

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 1A  
PREPA-031(A)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

## Chapter 4

# Nombres complexes

### 4.1 Définitions, forme cartésienne

**Rappel:**

$$x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x] \text{ est irréductible}$$

On ne peut pas le factoriser comme

$$(x - a)(x - b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Nous voulons alors construire une extension des nombres réels  $\mathbb{R}$  permettant de résoudre ce type d'équation:

$$x^2 + 1 = 0$$

On introduit pour cela un "nombre"  $i$  ("imaginaire") tel que

$$i^2 = -1$$

**Remarque:** On connaît les rotations

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Rot}(\frac{\pi}{2})} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$$

On impose les mêmes règles de calcul que sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque:** Tout comme  $i^2 = -1$ , on a  $(-i)^2 = ((-1)i)^2 = -1$   $i$  et  $-i$  sont les 2 racines (complexes) de  $-1$ .

On admet l'écriture

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

Le symbole  $\sqrt{\cdot}$  n'est plus réservé à la racine positive d'un réel positif.

Pour l'équation  $x^2 + 1 = 0$ , l'ensemble solution est  $\mathbb{S} = \{-i, i\}$

D'où la factorisation

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

En effet

$$(x + i)(x - i) = x^2 \cancel{-ix} + \cancel{ix} - \underbrace{i^2}_{=-1} = x^2 + 1$$

**Exemple:** Résoudre en  $x$ :

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 = -1 \cdot 3$$

L'ensemble solution est alors

$$\mathbb{S} = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Nous allons donc manipuler des nombres de la forme cartésienne (ou algébrique)

$$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

**Définition:** L'ensemble

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

est l'ensemble des nombres complexes.

**Définition:** Soit  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

- $a$  : partie réelle de  $z$   $\quad \operatorname{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$
- $b$  : partie imaginaire de  $z$   $\quad \operatorname{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

Ainsi,

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

**Remarque:**  $i \cdot \mathbb{R} = \{i \cdot b \mid b \in \mathbb{R}\}$  est l'ensemble des nombres imaginaires.

**Définition:** Opérations sur les nombres complexes

Soit  $z = a + ib$ ,  $z' = a' + ib'$ ,  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ .

1. Égalité

$$z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ \text{et} \\ b = b' \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \text{et} \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

2. Addition +

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

ou encore

$$\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$$

en particulier

$$\operatorname{Re}(2z) = 2\operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(2z) = 2\operatorname{Im}(z)$$

3. Multiplication 

$$z \cdot z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

ou encore

$$\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(z')$$

$$\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}(z')$$

**Remarque:** Similitude avec  $\cos(\alpha + \beta)$  et  $\sin(\alpha + \beta)$ !

**Cas particuliers:** Pour  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

- $\lambda z = \lambda a + i\lambda b$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (amplification par un réel)
- $iz = ia + i^2b = -b + ia$  (amplification par  $i$ )
- $z^2 = z \cdot z = (a + ib)^2 = a^2 + b^2 + i2ab$  (carré)

Avec ces deux lois  $+$  et  $\cdot$  étendant celles définies sur  $\mathbb{R}$ ,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  est un corps.

En effet,

- Élément neutre pour l'addition  $0 = 0 + i0$
- L'opposé de  $z = a + ib$  pour l'addition:  $-z = -a - ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$
- Élément neutre pour la multiplication  $1 = 1 + i0$
- L'inverse de  $z = a + ib \neq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  pour la multiplication est

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

En effet,

$$z \cdot \frac{1}{z} = (a + ib) \cdot \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

L'inverse permet de définir la division dans  $\mathbb{C}$ :

Soit  $z_1$  et  $z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_2} \cdot z_1 = \frac{z_1}{z_2}$$

**Définition:** Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

Le nombre **conjugué complexe** (c.c.) de  $z$ , noté  $\bar{z}$ , est le nombre

$$\bar{z} = a - ib$$

**Propriétés:** Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$

$$1. \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$2. \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$3. \quad \operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z) \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$$

$$4. \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$5. \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$6. \quad \bar{z} \cdot \overline{z'} = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)$$

$$7. \quad \begin{array}{l} \bar{z} = z \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R} \\ \bar{z} = -z \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff z \in i\mathbb{R} \end{array}$$

Vérification par calcul direct

**Définition:** Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

Le **module** de  $z$ , noté  $|z|$ , est le nombre réel positif (ou nul)

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ou encore

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)$$

**Propriétés:**

- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  et  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $|\bar{z}| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  [missing last points from that slide]
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

## 4.2 Puissances et racines

### 4.2.1 Exposants entiers

**Définition:** Soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme pour les réels, on définit " $z$  puissance  $n$ " comme

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ facteurs}}$$

De plus, si  $z \neq 0$ , on a les exposants nuls ou négatifs:

$$z^0 = 1 \quad z^{-1} = \frac{1}{z} \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

### 4.2.2 Racines complexes

**Définition:** Soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$

$w \in \mathbb{C}$  est une racine  $n^e$  de  $z$  si  $w$  vérifie  $w^n = z$ .

