Teoretyczne modele obliczeń

Budowa Maszyny Turinga:

- *Pojedyncza taśma o nieskończonej ilości komórek z zawartością*

Taśma jest jednym z ważniejszych elementów w pracy maszyny. Najczęściej znajdują się na niej symbole zapisane w sposób unarny, puste komórki [sugerujące brak wartości w danej komórce] lub zera i jedynki. Głowica maszyny porusza się po niej lewo-prawo (w zależności od reguły obowiązującej w danym momencie), pojedynczymi ruchami, odczytując wartość zapisaną w danej komórce. W naszym zadaniu elementami, znajdującymi się w komórkach na początku pracy maszyny, będą kropki - “•” oraz miejsca puste - “_” (zbiór oznaczeń wejściowych). Przykład takowej taśmy znajduje się poniżej.

_	_	•	•	•	_	•	•	_	_	_

Ilustracja 1.
Taśma maszyny Turinga

- *Głowica maszyny Turinga*

Głowica jest najważniejszym elementem maszyny, ponieważ to ona odczytuje i przetwarza wartość zapisaną w danej komórce taśmy. Głowica przyjmuje stany, których ilość jest odgórnie określona przez twórcę maszyny i nadanego jej zadania. W naszym zadaniu za głowicę przyjmujemy strzałkę, zapisaną pod taśmą, pod którą zawrzemy obecny stan w jakim znajduje się maszyna (głowica oznaczona kolorem czerwonym).

•	•	•	•	•	_	•	•	•	_	_
↑										
S_0										

Ilustracja 2.
Głowica maszyny Turinga, przykład 1.

- *Zbiór reguł, czyli funkcja przejścia maszyny*

Funkcja przejścia maszyny służy do sterowania pracą głowicy. Określa ono niejako zbiór “zachowań” maszyny w danych sytuacjach, tj. w którą stronę ma się poruszyć? jak zareagować gdy widzi kropkę, a co zrobić w sytuacji, gdy nie widzi nic? Zbiór ustalonych reguł (funkcja przejścia) pozwala na te pytania odpowiedzieć. Przykład tabeli funkcji przejścia znajduje się poniżej.

S	T	S	T	K
S_0	_	S_S	_	→
S_0	•	S_1	A	→

Ilustracja 3.
Fragment finalnej tabeli funkcji przejścia

Działanie maszyny Turinga:
Aby stworzyć działającą maszynę Turinga musimy ustalić stany głowicy z określonymi poleceniami oraz obrać i trzymać się odpowiedniego alfabetu (zbioru oznaczeń). W ramach zadania, symbol S_0 określamy jako stan

początkowy, czyli stan, w którym maszyna rozpoczyna pracę na taśmie. Zakończenie pracy maszyny musi nastąpić w momencie rozstrzygnięcia przyjętej przez nas, w późniejszym etapie, tezy. W tym celu wprowadzamy stan głowicy T i mianujemy go stanem terminalnym (wprowadzającym w zakończenie pracy) maszyny.

Zbiór oznaczeń wejściowych (oznaczenia, które mogą się znajdować od początku na taśmie):

$$Z_W = \{\bullet, \_\}$$

Tak jak wspomniane we wcześniejszej części sprawozdania, wybranymi przez nas oznaczeniami wejściowymi będą kropki "•", których ilość będzie określała liczbę znajdującą się na taśmie (zapis unarny), oraz miejsca puste oznaczone "_".

Zbiór oznaczeń (alfabet):

$$Z = \{\bullet, A, B, X, \_\}, gdzie\ "\_"\ oznacza\ miejsce\ puste$$

Na potrzeby zadania, nasza maszyna będzie potrzebowała dodatkowych dwóch oznaczeń "A" oraz "B". Owe oznaczenia będą wymagane do sprawdzenia, postawionej w późniejszym etapie sprawozdania, tezy.

