EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B

PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Calcul différentiel

3.1 Dérivée d'une fonction

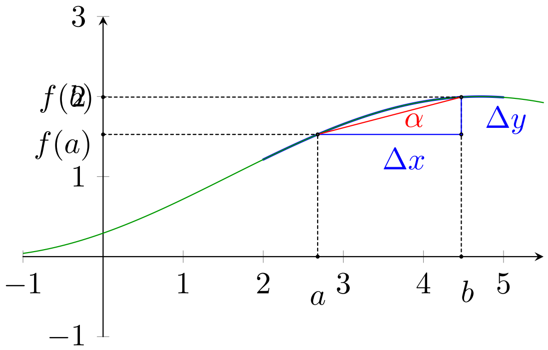
3.1.1 Définitions

Soit f définie sur un voisinage de x_0, posons $y = f(x)$. Une information **locale** sur le comportement de f sur un voisinage de x_0 est donné par le quotien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

appelé le rapport de Newton de f en x_0.

- Δx est l'accroissement de la variable indépendante x.
- Δy est l'accroissement correspondant liée à Δx.



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(x)$ est la pente sécente passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$

En gardant x_0 fixe, on fait tendre $\Delta x \to 0$
Alors

$$x_0 + \Delta x \to x_0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$$

si f est continue en x_0, alors

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

est une FI de type "$\frac{0}{0}$"
Trois cas peuvent se présenter

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'existe pas

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$

Exemple:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}, \quad x_0 = 0$$

3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \quad (a \in \mathbb{R})$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = 4$$

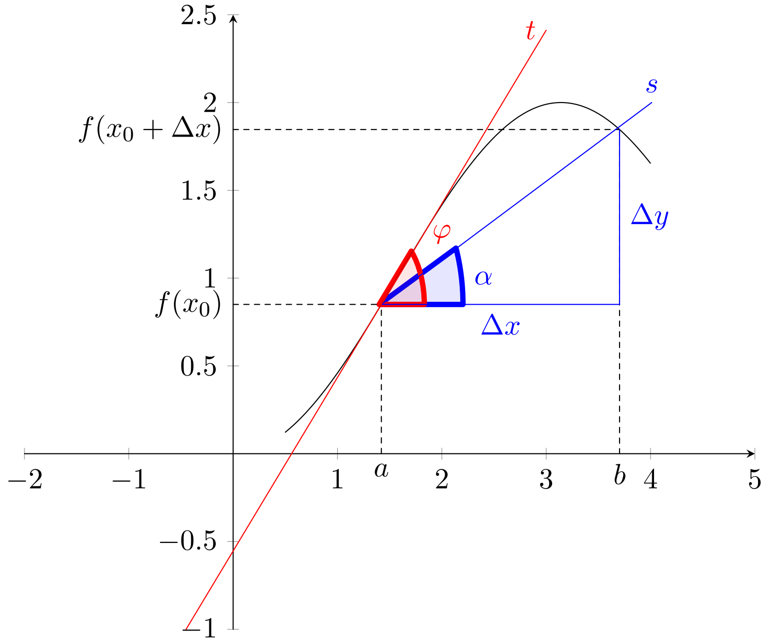
Définition: Soit f définie sur un voisinage de x_0. On dit que f est dérivable en x_0. Si

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existe et on note $f'(x_0)$ cette limite.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

est appelé **nombre dérivé** de f en x_0



La sécant s tends vers la "droite-limite" t.

$$\alpha \xrightarrow[\Delta \to 0]{} \varphi$$

Cette "droite-limite" est appelée la tangente à

$$y = f(x_0) \text{ en } x_0$$

La pente m de la tangente vaut

$$m = \tan(\varphi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Donc l'équivalente de t s'écrit

Tangente de $y = f(x)$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Théorème: Soit f définie sur un voisinage de x_0. Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0$$

Démonstration f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$
$$\implies \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)}_{:= r(\Delta x)} = 0$$

Donc

$$\lim_{\Delta x \to 0} r(\Delta x) = 0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$

Et lorsque $\Delta x \to 0$, on a

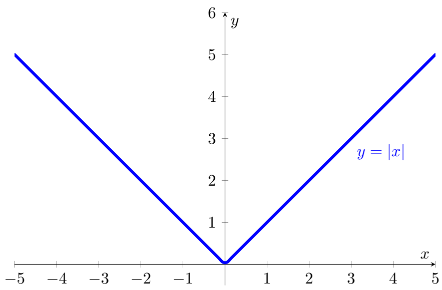
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot f'(x_0)}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \overbrace{r(\Delta x)}^{\to 0}}_{\to 0}$$

f est donc continue en x_0

$\square$

⚠ La réciproque est fausse ⚠

Contre-exemple



$$f(x) = |x|, \quad x_0 = 0, \qquad \lim_{x \to 0} |x| = 0, \quad |x|\Big|_{x=0} = 0$$

donc $|x|$ est continue en $x = 0$

Mais

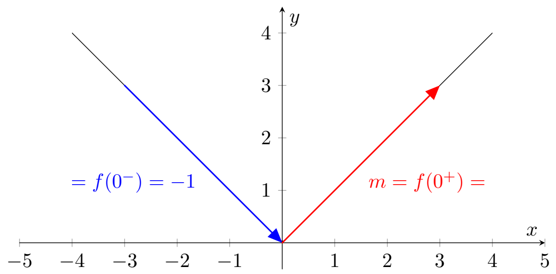
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

n'existe pas donc $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x \to 0$.

