

EPFL

MAN

Mise à niveau

---

Maths 1B  
PREPA-033(B)

---

*Student:*  
Arnaud FAUCONNET

*Professor:*  
Olivier WORINGER

Printemps - 2019



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

## Chapter 2

# Fonctions réelles d'une variable réelle

### 2.1 Définitions

Définition:

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction réelle d'une variable réelle si tout  $x \in A$  a au plus une image par  $f$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $f(x)$

L'ensemble des  $x \in A$  ayant une image par  $f$  est le domaine de définition de  $f : D_f$

On note  $\text{Im}_f$  l'ensemble des  $f(x) \in \mathbb{R}$

$$\text{Im}_f = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D_f, y = f(x) \right\}$$

### Exemples

1.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = \mathbb{R}_+, \quad \text{Im}_f = \mathbb{R}_+$$

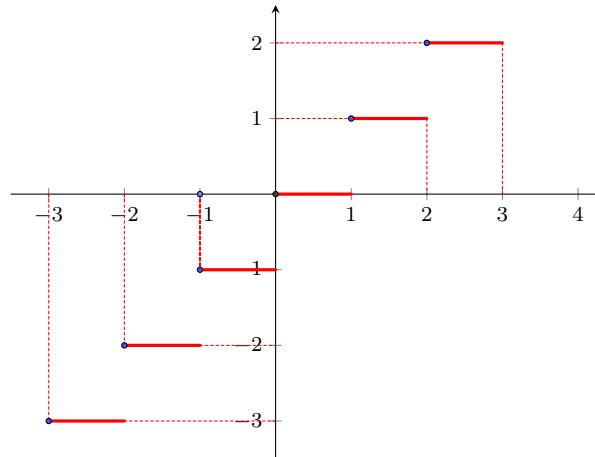
2.

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto E(x)$$

où  $E(x)$  est la partie entière de  $x$ , c'est le plus grand entier inférieur à  $x$ :

**Exemples**

$$E(3) = 3, \quad E(2.9) = 2, \quad , E(-2.5) = -3$$



$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}, \quad \text{Im}_f = \mathbb{Z}$$

3.

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \text{Im}_h = ]0, +\infty[$$

Le graphe de  $f : \mathcal{G}_f$ 

**Definitions****1. Parité** ( $y$  symétrique par rapport à  $O$ )

(a)  $f$  est paire si

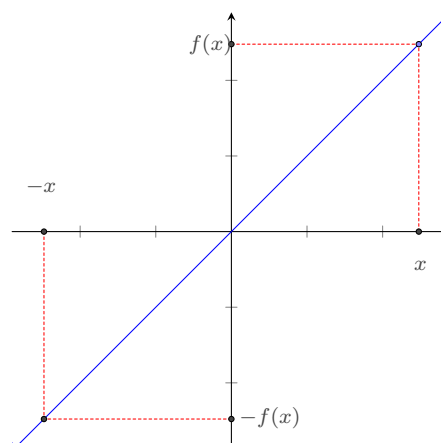
$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D_f$$

Le graphe de  $f$  est alors symétrique /  $O_y$



(b)  $f$  est impaire si

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D_f$$



Le graphe de  $f$  est alors symétrique /0

### Exemples

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = |x|, \quad f_3(x) = \cos(x), \quad \text{sont paires,}$$

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = \sin(x), \quad f_3(x) = \tan(x), \quad \text{sont impaires.}$$

## 2. Périodicité

$f$  est périodique en  $T \in \mathbb{R}$ , si  $\forall x \in D_f, \quad f(x+T) = f(x)$

$G_f$  période de  $f$  est le plus petit  $T > 0$  tel que

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in D_f$$

### Exemples

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$\sin$  et  $\cos$  sont  $2\pi$ -périodique.

Donc  $f$  est  $2\pi$ -périodique.

$$\text{Or } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$$

Donc la période de  $f$  est  $T = \pi$ :

$$\begin{aligned} f(x+T) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot (x+T)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin(2x + \underbrace{2T}_{\text{période de sinus}}) \end{aligned}$$

$$2T = 2\pi \iff T = \pi$$

## 3. Monotonie

(a)  $f$  est croissante si  $\forall x_1, x_2 \in D_f$ :

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

Strictement croissante si

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

(b)  $f$  est décroissante si  $\forall x_1, x_2 \in D_f$ :

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

Strictement décroissante si

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

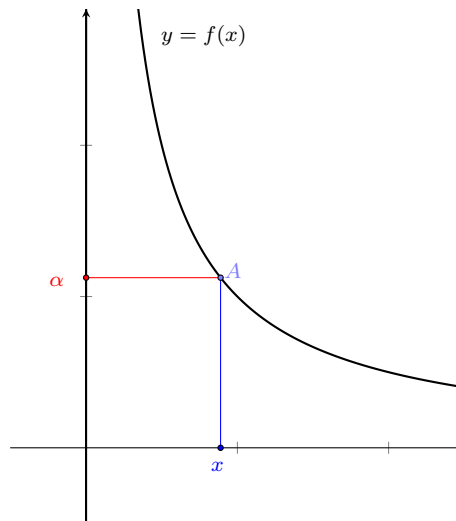
(c)  $f$  est monotone si elle est croissante ou (exclusif) décroissante.

