

# Nurses Rostering Problem

Karol Mućk, Marcin Pracki

March 9, 2022

## Dane wejściowe

- $number\_of\_nurses$
- $number\_of\_days$
- $number\_of\_shifts$
- $max\_night\_shifts$
- $nurses = \{1, \dots, number\_of\_nurses\}$  - zbiór pielęgniarek
- $days = \{1, \dots, number\_of\_days\}$  - zbiór dni
- $shifts = \{1, \dots, number\_of\_shifts\}$  - zbiór numerów zmian (w jednym dniu)
- $all\_shifts = \{1, \dots, number\_of\_days \cdot number\_of\_shifts\}$  - zbiór numerów zmian z całego okresu
- $demand[d, s]$  - zapotrzebowanie na pielęgniarki w dniu  $d$  na zmianie o numerze  $s$
- $workhours[n]$  - limit godzin pracy pielęgniarki o numerze  $n$
- $vacation \subset nurses \times days$  - urlopy
- $preferred\_companions \subset nurses \times nurses$  - preferencje dot. koleżanek na zmianie
- $unpreferred\_companions \subset nurses \times nurses$  - antypreferencje dot. koleżanek na zmianie
- $preferred\_shifts \subset nurses \times days \times shifts$  - preferowane zmiany
- $unpreferred\_shifts \subset nurses \times days \times shifts$  - niepreferowane zmiany
- $last\_shift[n]$  - grafik ostatniej zmiany poprzedniego okresu
- $points\_pc$  - punkty za spełnienie preferencji dot. towarzystwa na zmianie
- $points\_upc$  - punkty za spełnienie antypreferencji dot. towarzystwa na zmianie
- $points\_ps$  - punkty za spełnienie preferencji dot. zmian
- $points\_ups$  - punkty za spełnienie antypreferencji dot. zmian

## Wynik

- $schedule[n, d, s] \in \{0, 1\}$  - grafik dla pielęgniarki  $n$ , dnia  $d$  i zmiany  $s$

## Jednoznacznie wyznaczone przez wynik

- $interactions[i, j, d, s] \in \{0, 1\}$  - interakcje pomiędzy pielęgniarkami na zmianach
- $all\_shifts\_matrix[n, s] \in \{0, 1\}$  - grafik bez podziału na dni
- $if\_working[n, i]$  macierz wskazująca, czy dana pielęgniarka pracuje w danym przedziale czasowym długości 24h

## Problem

$$\begin{aligned}
\max_{\text{schedule}} \quad & \text{points\_pc} \cdot \sum_{i \in \text{nurses}, j \in \text{nurses}, d \in \text{days}, s \in \text{shifts}} ((\text{interactions}[i, j, d, s] \cdot \text{preferred\_companions}[i, j])) - \\
& \text{points\_upc} \cdot \sum_{i \in \text{nurses}, j \in \text{nurses}, d \in \text{days}, s \in \text{shifts}} ((\text{interactions}[i, j, d, s] \cdot \text{unpreferred\_companions}[i, j])) + \\
& \text{points\_ps} \cdot \sum_{i \in \text{nurses}, j \in \text{nurses}, d \in \text{days}, s \in \text{shifts}} (\text{schedule}[n, d, s] \cdot \text{preferred\_shifts}[n, d, s]) - \\
& \text{points\_ups} \cdot \sum_{i \in \text{nurses}, j \in \text{nurses}, d \in \text{days}, s \in \text{shifts}} (\text{schedule}[n, d, s] \cdot \text{unpreferred\_shifts}[n, d, s]);
\end{aligned}$$

## Warunki

- Jednego dnia pielęgniarka może pracować tylko na jednej zmianie

$$\forall_{n,d} \sum_{s \in \text{shifts}} \text{schedule}[n, d, s] \leq 1$$

- Po nocnej zmianie pielęgniarka nie może pracować na porannej

$$\forall_{n,d} \text{schedule}[n, d, \text{number\_of\_shifts}] + \text{schedule}[n, d + 1, 1] \leq 1$$

