EPFL

MAN

Mise à niveau

Physique

PREPA-033

Student:
Arnaud FAUCONNET

Professor:
Sylvain BRÉCHET

Printemps - 2019

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapter 7

Électrostatique

Electrostatique: branche de la physique qui étudie les phénomènes électriques relatifs à des charges électriques immobiles.

Magnétostatique: branche de la physique qui étudie les phénomènes magnétiques relatifs à des courants électriques stationnaires (indépendants du temps)

Electrodynamique (électromagnétisme): branche de la physique qui étudie les phénomènes électromagnétiques (cas général).

7.1 Charge électrique, force de Coulomb et champ électrique

7.1.1 Charge électrique

Charge électrique (Q ou q): grandeur physique qui caractérise la quantité d'électricité d'un objet.

1. Grandeur extensive
2. Grandeur scalaire (positive (+), négative (-), ou nulle (0))
3. Grandeur conservée (même en relativité)
4. Unité physique (SI): Coulomb $[C] = [A \cdot s]$ où A = Ampère
5. Les particules élémentaires électriquement chargées ont une charge électrique élémentaire $|e| = 1.602 \cdot 10^{-19}[C]$
6. Les objets électriquement chargés ont une charge électrique qui est un multiple de "e".

7.1.2 Force de Coulomb

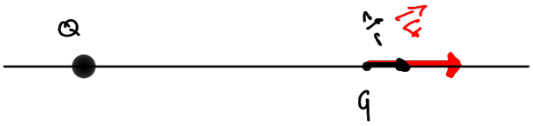
Force de Coulomb ($\overrightarrow{F}$): deux point matériels électriquement chargés sont soumis à des forces égales et opposées, proportionnelles au produit des charges électriques et inversement proportionnelles au carré de la distance qui les sépare.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\widehat{\overrightarrow{r}} \tag{7.1}$$

où $\widehat{\overrightarrow{r}} = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$ (loi de Coulomb)

Permittivité du vide (SI): $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{m^2 N}\right] = \left[\frac{A^2 s^4}{kg \cdot m^3}\right]$

1. si $Qq < 0$ (signe opposée)



2. si $Qq > 0$ (même signe)

Structure analogue à la force de la gravitation: $\overrightarrow{F} = -\frac{GMm}{r^2} \cdot \widehat{\overrightarrow{r}}$

7.1.3 Champ électrique

Champ électrique ($\overrightarrow{E}$): grandeur vectorielle intensive définie en tout point de l'espace. La force électrique $\overrightarrow{F}$ sur une charge q s'exprime comme le produit de la charge électrique et du champ électrique

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} \tag{7.2}$$

Si le champ électrique est dû à une autre charge électrique Q, compte tenu de (7.1) et (7.2), ce champ s'écrit:

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \widehat{\overrightarrow{r}} \tag{7.3}$$

Unité physique (SI): $\left[\frac{N}{C}\right] = \left[\frac{kg \cdot m}{A \cdot s^2}\right]$

7.1.4 Principe de superposition

Comme la force électrique $\overrightarrow{F}$ est une grandeur extensive, la force électrique $\overrightarrow{F}$ exercée sur une charge q en position $\overrightarrow{r}$ par un ensemble de n charges électriques $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ s'écrit,

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \sum_{i=1}^{n} q\overrightarrow{E_i}(\overrightarrow{r}) = q(\overrightarrow{E_1}(\overrightarrow{r}) + ... + \overrightarrow{E_n}(\overrightarrow{r})) = q\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) \tag{7.4}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{E_i}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{E_1}(\overrightarrow{r}) + ... + \overrightarrow{E_n}(\overrightarrow{r}) \tag{7.5}$$

7.1.5 Lignes de champ électrique

Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est défini en tout point de l'espace. On peut associer un vecteur avec une norme et une orientation donnée à chaque point de l'espace

Les vecteurs champ électrique sont tangents à des lignes (ou courbes) appelées lignes de champ électrique.

Pour une charge électrique positive, les lignes de champ sont orientées vers l'extérieur. Pour une charge électrique négative, les lignes de champ sont orientées vers l'intérieur.

Lignes de champ électrique pour un système constitué de deux charges électrique de signe opposée (dipôle).