Stany głowicy:

$$G\ =\ \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_A, S_B, S_P, S_S, S_N, S_R, T\}, gdzie{:}\ S_0\ - stan\ początkowy, T - stan\ terminalny$$

Powyżej znajduje się zbiór utworzonych na potrzebę zadania stanów. Ich wpływ na działanie maszyny zostanie opisany w dalszej części sprawozdania.

Konstrukcja sprawozdania:
Wybranym zadaniem z tego modułu sprawozdania jest zadanie 1.11. Przedstawimy pracę maszyny, kiedy a jest niepodzielne przez b i gdy a jest podzielne przez b, oraz zaprezentujemy proces kreacji tabeli funkcji przejścia.

Założenia na potrzeby zadania:
Taśma winna być włożona od strony liczby, którą chcemy dzielić (a), do liczby przez którą dzielić będziemy (b). Dopuszczalne przerwy pomiędzy liczbami a i b wynoszą 1. Zakończenie liczby oznaczone jest pustą komórką.

Treść zadania:
Zbuduj maszynę Turinga rozstrzygającą o podzielności liczby a przez liczbę b; liczby są zapisane w postaci unarnej.

Teoretyczne modele obliczeń

Zastosowanie teoretycznych modeli obliczeń – model maszyny Turinga

Teza:
Maszyna Turinga jest w stanie rozstrzygać o podzielności dwóch dowolnych liczb zapisanych w systemie unarnym.

Założenia:
Zgodnie z "*założeniami na potrzeby zadania*" nasza taśma będzie znajdować się na początku liczby a, maksymalne przerwy (ilość komórek pustych) pomiędzy liczbami a i b wynoszą 1, a zakończenie liczb jest oznaczone pustą komórką, aby maszyna była w stanie rozpoznać końce liczb.

Dowód:
Zadaniem maszyny będzie przesunięcie się na pierwszy symbol liczby a oznaczony jako "•" (jej początek) i podmienienie go na symbol "A" (będzie to znakiem dla maszyny, że dany symbol został już poprzednio odczytany i przetworzony). Maszyna następnie będzie przesuwać się wzdłuż liczby a, aż do napotkania pierwszego miejsca pustego (zakończenia liczby a). Zmiana stanu głowicy pozwoli nam na odczytanie pierwszego symbolu liczby b "•", oraz zastąpienie go nowym symbolem "B" (będzie to znakiem dla maszyny, że dany symbol został już poprzednio odczytany i przetworzony). Ponowna zmiana stanu umożliwi swobodne przesunięcie się głowicy do końca liczby b, czyli pierwszego miejsca pustego, po symbolach "•". Wprowadzi to maszynę w pierwszy stan powracający (na potrzeby zadania określony jako stan S_r).

Całość powyższych czynności można uznać jako jeden "cykl" pracy maszyny; przetworzeniu uległo po jednym symbolu z obu dowolnych liczb, a maszyna wprawiona w stan powracający wraca w stronę początku taśmy.

Aby doszło do sprawdzenia podzielności liczb, całość symboli "•" znajdujących się w liczbie a, musi zostać zastąpionych przez symbole "A". Dzieje się tak w momencie, kiedy maszyna po zmianie stanu z powracającego (S_r), na, stworzony na potrzeby zadania, stan który oznacza " gdy widzę symbol A, najprawdopodobniej w komórce po lewej stronie, jest symbol "•", który będzie można przetworzyć" napotka na swojej drodze symbol "A". Po znalezieniu symbolu "A" przez opisany powyżej stan, prowokuje on zmianę stanu na stan początkowy (S_0). Następnie maszyna przesuwa się w prawo i widzi puste pole. Na potrzeby zadania wymagane jest stworzenie reguły, mówiącej maszynie "jestem w stanie początkowym ale widzę miejsce puste, przechodzę w stan sprawdzający". Owym stanem sprawdzającym będzie stan określony przez nas jako S_s. Poniżej znajduje się przykład momentu wprowadzenia stanu sprawdzającego przez maszynę.