Définitions:

- On dit que f est dérivable à gauche en x_0, si
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe, on note ce nombre $f'(x_0^-)$ et il représente la pente de la demi-tangente à gauche en x_0.
- de même f est dérivable à droite en x_0, si
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe, $f'(x_0^+)$ et il représente la pente de la demi-tangente à droite en x_0.

Exemple:



$$f(0^-) = -1$$
$$f(0^+) = +1$$

Définitions: Si $I \subset \mathbb{D}_f$

- Si f est dérivable en tout $x_0 \in I$, on définit:
$$f' : I \to \mathbb{R},$$
$$x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
appelé la fonction dérivée de f sur I.
- Si f est dérivable sur I, et si f' est continue sur I, alors on dit que f est continument dérivable sur I et on note $f \in \mathbb{C}^1$

3.1.2 Règles de dérivation

(C.f. exercice facultatif série 8)
Soient f et g dérivable sur $I \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. Si $g(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$
$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
En particulier
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Théorème: Dérivée de la composée
Soit f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

Dérivée de la composée

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Démonstration

- Rappel:

$$r(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$
$$\implies f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$

avec

$$r(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

- Dérivée $g \circ f(x)$

$$g \circ f(x+h) = g(f(x+h))$$
$$= g(f(x) + \underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta})$$
$$= g(f(x)) + g'(f(x)) \cdot (\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta}) + r(\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta}) \cdot (\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{=\Delta})$$

Donc

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + r(f(x+h) - f(x)) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Et

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x) + r(\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{\to 0} \cdot f'(x_0))$$

D'où

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

3.1.3 Dérivées de quelque fonctions

1. $f(x) = c$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

2. $f(x) = x$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$

3. $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ à démontrer par récurrence

   - Vérification pour $n = 1$:

$$(x)' = 1 \text{ et } n \cdot x^{n-1}\Big|_{n=1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

- Démonstration du pas de récurrence:
  Hypothèse: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ pour un $x \in \mathbb{N}^*$ donné
  Conclusion: $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$
  Preuve:

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (x^n)' \\ &= x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n\end{aligned}$$

4. $f(x) = x^{-m}, \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad x \neq 0$

$$\begin{aligned}f'(x) = \left(\frac{1}{x^m}\right)' &= -\frac{m \cdot x^{m-1}}{(x^m)^2} \\ &= -m \cdot x^{m-1-2m} = -m \cdot x^{-m-1}\end{aligned}$$

Donc $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad \forall \in \mathbb{Z}$

5. $f(x) = x^{\frac{p}{q}}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}^*, \quad x > 0$

$$y = x^{\frac{p}{q}} \iff y^q = x^p$$

En dérivant les deux termes par rapport à x, on a

$$q \cdot y^{q-1} \cdot y' = p \cdot x^{p-1}$$

$$\begin{aligned}y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot y}{y^{q-1} \cdot y} &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$

Donc

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad x > 0$$

En particulier

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Exemples:

1. Soit f une fonction

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [\,-1;1\,]$$

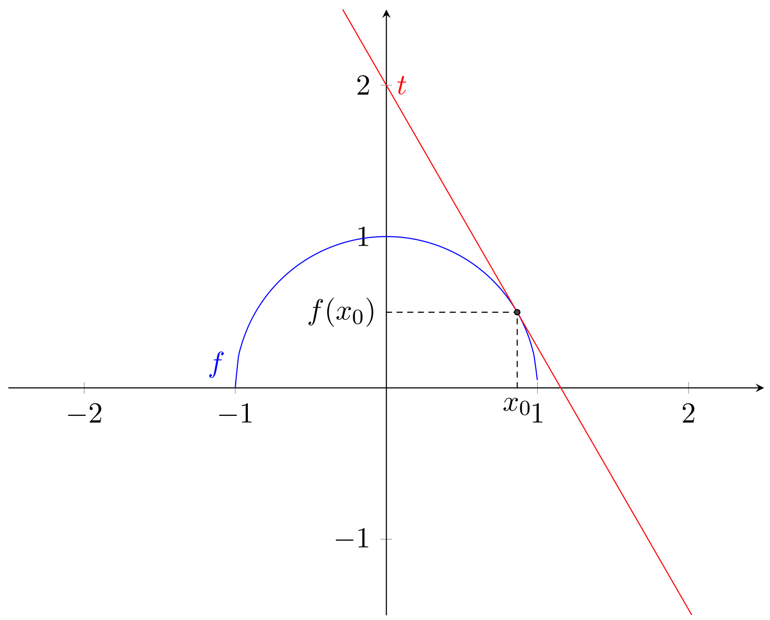
L'équation de t tangente à $y = f(x)$ en $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- $f(x_0) = \frac{1}{2}$
- $f'(x) = \frac{(-x^2)'}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1$

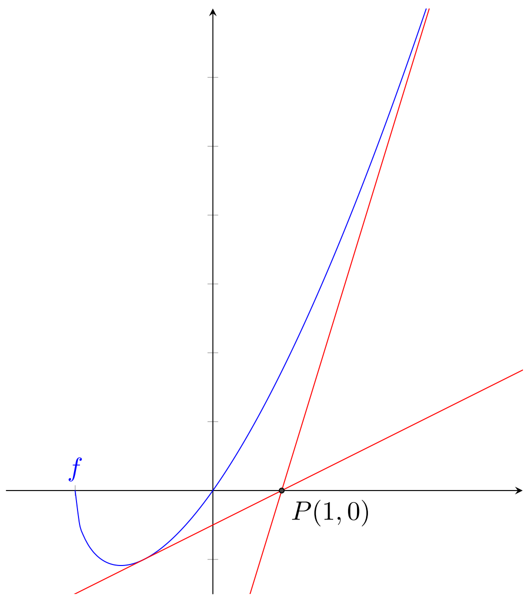
$$f'(x_0) = f'(x)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$t : y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



