EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2B

PREPA-032(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Simon BOSSONEY

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 7

Système d'équations différentielles et suites

Le signe du discriminant Δ_A du polynôme caractéristique $\mathcal{X}_A(\lambda)$ d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ nous a permis de trouver une base $B'_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\}$ par rapport à laquelle l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, représenté par A dans la base canonique $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1, e_2\}$, est représenté par une matrice $B = P^{-1}AP$ dans $B'_{\mathbb{R}^2}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

Diagramme de changement de base $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2(B_{\mathbb{R}^2}) & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2(B_{\mathbb{R}^2}) \\ P\big\uparrow & & \big\downarrow P^{-1} \\ \mathbb{R}^2(B'_{\mathbb{R}^2}) & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^2(B'_{\mathbb{R}^2}) \end{array} \qquad B = P^{-1}AP$$

Il faut distinguer 3 cas:

1. $\underline{\Delta_A > 0}$: v_1 et v_2 sont vecteurs propres de f valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \det(A) = \det(B) = \lambda_1\lambda_2 \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 \end{array}$$

2. $\underline{\Delta_A = 0}$: il faut distinguer 2 sous-cas:

   (a) $A = \lambda_1 I_2$: λ_1 est valeur propre et les vecteurs, e_1 et e_2 sont vecteurs propres.

   (b) $A \neq \lambda_1 I_2$: il y a une seule valeur propre λ_1 associée au vecteur v_1. Comme il n'y a pas de deuxième vecteur propre, v_2 n'est pas un vecteur propre. Donc B exprimée dans la base $B'_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\}$ est une matrice triangulaire. On peut choisir v_2 tel que

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \det(A) = \det(B) = \lambda_1^2 \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 2\lambda_1 \end{array}$$

3. $\underline{\Delta_A < 0}$: Il n'y a pas de valeur propre ne de vecteur propre. On peut choisir une base $B'_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\}$ telle que l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est représentée par une matrice B

$$B = \sqrt{\det(A)} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où $\theta \in (0, \pi)$ et $\cos(\theta) = \frac{\text{tr}(A)}{2\sqrt{\det(A)}}$ ainsi

$$\det(A) = \det(B) \qquad \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$$

7.1 Équation différentielles linéaires homogènes

On va à présent résoudre un système de deux équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants et une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants.

Définition Soit $f(t) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^n(D)$. Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants s'écrit:

$$a_n f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + ... + a_2 f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0$$

où $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des coefficients réels constants.

7.1.1 Système d'équations différentielles

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions de classe $C^1(\mathbb{R})$. Le système d'équations différentielles linéaires homogènes du premier à ordre coefficients constants s'écrit:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) & \text{où } x(0) = x_0 \quad \text{et } y(0) = y_0 \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) & \text{et} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on définit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique

$$B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1, e_2\} \qquad \text{par la matrice} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax(t) + by(t) \\ cx(t) + dy(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

On cherche $\Delta_A = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A)$. En fonction du signe de Δ_A, on peut alors représenter l'application linéaire f par une des trois matrices $B = P^{-1}AP$ données précédemment.

Le vecteur solution

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

dans la base $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1, e_2\}$ correspond au vecteur

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

dans la base $B'_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\}$

Ainsi, compte tenu de $v_1 = v_1(e_1, e_2)$ et $v_2 = v_2(e_1, e_2)$:

$$x(t)e_1 + y(t)e_2 = u(t)v_1(e_1, e_2) + v(t)v_2(e_1, e_2)$$

$$\Longrightarrow \; x(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u(t) \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} + v(t) \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbb{R}^2(B'_{\mathbb{R}^2}) \xrightarrow{P} \mathbb{R}^2(B_{\mathbb{R}^2})$$

La matrice P^{-1} s'écrit:

$$P^{-1} = \frac{1}{v_{11}v_{22} - v_{21}v_{12}} \begin{pmatrix} v_{22} & -v_{12} \\ -v_{21} & v_{11} \end{pmatrix}$$

$$\implies = \underbrace{\frac{1}{v_{11}v_{22} - v_{21}v_{12}} \begin{pmatrix} v_{22} & -v_{12} \\ -v_{21} & v_{11} \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Pour exprimer le système d'équations différentielles dans la base $B'_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\}$, on fait un changement de base