A	**A**	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	**•**	_	_
						↑				
						$\mathbf{S_S}$				

Ilustracja 4.
Moment wprowadzenia stanu sprawdzającego, przykład 1.

A	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	_	_	_	_
				↑						
				$\mathbf{S_S}$						

Ilustracja 5.
Moment wprowadzenia stanu sprawdzającego, przykład 2.

Teraz musimy rozważyć dwie ewentualności: liczby są podzielne oraz liczby są niepodzielne, ponieważ w zależności od sytuacji, stan sprawdzający musi podjąć określoną akcję, aby w skutku maszyna mogła później zakończyć procedurę.

Jeżeli liczby są podzielne to na taśmie nie powinien zostać ani jeden symbol "•" (ilustracja 5.). Maszyna w stanie sprawdzającym nie napotyka żadnej kropki, zamiast tego, po przesunięciu na koniec liczby b, widzi ona miejsce puste. Jest to znak świadczący o podzielności liczby a przez liczbę b. Maszyna zmienia stan głowicy na stan terminalny (tutaj: stan oznaczony jako T) i wprowadza na taśmę symbol "P". Przyjęty symbol "P" oznacza "podzielny".

Jeżeli liczby są niepodzielne to na taśmie będzie znajdować się minimalnie jeden symbol "•" (ilustracja 4.). Maszyna w stanie sprawdzającym napotyka kropkę, jest to dla niej znak o niepodzielności liczby a przez liczbę b. Maszyna zmienia stan głowicy na stan niepodzielności. Wprowadzenie owego stanu jest wymagane, ze względu na to, że jeżeli nie weźmiemy go pod uwagę, to rezultat naszego eksperymentu, czyli symbol finalnie wpisywany na taśmę, zostanie umieszczony potencjalnie w głębi liczby b. Stan mówiący o niepodzielności, oznaczony jako S_N, przesuwa głowicę wzdłuż symboli "•", aż do zakończenia liczby b (pierwszego miejsca pustego po szlaku symboli). Maszyna zauważa miejsce puste i pozostawia w nim symbol "N", po czym wprawiona jest w stan terminalny (tutaj: oznaczony jako T). Przyjęty symbol "N" oznacza "niepodzielny".

Problematyczną kwestią dla maszyny będzie sytuacja, w której liczba a okaże się większa od liczby b. Jest to jednoznaczne z tym, że ilość symboli "•" dla liczby a jest większa niż dla liczby b. Zgodnie z funkcją przejścia maszyna, za każdym razem, rozpoczyna "cykl" pracy od wstawienia symbolu "A" na taśmę, w zamian za symbol "•". Jeżeli w liczbie b nie ma dostępnego żadnego symbolu "•" maszyna by kontynuowała swoją wędrówkę wzdłuż taśmy w nieskończoność, w poszukiwaniu symbolu "•". Wymagane jest wprowadzenie stanu głowicy, który zastąpi symbole "B" symbolami "•", w sytuacji, gdy liczba a ma dalej dostępne do przetworzenia kropki. Symbole "B" zostają zamienione na kropki, maszyna wprawia się w stan powracający.

Tutaj nie kończy się problematyka związana z wyżej wymienioną sytuacją. Wg funkcji przejścia, maszyna rozpoczyna "cykl" pracy od wstawienia symbolu "A" na taśmę. Oznacza to, że w sytuacji, w której brakuje symboli "•" do przetworzenia w liczbie b, na taśmie tak czy siak pojawił się dodatkowy symbol "A". Maszyna po zamianie symboli w liczbie b, zauważa miejsce puste i zostaje wprawiona we wprowadzony wcześniej stan powracający (S_R). Jeżeli maszyna w owym stanie napotka symbol "A", będzie musiała go usunąć, tj. wprowadzić na taśmę ponownie symbol kropki. Następnie maszyna wprowadzana jest w stan początkowy i rozpoczyna nowy "cykl" pracy.