2. $f(x) = x \cdot \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$

   Tangente au graphe de f issues du point $P(1,0)$



$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$P \in t \implies y_p - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_p - x_p)$$
$$\implies 0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0)$$

avec $f(x_0) = x_0 \cdot \sqrt{2 + x_0}$,

$$f'(x) = \sqrt{2+x} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2+x}} =$$
$$= \frac{2 \cdot (2+x) + x}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \frac{3x+4}{2 \cdot \sqrt{2+x}}, \quad x \geq -2$$

Donc

$$-x_0 \cdot \sqrt{2+x_0} = \frac{3x_0+4}{2 \cdot \sqrt{2+x_0}} \cdot (1 - x_0)$$
$$\iff -2x_0(2+x_0) = 3x_0 + 4 - 3x_0^2 - 4x_0$$
$$\iff x_0^2 - 3x_0 - 4 - 0 \iff (x_0 - 4) \cdot (x_0 + 1) = 0$$
$$x_0 = -1 : \qquad t : y + 1 = \frac{1}{2}(x+1)$$
$$x_0 = 4 : \qquad t : 8x - \sqrt{6}y - 8 = 0$$

3.1.4 Dérivée d'ordre supérieure

Soit f dérivable sur I, si f' est dérivable sur I, on peut dériver f' sur I et on note

$$(f')' = f''$$

et ainsi de suite

$$(f'')' = f'''$$

etc.

Définition par récurrence:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad n \in \mathbb{N}^*$$

avec $f^{(0)}(n) = f(x)$

Exemples:

1. $f(x) = x^p, \quad p \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p \cdot (p-1) \cdot .... \cdot (p-n+1) & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

2. $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f^{(3)}(x) = \sin(x), \quad f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

Conjecture:

$$f^{(x)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Définition par récurrence:

- Vérification:
  - $n = 0: \quad \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=0} = f^{(0)}(x)$
  - $n = 1: \quad \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=1} = -sin(x) = f'(x)$
- Démonstration du pas de récurrence:
  - Hypothèse:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pour un } n \in \mathbb{N} \text{ donné}$$

  - Conclusion:

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

  -

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = [f^n(x)]' = \left[\cos\left(c + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right]' &= \\ &= \cos'\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)' \\ &= -\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = \cos\left(x + \left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

□

Remarque: Si f est n-fois dérivable sur I et si $f^{(n)}(x)$ est continue sur I, alors on note

$$f \in \mathbb{C}_I^n$$

Exemple:

$$\cos(x) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}$$

3.2 Différentielles et approximations linéaires

3.2.1 Différentielles

Définitions:

- La différentielle de la variable indépendante x, notée dx est l'accroissement infinitésimale de cette variable

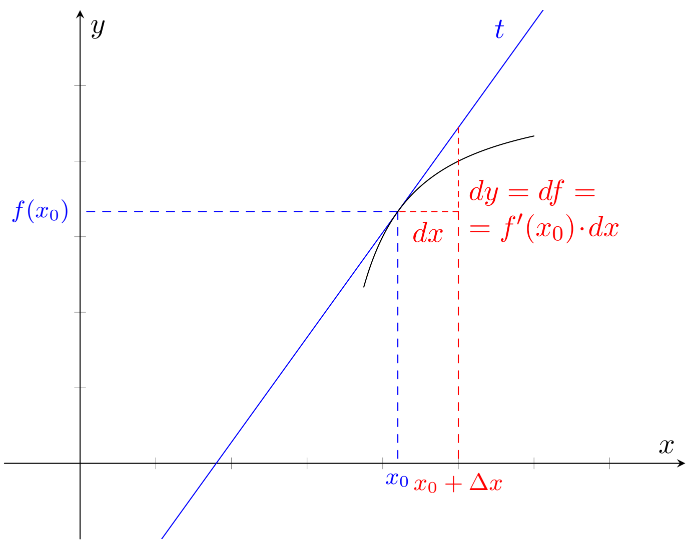
$$dx = \Delta x, \quad (\text{ lorsque } \Delta x \to 0)$$

- La différentielle de la variable dépendante y (ou de la fonction f), notée

$$dy \text{ ou } df$$

en x_0 est la fonction linéaire de dx définie par

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$



La différentielle dy en x_0 est l'accroissement des y correspondant à dx, mesuré sur la tangente au graphe de f en x_0.

