INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

GRAFOS

Teorema de Kuratowski

Bernardo Damiani e Karmine Geremia

Tópicos

- Histórico do Algoritmo
- Grafo Planar
- Aplicação do algoritmo
  - Grafo K5
  - Grafo K3,3
- Limitações
- Funcionamento do Algoritmo
- Referências

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

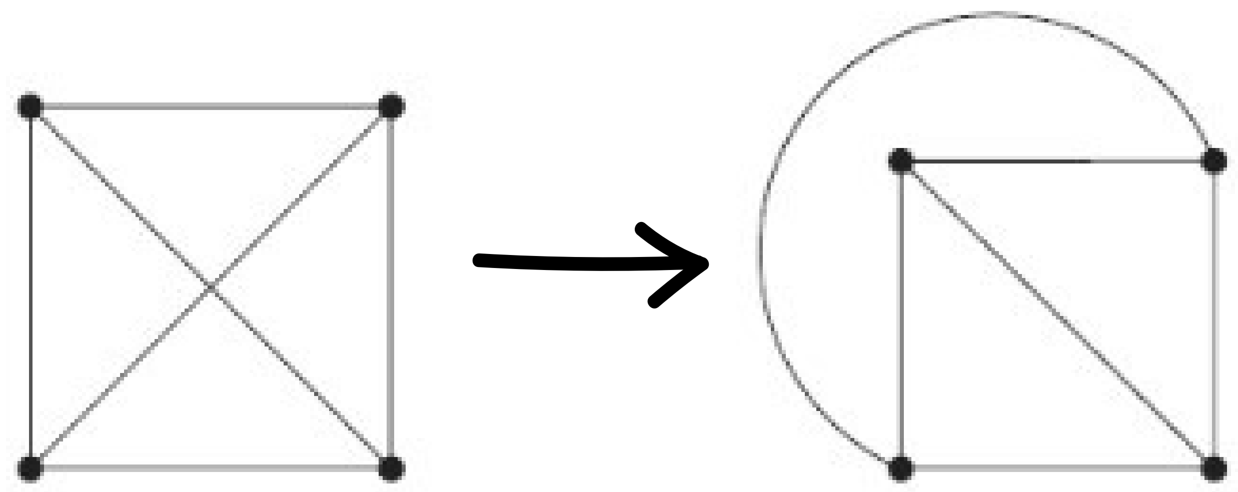
Histórico do algoritmo

Em 1930 o teorema foi publicado por Kazimierz Kuratowski

Esse teorema permite caracterizar grafos planares.

Grafo Planar

Um grafo planar significa que este grafo pode ser representado num plano sem que suas arestas se cruzem.