W poniższej tabeli prezentujemy finalny zestaw reguł, który pozwoli na wykonywanie powyżej opisanych operacji.

S	T	S	T	K	S	T	S	T	K
S_0	_	S_S	_	→	S_R	A	S_0	•	←
S_0	•	S_1	A	→	S_A	•	S_A	•	←
S_0	A	S_P	A	→	S_A	A	S_0	A	→
S_1	•	S_1	•	→	S_B	B	S_B	•	←
S_1	_	S_2	_	→	S_B	_	S_R	_	←
S_2	•	S_3	B	→	S_S	B	S_S	B	→
S_2	B	S_2	B	→	S_S	•	S_N	•	→
S_2	_	S_B	_	←	S_S	_	T	P	→
S_3	•	S_3	•	→	S_N	•	S_N	•	→
S_3	_	S_R	_	←	S_N	_	T	N	→
S_P	•	S_1	A	→	T		STAN TERMINALNY		
S_R	•	S_R	•	←					
S_R	B	S_R	B	←					
S_R	_	S_A	_	←					

Ilustracja 6.

Finalna tabela funkcji przejścia

Teoretyczne modele obliczeń

Wnioski:
Zaprojektowana powyżej maszyna Turinga jest w stanie rozstrzygać o podzielności dwóch dowolnych liczb zapisanych w systemie unarnym.

Przykłady

Przykład 1.
Rozstrzyganie podzielności liczby a przez liczbę b, gdy a niepodzielne przez b. Na potrzebę przykładu weźmiemy pod uwagę liczbę a=5 oraz b=3. Strzałka wskazuje położenie głowicy w danym momencie pracy maszyny Turinga.

1. Maszyna rozpoczyna pracę w stanie **S_0**.

•	•	•	•	•	_	•	•	•	_	_
↑ **S_0**										

Maszyna, po zauważeniu symbolu na taśmie, ze stanu **S_0** przechodzi w stan **S_1** , na taśmie pojawia się symbol A, który oznaczy nam pierwsze miejsce liczby a. Maszyna porusza się w prawo.

2. Maszyna, pozostając w stanie **S_1**, porusza się do końca liczby a, zgodnie z tabelką funkcji przejścia.

A	•	•	•	•	_	•	•	•	_	_
	↑ **S_1**									

3. Maszyna napotyka koniec liczby a, czyli pierwsze miejsce puste po rzędzie żetonów.

A	•	•	•	•	_	•	•	•	_	_
					↑ **S_1**					

Maszyna zauważa koniec liczby a (miejsce puste), zmienia stan z **S_1** na **S_2**. Stan **S_2** będzie odpowiadał za identyfikację liczby b.

4. Maszyna napotyka początek liczby b, czyli pierwszy żeton na taśmie w stanie **S_2**

A	•	•	•	•	_	•	•	•	_	_
						↑ **S_2**				

Maszyna zauważa początek liczby b (pierwszy żeton po miejscu pustym), zmienia stan z **S_2** na **S_3**, oraz pozostawia symbol B na taśmie.

5. Maszyna, pozostając w stanie **S_3**, porusza się do końca liczby b, zgodnie z tabelką funkcji przejścia.

A	•	•	•	•	_	**B**	•	•	_	_
							↑ **S_3**			

Teoretyczne modele obliczeń

6. Maszyna napotyka koniec liczby b (pierwsze miejsce puste po rzędzie żetonów).

A	•	•	•	•	_	B	•	•	_	_
									↑ S_3	

Maszyna zauważa koniec liczby b, zmienia stan z $\mathbf{S_3}$ na $\mathbf{S_R}$.