La définition des différentielles induit la notation de Leibniz

$$dy = f'(x_0) \cdot dx \implies \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

3.2.2 Approximation linéaire

Rappel Soit f dérivable en x_0 On a

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h)$$

avec

$$r(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} r(h) = 0$$

Donc si $h \to 0$,

$$\underbrace{h}_{\to 0} \cdot \underbrace{r(h)}_{\to 0}$$

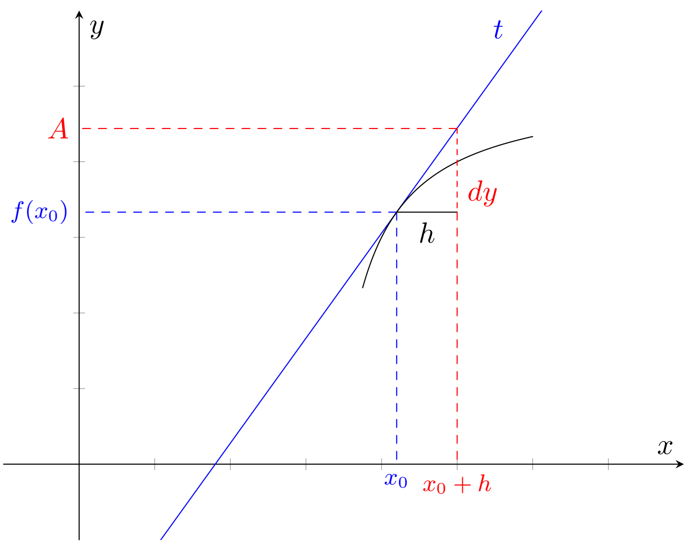
est négligeable et

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

La quantité

$$A = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

est appelé l'**approxiamation linéaire** de f en x_0



A est l'ordonnée correspondant à $x_0 + h$ mesurée sur la tangente en x_0

Exemple: Évaluation de $\sqrt[3]{8.012}$ On détermine l'AL de $\sqrt[3]{8.012}$ en $x_0 = 8$

$$h = 0.012, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

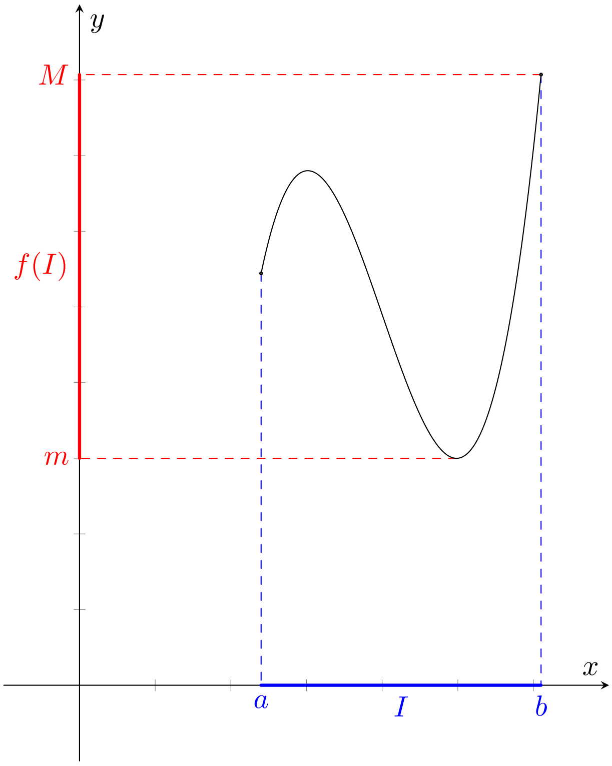
$$\begin{aligned} A =& f(x_0) + h \cdot f'(x_0) \\ & f(x_0) = f(8) = 2 \\ & f'(x_0) = f'(8) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}\Big|_{x=8} = \frac{1}{12} \\ A =& 2 + 0.0012 \cdot \frac{1}{12} = 2.001 \end{aligned}$$

3.3 Théorème des accroissement finis

3.3.1 Préliminaire (sans démonstration)

Soit f continue sur $[\,a;b\,] = I$

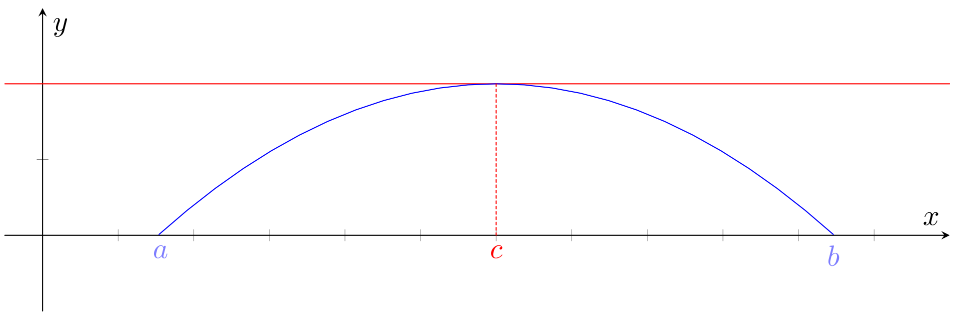
1. L'image de I par f est un intervalle fermé
2. f atteint sur $I = [\,a;b\,]$ son minimum et son maximum ($f(I) = [m, M]$)



3.3.2 Théorème de Rolle

Soit f continue sur $[\,a;b\,]$ et dérivable sur $]a;b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors

$$\exists c \in]a;b[\text{ t.q. } f'(c) = 0$$



Démonstration:

