EPFL

MAN

Mise à niveau

Maths 1B

PREPA-033(B)

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Olivier WORINGER

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 1

Suite de nombres réels

1.1 Définitions

26/02/2019

Définition Une suite de nombres réels est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a :&\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ &n \longmapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

a_n est le terme generale de la suite et n est le rang de a_n.
La suite $a_1, a_2, a_3, ...,$ se note "(a_n)"
Exemples

1) La suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \frac{1}{3n-7}$ est la suite $-\frac{1}{4}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, ...$

2) $..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ n'est pas une suite (pas de premier élément). Mais $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$ est une suite dont l'ensemble des valeurs est $\mathbb{Z}$.

3) $a, a, a, a, ... \quad a \in \mathbb{R}, \quad a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ est une suite constante.

4) Chercher le terme general des suites définie par les premiers termes:

   a) $(a_n) : \overbrace{1, 6,}^{5} \overbrace{11, 16,}^{5} \overbrace{21, 26,}^{5}$
      $a_n = 5n - 4$

   b) $b_n : \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{10}{9}, \frac{17}{12}, \frac{26}{15}, \frac{37}{18}, ...$
      Difference des nominateurs: $3, 5, 7, 9, 11, ...$
      Difference des dénominateurs: $3, 3, 3, 3, 3, ...$
      $b_n = \frac{n^2+1}{3n}$

5) Suites définie par recurrence
   $c_{n+1} = 2 - \frac{1}{c_n}, \quad c_1 = \frac{3}{2}$
   $c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{3}, \quad c_3 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}, \quad c_4 = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$
   Conjecture: $c_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
   Demonstration par récurrence:

- Verification: $c_1 = \frac{3}{2} \quad \frac{n+2}{n+1}|_{n=1} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$.
- Demonstration du pas de récurrence:
  - **Hypothèse**: $c_n = \frac{n+2}{n+1}$ pour un $n \in \mathbb{N}$*
  - **Conclusion**: $c_{n+1} = \frac{n+3}{n+2}$
  - **Preuve**:
    $c_{n+1} = 2 - \frac{1}{c_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = 2 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{2(n+1)-(n+1)}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}$

□

Définitions

1. (a_n) est majoré si
$$\exists M \in \mathbb{R} a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
(M : majorant)
2. (a_n) est minoré si
$$\exists N \in \mathbb{R} \text{ t.q. } a_n \geq N, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
(N: minorant)
3. (a_n) est bornée si elle amdet un majorant **et** un minorant
4. (a_n) est croissante si $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
(Strictement croissante si $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$)
5. (a_n) est décroissant si $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
(Strictement décroissante si $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$)
6. (a_n) est monotone si elle est croissant **ou** (ou exclusif) décroissant
(Strictement monotone si elle est croissant ou strictement décroissant)

Exemples

1. $a_n = \frac{1}{n}, \quad (a_n)$ est strictement décroissante et borné:
$$0 < a_n \leq 1$$
2. $b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{\underbrace{n+1}_{>0}}$
Donc (b_n) est strictement croissante.

1.2 Limite d'une suite

Définition On dit que la suite (a_n) converge vers a ($a \in \mathbb{R}$) si $\forall \epsilon > 0$, il existe un seuil
$$N \in \mathbb{N}^*(N = N(\epsilon)) \text{ t.q. } n > N \implies |a_n - a| < \epsilon$$
$$|a_n - a| < \epsilon \iff -\epsilon < a_n - a < \epsilon \iff a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \iff a_n \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$$
Cet intervalle est appelé ϵ-voisinage de a. Si (a_n) admet (a_n) est convergente sinon elle divergente.

Définition plus intuitive de la limite de suite:
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ si et seulement si ϵ-voisinage de a contient persque tout les termes de la suite (tous les termes sauf nombre fini)

Exemples

1. $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

   $\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad [N \in \mathbb{N}^*$ quelconque $\square]$

2. Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

   Soit $\epsilon > 0$, montrons que $\exists N \in \mathbb{N}^*(N = N(\epsilon))$ t.q. $n \geq N \implies |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$

$$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \iff |\frac{1}{n}| < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

3. La suite (b_n) définie par

$$b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

   diverge car une infinitée de termes sont dans le voisinage de $(+1)$ ou de (-1) selon que n est pair ou impair

Theorèmes importants (sans demonstration)

1. Une suite qui converge admet une seule limite

2. Toute suite convergente est bornée.

   La reciproque est fausse.
   Contre-exemple: $a_n = (-1)^n$

3. Les règles de calcul:

   Soit (a_n) et (b_n) convergentes,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

   (a) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
   (b) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
   $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$
   (c) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
   (d) si $b_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, et si $b \neq 0$, alors:
   $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

01/03/2019

4. **Théorème de comparaison**: Soient (a_n) et (b_n) convergantes, $a_n \to a, b_n \to b$

$$\text{Si } \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0$$
$$\text{alors } a \leq b$$