Les lignes de champ cont de la charge positive vers la charge négative.

Lignes de champ électriques pour un système constitué d'une charge électrique positive et d'une plaque conductrice chargée négativement.

7.2 Potentiel électrique

Le potentiel électrique $\Phi(\overrightarrow{r})$ est un champ scalaire et intensif défini comme l'énergie potentielle électrique par unité de charge q

$$E_{pot}(\overrightarrow{r}) = q\Phi(\overrightarrow{r}) \tag{7.6}$$

Travail de la force électrique sur une charge q de $\overrightarrow{r_1}$ à $\overrightarrow{r_2}$:

$$W_{1\to 2}(\overrightarrow{F}) = E_{pot}(\overrightarrow{r_1}) - E_{pot}(\overrightarrow{r_2}) = q(\Phi(\overrightarrow{r_1}) - \Phi(\overrightarrow{r_2})) \equiv q(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{7.7}$$

Equipotentielle: courbe dont les points ont la même valeur du potentiel $\Phi(\overrightarrow{r})$

Les équipotentielles (bleu) sont orthogonales aux lignes électrique (rouge).

7.2.1 Tension électrique

La tension électiruqe U_{12} entre les positions $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ est une grandeur scalaire définie comme le travail de la force électrique. $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$ par unité de charge q:

$$U_{12} = \frac{w_{1\to 2(\overrightarrow{F})}}{q} = \int_{\overrightarrow{r_1}}^{\overrightarrow{r_2}} \underbrace{\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r})}_{=\frac{\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r})}{q}} \cdot d\overrightarrow{r} = \underbrace{\Phi_1 - \Phi_2}_{\frac{E_{pot}(1) - E_{pot}(2)}{q}} \tag{7.8}$$

Propriétés:

1. U_{12} ne dépend que des positions 1 et 2 (indépendamment du chemin)
2. $U_{12} = -U_{21}$ (chemin inverse)
3. $U_{11} = 0$ (chemin fermé)
4. $U_{12} + U_{23} = U_{13}$ (chemin fermé)
5. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ va du potentiel électrique positif vers le potentiel électrique négatif.

Unité électrique: électron-volt: $1[eV] = 1.602 \cdot 10^{-19}[J]$.

C'est l'énergie reçue par une charge élémentaire sous tension de $1[V]$.

Exemples de tension:

1. Charge ponctuelle $Q > 0$ (champ électrique radial) $\vec{e_r} = \widehat{\vec{r}}$

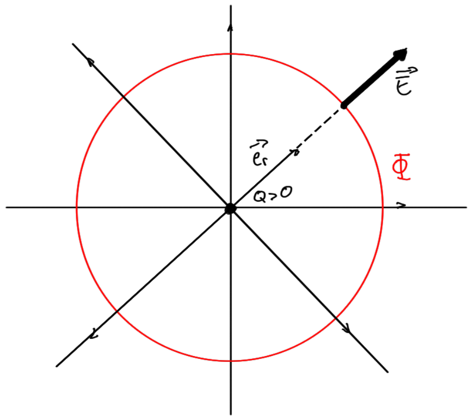
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e_r} \quad (7.3) \qquad \vec{e_r} \cdot d\vec{r}' = dr'$$

$$\Phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r_\infty}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}' = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\vec{r_\infty}}^{r}\frac{dr'}{r'^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} \qquad (7.9)$$

$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \Phi(\vec{r_1}) - \Phi(\vec{r_2})$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (7.10)$$



Les lignes de champ électrique sont radiales et les équipotentielles sont des cercles centrés sur la charge Q.

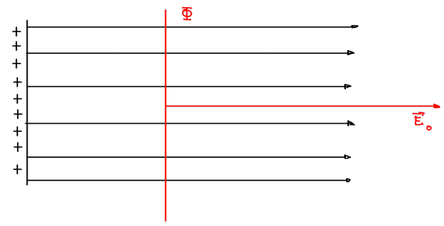
2. Plaque infinie (champ électrique uniforme)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E_0} = \vec{E_0}\cdot\vec{e_x} \qquad (7.11)$$

$$d\vec{r}' = dx'\cdot\vec{e_x}$$

$$\Phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r_\infty}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}' =$$

$$= -E_0\int_{x_\infty}^{x}\underbrace{\vec{e_x}\cdot d\vec{r}'}_{dx'} = -E_0(x - x_\infty) \qquad (7.12)$$



$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \Phi(\vec{r_1}) - \Phi(\vec{r_2}) = E_0(x_2 - x_1) \qquad (7.13)$$

Les lignes de champ électrique sont orthogonales à la plaque et les équipotentielles sont des droites verticales parallèles à la plaque dans le plan vertical.

