

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 1A  
PREPA-031(A)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Guido BURMEISTER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Chapter 1

## Logique

26/02/2019

### 1.1 Propriétés, ensemble et proposition

#### 1.1.1 Propriétés et ensemble

**Définition** Soit  $P$  une propriété définie sur un ensemble  $E$  (par ex.  $\mathbb{R}$ ) pris en référentiel.

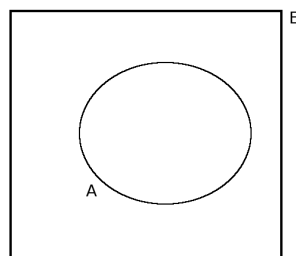
La proposition " $x$  vérifie  $P$ " se note  $P(x)$

**Exemples**  $E = \mathbb{Z}$ ,  $P$ : propriété d'être pair.

- $P(-26)$  "-26 est pair" est vrai car on peut écrire  $-26 = 2 * (-13)$
- $P(5)$  est fausse
- $P(x)$  signifie que  $\exists k \in \mathbb{Z}$  t.q.  $x = 2k$

A toute propriété  $P$  définie sur  $E$  est associé un ensemble  $A \subset E$ :

$$P(x) \iff x \in A$$



$$A = \{x \in E | P(x)\}$$

" $A$  est l'ensemble des  $x$  de  $E$  vérifiant la propriété  $P$ ". C'est l'ensemble solution au problème de trouver le  $x$  vérifiant  $P$ .

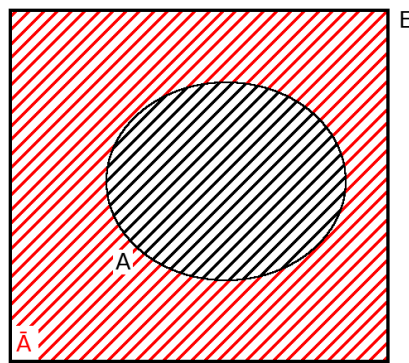
Cas possible:

- il y a une solution si et seulement si  $A \neq \emptyset \iff \exists x \in E, x \in A$
- il n'y a pas de solution si et seulement si  $A = \emptyset \iff \forall x \in E, x \notin A$

**Negation:** Propriété de non  $P$

$$C_E(A) = \bar{A} = \{x \in E \mid \text{non} P\}$$

" $\bar{A}$  est l'ensemble des  $x$  ne vérifiant pas  $P$ ". C'est le **complémentaire** de  $A$  dans  $E$ .

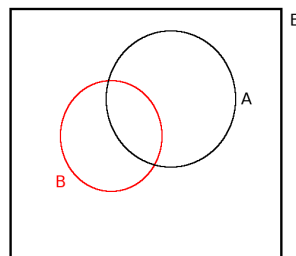


**Exemples**  $E = \mathbb{R}$ ,  $P(x) : x^2 < 64$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 64\} = ]-8; 8[$$

Soit  $Q$  une autre propriété définie sur  $E$  et  $B$  l'ensemble correspondant

$$B = \{x \in E \mid Q(x)\}$$

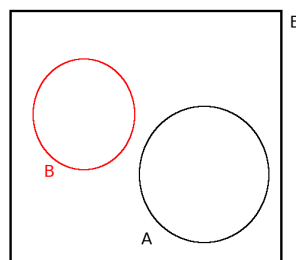


- L'ensemble des  $x$  vérifiant  $P$  et  $Q$  (les deux conditions sont imposées) est  $A \cap B$ :

$$A \cap B = \{x \in E \mid P(x) \text{ et } Q(x)\}$$

- L'ensemble vérifiant  $P$  **ou**  $Q$  (au moins une condition est satisfaite) est  $A \cup B$
- $\text{non}(P \text{ et } Q)$  est équivalent à  $(\text{non}P \text{ ou } \text{non}Q)$   
En effet  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\text{non}(P \text{ ou } Q)$  est équivalent à  $(\text{non}P \text{ et } \text{non}Q)$   
En effet  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

**Remarque** Si  $P$  et  $Q$  sont incompatibles (ne peuvent pas être vérifiés en même temps) si  $A \cap B = \emptyset$



### 1.1.2 Propositions

Soit  $P$  une propriété définie sur un référentiel  $E$  et  $A$  l'ensemble correspondant.

