

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 2B  
PREPA-032(B)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Simon BOSSONEY

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

## Chapter 6

# Déterminant, vecteurs et valeurs propres

L'étude de l'espace vectoriel  $M_2(\mathbb{R})$  des matrices  $2 \times 2$  à coefficients réels permet d'illustrer des notions importantes qu'on peut généraliser à des matrices  $M_n(\mathbb{R})$  où  $n > 2$ .

Une matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

représente une application linéaire exprimée par rapport à la base canonique  $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1, e_2\}$

$$A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Pour que l'application linéaire  $A$  soit bijective, il faut que

$$Ae_1 \neq \lambda Ae_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$$

En particulier pour  $\lambda = 1$ , l'application linéaire  $A$  n'est pas bijective si  $Ae_1 = Ae_2$  et donc la matrice n'est pas invertible si ses colonnes sont égales.

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Dans le cas où  $c \neq 0$  et  $d \neq 0$ , la matrice  $A$  n'est pas inversible si

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \implies a \cdot d - b \cdot c = 0$$

Dans le cas où  $c = 0$  ou  $d = 0$ , cette condition doit aussi être aussi satisfaite si  $A$  n'est pas inversible.

### Définition 6.1:

Le déterminant de la matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  est le nombre suivant:

$$\det(A) := ad - bc$$

Une matrice est donc inversible si son déterminant est non-nul.

L'inverse de la matrice  $A$  est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

En effet,

$$A^{-1}A = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = I_2$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = I_2$$

L'aire engendré par les vecteurs de base  $e_1$  et  $e_2$  dans  $\mathbb{R}^2$  est 1.

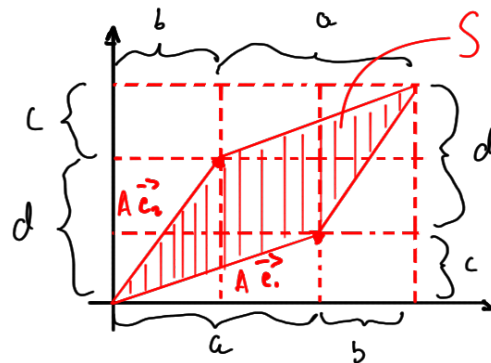
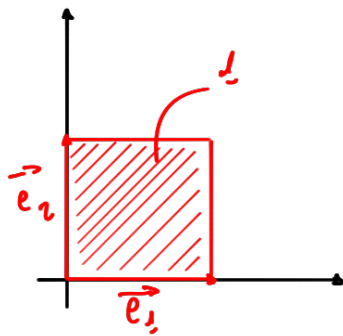
Soit  $S$  l'aire engendrée par les images des vecteurs des base

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

et

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

dans  $\mathbb{R}^2$



$$S = (a+b)(c+d) - 2bc - bd - ac = ad - bc = \det(A)$$

### 3 cas

1. Si les images  $Ae_1$  et  $Ae_2$  ont la même orientation respective que les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$

$$\det(A) = S$$

2. Si les images ont l'orientation inverse

$$\det(A) = -S$$

3. Si les images sont multiples l'une de l'autre

$$\det(A) = 0$$

ce qui signifie que la matrice  $A$  n'est pas inversible car elle représente une projection sur une droite.

On va maintenant utiliser le déterminant pour chercher une base de  $\mathbb{R}^2$  une matrice  $A$  prend une forme particulièrement simple.

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

On va alors chercher, si c'est possible, deux vecteurs linéairement indépendants  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \text{et} \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 \quad \text{où} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Dans la base  $\{v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , l'application linéaire représentée par la matrice  $A$  dans la base  $\{e_1, e_2\}$ , est représentée par une matrice diagonale.

En effet,

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \quad v = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

alors

$$\begin{aligned} A(c_1 v_1 + c_2 v_2) &= c_1 Av_1 + c_2 Av_2 \\ &= c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 \end{aligned}$$

La matrice qui représente cette application linéaire dans la base  $\{v_1, v_2\}$  aura pour colonnes les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

### Définition 6.2:

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  une application linéaire. Un **vecteur propre** de  $f$  est un vecteur  $v \in \mathbb{R}^2$  pour lequel il existe un nombre

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(v) = \lambda v$$

où  $\lambda$  est la **valeur propre** associé à  $v$ .

### Théorème: 6.3:

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  une application linéaire et  $v_1, v_2$  des vecteurs propres pour  $f$ , linéairement indépendant avec valeurs propres associées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Alors

$$B = \{v_1, v_2\}$$

est une base pour  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  est représentée dans cette base pour,

$$M_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

De plus, si  $A$  est la matrice représentant  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et si

$$v_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique, alors

$$M_f = B^{-1}AB \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Diagramme de changement de base

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \\ B \uparrow & & \downarrow B^{-1} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{M_f} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1. \text{ Linge supérieure: base } \{e_1, e_2\} \\ 2. \text{ Linge inférieure: base } \{v_1, v_2\} \end{array}$$

**Démonstration:** Il reste que la 2<sup>e</sup> partie de l'énoncé à prouver:

$$B^{-1}AB = M_f \implies AB = BB^{-1}AB = BM_f$$

$$A \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= A \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_1 c_{12} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_1 c_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}_{=B} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{=M_f} \\ &= BM_f \end{aligned}$$

□

Il s'agit donc de trouver les vecteurs propres d'une matrice donnée et les valeurs propres qui leur sont associées. On peut commencer par chercher les valeurs propres d'une matrice.

