EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 2A

PREPA-032(A)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sacha FRIEDLY

Printemps - 2019

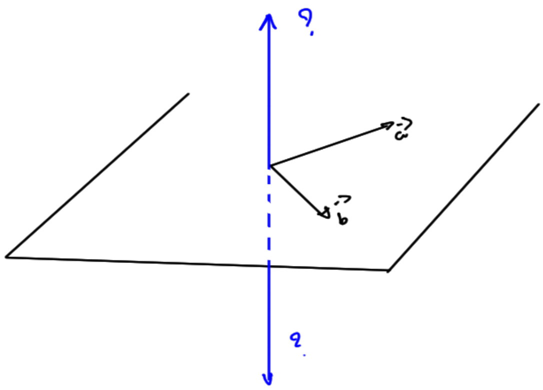
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 3

Produit vectoriel ("cross product")

Seulement dans l'ESPACE

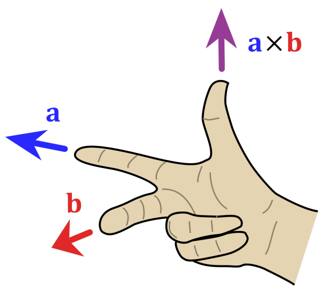
But Étant donné deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, on aimerait définir de manière univoque un vecteur $\overrightarrow{c}$ qui soit $\perp$ à $\overrightarrow{a}$ et $\perp$ à $\overrightarrow{b}$.



À défini: le **sens** et la **norme** de $\overrightarrow{c}$.

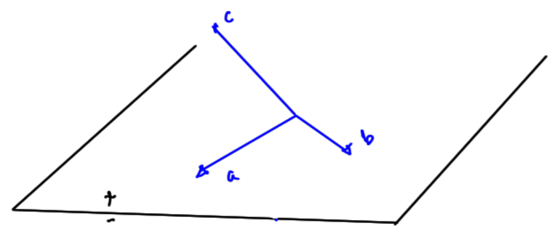
3.1 Sur l'orientation d'une paire de vecteurs

À la paire **ordonné** $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, on associe deux demi-espaces "+" et "-", à l'aide de la **règle de la main droite**

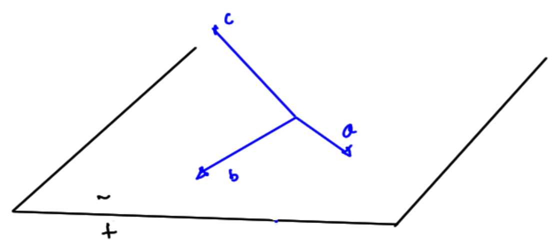


Définition: Soient $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ trois vecteurs linéairement indépendant.

- Si $\overrightarrow{c}$ pointe dans le demi-plan "+" associé à $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, on dit que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est **orienté positivement**.



- Si $\overrightarrow{c}$ pointe dans le demi-plan "-" associé à $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, on dit que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est **orienté négativement**.



Définition: Un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est **direct** si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est orienté positivement.

Définition: Soient $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ deux vecteurs de l'espace. **Le produit vectoriel** de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est l'unique vecteur $\overrightarrow{c}$ défini comme suit:

Direction $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$

Sens $\overrightarrow{c}$ est tel que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est orienté positivement.

Norme $\|\overrightarrow{c}\| =$ l'aire du parallélogramme engedré par $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

Remarque:

$$\|\overrightarrow{c}\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|\sin(\varphi) = \|a \times b\|$$

3.2 Propriétés

1. $$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} &\iff \|\vec{a} \times \vec{b}\| = 0 \\ &\iff \|\vec{a}\| = 0, \quad \text{ou} \\ & \|\vec{b}\| = 0, \quad \text{ou} \\ & \sin(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

   En particulier:
   $$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

2. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ ("x" est **anti-symétrique**)

3. En général, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$!!

   Contre-exemple: Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tels que

   - $\vec{c} \perp$ plan $(\vec{a}, \vec{b})$
   - $0 < \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$

   Dans ce cas, on a
   $$\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{colinéaire à } \vec{c}} \times \vec{c}$$
   mais
   $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq \vec{0}$$