- Si $f(x) \equiv 0$ sur $[\,a;b\,]$, alors le théorème est vérifié

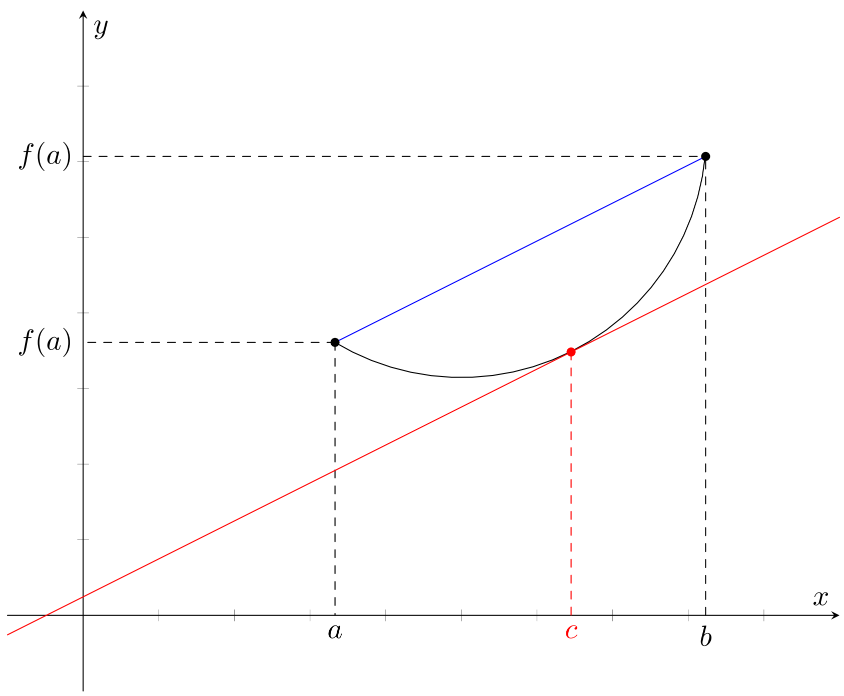
- Si $f(x) \not\equiv 0$, $f(x)$ prend des valeurs positions ou négatives, on suppose que a et b sont zéros consécutif de f et que
$$f(x) > 0, \quad \forall x \in]a; b[$$
f est continue sur $[\, a; b\,]$, donc f atteint son max M. Soit x_0 l'abscisse de M. Alors $\forall h$ suffisamment petit pour que
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot \cdot r(h)$$
Or
$$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$
car
$$f(x_0) = M$$
est un max, donc
$$\begin{aligned} & f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq f(x_0) \\ \iff & h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq 0 \\ \iff & h \cdot [\, f'(x_0) + r(h)\,] \leq 0 \end{aligned}$$
- Si $h < 0$, on a
$$f'(x_0) + r(h) \geq \xrightarrow[h \to 0^-]{} f'(x_0) \geq 0$$
- Si $h > 0$, on a
$$f'(x_0) + r(h) \leq \xrightarrow[h \to 0^+]{} f'(x_0) \leq 0$$

D'où $f'(x_0) = 0, x_0 \coloneqq c$

$\square$

3.3.3 Théorème des accroissements finis

Soit f continue sur $[\, a; b\,]$ et dérivable sur $]a; b[$, alors
$$\exists c \in]a; b[\text{ t.q. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Démonstration: Soit

$$y(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{ordonné sur la courbe}} - \left[\underbrace{f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-1)}_{\text{ordonnée sur la sécante}}\right]$$

- g est continue sur $[\,a;b\,]$ car f l'est
- g est dérivable sur $]a;b[$ car f l'est
- De plus $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$

Donc d'après Rolle,

$$\exists c \in]a;b[\text{ t.q. } g'(c) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Autre expression de TAF.
Soit $x_0 = a$ et $x_0 + h = b$, $\quad (h > 0)$

$$\exists\,\theta\ ]0;1[\text{ t.q. } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta\cdot h)$$

$(x_0 + \theta\cdot h \in [\,x_0; x_0+h\,])$ (énoncé analogue pour $h < 0$)

Exemple: f définie sur $[\,1;3\,]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cdot(x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- f continue en $x = 2$, car

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 = 4$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-4)^2 = 4$$

  et $f(2) = 4$

- Recherche de

$$x_0 \in]1;3[\text{ t.q. } f(x_0) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{1-\frac{7}{2}}{2} = -\frac{5}{4}$$

  – Sur $]1;2[$

$$f'(x_0) = -\frac{5}{4} \iff -(x_0 - 2) = -\frac{5}{4}$$
$$\iff x_0 = -\frac{1}{4} \notin]0;2[$$

  – Sur $]2;3[$

$$f'(x_0) = -\frac{5}{4} \iff 2\cdot(x_0-4) = -\frac{5}{4}$$
$$\iff x_0 = -\frac{5}{8} + 4 = \frac{27}{8} > 3$$

Donc x_0 les hypothèses du TAF ne sont pas validés, car f est non-dérivable sur en $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = -4$$

3.4 Règle de Bernoulli, de l'Hospital

3.4.1 Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Soient f et g deux fonctions dérivables sur une voisinage de x_0 telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ avec $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ sur un voisinage pointé de x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est dont une FI de type "$\frac{0}{0}$"
Alors si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe ou est infinie, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Démonstration: Soit $D(x) = f(x_0 + h) \cdot g(x_0) - g(x_0 + h) \cdot f(x)$

$$D(x_0) = 0 \text{ et } D(x_0 + h) = 0$$

or D est continue et dérivable sur un voisinage de x_0
Donc d'après Rolle,

$$\exists \theta \in]0;1[\text{ t.q. } D'(x_0 + \theta \cdot h)$$

$$\begin{aligned} D'(x) =& f(x_0 + h) \cdot g'(x) - g(x_0 + h) \cdot f'(x) \\ D'(x_0 + h) = 0 \implies& f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + \theta h) = g(x_0 + h) \cdot f'(x_0 + \theta h) \\ \iff& \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)} \end{aligned}$$

