UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lehrstuhl für Ökonometrie
Prof. Dr. Christoph Hanck
M.Sc. Karolina Gliszczynska

Probeklausur Methoden der Ökonometrie

A1 [*20 Punkte*]

Betrachten Sie das lineare Regressionsmodell

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{u},$$

wobei $\boldsymbol{X}$ $(n \times k)$ vollen Spaltenrang besitzt. Zudem gilt $E(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$ und $\text{Var}(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$.

a) Leiten Sie den Kleinste-Quadrate Schätzer $\widehat{\beta}$ von β, sowie dessen Varianz her.
[6 *Punkte*]

$$\boldsymbol{X}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ c\boldsymbol{X} \end{pmatrix}.$$

b) Leiten Sie dass der Kleinste-Quadrate Schätzer unter den Annahmen

$$\frac{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}}{n} \xrightarrow{P} \mathrm{E}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}) =: \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{u}}{n} \xrightarrow{P} \mathbf{0}$$

konsistent ist.
[6 *Punkte*]

c) Zeigen Sie, dass $\widehat{\beta}_2$ bedingt unverzerrt ist.
Hinweis: Falls Sie b) nicht lösen konnten, können Sie im folgenden zeigen, dass der Kleinste-Quadrate Schätzer bedingt unverzerrt ist.
[4 *Punkte*]

d) Nennen Sie zwei weitere Eigenschaften der Projektionsmatrix $\boldsymbol{P_X}$ **oder** der Residuenmachermatrix $\boldsymbol{M_X}$ und zeigen Sie diese.
[4 *Punkte*]

A2 [*20 Punkte*]

Betrachten Sie das lineare Regressionsmodell mit $E(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$ und definieren Sie $\boldsymbol{X} := (\boldsymbol{X}_1 : \boldsymbol{X}_2)$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1\beta + \boldsymbol{v}, \tag{1}$$

jedoch führen wir die Schätzung für β basierend auf

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1\beta + \boldsymbol{X}_2\gamma + \boldsymbol{u} \tag{2}$$

durch. Das bedeutet, dass wir β mit

$$\widehat{\beta}_{\text{OLS,L}} = \{\boldsymbol{X}_1^\top(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_2})\boldsymbol{X}_1\}^{-1}\boldsymbol{X}_1^\top(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_2})\boldsymbol{y}, \tag{3}$$

schätzen, während Modell (1) das wahre Modell ist. Das heißt, dass wir irrelevante Variablen inkludieren (da $\gamma = \mathbf{0}$).

a) Zeigen Sie, dass der Schätzer $\widehat{\beta}_{\text{OLS,L}}$ der langen Regression (2) unverzerrt ist.
[5 *Punkte*]

b) Zeigen Sie, dass die Varianz-Kovarianzmatrix von $\widehat{\beta}_{\text{OLS,L}}$ gegeben ist durch

$$Var(\widehat{\beta}_{\text{OLS,L}}|\boldsymbol{X}) = \sigma^2\{\boldsymbol{X}_1^\top(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_2})\boldsymbol{X}_1\}^{-1}.$$

`Hinweis:` Machen Sie sich zunutze, dass der Schätzer in Modell (2) unverzerrt ist und der Fehlerterm in Modell (1) $E(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$ erfüllt. Sie können ferner annehmen, dass $Var(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{X}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$.
[6 *Punkte*]

Bearbeiten Sie die Teilaufgabe (c) in `R`. Bitte verwenden Sie `set.seed(123)` zu Beginn Ihres Codes.

c) Sei $(\beta, \gamma) = (2,\ 0)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{\iota}$, wobei $\boldsymbol{\iota}$ ein Vektor von Einsen ist, in Modell (2).

