

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Physique

PREPA-033

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Sylvain BRÉCHET

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

## Chapter 2

# Mouvement dans le plan

### 2.1 Matière et espace

27/02/2019

La matière est faite d'atomes et de molécules. En mécanique classique, on peut considérer les molécules comme des petites billes en interaction.

- 5 états:
  1. Solide;
  2. Liquide;
  3. Gaz;
  4. Plasma;
  5. Condensat de Bose-Einstein;
- À l'échelle microscopique, on peut distinguer les atomes et les molécules.
- À l'échelle macroscopique, les atomes et les molécule forment un continuum de matière.
- Un objet est un continuum

#### 2.1.1 Grandeurs extensives et intensives

- **Grandeurs extensives:** grandeur physique qui, pour un ensemble d'objets, sont égalés à leur somme pour chaque objet.  
**Exemple** quantité de matière, quantité de mouvement, force, volume.
- **Grandeurs intensives:** grandeurs physique qui sont indépendantes du nombre d'objets.  
**Exemple** vitesse, accélération, température.

#### 2.1.2 Masse

Masse ( $M$  ou  $m$ ): grandeur physique qui caractérise la quantité de matière d'un objet.

- Grandeur extensive

- Grandeur scalaire
- Grandeur conservée (Lavoisier)
- Masse constante  $\implies$  système fermé (lingot d'or)
- Masse variable  $\implies$  système ouvert (fusée)
- Unité physique (SI): kilogramme [ kg ]

### 2.1.3 Volume

Volume ( $V$ ): grandeur physique scalaire et extensive qui caractérise la portion d'espace occupée par un objet.

- Unité physique (SI): mètre cube [ m<sup>3</sup> ]

### 2.1.4 Masse volumique

Masse volumique ( $\rho$ ): grandeur physique scalaire définie comme le rapport de la masse  $m$  et du volume  $V$ .

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.1)$$

- Unité physique (SI): [  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  ]
- Grandeur qui caractérise une matière  $\rho_{\text{eau}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{l}} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ;  $\rho_{\text{glace}} = 0.9 \frac{\text{kg}}{\text{l}} = 0.9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- **Homogène**: un objet est homogène si sa masse volumique est la même partout (par ex. une planche de bois)
- **Inhomogène**: un objet est inhomogène si sa masse volumique varie d'un endroit à l'autre (par ex. un marteau avec manche en bois et tête en fer)

### 2.1.5 Densité

Densité ( $d$ ): nombre sans dimension physique définie comme le rapport entre la masse volumique de l'objet et la masse volumique de l'eau.

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau}}} \quad (2.2)$$

### 2.1.6 Surface

Surface ( $s, \sigma$ ): grandeur physique scalaire et extensible qui caractérise une portion de l'espace en à deux dimensions.

- Unité physique (SI): mètre carré [ m<sup>2</sup> ]

### 2.1.7 Longueur

Longueur ( $l, x, r, s, d, L$ ): grandeur physique scalaire et extensible de l'espace à une dimension.

- Unité physique (SI): mètre [ m ]

## 2.2 Référentiel

### 2.2.1 Point matériel

Représentation d'un objet par rapport à un point auquel on associe toute la matière (masse) de l'objet.

- **Modèle:** idéalisation de la réalité
- **Limites:** pas de mouvement de rotation propre
- **Erreurs:** (i) quantitatif, (ii) qualitatif

### 2.2.2 Référentiel

- Object physique (indéformable) de référence par rapport auquel on décrit le mouvement.

**Exemple:** terre, bateau, système solaire

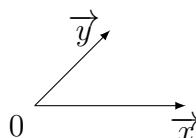
- Un ensemble de  $N$  points matériels ( $N \geq 4$ ) non-coplanaires et fixes les uns par rapport aux autres.

28/02/2019

### 2.2.3 Repère

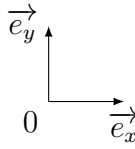
Un **repère** est une **entité géométrique**. Dans le plan, c'est à dire dans un espace à 2 dimensions, un repère est constitué de 2 vecteurs linéairement indépendants (i.e. non colinéaire) attachés à un point appelé l'**origine**  $O$ .