Et lorsque $h \to 0$, on a

$$\begin{aligned} & \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)} \\ \iff & \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

$\square$

Remarque: Cette règle reste valable lorsque $x \to \pm\infty$
Soient f et g deux fonctions dérivables sur une voisinage de l'infini, telles que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ Alors si $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.4.2 Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Soient f et g deux fonctions dérivable sur un voisinage de x_0 (fini ou infini) et telles que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

Alors si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie, on a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Illustration de la démonstration

$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

est une FI de "$\frac{0}{0}$"

$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{f^2(x)}{g^2(x)}}_{L^2} = L^2 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

D'où

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{L} \text{ et } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

□

Exemples:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)}$: FI "$\frac{0}{0}$"

$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$: FI "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \text{ FI "}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$
$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$: FI "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

4. $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$: FI "$0 \cdot \infty$"

$$= \lim_{x\to 0^+} = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} : \text{ FI "}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$
$$\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

5. **Rappel:**

$$u(x)^{v(x)} \stackrel{\text{def}}{=} e^{v(x)\cdot\ln(u(x))}, \quad \forall u(x) > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x^x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)}$$

car exp et continuité et

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = 0 \text{ (cf. 4.) donc } \lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

$\square$

3.5 Variation locale d'une fonction

3.5.1 Croissance, décroissance

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I

1. Si
$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in I$$
alors f strictement croissante sur I.
2. Si
$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in I$$
alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration: Pour tout $a, b \in I, a < b$ le TAF nous donne l'existence de

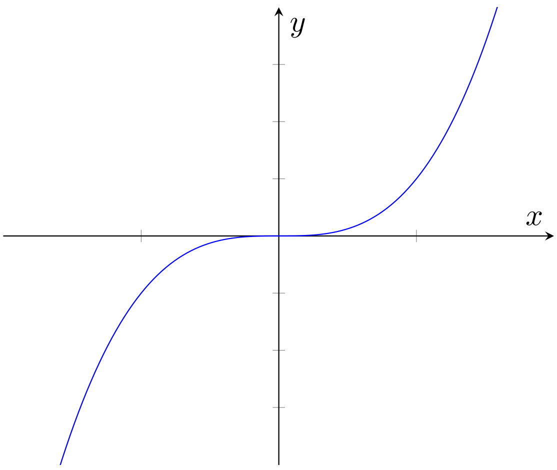
$$c \in]a;b[, \text{ t.q. } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad f(b)-f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$$

Or $b-a>0$ donc

1. Si $f'(x) > 0$, alors
$$f'(c) > 0 \implies f(b)-f(a) > 0, \forall a < b \in I$$
donc f est strictement croissante sur I.
2. Si $f'(x) < 0$, alors
$$f'(c) < 0 \implies f(b)-f(a) < 0, \forall a < b \in I$$
donc f est strictement décroissante sur I.

⚠ La réciproque est **fausse**

Contre-exemple: $f(x) = x^3$



f est strictement croissante

3.5.2 Extrema

Définitions: Soient

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$$

et

$$c \in \mathbb{D}_f$$

- $f(c)$ est un maximum local de f si

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } f(x) \leq f(c), \quad \forall \in]c - \delta; c + \delta[$$

- $f(c)$ est un maximum global de f si

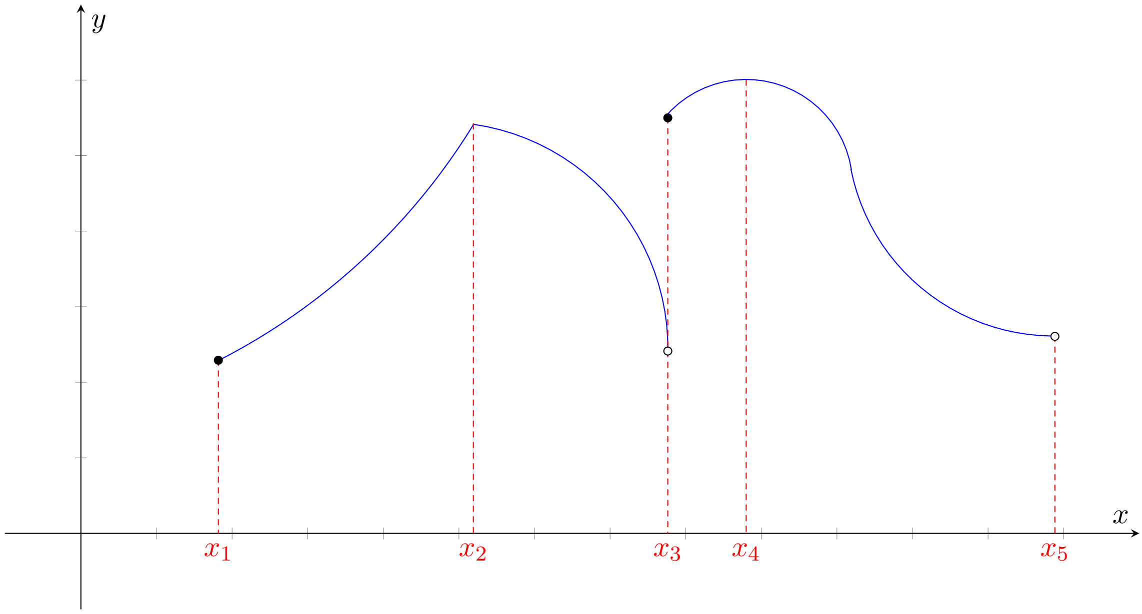
$$f(x) \leq f(c), \forall x \in \mathbb{D}_f$$