7.3 Conducteurs

Un objet est un **conducteur** si les charges électriques peuvent se déplacer librement à sa surface. Dans le cas contraire, l'objet est un **isolant**.

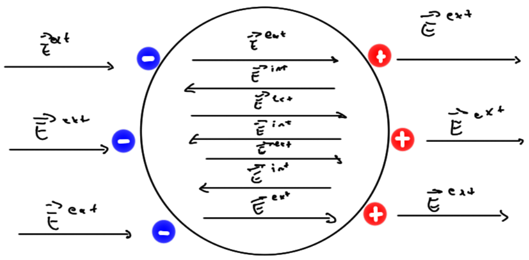
7.3.1 Champ électrique dans un conducteur

En électrostatique, le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur. Cela implique que le potentiel électrique Φ est contant à l'intérieur du conducteur. En absence d'un champ électrique extérieur, la surface du conducteur est une équipotentielle. Le champ électrique $\vec{E}$ n'est pas définie à la surface (discontinuité) mais on peut prendre la limite extérieure.

7.3.2 Phénomène d'influence (dû à la force de Couloumb)

En présence d'un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}^{ext}$ supposé uniforme, les charges à la surface d'un conducteur se séparent afin de générer un champ électrique intérieur $\overrightarrow{E}^{int}$ qui compense exactement le champ extérieur:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}^{ext} + \overrightarrow{E}^{int} \tag{7.14}$$

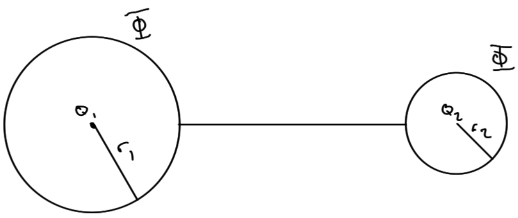


Le conducteur est initialement neutre

Dû à l'influence du champ électrique extérieur, la surface du conducteur n'est plus un équipotientielle

7.3.3 Effet de pointe

Plus la courbe de la surface du conducteur est grande, c'est-à-dire plus le rayon de courbure r est petit, plus le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est grand.
On considère deux sphère de rayon r_1 et r_2 en contact.



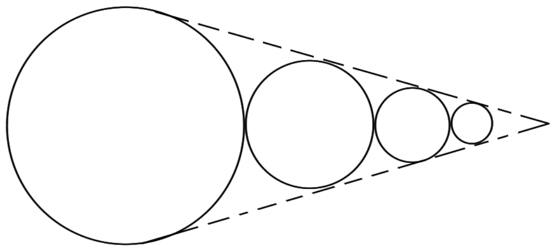
Potentiel uniforme Φ:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{r_2} \implies \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2} > 1 \tag{7.15}$$

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r_1^2}\cdot\overrightarrow{e_r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{E_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{r_2^2}\cdot\overrightarrow{e_r} \tag{7.16}$$

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{r_2^2}\cdot\overrightarrow{e_r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r_1^2}\cdot\frac{r_1}{r_2}\cdot\overrightarrow{e_r} > \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r_1^2}\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{E_1} \implies \overrightarrow{E_2} > \overrightarrow{E_1}$$

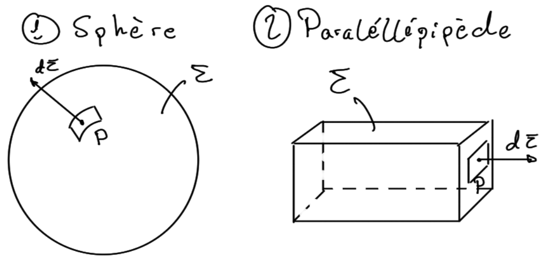
On peut modéliser une point comme un empilement de sphères de rayons décroissants:



Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est beaucoup plus intense à la pointe.