7. Maszyna przechodzi przez liczbę b, zgodnie z tabelką funkcji przejścia.

A	•	•	•	•	_	B	•	•	_	_
								↑ S_R		

8. Maszyna dociera na początek liczby b.

A	•	•	•	•	_	B	•	•	_	_
					↑ S_R					

Maszyna w stanie $\mathbf{S_R}$ dociera na początek liczby b i tym samym koniec liczby a. Zmienia stan z $\mathbf{S_R}$ na $\mathbf{S_A}$ i kontynuuje przejście przez żetony, zgodnie z tabelką funkcji przejścia.

9. Maszyna dociera na początek liczby a.

A	•	•	•	•	_	B	•	•	_	_
↑ S_A										

Maszyna zauważa symbol A, zmienia stan z $\mathbf{S_A}$ na $\mathbf{S_0}$ i rozpoczyna sekwencję od początku.

10. Pierwszy problematyczny moment.

A	A	A	A	•	_	B	B	B	_	_
				↑ S_1						

Następuje wstawienie dodatkowego symbolu A, podczas gdy liczba b została całkowicie wykorzystana do pierwszego dzielenia. W takim momencie przyda nam się funkcja, która usunie dodatkowy symbol bez uszkodzenia taśmy, a przy okazji pozwoli na ponowne podzielenie liczby a przez liczbę b.

11. Zmiana stanu

A	A	A	A	•	_	B	B	B	_	_
						↑ S_2				

Teoretyczne modele obliczeń

12. Dojście do końca liczby b, w stanie **S_2** , gdy wykorzystamy liczbę b w całości.

A	**A**	**A**	**A**	•	_	**B**	**B**	**B**	_	_
						↑ **S_2**				

Maszyna dojdzie do końca liczby b, czyli do pierwszego pustego miejsca, zmieni stan z **S_2** na **S_B**. Stan **S_B** pozwoli na zastąpienie symboli B żetonami i ponowne podzielenie liczby a przez liczbę b.

13. Zastąpienie symboli B "żetonami" (•)

A	**A**	**A**	**A**	•	_	**B**	**B**	**B**	_	_
								↑ **S_B**		

A	**A**	**A**	**A**	•	_	**B**	**B**	•	_	_
							↑ **S_B**			

A	**A**	**A**	**A**	•	_	**B**	•	•	_	_
						↑ **S_B**				

14. Maszyna kończy zamienianie symboli

A	**A**	**A**	**A**	•	_	•	•	•	_	_
					↑ **S_B**					

To jest jeden z kluczowych momentów pracy maszyny. W liczbie a znajduje się o jeden zamieniony żeton za dużo, ze względu na poprzednie funkcje przejścia. Maszyna musi zatem posiadać odpowiedni stan sprawdzający, który usunie dodatkowy symbol i pozwoli na dalsze sprawdzanie podzielności. Takim stanem będzie wcześniej wprowadzony stan **S_R** .

15. Maszyna w stanie **S_R**

A	**A**	**A**	**A**	•	_	•	•	•	_	_
			↑ **S_R**							

Maszyna w stanie napotyka symbol A, zmienia go na żeton i wchodzi w stan **S_0**

16. Kluczowy moment pracy

A	**A**	**A**	•	•	_	•	•	•	_	_
		↑ **S_0**								

Teoretyczne modele obliczeń

A	A	A	•	•	_	•	•	•	_	_
			↑ S_P							

A	A	A	A	•	_	•	•	•	_	_
				↑ S_1						

A	A	A	A	•	_	•	•	•	_	_
					↑ S_1					

A	A	A	A	•	_	•	•	•	_	_
						↑ S_2				

A	A	A	A	•	_	•	•	•	_	_
						↑ S_2				

A	A	A	A	•	_	B	•	•	_	_
							↑ S_3			

A	A	A	A	•	_	B	•	•	_	_
									↑ S_3	

A	A	A	A	•	_	B	•	•	_	_
								↑ S_R		

Maszyna kontynuuje pracę zgodnie z wytycznymi.