- $f(c)$ est un minimum local de f si

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } f(x) \geq f(c), \quad \forall \in]c - \delta; c + \delta[$$

- $f(c)$ est un maximum global de f si

$$f(x) \geq f(c), \forall x \in \mathbb{D}_f$$



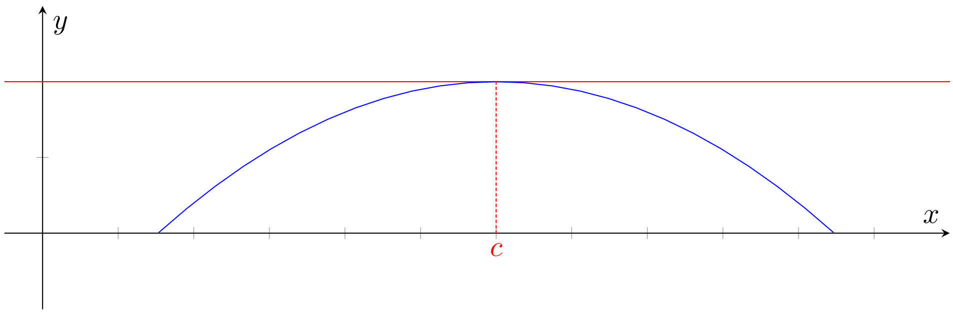
$f(x_1)$ est l'unique minimum local de f

$f(x_2), f(x_4)$ sont des maximums locaux

$f(x_3), \underbrace{f(x_5)}_{\text{n'existe pas}}$ ne sont des extremas locaux de f.

Théorème: Soit $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0. Alors si $f(x_0)$ est un extrema de f, on a $f'(x_0) = 0$

Démonstration: C.f. démonstration du théorème de Rolle



Remarque: La réciproque est **fausse**

Contre-exemple: $f(x) = x^3, x_0 = 0$

$$f'(0) = 3 \cdot x^2 \Big|_{x=0} = 0$$

mais

$$f(0) = 0$$

n'est pas un extremum de f.

Théorème: Soit f continue sur I ouvert et dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$ Alors $f'(x_0)$ est une extremum de f si $f'(x)$ change de signe en x_0

Démonstration: Soit f continue sur $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[(\delta > 0)$ et dérivable sur

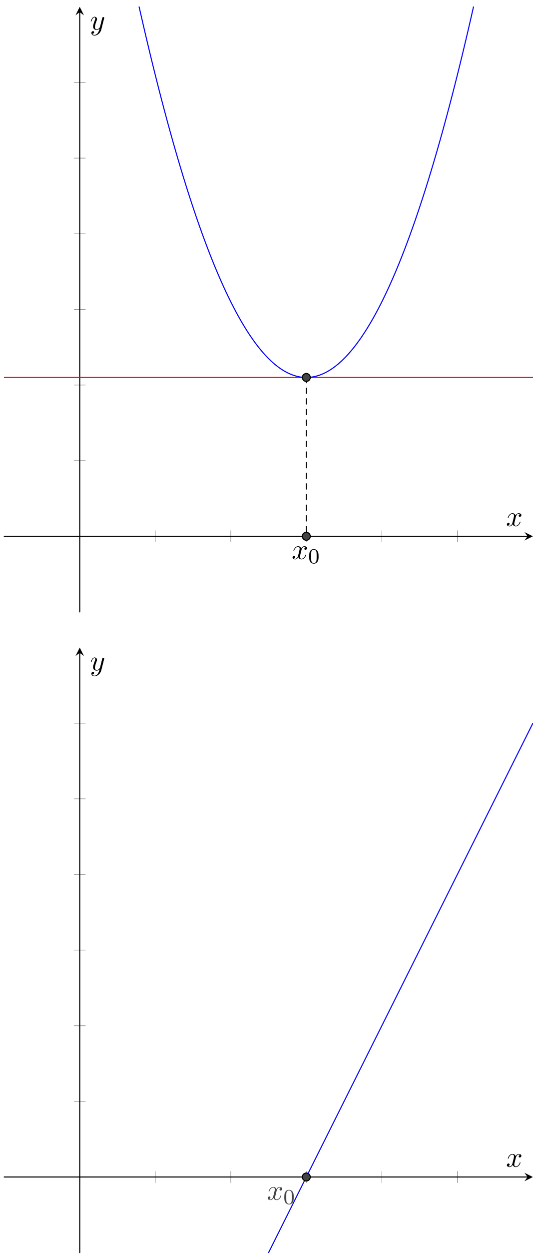
$$]x_0 - \delta; x_0[\cup]x_0; x_0 + \delta[$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(c) \cdot (x - x_0)$$