**Exemples**  $f(x) = x^2$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-$ , strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et non-monotone sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème** Si  $f$  strictement monotone, alors l'équation:

$$f(x) = \alpha, \quad x \in \mathbb{R}$$

admet au plus une solution:



Démonstration dans ce cas:

$$f : \text{strictement croissante} \implies f(x) = \alpha$$

admet au plus une solution

Démonstration par la contraposée:

Hypothèse:  $f(x) = \alpha$  admet plus d'une solution

Conclusion:  $f$  non strictement croissant

Preuve: Soient  $x_1 \neq x_2 \in D_f$  t.q.  $f(x_1) = f(x_2) = \alpha$

Soit  $x_1$  la plus petite, on a:

$$x_1 < x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)$$

$f$  est non strictement croissante.

□

4. Valeur absolue de  $f$ , soit:

$$\begin{aligned} f : D_f &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

on définit

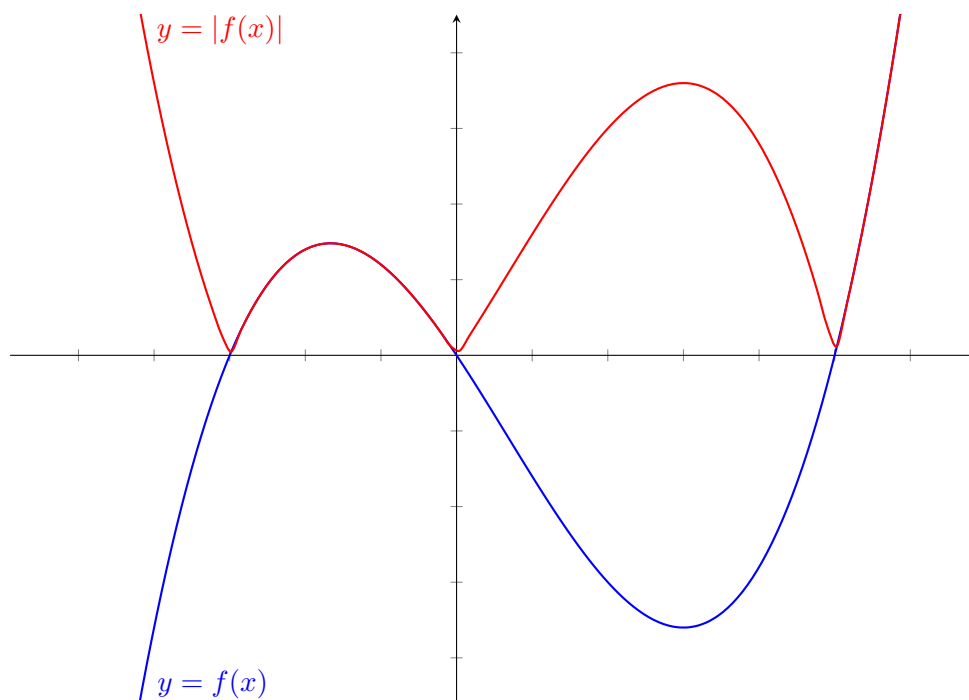
$$|f| : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto |f|(x) = |f(x)|$$

avec

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

On déduit le graphe de  $|f|$  de celui de  $f$  en symétrisant / $0_x$  tous les points d'ordonnée négative.

**Exemple**  $f(x) = x \cdot (x + 3) \cdot (x - 5)$



## 5. Compositions de Fonctions

Soient  $f, g$  deux fonctions, si  $Im_g \subset D_f$  alors on définit

$$f \circ g$$

par

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in D_f$$

**Exemple**

(a) Soit

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

et

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

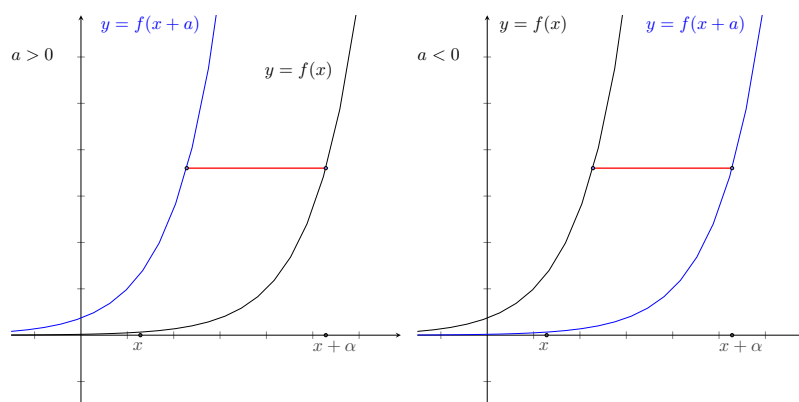
$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\left(\sqrt{x^2 - 1}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 + 1} \\ &= \sqrt{x^2} = |x| \end{aligned}$$

Mais  $D_{f \circ g} = ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[ \neq \mathbb{R}$

(b)  $g = x + a$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + a)$$

Comment déduire le graphe de  $f(x + a)$  de celui de  $f$ ?



On déduit le graphe de  $f(x + a)$  de celui de  $f(x)$  par la translation de  $(-a)$ -unités parallèlement à  $0x$ .

## 6. Fonctions bornées

$f$  est bornée sur  $D_f$  si

$$\exists M > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in D_f$$

### Exemples

$f(x) = \frac{1}{x-1}$  n'est pas bornée sur  $D_f$

$g(x) = \frac{1}{x+1}$  et  $h(x) = \cos x$  sont bornées sur  $D_f$

## 2.2 Surjection, injection, bijection

### 1. Surjection

$f : A \rightarrow B$  est dite surjective si tout  $y \in B$  admet un antécédent par  $f$  dans  $A$ :

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ t.q. } y = f(x)$$

En d'autres termes:

$f$  est surjective si et seulement si  $Im_f = B$



**Exemples**

(a) La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto E(x)$$

n'est pas surjective.