- Repère quelconque:

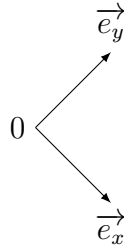


- Un repère est orthonormé si et seulement si les vecteurs de base  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  sont orthogonaux ( $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$ ) et unitaires ( $\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = 1$ )

- Repère horizontale-vertical  $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$



- Repère oblique  $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

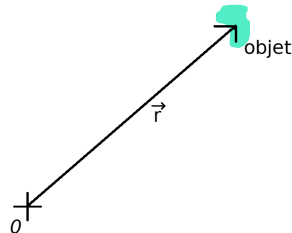


⚠ référentiel (physique: **réel**)  $\iff$  repère (géométrique: **virtuel**) ⚠

## 2.3 Vecteur position et déplacements

### 2.3.1 Vecteur position

- La position d'un objet (point matériel) dans le référentiel est donné par le vecteur position  $\vec{r}$ :



- Unité physique (SI): mètre [ m ]

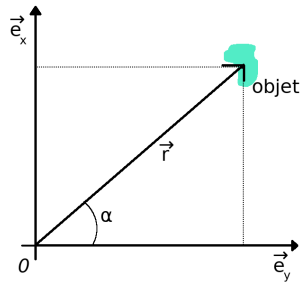
**Vecteur** Un vecteur possède 3 propriétés fondamentale:

- Direction
- Sens
- Norme

On le note par un symbole surmonté d'une flèche (manuscrit) ou en gras (caractère d'imprimerie)

Pour le vecteur position  $\mathbf{r}$ , la **direction** est la droite passant par  $O$  et l'objet, le **sens** est donné par le regard vers l'objet depuis  $O$  et la **norme** par la distance de  $O$  à l'objet.

- Le vecteur position  $\vec{r}$  peut être décomposé dans le repère orthonormé  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$



- Vecteur position  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot r \\ \sin(\alpha) \cdot r \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\text{où } r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$x$  et  $y$  sont les **composants** du vecteurs position  $\vec{r}$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

- Comme l'objet peut se déplacer au cours du temps, sa position peut changer.

### 2.3.2 Temps

Temps ( $t$  ou  $T$ ): grandeurs scalaire qui décrit l'évolution d'un système physique.

- Unité physique (SI): secondes [ s ]
- Comme un objet se déplace au cours du temps, son vecteur position est fonction du temps:  $\vec{r} \equiv \vec{r}(t)$
- Vecteur position à l'instant  $t$ :

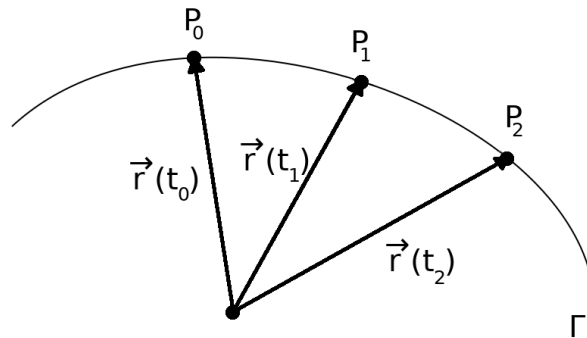
$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(\alpha(t)) \\ r(t) \cdot \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

- **Exemples:** horaires de train (Où? Quand?), GPS

### 2.3.3 Trajectoire

- Lieux géométrique des points de l'espace occupés par l'objet (point matériel) au cours du temps.

- Ensemble des points qui sont atteints par l'objet (courbe ou droite) représenté par  $\Gamma$



$$\Gamma = \{P | \exists t, \overrightarrow{OP} = \vec{r}(t)\}$$

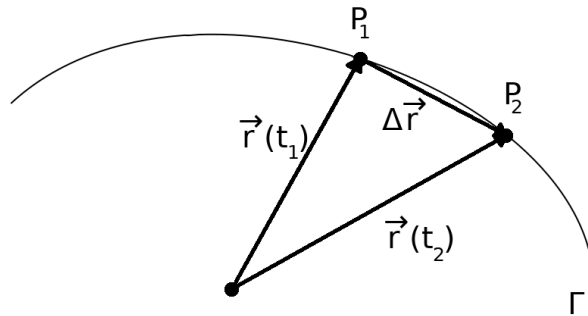
### Exemples

1. Droite (chute libre)
2. Cercle (electron dans un champ magnétique)
3. Parabole (projectile)
4. Ellipse (planète)
5. Hyperbole (astéroïde)

La trajectoire répond à la question "où?" sans se préoccuper de la question "quand?".

