

EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1A
PREPA-031(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 2

Équations et inéquations sur les réels

2.1 Identité algébrique

Propriétés:

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.
- L'identité remarquable. Soient $a, b \in \mathbb{R}$
 1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
 2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
 3. $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ $a + b$: expression conjugué de $a - b$
 4. $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ $a^2 + ab + b^2$: expression conjugué de $a - b$
 5. $a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Exemples: Amplifions par l'expression conjugué:

1.
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$
2.
$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}{x+1}, \quad (x \neq -1)$$

2.2 Ensemble solutions

Exemples:

1. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$:

$$4x + 5 = 0$$

L'unique solution est $x = -\frac{5}{4}$

L'ensemble solution est $S = \{-\frac{5}{4}\}$

2. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$:

$$2x \geq 3$$

L'ensemble solution $S = [\frac{3}{2}; +\infty[$

Définition: Soient f, g deux fonctions définies sur $D_{\text{def}} \in \mathbb{R}$.

Résoudre l'équation:

$$f(x) = g(x)$$

ou l'inéquation $f(x) < g(x)$ (strict)

ou encore $f(x) \leq g(x)$ (large)

C'est chercher l'**ensemble aux valeurs** de x vérifiant l'équation ou l'inéquation

$$S = \{x \in \mathbb{D}_{\text{def}} \subset \mathbb{R} \mid \underbrace{x \text{ vérifie l'équation ou l'inéquation}}_{\text{proposition } P(x)}\}$$

- \mathbb{R} : l'ensemble des valeurs à considérer (référentiel)
- \mathbb{D}_{def} : l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'expression $P(x)$ a un sens.
- L'équation ou l'inéquation est contrainte ou propriété imposées

La résolution d'un problème passe par une succession de problème équivalents: les ensembles solutions sont identiques.

Exemples: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

1. $P(x) : \sqrt[3]{x} \leq 2$

- $\mathbb{D}_{\text{def}} = \mathbb{R}$
- Équivalence:

$$\underbrace{\sqrt[3]{x} \leq 2}_{\text{proposition } P(x), \text{ ensemble } A} \implies \underbrace{x \leq 2^3 = 8}_{\text{proposition } Q(x), \text{ ensemble } B}$$

Ainsi

$$S = A = B =] -\infty; 8]$$

2. $P(x) : x^2 = 64$

- $\mathbb{D}_{\text{def}} = \mathbb{R}$
- Implication

$$\underbrace{x^2 = 64}_{P(x):A} \Leftarrow \underbrace{x = 8}_{Q(x):B}$$


On a $B = \{8\} \subset \{-8; 8\} = A = S$

3. $P(x) : \sqrt{x} = -4$

- $\mathbb{D}_{\text{def}} = \mathbb{R}_+$
- Implication:

$$\underbrace{\sqrt{x} = -4}_{P(x):A} \implies \underbrace{x = (-4)^2 = 16}_{Q(x):B}$$

Ainsi $S = A = \emptyset \subset \{16\} = B$ on a des solutions "parasites"

 Savoir (et énoncé) ce qu'on cherche (on veut faire)

2.2.1 Équations et inéquations linéaires

Définition: Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \cdot x = b$$

est une équation linéaire en $x \in \mathbb{R}$

Clairement, $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$

Pour résoudre une équation linéaire, **on cherche à isoler x : discussion selon a**

- $a \neq 0$ (on peut diviser par a):

$$ax = b \iff x = \frac{b}{a} \quad \text{d'où} \quad S = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

- $a = 0$ (on ne peut pas diviser par a !)

$$ax = b \iff 0x = b$$

– Si $b = 0$: $0x = 0$. Tout $x \in \mathbb{R}$ est solution $S = \mathbb{R}$

– Si $b \neq 0$: $0x \neq 0$. Aucun x est solution $S = \emptyset$

Exemple: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$ l'équation

$$m^2 \cdot x - m - 4x = 2$$

en fonction de paramètre réel m (pour chaque m l'équation est différente)