 $y = \frac{1}{2}$  n'a pas d'antécédent  
par contre

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \\ x \mapsto E(x)$$

est surjective.

(b) La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$$

On détermine  $Im_f$ 

$$Im_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

 Soit  $y = f(x) = \frac{x^2}{x+1}$   
 $y \in Im_f$  si  $x$  existe.

On cherche donc à résoudre l'équation

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

par rapport à  $x$  en considérant  $y$  comme un paramètre

$$x^2 = y \cdot (x+1) \\ x^2 - y \cdot x + y = 0$$

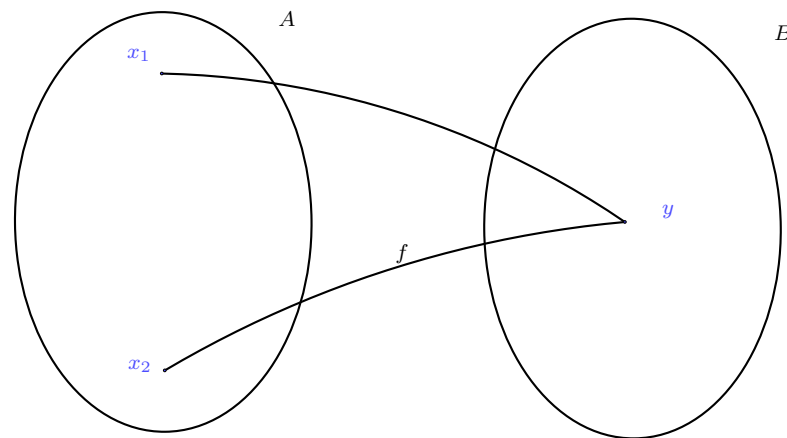
$$\Delta = (-y)^2 - 4 \cdot y = y \cdot (y-4) \\ \Delta \geq 0 \iff y \in ]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$$

Donc  $Im_f = ]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$ **2. Injection****Définition:** La fonction $f : A \rightarrow B$  est dite injective

si

$$\forall x_1, x_2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

**Contre-exemple:**

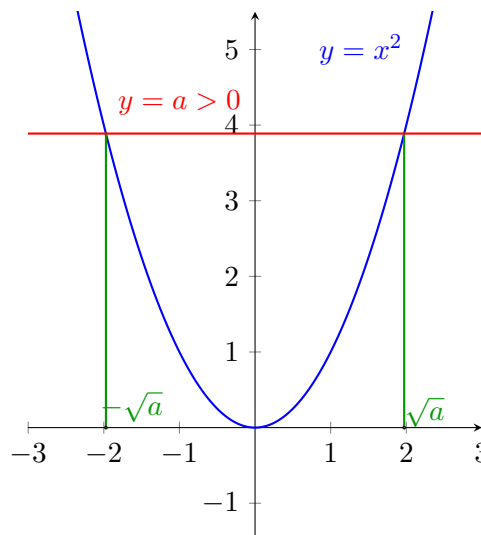


Énoncé contraposée en  $f$  injective si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

**Exemples:**

(a)  $f(x) = x^2$



$f(x) = x^2$  est injective sur  $\mathbb{R}_+$  ou sur  $\mathbb{R}_-$  mais non injective sur  $\mathbb{R}$

(b) Repère de l'exemple sur la surjection

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad x \neq -1$$

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  t.q.  $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{a+1} = \frac{b^2}{b+1} &\iff a^2 \cdot (b+1) = b^2 \cdot (a+1) \\
&\iff a^2b + a^2 - b^2a - b^2 = 0 \\
&\iff ab \cdot (a-b) + (a+b) \cdot (a-b) = 0 \\
&\iff (a-b) \cdot [a \cdot b + (a+b)] = 0
\end{aligned}$$

$a \cdot b + a + b = 0$  est un "générateur de contre-exemples".

En effet tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant cette relation est un contre-exemple à l'injectivité de  $f$ .

$$a = 3, \quad b = -\frac{3}{4}$$

Sont tels que  $a \neq b$  et  $f(a) = f(b)$ .

$f$  est non injective.

(c) Bijection et fonction réciproque

**Définition:**  $f$  est bijective si elle est injective **et** surjective

En d'autres termes  $f : A \rightarrow B$  est bijective si tout  $y \in B$  admet un unique antécédent.

**Définition:**  $f : A \rightarrow B$  bijective si il existe une unique fonction, notée  $f^{-1}$ , appelée fonction réciproque de  $f$

Vérifiant:

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

$$x \mapsto y = f^{-1}(x)$$

avec

$$x = f(y)$$

**Exemple:**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow$$

$$x \mapsto y = x - x^2$$

Restreindre les ensembles de départ et d'arrivée de sorte que  $f$  devienne bijective.

Puis déterminer  $f^{-1}$

- Surjection

On cherche

$$Im_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

$$y = x - x^2 \iff x^2 - x + y = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot y = 1 - 4y$$

$$\Delta \geq 0 \iff y \leq \frac{1}{4}$$

$$Im_f = ]-\infty; \frac{1}{4}]$$

- Injection Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , t.q.  $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned}
 a - a^2 &= b - b^2 \\
 \iff a^2 - b^2 - a + b &= 0 \\
 \iff (a - b)(a + b) - (a - b) &= 0 \\
 \iff (a - b) \cdot [(a + b) - 1] &= 0
 \end{aligned}$$

Comment restreindre l'ensemble de départ et d'arrivée pour rendre  $f$  injective, sans modifier  $Im_f$ ?