**Définition** Une proposition  $T$  est une affirmation (avec un verbe!) énoncée sur les éléments de  $E$ .

- Proposition **simple**: sur un élément  $x_0 \in E$ .

$$T : P(x_0) \quad \text{"}x_0 \text{ vérifie } P\text{"}$$

$$\text{langage ensembles : } T : x_0 \in A$$

$$\text{exemple : } T : \sqrt{2} \text{ est irrationnel}$$

- Proposition **universelle**:  $P$  est vérifiée par tout  $x$

$$T : \forall x \in E, \quad P(x) \quad \text{"quelque soit } x, x \text{ vérifie } P\text{"}$$

$$\text{langage ensembles : } T : A = E$$

$$\text{exemple: } T : \text{un carré est positif ou nul}$$

- Proposition **existentielle**:  $P$  vérifie au moins un élément

$$T : \exists x \in E, \quad P(x) \quad \text{"il existe un } x \text{ qui vérifie } P\text{"}$$

$$\text{langage ensembles : } T : A \neq \emptyset$$

$$\text{exemple: } T : \text{l'équation } x^2 = 2 \text{ a une solution}$$

**Negation** (proposition contraire, la negation porte sur le verbe)

- Proposition **simple**:

$$\text{non}T : \text{non}P(x_0) \quad "x_0 \text{ ne vérifie pas } P"$$

$$\text{langage ensembles : non}T : x_0 \in A \text{ ou } x_0 \in \bar{A}$$

$$\text{exemple : non}T : \sqrt{2} \text{ est rationel}$$

- Proposition **universelle**:

$$\text{non}T : \exists x \in E, \quad \text{non}P(x) \quad "il \text{ existe } x \text{ ne vérifiant pas } P"$$

$$\text{langage ensembles : non}T : A \neq E \text{ ou encore } \bar{A} \neq \emptyset$$

$$\text{exemple: } T : \text{il existe un carré négatif}$$

- Proposition **existentielle**:

$$\text{non}T : \forall x \in E, \quad \text{non}P(x) \quad "quelque soit } x, x \text{ ne vérifie pas } P"$$

$$\text{langage ensembles : non}T : A = \emptyset \text{ ou encore } \bar{A} = E$$

$$\text{exemple: } T : \text{l'équation } x^2 = 2 \text{ n'as pas de solution}$$

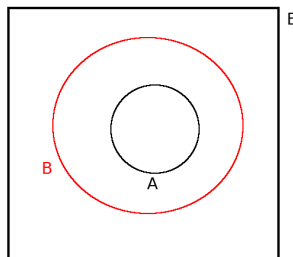
### 1.1.3 Implication et équivalence

Soient  $P$  et  $Q$  deux propriétés sur  $E$  et  $A$  et  $B$  les ensembles associés.

- " $P$  implique  $Q$ ":  $P(x) \rightarrow Q(x)$

Si  $x$  vérifie  $P$ , alors  $x$  vérifie  $Q$  ( $P$  est plus restreint que  $Q$ )

Tous les éléments de  $A$  sont aussi éléments de  $B$



Tous les éléments de  $A$  sont aussi des éléments de  $B$ :

$$\forall x \in A, x \in B$$

ou

$$\forall x \in E, \text{ si } x \in A \text{ alors } x \in B$$

ou encore

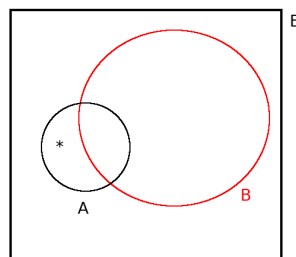
$$A \subset B$$

- $P$  et  $Q$  sont équivalents, si et seulement si  $P(x) \iff Q(x)$  si et seulement si  $(P(x) \rightarrow Q(x))$  et  $(P(x) \leftarrow Q(x))$  (**double implication**)

Language ensemble:  $A = B$  si et seulement si  $(A \subset B)$  et  $(B \subset A)$  (**double inclusion**)

### Negation de l'implication

$$\begin{aligned} \text{non}(P \rightarrow Q) &\iff \text{non}(\forall x \in A, x \in B) \\ &\iff \exists x \in A, x \notin B \\ &\iff \exists x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\iff \exists x \in E, (P(x) \text{ et } \text{non}Q(x)) \end{aligned}$$



C'est donc une proposition existentielle.

