

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 1B  
PREPA-033(B)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Olivier WORINGER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Chapter 3

## Calcul différentiel

### 3.1 Dérivée d'une fonction

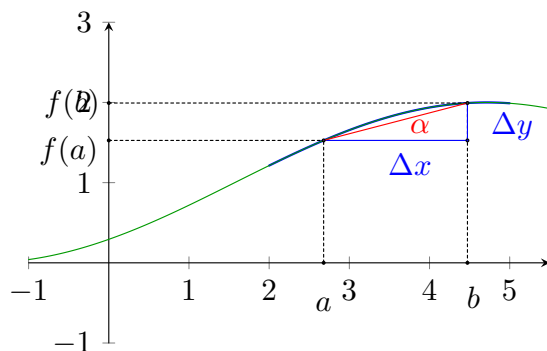
#### 3.1.1 Définitions

Soit  $f$  définie sur un voisinage de  $x_0$ , posons  $y = f(x)$ . Une information **locale** sur le comportement de  $f$  sur un voisinage de  $x_0$  est donné par le quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

appelé le rapport de Newton de  $f$  en  $x_0$ .

- $\Delta x$  est l'accroissement de la variable indépendante  $x$ .
- $\Delta y$  est l'accroissement correspondant liée à  $\Delta x$ .



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha) \text{ est la pente}$$

de la sécante passant par  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$

En gardant  $x_0$  fixe, on fait tendre  $\Delta x \rightarrow 0$

Alors

$$x_0 + \Delta x \rightarrow x_0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$$

si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

est une FI de type " $\frac{0}{0}$ "

Trois cas peuvent se présenter

1.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  n'existe pas

**Exemple:**

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$2. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

**Exemple:**

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}, \quad x_0 = 0$$

$$3. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = 4$$

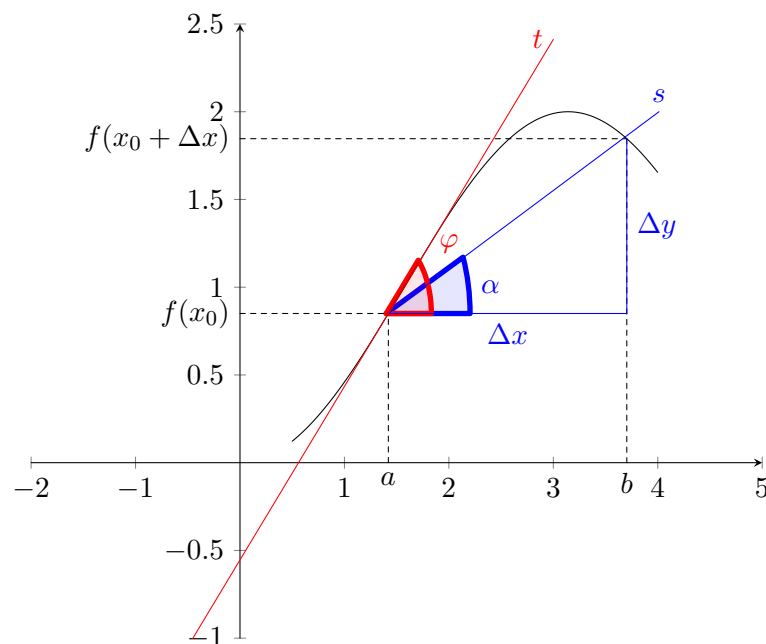
**Définition:** Soit  $f$  définie sur un voisinage de  $x_0$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$ . Si

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existe et on note  $f'(x_0)$  cette limite.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

est appelé **nombre dérivé** de  $f$  en  $x_0$



La sécant  $s$  tends vers la "droite-limite"  $t$ .

$$\alpha \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \varphi$$

Cette "droite-limite" est appelée la tangente à

$$y = f(x_0) \text{ en } x_0$$

La pente  $m$  de la tangente vaut

$$m = \tan(\varphi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Donc l'équivalente de  $t$  s'écrit