Il faut rendre le générateur de contre-exemple "inopérant".

$$a + b = 1 \implies a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - b$$

$$A = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \text{ ou } A = \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

Alors

$$f : \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[ \rightarrow \left] -\infty; \frac{1}{4} \right]$$

est bijective.

Pour déterminer  $f^{-1}$ , ou résoudre

$$y = f(x)$$

par rapport à  $x$  en prenant  $y$  comme paramètre

$$y = x - x^2 \iff x^2 - x + y = 0$$

$$\Delta = 1 - 4y$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y}}{2}, \quad \left( y \in \left] -\infty; \frac{1}{4} \right] \right)$$

Or

$$x \in \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

donc

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 f^{-1} : \left] -\infty; \frac{1}{4} \right] &\rightarrow \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[ \\
 x &\mapsto \frac{1 + \sqrt{1 - 4y}}{2}
 \end{aligned}$$

$$id_A : A \rightarrow A,$$

$$x \mapsto x$$

$$id_B : B \rightarrow B,$$

$$x \mapsto x$$

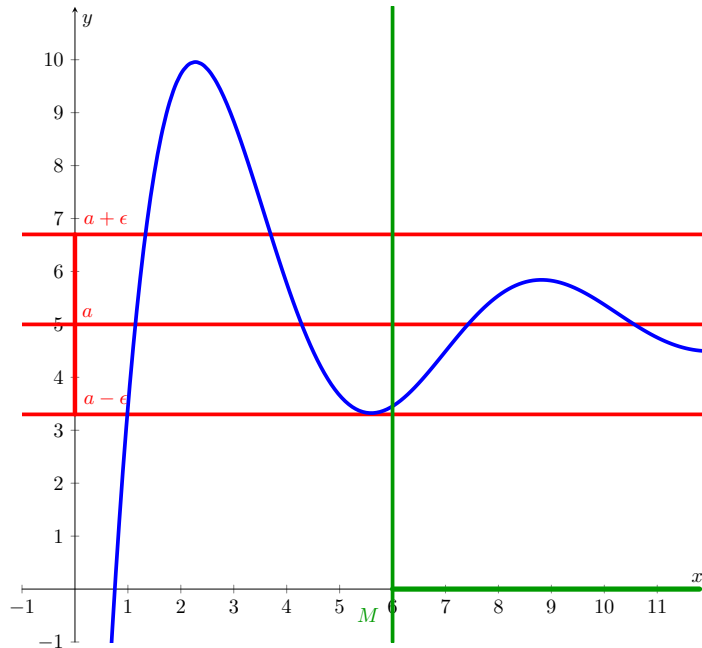
## 2.3 Limite d'une fonction

### 2.3.1 Limite à infini

Définitions:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a, (a \in \mathbb{R}) \text{ si}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} (M = M(\epsilon)) \text{ t.q. } x \geq M (x \in D_{\text{déf}}) \implies |f(x) - a| < \epsilon$$



$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \text{ si}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} (N = N(\epsilon)) \text{ t.q. } x < N (x \in D_{\text{déf}}) \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

**Exemple:** Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Soit  $\epsilon > 0$  donné

Montrons qu'il existe  $N \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} x < N &\implies \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \epsilon \\ &\iff \left| \frac{1}{x^2} \right| < \epsilon \\ &\iff \frac{1}{x^2} < \epsilon \\ &\iff |x| > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \\ &\iff x \in \left] -\infty; -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right[ \cup \left[ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}; +\infty \right[ \end{aligned}$$

Donc tout  $N \leq -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$  convient, car

$$x < N \text{ (avec } N \leq -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) \implies \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \epsilon$$

□

**Théorème de caractérisation par les suites:**  $f$  admet une limite  $x \rightarrow \infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

si et seulement si pour toute la suite  $x_n$  qui diverge vers  $\infty$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

**Exemple:** Montrons que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$  n'existe pas.

- Soit  $x_n = n \cdot \pi$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n \cdot \pi) = 0$$

- Soit  $y_n = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$  n'existe pas.

**Définitions:** Limites impropre

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  si

$$\forall A > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > M \implies f(x) > A$$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  si

$$\forall B < 0, \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > M \implies f(x) < B$$

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  si

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x < N \implies f(x) > A$$

4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  si

$$\forall B < 0, \quad \exists N \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x < N \implies f(x) < B$$

**Exemple:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

Soit  $A > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{R}$  t.q.  $x < N \implies$

$$\begin{aligned} \implies x^2 > A &\iff |x| = \sqrt{A} \\ \implies x \in ]-\infty; -\sqrt{A}] \cup [\sqrt{A}; +\infty[ \end{aligned}$$

Donc tout  $x < N$  convient.