5. **Théorème des deux gendarmes**:
   Soient 3 suites (g_n), (d_n) et (a_n) telles que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ avec } g_n \leq a_n \leq d_n, \quad \forall n \geq n_0$$

   Alors si

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} d_n = l$$

   on a que (a_n) est convergente et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

6. Corollaire des 2 gendarmes soit (a_n) tel que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$$

$$\underbrace{-|a_n|}_{\to 0} \leq a_n \leq \underbrace{|a_n|}_{\to 0}$$

□

7. Toute suite monotone est bornée et convergente.
   Plus précisément:
   - Toute suite croissante et majoré converge
   - Toute suite décroissante et minoré converge

3 exemples importants

1. Soient $q \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$, $\quad (a_n)$ la suite définie par $a_n = q^n$

$$a_n = q^n : \begin{cases} \text{diverge si } |q|>1 \\ \text{converge vers 0 si } |q|<1 \end{cases}$$

   Montrons que si $|q| < 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$$|a_n| = |q^n| = |q|^n \text{ or } |q| < 1$$

   donc

$$\exists p > 0 \text{ t.q. } q = \frac{1}{1-p}$$

   Donc

$$|q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \implies \frac{1}{|q|^n} = (1+p)^n$$

$$= 1 + n \cdot p + ... + p^n \geq n \cdot p, \quad \text{donc } |q|^n \leq \frac{1}{n \cdot p}$$

$$|a_n| = |q|^n \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq |a_n| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}}_{\to 0}$$

D'après les 2 gendarmes: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

D'après son corollaire: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

□

2. La série géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ et a_n définie par

$$a_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$$

Définition par la récurrence

$$a_{n+1} = a_n + q^n, \quad a_1 = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On réécrit le terme a_n

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + q^{n-1} \\ q \cdot a_n &= q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n \\ a_n - q \cdot a_n &= 1 - q^n \\ a_n(1-q) &= 1 - q^n \implies a_n = \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

(a_n) converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$

Exemples:

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ a_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \text{et } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ b_n &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \implies \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Le nombre e

   Soit

$$
\begin{aligned}
e_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \\
e_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
\frac{1}{k!} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3}_{>2} \cdot ... \cdot \underbrace{k}_{>2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

   Donc

$$
\begin{aligned}
e_n &\leq 1 + \frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\leq 1} \\
e_n &\leq 3
\end{aligned}
$$

$$2 \leq e_n \leq 3, \quad \forall n \geq 2$$

   Montrons encore que (e_n) est strictement croissante:

$$e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!}, \quad \text{donc } e_{n+1} > e_n$$

   (e_n) croissante et majoré: elle converge.

   On note e sa limite.

$$
\begin{aligned}
e_n &= 2.71828 \\
e_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

   Autre caractéristique du nombre e:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1.3 Limite infinie

Définition La suite (a_n) tend vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$ si:

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}^*(N = N(A)) \text{ t.q. } n \geq N \implies f(x) > A$$

On écrit alors

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

On dit que (a_2) diverge vers $+\infty$

De même

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \iff \exists N \in \mathbb{N}^*(N = N(B)) \text{ t.q. } n \geq N \implies a_n > B$$

Exemple Montrons que $(a_n) = (n^2)$ diverge vers $+\infty$.
Soit $A > 0$ donné, montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $a_n > A$ si $n \geq N$.

$$a_n > A \iff n^2 > A \iff n \in]-\infty; \sqrt{A}[\cup]\sqrt{A}; +\infty[$$

Tout $N > \sqrt{A}$ convient car $n \leq N$ (avec $N \geq \sqrt{A}$) $\implies n^2 > A$

Théorème importants

1. Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et si b_n converge ou $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $(a_n + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
2. Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
   - Si $\lambda > 0, (\lambda a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
   - Si $\lambda < 0, (\lambda a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$
3. Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b > 0$ ou si $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $(a_n \cdot b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
4. Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
5. Théorème du gendarme
   Soit $(a_n), (b_n)$ t.q. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ avec $a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0$
   si $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
   (de manière analogue pour $a_n \to -\infty$)

Exemples Montrons que si $q > 1$, alors (q^n) diverge vers $+\infty$

$$q > 1 \implies \exists\, p > 0 \text{ t.q. } q = 1 + p$$
$$q^n = (1+p)^n = 1 + n \cdot p + ... + p^n > n \cdot p$$
$$\text{Or } \lim_{n\to\infty} np = p \cdot \lim_{n\to\infty} n = p \cdot +\infty = +\infty (p > 0)$$

Donc (q^n) diverge vers $+\infty$

Cas d'indétermination

- Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$
  On ne peut rien dire à priori de

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$$

- Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

  On ne peut rien dire à priori de

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$$