7.4 Loi de Gauss

Surface fermée d'aire Σ: surface correspond au bord d'une région de volume V de l'espace.



Élément infinitésimal de surface $d\overrightarrow{\Sigma}$:
Vecteur associé à un point P de la surface, normal à la surface qui point vers l'extérieur dont la norme correspond à l'aire de l'élément de surface.
Aire de la surface: $\overrightarrow{n}$ = vecteur unitaire normal à la surface

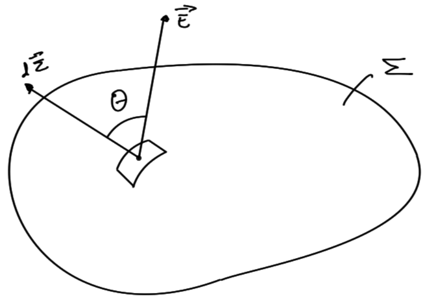
$$\oint_{\Sigma} \overrightarrow{n} \cdot d\overrightarrow{\Sigma} = \oint d\Sigma \quad \text{où } d\Sigma = \|d\overrightarrow{\Sigma}\| \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{n}\| = 1 \tag{7.17}$$

7.4.1 Flux électrique

Le flux infinitésimal $d\Psi_E$ du champ électrique $\overrightarrow{E}$ à travers une surface infinitésimale $d\overrightarrow{\Sigma}$ est une grandeur scalaire définie comme

$$d\Psi_E = \overrightarrow{E} d\overrightarrow{\Sigma} = \|\overrightarrow{E}\| \|d\overrightarrow{\Sigma}\| \cos(\theta) \tag{7.18}$$

1. Si $\overrightarrow{E}$ et $d\overrightarrow{\Sigma}$ sont orthogonaux, $d\Psi_E = 0$
2. Si $\overrightarrow{E}$ et $d\overrightarrow{\Sigma}$ sont parallèles, $d\Psi_E > 0$
3. Si $\overrightarrow{E}$ et $d\overrightarrow{\Sigma}$ sont antiparallèles, $d\Psi_E < 0$



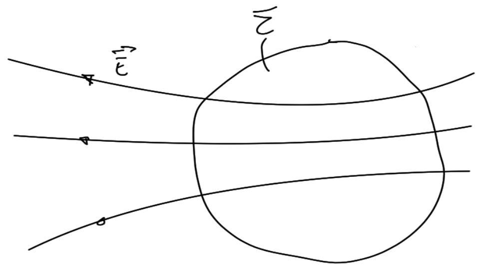
Le flux Ψ_E du champ électrique à travers une surface fermée d'aire Σ est obtenu par intégration

$$\Psi_E = \oint_\Sigma d\Psi_E = \oint_\Sigma \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\Sigma} \tag{7.19}$$

Il existe trois cas de figure déterminés par les lignes de champ électrique:

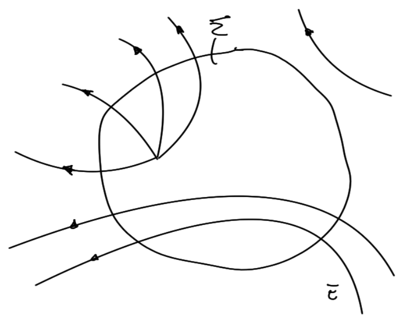
1. Il y a autant de lignes de champ électrique qui entrent et sortent. Il n'y a pas de source de lignes de champ électrique l'intérieur de Σ

   $$\Psi_E = 0$$



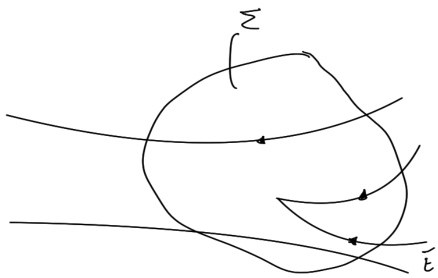
2. Il y a plus de lignes de champ qui sortent. Il y a une (ou plusieurs) sources de lignes de champ électrique à l'intérieur de Σ:

   $$\Psi_E > 0$$



3. Il y a plus de lignes de champ qui entrent. Il y a un (ou plusieurs) puits de lignes de champ électrique à l'intérieur du la surface Σ

   $$\Psi_E < 0$$



Les lignes de champ électrique sont orientée positivement d'une charge positive vers une charge négative. Ainsi, les sources de lignes de champ électrique sont les chargent électriques positives et les points de lignes de champ électrique sont des charges électrique négative.