Remarque: Équation du 1^{er} degré, en x , on cherche à **isoler x** .

$$\underbrace{(m^2 - 4)}_a x = \underbrace{m + 2}_b$$

Discussion du coefficient de x

- $m^2 - 4 \neq 0$, $m \notin \{-2; 2\}$

$$\implies x = \frac{\cancel{m+2}}{(\cancel{m+2}) \cdot (m-2)} = \frac{1}{m-2}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{m-2} \right\}$$

- $m^2 - 4 = 0$, $m \in \{-2; 2\}$

– si $m = -2$

$$(m^2 - 4)x = m + 2 \iff 0x = 0 \\ S = \mathbb{R}$$

– si $m = 2$

$$(m^2 - 4)x = m + 2 \iff 0x = 4 \\ S = \emptyset$$

Résumé:

- si $m \notin \{-2; 2\}$, $S = \left\{ \frac{1}{m-2} \right\}$
- si $m = -2$, $S = \mathbb{R}$
- si $m = 2$, $S = \emptyset$

Définition: Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$ax > b$$

est une inéquation **linéaire** en $x \in \mathbb{R}$: on cherche à isoler x .D'où une discussion de a .

- $a > 0$:

$$ax > b \iff x > \frac{b}{a}$$

$$S = \left] \frac{b}{a}; +\infty \right[$$

- $a = 0$:

$$ax > b \iff 0x > b$$

- si $b < 0$, tout x est solution de S .

$$S = \mathbb{R}$$

- si $b \geq 0$, aucun x est solution de S .

$$S = \emptyset$$

- $a < 0$:

$$ax > b \iff x < \frac{b}{a}$$

$$S = \left] -\infty; \frac{b}{a} \right[$$

Remarque: Résolution similaire pour $ax \geq b$, $ax < b$ et $ax \leq b$ **Exemple:** Résoudre en $x \in \mathbb{R}$: $m^2x - m - 4m \leq 2$ en fonction du paramètre m .**Remarque:** Inéquation linéaire, on cherche à isoler x

$$(m^2 - 4)x \leq m + 2$$

Discussion du coefficient de x

- Paramètre positif:

$$m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2) > 0 \implies m \in] -\infty; -2] \cup [2; +\infty [$$

$$(m^2 - 4)x \leq m + 2 \iff x \leq \frac{m + 2}{(m - 2)(m + 2)} = \frac{1}{m - 2}$$

$$S = \left] -\infty; \frac{1}{m - 2} \right]$$

- Paramètre nul:

$$m^2 - 4 = 0 \iff m \in \{-2; 2\}$$

$$- m = -2$$

$$(m^2 - 4)x \leq m + 2 \iff 0x \leq 0$$

$$S = \mathbb{R}$$

$$- m = 2$$

$$(m^2 - 2)x \leq m + 2 \iff 0x \leq 4$$

$$S = \mathbb{R}$$

- Paramètre négatif:

$$m^2 - 4 < 0 \iff m \in]-2; 2[$$

$$(m^2 - 4)x \leq m + 2 \iff x \geq \frac{1}{m+2}$$

$$S = \left[\frac{1}{m-2}; +\infty \right[$$

Résumé

- si $m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, $S = \left] -\infty; \frac{1}{m-2} \right]$
- si $m \in \{-2; 2\}$, $S = \mathbb{R}$
- si $m \in]-2; 2[$, $S = \left[\frac{1}{m-2}; +\infty \right[$

2.3 Équations et inéquations rationnelles

Définition: Une fonction rationnelle en $x \in \mathbb{R}$ est un quotient de fonction polynomiale. Pour résoudre une équation $f(x) = g(x)$ ou inéquations $f(x) < g(x)$ sur la fonction rationnelle.