Une valeur  $\lambda \in \mathbb{R}$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si il existe un vecteur non-nul  $v$ , tel que

$$Av = \lambda v$$

i.e. si et seulement si il existe un vecteur  $v$  non-nul tel que

$$(A - \lambda I_2)v = 0_{\mathbb{R}^2}$$

Ceci est à son tour équivalent dire que  $A - \lambda I_2$  n'est pas injective et donc que  $\det(A - \lambda I_2) = 0$ .

### Définition 6.4:

Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  donnée par

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

**Définition 6.5:**

Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . La trace de  $A$  est le nombre suivant:

$$\text{tr}(A) := a + d \in \mathbb{R}$$

**Théorème 6.6:**

Le polynôme caractéristique  $\mathcal{X}_A(\lambda)$  s'écrit

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

De plus, si  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $A$  alors c'est une racine de  $\mathcal{X}_A$ :

$$\mathcal{X}_A(\lambda_i) = 0 \implies \lambda_i^2 - \text{tr}(A)\lambda_i + \det(A) = 0$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \\ \mathcal{X}_A(\lambda_i) &= \det(A - \lambda_i I_2) = \lambda_i^2 - \text{tr}(A)\lambda_i + \det(A) = 0\end{aligned}$$

□

**Définition 6.7:**

Le discriminant du polynôme caractéristique  $\mathcal{X}_A(\lambda)$  est

$$\Delta_A = \text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)$$

L'étude des racines de  $\mathcal{X}_A(\lambda)$  dépend du signe de  $\Delta_A$

1.  $\Delta_A > 0$ : 2 valeurs propres distinctes:  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_A(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\ &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad \det(A) = \lambda_1\lambda_2$$

Le vecteur propre  $v_1$  est tel que  $(A - \lambda_1 I_2)v_1 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_1 & b \\ c & d - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } \{e_1, e_2\}$$

Le vecteur  $v_2$  est tel que  $(A - \lambda_2 I_2)v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_2 & b \\ c & d - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } \{e_1, e_2\}$$

La matrice  $M_f$  représentant l'application linéaire dans la base propre  $\{v_1, v_2\}$  est

$$M_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

2.  $\Delta_A = 0$ : 1 valeur propre:  $\lambda_0$

$$\begin{aligned}\chi_A &= \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = (\lambda - \lambda_0)^2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{tr}(A) = 2\lambda_0 \quad \text{et} \quad \det(A) = \lambda_0^2$$

3.  $\Delta_A < 0$ : Il n'y a pas de valeur propre réelle.

### Théorème 6.8:

Si  $\Delta_A = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0$ ,  $\lambda_0$  est l'unique valeur propre. Il y a deux cas:

1. Si  $A = \lambda_0 I_2$ , l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , représentée par  $A$  dans la base canonique, en toute base de  $\mathbb{R}^2$  ( $A$  est déjà diagonalisée).
2. Il existe une base de  $\mathbb{R}^2$  où l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , représentée par  $A$  dans la base canonique, est représentée par la matrice triangulaire,

$$M_f = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre  $v_0$  est tel que  $(A - \lambda_0 I_2)v_0 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_0 & b \\ c & d - \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } \{e_1, e_2\}$$

$$\text{où } v_0 = \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \end{pmatrix}$$

### Théorème 6.9:

Si  $\Delta_A = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$  alors  $\det(A) > 0$ , il existe une base de  $\mathbb{R}^2$  où l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , représentée par la matrice,

$$M_f = \sqrt{\det(A)} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \cos(\theta) = \frac{\operatorname{tr}(A)}{2\sqrt{\det(A)}} < 1 \text{ et } \theta \in (0, \pi)$$

Ainsi,

$$\det(M_f) = \det(A)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \det(A)$$

$$\operatorname{tr}(M_f) = 2\sqrt{\det(A)}\cos(\theta) = \operatorname{tr}(A)$$

### Propriétés

1.  $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A)$
2.  $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
3.  $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) \neq \det(B)\det(A)$  (en général)

4.  $\det(I_2) = 1$

5.  $\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A) = \det(I_2) = 1 \implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

6.  $M_f = B^{-1}AB$

$$\implies \det(M_f) = \det(B^{-1}AB) = \det(ABB^{-1}) = \det(A)$$

$$\text{tr}(M_f) = \text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(ABB^{-1}) = \text{tr}(A)$$

Le changement de base  $B$  préserve le déterminant et la trace, car  $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$  et  $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$