EPFL

MAN

Mise à niveau

Physique

PREPA-033

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sylvain BRÉCHET

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 5

Oscillateur harmonique

5.1 Évolution

Lorsque la force extérieure résultante $\overrightarrow{F}^{\text{ext}}$ exercée sur un objet est une force élastique $-k\overrightarrow{d}$, le mouvement de l'objet est un mouvement oscillatoire harmonique.

Afin de déterminer l'évolution d'un oscillateur harmonique on considère le mouvement d'un objet de masse m fixé à un ressort de constante k que glisse sous frottement d'une table.

On prend comme origine du repère O l'extrémité du ressort au repos.

Au repos, la force élastique est nulle, en compression est répulsante et en élongation elle est attractive.

Forces poids $m\overrightarrow{g}$, soutien de la table $\overrightarrow{S}$, force élastique $-k\overrightarrow{d}$

Loi du mouvement

$$m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{S} - k\overrightarrow{d} = m\overrightarrow{a} \tag{5.1}$$

Projectoins $\overrightarrow{g} = -g \cdot \overrightarrow{e_y}$; $\overrightarrow{S} = S \cdot \overrightarrow{e_y}$; $\overrightarrow{d} = x \cdot \overrightarrow{e_x}$; $\overrightarrow{a} = \ddot{x} \cdot \overrightarrow{e_x}$

$$\text{selon}\overrightarrow{e_x} : k - x = m\ddot{x} \tag{5.2}$$

$$\text{selon}\overrightarrow{e_y} : -mg + S = 0 \implies S = mg \tag{5.3}$$

Comme $m > 0$ et $k > 0$, on définit

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Ainsi,

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \tag{5.4}$$

où

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'évolution d'un mouvement oscillatoire harmonique est une équation du type:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) \tag{5.5}$$

Pour résoudre une telle équation, il faut spécifier la valeur initiale de la position et la vitesse de l'objet:

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad v(t_0) = \dot{x}(t) = v_0$$

La solution générale de cette équation s'écrit,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0(t - t_0)) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_0)) \tag{5.6}$$

On va à présent démontrer que la solution (5.6) satisfait l'équation du mouvement oscillatoire harmonique (5.5), compte tenu des conditions initiales (position, vitesse) en dérivant deux fois par rapport au temps.
Les dérivées des fonctions sinus et cosinus s'écrivent:

$$\frac{d}{dt}\sin(at+b) = a\cos(at+b) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\cos(at+b) = -a\sin(at+b)$$

Position (ici $a = \omega_0$ et $b = -\omega_0 t_0$)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0(t - t_0)) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_0)) \implies x(t_0) = x_0$$

Vitesse

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0(t - t_0)) + v_0 \cos(\omega_0(t - t_0)) \implies v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0$$

Accélération

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \cos(\omega_0(t - t_0)) - \omega_0 v_0 \sin(\omega_0(t - t_0))$$

Ainsi

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2\Big(x_0 \cos(\omega_0(t - t_0)) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_0))\Big) = -\omega_0^2 \cdot x(t)$$
$$\implies \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t)$$

□

En utilisant le changement de variables:

$$x_0 = A\cos(\varphi) \quad \text{et} \quad \frac{v_0}{\omega_0} = -A\sin(\varphi) \tag{5.7}$$

La solution générale du mouvement oscillatoire harmonique devient

$$x(t) = A(\cos(\omega(t - t_0))\cos(\varphi) - \sin(\omega_0(t - t_0))\sin(\varphi)) \tag{5.8}$$

Compte tenu de l'identité trigonométrique suivante:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

l'équation horaire de l'oscillateur harmonique (5.8) se réduit:

$$x(t) = A\cos(\omega_0(t - t_0) + \varphi) \tag{5.9}$$

où en inversant (5.7), on obtient

$$-\frac{A\sin(\varphi)}{A\cos(\varphi)} = -\tan(\varphi) = \frac{V_0}{\omega_0 x_0} \implies \varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \tag{5.10}$$

$$x_0 = A\cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}} = \frac{A}{\sqrt{1+\frac{v_0^2}{\omega_0^2 x_0^2}}} \implies A = x_0 \cdot \sqrt{1+\frac{v_0^2}{\omega_0^2 x_0^2}}$$

5.2 Caractéristique

La solution générale de l'oscillateur harmonique

$$x(t) = A\cos(\omega_0(t-t_0)+\varphi) \tag{5.9}$$

1. A: l'amplitude, unité $[m]$ (élongation ou compression max.)
2. T: période, unité $[s]$ (durée d'un cycle d'oscillation)

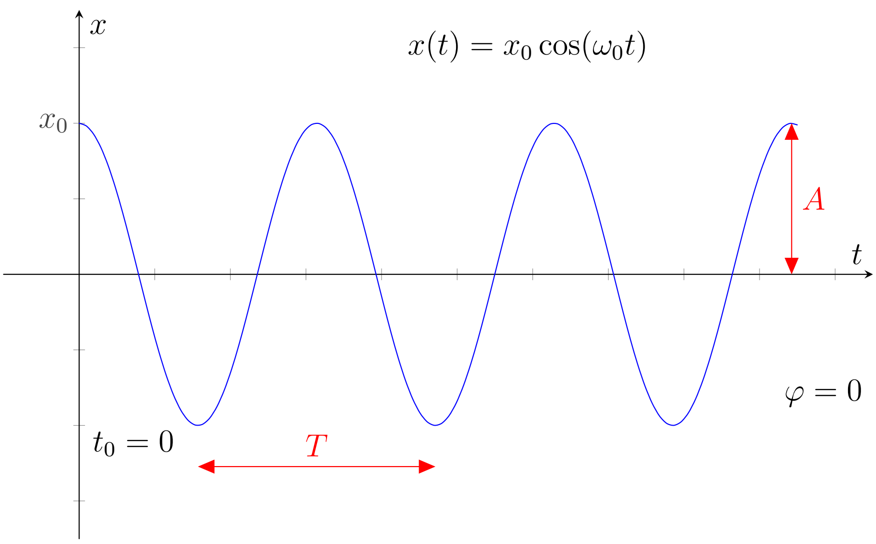
$$x(t+\pi) = x(t)\forall t \implies \omega_0 T = 2\pi$$