4. Le produit est **distributif** (par rapport à "+")
   $$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{c})}$$

5. $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

3.3 Calcul de $\vec{a} \times \vec{b}$ en composantes, dans un repère orthonormé direct (R.O.D.)

Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un R.O.D. .
On a:
$$\begin{aligned} \vec{e_1} \times \vec{e_2} &= \vec{e_3}, & \vec{e_2} \times \vec{e_1} &= -\vec{e_3} \\ \vec{e_2} \times \vec{e_3} &= \vec{e_1}, & \vec{e_3} \times \vec{e_2} &= -\vec{e_1} \\ \vec{e_3} \times \vec{e_1} &= \vec{e_2}, & \vec{e_1} \times \vec{e_3} &= -\vec{e_2} \end{aligned}$$

Soient
$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} \\ \vec{b} &= b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3} \end{aligned}$$

$$\underline{\vec{a} \times \vec{b}} = ? \quad \text{en composantes}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e_i}\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (a_i \vec{e_i}) \times (b_j \vec{e_j}) \\
&= \sum_{i,j=3}^{3} a_i b_i \left(\vec{e_i} \times \vec{e_j}\right) \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \underbrace{\vec{e_1} \times \vec{e_2}}_{=\vec{e_3}} \\
&\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \underbrace{\vec{e_2} \times \vec{e_3}}_{=\vec{e_1}} \\
&\quad + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \cdot \underbrace{\vec{e_1} \times \vec{e_3}}_{=-\vec{e_2}}
\end{aligned}$$

Donc, si dans une ROD, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$,

alors

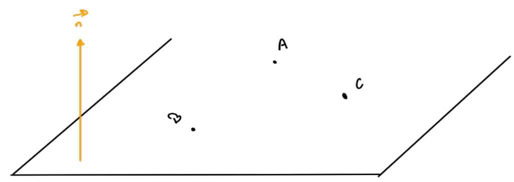
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_1 b_2) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

3.4 Applications

1. Soient, dans un ROD, $A(0, 1, -1), B(1, 2, 3), C(0, 0, 7)$

   Equation cartésienne du plan (ABC)**?**

   Comme un vecteur normal au plan, $\vec{n}$, est colinéaire à $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, on peut prendre simplement

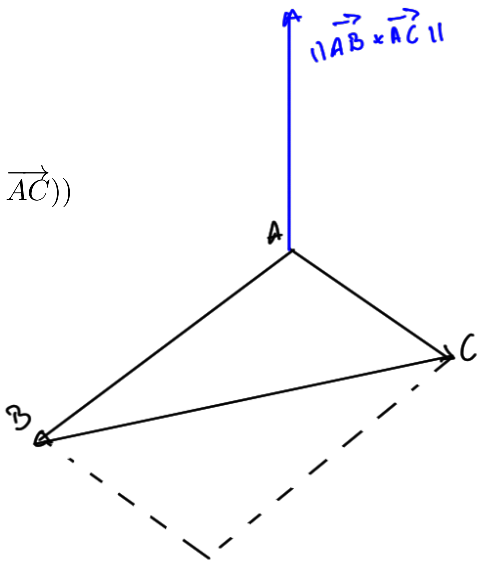


$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Donc l'équation cartésienne est de la forme:

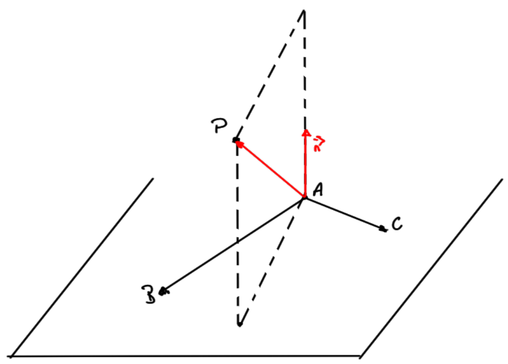
$$12x - 8y - z + \underbrace{d}_{\substack{\text{passe par C} \\ \Longrightarrow d=7}} = 0$$