□

### Opération sur les limites

1. Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$  alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |a|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b}, \quad (\text{si } b \neq 0)$$

2. Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$  alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$$

3. Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$  alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$$

### Cas d'indétermination Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} i(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = +\infty$$

alors on ne peut rien dire à priori des limites suivante

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) - i(x)) = \text{''}\infty - \infty\text{''}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \text{''}\frac{0}{0}\text{''}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{h(x)}{i(x)} \right) = \text{''}\frac{\infty}{\infty}\text{''}$$

## Quelque théorème importants

### 1. Théorème des 2 gendarmes

Soient  $d(x), g(x)$  toutes les fonctions telles que

$$\exists M > 0 \text{ avec } g(x) \leq x \leq d(x), \quad \forall x > M$$

Alors si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = a$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

Énoncé analogue pour  $x \rightarrow -\infty$

### Corollaire des 2 gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\underbrace{|f(x)|}_{\rightarrow 0} \leq f(x) \leq \underbrace{|f(x)|}_{\rightarrow 0} \quad \square$$

### 2. Théorème du gendarme (ou du chien méchant) Soient $f(x), g(x)$ toutes les fonctions telles que

$$\exists M > 0 \text{ avec } f(x) \geq g(x), \quad \forall x > M$$

Alors si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Énoncé analogue pour  $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$

### 3. Théorème "0 · borné"

Soient  $f, g$  deux fonctions telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et  $\exists M > 0$  avec  $g(x)$  est borné sur  $[M; +\infty[$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$$

[Par hypothèse

$$\exists A > 0 \text{ t.q. } |g(x)| \leq A, \quad x > M$$

$$0 \leq |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\rightarrow 0} \cdot A$$

Donc d'après les deux gendarmes:  $|f(x) \cdot g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  d'après son corolaire:  $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  ]

Énoncé analogue pour  $x \rightarrow -\infty$



**Exemple:**  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ,  $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\text{borné}} = 0$$

Or  $f$  est paire, donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

#### 4. Théorème " $\infty \cdot$ signe constant"

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $g(x) \geq m > 0$  sur un voisinage de  $+\infty$ .

Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$$

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $g(x) \leq m < 0$  sur un voisinage de  $+\infty$ .

Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

Énoncé analogue pour  $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$

5. **Théorème " $\infty +$  borné"** Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $g(x)$  est borné sur un voisinage de  $+\infty$ . Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

Énoncé analogue pour  $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$

#### Exemples:

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin(x)) = -\infty$

2.  $f(x) = \frac{x \cdot \sin(x)}{(\cos(x) - 2) \cdot (x + \sqrt{x^4 + x^2})}$ ,  $x \rightarrow -\infty$

$$\frac{x \cdot \sin(x)}{(\cos(x) - 2) \cdot (x + \underbrace{|x|}_{=-x} \cdot \sqrt{x^2 + 1})}, \quad x < 0$$

$$\frac{\overbrace{\sin(x)}^{\text{borné}}}{\underbrace{(\cos(x) - 2)}_{\leq -1 < 0} \cdot \underbrace{(-1 \cdot \sqrt{x^2 + 1})}_{\rightarrow -\infty}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad (\"0 \cdot \text{borné}\")$$

#### 2.3.2 Valeurs limite en $x_0$

**Définition:** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On appelle voisinage pointé de  $x_0$ , tout voisinage de  $x_0$ , privé de  $x_0$

**Exemple:** L'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

est appelé  $\delta$ -voisinage pointé de  $x_0$ .

En effet:  $0 < |x - x_0| < \delta$

$$\iff x \in ]x_0 - \delta; x_0[ \cup ]x_0; x_0 + \delta[$$

**Définition:** Soient  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur un voisinage pointé de  $x_0$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \neq x_0)}} f(x) = a, \text{ si } \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ (\delta = \delta(\epsilon))$$

tels que

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  si et seulement si tout  $\epsilon$ -voisinage de  $a$  contient l'image par  $f$  d'un  $\epsilon$ -voisinage pointé de  $x_0$

### 1. Théorème de caractérisation par les suites

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  si et seulement si pour toutes suites  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $x_0$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad (x_n \neq x_0)$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

**Exemple:**

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrons que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  n'existe pas

- Soit  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$x_n \rightarrow 1$$

et

$$f(x_n) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

- Soit  $y_n = 1 + \frac{1}{n}$  ( $y_n > 1$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$$

mais

$$\begin{aligned} f(y_n) &= y_n^2 + 1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 2$$

Donc  $\lim_{f(x)}$  n'existe pas

**Définitions:** Limite à gauche et à droite de  $x_0$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$  Si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\epsilon)) \text{ t.q. } x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$  Si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\epsilon)) \text{ t.q. } x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon$$

Reprise de l'exemple précédent:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 2$$

**Théorème**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

**Définition:** Limites infinies en  $x_0$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(A)) \text{ t.q. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 (\delta = \delta(A)) \text{ t.q. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < B$$

**Exemple:** Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Soit  $A > 0$  donné, montrons que

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 < |x - 0| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > A$$

$$\frac{1}{x^2} > A \iff x^2 < \frac{1}{A} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{A}} \iff |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Donc tout  $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$  convient, car

$$0 < |x - 0| < \delta, (\text{ avec } \delta \leq \frac{1}{\sqrt{A}}) \implies \frac{1}{x^2} > A$$

**Définitions:** Limites infinies à gauche et à droite en  $x_0$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$  si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > A$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$  si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) > A$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$  si

$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) < B$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$  si

$$\forall B < 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) < B$$

**Exemple:** Montrons que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Soit  $B > 0$  donné, montrons que

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 - \delta < x < 0 \implies \frac{1}{x} < B \implies \frac{1}{x} < B \iff x > \frac{1}{B}, \quad (x, B < 0)$$

