

EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B
PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Calcul intégral

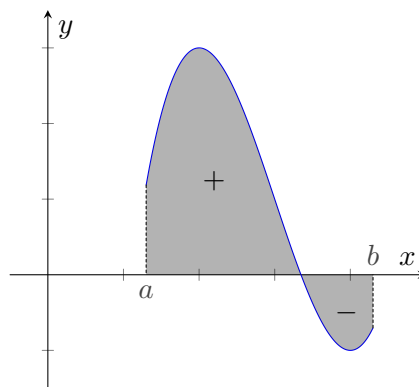
3.1 Intégrale définie

3.1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit f continue sur $[a; b]$ ($a < b$)

On considère le domaine D du plan, limité par

$$y = f(x), \quad y = 0, \quad x = a \quad \text{et} \quad x = b$$

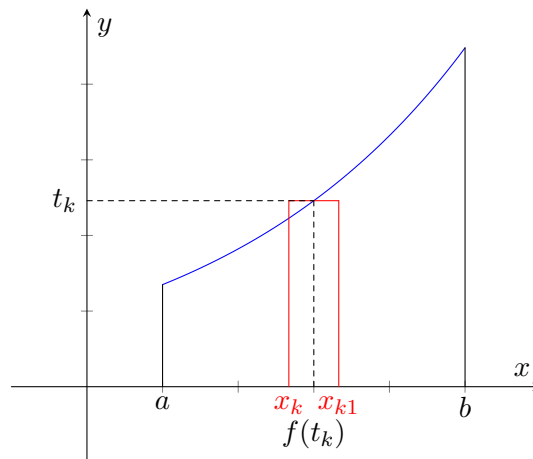


L'aire **analytique** du domaine D est définie positive si $f(x) \geq 0$ et négative si $f(x) \leq 0$.
On cherche à déterminer (à définir) l'aire analytique de D .

On partage l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles

$$[x_{k-1}, x_k] \quad 1 \leq k \leq n \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$$

Puis on choisit arbitrairement une abscisse t_k dans chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$



La somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot \Delta x$$

avec

$$\Delta x = x_k - x_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n$$

est la somme des aires analytiques des domaines rectangulaires.

Définition: La somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot \Delta x$$

est appelée somme de Riemann de f sur $[a, b]$

Elle dépend du choix du partage de $[a, b]$ et du choix de chaque $t_k \in [a, b]$

Cas particulier: Les sommes de Darboux.

Pour un partage donné de $[a, b]$, on définit:

- La somme de Darboux inférieure:

$$s_n = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k$$

où m_k le min de f sur $[x_{k-1}, x_k]$

- La somme de Darboux supérieure:

$$S_n = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k$$

où M_k le max de f sur $[x_{k-1}, x_k]$

Définition: Si pour $n \rightarrow \infty$ tous les $\Delta x_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et si

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

existe indépendamment du choix du partage et du choix des t_k $1 \leq k \leq n$ alors f est dit intégrable au sens de Riemann et cette limite est appelée l'intégrale définie de f un $[a, b]$ et on la note

$$\int_a^b f(x)dx$$

Intégrale de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

L'intégrale définie de f sur $[a, b]$ est par définition, la mesure de l'aire analytique du domaine D .

Théorème (sans démonstration): Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable au sens de Riemann

Exemple:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, a] (a > 0)$$

- Soit

$$u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Montrer que

$$t_n = \frac{1}{3}n \left(n + \frac{1}{2} \right) (n + 1)$$

- Déterminer les 2 sommes de Darboux de f sur $[0, a]$ relativement à un découpage de $[0, a]$ en n intervalles isométriques.

Et vérifier que ces 2 sommes convergent vers la même valeur.

- $u_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

- Vérification pour $n = 1$:

$$u_1 = 1^2 = 1$$

et

$$\frac{1}{3} \left(n + \frac{1}{2} \right) (n + 1) \Big|_{n=1} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = 1$$

- Démonstration du pas de récurrence:

Hypothèse: $u_n = \frac{1}{3}n(n + \frac{1}{2})(n + 1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné

Conclusion: $u_{n+1} = \frac{1}{3}(n + 1)(n + \frac{3}{2})(n + 2)$

Preuve:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}n \left(n + \frac{1}{2} \right) (n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}(n+1) \left(n \cdot \left(n + \frac{1}{2} \right) + 3(n+1) \right) \\
&= \frac{1}{3}(n+1) \left(n + \frac{7}{2}n + 3 \right) \\
&= \frac{1}{3}(n+1) \left(n + \frac{3}{2} \right) (n+2)
\end{aligned}$$

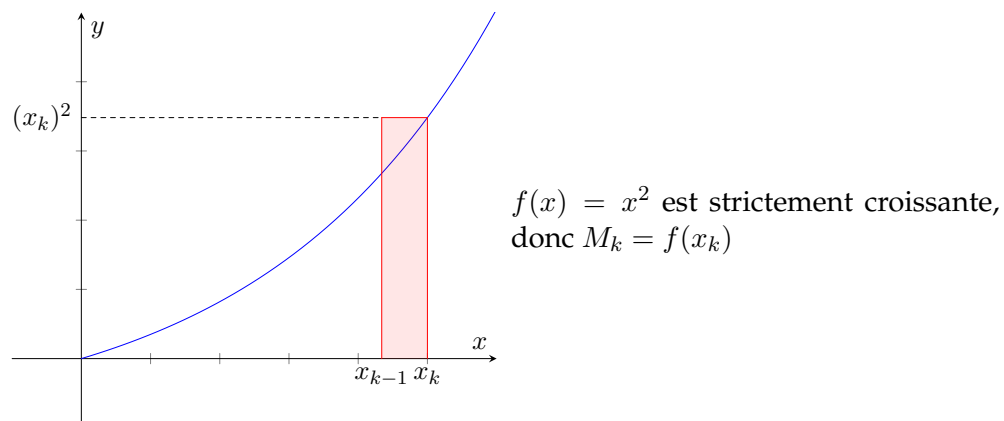
□

- Sommes de Darboux

- Partition de $[0, a]$ en n intervalles isométriques:

$$\Delta x_k = \frac{a}{n}, \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{et} \quad x_k = k \cdot \frac{a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n$$

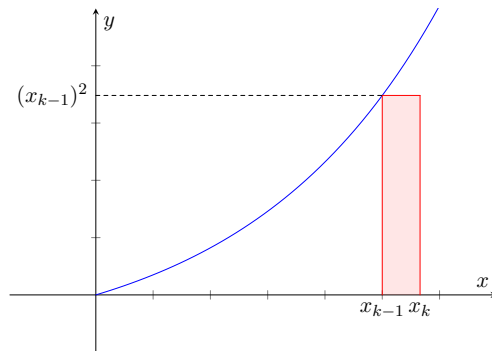
- Somme de Darboux supérieure:



$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^n \left(k \cdot \frac{a}{n} \right)^2 \cdot \frac{a}{n} \\
&= \left(\frac{a}{n} \right)^3 \sum_{k=1}^n k^2 \\
&= \left(\frac{a}{n} \right)^3 \cdot \frac{1}{3} (n) \left(n + \frac{1}{2} \right) (n+1) \\
&= a^3 \cdot \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a^3}{3}$$

- Somme de Darboux inférieure:



$f(x) = x^2$ est strictement croissante
donc $m_k = f(x_{k-1})$

$$\begin{aligned}
 s_n &= \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \left((k-1) \cdot \frac{a}{n} \right)^2 \cdot \frac{a}{n} \\
 &= \left(\frac{a}{n} \right)^3 \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \\
 &= \frac{a^3}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{a^3}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \\
 &= \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{3} (n-1) \left(n - \frac{1}{2} \right) (n) \\
 &= a^3 \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{2n} \right)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a^3}{3}$$