Nous admettons l'écriture  $\sqrt[n]{z}$  pour désigner toutes les racines  $n^e$  de  $z$  complexes:  $\sqrt{\cdot}$  est une fonction multivalente, pas comme sur  $\mathbb{R}$ .

D'où l'équivalence

$$w^n = z \quad \Longleftrightarrow \quad w = \underbrace{\sqrt[n]{z}}_{n \text{ valeurs}}$$

**Exemple:**  $\sqrt{-1} = \pm i : 2 \text{ valeurs}$

**Propriétés:** Soit  $z \in \mathbb{C}$

- Toutes les propriétés des réels à exposants fractionnaires restent valables en posant

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

- $\sqrt[n]{|z|} = |\sqrt[n]{z}|$  **toutes les racines  $n^e$  de  $z$  sont de même module!**

**Exemple:**

$$\sqrt[3]{-1} = \begin{cases} -1 \text{ (évidemment)} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

En effet,  $(-1)^3 = -1$

$$\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot (1 \pm i3\sqrt{3} - 9 \mp i3\sqrt{3}) = -1$$

Ou encore, en résolvant  $z^3 = -1 \iff$

$$z^3 + 1 = 0 \iff (z+1) \underbrace{(z^2 - z + 1)}_{\text{comme avant}} = 0$$

**Cas particuliers:** Écrire  $\sqrt{z}$  sous la forme algébrique. Posons  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Nous cherchons  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  t.q.

$$\sqrt{a+ib} = \alpha + i\beta$$

problème équivalent:

$$a + ib = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Plutôt que la relation  $2\alpha\beta = b$ , utilisons le carré du module.

$$\alpha^2 + \beta^2 = |\alpha + i\beta|^2 = |\sqrt{a+ib}|^2 = \sqrt{|a+ib|^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Alors

$$\sqrt{z} = \sqrt{a+ib} = \alpha + i\beta \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a = \operatorname{Re}(z) \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(b) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z)) \end{cases}$$

**Exemple:**

$$\begin{aligned} \sqrt{i} = \alpha + i\beta &\iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = |i| = 1 \\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(1) = +1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta) = +1 \end{cases} \\ &\iff \sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Application: résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

Solution:

$$z_1, z_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\beta}}{2a}$$

## 4.3 Plan complexe

### 4.3.1 Isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$

Tout nombre complexe  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , peut être associé à un point  $M$  du plan, le plan complexe ou plan de Gauss. On dit que  $a$  est l'affixe de  $M$ .

En effet  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}$  sont isomorphes: il existe une application linéaire bijective de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z &\longmapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \end{aligned}$$

et son inverse est

$$\begin{aligned} h^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto a + ib \end{aligned}$$

**Exemple:**

**Remarque:**  $z$  et  $\bar{z}$  sont symétrique par rapport à l'axe réel

### 4.3.2 Forme polaire

Tout point du plan (et donc du plan complexe) peut être donné sous forme polaire

**Définition:** Soit  $z \in \mathbb{C}$

La forme polaire de  $z$  est la donnée

- de la distance  $r = |z|$  de  $z$  à  $O$ : le module de  $z$ .
- de l'angle  $\varphi$  entre l'axe réel et le rayon-vecteur

**Remarque:**  $\varphi$  est noté  $\arg(z)$ , argument de  $z$ .  $\varphi$  n'est pas unique, mais défini à  $2\pi$  près.

