Асимптотический анализ алгоритмов

5 октября 2025 г.

Algorithm 1

Рассмотрим рекуррентное соотношение:

$$T(n) = T(n-5) + T(n-8) + n^2 \cdot c, \text{ где } c - \text{константа.}$$

Так как у нас два различных рекурсивных подвызыва, то использовать мастер-теорему невозможно. Также нельзя применять метод Акры–Баззи, так как аргумент уменьшается не делением, а вычитанием константы. Следовательно, необходимо определить верхнюю и нижнюю границы временной сложности.

Верхняя граница

Так как при каждом рекурсивном вызове количество вызовов увеличивается в два раза, то на уровне рекурсии i будет 2^i подзадач. Аргумент уменьшается минимум на 5, поэтому глубина дерева рекурсии равна примерно $n/5$. Каждый узел вносит вклад $O(n^2)$, следовательно:

$$T(n) = O(2^{n/5} \cdot n^2).$$

Нижняя граница

Теперь возьмём глубину рекурсии как $n/8$, так как аргумент уменьшается максимум на 8. Количество вызовов на каждом уровне также удваивается, а затраты на каждом уровне составляют примерно $(n/2)^2$. Таким образом, получаем:

$$T(n) = \Omega(2^{n/8} \cdot n^2).$$

Algorithm 2

Рассмотрим рекуррентное соотношение:

$$T(n) = 2T(n/4) + \frac{n}{3}.$$

Применим мастер-теорему:

$$a = 2 \geq 1, \quad b = 4 > 1, \quad k = 1 > 0, \quad f(n) \text{ — монотонна.}$$

$$\log_b a = \log_4 2 = \frac{1}{2} < k = 1.$$

Следовательно, согласно первому случаю мастер-теоремы:

$$T(n) = O(n).$$