**Exemple** Tout nombre pair est multiple de 4

$$T : \forall n \text{ pair}, n \text{ est multiple de } 4$$

5/03/2019

## 1.2 Méthode de preuve

Une théorie mathématique se construit sur des règles que l'on donne au départ (les axiomes) et la logique.

Dans un univers de référence  $E$ , une proposition  $T$  est soit vrai, soit fausse (exclusif).

### Exemples

1. La proposition

$$T : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

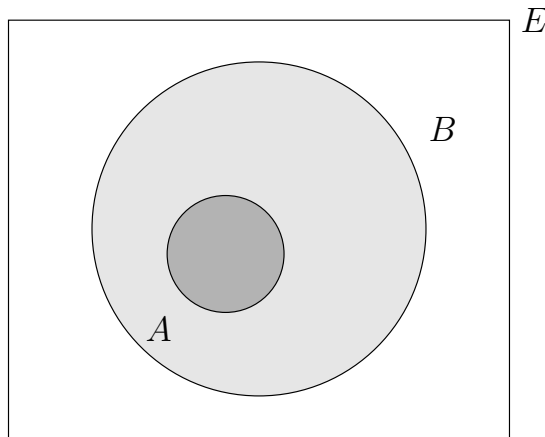
Implicitement  $E = \mathbb{R}$

2. Une implication

$$T : P \implies Q$$

- $P$  est l'hypothèse: le référentiel restreint
- $Q$  est la conclusion.

**Remarque** La vérité de  $Q$  n'est pas examinée "en dehors de  $P$ ".



En se plaçant dans  $A$  (hypothèse  $P$ ) on est dans  $B$  (conclusion  $Q$ )

**Exemple** La proposition

$T$  : si  $a$  est pair, alors  $a^2$  est pair

Implicitement  $E$  est  $\mathbb{Z}$

Plus simplement:

$$T : \forall a \in \mathbb{Z}, \quad a \text{ est pair} \implies a^2 \text{ est pair}$$

**Remarque** Une proposition simple  $T$  peut toujours être vue comme une conséquence de ce que l'on sait sur le référentiel.

### 1.2.1 Méthode directe

**But:** Montrer qu'une implication

$$T : P \implies Q$$

est vraie (on montre que la vérité de  $Q$  en utilisant quelque part l'hypothèse  $P$ ).

On montre

$$P \implies Q$$

par une suite d'implications toutes vraies:

$$P \implies P_1, P_1 \implies P_2, \dots, P_n \implies P_{n+1}, \dots, P_N \implies Q$$

**Exemples**

1. Montrer

$$T : \forall a \in \mathbb{Z}, \text{ si } \underbrace{a \text{ est pair}}_P, \text{ alors } \underbrace{a \text{ est pair}}_Q$$

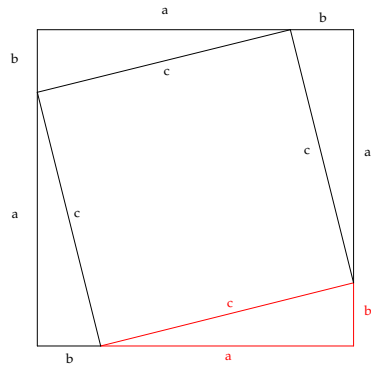
Soit  $a \in \mathbb{Z}$  ( $a$  est quelconque)

$$\begin{aligned}
 a \text{ est pair} &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a = 2k \\
 &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = (2k)^2 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} \\
 &\implies \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = 2 \cdot k' \\
 &\implies a^2 \text{ est pair}
 \end{aligned}$$

## 2. La proposition

$T$  : le théorème de Pythagore

Soit un triangle rectangle



$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= c^2 + 4 \frac{ab}{2} \\
 a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\
 a^2 + b^2 &= c^2
 \end{aligned}$$

