EPFL

MAN
Mise à niveau

Maths 1B
PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 2

Fonctions réelles d'une variable réelle

2.1 Définitions

Définition:

$$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

est une fonction réelle d'une variable réelle si tout $x \in A$ a au plus une image par f dans $\mathbb{R}$, notée $f(x)$
L'ensemble des $x \in A$ ayant une image par f est le domaine de définition de f : D_f
On note Im_f l'ensemble des $f(x) \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Im}_f = \left\{ y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathrm{D}_f, y = f(x) \right\}$$

Exemples

1.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \mathrm{D}_f = \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{Im}_f = \mathbb{R}_+$$

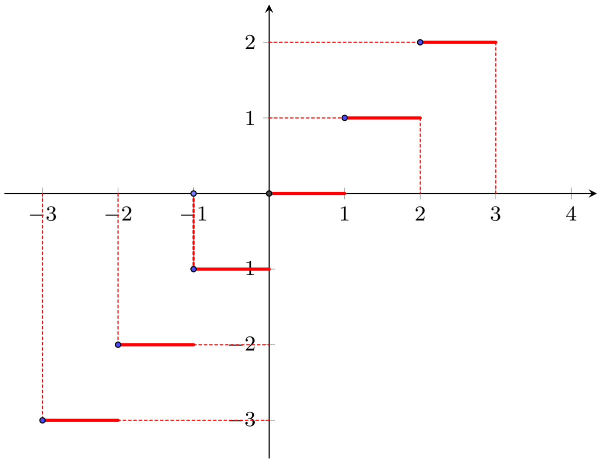
2.

$$\begin{aligned} g :& \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto E(x) \end{aligned}$$

où $E(x)$ est la partie entière de x, c'est le plus grand entier inférieur à x:

Exemples

$$E(3) = 3, \quad E(2.9) = 2, \quad , E(-2.5) = -3$$



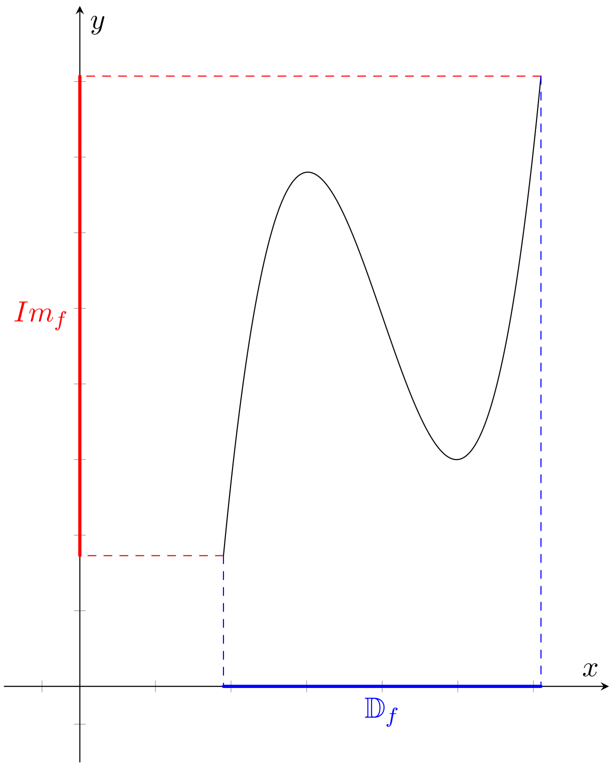
$$\mathrm{D}_g = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}_f = \mathbb{Z}$$

3.

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\mathrm{D}_2 = \mathbb{R} \backslash 1, \quad \mathrm{Im}_h =]0, +\infty[$$

Le graphe de f : G_f



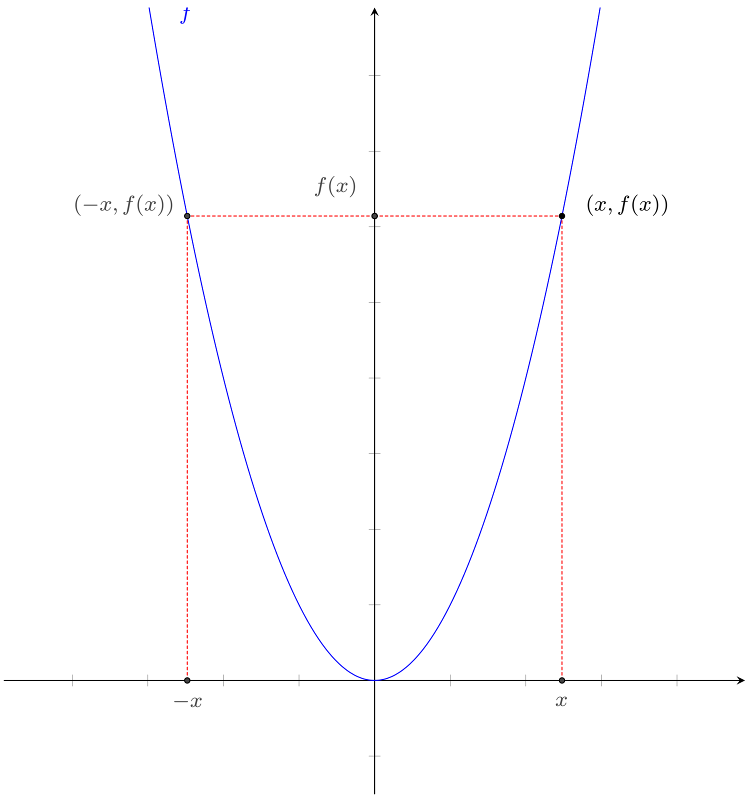
Definitions

1. **Parité** (y symétrique par rapport à O)