**Tangente de  $y = f(x)$**

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

**Théorème:** Soit  $f$  définie sur un voisinage de  $x_0$ . Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0$$

**Démonstration**  $f$  est dérivable en  $x_0$  donc

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= f'(x_0) \\ \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left( \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)}_{:=r(\Delta x)} &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta x) = 0$$

et

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x)$$

Et lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$ , on a

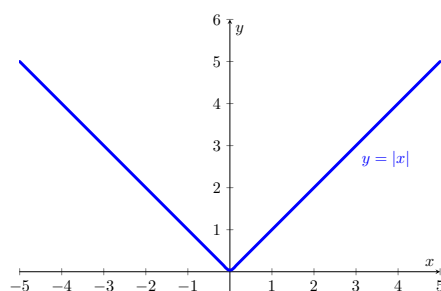
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot f'(x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \overbrace{r(\Delta x)}^{\rightarrow 0}}_{\rightarrow 0}$$

$f$  est donc continue en  $x_0$

□

⚠ La réciproque est fausse ⚠

**Contre-exemple**



$$f(x) = |x|, \quad x_0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad |x| \Big|_{x=0} = 0$$

donc  $|x|$  est continue en  $x = 0$

Mais

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

n'existe pas donc  $f(x) = |x|$  n'est pas dérivable en  $x \rightarrow 0$ .

**Définitions:**

- On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$ , si

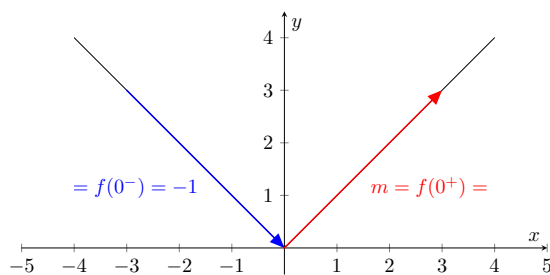
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, on note ce nombre  $f'(x_0^-)$  et il représente la pente de la demi-tangente à gauche en  $x_0$ .

- de même  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$ , si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe,  $f'(x_0^+)$  et il représente la pente de la demi-tangente à droite en  $x_0$ .

**Exemple:**

$$f(0^-) = -1$$

$$f(0^+) = +1$$

**Définitions:** Si  $I \subset \mathbb{D}_f$ 

- Si  $f$  est dérivable en tout  $x_0 \in I$ , on définit:

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

appelé la fonction dérivée de  $f$  sur  $I$ .

- Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , et si  $f'$  est continue sur  $I$ , alors on dit que  $f$  est continument dérivable sur  $I$  et on note  $f \in \mathbb{C}^1$

**3.1.2 Règles de dérivation**

(C.f. exercice facultatif série 8)

Soient  $f$  et  $g$  dérivable sur  $I \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Si  $g(x) \neq 0, \forall x \in I$

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

En particulier

$$\left( \frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

**Théorème:** Dérivée de la composée

Soit  $f$  dérivable en  $x_0$  et  $g$  dérivable en  $f(x_0)$ . Alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et

**Dérivée de la composée**

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

**Démonstration**

- Rappel:

$$\begin{aligned} r(\Delta x) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \\ \implies f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot r(\Delta x) \end{aligned}$$

avec

$$r(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

- Dérivée  $g \circ f(x)$

$$\begin{aligned} g \circ f(x + h) &= g(f(x + h)) \\ &= g(f(x) + \underbrace{f(x + h) - f(x)}_{=\Delta}) \\ &= g(f(x)) + g'(f(x)) \cdot \underbrace{(f(x + h) - f(x))}_{=\Delta} + r(f(x + h) - f(x)) \cdot \underbrace{(f(x + h) - f(x))}_{=\Delta} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + r(f(x + h) - f(x)) \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x) + \underbrace{r(f(x + h) - f(x))}_{\rightarrow 0} \cdot f'(x_0)$$

D'où

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

### 3.1.3 Dérivées de quelque fonctions

1.  $f(x) = c$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

2.  $f(x) = x$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$

3.  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$   $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$  à démontrer par récurrence

- Vérification pour  $n = 1$ :

$$(x)' = 1 \text{ et } n \cdot x^{n-1} \Big|_{n=1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

- Démonstration du pas de récurrence:

**Hypothèse:**  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$  pour un  $x \in \mathbb{N}^*$  donné

**Conclusion:**  $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$

**Preuve:**

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (x^n)' \\ &= x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n\end{aligned}$$

4.  $f(x) = x^{-m}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \neq 0$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{m \cdot x^{m-1}}{(x^m)^2} \\ &= -m \cdot x^{m-1-2m} = -m \cdot x^{-m-1}\end{aligned}$$

Donc  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$

5.  $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $x > 0$

$$y = x^{\frac{p}{q}} \iff y^q = x^p$$

En dérivant les deux termes par rapport à  $x$ , on a

$$\begin{aligned}q \cdot y^{q-1} \cdot y' &= p \cdot x^{p-1} \\ y' &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot y}{y^{q-1} \cdot y} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$