On écrit alors

$$z = (r, \varphi) \quad \text{avec} \quad r = |z| \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(z) \in \mathbb{R}$$

**Remarque:** On devrait écrire

$$z = (r, \varphi + k \cdot 2\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

mais une seule détermination suffit

**Définition:** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On appelle **détermination principale** de l'argument de  $z$ .

$$\varphi = \arg(z) \in ]-\pi; \pi[$$

**Propriété:** Soit  $z = (r, \varphi) \in \mathbb{C}$ . Alors

$$\bar{z} = (r, -\varphi)$$

**Propriétés:** Passage entre les formes polaire et cartésienne.

- Soit  $z = (r, \varphi)$

Alors

$$\operatorname{Re}(z) = r \cdot \cos(\varphi)$$

et

$$\operatorname{Im}(z) = r \cdot \sin(\varphi)$$

d'où

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

- Soit  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

Alors

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Exemple:**  $z = -\sqrt{3} - i$

- $|z| = \sqrt{3 + 1} = 2$
- $\cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin(\varphi) = -\frac{1}{2}$

d'où  $\varphi = \arg(z) = -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Par exemple, pour  $k = 0$  ou  $k = 1$ ,

$$z = (2, -\frac{5\pi}{6}) = 2, \frac{7\pi}{6}$$

**Conséquences:**

1. Soient  $M$  et  $M_0$  deux points du plan, d'affixe  $z$  et  $z_0$  respectivement.  
La distance de  $M$  à  $M_0$  est  $|z - z_0|$ .
2. Équation d'un cercle de rayon 1, centré à l'origine: tous les points sont à distance 1 de  $O$ .

$$|z|^2 = z\bar{z} = 1^2$$

3. Équation d'un cercle centré en  $z_0$  et de rayon  $R$   $|z - z_0| = R$  ou  $|z - z_0|^2 = R^2$



### 4.3.3 Translation

Une translation dans le plan de Gauss est donnée par une addition

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 & a_1, b_1 &\in \mathbb{R} \\ z_2 &= a_2 + ib_2 & a_2, b_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\implies z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

Une translation de  $t \in \mathbb{C}$  est une application linéaire de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T_t &= \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z + t \end{aligned}$$

### 4.3.4 Similitude et formule de Moivre

Homothétie: dans  $\mathbb{C}$ , l'amplification par  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une homothétie (mise à l'échelle)

$$\begin{aligned} H_\lambda &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto H_\lambda(z) = \lambda z \end{aligned}$$

En effet

$$|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$$

et

$$\arg(\lambda z) = \begin{cases} \arg(z) & \text{si } \lambda > 0 \\ \arg(z) + \pi & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

En particulier  $(-1) \cdot z = -z$  est le symétrique de  $z$  par rapport à  $O$ .

**Remarque:** L'amplitude par  $-1$  est aussi une rotation d'angle  $\pi$  ( ou  $-\pi$  ) autour de  $O$  dans le cercle trigonométrique.

Comme  $-1 = i^2$ , on observe que multiplier par  $i$  revient faire une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  !

$$-z = \text{Rot}_\pi(z) = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(z)) = \cdot i(iz)$$

avec

$$iz = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(z)$$

Ainsi

$$\arg(iz) = \arg(z) + \frac{\pi}{2} = \arg(z) + \arg(i)$$

**Rotation** dans  $\mathbb{C}$  la multiplication par un nombre  $w$  de module 1 ( $|w| = 1$ ,  $w = (1, \alpha)$ ,  $\alpha = \arg(w)$ ) est une rotation d'angle  $\alpha = \arg(w)$

$$\begin{aligned} R_\alpha &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto R_\alpha(z) = w \cdot z = (1, \alpha)z \end{aligned}$$

Similitude [missing end of slide]

$$S_w : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto S_w(z) = w \cdot z$$

(avec  $S_w = H_\lambda \cdot \text{Rot}(\alpha)$ )

En effet, si  $z_1 = (r_1, \varphi_1)$  et  $z_2 = (r_2, \varphi_2)$ , alors

$$z_1 z_2 = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$$

### Preuve

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2))) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

**Exemple:**  $z_1 = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{2})$  et  $z_2 = (\sqrt{6}, -\frac{5\pi}{6})$

Calculer  $z_1 z_2$ .