17. Kluczowy moment pracy

A	A	A	A	A	_	B	B	•	_	_
								↑ S_R		

Maszyna zakończyła dzielenie liczby a przez liczbę b i znajduje się w stanie powracającym. W tym momencie maszyna musi posiadać wytyczne odnośnie zakończenia pracy i zakomunikowania jej rezultatu (czy liczba a jest podzielna przez liczbę b, czy nie).

A	A	A	A	A	_	B	B	•	_	_
					↑ S_R					

Teoretyczne modele obliczeń

18. Stan **S_A** a koniec pracy

A	**A**	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	•	_	_
				↑ **S_A**						

Maszyna w tym momencie ze stanu **S_A** przejdzie w stan **S_0**, tak jakby miała kontynuować pracę. Jednakże brakuje żetonów, do wykonania standardowej operacji stanu **S_0**.

19. Stan **S_0** a koniec pracy

A	**A**	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	•	_	_
					↑ **S_0**					

Wiemy, że nasza liczba a się skończyła dzięki funkcji dla stanu **S_0**, gdy "_". Teraz wystarczy sprawdzić, czy w liczbie b znajdują się żetony. Jeśli maszyna znajdzie jakiś żeton w liczbie b, oznacza to niepodzielność, a jeżeli nie znajdzie to liczba a jest podzielna przez liczbę b.

20. Zmiana stanu z **S_0** na **S_S** .

A	**A**	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	•	_	_
						↑ **S_S**				

A	**A**	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	•	_	_
							↑ **S_S**			

A	**A**	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	•	_	_
								↑ **S_S**		

Jeżeli głowica w stanie **S_S** napotka żeton, tak jak w przykładzie powyżej, to uzna liczbę a za niepodzielną przez liczbę b, zmieni stan z **S_S** na **S_N** . Stan **S_N** doprowadza głowicę do końca liczby b, wstawia symbol "N" oznaczający niepodzielność i wprowadza maszynę w stan terminalny T.

A	**A**	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	•	_	_
									↑ **S_N**	

A	**A**	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	•	**N**	_
										↑ **T**

Maszyna kończy pracę.

Teoretyczne modele obliczeń

Przykład 2.

Rozstrzyganie podzielności liczby a przez liczbę b, gdy a podzielne przez b. Na potrzebę przykładu weźmiemy pod uwagę liczbę a=4 oraz b=2. Strzałka wskazuje położenie głowicy w danym momencie pracy maszyny Turinga.

1. Maszyna rozpoczyna pracę tak samo jak w przypadku a niepodzielne przez b i kontynuuje ją do momentu zamienienia wszystkich żetonów na symbole A oraz B.

•	•	•	•	_	•	•	_	_	_	_
↑ S_0										

A	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	_	_	_	_
						↑ S_R				

A	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	_	_	_	_
					↑ S_R					

A	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	_	_	_	_
				↑ S_R						

A	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	_	_	_	_
			↑ S_A							

2. Maszyna dochodzi do momentu kulminacyjnego, zmienia stan $\mathbf{S_A}$ na stan $\mathbf{S_0}$, oko zauważa na taśmie B, zmienia stan na stan sprawdzający $\mathbf{S_S}$ i przechodzi do sprawdzania taśmy.

A	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	_	_	_	_
					↑ S_S					

A	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	_	_	_	_
						↑ S_S				

3. Maszyna dochodzi do końca taśmy w stanie sprawdzającym.

A	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	_	_	_	_
							↑ S_S			

Teoretyczne modele obliczeń

Jeżeli głowica w stanie sprawdzającym ($\mathbf{S_S}$) dotrze do końca taśmy, tj. do pierwszego miejsca pustego po symbolach liczby b, to wstawia symbol P oznaczający podzielność, a następnie przechodzi w stan terminalny T.

A	**A**	**A**	**A**	_	**B**	**B**	P	_	_	_

T

Maszyna kończy pracę.