Donc

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad x > 0$$

En particulier

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

**Exemples:**

1. Soit  $f$  une fonction

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 1]$$

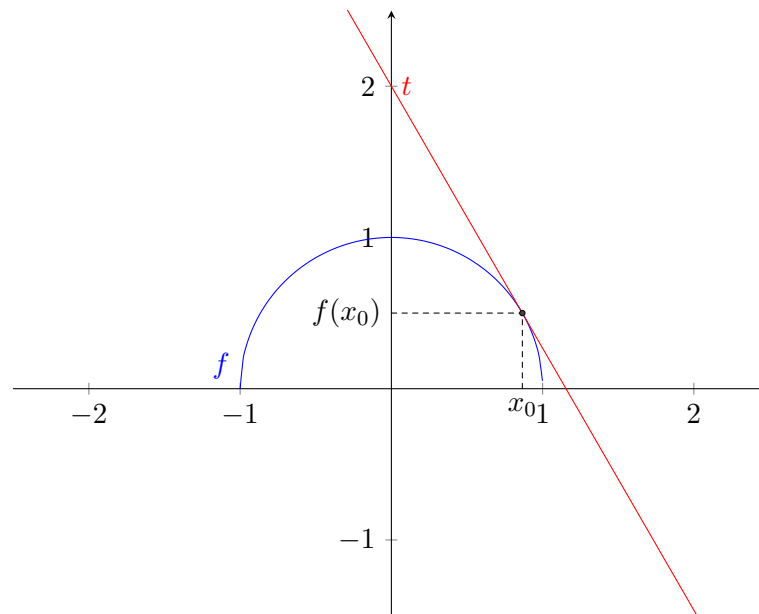
L'équation de  $t$  tangente à  $y = f(x)$  en  $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- $f(x_0) = \frac{1}{2}$
- $f'(x) = \frac{(-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq \pm 1$

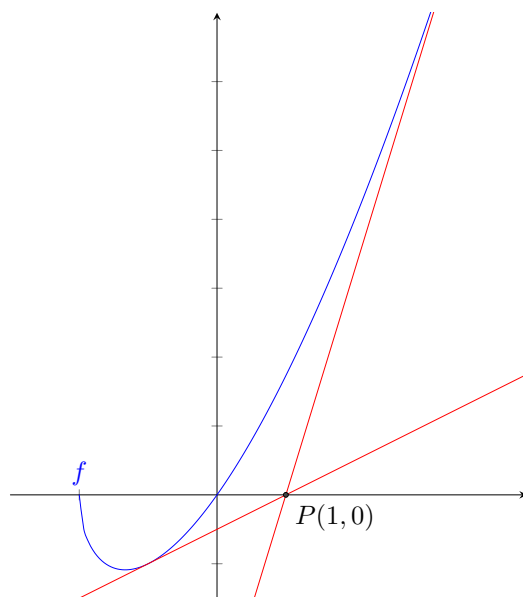
$$f'(x_0) = f'(x) \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$t : y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



2.  $f(x) = x \cdot \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$

Tangente au graphe de  $f$  issues du point  $P(1, 0)$



$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$P \in t \implies y_p - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_p - x_0)$$

$$\implies 0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0)$$

$$\text{avec } f(x_0) = x_0 \cdot \sqrt{2 + x_0},$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2+x} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \\ &= \frac{2 \cdot (2+x) + x}{2 \cdot \sqrt{2+x}} = \frac{3x+4}{2 \cdot \sqrt{2+x}}, \quad x \geq -2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} -x_0 \cdot \sqrt{2+x_0} &= \frac{3x_0+4}{2 \cdot \sqrt{2+x_0}} \cdot (1-x_0) \\ \iff -2x_0(2+x_0) &= 3x_0+4-3x_0^2-4x_0 \\ \iff x_0^2-3x_0-4 &= 0 \iff (x_0-4) \cdot (x_0+1) = 0 \\ x_0 = -1 : \quad t : y+1 &= \frac{1}{2}(x+1) \\ x_0 = 4 : \quad t : 8x - \sqrt{6}y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

### 3.1.4 Dérivée d'ordre supérieure

Soit  $f$  dérivable sur  $I$ , si  $f'$  est dérivable sur  $I$ , on peut dériver  $f'$  sur  $I$  et on note

$$(f')' = f''$$



et ainsi de suite

$$(f'')' = f'''$$

etc.