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 2\sqrt{3}$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$

En particulier, si  $z_1 = z_2 = z = (r, \varphi)$

$$z^2 = (r^2, 2\varphi)$$

et par récurrence,

$$z^n = (r^n, n\varphi) = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

**Exemple:** Racine  $n^e$  de l'unité: cherchons  $z$  tel que

$$z^n = (r^n, n\varphi) = 1 = (\underbrace{1}_{\text{module de 1}}, \underbrace{0}_{\text{arg de 1}})$$

Alors:

- module:  $r^n = 1 \implies r = 1$  (car  $r \in \mathbb{R}_+$ )
- argument:  $n \cdot \varphi = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \implies \varphi = k \frac{2\pi}{n}$

Il y a donc  $n$  racines distinctes!

$$S = \left\{ \left( 1, k \frac{2\pi}{n} \right) \middle| k = \underbrace{0, \dots, n-1}_{n \text{ valeurs}} \right\}$$

Pour  $n = 5$

$$S = \left\{ \left( 1, k \frac{2\pi}{5} \right) \middle| k = 0, \dots, 4 \right\}$$

**Conséquences:**

1. Division Inverse de
- $z = (r, \varphi)$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \left(\frac{1}{r}, -\varphi\right)$$

Quotient de  $z_1 = (r_1, \varphi_1)$  et  $z_2 = (r_2, \varphi_2)$  alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 - \varphi_2\right) \quad (r_2 \neq 0)$$

**Formule de Moivre**

$$z^n = (r^n, n \cdot \varphi) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (r \neq 0)$$

et plus généralement

$$z^q = (r^q, q \cdot \varphi) \quad \forall q \in \mathbb{Q} \quad (r \neq 0)$$

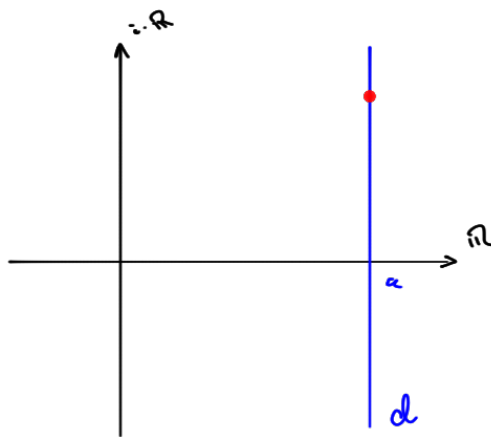
par équivalence

$$z = \sqrt[n]{w} \iff z^n = w$$

**Remarque:**

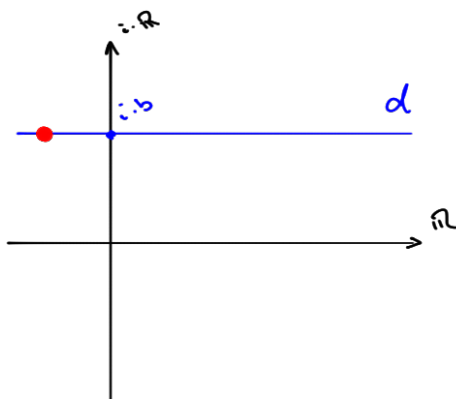
$$z^q = r^q \cdot (\cos(q\varphi) + i \cdot \sin(q\varphi)) \quad q \in \mathbb{Q}$$

2. Équation de droite verticale:



$$\begin{aligned} z \in d &\iff \operatorname{Re}(z) = a \\ &\iff z + \bar{z} = 2a \quad \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Droite horizontale d'ordonnée
- $b$



$$\begin{aligned} z \in d &\iff \operatorname{Im}(z) = b \\ &\iff z - \bar{z} = i2b \quad \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

## 4. Droite quelconque: dans le plan réels

$$d: ax + by = 0$$

$$a\operatorname{Re}(z) + b\operatorname{Im}(z) = c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Dans le plan complexe

$$a \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + b \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} = c$$

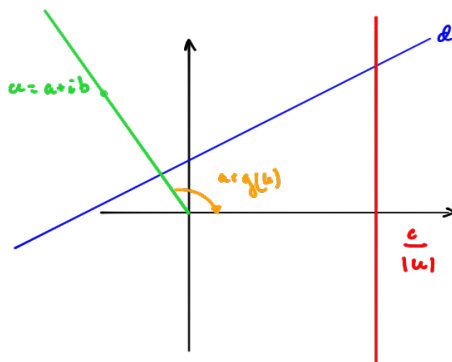
$$a \cdot (z + \bar{z}) - ib \cdot (z - \bar{z}) = 2c$$

$$\underbrace{(a - ib)}_{\bar{u}} z + \underbrace{(a + ib)}_u \bar{z} = 2c$$

Avec  $u = a + ib$

$$\bar{u}z + u\bar{z} = 2c \iff \operatorname{Re}(\bar{u}z) = c \quad c \in \mathbb{R}$$

