligned}$$



C'est donc une proposition existentielle.

Exemple Tout nombre pair est multiple de 4

$$T : \forall n \text{ pair}, n \text{ est multiple de } 4$$

5/03/2019

1.2 Méthode de preuve

Une théorie mathématique se construit sur des règles que l'on donne au départ (les axiomes) et la logique.

Dans un univers de référence E , une proposition T est soit vrai, soit fausse (exclusif).

Exemples

1. La proposition

$$T : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

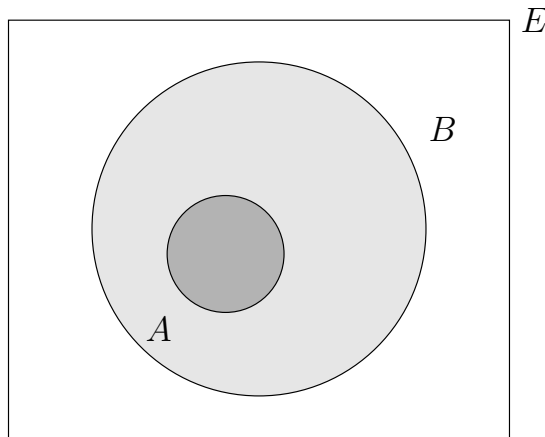
Implicitement $E = \mathbb{R}$

2. Une implication

$$T : P \implies Q$$

- P est l'hypothèse: le référentiel restreint
- Q est la conclusion.

Remarque La vérité de Q n'est pas examinée "en dehors de P ".



En se plaçant dans A (hypothèse P) on est dans B (conclusion Q)

Exemple La proposition

T : si a est pair, alors a^2 est pair

Implicitement E est \mathbb{Z}

Plus simplement:

$$T : \forall a \in \mathbb{Z}, \quad a \text{ est pair} \implies a^2 \text{ est pair}$$

Remarque Une proposition simple T peut toujours être vue comme une conséquence de ce que l'on sait sur le référentiel.

1.2.1 Méthode directe

But: Montrer qu'une implication

$$T : P \implies Q$$

est vraie (on montre que la vérité de Q en utilisant quelque part l'hypothèse P).

On montre

$$P \implies Q$$

par une suite d'implications toutes vraies:

$$P \implies P_1, P_1 \implies P_2, \dots, P_n \implies P_{n+1}, \dots, P_N \implies Q$$

Exemples

1. Montrer

$$T : \forall a \in \mathbb{Z}, \text{ si } \underbrace{a \text{ est pair}}_P, \text{ alors } \underbrace{a \text{ est pair}}_Q$$

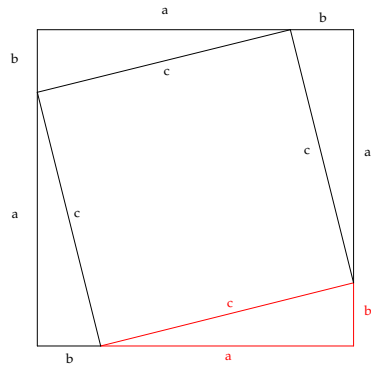
Soit $a \in \mathbb{Z}$ (a est quelconque)

$$\begin{aligned}
 a \text{ est pair} &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a = 2k \\
 &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = (2k)^2 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} \\
 &\implies \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = 2 \cdot k' \\
 &\implies a^2 \text{ est pair}
 \end{aligned}$$

2. La proposition

T : le théorème de Pythagore

Soit un triangle rectangle



$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= c^2 + 4 \frac{ab}{2} \\
 a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\
 a^2 + b^2 &= c^2
 \end{aligned}$$

1.2.2 Méthode par l'absurde

But: Montrer qu'une proposition T est vraie.

On montre que T est vraie en montrant que $\text{non}T$ est faux. $\text{non}T$ est impossible car elle même une contradiction (absurdité).

$$T \text{ vraie} \iff [\text{non}T \implies \text{contradiction}]$$

Exemple T : dans $\mathbb{M}_N(\mathbb{R})$, l'élément neutre pour le produit matriciel est unique.

Preuve par l'absurde On suppose $\text{non}T$ et on montre que cela conduit à une contradiction.

$\text{non}T$: dans $\mathbb{M}_N(\mathbb{R})$ il existe plus d'un élément neutre pour le produit matriciel

Notons I_n et N_n des éléments neutre, avec $I_n \neq N_n$.

Alors

$$I_n = I_n \cdot N_n = N_n$$

D'où la contradiction avec

$$I_n \neq N_n$$

Remarque Cas d'une proposition universelle sur l'ensemble E

$$T : \forall x \in E, \quad x \text{ vérifie } P$$

Par l'absurde, on doit montrer l'implication


$$[\exists x \in E, x \text{ vérifie non}P] \implies \text{contradiction}$$

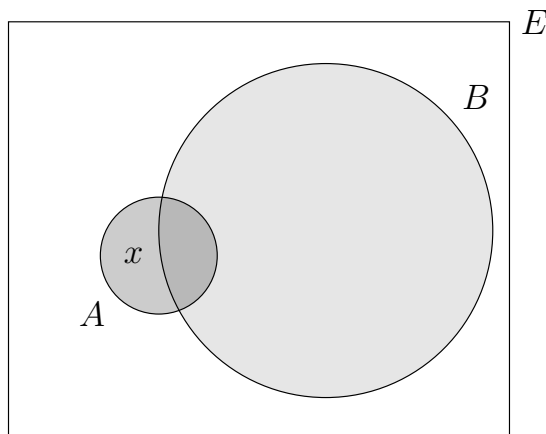
(mise en défaut de l'existence d'un contre-exemple)

Cela est équivalent à dire

$$\forall x \in E, [x \text{ vérifie non}P \implies \text{contradiction}]$$

(aucun élément n'est un contre-exemple)

Rappel  Si T est une implication $P \implies Q$, sa négation $\text{non}T$ n'est pas une proposition universelle.



$$\begin{aligned} T : \forall x \in E, \quad P(x) &\implies Q(x) \\ \text{non}T : \exists x \in E, \quad P(x) \text{ et } \text{non}Q(x) \end{aligned}$$

1.2.3 Méthode indirecte ou contraposée

But Montrer qu'une implication

$$T : P \implies Q$$

est vraie.