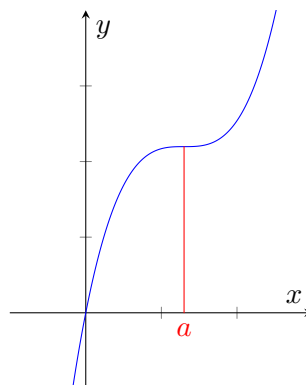
- Les 2 sommes de Darboux convergent vers la même valeur $\frac{a^3}{3}$
Or $f(x) = x^2$ est continue sur $[0, a]$ donc

$$\int_0^a x^2 \cdot dx = \frac{a^3}{3}$$

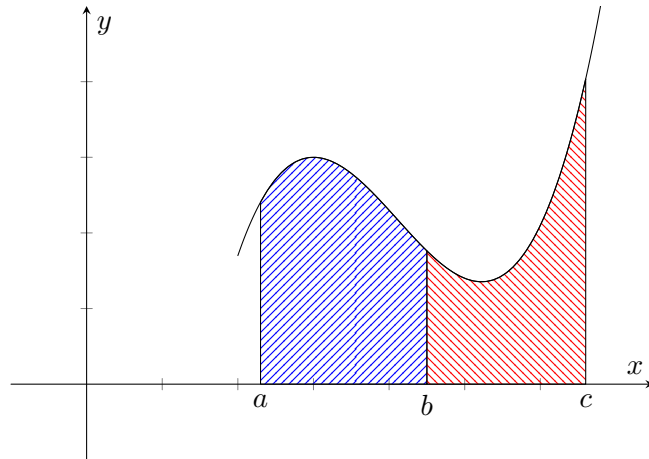
□

Quelques conséquences de la définition

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$



$$2. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

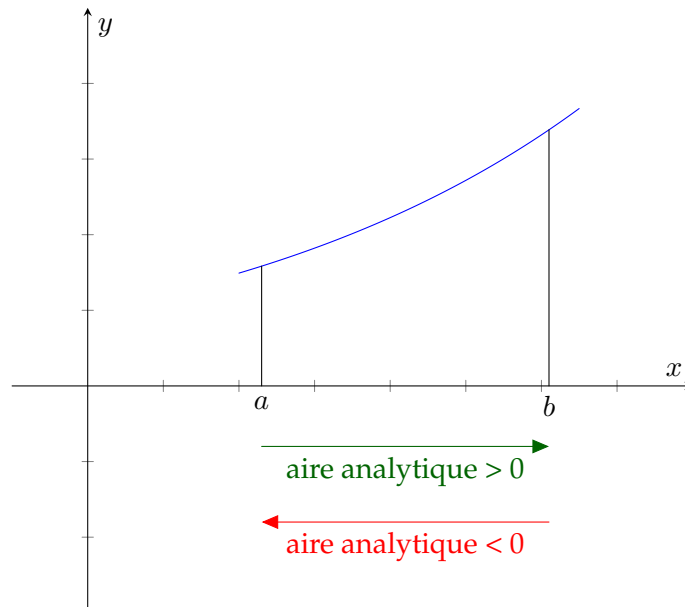


En particulier

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

d'où

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

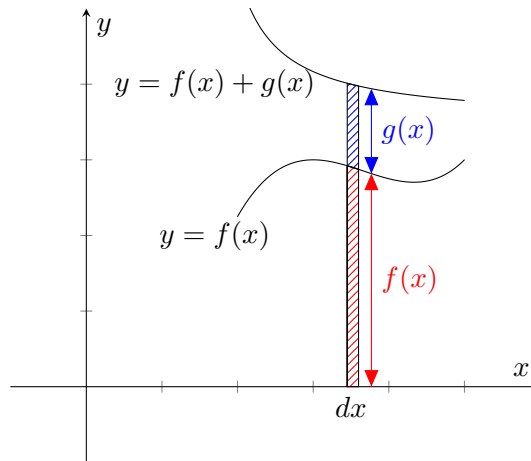


$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{>0} \underbrace{dx}_{>0} > 0 \quad \int_b^a \underbrace{f(x)}_{>0} \underbrace{dx}_{<0} < 0$$

□

$$3. \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$4. \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$



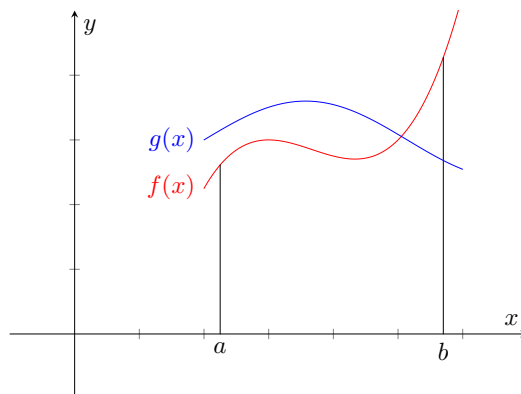
5. Si $a < b$ et si

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

⚠ Attention! La réciproque est fausse.

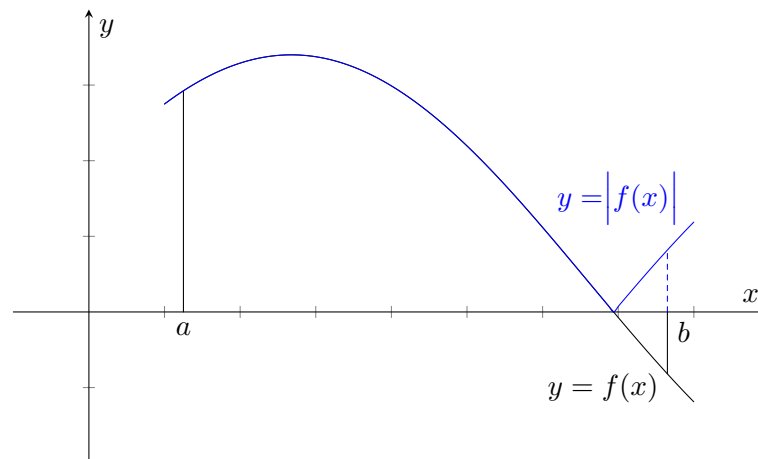


$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

mais

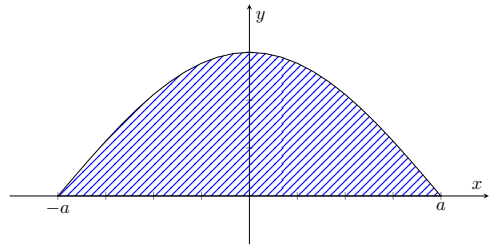
$$f(x) \not\leq g(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

6. $\int_a^b |f(x)| dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad a < b$



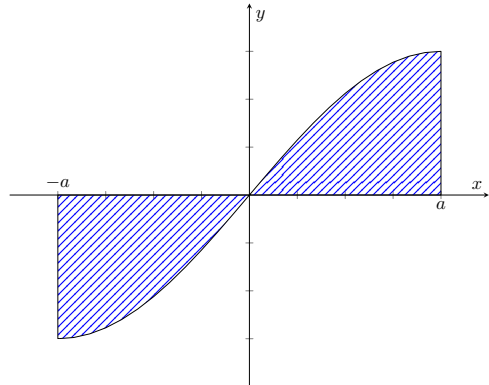
7. • Si f est paire sur $[-a, a]$, ($a > 0$) alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$$



- Si f est impaire sur $[-a, a]$, ($a > 0$) alors

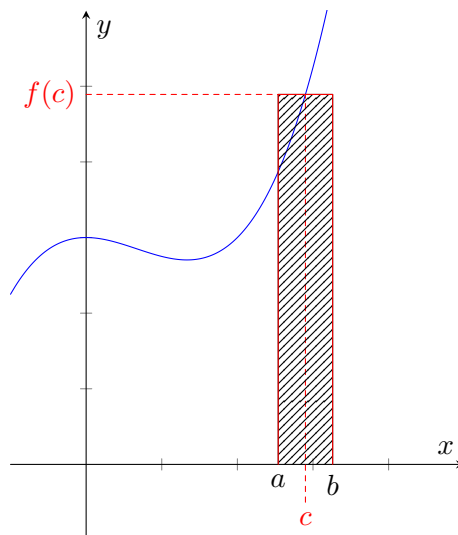
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$



3.1.2 Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème de la moyenne Soit f continue sur $[a, b]$

$$\exists c \in [a, b] \text{ t.q. } \int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$$



Définition: Soient $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ et $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

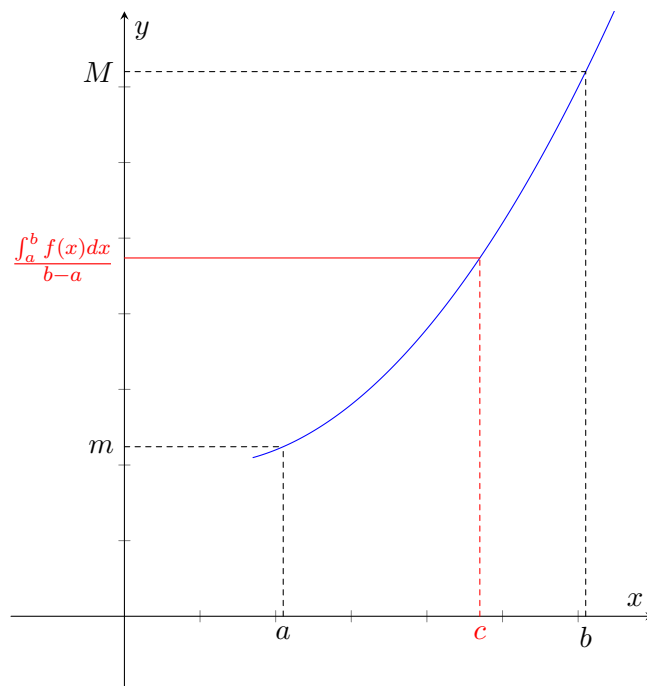
$$\left[\int_a^b k \cdot dx = k(b-a) \right]$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (b-a > 0)$$

$$\implies m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

Or f est continue sur $[a, b]$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire

$$\exists c \in [a, b] \text{ t.q.}$$



$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

□

Autre expression du théorème de la moyenne

$$\exists \theta \in [0, 1] \text{ t.q. } \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = h \cdot f(x_0 + \theta h)$$