- On différencie le domaine de définition \mathbb{D}_{def} .
- On passe **toutes** les expressions du même côté de l'égalité (ou inégalités) et on étudie le signe en factorisant.

Exemple: Résoudre en x l'inéquation $x > \frac{4}{x}$

- $\mathbb{D}_{\text{def}} = \mathbb{R}$
- Inéquation rationnelle: on porte tout du même côté

$$\begin{aligned} x - \frac{4}{x} > 0 &\iff \frac{x^2 - 4}{x} > 0 \\ &\iff \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x} > 0 \end{aligned}$$

- tableau des signes (remarque: les valeurs remarquables sont $-2, 0, 2$)

x		-2		0		2	
		\downarrow		\downarrow		\downarrow	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x}$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

$$S =] - 2; 0[\cup] 2; +\infty[$$

missing stuff

2.4 section missing

missing stuff

2.5 section missing

missing stuff

2.6 Valeur absolue

Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x , notée $|x|$ est réel positif ou null

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple:

$$|-3| = -(-3) = 3 \quad |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

Propriétés: Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x^2| = x^2$
4. $|-x| = |x|$
5. $x = \text{sgn}(x) \cdot |x|$ et $|x| = \text{sgn}(x) \cdot x$
6. $-|x| \leq x \leq |x|$
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
8. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

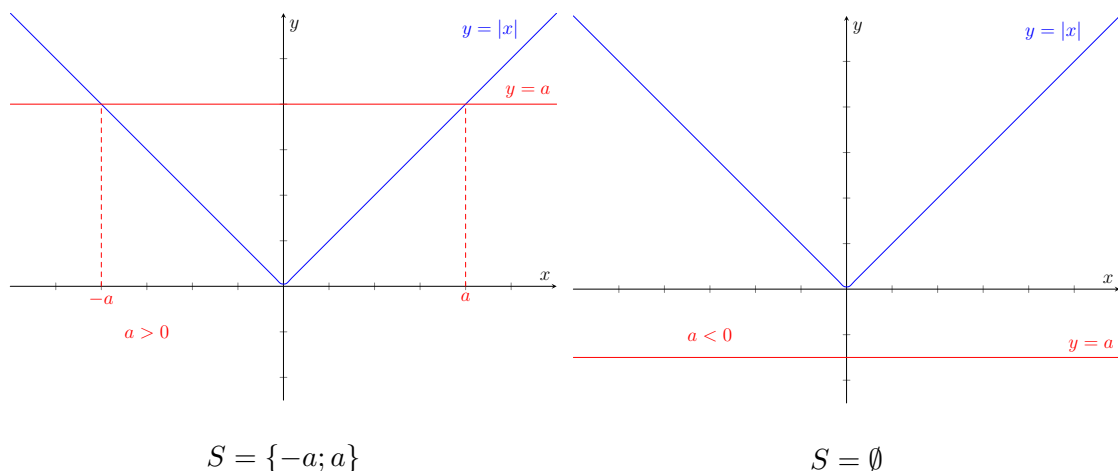
2.6.1 Equation à valeur absolue

Remarque: L'équation $|x| = a$, $a \in \mathbb{R}$ ne peut clairement pas avoir de solutions en $x \in \mathbb{R}$ si $a < 0$

Théorème: On a l'équivalence

$$|x| = a \iff a \geq 0 \text{ et } \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$$

En effet,



Remarque: (généralisation)

Soient f et g deux fonctions réelles. On a l'équivalence

$$|f(x)| = g(x) \iff g(x) \geq 0 \text{ et } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Remarque: On ne discute pas le signe de $f(x)$, mais seulement celui de $g(x)$ (condition de positivité). On travaille donc sur le référentiel restreint $\mathbb{D}_{\text{déf}} \cap \mathbb{D}_{\text{positif}}$