### Définition par récurrence:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad n \in \mathbb{N}^*$$

avec  $f^{(0)}(x) = f(x)$

### Exemples:

1.  $f(x) = x^p, \quad p \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1) & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

2.  $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f^{(3)}(x) = \sin(x), \quad f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

### Conjecture:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

### Définition par récurrence:

- Vérification:

- $n = 0$  :  $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=0} = f^{(0)}(x)$

- $n = 1$  :  $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{n=1} = -\sin(x) = f'(x)$

- Démonstration du pas de récurrence:

- Hypothèse:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pour un } n \in \mathbb{N} \text{ donné}$$

- Conclusion:

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

- 

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = \left[\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \\ &= \cos'\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)' = \\ &= -\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = \cos\left(x + \left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

□

**Remarque:** Si  $f$  est  $n$ -fois dérivable sur  $I$  et si  $f^{(n)}(x)$  est continue sur  $I$ , alors on note

$$f \in \mathbb{C}_I^n$$

**Exemple:**

$$\cos(x) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}$$

## 3.2 Différentielles et approximations linéaires

### 3.2.1 Différentielles

**Définitions:**

- La différentielle de la variable indépendante  $x$ , notée  $dx$  est l'accroissement infinitésimal de cette variable

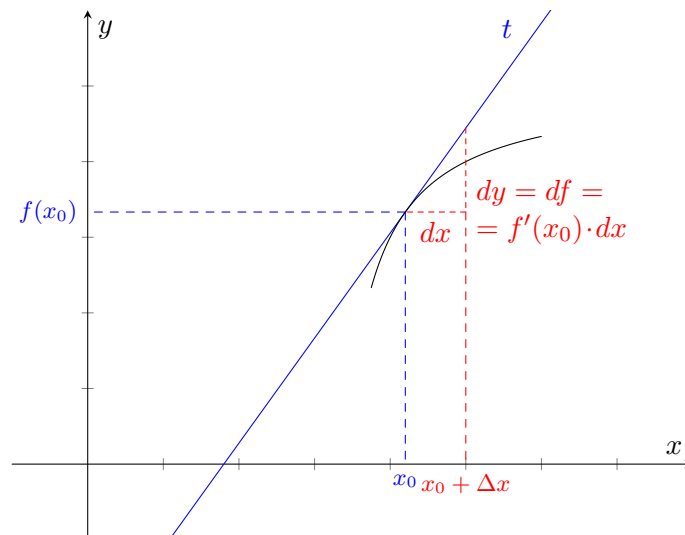
$$dx = \Delta x, \quad (\text{lorsque } \Delta x \rightarrow 0)$$

- La différentielle de la variable dépendante  $y$  (ou de la fonction  $f$ ), notée

$$dy \text{ ou } df$$

en  $x_0$  est la fonction linéaire de  $dx$  définie par

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$



La différentielle  $dy$  en  $x_0$  est l'accroissement des  $y$  correspondant à  $dx$ , mesuré sur la tangente au graphe de  $f$  en  $x_0$ .

La définition des différentielles induit la notation de Leibniz

$$dy = f'(x_0) \cdot dx \implies \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

### 3.2.2 Approximation linéaire

**Rappel** Soit  $f$  dérivable en  $x_0$  On a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h)$$

avec

$$r(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$$

Donc si  $h \rightarrow 0$ ,

$$\underbrace{h}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{r(h)}_{\rightarrow 0}$$

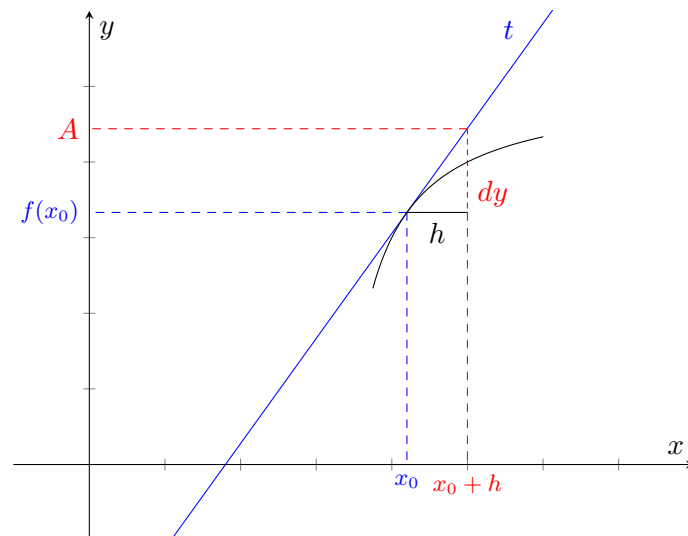
est négligeable et

$$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

La quantité

$$A = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

est appelé l'**approximation linéaire** de  $f$  en  $x_0$



$A$  est l'ordonnée correspondant à  $x_0 + h$  mesurée sur la tangente en  $x_0$