Aire du triangle ABC ? Comme



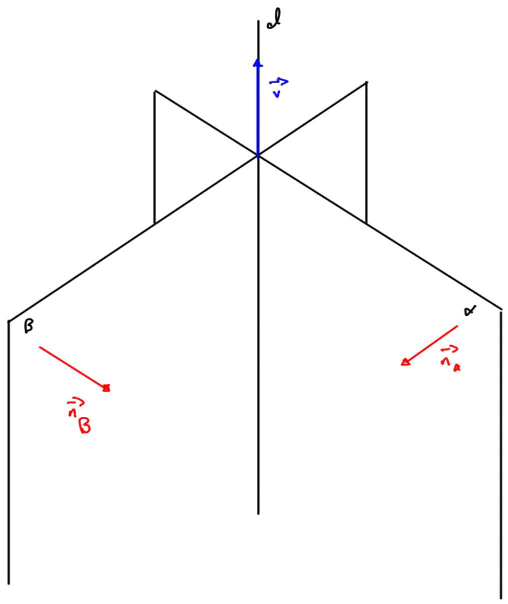
$$\begin{aligned}
\text{aire}(ABC) &= \frac{1}{2}\text{aire(parallèlogramme } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) \\
&= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{144+64+1} \\
&= \frac{\sqrt{209}}{2}
\end{aligned}$$

Distance de $P(3,2,1)$ au plan ABC



$$\begin{aligned}
\delta &= \left| \overrightarrow{AP} \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 3-0 \\ 2-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \frac{1}{\sqrt{209}}
\end{aligned}$$

Intersection entre deux plans:



Si

$$\alpha : x - y + z = 0$$

$$\beta : 2x + y - 3z = 2$$

$\rightarrow$ droite d'intersection d?

Comme un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de d doit engendrer α et β, il doit satisfaire:

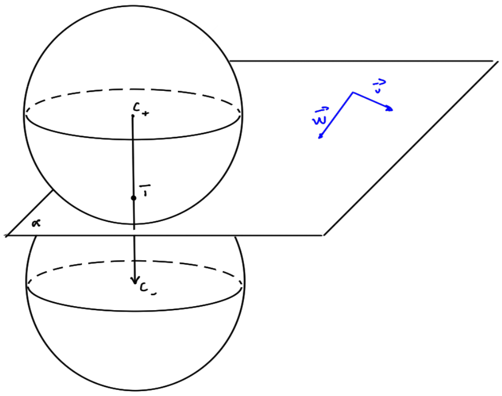
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \\ \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n_\beta} \end{array} \right\} \implies \overrightarrow{v} \equiv \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}$$

2. Déterminer le centre d'une sphère de rayon $R = \sqrt{30}$ tangente au plan

$$\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{w}}$$

au point $T(5, 1, 0) \quad (\in \alpha)$

Le centre C de la sphère cherchée est à distance R de α, sur la droite $\perp$ à α passant par T.
$\rightarrow$ Deux solutions



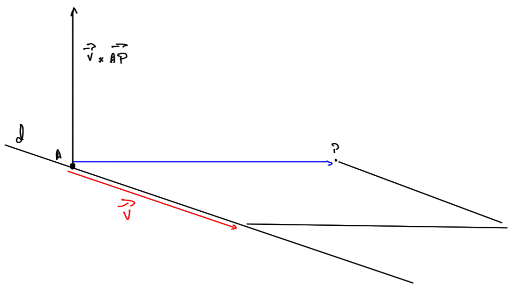
$$\overrightarrow{OC}_{\pm} = \overrightarrow{OT} \pm \sqrt{30}\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}, \quad \text{où} \quad \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

On trouve:

$$C_{+}(3, 6, -1), \quad C_{-}(7, -4, 1)$$

3. Distance d'un point à une droite

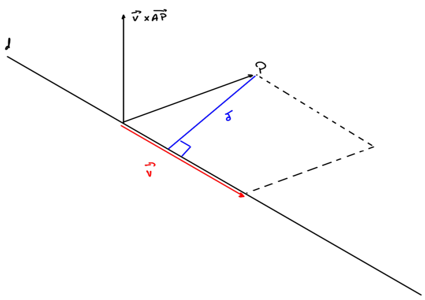
Soit $d = d(A, \vec{v})$, P un point $\rightarrow$ Comme calculer la distance $\delta = \text{dist}(P, d)$?