Le flux électrique Ψ_E est dont proportionnel à la somme des charges Q^{int} qui se trouvent à l'intérieur de la surface fermée d'aire Σ:

$$\Psi_E = \oint_\Sigma \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{\Sigma} = \frac{Q^{int}}{\epsilon_0} \tag{7.20}$$

Loi de Gauss

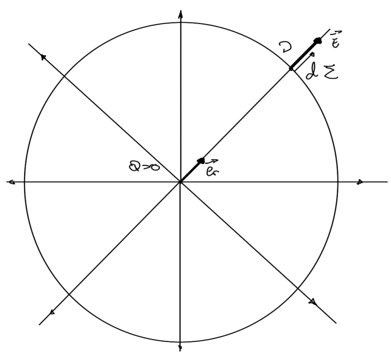
Applications:

Champ électrique d'une charge ponctuelle

Par symétrie, le champ électrique est radial et ne dépend que de la distance radiale à la charge:

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = E(r)\overrightarrow{e_r}$$

On considère une sphère de rayon r et d'aire Σ centrée sur la charge Q.

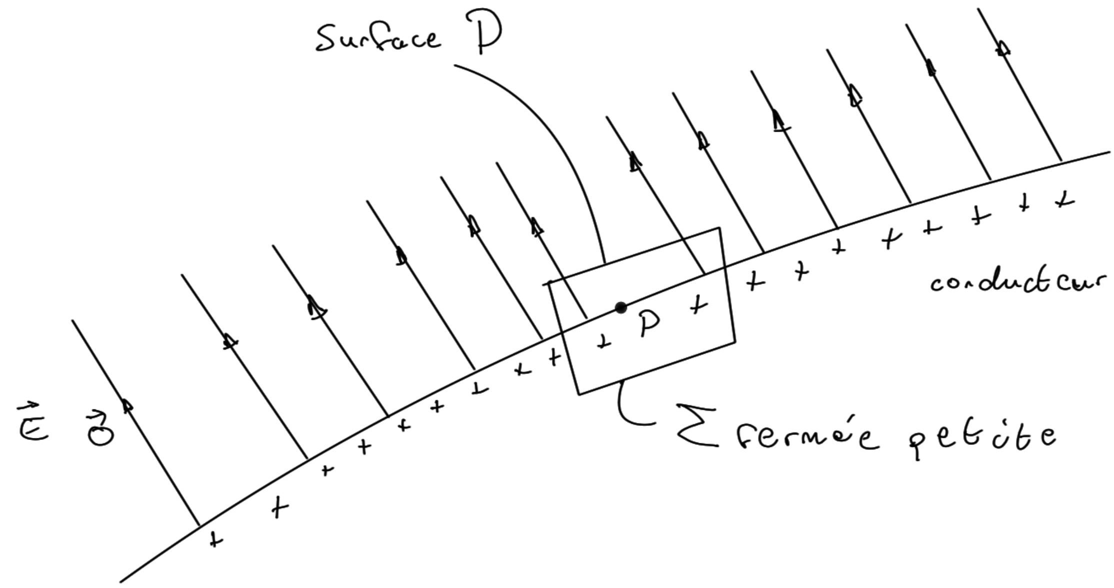


$$\Psi_E = \oint \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{\Sigma} = \oint E d\Sigma = E \oint d\Sigma = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon} \tag{7.21}$$

Conséquences $\implies E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ (7.3)

1. Dans un conducteur, les charges trouvent à la surface.
2. Dans une cavité conductrice, le champ électrique est nul.

Champ électrique à la surface d'un conducteur



Pour un petit parallélépipède du surface extérieure S, le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est uniforme et orthogonal à la surface du conducteur et parallèle à l'élément se surface $d\overrightarrow{\Sigma}$:

$$\Psi_E = \oint \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{\Sigma} = E \oint d\Sigma = ES = \frac{Q^{int}}{\epsilon_0} \implies E = \frac{Q^{int}}{S\epsilon_0} \tag{7.22}$$