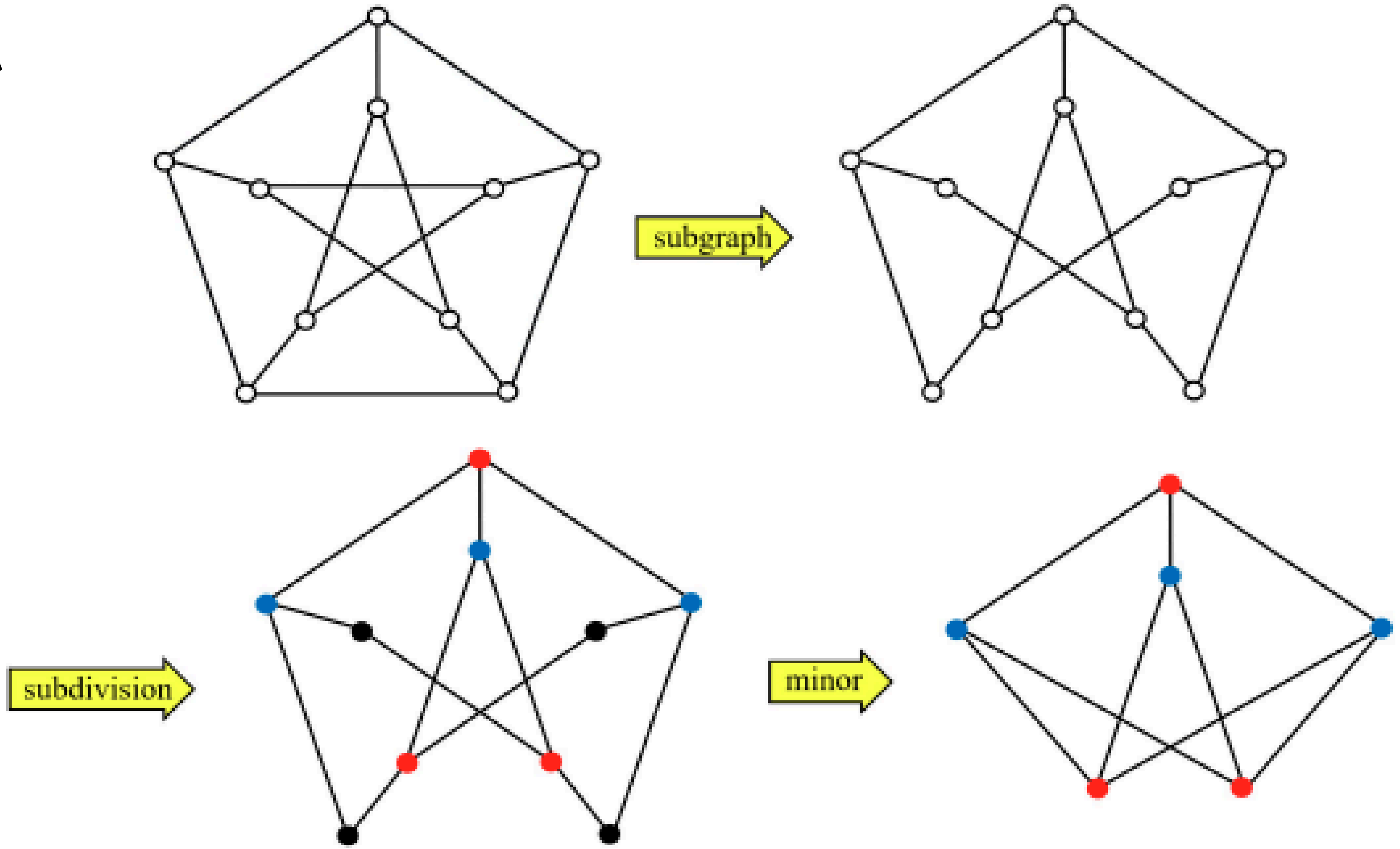
INSTITUTO FEDERAL Sul-rio-grandense | Câmpus Passo Fundo

Aplicação do algoritmo

O que o Teorema propõe

Um grafo é planar se, e somente se, ele não contém nenhum subgrafo que seja uma subdivisão de K5 ou de K3,3.

O motivo pelo qual esses dois grafos são usados no teorema de Kuratowski é que eles são os menores grafos não planares. Isso significa que qualquer outro grafo não planar mais complexo necessariamente conterá uma subdivisão de K5 ou K3,3. Portanto, se um grafo não contiver nenhuma subdivisão de K5 ou K3,3, então ele deve ser planar.