### 2.3.4 Déplacement

Le vecteur déplacement est la variation du vecteur position au cours du temps. On considère les position  $P_1$  et  $P_2$  d'un objet aux temps  $t_1$  et  $t_2$  où  $t_1 < t_2$ .



$$\vec{r}_1 + \Delta \vec{r} = \vec{r}_2$$

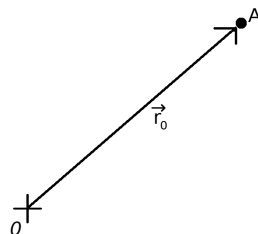
- Déplacement le long de

$$\Gamma : \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad (2.5)$$

- **Exemple:** Le vecteur déplacement  $\Delta \vec{r}$  entre Genève (position  $\vec{r}_1$ ) et Lausanne (position  $\vec{r}_2$ ) le long des voies le chemin de fer (trajectoire  $\Gamma$ )

#### Cas particuliers:

1. Objet immobile au point  $A$

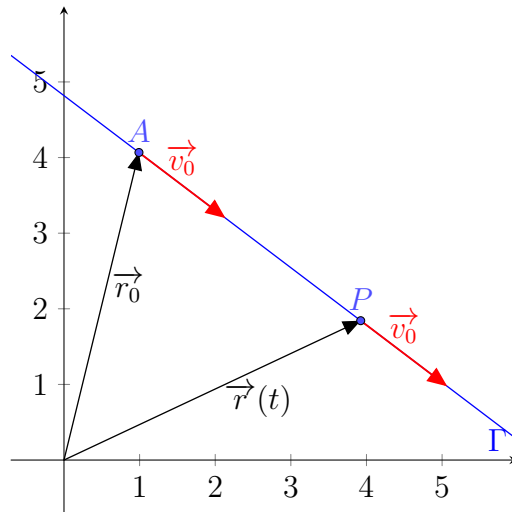


Vecteur position indépendant du temps  $t$ :

$$\vec{r}(t) = \vec{OA} = \vec{r}_0 = \text{cste} \quad \forall t \quad (2.6)$$



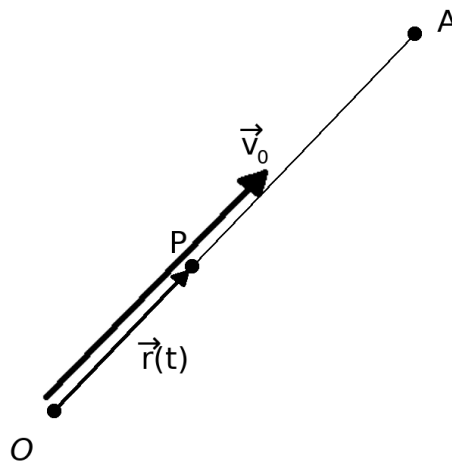
2. Objet qui avance régulièrement sur une droite  $\Gamma$  qui passe par un point  $A$  l'instant  $t_0$  :  $\vec{r}(t_0) = \vec{OA} = \vec{r}_0$



- Le vecteur déplacement  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$  est proportionnelle à sa durée  $\Delta t = t - t_0$
- Il existe un vecteur directeur  $\vec{v}_0$  de la droite tel que  $\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 \cdot \Delta t$ , ou encore

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0 \quad (2.7)$$

3. L'objet est dit en mouvement rectiligne uniforme (MRU)
4. Dans le plan, on donne l'origine  $O$  et un point  $A$ . Un objet se déplace de  $O$  à  $A$  entre  $t = 0$  et  $t = t_A$
5. On cherche à déterminer l'équation horaire  $\vec{r}(t)$  de l'objet en considérant que celui-ci passe en  $O$  à l'instant  $t = 0$ .



6. Conditions l'initiale et finale:  $\vec{r}(0) = \vec{0}$  et  $\vec{r}(t_A) = \vec{OA}$

7. Ainsi:

$$\vec{r}(t_A) = \vec{v}_0 \cdot t_A = \overrightarrow{OA} \implies \vec{v}_0 = \frac{\overrightarrow{OA}}{t_A} \quad (2.8)$$

8. Finalement,

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot t = \frac{t}{t_A} \cdot \overrightarrow{OA} \quad (2.9)$$