Donc tout  $\delta > 0$  vérifiant

$$\frac{1}{B} < -\delta < 0$$

convient ( $\delta < -\frac{1}{B}$ ) car

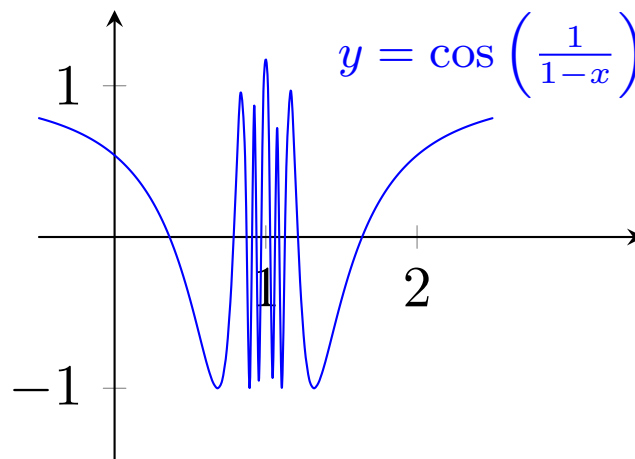
$$0 - \delta < x < 0 \quad (\text{avec } -\delta > \frac{1}{B}) \implies \frac{1}{x} > B$$

□

**Remarque:** Tous les théorèmes et règles de calcul concernant les limites lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  restent valables lorsque  $x \rightarrow x_0$

**Exemple:**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$$



$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{1-x^2}} &= 0 \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{1-x^2}} : \text{FI} & \text{ „} \frac{0}{0} \text{ „} \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (2-x)}{\sqrt[3]{(1-x^2) \cdot (x + \sqrt{2-x})}} &= \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+2)}{\sqrt[3]{(1-x) \cdot (1+x) \cdot (x + \sqrt{2-x})}} &= \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2 \cdot (x+2)}}{\sqrt[3]{-1-x} \cdot (x + \sqrt{2-x})} &= 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{x - \sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}_{\text{borné}} = 0$$

### 2.3.3 Infinitement petits équivalents (IPE)

**Définition:** Soient  $f$  et  $g$  2 fonctions définies sur un voisinage pointé de  $x_0$ .

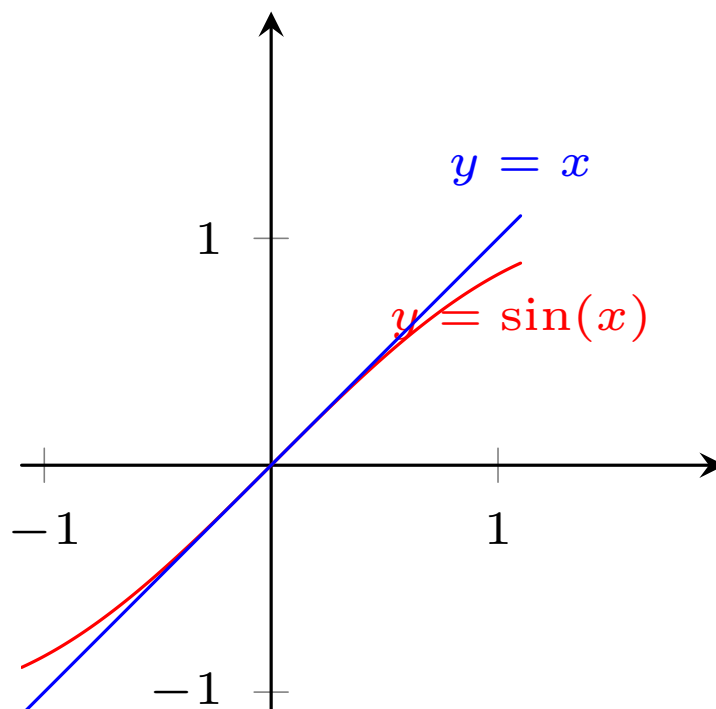
$f$  et  $g$  sont des IPE ( $x \rightarrow x_0$ ) si et seulement si

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  (IP)
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  (E)

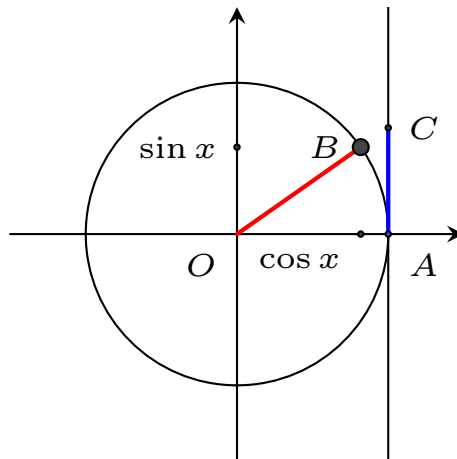
On écrit alors  $f \sim g$  ( $x \rightarrow x_0$ )

Montrons que

$$\sin(x) \sim x \quad x \rightarrow 0$$



Soit  $0 < x < \frac{\pi}{2}$



$$\begin{aligned}
 & \dim(\triangle AOB) < \dim(\widehat{OAB}) < \dim(\triangle OAC) \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin(x) < \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(x) \\
 \Leftrightarrow & \sin(x) < x < \tan(x) \\
 \Leftrightarrow & 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{\cos(x)}_{\rightarrow 1} < \frac{\sin(x)}{x} < 1
 \end{aligned}$$

Théorème des 2 gendarmes:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Or  $\frac{\sin(x)}{x}$  est paire donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

De plus


$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

donc

$$\sin(x) \sim x \quad (x \rightarrow 0)$$

**Propriété:** Si  $f_1 \sim g_1$  et  $f_2 \sim g_2$  au voisinage de  $x_0$ , alors

$$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$$

 Attention: En général

$$f_1 \sim g_1 \text{ et } f_2 \sim g_2 \not\Rightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$$

Contre-exemple:

$$x \sim (x + x^2) \text{ et } x \sim (-x + x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

Or

$$\frac{x - x}{(x + x^2) + (-x + x^2)} = \frac{0}{2x^2} !$$

D'où la règles d'utilisation des IPE.