- Erzeugen Sie
$$y_t = 2x_{1t} + 0 + u_t, \qquad t = 1, \dots, 25,$$
wobei $x_{1t} \overset{u.i.v.}{\sim} \mathcal{U}(0,1)$ und $u_t \overset{u.i.v.}{\sim} N(0, 0.25)$.
- Schätzen Sie β, indem Sie einmal die komplette Matrix $\boldsymbol{X}$ nutzen ($\widehat{\beta}_{\text{OLS,L}}$) und einmal nur den Vektor $\boldsymbol{x}_1$ ($\widehat{\beta}_{\text{OLS}}$). Speichern Sie beide Ergebnisse.
`Hinweis:` Das Regressionsmodell der langen Regression ist $y_t = \beta \cdot x_{1t} + \gamma + u_t$.
- Wiederholen Sie das Experiment 1000 mal und berechnen Sie die Stichprobenvarianz der beiden Schätzer. Welcher Schätzer für β hat eine geringere Stichprobenvarianz? Begründen Sie, wieso Ihr Ergebnis in der Theorie zu erwarten war.

[6 *Punkte*]

d) Würde sich etwas ändern, wenn der Regressor $\boldsymbol{x}_1$ einen Mittelwert von Null hätte? Begründen Sie mit Hilfe von Theorie.
[3 *Punkte*]

A3 [*20 Punkte*]

Betrachten Sie das lineare Regressionsmodell

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{u}, \tag{4}$$

wobei $\boldsymbol{X}$ $(n \times k)$ vollen Spaltenrang besitzt.

a) Prof. Schranck, ein angesehener Ökonometrieprofessor, grübelt: „Wir haben oft das Problem zu kleiner Datensätze, wir brauchen einfach mehr Daten.“ Er hat eine Idee: „Warum kopieren wir nicht einfach unsere Daten $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{X}$? Das verdoppelt n und unsere Schätzungen werden besser.“ Seine Assistentin Frau Schreckmann wendet ein: „Aber das sind doch dann dieselben Punkte im Streudiagramm, das bringt uns nicht entscheidend weiter!“ Zeigen Sie, dass diese Idee wenig zielführend in Bezug auf den Kleinste-Quadrate Schätzer ist, und dass dieser sich insbesondere gar nicht ändert.
[6 *Punkte*]
`Hinweis:` Die neue abhängige Variable und die neuen Regressoren haben nach Kopie Zeilendimension $2n$ und lassen sich dann schreiben als

$$\widetilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix}.$$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben in `R`. Bitte verwenden Sie `set.seed(123)` zu Beginn Ihres Codes.

b) Sei $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^{\mathsf{T}}$ und $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{x}_2)$, wobei $\boldsymbol{\iota}$ ein Vektor von Einsen ist. Schätzen Sie den Kleinste-Quadrate Schätzer $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ von $\boldsymbol{\beta}$ in folgendem Modell

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + u_t, \qquad t = 1, \dots, 20. \tag{5}$$

Simulieren Sie dazu jeweils 20 Beobachtungen des Modells wobei $x_{2t} \overset{u.i.v.}{\sim} N(0,1)$ und $u_t \overset{u.i.v.}{\sim} N(0,1)$. Zudem sei $\beta_1 = 1$ und $\beta_2 = 2$.
[3 *Punkte*]

c) Eine weitere Assistentin von Prof. Schranck, Frau Karolinger, hat eine weitere Idee: „Wir könnten aber die kopierten Daten für $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{X}$ jeweils mit einer Konstanten c skalieren, dann bekommen wir wirkliche neue Punkte! Damit gehören dann zu kleine Stichproben der Vergangenheit an!“
Die neue abhängige Variable und die neuen Regressoren haben nach Kopie wieder Zeilendimension $2n$ und lassen sich nun schreiben als

$$y^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ c\boldsymbol{y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{X}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ c\boldsymbol{X} \end{pmatrix}.$$

- Speichern Sie die neue Matrix $\boldsymbol{X}^*$ sowie den neuen Vektor $\boldsymbol{y}^*$, die jeweils die alten Beobachtungen $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{y}$ enthalten sowie die zusätzlichen Beobachtungen $c\boldsymbol{X}$ und $c\boldsymbol{y}$. Setzen Sie $c = -3$.

- Schätzen Sie den Kleinste-Quadrate Schätzer $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ von $\boldsymbol{\beta}^* = (\beta_1^*, \beta_2^*)^{\mathsf{T}}$ im Modell

$$y_t^* = \beta_1^* + \beta_2^* x_{2t}^* + u_t^*, \qquad t = 1, \dots, 40 \tag{6}$$

  und vergleichen Sie $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ mit $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ aus Modell (5).