Exemple: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

$$|x^2 + 2x - 5| = x + 1$$

- domaine de définition: $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
- équivalence:

$$|x^2 + 2x - 5| = x + 1 \iff x + 1 \geq 0 \text{ et } \begin{cases} x^2 + 2x - 5 = x + 1 & (1) \\ x^2 + 2x - 5 = -(x + 1) & (2) \end{cases}$$

- condition de positivité : $x + 1 \geq 0$
D'où $\mathbb{D}_{\text{pos}} = [-1; +\infty]$

- équation (1)

$$(1) : x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3) \cdot (x - 2) = 0$$

d'où $S_1 = \{-3, 2\}$

Remarque: -3 est à exclure: $-3 \notin \mathbb{D}_{\text{pos}}$

- l'équation (2)

$$(2) : x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + 4) \cdot (x - 1) = 0$$

d'où $S_1 = \{-4, 1\}$

- Solution:

$$S = \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap \mathbb{D}_{\text{pos}} \cap (S_1 \cup S_2) = \{1, 2\}$$

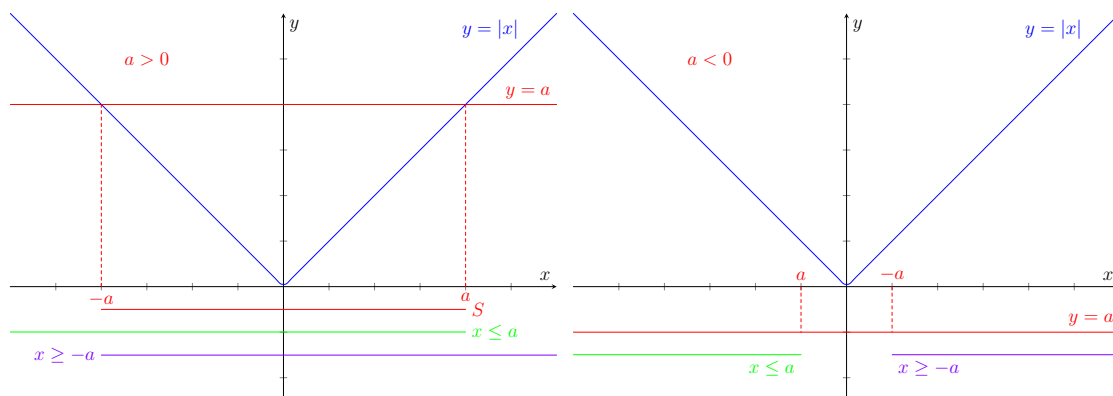
2.6.2 Inéquation à valeur absolue

Remarque: L'inéquation $|x| \leq a$, $a \in \mathbb{R}$, ne peut pas avoir de solution si $a < 0$. On n'a pourtant besoin de discuter le signe de a !

Théorème: Soit $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$|x| \leq a \iff \begin{cases} x \leq a \\ \text{et} \\ x \geq -a \end{cases}$$

En effet,



$$S = [-a, a] =]-\infty; a] \cap [-a; +\infty[$$

$$S = \emptyset =]-\infty; a] \cap [-a; +\infty[$$

Théorème: Soient f et g deux fonctions réelles. On a l'équivalence

$$|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \text{et} \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$$

Remarques:

1. On ne discutera pas le signe de $f(x)$, ni celui de $g(x)$ (le cas trivial $g(x) < 0$ est rejeté lors de l'intersection)
2. Idem avec l'inégalité stricte.

Remarque: L'inéquation $|x| \leq a$, $a \in \mathbb{R}$ admet clairement tout $x \in \mathbb{R}$ comme solution si $a < 0$ (une valeur absolue est toujours grand qu'un nombre négatif). On ne discutera pourtant pas le signe de a !