   (a) f est paire si

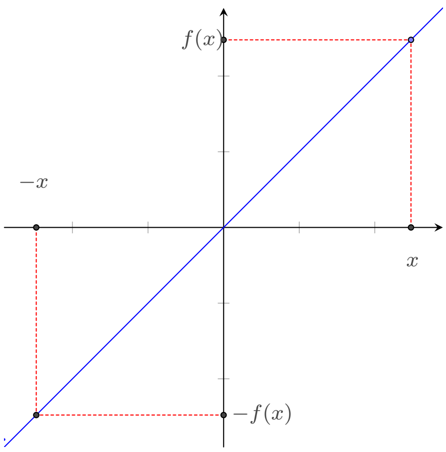
   $$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathrm{D}_f$$

   Le graphe de f est alors symétrique $/O_y$



   (b) f est impaire si

   $$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathrm{D}_f$$



Le graphe de f est alors symétrique $/0$

Exemples

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = |x|, \quad f_3(x) = \cos(x), \qquad \text{sont paires,}$$

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = \sin(x), \quad f_3(x) = \tan(x), \qquad \text{sont impaires.}$$

2. **Périodicité**

   f est périodique en $T \in \mathbb{R},$ si $\forall x \in D_f, \quad f(x+T) = f(x)$

   G_f période de f est le plus petit $T > 0$ tel que

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Exemples

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$\sin$ et $\cos$ sont 2π-périodique.
Donc f est est 2π-périodique.
Or $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$

Donc **la** période de f est $T = \pi$:

$$\begin{aligned} f(x+T) &= \frac{1}{2} \cdot \sin\big(2 \cdot (x+T)\big) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin(2x + \underbrace{2T}_{\text{période de sinus}}) \end{aligned}$$

$$2T = 2\pi \iff T = \pi$$

3. Monotonie

   (a) f est croissante si $\forall x_1, x_2 \in D_f$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

   Strictement croissante si

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

   (b) f est décroissante si $\forall x_1, x_2 \in D_f$:

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

   Strictement croissante si

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

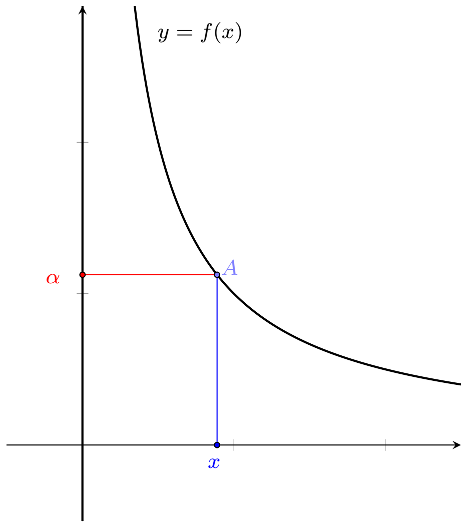
   (c) f est monotone si elle est croissante ou (exclusif) décroissante.

Exemples $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et non-monotone sur $\mathbb{R}$.

Théorème Si f strictement monotone, alors l'équation:

$$f(x) = \alpha, \quad x \in \mathbb{R}$$

admet au plus une solution:



Demonstration dans ce cas:

$$f: \text{ strictement croissante } \implies f(x) = \alpha$$

admet au plus une solution

Demonstration par la contraposée:

Hypothèse: $f(x) = \alpha$ admet plus d'une solution

Conclusion: f non strictement croissant

Preuve: Soient $x_1 \neq x_2 \in D_f$ t.q. $f(x_1) = f(x_2) = \alpha$

Soit x_1 la plus petite, on a:

$$x_1 < x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)$$

f est non strictement croissante.

$\square$

4. Valeur absolue de f, soit:

$$\begin{aligned} f : D_f &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

on définit

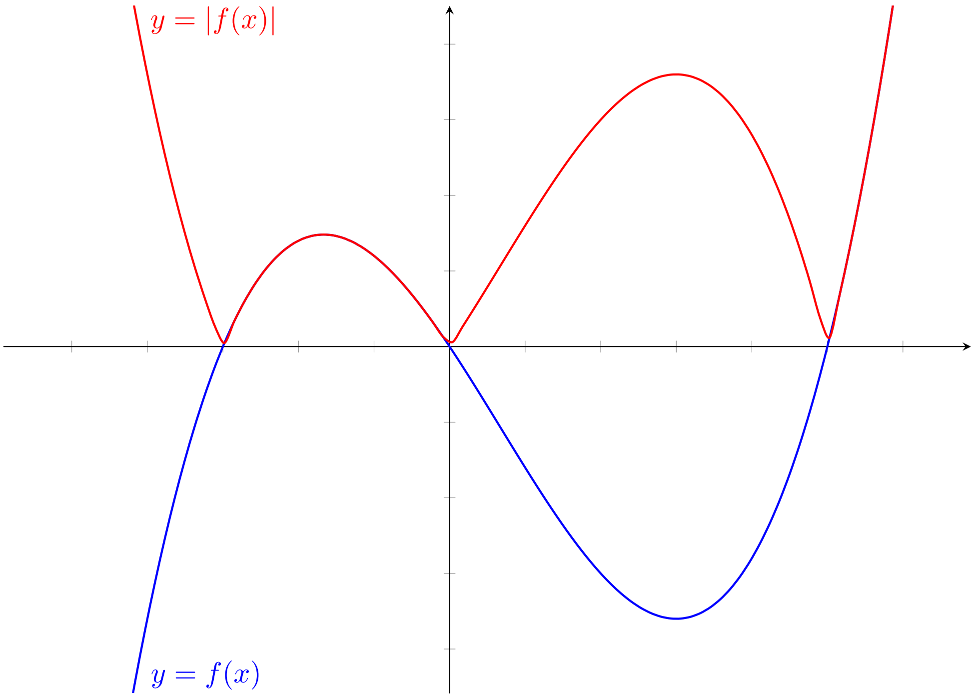
$$\begin{aligned} |f| : D_f &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto |f|(x) = |f(x)| \end{aligned}$$

avec

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), \text{ si } f(x) < 0 \\ f(x), \text{ si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

On déduit le graphe de $|f|$ de celui de f en symétrisant $/0_x$ tous les points d'ordonnée négative.