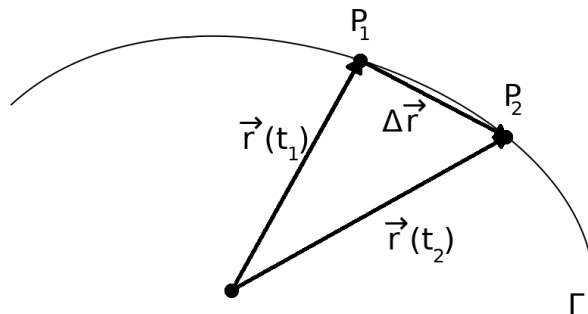
9. **Rencontre:** Lorsque deux objets se trouvent à la même position au même temps  $t_r$ , il y a rencontre

$$\exists t_r \vec{r}_1(t_r) = \vec{r}_2(t_r) \quad (2.10)$$

## 2.4 Vecteur vitesse

### 2.4.1 Vitesse moyenne

On considère un objet en position initiale  $P_1$  au temps initiale  $t_1$  et en position finale  $P_2$  au temps finale  $t_2$



- Position initiale:  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$
- Position finale:  $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$
- Déplacement:  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
- Intervalle de temps:  $\Delta t = t_2 - t_1$
- La **vitesse moyenne** ( $\overrightarrow{v_{moy}}$ ) de l'objet est définie comme le rapport entre le déplacement  $\Delta \vec{r}$  et l'intervalle de temps  $\Delta t$

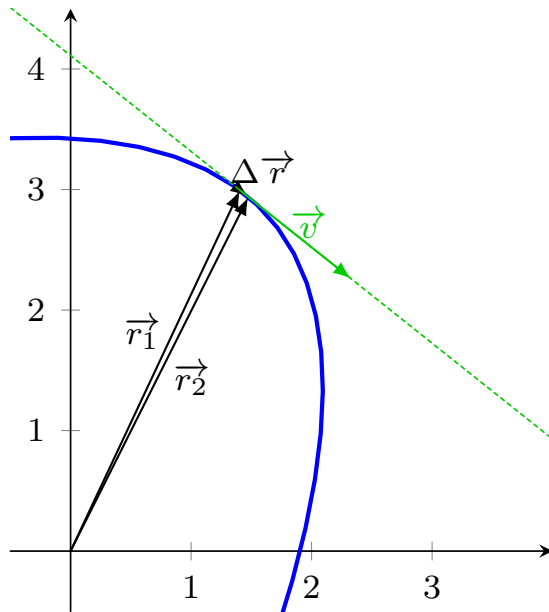
$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.11)$$

- Unité physique (SI): mètre par secondes [  $\frac{m}{s}$  ]

- La vitesse moyenne ne donne que la position finale  $\vec{r}_2$  par rapport à la position initiale  $\vec{r}_1$  et non les positions intermédiaires

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{v}_{moy} \cdot \Delta t \quad (2.12)$$

- C'est la vitesse constante qu'il faudrait maintenir pour faire le déplacement  $\Delta \vec{r}$  durant l'intervalle du temps  $\Delta t$ .



- Dans la limite où l'intervalle de  $\Delta t$  est très petit, le déplacement

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.13)$$

donne la direction et le sens de mouvement est juste après le temps  $t_1$ .

- Le déplacement  $\Delta \vec{r}$  devient vecteur directeur de la tangente à la trajectoire en  $\vec{r}_0$

- La **vitesse instantanée** ou **vitesse** de l'objet est définie comme la vitesse moyenne dans la limite d'un intervalle du temps infinitésimale.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \quad (2.14)$$

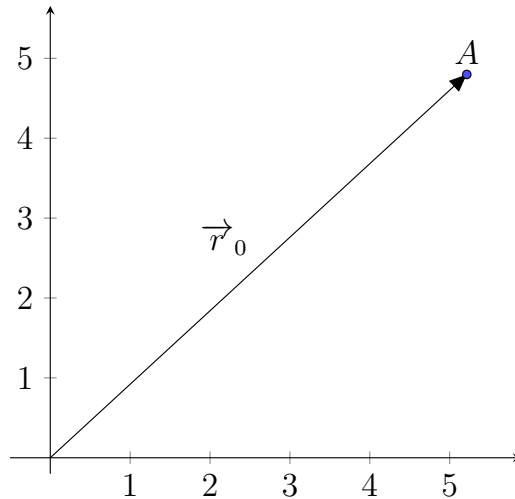
### Propriétés de la vitesse

6/03/2019

- Taux de variation de la position par rapport au temps (dérivée)
- Vector (direction, sens, norme)
- Tangente à la trajectoire dans le sens du mouvement