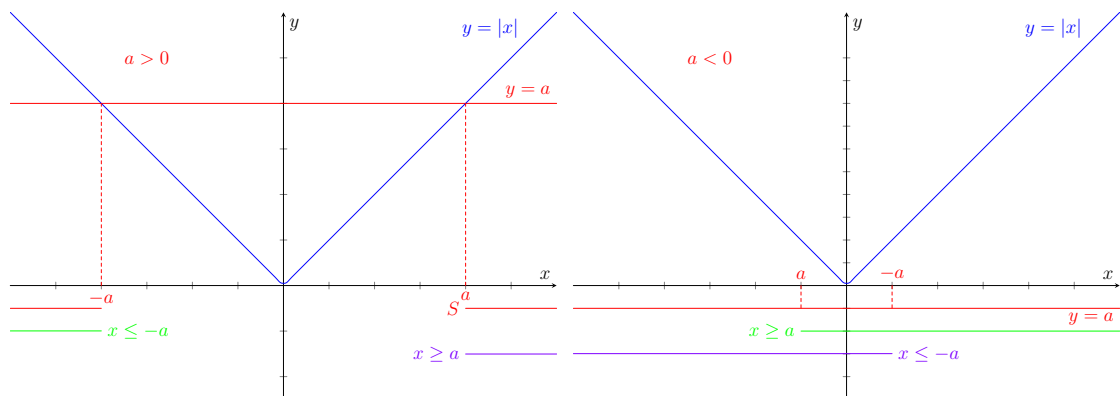
$$|x| \leq a, \quad a < 0 \text{ trivial} : \quad S = \emptyset$$

$$|x| \geq a, \quad a < 0 \text{ trivial} : \quad S = \mathbb{R}$$

Théorème: Soit $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$|x| \geq a \iff \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$$

En effet,



$$S =] -\infty; -a] \cup [a; +\infty [$$

$$S = \mathbb{R} =] -\infty; -a] \cup [a; +\infty [$$

Théorème: Soient f et g deux fonctions réelles. On a l'équivalence

$$|f(x)| \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases}$$

Remarques:

1. On ne discutera ni le signe de $f(x)$, ni celui de $g(x)$. Le cas trivial $g(x) < 0$ est traité par la réunion.
2. idem pour l'inégalité stricte.

Exemple: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

$$|x| + \frac{x-1}{2} < 0$$

- domaine de définition: $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}$
- équivalence

$$|x| < -\frac{x-1}{2} \iff \begin{cases} x < -\frac{x-1}{2} & (1) \\ \text{et} \\ x > \frac{x-1}{2} & (2) \end{cases}$$

- inéquation (1). On isole x

$$3x < 1 \text{ d'où } S_1 =]-\infty; \frac{1}{3}[$$

- inéquation (2). On isole x

$$x > -1 \text{ d'où } S_2 =]-1; +\infty[$$

- Solution:

$$S = \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap S_1 \cap S_2 =]-1; \frac{1}{3}[$$

Exemple: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

$$|x-2| > \frac{2x-4}{x}$$

- $\mathbb{D}_{\text{déf}} = \mathbb{R}^*$

-

$$|x-2| < \frac{2x-4}{x} \iff \begin{cases} x-2 > \frac{2x-4}{x} & (1) \\ \text{ou} \\ x-2 < -\frac{2x-4}{x} & (2) \end{cases}$$

- inéquation (1)

$$\begin{aligned} x-2 - \frac{2x-4}{x} &> 0 \\ (x-2) \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right) &> 0 \\ \frac{(x-2)^2}{x} &> 0 \end{aligned}$$

d'où

$$S_1 = \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\} =]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

- inéquation (2)

$$x - 2 + \frac{2x - 4}{x} < 0$$

$$(x - 2) \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right) < 0$$

$$\frac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{x} < 0$$

d'où

$$S_1 = \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\} =]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

x	-2		0		2	
$x - 2$	-	-	-	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+
$\frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x}$	-	0	+		-	0

d'où

$$S_2 =]-\infty; -2[\cup]0; 2[$$

• Solution:

$$S = \mathbb{D}_{\text{déf}} \cap (S_1 \cup S_2)$$

$$S =]-\infty; -2[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$$