Aplicação do algoritmo

Relevância

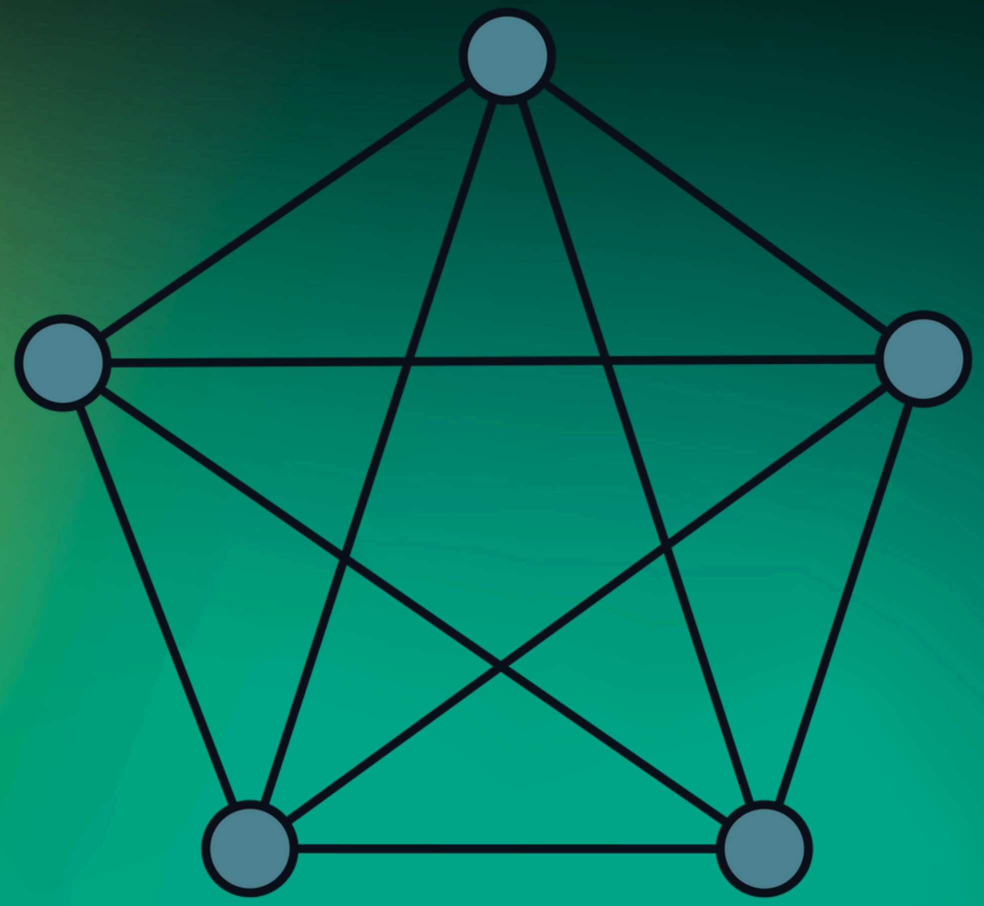
É mais relevante em contextos teóricos e de design gráfico, como em engenharia e arquitetura, onde a representação visual de redes e estruturas é crucial; no entanto, em termos de implementação de código, seu impacto é limitado a algoritmos de verificação de planaridade.

Grafo K_5

Grafo não planar com o menor número de vértices.

Grafo completo - notação K_n

- Grafo simples em que todos os vértices são adjacentes entre si, ou seja, cada vértice se liga a todos os outros