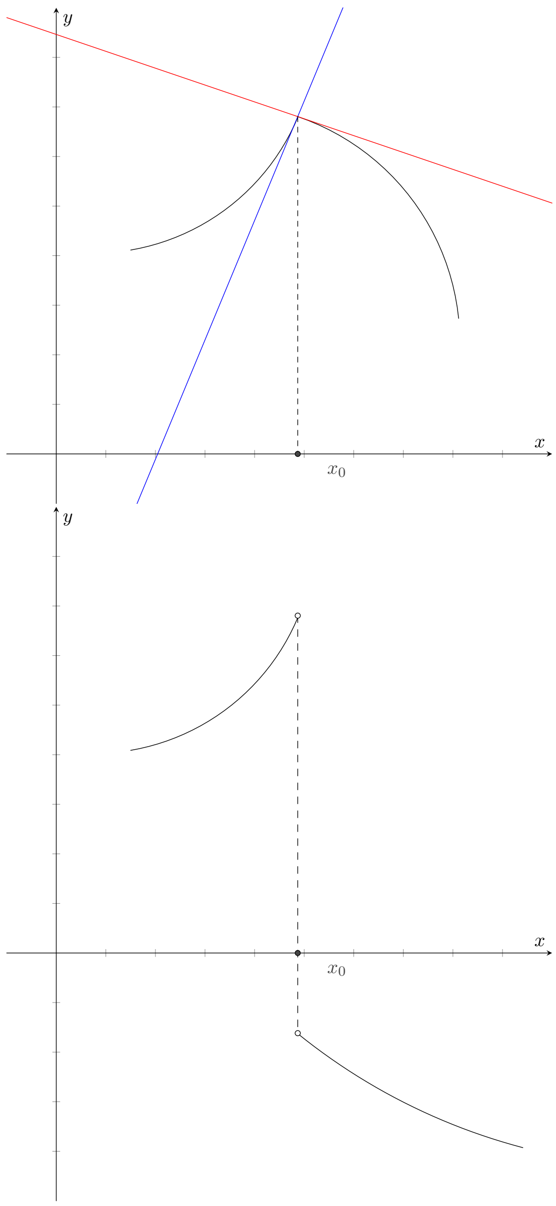
avec c entre x et x_0 (TAF)
f' change de signe en x_0 donc:

- $$\left.\begin{array}{l} \text{si } x - x_0 < 0, \text{ on a } f'(c) > 0 \implies f(x) < f(x_0) \\ \text{si } x - x_0 > 0, \text{ on a } f'(c) < 0 \implies f(x) < f(x_0) \end{array}\right\} f(x_0) \text{ est max}$$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{si } x - x_0 < 0, \text{ on a } f'(c) < 0 \implies f(x) > f(x_0) \\ \text{si } x - x_0 > 0, \text{ on a } f'(c) > 0 \implies f(x) > f(x_0) \end{array}\right\} f(x_0) \text{ est min}$$



extremum $f'(x_0) = 0$



extremum $f'(x_0)$ n'existe pas

Remarques:

1. Attention!
$$\begin{cases} f(x_0) \text{ extremum de } f \not\Longrightarrow f'(x_0)=0 \\ f'(x_0) \not\Longrightarrow f(x_0) \text{ extremum de } f \end{cases}$$

2. Les abscisses x_0 des extrema de f sont à calculer dans les situation suivantes

   (a) Les bornes éventuelles de $\mathbb{D}_{\text{déf}}$ du domaine de continuité

   (b) $x_0 \in \mathbb{D}_f \backslash \mathbb{D}_{f'}$ (f définie en x_0, mais non-dérivable en x_0)

   (c) $f'(x_0) = 0$

   Exemple:
$$f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}, \quad f \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) =& 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (x^3-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (3x) \\ =& \frac{3x^2 \cdot (x^3-1) + 2x^5}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{5x^5 - 3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} \\ =& \frac{x^2 \cdot (5x^3-3)}{\sqrt[3]{x^3-1}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{1\} \end{aligned}$$

   Signe de $f'(x)$

   check the drive for the signe table

x		0		$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$ $-\infty$	$\Vert$ $+\infty$	$+$

   - $(0,0)$ est un point à tangente horizontale mais pas un extremum
   - En $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$, point à tangente horizontale et maximum
   - En $x_0 = 1$, $f'(x_0)$ n'existe pas mais $\lim_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$, c'est un point a tangente verticale et un maximum (point de rebroussement)
     Esquisse: fig 1

3. Autres points remarquables

   (a) Points à tangente horizontale. Soit
$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$$
   dérivable (éventuellement gauche, droite) en x_0 avec
$$f'(x_0) = 0(\text{ éventuellement } f'(x_0^-) = 0 \text{ et } f(x_0^+) = 0$$
   Alors le graphe de f admet en x_0 une tangente (demi-tagente) horizonatle:
   fig 2 fig 3 fig 4 are small

   (b) Points à tangente verticale Soit f continue sur I et dérivable sur $I\backslash\{x_0\}$. Si
$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = \infty$$
   alors le graphe de f admet en x_0 une tangente (demi-tangente) verticale.

Exemples:

i. $f(x) = \sqrt{x}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_+, \quad x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}_+^*$$

f non dérivable en $x_0 = 0$ mais

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

fig 5
demi-tangente verticale en $x_0 = 0$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

f non dérivable en $x_0 = 0$ mais

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$$

tab 1 fig 6 tangente verticale en $x_0 = 0$

iii. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}^*$$

f non dérivable en $x_0 = 0$, mais

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

fig 7 tab 2

(c) Points anguleux Soit f continue sur I et dérivable sur $I\backslash\{x_0\}(x_0 \in \mathbb{D}_f\backslash\mathbb{D}_{f'})$. Le graphe de f admet un point anguleux en $x_0 = 0$ si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 avec $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$ fig 8 point anguleux et extremum fig 9 point anguleux et non extremum