### Cas particuliers

1. Objet immobile qui se trouve au point A



Vecteur vitesse nulle (position constante):

$$\vec{v}(t) = \vec{0}, \quad \forall t \quad (2.15)$$

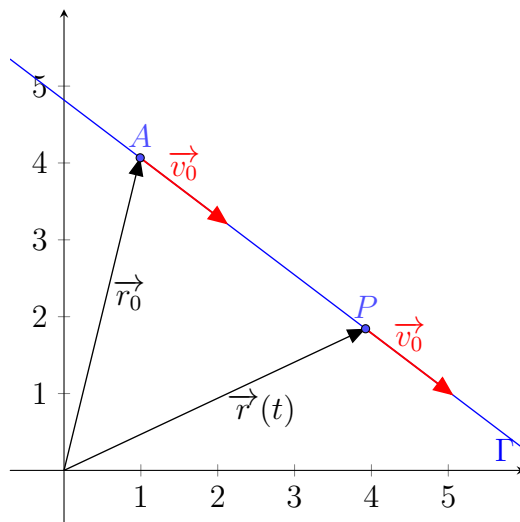
$$\text{car } \vec{r}(t) = \vec{OA} = \vec{r}_0 \quad (2.6)$$

**Vérification:**

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_0}{\Delta t} = \vec{0}$$

□

## 2. Objet qui avance à vitesse constante



- Vecteur de vitesse constant

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \overrightarrow{cste} \quad (2.16)$$

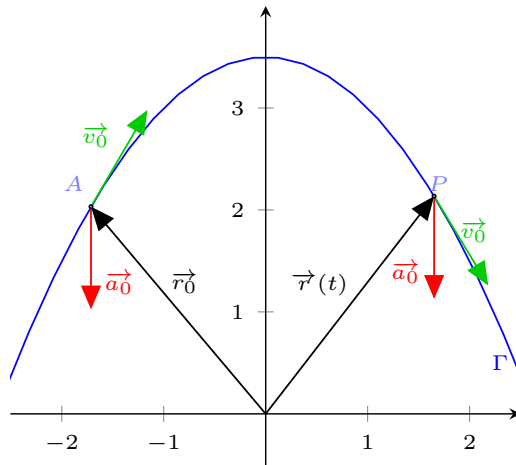
- Vitesse et vitesse moyenne identiques

$$\vec{r}(t) = \vec{V}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0 \quad (2.7)$$

Mouvement rectiligne uniforme à vitesse constante (MRU).

**Vérification**  $\vec{v}(t) \stackrel{(2.7)}{\stackrel{(2.14)}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t - t_0) + \vec{r}_0 - \vec{v}(t - t_0) - \vec{r}_0}{\Delta t} = \vec{V}_0$

3. Objet qui passe par A l'instant  $t_0$ , i.e.  $\vec{r}(t) = \vec{OA} = \vec{r}_0$ , avec une vitesse  $\vec{v}_0$ , et dont la vitesse change régulièrement.



- La variation de vitesse

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$$

est proportionnellement à la durée

$$\Delta t = t - t_0$$

- Il existe un vecteur  $\vec{a}_0$  tel que

$$\Delta \vec{v} = \vec{a}_0 \cdot \Delta t$$

Ainsi,

$$\vec{v}(t) = \vec{a}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{v}_0 \quad (2.17)$$

- Mouvement uniformément accéléré (MUA) (2.17)

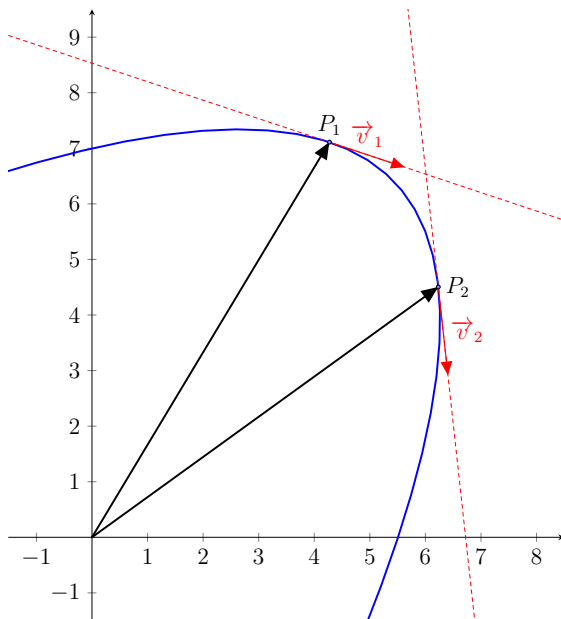
- Le vecteur position  $\vec{r}(t)$  s'écrit:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0 \quad (2.18)$$

## 2.5 Vecteur accélération

### 2.5.1 Accélération moyenne

On considère un objet en position initiale  $P_1$  au temps initiale  $t_1$  et en position finale  $P_2$  au temps finale  $t_2$ .