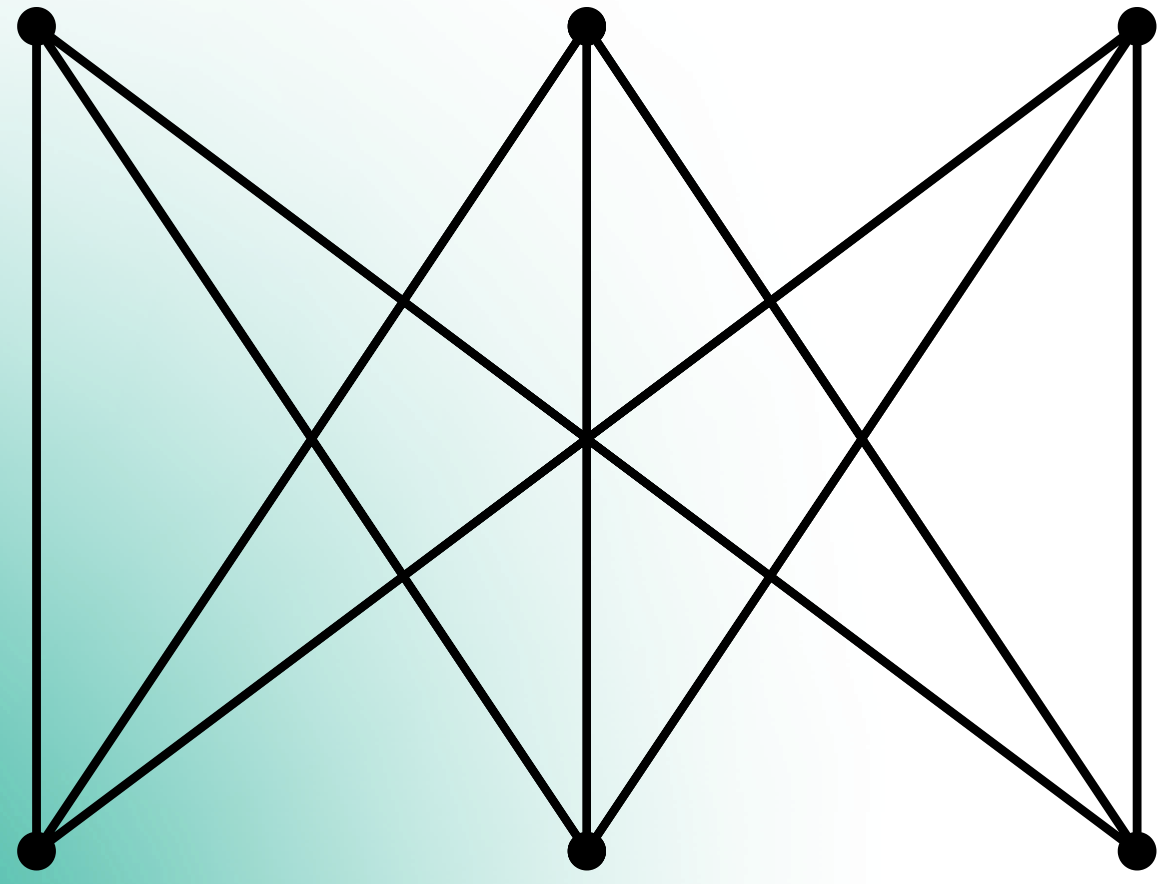
Grafo $K_{3,3}$

Grafo não planar com o menor número de arestas.

Grafo bipartido completo - notação $K_{m,n}$

- Um grafo bipartido é um grafo que pode ser dividido em dois planos (x, y) e os vértices não se conectam com os vértices do mesmo plano, apenas do outro.

- Grafo bipartido **completo**: cada vértice do primeiro plano está associado a cada vértice do segundo.
  - Notação **K**m,n : (m, n) são os planos do grafo.
  - K3,3 é um grafo bipartido completo com 3 vértices em cada plano.



Limitações

- As limitações estão na aplicabilidade prática, especialmente para grafos muito grandes. A identificação de subgrafos K5 ou K3,3 pode ser computacionalmente intensiva e não é trivial para grafos com muitos vértices e arestas.
- Não é aplicável a digrafos, pois ele se refere apenas a grafos não direcionados.

Funcionamento do algoritmo

Inclusão de Biblioteca

O código utiliza a biblioteca Boost Graph Library para manipulação e análise de grafos. Caso não tiver a biblioteca instalada, o código funciona com compilador online com os hpp (boyer_myrvold_planar_test; is_kuratowski_subgraph) incluídos: https://www.onlinegdb.com/online_c++_compiler