□

Théorème fondamental Soit f continue sur $[a, b]$

Définition: On définit la "fonction-aire" associé à f sur $[a, b]$ par

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

Théorème: Soient f continue sur $[a, b]$ et $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, la fonction-aire associée à f . On a

$$A'(x) = f(x)$$

En d'autres termes

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Démonstration: La dérivé de $A(x)$ s'écrit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

$$A(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$$

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt + \int_a^x f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

D'après le théorème de la moyenne,

$$\exists \theta \in [0, 1] \text{ t.q. } \int_x^{x+h} f(t)dt = h \cdot f(x + \theta h)$$

Donc

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot f(x + \theta h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + \theta h) \stackrel{f \text{ continue}}{=} f(x)$$

□

Définition: Soit f définie sur I . On appelle la **primitive** de f sur I , toute fonction F définie sur I telle que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

Exemples:

1. La fonction-aire $A(x)$ associée à $f(x)$ est une primitive de $f(x)$
2. Soit

$$f(x) = 2(x+1)$$

$$F(x) = (x+1)^2 \text{ et } G(x) = x^2 + 2x$$

Sont toutes les deux des primitives de f

Théorème: Soient f continue sur I et $F(x)$ une primitive de f sur I . Toutes les primitives de f sur I sont de la forme

$$F(x) + c$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante

- $F(x) + c$ est une primitive de f , car

$$[F(x) + c]' = F'(x) + 0 = f(x)$$

- Soit G une autre primitive de f :

$$F'(x) = f \text{ et } G'(x) = f \quad \text{donc} \quad G'(x) - F'(x) = 0$$

$$\implies (G - F)'(x) = 0$$

$$\implies (G - F)(x) = c$$

$$\implies G(x) = F(x) + c$$

□

Conséquence du théorème fondamental:

- Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I
- Calcul de l'intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$. Soit

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

et $F(x)$ une primitive quelconque de f sur $[a, b]$

$$A(x) = F(x) + c$$

$$\text{– Évaluation en } x = a : \underbrace{A(a)}_{=0} = F(a) + c$$

$$c = -F(a)$$

- Évaluation en $x = b$

$$A(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) + c$$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$

Exemples:

Autre exemple Calculer la dérivée de la fonction

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$$

Soit $G(x)$ une primitive de la fonction $g(t) = e^{t^2}$

D'après le théorème fondamentale

$$F(x) = G(x^2) - G(0)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= [G(x^2) - G(0)]' \\ &= [G(x^2)]' - [\underbrace{G(0)}_{\text{constant}}]' \\ &= [G(x^2)]' - 0 \\ &= G'(x^2) \cdot (x^2)' = g(x^2) \cdot 2x \\ &= e^{x^4} 2x \end{aligned}$$

□

3.2 Intégrale indéfinie

3.2.1 Définition et propriétés

Définition: Soit f définie sur I . On appelle **intégrale indéfinie** de f sur I , l'ensemble de toutes les primitives de f sur I . Elle se note

$$\int f(x) dx$$

$$\underbrace{\int f(x) dx}_{\text{intégrale indéfinie}} = \underbrace{F(x)}_{\text{primitive quelconque}} + \underbrace{c}_{\text{constante arbitraire}}$$

Conséquences:

1. $\int F'(x) dx = F(x) + c$
2. $[\int f(x) dx]' = f(x)$

Propriétés de linéarité

1. $[\int f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Soient F et G des primitives de f et g .

$$F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad G'(x) = g(x)$$

$$\begin{aligned}
\int [f(x) + g(x)]dx &= \int [F'(x) + G'(x)]dx \\
&= \int [F(x) + G(x)]'dx \\
&= [F(x) + G(x)] + c \\
&= F(x) + c_1 + G(x) + c_2 \\
&= \int f(x)dx + \int g(x)dx
\end{aligned}$$

□

2. De même

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Quelques intégrales indéfinies déduites du calcul différentiel:

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \quad n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c, \quad \text{si } x > 0 \text{ et si } x < 0, \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{-1}{-x} dx = \ln(-x) + c$

D'où

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

□

- $\int e^x = e^x + c$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c$
- $\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + c$
- $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cosh^2(x)}dx = \tanh(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sinh^2(x)}dx = -\coth(x) + c$

section Recherche de primitives

Méthode basée sur l'observation

On regarde si l'intégrant, à une constante multiplicative près, est la dérivée d'une fonction connue, ou la dérivée d'une fonction composée connue:

- $\int f'(x)dx = f(x) + c$
- $\int f'(u(x)) \cdot u'(x)dx = f(u(x)) + c$

Exemples:

$$1. \int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \int -a \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \int [\cos(ax)]' dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \int \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \int (\sqrt{ax+b})' dx = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + c$$

$$3. \int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\sqrt{u}} dx \frac{1}{3} \sqrt{x^2+1}^3 + c$$

$$4. \int \sin(2x) \cdot \sin^2(x) dx = \int \underbrace{2 \cos(x)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin^3(x)}_{u^3} dx = \frac{1}{2} \sin^4(x) + c$$

$$5. \int \cos^2(x) dx, \text{ on linéarise } \cos^2(x) \text{ à l'aide de la relation}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \text{ et } \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

[missing the last part, check the drive]

Intégration par parties

Soit $u = u(x)$ et $v = v(x)$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

et en intégrant rapport à x :

$$\int (u \cdot v)' dx = \int u' \cdot v dx + \int u \cdot v' dx$$

$$u \cdot v = \int u' \cdot v dx + \int u \cdot v' dx$$

$$\int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

Méthode efficace si $\int u \cdot v' dx$ est plus facile à intégrer que $\int u' \cdot v dx$.

Exemple: $f(x) = x \cdot \sin(2x)$

$$\int x \cdot \sin(2x) dx$$

$$v = x, \quad v' = 1$$

$$u' = \sin(2x), \quad u = -\frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(2x)} dx$$

$$= x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx$$

$$= -\frac{x}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx$$

$$= -\frac{x}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{4} \int \sin(2x) dx + c$$

Exemple surprenant:

$$I = \int \frac{1}{x} dx = \int \underset{\downarrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \underbrace{\int x \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx}_{= + \int \frac{1}{x} dx}$$

$$I = 1 + I$$

$$\underbrace{I - I}_{\neq 0} = 1 + c$$

Autre exemple:

$$\begin{aligned} I &= \int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\sin(x)} = e^x \sin(x) - \int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\cos(x)} dx \\ &= e^x \cdot \sin(x) - [e^x \cdot \cos(x) - \int e^x (-\sin(x)) dx] \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \underbrace{\int e^x \cdot \sin(x) dx}_{=I} \\ \implies 2I &= e^x [\sin(x) - \cos(x)] + c' \\ I &= \frac{e^x}{2} [\sin(x) - \cos(x)] + c \end{aligned}$$

Intégration par changement de variable

On change de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant, fonction de t , soit plus facile à intégrer.

On choisit φ bijectif pour pouvoir expliciter $x = \varphi(t)$ (φ bijectif et $\varphi \in \mathbb{C}^1$) pour calculer $\int f(x) dx$

Soit F une primitive de f : $F'(x) = f(x)$ et

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int F'(x) dx = F(x) + c \\ &= F[\varphi(t)] + c = \int (F[\varphi(t)])' dt \\ &= \int F'[\varphi(t)] \dot{\varphi}(t) dt \\ &= \int \underbrace{f[\varphi(t)]}_{=x} \cdot \underbrace{\dot{\varphi}(t) dt}_{Ax} \end{aligned}$$

$$[x = \varphi(t) \implies dx = \dot{\varphi}(t) dt]$$

□

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \dot{\varphi}(t) dt$$

Exemples:

1. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

Posons $t = \sqrt{1+x}, x > -1, t > 0, \quad x = t^2 - 1, dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &= \int \frac{t^2 - 1}{t} (2t dt) \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - t \right] + c \\ \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &= 2 \left[\frac{\sqrt{1+x}^3}{3} - \sqrt{1+x} \right] + c \end{aligned}$$

2. $\int \cos(\sqrt{x}) dx$

Posons $t = \sqrt{x}, x \geq 0, t \geq 0, \quad x = t^2, dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} \int \cos(\sqrt{x}) dx &= \int \cos(t) \cdot 2t dt \\ &= 2 \int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\cos(t)} dt = 2 \left[t \cdot \sin(t) - \int 1 \cdot \sin(t) dt \right] \\ &= 2 \left[t \cdot \sin(t) + \cos(t) \right] + c = 2 \left[\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x}) \right] + c \end{aligned}$$

Quelques changements de variables usuels

1. Déduts de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]$

- $x = \sin(t), t \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right], x \in [-1, 1], \sqrt{1-x^2} = \cos(t), dx = \cos(t) dt$
- $x = \cos(t), t \in [0, \pi], x \in [-1, 1], \sqrt{1-x^2} = \sin(t), dx = -\sin(t) dt$

2. Déduts de la relation $\cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 1$

- Si l'intégrant est fonction $\sqrt{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
On peut poser $x = \sinh(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$

$$dx = \cosh(t) dt, \quad \sqrt{1+x^2} = \cosh(t)$$

- Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2-1}, \quad x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