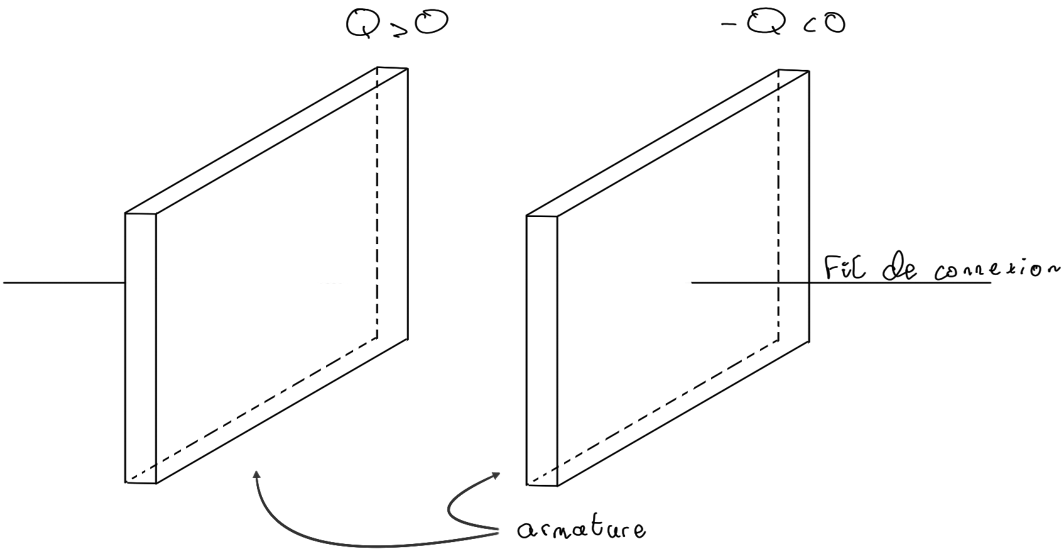
Densité superficielle de charges:

$$\sigma = \frac{Q^{int}}{S} \tag{7.23}$$

$$\implies \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{7.24}$$

7.5 Condensateurs

Un condensateur est un ensemble formé de deux conducteurs isolés se faisant face. Si l'une des armatures est chargée avec une charge électrique Q, l'autre possède un charge négative $-Q$, égale et opposée.



Conventions:

1. La charge Q d'un condensateur est définie positive.
2. La tension aux armatures U est définie positive.

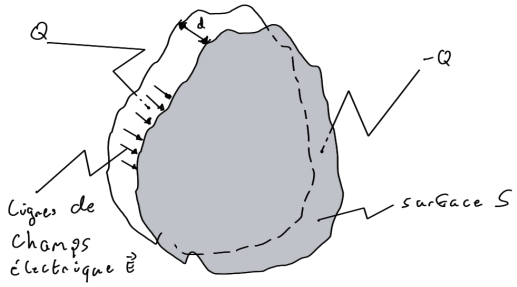
La capacité électrique C d'un condensateur est définie comme son aptitude à stocker des charges électriques sur ses surfaces conductrice pour une tension U qui est donnée:

$$Q = C \cdot U \tag{7.25}$$

Unité physique d'une capacité électrique :
Farad (SI): $[F]$ $\left[\frac{C}{V}\right] = \left[\frac{A^2 s^4}{kg m^2}\right]$

Exemples: Condensateur plan, sphérique et cylindrique.

Condensateur plan



Champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}$ à la surface d'un conducteur.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies Q = \epsilon_0 \cdot S \cdot E \quad (7.26)$$

Tension U entre les amratures:

$$U = \int_0^d E(r)dt = E\int_0^d dr = Ed \implies E = \frac{U}{d} \quad (7.27)$$