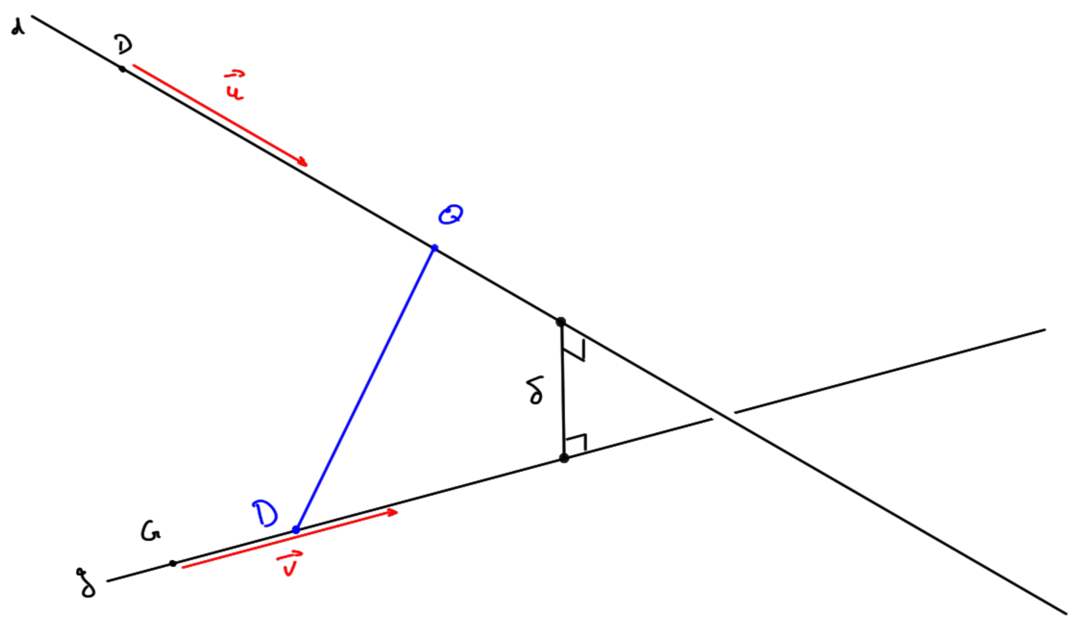
Remarque: $\|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\|$ = aire du parallèlogramme

Mais l'aires du parallèlogramme se calcule aussi par

$$\delta = \frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}\|}$$



4. Distance entre deux droites gauches
   Soient $d = d(D, \vec{u})$ et $g = (G, \vec{v})$ deux droites gauches.
   Comment calculer la **distance** entre d et g?



$$\delta = \text{dist}(d, g) :- \min \text{dist}(P, Q)$$

avec $P \in d$ et $Q \in g$

Soit π le plan contenant d, $\|$ à g.

$\implies$ On veut: $\text{dist}(d, g) = d(g, \pi) = \text{dist}(G, \pi) = \left| \overrightarrow{DG} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right|$ où $\vec{n}$ est normal à π

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent π on peut prendre

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\boxed{\delta = \text{dist}(d, g) = \left| \overrightarrow{OG} \cdot \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \right|}$$