On peut poser $\begin{cases} x = \cosh(t), & \text{pour } x \geq 1 \\ x = -\cosh(t), & \text{pour } x \leq -1 \end{cases} \quad (t \geq 0)$

Exemples:

1. $f(x) = x^3 \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]$

Posons $s = \sin(t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sqrt{1-x^2} = \cos(t), \quad dx = \cos(t) dt$$

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \sin^2(t) \cdot \cos(t)[\cos(t)dt] \\
&= \int \sin^2(t) \cdot \cos^2(t)dt \\
&= \int \sin(t)[1 - \cos^2(t)] \cdot \cos^2(t)dt \\
&= \int \sin(t) \cos^2(t) - \int \sin(t) \cdot \cos^4(t)dt \\
&= \frac{1}{3} \cos^3(t) + \frac{1}{5} \cos^5(t) + c \\
\int f(x)dx &= -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2}^3 + \frac{1}{5} \sqrt{1-x^2}^5 + c
\end{aligned}$$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 4} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1}$$

On pose $\frac{x+1}{2} = \sinh(t)$, $x = 2 \sinh(t) - 1$, $dx = 2 \cosh(t)dt$

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= 2 \int \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx = 2 \int \cosh(t)[2 \cosh(t)dt] \\
&= 4 \int \cosh^2(t)dt = 2 \int [\cosh(2t) + 1]dt = \sinh(2t) + 2t + c \\
&= 2 \sinh(t) \cdot \cosh(t) + 2t + c = \sqrt{x^2 + 2x + 5} \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right) + 2 \arg \sinh\left(\frac{x+1}{2}\right) + c
\end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\mathbb{D}_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

- Intégration sur $x \in [1; +\infty[$

On pose $x = \cosh(t)$, $t > 0$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 - 1}dx &= \int \sinh(t)[\sinh(t)dt] \\
&= \int \sinh^2(t)dt = \frac{1}{2} \int [\cosh(2t) - 1] \\
&= \frac{1}{4} \sinh(2t) - \frac{1}{2}t + c \\
&= \frac{1}{2} \sinh(t) \cdot \cosh(t) - \frac{1}{2}t + c \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \arg \cosh(x) + c
\end{aligned}$$

- Intégration sur $x \in]-\infty; -1]$

On pose $x = -\cosh(t)$, $t \geq 0$, $\sqrt{x^2 - 1} = \sinh(t)$

$$dx = -\sinh(t)dt, \quad t = \arg \cosh(-x)$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 1} dx &= \int \sinh(t)[- \sinh(t)dt] \\ &= - \int \sinh^2(t)dt = - \left[\frac{1}{2} \sinh(t) \cdot \cosh(t) - \frac{1}{2}t \right] + c \\ &= - \left[\frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1} \cdot (-x) - \frac{1}{2} \arg \cosh(-x) \right] + c \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} \arg \cosh(-x) + c \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \begin{cases} \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} \arg \cosh(-x) + c & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \arg \cosh(x) + c & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Remarque: Soit $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$, alors $\sqrt{P_2}$ est de type $\lambda\sqrt{1-y^2}$ et on peut poser $y = \sin(t)$ ou $y = \cos(t)$
- Si $\Delta < 0$, $a > 0$, alors $\sqrt{P_2}$ est de type $\lambda\sqrt{y^2+1}$ et on peut poser $y = \sinh(t)$
- Si $\Delta > 0$, $a > 0$, alors $\sqrt{P_2}$ est de type $\lambda\sqrt{y^2-1}$ et on peut poser $y = \pm \cosh(t)$

Exemple: $f(x) = \sqrt{-x(x+6)}$

$$\mathbb{D}_f = [-6; 0]$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x} = \sqrt{-(x+3)^2 + 9} = 3\sqrt{1 - \left(\frac{x+3}{3}\right)^2}$$

et on peut poser $\frac{x+3}{3} = \sin(t)$

Intégration des fonctions rationnelles

Pour intégrer une fonction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, on la décompose en éléments simples.

Exemples:

- $f(x) = \frac{x^6+2}{x^5+x^3}$

$$= \frac{(x^6+x^4) - x^4 + 2}{x^5+x^3} = x + \frac{2-x^4}{x^3(x^2+1)} = x + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$
- $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-2)^2(x^2+3)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3} + \frac{Ex+F}{(x^2+3)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+3)^3}$

Ces éléments simples sont

1. de première espèce

- $\frac{1}{x-\alpha} = \int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + c$
- $\frac{1}{(x-\alpha)^2} = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} = -\frac{1}{x-\alpha} + c$
- $\frac{1}{(x-\alpha)^n} = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + c$

2. ou de deuxième espèce

$$\frac{px+q}{(x^2+2ax+b)^n}, \quad \text{avec } \Delta' = a^2 - b < 0$$

Dans ce cours on n'intègre que des éléments simples de 2^e espèce dont le dénominateur est de multiplicité 1 ($n = 1$)

$$\int \frac{px+q}{x^2+2ax+b} dx = \int \left[\frac{\frac{p}{2}(2x+2a)}{x^2+2ax+b} + \frac{q-ap}{x^2+2ax+b} \right] dx$$

On commence donc à faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur et l'intégration de $\frac{1}{x^2+2ax+b}$ donne une fonction arctangente.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+2ax+b} &= \frac{1}{(x^2+2ax+a^2) + \underbrace{b-a^2}_{>0}} = \frac{1}{(x+a)^2 + (b-a^2)} = \frac{\frac{1}{b-a^2}}{\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{b-a^2}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{b-a^2}}}{\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) \right]' \end{aligned}$$

En résumé:

$$\int \frac{px+q}{x^2+2ax+b} dx = \frac{p}{2} \ln(x^2+2ax+b) + \frac{q-ap}{\sqrt{b-a^2}} \cdot \arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + c$$

Exemple: $f(x) = \frac{-2x^3+6x^2-6x+10}{x^3+x^2+3x-5}$

Division euclidienne

$$\begin{array}{rrrr|l} -2x^3 & +6x^2 & -6x & +10 & x^3+x^2+3x-5 \\ -(-2x^3 & -2x^2 & -6x & +10) & -2 \\ \hline 0 & +8x^2 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = -2 + \frac{8x^2}{x^3+x^2+3x-5} = -2 + \frac{8x^2}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

Décomposition en éléments simples

$$\frac{8x^2}{(x-1)\underbrace{(x^2+2x+5)}_{\Delta < 0}} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

- $(x-1), x=1 : \frac{8}{8} = A \iff A=1$
- $x, x \rightarrow \infty : 8 = A+B \iff B=7$

$$\bullet \quad x = 0 : 0 = -A + \frac{C}{5} \iff C = 5$$

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{7x+5}{x^2+2x+5}$$

Intégration de $\frac{7x+5}{x^2+2x+5}$

$$\frac{7x+5}{x^2+2x+5} = \frac{\frac{7}{2}(2x+2)}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5}$$

et

$$\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$$

D'où

$$\int \frac{-2x^3+6x^2-6x+10}{x^3+x^2+3x-5} dx = \frac{7}{2} \ln(x^2+2x+5) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

Intégration des fonctions rationnelles trigonométriques

Soit f une fonction rationnelle trigonométrique $f(x) = R(\cos(x), \sin(x))$ où $R(u, v)$ est rationnelle en u, v .

On peut calculer $\int f(x) dx$ en se ramenant à l'intégration d'une fonction rationnelle à l'aide d'un changement de variable. Le choix du changement de variable peut se faire à l'aide des tests de Bioche.

- Si le produit $f(x)dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$, alors on pose

$$u = \sin(x) \quad x = \arcsin(u)$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \quad \text{et} \quad \cos(x) = \sqrt{1-u^2}$$

- Si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsque $x \leftrightarrow (-x)$, on pose

$$u = \cos(x), \quad x = \arccos(u)$$

$$dx = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \sin(x) = \sqrt{1-u^2}$$

- Si $f(x) \cdot dx$ est invariant par $x \leftrightarrow (\pi + x)$ On pose

$$u = \tan(x), \quad x = \arctan(u), \quad \sin(x) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

- Si les 3 tests d'invariance sont négatif, on pose

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad x = 2 \arctan(u), \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Exemples:

$$1. f(x) = \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}$$

Test d'invariance sur $f(x) \cdot dx$

- $f(\pi - x) \cdot d(\pi - x) = \frac{\sin^3(\pi-x)}{1+\cos^3(\pi-x)} \cdot \underbrace{[(\pi-x)'dx]_{=-1}}_{=-1} = \frac{+\sin^3(x)}{1-\cos^3(x)} \neq f(x) \cdot dx$
 - $f(-x) \cdot d(-x) = \frac{-\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)} \cdot (-dx) = f(x)dx$
- On pose donc

$$u = \cos(x), \quad x = \arccos(x), \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