Dans un calcul de limit on peut remplacer une fonction par son IPE, uniquement dans une **expression factorisée** et jamais dans une somme.

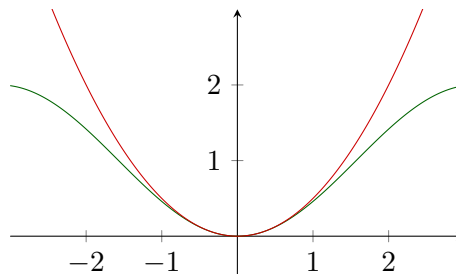
**Exemples:**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) = 0$  et

$$1 - \cos(x) = 2 \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \sim 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

donc

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}, \quad (x \rightarrow 0)$$



2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0$  et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\rightarrow 1} = 1$$

Donc

$$\tan(x) \sim x \quad (x \rightarrow 0)$$

**Exemple servant d'avertissement:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(x) - \sin(2x)}{x^3}$$

Lorsque  $x \rightarrow 0$   $2 \cdot \sin(x) \sim 2x$

et  $\sin(2x) \sim 2x$

Mais

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(x) - \sin(2x)}{x^3} \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{2x - 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(x) - \sin(2x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot (1 - \cos(x))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = 1$$

## 2.4 Continuité

**Définition:** Soit  $f$  définie sur un voisinage de  $x_0$ .  $f$  est continue en  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cette définition comporte 3 exigences:

1.  $f(x_0)$  existe ( $x_0 \in \mathbb{D}_{\text{def}}$ )
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe (vaut  $a \in \mathbb{R}$ )
3.  $a = f(x_0)$

**Définition analytique**  $f$  est continue en  $x_0$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } (x - x_0) < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

**Définition:**  $f$  est continue sur un ensemble  $I = ]a, b[$  si  $f$  est continue en tout  $x_0 \in I$  et on écrit  $f \in \mathbb{C}_I^0$  (la  $O^e$  dérivé de  $f$  continue sur l'intervalle  $I$ )

**Exemples:**

1. Montrons que  $\sin(x) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$

Soit  $\epsilon > 0$  donné

$$\begin{aligned} |\sin(x) - \sin(x_0)| &= \left| 2 \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq \\ &\leq \left| 2 \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq \left| 2 \cdot \frac{x-x_0}{2} \right| = |x - x_0| \end{aligned}$$

Donc tout  $\delta \leq \epsilon$  convient car

$$|x - x_0| < \delta \quad (\text{avec } \delta \leq \epsilon) \implies |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$$

□

Corollaire  $\cos(x) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$  car  $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

2. Montrer que  $\sqrt{x}$  est contenue sur  $\mathbb{R}_+^*$

Montrons que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} \right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

Or

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon \iff |x - x_0| < \epsilon \sqrt{x_0}$$

Donc tout

$$\delta \leq \epsilon \cdot \sqrt{x_0}$$

convient car

$$|x - x_0| < \delta \quad (\delta \leq \epsilon \cdot \sqrt{x_0}) \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$$



**Propriétés:** Soit  $f, g$  continues en  $x_0$  alors

- $|f|$  est continue en  $x_0$
- $f \pm g$  sont continue en  $x_0$
- $f \cdot g$  est continue en  $x_0$
- si  $g(x_0) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  est continue en  $x_0$

Ces propriétés sont la conséquence des propriétés sur la limite en  $x_0$

**Théorème:** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions.  $f$  définie sur un voisinage pointé de  $x_0$ . Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  et si  $g$  est continue en  $a$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = g(a)$$

**Corollaire:** Soient  $f$  continue en  $x_0$  et  $g$  continue en  $f(x_0)$ . Alors  $g \circ f$  est continue sur en  $x_0$

[

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) \\ &= g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) \text{ car } g \text{ est continue} \\ &= g(f(x_0)) \text{ car } f \text{ est continue} \\ &= g \circ f(x_0) \end{aligned}$$

□

]

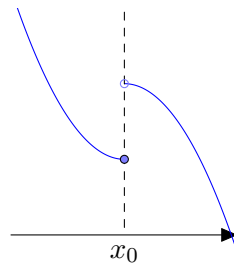
**Exemples:**

- $f(x) = \text{cste}$  est  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$  [ $\delta > 0$  qcq □]
  - $f(x) = x$  est  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$  [ $\delta \leq \epsilon$  □]
  - Donc toutes fonctions polynomiales sont  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$
  - Et toutes les fonctions naturelles sont  $\mathbb{C}^0$  sur leur  $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
- Les fonctions  $\tan(x)$  et  $\cot(x)$  sont  $\mathbb{C}^0$  sur leur  $\mathbb{D}_{\text{déf}}$
- $f(x) = \sin^2(\sqrt{x^2 + 1})$  est  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$  comme composé de fonctions

**Définitions:** Continuité gauche, droite

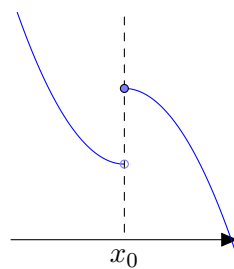
- $f$  est continue à gauche en  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$



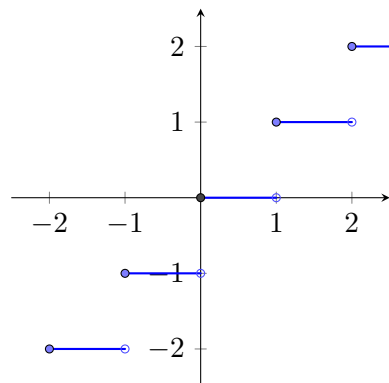
- $f$  est continue à droite en  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$



