Universität Duisburg-Essen
Lehrstuhl für Ökonometrie
Prof. Dr. Christoph Hanck
M.Sc. Karolina Gliszczynska

Wintersemester 2022/2023

Methoden der Ökonometrie - Übung 11

Aufgabe 1:

Sei $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$ ein lineares Modell, sodass $\boldsymbol{X}$ vollen Spaltenrang K hat. Bestimmen Sie $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{r}$, sodass Sie die folgenden Nullhypothesen als $H_0 : \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{r}$ schreiben. Hat $\boldsymbol{R}$ vollen Spaltenrang?

a) $H_0 : \beta_1 = 0$

b) $H_0 : \beta_2 = \beta_3$

c) $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ und $\beta_1 = 0$

d) $H_0 : \beta_2 = \beta_3$, $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 - \beta_3 = \beta_1$

Aufgabe 2:

Betrachten Sie das folgende klassische lineare Regressionsmodell:

$$y_i = \beta_1 + X_{i1}\beta_2 + X_{i2}\beta_3 + u_i, \quad i = 1, \ldots, 103.$$

Eine KQ-Schätzung ergab einen (unzentrierten) $R^2 = 0.7$, $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} = 1000$,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widehat{Var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.048 & -0.06 \\ 0.048 & 0.2 & -0.03 \\ -0.06 & -0.03 & 0.07 \end{pmatrix}.$$

a) Schätzen Sie die Fehlervarianz σ^2.

b) Testen Sie zum Niveau 5% die Hypothese

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \beta_3 = 0 \quad \text{gegen} \\ H_A &: \ \beta_3 \neq 0. \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die t-Statistik für die Nullhypothese $2\beta_1 = \beta_2$ und füllen Sie die Testentscheidung zum Niveau 5%

d) Bestimmen Sie (mit R) zu den beiden Hypothesentests den p-Wert.

Aufgabe 3:

Sei $\tau \sim \chi^2_n$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{n}(\tau/n - 1) \xrightarrow{d} N(0, 2)$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 4:

a) Sei $\widehat{\beta}$ ein Schätzer für β. Definieren Sie den Begriff Konsistenz.

b) Zeigen Sie, dass ein konsistenter Schätzer nicht immer erwartungstreu ist.
Hinweis: Sie können geeignete Schätzer für den Erwartungswert $\mu = E(X_1)$ einer i.i.d. $N(\mu, 1)$-Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ betrachten.

c) Zeigen Sie, dass ein erwartungstreuer Schätzer nicht immer konsistent sind.

d) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$. Zeigen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen, also dass $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$.

Aufgabe 5:

a) Beschreiben Sie, wie sich aus einem Hypothesentest ein Konfidenzbereich konstruieren lässt. Beschreiben Sie umgekehrt, wie sich aus einem Konfidenzbereich ein Hypothesentest konstruieren lässt.

b) Interpretieren Sie die Bedeutung eines Konfidenzbereichs. Erklären Sie, warum eine gängige Fehlinterpretation falsch ist.

c) Gibt es eine intuitive Vorgehensweise, mit der sich feststellen lässt, ob bei der Invertierung eines einseitigen Hypothesentests eine obere oder eine untere Schranke für einen Parameter ermittelt wird?

Aufgabe 6:

Betrachten Sie folgenden R-Output:

```
> gaslm<-lm(log(gas)~log(cars)+log(population)+log(price)+log(gnp)+log(deflator),data=USGasB)
> linearHypothesis(gaslm,c("log(gnp)=0","log(deflator)=0"))
Linear hypothesis test

Hypothesis:
log(gnp) = 0
log(deflator) = 0

Model 1: restricted model
Model 2: log(gas) ~ log(cars) + log(population) + log(price) + log(gnp) +
    log(deflator)

  Res.Df      RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1     34 0.045877
2     32 0.025531  2  0.020346 12.751 8.462e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Der Datensatz beschreibt den Gasverbrauch in den USA in den Jahren 1950-1987. Die Variablen haben folgende Bedeutung: Konsum von Benzin (in kGallons), Anzahl an Autos, Bevölkerung (in Tsd), Preis von Benzin, BIP, BIP-Deflator (für 1982 =100).

a) Was wurde hier gemacht? Beschreiben Sie, wozu man ein solches Verfahren nutzen kann.

b) Erklären Sie, was der Output beschreibt. Schreiben Sie zu jedem Wert einen Kommentar.

c) Wird die Nullhypothese abgelehnt? Was bedeutet es allgemein und in diesem Spezialfall, wenn die Nullhypothese abgelehnt/belassen wird? Was bedeutet es nicht?