Exemple $f(x) = x \cdot (x+3) \cdot (x-5)$



5. Compositions de Fonctions

Soient f, g deux fonctions, si $Im_g \subset D_f$ alors on définit

$$f \circ g$$

par

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big), \quad \forall x \in D_f$$

Exemple

(a) Soit

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

et

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

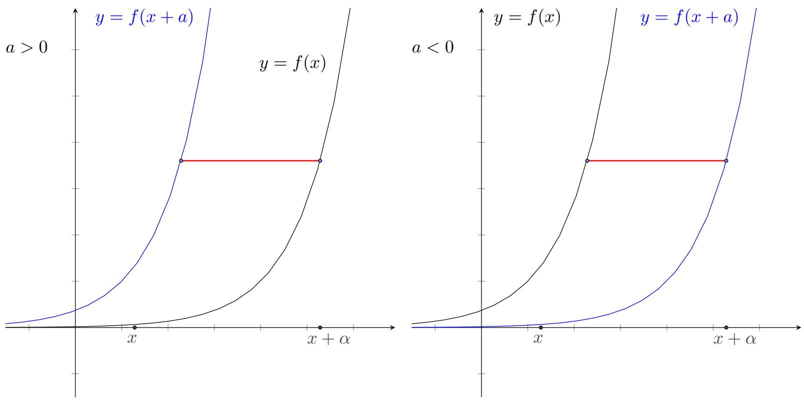
$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\left(\sqrt{x^2-1}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+1} \\ &= \sqrt{x^2} = |x| \end{aligned}$$

Mais $D_{f\circ g} =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\neq \mathbb{R}$

(b) $g = x + a$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = f\left(g(x)\right) = f(x+a)$$

Comment déduire le graphe de $f(x+a)$ de celui de f?



On déduit le graphe de $f(x+a)$ de celui de $f(x)$ par la translation de $(-a)$-unités parallèlement à $0x$.

6. Fonctions bornées

f est bornée sur D_f si

$$\exists M > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in D_f$$

Exemples

$$f(x) = \tfrac{1}{x-1} \text{ n'est pas bornée sur } D_f$$
$$g(x) = \tfrac{1}{x+1} \text{ et } h(x) = \cos x \text{ sont bornées sur } D_f$$

2.2 Surjection, injection, bijection

1. Surjection

$f : A \to B$ est dite surjective si tout $y \in B$ admet un antécédent par f dans A:

$$\forall y \in B, \exists x \in B \text{ t.q. } y = f(x)$$

En d'autres termes:

$$f \text{ est surjective si et seulement si } Im_f = B$$

Exemples

(a) La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto E(x) \end{aligned}$$

n'est pas surjective.
$y = \frac{1}{2}$ n'as pas d'antécédent
par contre

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z}, \\ x &\mapsto E(x) \end{aligned}$$

est surjective.

(b) La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{x^2}{x+1} \end{aligned}$$

On détermine Im_f

$$Im_f = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

Soit $y = f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
$y \in Im_f$ si x existe.
On cherche donc à résoudre l'équation

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

par rapport à x en considérant y comme un paramètre

$$\begin{aligned} x^2 &= y \cdot (x+1) \\ x^2 - y \cdot x + y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-y)^2 - 4 \cdot y = y \cdot (y-4) \\ \Delta \geq 0 &\iff y \in \,]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[\end{aligned}$$

Donc $Im_f =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$

2. Injection

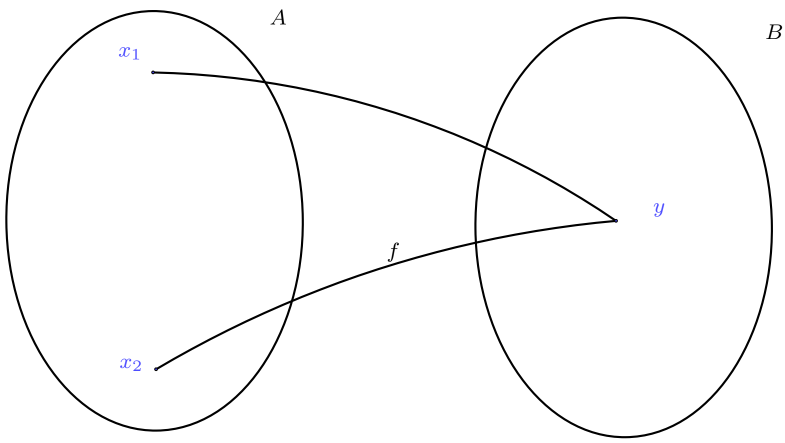
Définition: La fonction

$$f : A \to B \text{ est dite injective}$$

si

$$\forall x_1, x_2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Contre-exemple:

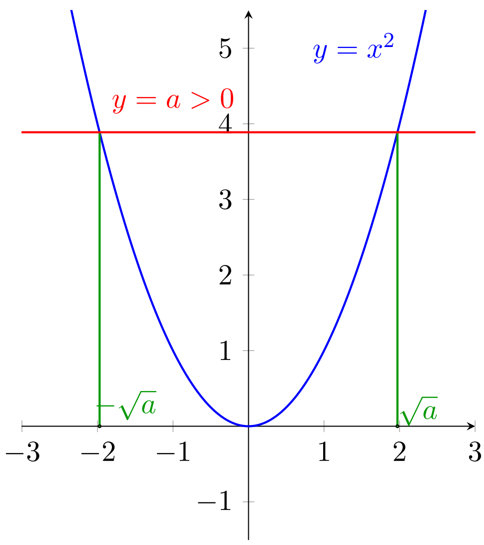


Énoncé contraposée en f injective si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Exemples:

(a) $f(x) = x^2$



$f(x) = x^2$ est injective sur $\mathbb{R}_+$ ou sur $\mathbb{R}_-$ mais non injective sur $\mathbb{R}$

(b) Repère de l'exemple sur la surjection

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad x \neq -1$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+1}=\frac{b^2}{b+1} &\iff a^2\cdot(b+1)=b^2\cdot(a+1)\\ &\iff a^2b+a^2-b^2a-b^2=0\\ &\iff ab\cdot(a-b)+(a+b)\cdot(a-b)=0\\ &\iff (a-b)\cdot[a\cdot b+(a+b)]=0\end{aligned}$$

$a\cdot b+a+b=0$ est un "générateur de contre-exemples".
En effet tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant cette relation est un contre-exemple à l'injectivité de f.

$$a=3,\qquad b=-\frac{3}{4}$$

Sont tels que $a\neq b$ et $f(a)=f(b)$.
f est non injective.