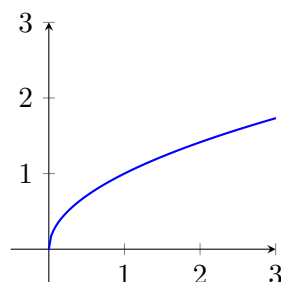
### Exemples:

1.  $f(x) = E(x)$ ,  $x_0 \in \mathbb{Z}$



$f$  continue à droite en  $x_0$  et discontinue à gauche en  $x_0$

2.  $g(x) = \sqrt{x}$

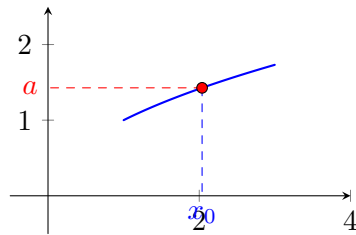


$g$  est continue à droite en  $x_0 = 0$

**Définitions:**

- On dit que  $f$  est continue sur  $[a; b]$  si elle continue sur  $]a; b[$ , continue à droite en  $x = a$  et à gauche en  $x = b$
- Soit  $f$  définie sur voisinage pointé de  $x_0$  avec  $x_0 \notin \mathbb{D}_f$ . On dit que  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe (vaut } a \in \mathbb{R})$$



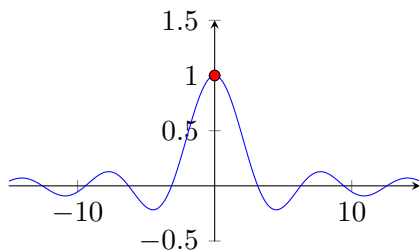
On peut alors définir  $\tilde{f}(x)$  continue en  $x_0$  en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ a & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$  est appelé la **prolongée par continuité** de  $f$  en  $x_0$ .

**Exemple:**

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad x_0 = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ est } \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^0$$

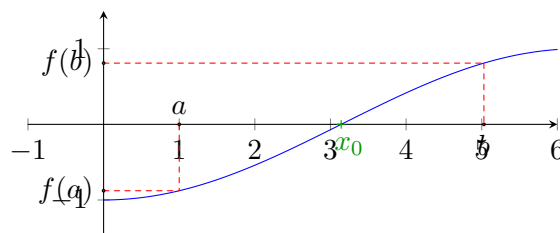
**Théorème de la valeur intermédiaire** Soit  $f$  continue sur  $[a; b]$ , si

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

alors

$$\exists x_0 \in [a; b] \text{ t.q. } f(x_0) = 0$$

Illustration du cas  $f(a) < 0, f(b) > 0$



**Démonstration:** algorithme de la bisection. On coupe l'intervalle  $[a; b]$  en  $x = \frac{a+b}{2}$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \quad x_0 = \frac{a+b}{2}$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ , alors on pose

$$I_1 = [a_1; b_1] \text{ avec } a_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } b_1 = b$$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ , alors on pose

$$I_1 = [a_1; b_1] \text{ avec } b_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } a_1 = a$$

On réitère le découpage sur l'intervalle  $I_1 = [a_1; b_1]$  et ainsi de suite :

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  t.q.  $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$  et alors  $\frac{a_n+b_n}{2}$
- Soit on obtient  $(a_n)$  et  $(b_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 2 suites telles que

- $f(a_n) < 0 < f(b_n)$
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b$

$(a_n)$  est croissante et majorée

$(b_n)$  est décroissante et minorée

Donc ces suites sont convergentes

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a-b}{2^n} \right) = 0$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \text{ (car les deux limites existent)}$$

Posons

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

Or  $f$  est continue sur  $[a; b]$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0)$$

Mais

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Donc

$$f(a_n) = f(b_n) = 0$$

D'où

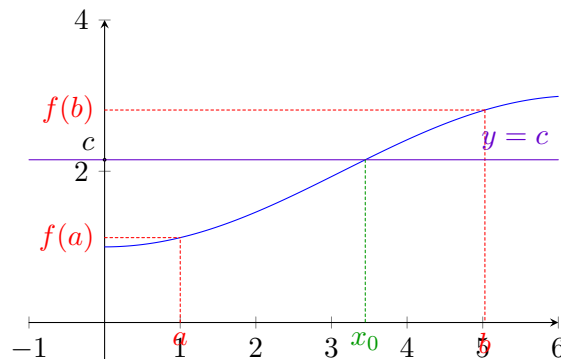
$$f(x_0) = 0$$

□

**Corollaire:** Soit  $f$  continue sur  $[a; b]$

Si  $c$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , alors

$$\exists x_0 \in [a; b] \text{ t.q. } f(x_0) = c$$



**Théorème:** Soit  $f$  continue sur  $[a; b]$

- Si  $f$  est strictement croissante sur  $[a; b]$  alors  $f$  est bijective de  $[a; b]$  sur  $[f(a); f(b)]$
- Si  $f$  est strictement décroissante sur  $[a; b]$  alors  $f$  est bijective de  $[a; b]$  sur  $[f(b); f(a)]$

**Démonstration:** Soit  $f$  strictement croissante.

Le théorème de la valeur intermédiaire nous donne l'existence d'un antécédent pour tout  $y \in [f(a); f(b)]$  et cet antécédent est **unique** car  $f$  est strictement monotone.

□