Charge électrique

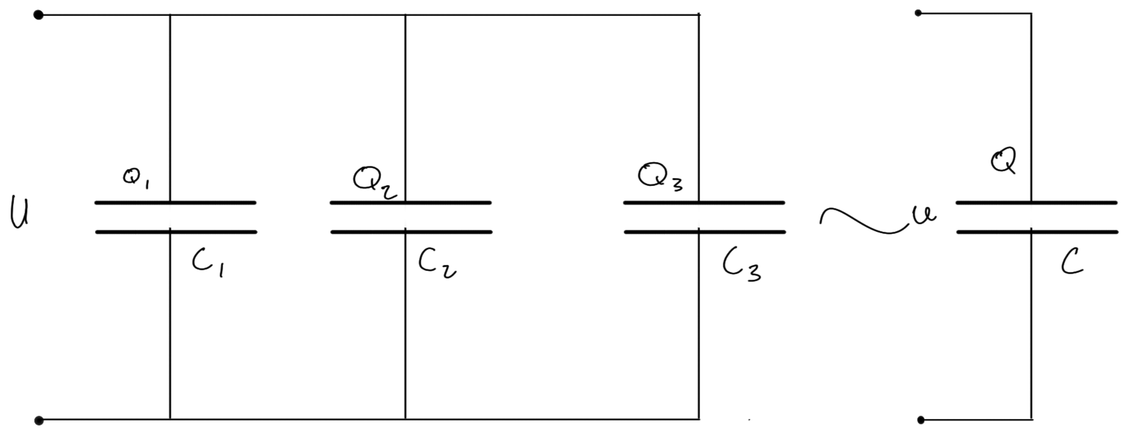
$$Q = \epsilon_0 \frac{S}{d} U \quad (7.28) \qquad Q = CU \quad (7.25)$$

Capacité électrique:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (7.29)$$

7.5.1 Groupement de condensateur

1. Branchement en parallèle de trois conducteurs:



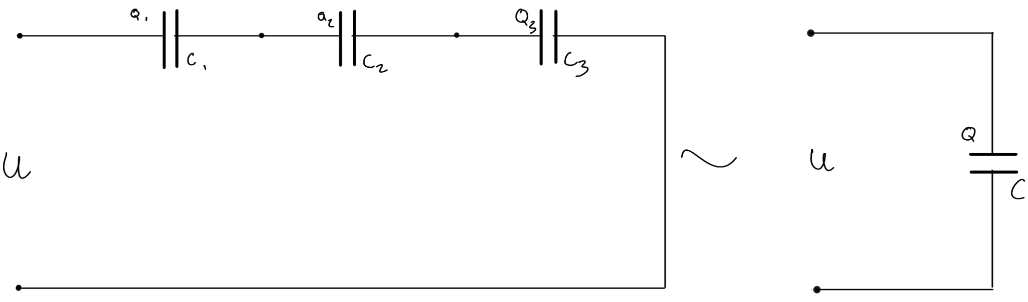
- Charges: $Q = CU$; $Q_1 = C_1U$; $Q_2 = C_2U$; $Q_3 = C_3U$; $Q = (Q_1 + Q_2 + Q_3) = (C_1 + C_2 + C_3) \cdot U = CU$

- Capacité électrique:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \tag{7.30}$$

- En parallèle, les capacités s'additionnent

2. Branchement en série de trois condensateurs:



- Charges $Q = CU; \quad Q = C_1U_1; \quad Q = C_2U_2; \quad Q = C_3U_3$
- Tension: $U = U_1 + U_2 + U_3 = Q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}) = \frac{Q}{C}$
- Capacité électrique:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \tag{7.31}$$

- En séries, les inverses des capacités s'additionnent.

7.5.2 Énergie stockée dans un condensateur

L'énergie E stockée dans un condensateur de capacité C correspondau travail à fournir pour charger ce dernier avec une charge électrique Q en s'opposant à la force de Coulomb $\overrightarrow{F}$ due aux cahrges de même signe préesentes sur la plaque.

Le travail de la force de Coulomb infinitésimale $d\overrightarrow{F}$ sur une charge infinitésimale dQ s'écrit (tension U fixe):

$$W(d\overrightarrow{F}) = \int_{\overrightarrow{r_\infty}}^{\overrightarrow{r}} d\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}') \cdot d\overrightarrow{r}' = dQ \int_{\overrightarrow{r_\infty}}^{\overrightarrow{r}} \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r}' = -UdQ$$

Énergie électrique stockée dans le consdensateur:

$$E = \int_0^Q U(Q')dQ' = \frac{1}{C}\int_0^{Q'} d' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 \tag{7.32}$$