(c) Bijection et fonction réciproque

Définition: f est bijective si elle est injective **et** surjective
En d'autres termes $f:A\to B$ est bijective si tout $y\in B$ admet un unique antécédent.

Définition: $f:A\to B$ bijective si il existe une unique fonction, notée f^{-1}, appelée fonction réciproque de f
Vérifiant:

$$f^{-1}\circ f=id_A \qquad \text{et} \qquad f\circ f^{-1}=id_B$$

$$\begin{aligned}f^{-1}:B&\to A\\ x&\mapsto y=f^{-1}(x)\end{aligned}$$

avec

$$x=f(y)$$

Exemple:

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}&\to\\ x&\mapsto y=x-x^2\end{aligned}$$

Restreindre les ensembles de départ et d'arrivée de sorte que f devienne bijective.
Puis déterminer f^{-1}

- Surjection
  On cherche

$$Im_f=\{y\in\mathbb{R}\mid \exists x\in\mathbb{R}, y=f(x)\}$$

$$\begin{aligned}&y=x-x^2 \iff x^2-x+y=0\\ &\Delta=(-1)^2-4\cdot y=1-4y\\ &\Delta\geq 0 \iff y\leq\frac{1}{4}\\ &Im_f=]-\infty;\frac{1}{4}]\end{aligned}$$

- Injection Soit $a, b \in \mathbb{R},$ t.q. $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned} & a - a^2 = b - b^2 \\ \iff & a^2 - b^2 - a + b = 0 \\ \iff & (a-b)(a+b) - (a-b) = 0 \\ \iff & (a-b) \cdot [(a+b) - 1] = 0 \end{aligned}$$

Comment restreindre l'ensemble de départ et d'arrivée pour rendre f injective, sans modifier Im_f?
Il faut rendre le générateur de contre-exemple "inopérant".

$$a + b = 1 \implies a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - b$$

$$A = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \text{ ou } A = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

Alors

$$f : \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\to \left]-\infty; \frac{1}{4}\right]$$

est bijective.

Pour déterminer f^{-1} , ou résoudre

$$y = f(x)$$

par rapport à x en prenant y comme paramètre

$$y = x - x^2 \iff x^2 - x + y = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - 4y \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4y}}{2}, \qquad \left(y \in \left]-\infty; \frac{1}{4}\right]\right) \end{aligned}$$

Or

$$x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

donc

$$x = \frac{1 + \sqrt{1-4y}}{2}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} : \left]-\infty; \frac{1}{4}\right] &\to \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ x &\mapsto \frac{1 + \sqrt{1-4y}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} id_A : A &\to A, \\ x &\mapsto A \\ id_B : B &\to B, \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

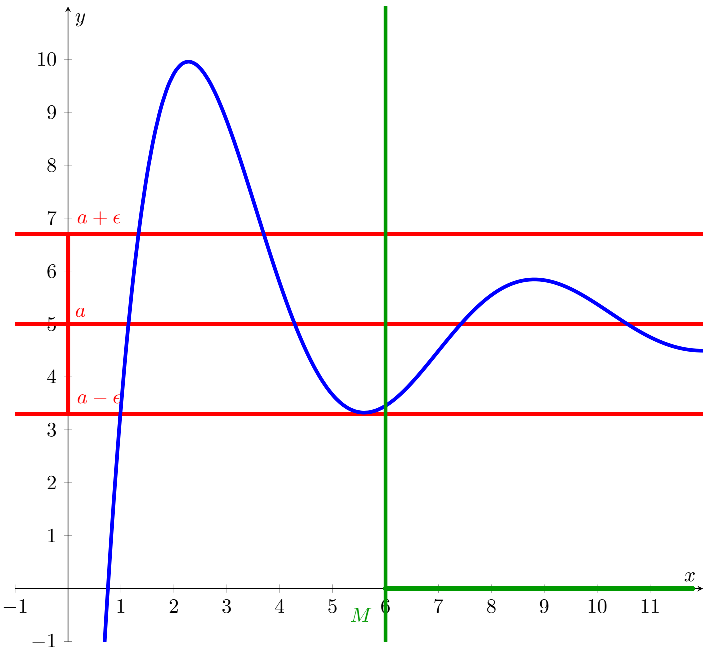
2.3 Limite d'une fonction

2.3.1 Limite à infini

Définitions:

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a, (a \in \mathbb{R})$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}(M = M(\epsilon)) \text{ t.q. } x \geq M (x \in D_{\text{déf}}) \implies |f(x) - a| < \epsilon$$



2. $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}(N = N(\epsilon)) \text{ t.q. } x < N (x \in D_{\text{déf}}) \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

Exemple: Montrons que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Soit $\epsilon > 0$ donné
Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}
x < N \implies & |\frac{1}{x^2} - 0| < \epsilon \\
\iff & |\frac{1}{x^2}| < \epsilon \\
\iff & \frac{1}{x^2} < \epsilon \\
\iff & |x| > \frac{1}{\epsilon} \\
\iff & x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}; +\infty\right[
\end{aligned}$$

Donc tout $N \leq -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ convient, car

$$x < N(\text{ avec } N \leq -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) \implies |\frac{1}{x^2} - 0| < \epsilon$$

$\square$

Théorème de caractérisation par les suites: f admet une limite $x \to \infty$ et

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

si et seulement si pour toute la suite x_n qui diverge vers ∞, on a

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = a$$

Exemple: Montrons que $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

- Soit $x_n = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{N}^*$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$
et
$$\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n \cdot \pi) = 0$$
- Soit $y_n = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$
et
$$\lim_{n\to\infty} \sin(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n \cdot \frac{\pi}{2}) = 1$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

Définitions: Limites impropre

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si
$$\forall A > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > M \implies f(x) > A$$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si
$$\forall B < 0, \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > M \implies f(x) < B$$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si
$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x < N \implies f(x) > A$$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si
$$\forall B < 0, \quad \exists N \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x < N \implies f(x) < B$$

Exemple:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

Soit $A > 0, \quad \exists ? N \in \mathbb{R}$ t.q. $x < N \implies$

$$\begin{aligned} &\implies x^2 > A \iff |x| = \sqrt{A} \\ &\implies x \in \left]-\infty; -\sqrt{A}\right] \cup \left]\sqrt{A}; +\infty\right[\end{aligned}$$

Donc tout $x < N$ convient.