[4 *Punkte*]

d) Berechnen Sie die *SSR* für beide Regressionen. Multiplizieren Sie die *SSR* von Modell (5) mit $(1+c^2)$. Was fällt Ihnen auf?
[3 *Punkte*]

e) Schätzen Sie für die Regresssionen jeweils die Standardabweichung des Koeffizientenschätzers $\widehat{\beta}_2$ und $\widehat{\beta}_2^*$. Überprüfen Sie den folgenden Zusammenhang

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\widehat{\beta}_2^*|\boldsymbol{X}^*)} = \sqrt{(n-2)/(2n-2)}\sqrt{\mathrm{Var}(\widehat{\beta}_2|\boldsymbol{X})}.$$

Prof. Schranck ist begeistert von den Ergebnissen des Experiments: „Die Standardfehler des Koeffizienten verkleinern sich um den Faktor $\sqrt{(n-2)/(2n-2)}$, wenn wir zusätzliche Beobachtungen $c\boldsymbol{X}$ und $c\boldsymbol{y}$ hinzufügen! Damit werden doch größere Teststatistiken möglich!“ Kommentieren Sie diese Aussage kritisch.
[4 *Punkte*]

A4 [*20 Punkte*]

Der Datensatz *cigarette* (bereits in R eingelesen) enthält für 46 amerikanische Bundesstaaten die jeweils logarithmierten Werte für den durchschnittlichen pro-Kopf Verbrauch (von Personen über 16) an Zigarettenschachteln pro Jahr (*LNC*), den realen Preis pro Schachtel (*LNP*) und das durchschnittliche reale pro-Kopf-Einkommen (*LNY*, in 100 US-Dollar). Außerdem ist die Variable `south` enthalten, die den Wert 1 annimmt, wenn es sich um einen Südstaat handelt und 0 sonst.
Betrachten Sie das Modell

$$LNC_t = \beta_1 + \beta_2 LNP_t + \beta_3 LNY_t + u_t;\ \ t = 1, \dots, 46 \tag{7}$$

und bearbeiten Sie folgende Aufgaben:

a) Schätzen Sie $\boldsymbol{\beta} := (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^\mathsf{T}$ in obigem Modell und plotten Sie die Residuen der Regression gegen *LNP*, sowie die Residuen gegen *LNY*. Was fällt Ihnen auf? Gibt es Hinweise auf eine Verletzung der gewöhnlichen Annahmen des linearen Regressionsmodells?
[5 *Punkte*]

b) Testen Sie die $H_0 : \beta_2 = 0$ zum Niveau $\alpha = 0.05$ je einmal unter Verwendung von nicht Heteroskedastie-robusten und Heteroskedastie-robusten Standardfehlern (Typ HC1). Zu welchen Ergebnissen kommen Sie mit Hilfe der Tests?
[5 *Punkte*]

c) Betrachten Sie nun

$$LNC_t = \beta_1 + \beta_2 LNP_t + v_t;\ \ t = 1, \dots, 46. \tag{8}$$

Führen Sie die OLS-Regression für Modell (8) getrennt für die Südstaaten und die übrigen Staaten der USA durch. Benutzen Sie dafür jeweils die Datensätze *cigarette_sued* und *cigarette_ohne_sued* (bereits in R eingelesen).

Überprüfen Sie mit dem Chow-Test, ob der Einfluss des Achsenabschnitts und des Preises auf den Zigarettenkonsum in den Südstaaten und den übrigen Staaten gleich ist.
[6 *Punkte*]

d) Berechnen Sie die Hebelwirkung (Leverage) für Modell (7) (R-Befehl *hatvalues()*). Entfernen Sie alle Beobachtungen, deren Leverages mehr als 3 mal so groß sind wie das arithmetische Mittel über alle Leverages. Schätzen Sie die Koeffizienten des Modells mit dem bereinigten Datensatz erneut. Vergleichen und interpretieren Sie.
[4 *Punkte*]