- Vitesse initiale:  $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$
- Vitesse finale:  $\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$
- Variation de vitesse:  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$
- Intervalle de temps:  $\Delta t = t_2 - t_1$

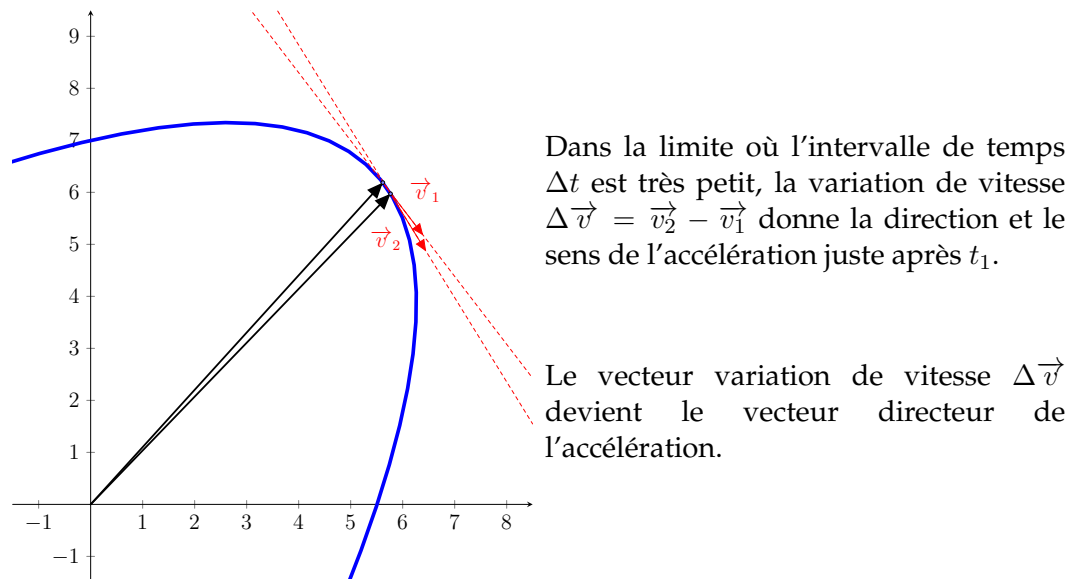
- L'accélération moyenne  $\vec{a}_{moy}$  est définie comme le rapport entre la variation de la vitesse  $\Delta \vec{v}$  et l'intervalle  $\Delta t$

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.19)$$

- Unité physique (SI): mètres par secondes  $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
- L'accélération moyenne donne que la vitesse finale  $\vec{v}_2$  par rapport à la vitesse initiale  $\vec{v}_1$  et non les vitesses intermédiaire

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a}_{moy} \cdot t \quad (2.20)$$

- C'est l'accélération constante qu'il faudrait maintenir pour effectuer une variation de vitesse  $\Delta \vec{v}$  en un intervalle de temps  $\Delta t$



- L'**accélération instantanée** ou **accélération** de l'objet est déterminé comme l'accélération moyenne dans la limite d'un intervalle de temps infinitésimale.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.21)$$

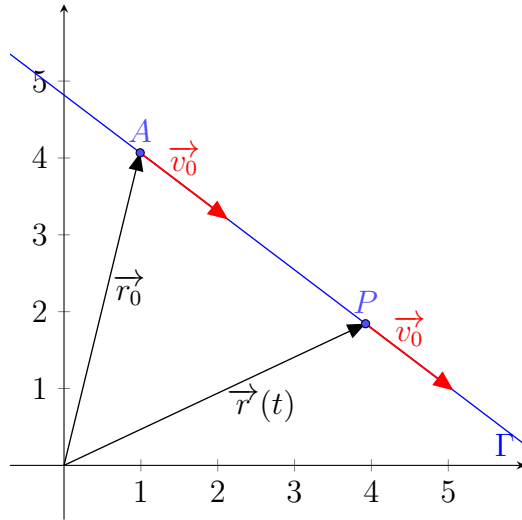
$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}(t) \quad (2.22)$$