$\square$

Opération sur les limites

1. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = b$ alors

$$\lim_{x\to\infty} |f(x)| = |a|, \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b, \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{a}{b}, \quad (\text{ si } b \neq 0)$$

2. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ alors

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$$

3. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ alors

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$$

Cas d'indétermination Si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} i(x) = +\infty, \lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$$

alors on ne peut rien dire à priori des limites suivante

$$\lim_{x\to\infty} (h(x) - i(x)) = \text{"}\infty - \infty\text{"}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{h(x)}{i(x)}\right) = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Quelque théorème importants

1. **Théorème des 2 gendarmes**

   Soient $d(x), g(x)$ toutes les fonctions telles que

   $$\exists M > 0 \text{ avec } g(x) \leq x \leq d(x), \quad \forall x > M$$

   Alors si

   $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} d(x) = a$$

   on a

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

   Énoncé analogue pour $x \to -\infty$

   Corollaire des 2 gendarmes

   $$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = 0 \implies \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

   $$[\underbrace{|f(x)|}_{\to 0} \leq f(x) \leq \underbrace{|f(x)|}_{\to 0} \quad \square]$$

2. **Théorème du gendarme**(ou du chien méchant) Soient $f(x), g(x)$ toutes les fonctions telles que

   $$\exists M > 0 \text{ avec } f(x) \geq g(x), \quad \forall x > M$$

   Alors si

   $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

   on a

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

   Énoncé analogue pour $x \to -\infty, y \to -\infty$

3. **Théorème "**$0 \cdot$ borné**"**

   Soient f, g deux fonctions telles que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\exists M > 0$ avec $g(x)$ est borné sur $[M; +\infty[$

   Alors

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$$

   [Par hypothèse

   $$\exists A > 0 \text{ t.q. } |g(x)| \leq A, \quad x > M$$

   $$0 \leq |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\to 0} \cdot A$$

   Donc d'après les deux gendarmes: $|f(x) \cdot g(x)| \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$ d'après son corolaire: $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$]

   Énoncé analogue pour $x \to -\infty$

Exemple: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad x \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\text{borné}} = 0$$

Or f est paire, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

4. **Théorème** "$\infty \cdot$ signe constant "

   - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) \geq m > 0$ sur un voisinage de $+\infty$.
     Alors
     $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$$
   - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) \leq m < 0$ sur un voisinage de $+\infty$.
     Alors
     $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

   Énoncé analogue pour $x \to -\infty, y \to -\infty$

5. **Théorème** "$\infty +$ borné" Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x)$ est borné sur un voisinage de $+\infty$. Alors
   $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

   Énoncé analogue pour $x \to -\infty, y \to -\infty$

Exemples:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + \sin(x)) = -\infty$

2. $f(x) = \frac{x\cdot\sin(x)}{(\cos(x)-2)\cdot(x+\sqrt{x^4+x^2})}, \quad x \to -\infty$

$$\frac{x \cdot \sin(x)}{(\cos(x) - 2) \cdot (x + \underbrace{|x|}_{=-x} \cdot \sqrt{x^2 + 1})}, \quad x < 0$$

$$\frac{\overbrace{\sin(x)}^{\text{borné}}}{\underbrace{(\cos(x) - 2)}_{\leq -1 < 0} \cdot \underbrace{(-1 \cdot \sqrt{x^2 + 1})}_{\to -\infty}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \qquad (\text{"}0\cdot \text{ borné"})$$

2.3.2 Valeurs limite en x_0

Définition: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage pointé de x_0, tout voisinage de x_0, privé de x_0

Exemple: L'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} | 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

est appelé δ-voisinage pointé de x_0.
En effet: $0 < |x - x_0| < \delta$

$$\iff x \in]x_0 - \delta; x_0[\cup]x_0; x_0 + \delta[$$

Définition: Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage pointé de x_0.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \neq x_0)}} f(x) = a, \text{ si } \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ (\delta = \delta(\epsilon))$$

tels que

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ si et seulement si tout ϵ-voisinage de a contient l'image par f d'un ϵ-voisinage pointé de x_0

1. **Théorème de caractérisation par les suites**
   $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ si et seulement si pour toutes suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers x_0 : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0, \quad (x_n \neq x_0)$
   On a
   $$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

   Exemple:
   $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Montrons que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas

   - Soit $x_n = 1 - \frac{1}{n}$
     $$x_n \to 1$$
     et
     $$f(x_n) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$
   - Soit $y_n = 1 + \frac{1}{n} (y_n > 1)$
     $$\lim_{n \to \infty} y_n = 1$$
     mais
     $$\begin{aligned} f(y_n) &= y_n^2 + 1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$
     $$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = 2$$

   Donc $\lim\limits_{f(x)}$ n'existe pas

Définitions: Limite à gauche et à droite de x_0

- $\lim_{n \to x_0^-} f(x) = a$ Si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\epsilon)) \text{ t.q. } x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

- $\lim_{n \to x_0^+} f(x) = a$ Si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\epsilon)) \text{ t.q. } x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

Reprise de l'exemple précédent:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 2$$

Théorème $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Définition: Limites infinies en x_0