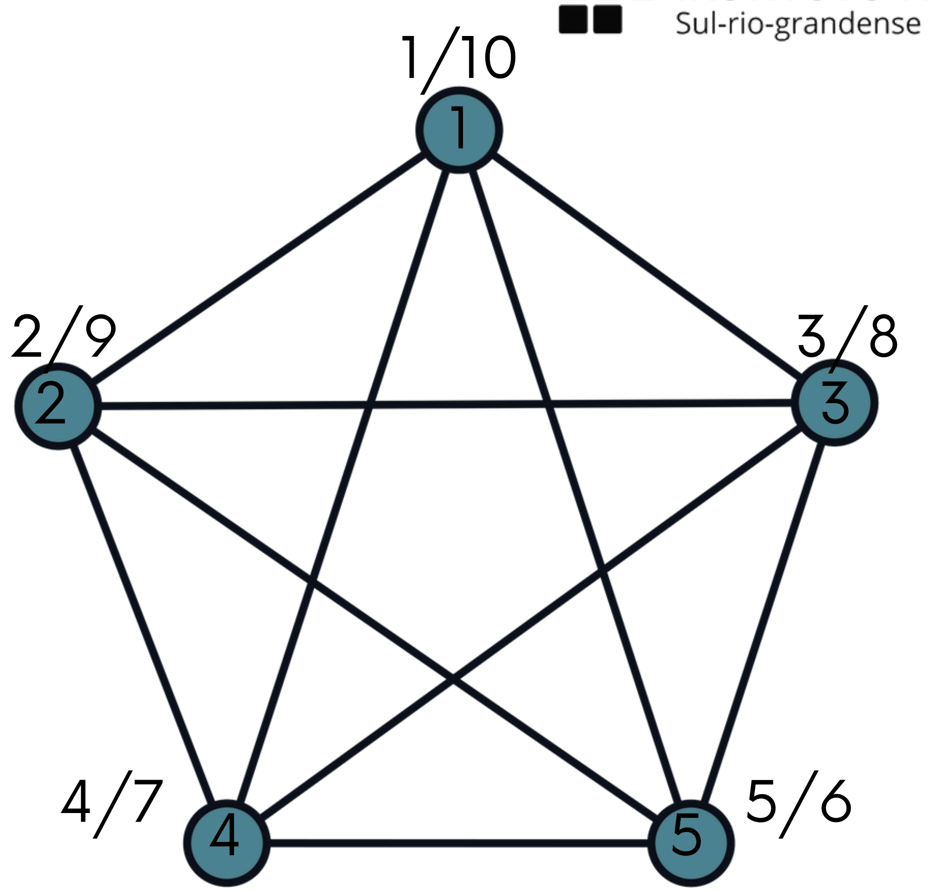
Teste de Planaridade de Boyer-Myrvold

Percorre o grafo com uma DFS (busca em profundidade) e armazena o resultado em uma árvore, que é um grafo conexo e acíclico e, portanto, é planar. Posteriormente, tenta inserir as arestas de retorno, que são as arestas que não são percorridas durante a DFS; caso consiga inserir todas as arestas sem conflito, o grafo é planar. Caso ocorra conflito, retorna as arestas que formam o subgrafo de Kuratowski.

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Funcionamento do algoritmo

Exemplo prático usando K5

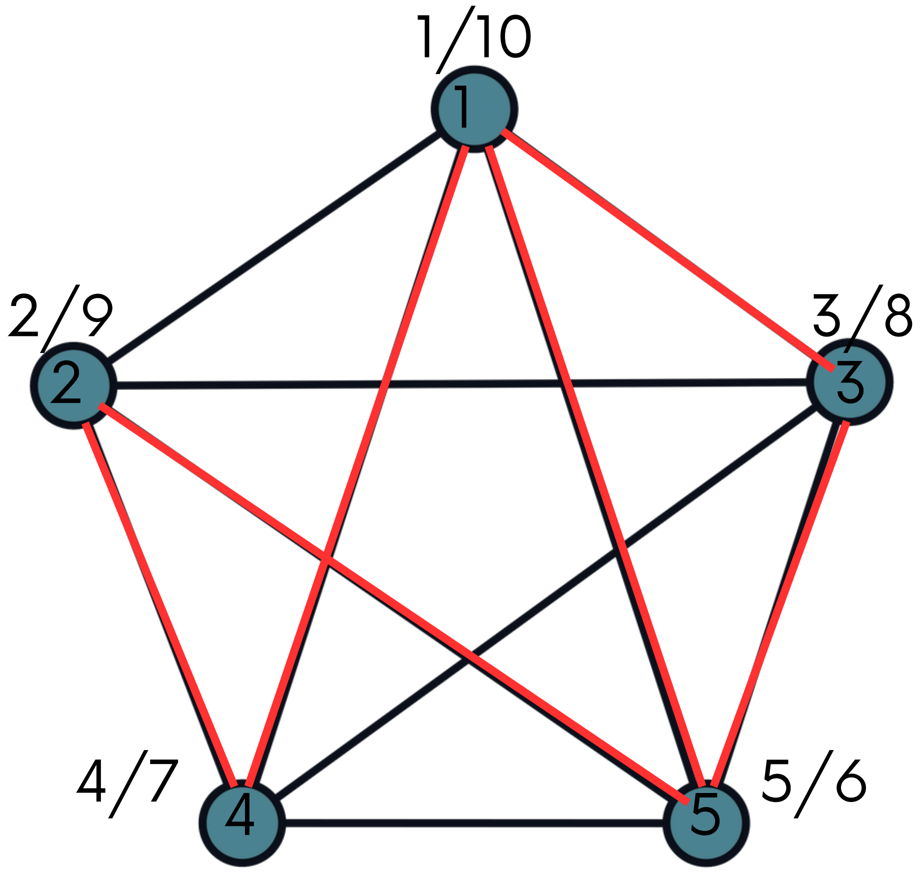


É realizado a DFS em K5.
Ordem que os vértices se tornaram pretos:
5 - 4 - 3 - 2 - 1