### 1.2.2 Méthode par l'absurde

**But:** Montrer qu'une proposition  $T$  est vraie.

On montre que  $T$  est vraie en montrant que  $\text{non}T$  est faux.  $\text{non}T$  est impossible car elle même une contradiction (absurdité).

$$T \text{ vraie} \iff [\text{non}T \implies \text{contradiction}]$$

**Exemple**  $T$  : dans  $\mathbb{M}_N(\mathbb{R})$ , l'élément neutre pour le produit matriciel est unique.

**Preuve par l'absurde** On suppose  $\text{non}T$  et on montre que cela conduit à une contradiction.

$\text{non}T$  : dans  $\mathbb{M}_N(\mathbb{R})$  il existe plus d'un élément neutre pour le produit matriciel

Notons  $I_n$  et  $N_n$  des éléments neutre, avec  $I_n \neq N_n$ .

Alors

$$I_n = I_n \cdot N_n = N_n$$

D'où la contradiction avec

$$I_n \neq N_n$$



**Remarque** Cas d'une proposition universelle sur l'ensemble  $E$

$$T : \forall x \in E, \quad x \text{ vérifie } P$$

Par l'absurde, on doit montrer l'implication


$$[ \exists x \in E, x \text{ vérifie non}P ] \implies \text{contradiction}$$

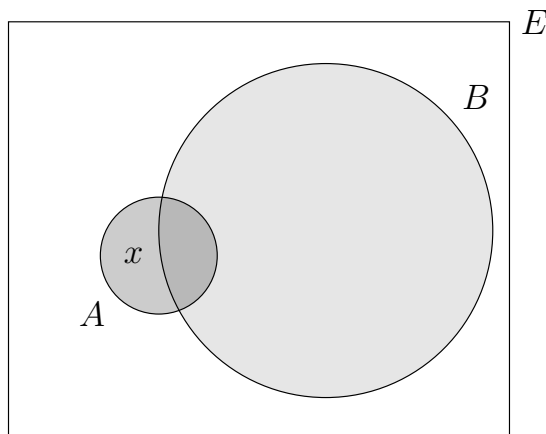
(mise en défaut de l'existence d'un contre-exemple)

Cela est équivalent à dire

$$\forall x \in E, [ x \text{ vérifie non}P \implies \text{contradiction} ]$$

(aucun élément n'est un contre-exemple)

**Rappel**  Si  $T$  est une implication  $P \implies Q$ , sa négation  $\text{non}T$  n'est pas une proposition universelle.



$$\begin{aligned} T : \forall x \in E, \quad P(x) &\implies Q(x) \\ \text{non}T : \exists x \in E, \quad P(x) \text{ et } \text{non}Q(x) \end{aligned}$$

### 1.2.3 Méthode indirecte ou contraposée

**But** Montrer qu'une implication

$$T : P \implies Q$$

est vraie.