- Pielęgniarki pracujące na ostatniej zmianie w poprzednim okresie, nie mogą pracować na pierwszej zmianie planowanego okresu

$$\forall_n \text{schedule}[n, 1, 1] + \text{last\_shift}[n] \leq 1$$

- Pielęgniarka nie może pracować więcej niż jej limit godzin

$$\forall_n \sum_{d \in \text{days}, s \in \text{shifts}} \text{schedule}[n, d, s] \leq \text{workhours}[n] : \frac{24}{\text{number\_of\_shifts}}$$

- Zapotrzebowanie na pielęgniarki jest spełnione

$$\forall_{d,s} \sum_{n \in \text{nurses}} \text{schedule}[n, d, s] = \text{demand}[d, s]$$

- Pielęgniarki mogą wziąć urlop dowolnego dnia

$$\forall_{n,d} \sum_{s \in \text{shifts}} (\text{schedule}[n, d, s] \cdot \text{vacation}[n, d]) = 0$$

- Pielęgniarka może mieć co najwyżej  $\text{max\_night\_shifts}$  zmian nocnych w tygodniu

$$\forall_{n,k} \sum_{i \in \{1, \dots, 7\}} \text{schedule}[n, 7 \cdot (k - 1) + i, \text{number\_of\_shifts}] \leq \text{max\_night\_shifts}$$

- Pielęgniarka raz w tygodniu musi mieć wolne 24h

$$\forall_{n,k} \sum_{i \in \{1, \dots, 6 \cdot \text{number\_of\_shifts} + 1\}} \text{if\_working}[n, 7 \cdot \text{number\_of\_shifts} \cdot (k - 1) + i] \leq 6 \cdot \text{number\_of\_shifts}$$

- Zmiany weekendowe powinny być stosunkowo równo rozłożone pomiędzy pielęgniarki  
Suma weekendowych zmian dla każdej pielęgniarki nie może być odchylna od średniej ( $\text{weekend\_avg\_demand}$ ) o więcej niż  $\text{bias}$

$$\forall_{n,k} \sum_{s \in \text{shifts}} (\text{schedule}[n, 7 \cdot (k - 1) + 6, s] + \text{schedule}[n, 7 \cdot (k - 1) + 7, s]) \leq \text{weekend\_avg\_demand} \cdot (1 + \text{bias})$$

$$\forall_{n,k} \sum_{s \in \text{shifts}} (\text{schedule}[n, 7 \cdot (k - 1) + 6, s] + \text{schedule}[n, 7 \cdot (k - 1) + 7, s]) \geq \text{weekend\_avg\_demand} \cdot (1 - \text{bias})$$

### Komentarz

Zasadniczą trudnością sformułowania problemu w języku AMPL jest zapewnienie liniowości względem zmiennej optymalizowanej. Przykładem warunku zadania, którego nieliniowy zapis okazał się nietrywialny jest obowiązek zapewnienia każdej pielęgniarce wolnych 24h przynajmniej raz w tygodniu. W tym celu przepisaliśmy zmienną *schedule* na zmienną *all\_shifts* o dwóch współrzędnych: *nurse, shift*. Tak, by grafik każdej pielęgniarki był przedstawiony za pomocą wektora zer i jedynek.

$$\forall_{n,d,s} \text{all\_shifts\_matrix}[n, \text{number\_of\_shifts} \cdot (d-1) + s] = \text{schedule}[n, d, s]$$

Następnie utworzyliśmy macierz binarną *if\_working*, która na miejscu  $[n, i]$  przyjmuje wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy pielęgniarka  $n$  w trakcie  $i$ -tego z kolei przedziału czasowego długości 24h przychodzi do pracy.

$$\text{if\_working}[n, s] \leq \sum_{i \in \{1, \dots, \text{number\_of\_shifts}\}} \text{all\_shifts\_matrix}[n, s + i - 1]$$

$$\text{if\_working}[n, s] \geq \left( \sum_{i \in \{1, \dots, \text{number\_of\_shifts}\}} \text{all\_shifts\_matrix}[n, s + i - 1] \right) \cdot \frac{1}{1000}$$

Wówczas dla każdego tygodnia musi znaleźć się w tej macierzy jakieś zero.