5. Perpendiculaire commune à deux droites gauches

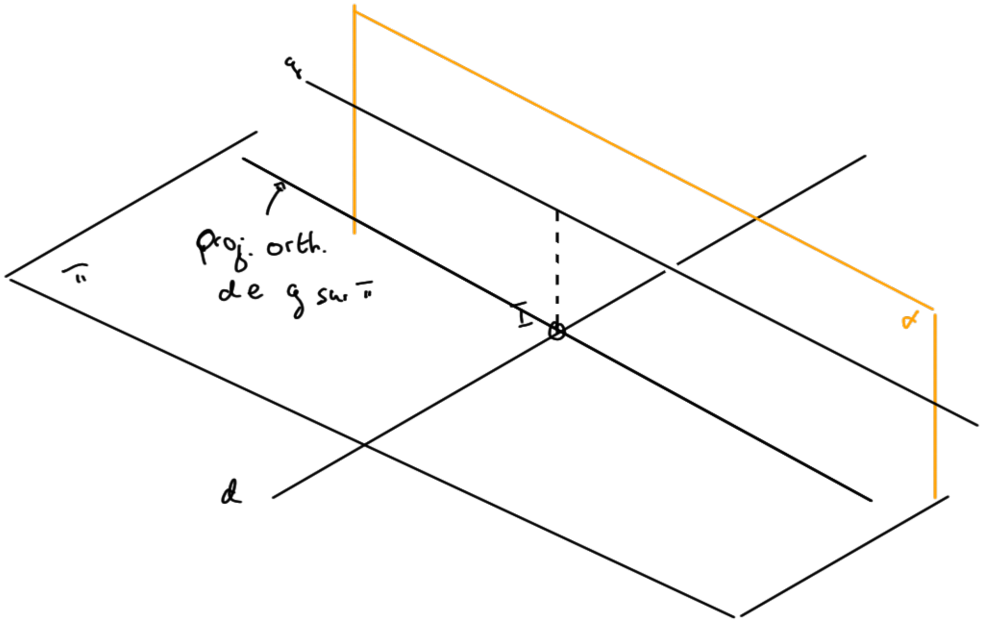
On cherche une droite p, telle que

$$\begin{cases} p \perp d, p \perp g \\ p \cap d \neq \emptyset, p \cap g \neq \emptyset \end{cases}$$

p: **perpendiculaire commune** à d et g.

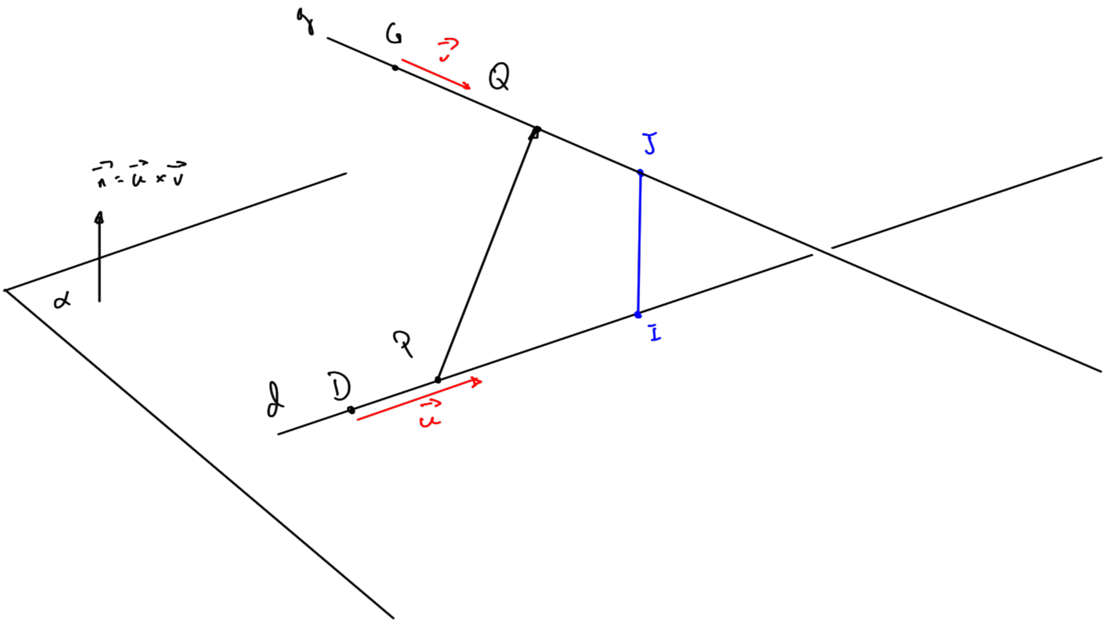
Deux méthodes

(a)



- Soit π le plan contenant d, $\parallel$ à g.
- Soit α le plan $\perp$ à π, contenant g.
- Calculer I: l'intersection entre d et α.
- La droite cherchée p est la droite perpendiculaire à π (donc dirigée par $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$), passant par I.

(b)



- Laisser glisser un point P sur d: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \lambda X$
-
- Chercher les positions de P et Q pour lesquelles:
  [...]