Définition Soit la proposition

$$T : P \implies Q$$

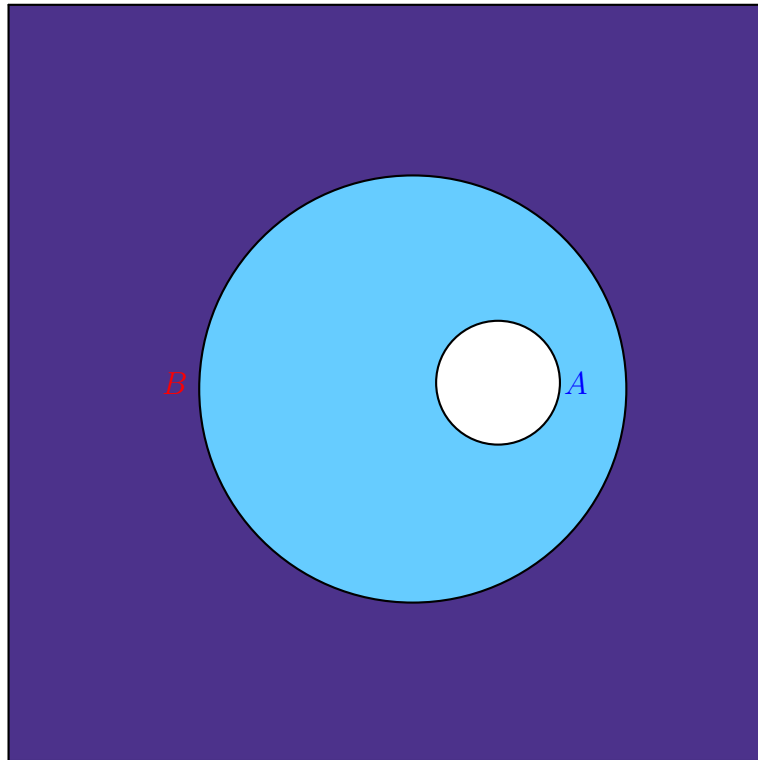
la proposition

$$C : \text{non}Q \implies \text{non}P$$

est la contraposée de T .

C et T sont équivalents. En effet

$$T : A \subset B \qquad C : \overline{B} \subset \overline{A}$$



Exemple Démontrer

$$T : \forall a \in \mathbb{Z}, \text{ si } a^2 \text{ est pair, alors } a \text{ est pair}$$

Remarque méthode directe, pas facile!

Preuve par contraposée:

$$C : \forall a \in \mathbb{Z}, \text{ si } \underbrace{a \text{ est impair}}_{\text{non}Q}, \text{ alors } \underbrace{a^2 \text{ est impair}}_{\text{non}P}$$

En effet (directement)

$$\begin{aligned} a \text{ est impair} &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a = 2k + 1 \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{k' \in \mathbb{Z}} + 1 \\ &\implies \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = 2k' + 1 \\ &\implies a^2 \text{ est impair} \end{aligned}$$

Donc C est vraie et donc T est vraie.

1.2.4 Méthode par induction (ou par récurrence)

But montrer qu'une proposition $T(n)$ dépendant d'un entier positif n est vraie à partir d'un certain rang n_0 :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad [\forall n \geq n_0, T(n) \text{ vraie}]$$

Théorème d'induction Une proposition $T(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$ si et seulement si

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $T(n_0)$ vraie.
2. $\forall n \geq n_0 [T(n) \text{ vraie} \implies T(n+1) \text{ vraie}]$

Exemple Soit le nombre suivant (définition)

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot k! \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Démontrer la proposition suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)! - 1$$

Notons

$$T(n) : S_n = (n+1)! - 1$$

1. Prenons $n_0 = 1$, vérifions $T(n_0)$

(a) Calculons $S_{n_0} = S_1 = 1 \cdot 1! = 1$ (définition)

(b) D'autres part $(n_0 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 1 \quad \checkmark$.

2. A montrer

$$\forall n \geq n_0 = 1 :$$

Hypothèse	$T(n) : S_n = (n+1)! - 1$
Conclusion	$T(n+1) : S_{n+1} = (n+2)! - 1$

En effet

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= S_n + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (1 + n+1) \cdot (n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

□

1.2.5 Le contre-exemple

But Montrer qu'une proposition universelle est fausse.

Soit une proposition universelle

$$T : \forall x \in E, \quad x \text{ vérifie } P$$

T est fausse si et seulement si $\text{non}T$ est vraie. On montera donc que la proposition existentielle $\text{non}T$ est vraie.

$$\text{non}T : \exists x \in E, x \text{ vérifie } \text{non}P$$

On montre avec l'existence d'un x ne vérifiant pas P : un contre-exemple.

Exemple

T : tous les nombres premiers sont impairs

T est fausse, donnons un contre-exemple selon la négation de T .

$\text{non}T$: il existe un nombre premier qui est pair

Par exemple $n = 2$ (**remarque**: c'est le seul)

Formellement

$$\begin{aligned} T : \forall a \in \mathbb{N}^*, \quad a \text{ premier} &\implies a \text{ impair} \\ \text{non}T : \exists a \in \mathbb{N}^*, \quad a \text{ premier et } a &\text{ pair} \end{aligned}$$