Changement de variable

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u^3} \cdot \left(-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\right) \\ &= -\int \frac{1-u^2}{1+u^3} = +\int \frac{(u-1)(u+1)}{(u+1)(u^2-u+1)} du \\ &= \int \underbrace{\frac{u-1}{u^2-u+1}}_{\Delta < 0} du \end{aligned}$$

$$\frac{u-1}{u^2-u+1} = \frac{\frac{1}{2}(2u-1)}{u^2-u+1} = \frac{\frac{1}{2}}{u^2-u+1}$$

et

$$\frac{1}{u^2-u+1} = \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

D'où

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2} \ln(u^2-u+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2} \ln(\cos^2(x) - \cos(x) + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\cos(x)-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$2. f(x) = \frac{1}{1+3\sin(2x)+7\cos^2(x)}$$

- Invariance**
- $f(\pi - x) \cdot \underbrace{d(\pi - x)}_{=-dx} = \frac{1}{1-3\sin(2x)+7\cos^2(x)} \cdot (-dx) \neq f(x)dx$
 - $f(-x) \cdot \underbrace{d(-x)}_{=-dx} = \frac{1}{1-3\sin(2x)+7\cos^2(x)} \cdot (-dx) \neq f(x)dx$
 - $f(\pi + x) \cdot \underbrace{d(\pi + x)}_{=+dx} = \frac{1}{1+3\sin(2x)+7\cos^2(x)} = f(x)dx$, on pose

$$u = \tan(x)$$

Changement de variable

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{1+3\sin(2x)+7\cos^2(x)} = \int \frac{1}{1+6 \cdot \frac{u}{1+u^2} + 7 \cdot \frac{1}{1+u^2}} \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

3.3 Applications géométriques du calcul intégral

3.3.1 Calcul d'aire géométrique

1. Aire du domaine D limité par Γ , l'axe O_x , $x = a$ et $x = b$

(a) Γ défini par $y = f(x)$ (f continue)

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Si $f(x)$ change de signe sur $[a, b]$

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_0} + \int_{x_0}^b [-f(x)] \cdot dx \\ &= \int_a^{x_0} f(x) dx - \int_{x_0}^b f(x) dx \end{aligned}$$

Il est essentiel de faire une esquisse du domaine D .

Remarque: Si pour calculer $\int_a^b f(x) dx$, on pose $x = \varphi(t)$ (φ bijectif et C^{-1}), alors

- Soit on revient en x : $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$
- Soit on fait suivre les bornes en fonction de t :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)] \cdot \dot{\varphi}(t) dt$$

Exemple: D limité par

$$y = \sqrt{x^2 + 9}, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = 4$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 f(x) dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{x^2 + 9} dx \\ &= 3 \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx \end{aligned}$$

On pose $x = \sinh(t)$, $dx = \cosh(t) dt$

$$\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} = \cosh(t) \quad \text{et} \quad x \in [0, 4] \iff t \in [0, \arg \sinh\left(\frac{4}{3}\right)]$$

$$A = 3 \int_0^a \cosh(t) \cdot [3 \cosh(x) dt]$$

Posons $a = \arg \sinh \left(\frac{4}{3} \right)$

$$\begin{aligned}
 A &= 9 \int_0^a \cosh^2(t) dt = 9 \int_0^a \frac{\cosh(2t) + 1}{2} dt \\
 &= \frac{9}{2} \left[\frac{\sinh(2t)}{2} + t \right] \Big|_0^a \\
 &= \frac{9}{2} [\sinh(t) \cdot \cosh(t) + t] \Big|_0^a \\
 &= \frac{9}{2} \left[\frac{4}{3} \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3} \right)^2} + a - 0 \right] \\
 &= \frac{9}{2} \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} + a \right] = 10 + \arg \sinh \left(\frac{4}{3} \right)
 \end{aligned}$$

□

(b) Γ est défini paramétriquement

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$A = \int_a^b |y| dx = \int_a^b y dx$$

$$A = \int_{t_a}^{t_b} y(t) [\dot{x}(t) dt]$$

Exemple: Vérifions que l'aire du disque unité vaut π

$$\Gamma = \begin{cases} \cos(t) \\ \sin(t) \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 y \cdot dx$$

Expression de A en fonction de t

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot [\dot{x}(t) dt]$$

$$x(t) = 0 \implies t = \frac{\pi}{2}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = 1 \implies t = 0, \quad t_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t) \underbrace{\dot{x}(t)}_{<0} \cdot \underbrace{dt}_{<0} \\
&\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{dx>0} \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin(t) \cdot [-\sin(t)dt] \\
&= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2(t)dt = + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\
&= \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - (0 - 0) \right\} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

□

2. Aire au domaine finie par deux courbes

- Points d'intersection
- Esquisse du domaine de D
- Calcul de l'aire A de D

$$\mathcal{A} = \int_{x_A}^{x_B} |y_2 - y_1| dx = \int_{x_A}^{x_B} (y_2(x) - y_1(x)) dx$$

Attention! Si A et B ne sont pas deux points d'intersections consécutifs.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{x_A}^{x_B} |y_1 - y_2| dx \\
&= \int_{x_A}^{x_0} (y_1 - y_2) dx + \int_{x_0}^{x_B} (y_2 - y_1) dx
\end{aligned}$$

Exemple 1:

$$\Gamma_1 : y = -x^2 + 3, \quad \Gamma_2 : y = x^2 - 2x - 1$$

- Points d'intersection

$$\begin{aligned}
y_1 = y_2 &\iff -x^2 + 3 = x^2 - 2x - 1 \\
&\iff 2x^2 - 2x - 4 = 0 \iff 2(x - 2)(x + 1) = 0 \\
&\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2
\end{aligned}$$

- Esquisse de D

$$y_2 = x^2 - 2x - 1 \iff y + 22 = (x - 1)^2 \quad S_2(1, -2)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (y_1 - y_2) \cdot dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx \\ &= 2 \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= 2 \left[\left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right] \\ &= 2 \left[-3 - \frac{1}{2} + 8 \right] = () \end{aligned}$$

Exemple 2: D limité par

$$y_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{x} \quad \text{et} \quad y_2 = \arcsin(x)$$

$$A = \int_0^1 (y_1 - y_2) dx = \int_0^1 \left[\frac{\pi}{2}\sqrt{x} - \arcsin(x) \right] dx$$

Recherche des primitives

- $\int \frac{\pi}{2}\sqrt{x} dx = \frac{\pi}{3}\sqrt{x^3} + c$
- $\int \underset{\uparrow}{1} \cdot \arcsin(x) \underset{\downarrow}{dx}$

$$\begin{aligned} &= x \cdot \arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{x^3} - x \cdot \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 \\ &= \left[\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - 0 \right) - (0 - 0 - 1) \right] \\ &= 1 - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Remarque: Si les 2 fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[a, b]$, alors on peut calculer l'aire A de D en décomposant D en "tranches horizontales" de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{y_0}^{y_1} (x_1 - x_2) dy \\
 &= \int_{y_0}^{y_1} (x_1(y) - x_2(y)) dy
 \end{aligned}$$

avec

$$y = y_1(x) \iff x = x_1(y)$$

et

$$y = y_2(x) \iff x = x_2(y)$$

Reprise de l'exemple précédent

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x_2(y) - x_1(y)] dy$$

avec

$$y_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{x} \iff x = \left(\frac{2y}{\pi}\right)^2, \quad x_1(y) = \frac{4}{\pi^2} y^2$$

et

$$y_2 = \arcsin(x) \iff x = \sin(y), \quad x_2(y) = \sin(y)$$

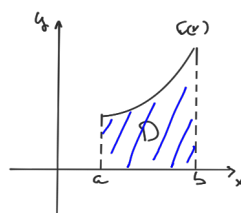
$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(y) - \frac{4}{\pi^2} y^2 \right] dy \\
 &= \left[-\cos(y) - \frac{4}{3\pi^2} y^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left[\left(0 - \frac{4}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{\pi^3}{8} \right) - (-1 - 0) \right) \right] = -\frac{\pi}{6} + 1
 \end{aligned}$$

3.3.2 Calcul de volume

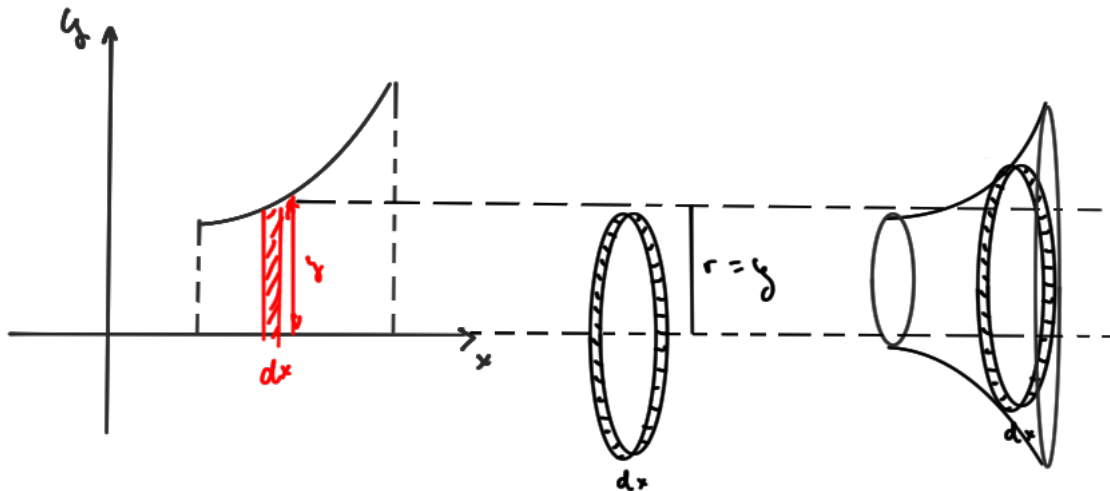
Volume d'un corps de révolution

Soit f continue sur $[a, b]$ et D le domaine du plan limité par

$$y = f(x), \quad y = 0, \quad x = a \quad \text{et} \quad x = b$$



On cherche à définir le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe O_x



La section de corps par le plan d'équation $x = x_0$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon

$$r = y(x_0) = f(x_0)$$

et d'aire

$$A(x_0) = \pi r^2 = \pi f^2(x_0)$$

La somme de Reimann

$$\sum_{k=1}^n \pi f^2(t_k) \cdot \Delta x_k$$

est une approximation du volume cherché d'autant plus précis que n est grand et les Δx_k petits.