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{P^{-1}AP}_{=B} P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

On résout ensuite le système dans cette base, puis on fait un changement de base inverse pour trouver les solutions dans la base canonique $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1, e_2\}$

Exemple Soit le système suivant

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 9y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad x(0) = -4 \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$

On me le système sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\text{tr}(A) = 2$ et $\det(A) = 1$. Par conséquent,

$$\Delta_a = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0$$

Il existe une base $\{v_1, v_2\}$ telle que B s'écrit,

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver la base, on résout le système:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{l} 4v_{11} + 9v_{21} = v_{11} \\ -v_{11} - 2v_{21} = v_{21} \\ 4v_{11} + 9v_{21} = v_{11} + v_{12} \\ -v_{11} - 2v_{21} = v_{21} + v_{22} \end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{l} v_{11} = -3v_{21} \\ v_{11} = 3v_{12} + 9v_{22} \end{array}\right. \xRightarrow[\text{possible}]{\text{base}} \left\{\begin{array}{l} v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \det(P) = 1; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\implies \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Conditions initiales:

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Système d'équations différentielles:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Système d'équations différentielles:

$$\left\{\begin{array}{l} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = v(t) \end{array}\right. \quad \text{où} \quad u(0) = v(0) = 1$$

$v(t)$ est obtenu par intégration de $\tau = 0$ à $\tau = t$,

$$\int_0^t \frac{v'(t)}{v(t)} dt = \int_0^t dt$$

$$\implies \ln\left(\frac{v(t)}{v(0)}\right) = t \implies v(t) = \underbrace{v(0)}_{=1} e^t = e^t$$

Ainsi,

$$u'(t) = u(t) + e^t \implies \left(u(t)e^{-t}\right)' = 1$$

En effet,

$$\left(u(t)e^{-t}\right)' = u'(t)e^{-t} - u(t)e^{-t} = 1$$

$u(t)$ est obtenu par intégration de $\tau = 0$ à $\tau = t$,

$$\int_0^t (u(t)e^{-t})' dt = \int_0^t dt$$

$$\implies u(t)e^{-t} - \underbrace{u(0)e^{-0}}_{=1} = t \implies u(t) = (1+t)e^t$$

Solutions dans la base canonique $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1, e_2\}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4-3t)e^t \\ (1+t)e^t \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x(t) = (-4-3t)e^t \\ y(t) = (1+t)e^t \end{cases} \qquad \text{et} \quad x(0) = -4, \quad y(0) = 1$$

7.1.2 Équation différentielle du deuxième ordre

Soit une fonction $f(t)$ de classe $C^2(\mathbb{R})$ qui est solution de l'équation différentielle du deuxième ordre,

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0 \qquad \begin{array}{l} \text{où} \quad a, b \in \mathbb{R} \\ \text{et} \quad x(0) = x_0; \quad x'(0) = y_0 \end{array}$$

On peut définir une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$

$$y(t) \equiv x'(t)$$

Résoudre l'équation différentielle du deuxième ordre revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -bx(t) - ay(t) \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{array}$$

On met le système sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

où tr$(A) = -a$ et $\det(A) = b$

La résolution de système se fait de manière analogue.

7.2 Système de suites numériques linéaires

Définition: Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linéaire d'ordre p définie par la relation de récurrence:

$$u_{n+p} = a_{p-1} + u_{n+p-1} + ... + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n \qquad \begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N} \\ a_0, ..., a_p \in \mathbb{R} \end{array}$$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques linéaires. Ces suites vérifient le système:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + bv_n \\ v_{n+1} = u_n + dv_n \end{cases} \qquad \text{où} \qquad u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad v_0 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre ce système, on définit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1, e_2\}$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Il existe une base $B'_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\}$ par rapport à laquelle l'application linéaire f est représentée par la matrice B. Dans cette base,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

7.2.1 Suite numérique linéaire d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un suit numérique linéaire d'ordre 2:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + bu_n \qquad \text{où} \qquad u_0 = \alpha, u_1 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Cette suite peut être exprimée matriciellement comme:

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Il existe une base $B'_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\}$ par rapport à laquelle l'application linéaire f est représentée par la matrice B. Dans cette base,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = P^{-1}A^nP \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$