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(A)) \text{ t.q. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(A)) \text{ t.q. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < B$$

Exemple: Montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Soit $A > 0$ donné, montrons que

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 < |x - 0| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > A$$

$$\frac{1}{x^2} > A \iff x^2 < \frac{1}{A} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{A}} \iff |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Donc tout $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$ convient, car

$$0 < |x - 0| < \delta, (\text{ avec } \delta \leq \frac{1}{\sqrt{A}}) \implies \frac{1}{x^2} > A$$

Définitions: Limites infinies à gauche et à droite en x_0

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ si
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > A$$
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ si
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) > A$$
- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ si
$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) < B$$
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ si
$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) < B$$

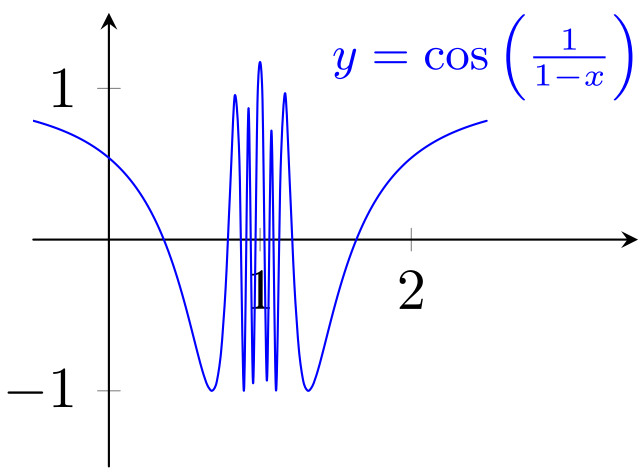
Exemple: Montrons que $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Soit $B > 0$ donné, montrons que
$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 - \delta < x < 0 \implies \frac{1}{x} < B \implies \frac{1}{x} < B \iff x > \frac{1}{B}, \quad (x, B < 0)$$
Donc tout $\delta > 0$ vérifiant
$$\frac{1}{B} < -\delta < 0$$
convient ($\delta < -\frac{1}{B}$) car
$$0 - \delta < x < 0 \quad (\text{avec } -\delta > \frac{1}{B}) \implies \frac{1}{x} > B$$

$\square$

Remarque: Tout les théorèmes et règles de calcul concernant les limites lorsque $x \to \pm\infty$ restent valables lorsque $x \to x_0$

Exemple:
$$\lim_{x\to 1} \frac{x - \sqrt{2 - x}}{\sqrt[3]{1 - x^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1 - x}\right)$$



$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1} \frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{1-x^2}} = 0 \\
&\lim_{x\to1} \frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{1-x^2}} \;:\; \text{FI} \quad \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \\
&\lim_{x\to1} \frac{x^2-(2-x)}{\sqrt[3]{(1-x^2)}\cdot(x+\sqrt{2-x})} = \\
&\lim_{x\to1} \frac{(x-1)\cdot(x+2)}{\sqrt[3]{(1-x)\cdot(1+x)}\cdot(x+\sqrt{2-x})} = \\
&\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot(x+2)}{\sqrt[3]{-1-x}\cdot(x+\sqrt{2-x})} = 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to1} \underbrace{\frac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}_{\text{borné}} = 0$$

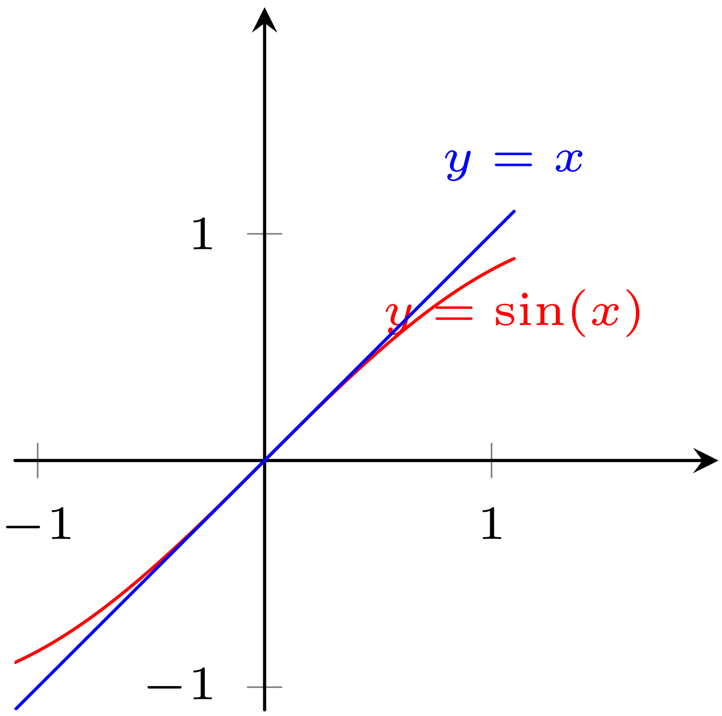
2.3.3 Infiniment petits équivalents (IPE)

Définition: Soient f et g 2 fonctions définies sur un voisinage pointé de x_0.
f et g sont des IPE $(x \to x_0)$ si et seulement si

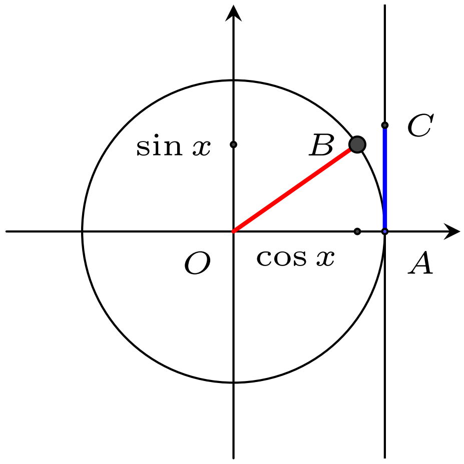
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad$ (IP)
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad$ (E)

