Пункт 1

a)

$a = 13 \geq 1$ (фактор ветвления), $b = 21 > 1$ (коэффициент уменьшения размера), $k \geq 1.5$

$$f(n) = 1 \quad \text{— монотонная} \ .$$

Можно воспользоватья мастер-теорему

$$\log_{21}(13) < 1.5 = k \ \Rightarrow \ T(n) = O\big(n^{3/2}\big) \ .$$

b)

$$T(n) = T(n-2) + T(n-3) + n \ \leq \ 2T(n-2) + n$$

$$a = 3 > 0, \quad b = 2 > 0, \quad k = 1 \geq 0, \quad f(n) = 1 \ \text{— монотонная} \ .$$

Значит можно юзать:

$$\log_b(a) > 1 = k \ \Rightarrow \ T(n) = O\big(2^{n/2} \cdot n^k\big) \ ,$$

c)

$$T(n) = 12T(n/4) + n^{7/4}$$

$$a = 12 \geq 1, \quad b = 4 > 1, \quad k = \tfrac{7}{4} \geq 0, \quad f(n) = 1 \ \text{— монотонна} \ .$$

Условия выполняются, значит применяем:

$$\log_4(12) > \tfrac{7}{4} \ \Rightarrow \ T(n) = O\big(n^{\log_4(12)}\big) \ .$$

d)

$$T(n) = 2T(n/3) + 2G(n/3) + O(1), \qquad G(n) = 2G(n/3) + n \cdot \sin n.$$

А вот тут проблемки: $G(n)$ не монотонна, поэтому мастер-теорему использовать не можем :((

e)

$$T(n) = \tfrac{9}{4}T\big(\tfrac{2n}{3}\big) + n^2 \cdot \ln\big(n^{1/2}\big) \cdot \ln(\ln n)$$

$$a = \tfrac{9}{4} \geq 1, \quad b = \tfrac{3}{2} > 1, \quad k = 2 \geq 0, \quad f(n) = \ln\big(n^{1/2}\big) \cdot \ln(\ln n) \ \text{— монотонна} \ .$$

Всё сходится, используем:

$$\log_{3/2}\big(\tfrac{9}{4}\big) = 2 = k \ \Rightarrow \ T(n) = O\Big(n^k \cdot \ln(n^{1/2}) \cdot \ln(\ln n) \cdot \log n\Big).$$

Пункт 2

В пункте **d** — не смогли использовать мастер-теорему

Уничтожаем без мастер-теоремы:

$$G(n) = 2G(n/3) + n\sin(n).$$

Для верхней оценки используем $n\sin(n) \le n$, тогда

$$G(n) = 2G(n/3) + n.$$

Так как подзадача уменьшается в 3 раза, глубина рекурсии:

$$\log_3(n)$$

На каждом уровне рекурсии число вызовов:

$$2^i$$

Следовательно:

$$\sum_{i=0}^{\log_3(n)} 2^i \cdot \frac{n}{3^i} = n \cdot \sum_{i=0}^{\log_3(n)} \left(\tfrac{2}{3}\right)^i = O(n).$$

Проверим мастер-теоремой:

$$a = 2 \ge 1, \quad b = 3 > 0, \quad k = 1 > 0, \quad f(n) \text{ - монотонная }.$$

$$\log_3(2) < 1 = k \quad \Rightarrow \quad O(n).$$

Имеем:

$$T(n) = 2T(n/3) + O(n).$$

При построении дерева рекурсии: на каждом уровне 2^i подзадач, глубина $\log_3(n)$. Тогда:

$$\sum_{i=0}^{\log_3(n)} \frac{2^i n}{3^i} = O(n).$$

Значит оценка совпадает.

Пункт 3

a)

$$T(n) = T(n/4) + 2T(n/16) + n\log n \quad \Rightarrow \quad T(n) \le 3T(n/4) + n\log n$$

$$a = 3, \quad b = 4, \quad k = 1, \quad f(n) = \log n \text{ — монотонная.}$$

$$\log_4(3) < 1 = k \quad \Rightarrow \quad O(n\log n).$$

Метод Акра–Баззи:

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^p + 2\left(\tfrac{1}{16}\right)^p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \tfrac{1}{2}.$$

$$T(n) = \Theta\Big(n^{1/2}\big(1 + \int_1^n u^{-1/2}\log u\,du\big)\Big).$$

Интеграл $\sim 2\sqrt{n}\log n$, значит:

$$T(n) = \Theta\big(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\log n\big) = \Theta(n\log n).$$

Итог: совпало

b)

$$T(n) = 3T(n/2) + 6T(n/5) + T(n/10) + \frac{n^2}{\ln n}.$$

Для верхней оценки можно грубо завысить:

$$T(n) \le 10T(n/2) + \frac{n^2}{\ln n}.$$

$$a = 10, \quad b = 2, \quad k = 2, \quad f(n) = \tfrac{1}{\ln n}.$$

$$\log_2(10) \approx 3.3 > k = 2 \quad \Rightarrow \quad T(n) = O\big(n^{\log_2(10)}\big)\,.$$

Метод Акра–Баззи:

$$3 \cdot (1/2)^p + 6 \cdot (1/5)^p + (1/10)^p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = 2.$$

$$T(n) = \Theta\Big(n^2\big(1 + \int_1^n \tfrac{du}{u \ln u}\big)\Big) = \Theta(n^2 \ln\ln n).$$

Итог: оценки не совпали :D Причина: при грубой замене $T(n/5), T(n/10) \mapsto T(n/2)$ мы сильно завысили число подзадачи и поэтому мастер-теорема выдала большую степень. Акра–Баззи же учитывает все коэффициенты, и позволяет считать их все, а не приводить к наибольшему