Or

$$\sum_{k=1}^n \pi f^2(t_k) \cdot \Delta x_k$$

converge car si f est continue, πf^2 l'est aussi et

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \pi f^2(t_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Par définition

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Le "volume élémentaire" a pour expression

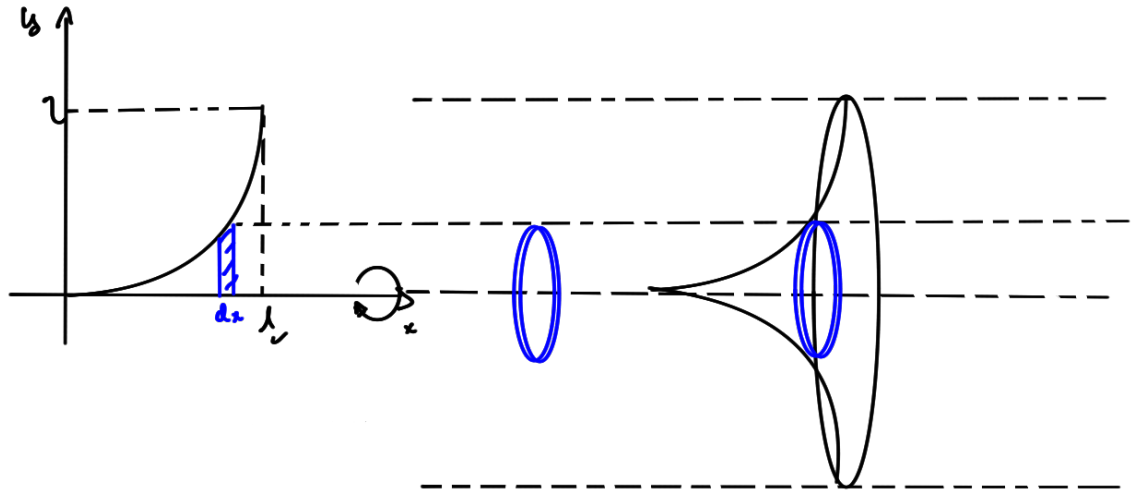
$$dV = \underbrace{\pi f^2(x)}_{=A(x)} \cdot dx$$

où $A(x)$ est l'aire de la section du corps par le plan ($x = x_0$) perpendiculaire à l'axe de rotation.

Exemples:

1. $f(x) = 2x^3$, $x \in [0, 1]$

D limité par $y = f(x)$, $y = 0$ et $x = 1$ Rotation autour de O_x



La section de ce corps par le plan $x = x_0$ perpendiculaire à l'axe de rotation est un disque d'aire

$$A(x_0) = \pi r^2$$

avec

$$r = y = f(x_0)$$

$$A(x_0) = \pi f^2(x_0)$$

et

$$V = \int_0^1 A(x) dx$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (2x^3)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 4x^6 dx = \pi \frac{4}{7} x^7 \Big|_0^1 = \frac{4}{7} \pi \end{aligned}$$

2. $f(x) = 2x^3$, $x \in [0, 1]$

D limité par $y = f(x)$, $y = 2$, $x = 0$

Axe de rotation: $x = 0$

La section de ce corps par le plan $x = y_0$ perpendiculaire à l'axe de rotation est un disque d'aire

$$A(y_0) = \pi r^2$$

avec

$$r = x(y_0)$$

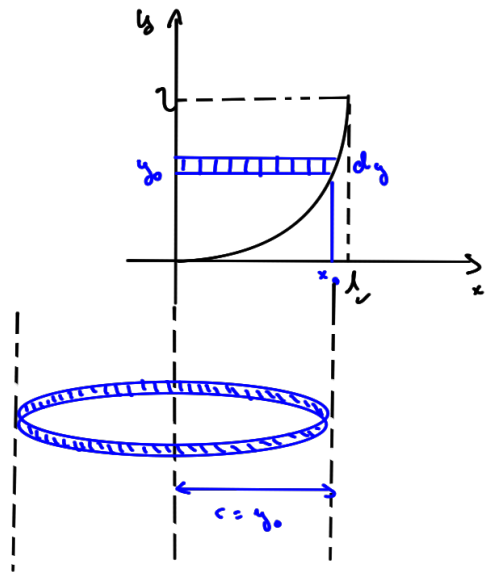
et

$$V = \int_0^2 A(y) dy = \int_0^2 \pi x^2(y) dy$$

$$y = 2x^3 \iff x = \sqrt[3]{\frac{y}{2}}$$

$$V = \pi \int_0^2 \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2}} \right)^2 dy$$

$$V = \pi \frac{6}{5} \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \Big|_0^2 = \frac{6}{5} \pi$$



3. $f(x) = 2x^3, \quad x \in [0, 1]$

D limité par $y = f(x), \quad y = 0, \quad x = 1$

Axe de rotation: $x = 1$

La section de ce corps par le plan $y = y_0$ perpendiculaire à l'axe de rotation est un disque d'aire

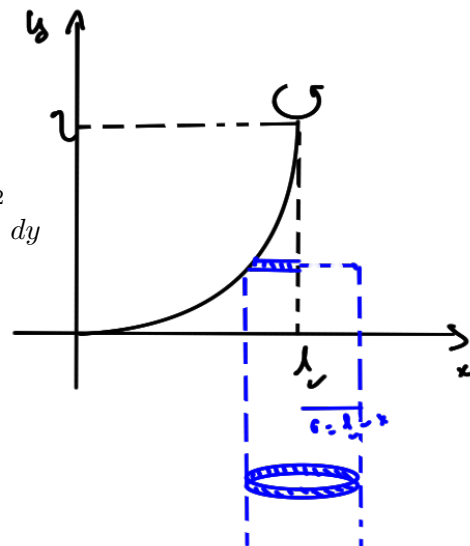
$$A(y_0) = \pi r^2$$

avec

$$r = 1 - x_0 = 1 - x(y_0)$$

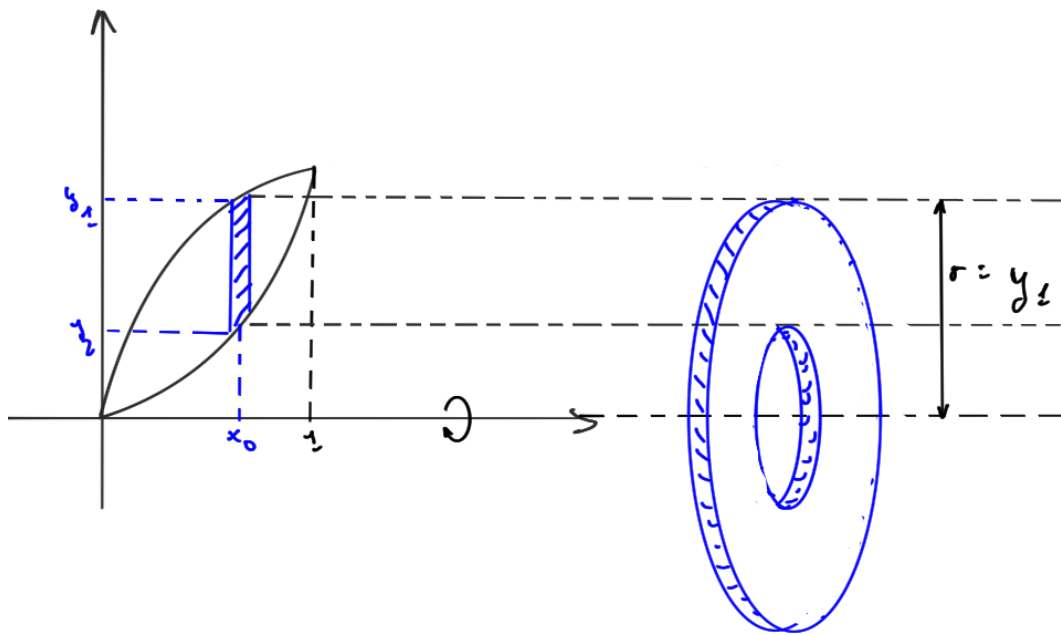
et

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi [1 - x(y)]^2 dy = \pi \int_0^2 \left[1 - \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 dy \\ &= \pi \int_0^2 \left[1 - 2 \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \right] dy \\ &= \pi \left[y - 3 \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{5} \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \right]_0^2 \\ &= \pi \left[\left(2 - 3 + \frac{6}{5} \right) - 0 \right] = \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$