**Exemple:** Évaluation de  $\sqrt[3]{8.012}$  On détermine l'AL de  $\sqrt[3]{8.012}$  en  $x_0 = 8$

$$h = 0.012, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$A = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

$$f(x_0) = f(8) = 2$$

$$f'(x_0) = f'(8) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{x^2}} \Big|_{x=8} = \frac{1}{12}$$

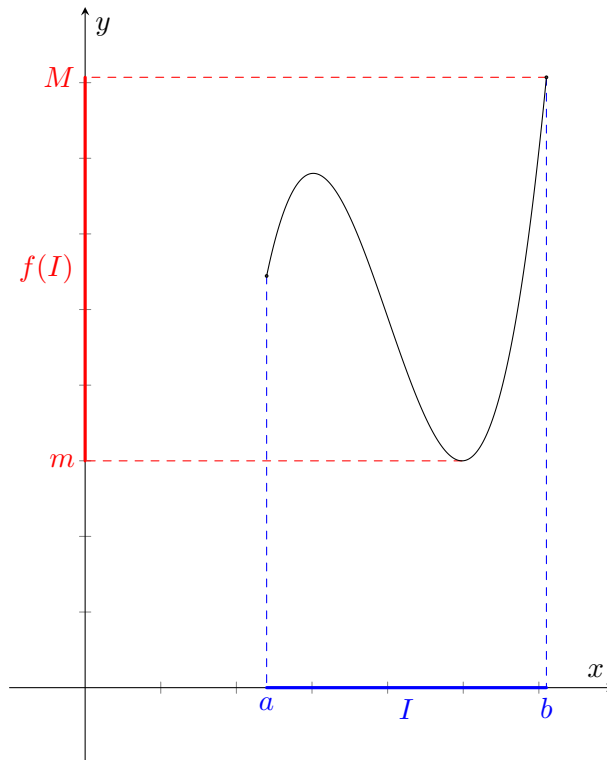
$$A = 2 + 0.0012 \cdot \frac{1}{12} = 2.001$$

### 3.3 Théorème des accroissements finis

#### 3.3.1 Préliminaire (sans démonstration)

Soit  $f$  continue sur  $[a; b] = I$

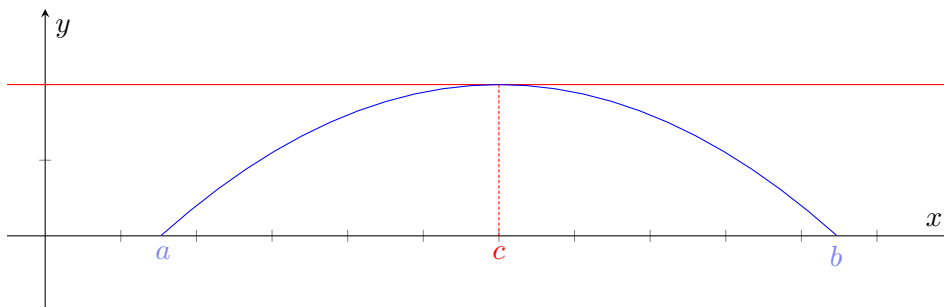
1. L'image de  $I$  par  $f$  est un intervalle fermé
2.  $f$  atteint sur  $I = [a; b]$  son minimum et son maximum ( $f(I) = [m, M]$ )



#### 3.3.2 Théorème de Rolle

Soit  $f$  continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$ . Si  $f(a) = f(b) = 0$ , alors

$$\exists c \in ]a; b[ \text{ t.q. } f'(c) = 0$$



**Démonstration:**

- Si  $f(x) \equiv 0$  sur  $[a; b]$ , alors le théorème est vérifié
- Si  $f(x) \not\equiv 0$ ,  $f(x)$  prend des valeurs positives ou négatives, on suppose que  $a$  et  $b$  sont