Interprétation géométrique



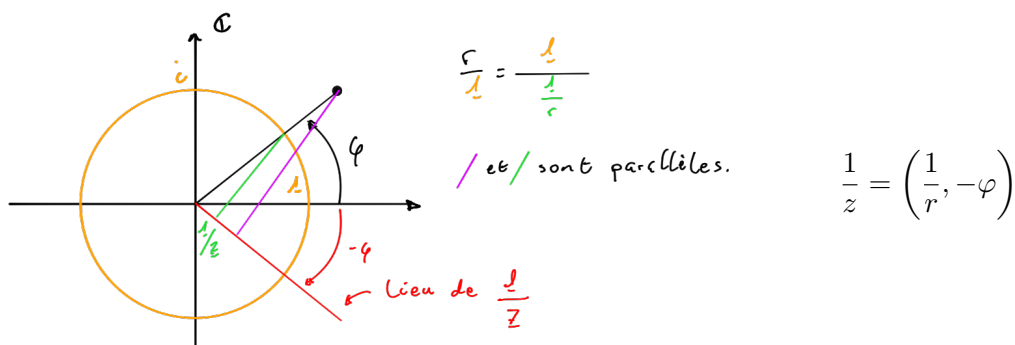
**Remarque:** Le nombre  $\bar{u}z$  est sur la droite verticale d'abscisse  $c$ .

Le nombre  $u = a + ib$  définit la normale à  $d$ .

**Remarque:**

- Une translation transforme une droite en droite et un cercle en cercle.
- De même pour les similitude.

**Remarque sur l'inverse:** Géométriquement, l'inverse de  $z = (r, \varphi)$  se construit grâce au théorème de Thalès.



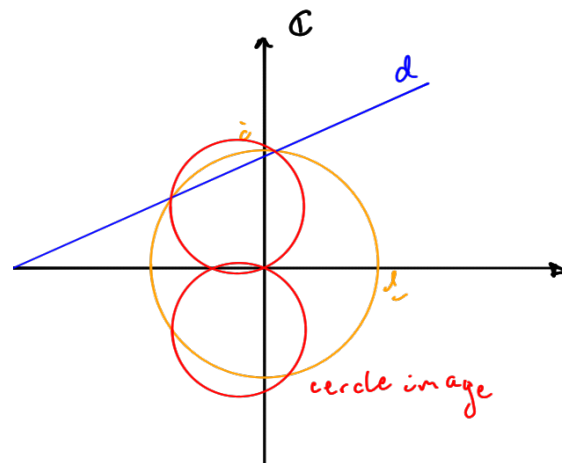
$$\frac{1}{z} = \left( \frac{1}{r}, -\varphi \right)$$

**Remarque:**

- Un point  $z$  sur le cercle unité est transformé en son conjugué  $\bar{z}$
- Un point  $z$  hors du cercle unité est transformé en un point  $\frac{a}{z}$  à l'intérieur.

**Par conséquent**

- Une droite passant par  $O$  donne une droite passant par  $O$ .
- Une droite ne passant pas par  $O$  donne un cercle passant par  $O$ !

**Illustration**

Cercle passant par  $O$  donne un cercle passant par  $O$ .

Pour vérifier, [?] l'équation d'une droite ou d'un cercle en  $z$  et définit l'image par  $w = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{w}$

**Exemple:** Trois points donnés par leur affixe:

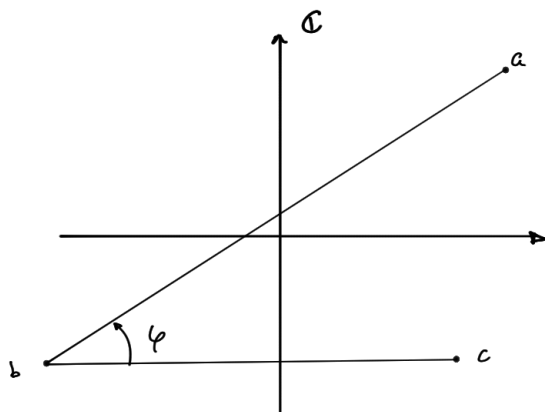
Donner l'angle  $\widehat{ABC}$

$$A(a) \quad B(b) \quad C(c)$$

Il existe  $s \in \mathbb{C}$  tel que

$$a - b = s(c - b)$$

$$\implies \varphi = \arg(s) = \arg\left(\frac{a - b}{c - b}\right)$$



A partir de  $c$ , on obtient  $a$ .

- par une rotation autour de  $b$
- par une homothétie