4. Volume du corps engendré par la rotation autour de O_x du domaine D limité par

$$y_1 = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad y_2 = x^2$$



L'aire de la section par $x = x_0$ est une couronne de rayon extérieur $R = y_1(x_0)$ et de rayon intérieur $r = y_2(x_0)$

L'aire de cette section est

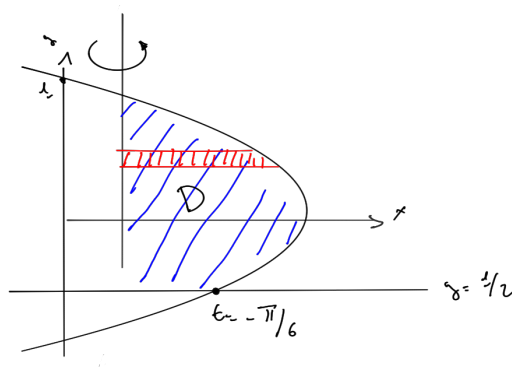
$$A(x_0) = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$A(x_0) = \pi [y_1^2(x_0) - y_2^2(x_0)]$$

et

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) dx \\ &= \int_0^1 \pi [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx \\ &= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi \end{aligned}$$

5. Reprise de l'exercice 7 de la série 19



$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

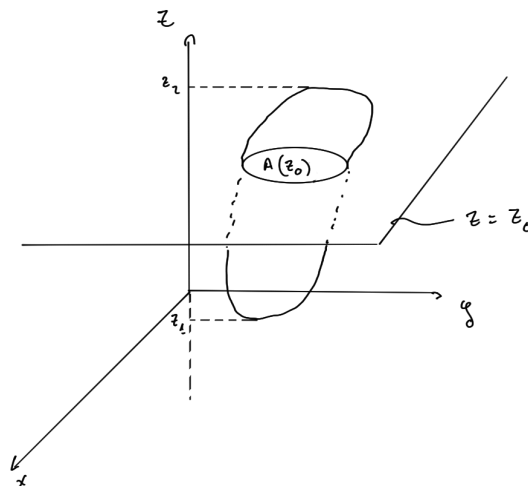
L'aire de la section par $y = y_0, y(x_0)$ est un disque d'aire πr^2 avec $r = 1 - x_0$

$$A(y(t_0)) = \pi r^2 = \pi [1 - x(t_0)]^2$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{y_0}^{y_1} A(y) dy \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} A(y(t)) \cdot \dot{y}(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi [1 - x(t)]^2 \cdot \dot{y}(t) dx \\ &[\dots] \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [\cos(t) - 4 \cos^2(t) + 4 (1 - \sin^2(t)) \cdot \cos(t)] dt \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (5 \cos(t) - 2[1 + \cos(2t)] - 4 \sin^2(t) \cdot \cos(t)) dt \\ &= \pi \cdot [5 \sin(t) - 2t - \sin(2t) - \frac{4}{3} \sin^3(t)]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \pi \cdot \left[\sqrt{3} + \frac{7}{3} - \pi \right] \end{aligned}$$

Volume d'un corps de sections d'aires connues

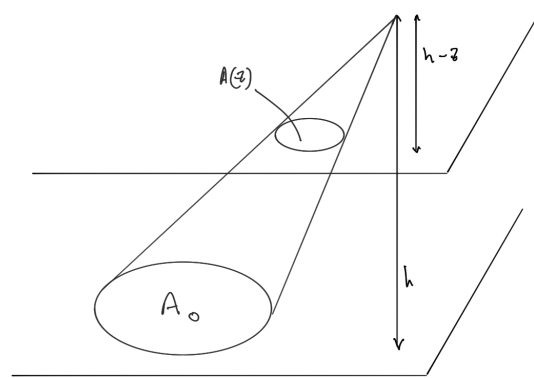
On considère un corps dont les sections par des plans \parallel à x_0y sont connues. Dans le plan $z = z_0$ ($z_1 \leq z_0 \leq z_2$) l'aire de la section vaut $A(z_0)$



Le volume de ce corps est alors donné par

$$V = \int_{z_1}^{z_2} A(z) dz$$

Exemple: On considère un cône de hauteur h et dont la base est une courbe formée plane définissant une aire A_0



Les sections de ce cône par des plans parallèles sont des figures homothétiques, plus précisément:

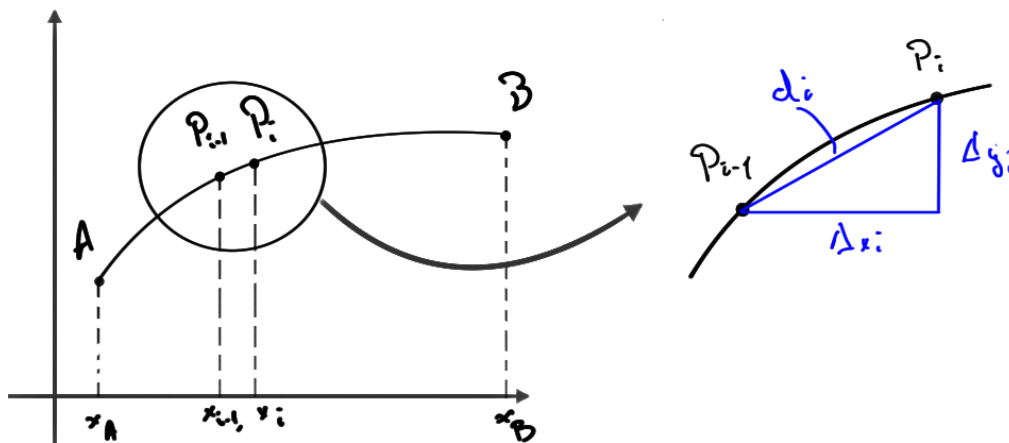
$$\frac{A(z)}{A_0} = \left(\frac{h-z}{h} \right)^2$$

3.3.3 Longueur d'un arc de courbe

Soit f une fonction C^1 sur $[x_A, x_B]$. On cherche à définir la longueur S de l'arc de Γ défini par

$$y = f(x), \quad x_A \leq x \leq x_B$$

Soit $(x_0 = x_A, x_1, \dots, x_n = x_B)$ une partition de $[x_A, x_B]$ avec $x_{i-1} < x_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$ et P_i le point d'abscisse x_i de Γ .



avec

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

et

$$d_i = \delta(P_{i-1}, P_i)$$

$$d_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad (\text{Pythagore})$$

Or d'après TAF,

$$\exists x_{i-1} \leq c_1 \leq x_i \text{ t.q. } \Delta y_i = f'(c_1) \cdot \Delta x_i$$

où

$$\begin{aligned} d_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(c_i) \cdot \Delta x_i]^2} \\ &= \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \cdot \Delta x_i \quad (\Delta x_i > 0) \end{aligned}$$

Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \cdot \Delta x_i$$

S_n est une approximation de S d'autant plus précise que n est grand et les Δx_i sont petits. S_n est une somme de Reimann de la fonction $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ qui est continue car f est C^1 . Donc cette somme de Reimann converge:

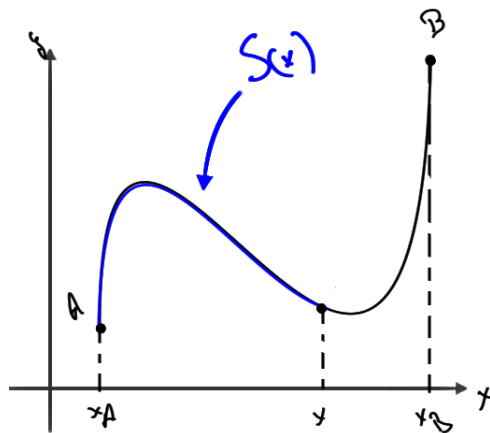
$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} S_n = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Par définition

$$S = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Soit

$$S(x) = \int_{x_A}^x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad x_A \leq x \leq x_B$$



$$dS = S'(x) dx$$

Et d'après le théorème fondamentale

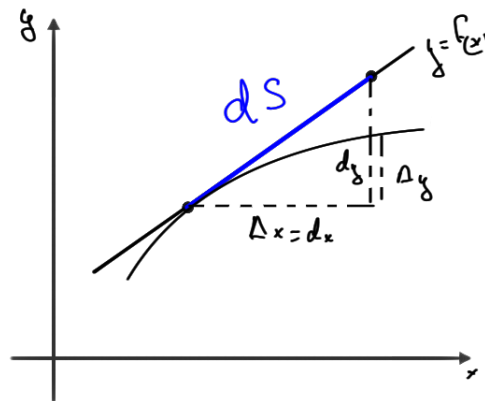
$$S'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_A}^x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

d'où

$$dS = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (dx > 0)$$

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = (dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Interprétation géométrique