**Définition** Soit la proposition

$$T : P \implies Q$$

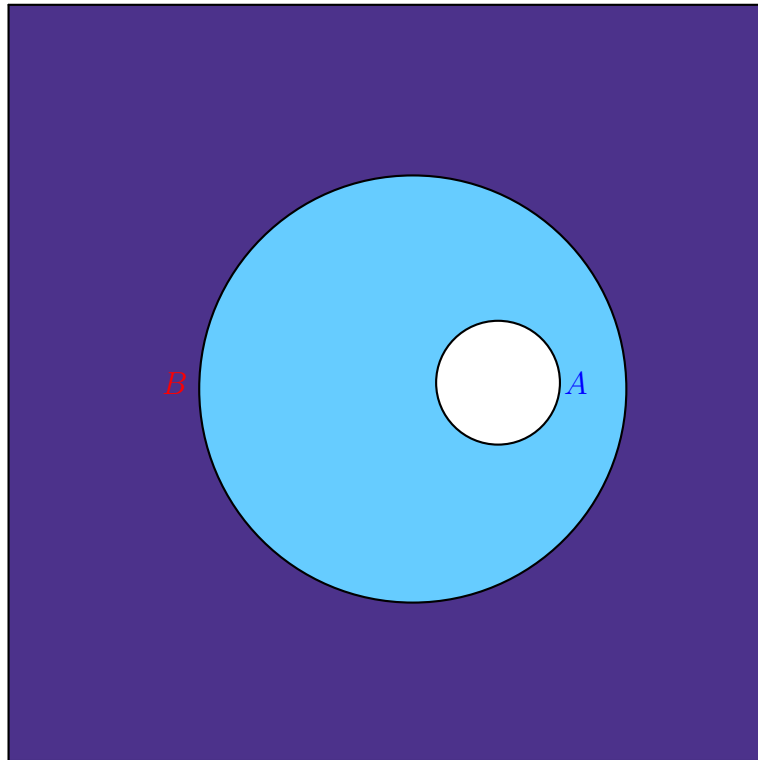
la proposition

$$C : \text{non}Q \implies \text{non}P$$

est la contraposée de  $T$ .

$C$  et  $T$  sont équivalents. En effet

$$T : A \subset B \qquad C : \overline{B} \subset \overline{A}$$



**Exemple** Démontrer

$$T : \forall a \in \mathbb{Z}, \text{ si } a^2 \text{ est pair, alors } a \text{ est pair}$$

**Remarque** méthode directe, pas facile!

Preuve par contraposée:

$$C : \forall a \in \mathbb{Z}, \text{ si } \underbrace{a \text{ est impair}}_{\text{non}Q}, \text{ alors } \underbrace{a^2 \text{ est impair}}_{\text{non}P}$$

En effet (directement)

$$\begin{aligned} a \text{ est impair} &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a = 2k + 1 \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{k' \in \mathbb{Z}} + 1 \\ &\implies \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad a^2 = 2k' + 1 \\ &\implies a^2 \text{ est impair} \end{aligned}$$

Donc  $C$  est vraie et donc  $T$  est vraie.

### 1.2.4 Méthode par induction (ou par récurrence)

**But** montrer qu'une proposition  $T(n)$  dépendant d'un entier positif  $n$  est vraie à partir d'un certain rang  $n_0$ :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad [ \forall n \geq n_0, T(n) \text{ vraie} ]$$

**Théorème d'induction** Une proposition  $T(n)$  est vraie  $\forall n \geq n_0$  si et seulement si

1.  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$  t.q.  $T(n_0)$  vraie.
2.  $\forall n \geq n_0 [ T(n) \text{ vraie} \implies T(n+1) \text{ vraie} ]$

**Exemple** Soit le nombre suivant (définition)

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot k! \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Démontrer la proposition suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)! - 1$$

Notons

$$T(n) : S_n = (n+1)! - 1$$

1. Prenons  $n_0 = 1$ , vérifions  $T(n_0)$

(a) Calculons  $S_{n_0} = S_1 = 1 \cdot 1! = 1$  (définition)

(b) D'autres part  $(n_0 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 1 \quad \checkmark$ .

2. A montrer

$$\forall n \geq n_0 = 1 :$$

Hypothèse	$T(n) : S_n = (n+1)! - 1$
Conclusion	$T(n+1) : S_n = (n+2)! - 1$

En effet

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= S_n + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (1+n+1) \cdot (n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

□

### 1.2.5 Le contre-exemple

**But** Montrer qu'une proposition universelle est fausse.

Soit une proposition universelle

$$T : \forall x \in E, \quad x \text{ vérifie } P$$

$T$  est fausse si et seulement si  $\text{non}T$  est vraie. On montera donc que la proposition existentielle  $\text{non}T$  est vraie.

$$\text{non}T : \exists x \in E, x \text{ vérifie } \text{non}P$$

On montre avec l'existence d'un  $x$  ne vérifiant pas  $P$ : un contre-exemple.

**Exemple**

$T$  : tous les nombres premiers sont impairs

$T$  est fausse, donnons un contre-exemple selon la négation de  $T$ .

$\text{non}T$  : il existe un nombre premier qui est pair

Par exemple  $n = 2$  (**remarque**: c'est le seul)

Formellement

$$\begin{aligned} T : \forall a \in \mathbb{N}^*, \quad a \text{ premier} &\implies a \text{ impair} \\ \text{non}T : \exists a \in \mathbb{N}^*, \quad a \text{ premier et } a &\text{ pair} \end{aligned}$$