On écrit alors $f \sim g \quad (x \to x_0)$
Montrons que

$$\sin(x) \sim x \quad x \to 0$$



Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$



$$\begin{aligned}
&\dim(\Delta AOB) < \dim(O\hat{A}B) < \dim(\Delta OAC) \\
\iff &\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin(x) < \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(x) \\
\iff &\sin(x) < x < \tan(x) \\
\iff &1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \\
\iff &\underbrace{\cos(x)}_{\to 1} < \frac{\sin(x)}{x} < 1
\end{aligned}$$

Théorème des 2 gendarmes:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Or $\frac{\sin(x)}{x}$ est paire donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

De plus

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$$

donc

$$\sin(x) \sim x \quad (x \to 0)$$

Propriété: Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0, alors

$$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$$

⚠ Attention: En général

$$f_1 \sim g_1 \text{ et } f_2 \sim g_2 \;\not\Longrightarrow\; f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$$

Contre-exemple:

$$x \sim (x + x^2) \text{ et } x \sim (-x + x^2) \quad (x \to 0)$$

Or

$$\frac{x-x}{(x+x^2)+(-x+x^2)} = \frac{0}{2x^2}\ !$$

D'où la règles d'utilisation des IPE.

Dans un calcul de limit on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une **expression factorisée** et **jamais** dans une somme.

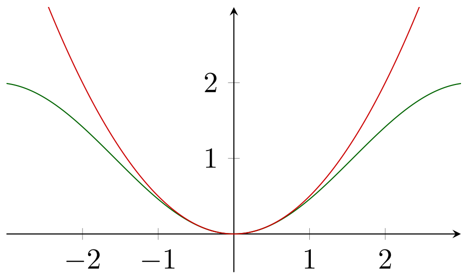
Exemples:

1. $\lim_{x\to 0}(1-\cos(x)) = 0$ et

$$1-\cos(x) = 2\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \sim 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

donc

$$1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}, \quad (x\to 0)$$



2. $\lim_{x\to 0}\tan(x) = 0$ et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$$

et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1} = 1$$

Donc

$$\tan(x)\sim x \quad (x\to 0)$$

Exemple servant d'avertissement:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)-\sin(2x)}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \text{Lorsque } x\to 0 \quad & 2\cdot\sin(x)\sim 2x \\ \text{et} \quad & \sin(2x)\sim 2x \end{aligned}$$

Mais

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)-\sin(2x)}{x^3} \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2x-2x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)-\sin(2x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)\cdot(1-\cos(x))}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3} = 1$$

2.4 Continuité

Définition: Soit f définie sur un voisinage de x_0. f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cette définition comporte 3 exigences:

1. $f(x_0)$ existe ($x_0 \in \mathbb{D}_{\text{déf}}$)
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe (vaut $a \in \mathbb{R}$)
3. $a = f(x_0)$

Définition analytique f est continue en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } (x - x_0) < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Définition: f est continue sur un ensemble $I =]\, a, b\, [$ si f est continue en tout $x_0 \in I$ et on écrit $f \in \mathbb{C}^0_I$ (la O^e dérivé de f continue sur l'intervalle I)

Exemples:

1. Montrons que $\sin(x) \in \mathbb{C}^0_{\mathbb{R}}$
   Soit $\epsilon > 0$ donné

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = |2 \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)| \leq$$
$$\leq |2 \cdot \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)| \leq |2 \cdot \frac{x - x_0}{2}| = |x - x_0|$$

   Donc tout $\delta \leq \epsilon$ convient car

$$|x - x_0| < \delta \quad (\text{avec } \delta \leq \epsilon) \implies |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$$

$\square$

   Corollaire $\cos(x) \in \mathbb{C}^0_{\mathbb{R}}$ car $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

2. Montrer que $\sqrt{x}$ est contenue sur $\mathbb{R}^*_+$
   Montrons que $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = |\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}| \leq |\frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

   Or

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon \iff |x - x_0| < \epsilon\sqrt{x_0}$$

   Donc tout

$$\delta \leq \epsilon \cdot \sqrt{x_0}$$

   convient car

$$|x - x_0| < \delta \quad (\delta \leq \epsilon \cdot \sqrt{x_0}) \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$$

Propriétés: Soit f , g continues en x_0 alors

- $|f|$ est continue en x_0
- $f \pm g$ sont continue en x_0
- $f \cdot g$ est continue en x_0
- si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Ces propriété sont la conséquence des propriétés sur la limite en x_0

Théorème: Soit f et g deux fonctions. f définie sur un voisinage pointé de x_0. Si $\lim\limits_{x \to x_0} =$ a et si g est continue en a, alors

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(a)$$

Corollaire: Soient f continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue sur en x_0

[

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) &= \lim_{x \to x_0} g(f(x)) \\
&= g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \text{ car } g \text{ est continue} \\
&= g(f(x_0)) \text{ car } f \text{ est continue} \\
&= g \circ f(x_0)
\end{aligned}$$

$\square$

]

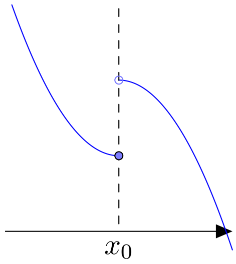
Exemples:

1. - $f(x) =$ cste est $\mathbb{C}^0_{\mathbb{R}}$ $[\delta > 0$ qcq $\square]$
   - $f(x) = x$ est $\mathbb{C}^0_{\mathbb{R}}$ $[\delta \leq \epsilon \square]$
   - Donc toutes fonctions polynomiales sont $\mathbb{C}^0_{\mathbb{R}}$
   - Et toutes les fonctions naturelles sont $\mathbb{C}^0$ sur leur $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
2. Les fonctions $\tan(x)$ et $\cot(x)$ sont $\mathbb{C}^0$ sur leur $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
3. $f(x) = \sin^2(\sqrt{x^2+1})$ est $\mathbb{C}^0_{\mathbb{R}}$ comme composé de fonctions