$$\implies T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

3. ν: fréquence, unité $[s^{-1}] = [Hz]$ (nombre de cycle par seconde)

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

4. ω_0 pulsation, unité $[s^{-1}]$
5. φ: angle de déphasage



5.2.1 Illustration

(déphasage $\varphi = 0$ et $t_0 = 0$)
Conditions initiales: $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$

Équation horaire $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

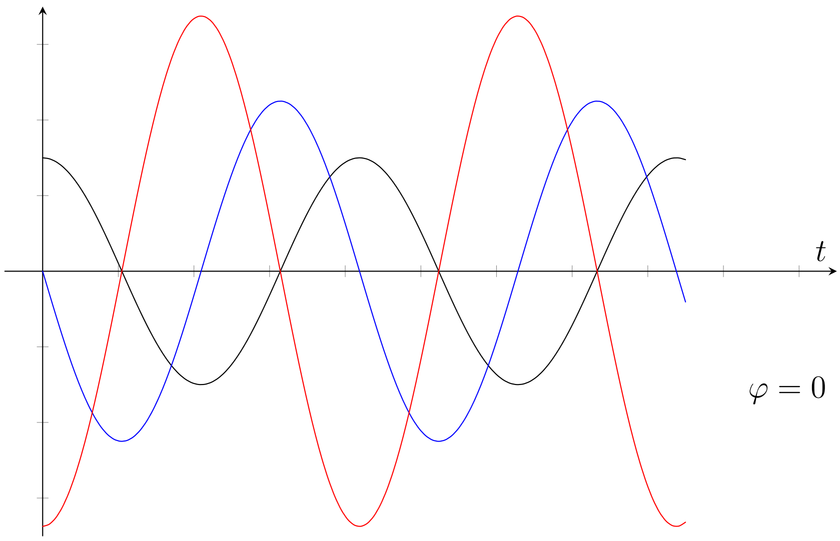
Équation de la vitesse $v(t) = \dot{x}(t) - \omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)$

Équation du mouvement $a(t) = \ddot{x}(t) - \omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t)$

$$x(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$



Exemple: Objet de masse m fixé à un ressort du constante élastique k laché sans vitesse initiale, i.e. $v_0 = 0$, d'une position initiale x_0

Conditions initiales $A = x_0; \varphi = 0 \quad$ et $t_0 = 0$

Équation horaire $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{x}} \tag{5.11}$$

Ainsi, plus la masse m est grande, plus la pédiode d'oscillation est longe. Plus la rigidité du ressort k est grande, plus la période d'oscillation est courte.

5.2.2 Pendule simple

Objet masse m

Loi du mouvement $m \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} = m \cdot \overrightarrow{a}$o

$$\text{selon } \overrightarrow{e_t} : -mg\sin(\alpha) = m\ddot{s} = mL\ddot{\alpha} \tag{5.12}$$

où

$$s = L\alpha \quad \nu = \dot{s} = L\dot{\alpha}$$

$$-mg\cos(\alpha) + T = m\frac{v^2}{L} = mL\dot{\alpha}^2 \tag{5.13}$$

$$\overset{(5.12)}{\Longrightarrow} \ddot{\alpha} = -\omega^2\sin(\alpha)$$

où

$$\omega^2 \equiv \frac{g}{L} \tag{5.14}$$

Il n'y a pas de solution analytique pour l'équation (5.14). Dans la limite des petits angles (i.e. $\alpha << 1$) alors $\sin(\alpha) \simeq \alpha$

$$(5.14) \implies \ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha \tag{5.15}$$

$\Longrightarrow$ Oscillateur harmonique

$$L\ddot{\alpha} = -\omega^2 L\alpha \implies \ddot{s} = -\omega s$$

Période d'oscillation:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \implies \tag{5.16}$$

5.3 Énergie mécanique

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Conservation d'énergie par unité de masse

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\omega_0^2x^2}_{U(x)} = \epsilon_0 \qquad \forall t \tag{5.17}$$

où $U(x)$ est l'énergie potentielle élastique et ϵ_0 l'énergie mécanique par unité de masse.

Pour ϵ_0 fixé, l'oscillateur a lieu autour de $x_{\text{éq}} = 0$ l'amplitude est $\frac{\sqrt{2\epsilon_0}}{\omega_0}$

Dans le plan $(x, \dot{x})$ (espace de phase) la conservation de l'énergie décrit une ellipse dont l'orbite passe par les points $(0, \pm\sqrt{2\epsilon_0})$ et $\left(\pm\frac{\sqrt{2\epsilon_0}}{\omega_0}, 0\right)$