### Propriétés de l'accélération

- Taux de variation de la variation vitesse par rapport au temps (dérivée)
- Vecteur (direction, sens, norme)
- Toujours dirigée vers l'intérieur de la trajectoire (courbe)
- Selon la tangente à la trajectoire le vecteur accélération va décrire un changement de norme du vecteur vitesse
- Selon la normale à la tangente: changement de direction du vecteur vitesse

## Cas particuliers

1. Objet qui avance à vitesse constante  $\vec{v}_0$  et qui passe par le point  $A$  à l'instant  $t_0$  :  $\vec{r}(t_0) = \vec{OA} = \vec{r}_0$ . La vitesse est constante (MRU) et donc l'accélération est nulle.

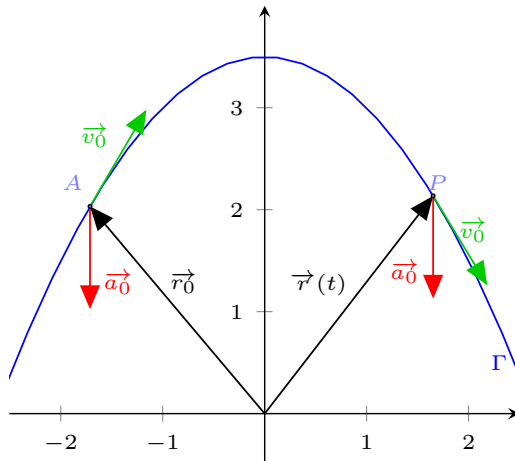


- $\vec{a}(t) = \vec{0}$
- $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$  (2.23)
- $\vec{r}(t) = \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0$

**Vérification:**  $\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\Delta t + t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_0 - \vec{v}_0}{\Delta t} = \vec{0}$

□

2. Objet qui passe par le point  $A$  à l'instant  $t_0$  :  $\vec{r}(t_0) = \vec{OA} = \vec{r}_0$  avec vitesse  $\vec{v}_0$  :  $\vec{v}(t_0)$  et dont l'accélération  $\vec{a}_0$  est constante.



- $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \text{cste}$
- $\vec{v}(t) = \vec{a}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{v}_0$  (2.24)
- $\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \cdot \vec{a}_0 \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0$

**Vérification:**

$$\vec{a}(t) \stackrel{(2.21)}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}_0 \cdot (t - \Delta t - t_0) + \vec{v}_0 - \vec{a}_0 \cdot (t - t_0) - \vec{v}_0}{\Delta t} = \vec{a}_0$$

□

On veut montrer que la trajectoire est une parabole d'axe verticale. On choisit l'origine  $O$  sur la trajectoire  $\Gamma$  et l'origine du temps  $t = 0$  lorsque l'objet passe en  $O$ . On prend  $\vec{e}_x$  perpendiculaire à  $\vec{a}_0$  et  $\vec{e}_y$  parallèle à  $\vec{a}_0$ .

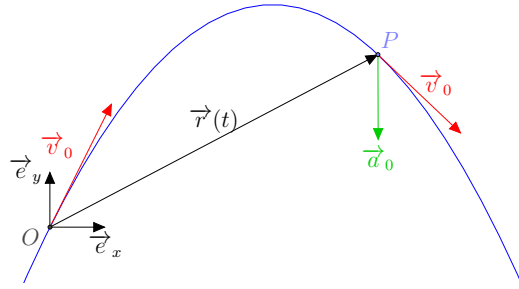
- Équation horaire:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{a}_0 \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t$$

$$\text{Selon } \vec{e}_x : x(t) = v_{0x} \cdot t \quad (2.25)$$

$$\text{Selon } \vec{e}_y : y(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t \quad (2.26)$$

$$(2.25) \Rightarrow t(x) = \frac{x}{v_{0x}} \quad (2.27)$$



(2.27)  $\rightarrow$  (2.26) : Équation de la trajectoire

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot \left( \frac{x}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0y} \cdot \frac{x}{v_{0x}} = -\frac{a_0}{2 \cdot v_{0x}} \cdot x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x \quad (2.28)$$

Cette expression du second degré en  $x$  décrit une parabole.