Définitions: Continuité gauche, droite

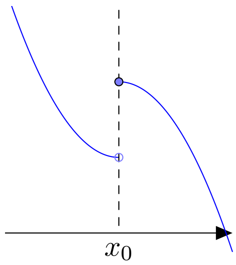
- f est continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$



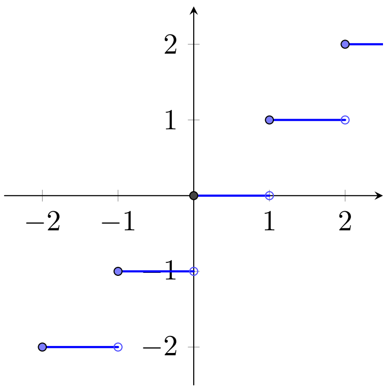
- f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$



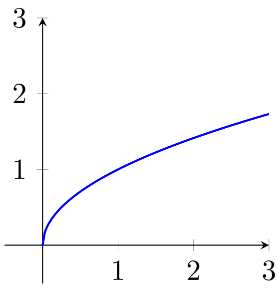
Exemples:

1. $f(x) = E(x), \quad x_0 \in \mathbb{Z}$



f continue à droite en x_0 et discontinue à gauche en x_0

2. $g(x) = \sqrt{x}$

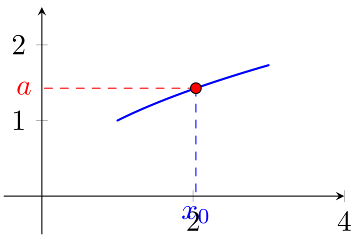


g est continue à droite en $x_0 = 0$

Définitions:

- On dit que f est continue sur $[\,a;b\,]$ si elle continue sur $]a;b[$, continue à droite en $x=a$ et à gauche en $x=b$
- Soit f définie sur voisinage pointé de x_0 avec $x_0 \notin \mathbb{D}_f$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existe (vaut } a \in \mathbb{R})$$



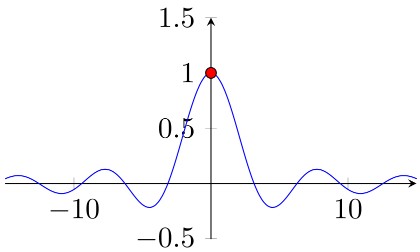
On peut alors définie $\tilde{f}(x)$ continue en x_0 en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ a & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ est appelé la **prolongée par continuité** de f en x_0.

Exemple:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad x_0 = 0$$



$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{est } \mathbb{C}^0_{\mathbb{R}}$$

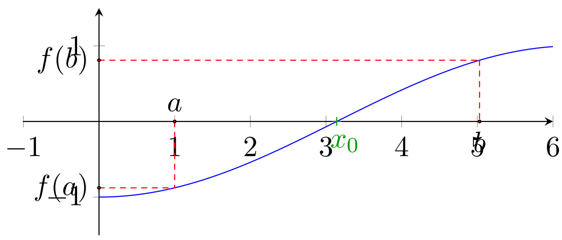
Théorème de la valeur intermédiare Soit f continue sur $[\,a;b\,]$, si

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

alors

$$\exists x_0 \in [\,a;b\,] \text{ t.q. } f(x_0) = 0$$

Illustration du cas $f(a) < 0, f(b) > 0$



Démonstration: algorithm de la bisection. On coupe l'intervalle $[\,a;b\,]$ en $x = \frac{a+b}{2}$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \quad x_0 = \frac{a+b}{2}$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, alors on pose

$$I_1 = [\,a_1; b_1\,] \text{ avec } a_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } b_1 = b$$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, alors on pose

$$I_1 = [\,a_1; b_1\,] \text{ avec } b_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } a_1 = a$$

On réitère le découpage sur l'intervalle $I_1 = [\,a_1; b_1\,]$ et ainsi de suite :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ et alors $\frac{a_n+b_n}{2}$
- Soit on obtient (a_n) et $(b_n), n \in \mathbb{N}^*$, 2 suites telles que
  - $f(a_n) < 0 < f(b_n)$
  - $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
  - $a \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_1 \leq b$

  (a_n) est croissante et majorée

  (b_n) est décroissante et minorée

  Donc ces suites sont convergentes

  Or
  $$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-b}{2^n}\right) = 0$$

  Donc
  $$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) \text{ (car les deux limites existent)}$$

  Posons
  $$x_0 = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

  Or f est continue sur $[\,a; b\,]$ alors
  $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0)$$

  Mais
  $$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

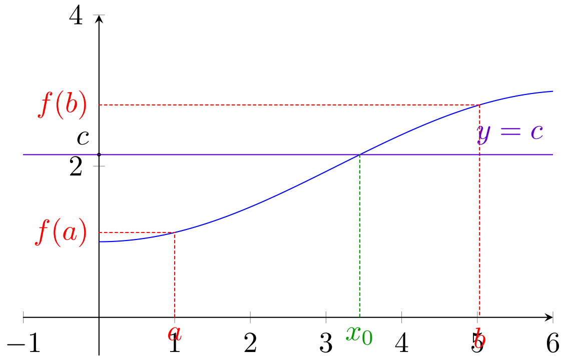
  Donc
  $$f(a_n) = f(b_n) = 0$$

  D'où
  $$f(x_0) = 0$$

□

Corollaire: Soit f continue sur $[\,a; b\,]$
Si c est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors

$$\exists x_0 \in [\,a; b\,] \text{ t.q. } f(x_0) = c$$



Théorème: Soit f continue sur $[\,a; b\,]$

- Si f est strictement croissante sur $[\,a; b\,]$ alors f est bijective de $[\,a; b\,]$ sur $[\,f(a); f(b)\,]$
- Si f est strictement décroissante sur $[\,a; b\,]$ alors f est bijective de $[\,a; b\,]$ sur $[\,f(b); f(a)\,]$

Démonstration: Soit f strictement croissante.
Le théorème de la valeur intermédiaire nous donne l'existence d'un antécédent pour out $y \in [\,f(a); f(b)\,]$ et cet antécédent est **unique** car f est strictement monotone.

$\square$