Ordem topológica:
1 - 2 - 3 - 4 - 5

Arestas de retorno:

(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 5)

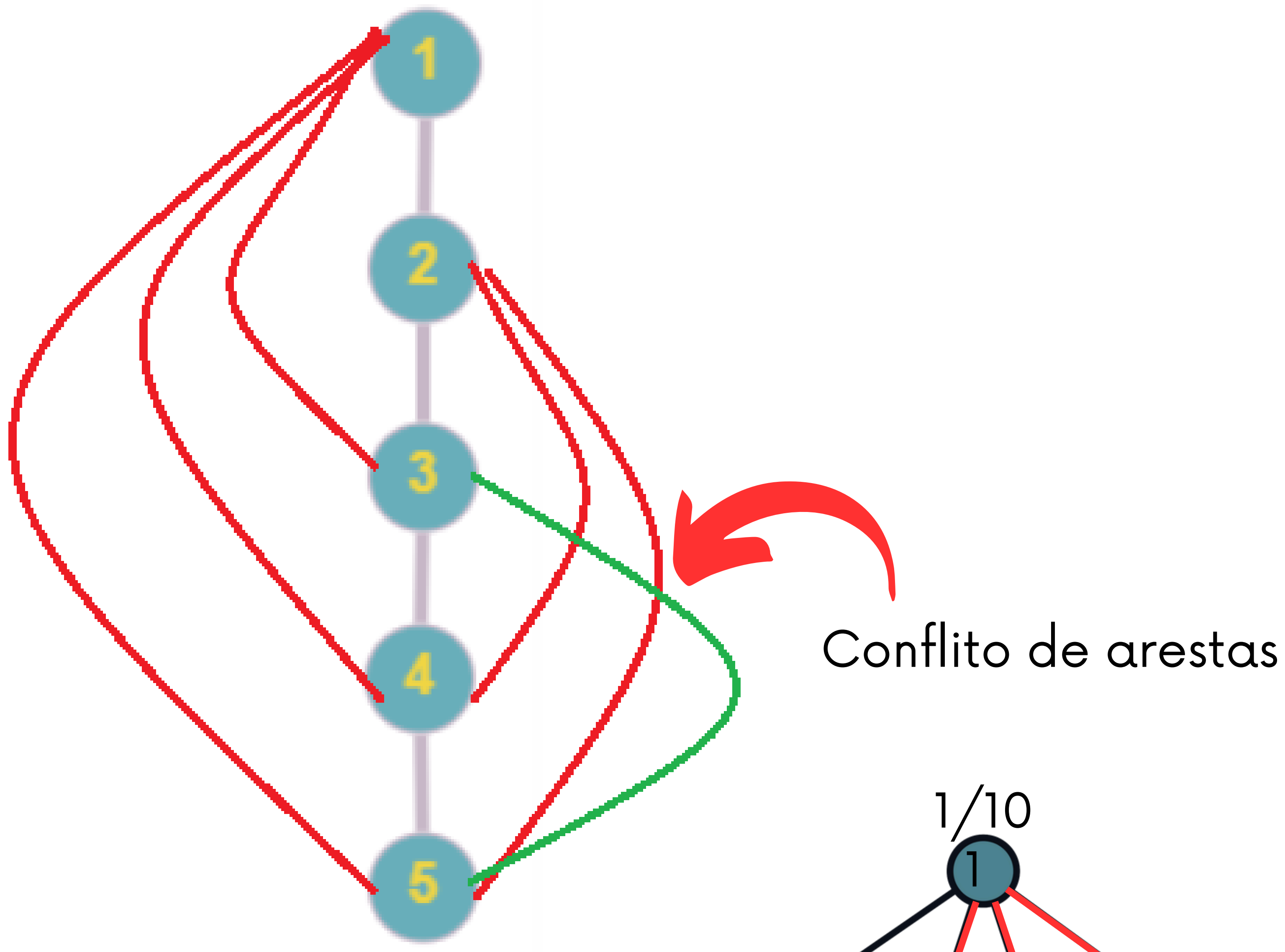


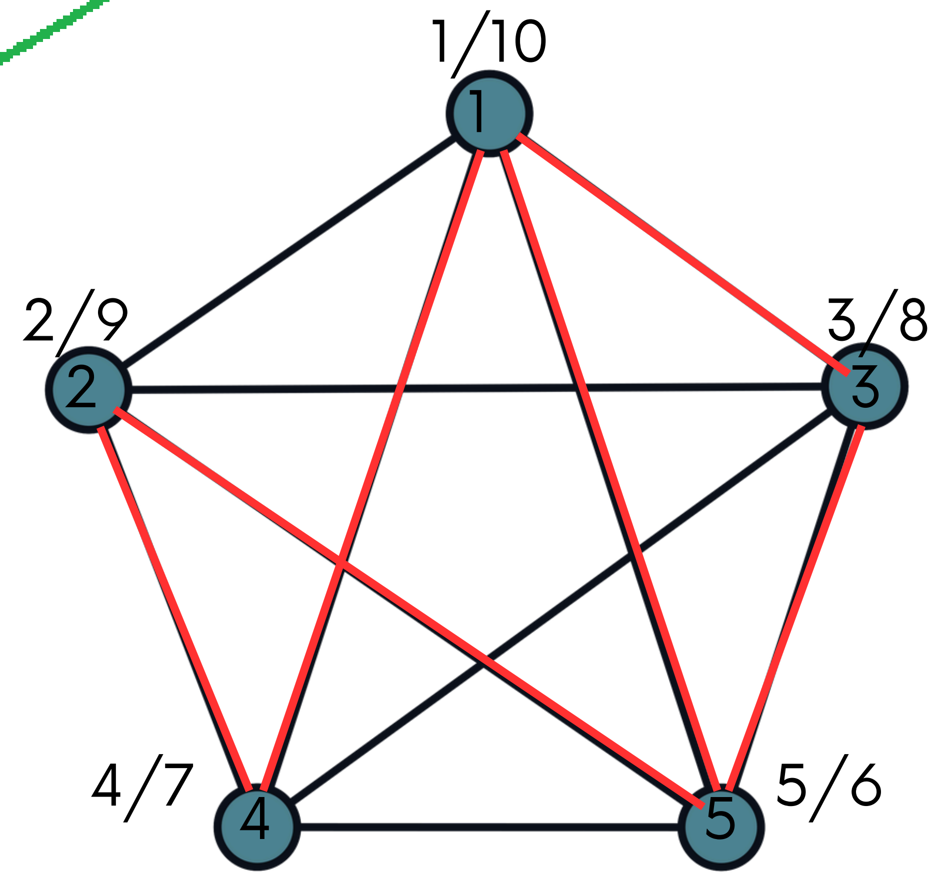
INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense | Câmpus Passo Fundo

Funcionamento do algoritmo

Exemplo prático usando K5

Árvore DFS de K5:





Arestas de retorno:

(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 5)

INSTITUTO FEDERAL Sul-rio-grandense | Câmpus Passo Fundo

Referências

- https://faculty.etsu.edu/gardnerr/5340/notes-Bondy-Murty-GT/Bondy-Murty-GT-10-5.pdf
- https://live.boost.org/doc/libs/1_45_0/boost/graph/is_kuratowski_subgraph.hpp
- https://live.boost.org/doc/libs/1_45_0/boost/graph/boyer_myrvold_planar_test.hpp
- https://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_9Grafos_MaterialExtra
- https://www.ic.unicamp.br/~ra063658/disciplinas/mat017_2021s1/aula21-handout.pdf
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Kuratowski
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Grafo_planar
- https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/aula13_planar_2016_revsocorro.pdf
- https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/grafos---notas-de-aula_set2018.pdf

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

OBRIGADO!