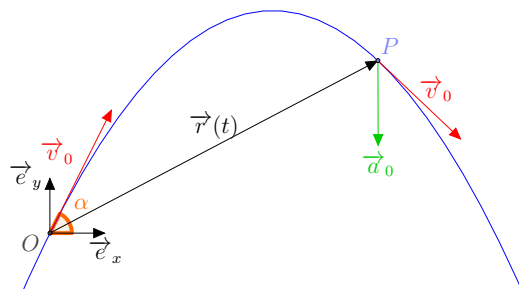
## 2.5.2 Tir au canon

On tire un obus avec vitesse initiale  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec le sol. On néglige les frottements de l'air. L'obus a une trajectoire balistique.

$$\vec{a}(t) = \vec{g} + c \vec{st} \vec{e} \quad (2.29)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0 \quad (2.30)$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t \quad (2.31)$$



où

$$\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_y$$

et

$$\vec{v}_0 = \underbrace{V_0 \cdot \cos(\alpha)}_{v_{0x}} \cdot \vec{e}_x + \underbrace{v_0 \cdot \sin(\alpha)}_{v_{0y}} \cdot \vec{e}_y$$

- Hauteur maximale  $h$  :  $\vec{v}_y(t_h) = 0$

$$\vec{V}_y(t_h) \stackrel{(2.30)}{=} -y \cdot t_h + \vec{v}_{0y} = 0 \Rightarrow t_h = \frac{\vec{v}_{0y}}{y} = \frac{\vec{v}_0 \cdot \sin(\alpha)}{y} \quad (2.32)$$

$$h = y(t_h) \stackrel{(2.31)}{=} -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_h^2 + \vec{v}_{0y} \cdot t_h \stackrel{(2.32)}{=} \frac{\vec{v}_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g} \quad (2.33)$$



- Temps de vol:  $y(t_v) = 0$

$$y(t_h) \stackrel{(2.31)}{=} -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_h^2 + \vec{v}_{0y} \cdot t_h = 0 \implies t_v \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_v + \vec{v}_{0y} \right) \\ \implies t_v = 0 \quad \text{ou} \quad t_v = \frac{2 \cdot \vec{v}_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot \vec{v}_0 \cdot \sin(\alpha)}{g} \quad (2.34)$$

7/03/2019

- Distance horizontale (portée):

$$d = x(t_v) \stackrel{(2.31)}{=} v_{0x} \cdot t_v = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g} \quad (2.35)$$

- Équation de la trajectoire  $\Gamma$ :

$$(2.28) : g(x) = -\frac{a_0}{2v_{0x}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x = -\frac{g}{2v_0 \cdot \cos^2(\alpha)} \quad (2.36)$$

- Point de la trajectoire  $P(x_p, y_p)$ : (où  $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$ )

$$(2.36) : y_p = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot (1 + \tan^2(\alpha)) \cdot x_p^2 + \tan(\alpha) \cdot x_p \\ \implies \frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} \cdot \tan^2(\alpha) - x_p \cdot (1 + \tan(\alpha)) + \frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} + y_p = 0 \quad (2.37)$$

C'est une équation du 2<sup>o</sup> degrés en  $\tan(\alpha)$  qui est fonction de la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  et des coordonnées  $x_p$  et  $y_p$  du point  $P$ .

- Discriminant de l'équation du 2<sup>o</sup> ordre en  $\tan(\alpha)$  (2.37)

$$\Delta = x_p^2 - 4 \cdot \frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} \cdot \left( \frac{g \cdot x_p^2}{2v_0^2} + y_p \right) = x_p^2 \cdot \left( 1 - \frac{2g}{v_0^2} \cdot \left( \frac{gx_p^2}{2v_0^2} + y_p \right) \right) \quad (2.38)$$

- On doit distinguer 3 cas:

1.  $\Delta > 0$ : il y a deux angles  $\alpha$  possibles (angles complémentaires). Le point  $P$  est à portée du canon avec deux trajectoires possibles.
2.  $\Delta = 0$  il y a un angle  $\alpha$  possible. Tous les points  $(x, y)$  vérifiant  $\Delta = 0$  se trouvent sur une parabole, dite de sécurité, d'équation.

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.39)$$

3.  $\Delta < 0$  : il n'y a donc pas d'angles de tir possible.  $P$  est au delà de la parabole de sécurité.