**Remarques:**

1. Si f est bijective sur $[x_A, x_B]$, on peut calculer S en intégrant par rapport à x ou à y

$$S = \int_{\Gamma} dS = \int_{\Gamma} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (x_1 < x_2)$$

$$S = \int_{\Gamma} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy \quad (y_1 < y_2)$$

2. Si Γ est défini paramétriquement

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{\Gamma} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \end{aligned}$$

Exemples:

1. Longueur de l'arc défini par

$$y = f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 5$$

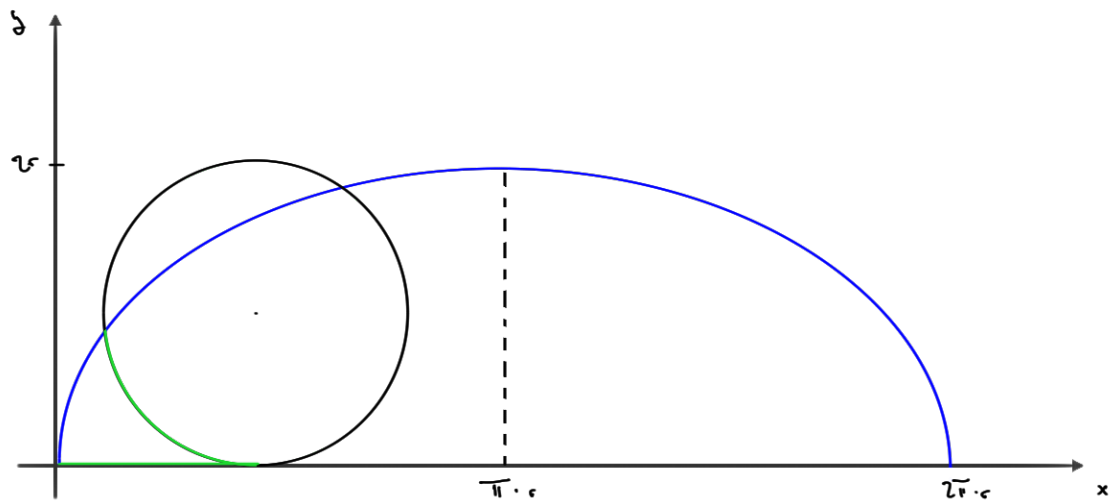
$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{4}\right)}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{x}{4}} dx = \frac{8}{3} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 \\ &= \frac{8}{3} \left[\left(1 + \frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{8}{3} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 \right] = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

2. Longueur d'une arche de cycloïde.

La cycloïde est la trajectoire d'un point fixe sur un cercle qui roule sur une droite



$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = r(t - \sin(t)) \\ y(t) = r(1 - \cos(t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

avec

$$\dot{x}(t) = r(1 - \cos(t)) \quad \text{et} \quad \dot{y}(t) = r \sin(t)$$

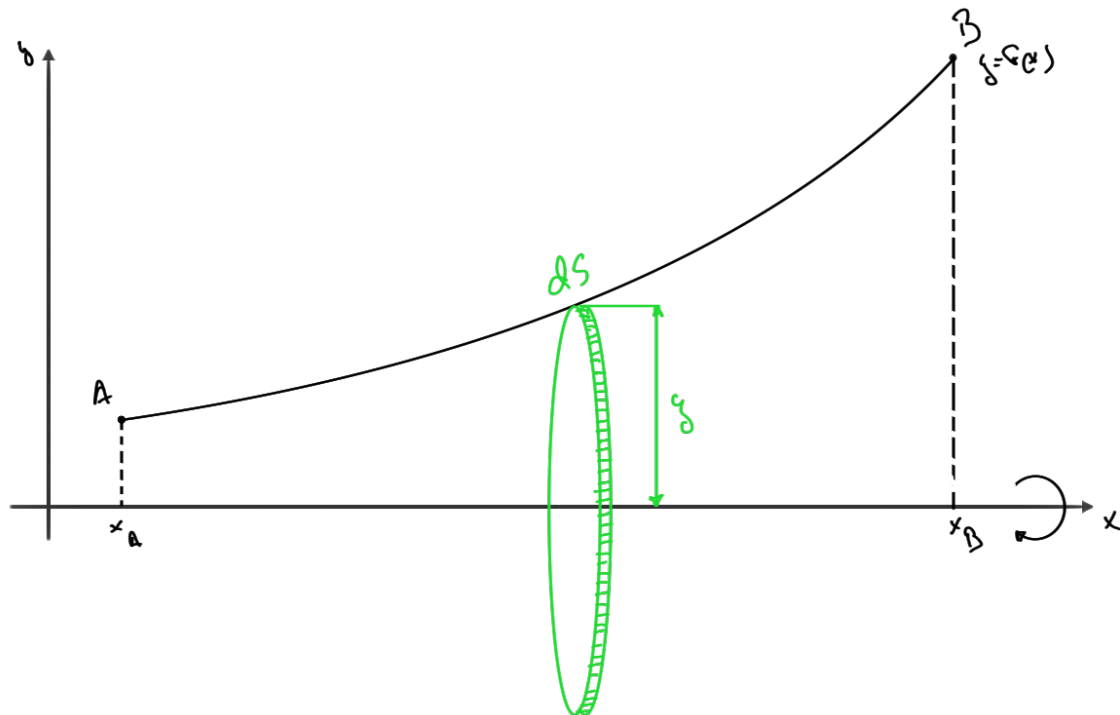
$$\begin{aligned} \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) &= r^2 \left[(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \right] \\ &= r^2 \left[1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) \right] \\ &= r^2 \left[2 - 2\cos(t) \right] \\ &= 4r^2 \left[\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2r \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2r \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= -2r \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = -4r[-1 - 1] = 8r \end{aligned}$$

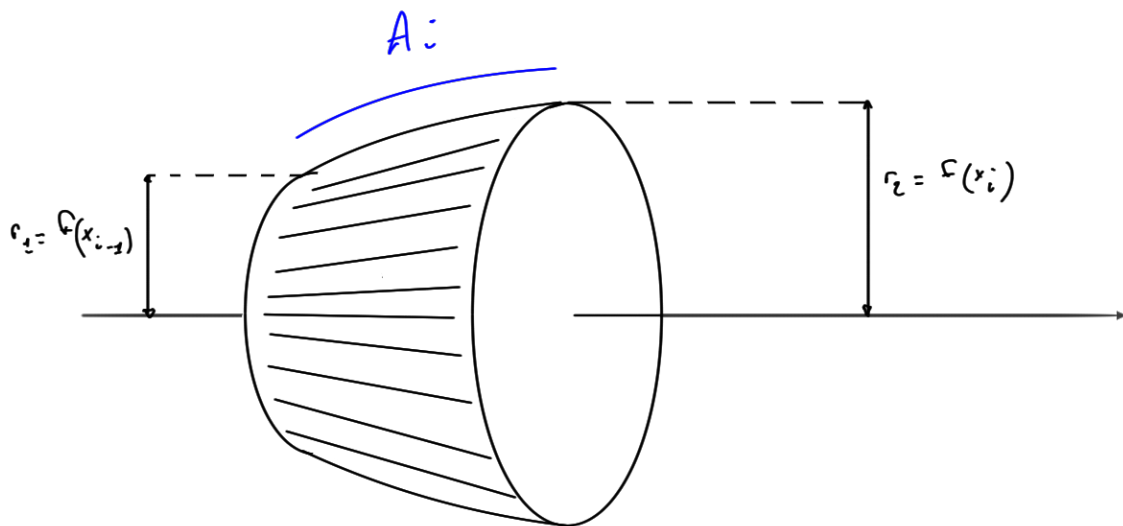
3.

3.3.4 Aire d'une surface de révolution

Soit $f \in C^1_{[x_A, x_B]}$. On cherche à définir l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de $y = f(x)$ autour de O_x



La "surface-élémentaire" est un tronc de cône



dont l'aire A_i est donnée par

$$A_i = \underbrace{2\pi \frac{r_1 + r_2}{2}}_{\text{circonférence moyenne}} \cdot d_i$$

$$A_i = 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot d_i$$

La somme de Riemann correspondante converge vers

$$A = \int_{\Gamma} \underbrace{2\pi \cdot f(x)}_{\text{circonférence}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{élément de longueur d'aire}}$$

qui définit l'aire cherchée.

On peut intégrer A par rapport à x ou y

$$A = \int_{\Gamma} 2\pi f(x) ds = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (x_1 < x_2)$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi y \sqrt{x'^2(y) + 1} dy \quad (y_1 < y_2)$$

Exemples:

1. $y = \cosh(x), \quad x \in [0, 1]$

Rotation autour de 0_x

$$A = \int_{\Gamma} 2\pi y ds = \int_0^1 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

avec $y'^2(x) = \sinh^2(x)$

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 \cosh(x) \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \cosh^2(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{\cosh(2x) + 1}{2} dx \\ &= \pi \left[\frac{\sinh(2x)}{2} + x \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} [\sinh(2) + 2] \end{aligned}$$

2. Aire