Universität Duisburg-Essen
Lehrstuhl für Ökonometrie
Prof. Dr. Christoph Hanck
M.Sc. Karolina Gliszczynska

Wintersemester 2022/2023

Methoden der Ökonometrie - Übung 2

Aufgabe 1:

a) Sei $X \sim N(0,1)$. Zeigen Sie, dass $Z := \mu + \sigma X$ Erwartungswert μ und Varianz σ^2 besitzt. Dementsprechend ist $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable in Abhängigkeit von der Verteilungsfunktion $\Phi(\cdot)$ einer $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariable. Berechnen Sie damit die Dichte einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable.

c) Seien X und Y gemeinsam $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$-verteilt, sodass $Cov(X,Y) = 0$. Zeigen Sie, dass X und Y unabhängig sind.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie zwei Zufallsvariablen X und Y. Ziel dieser Aufgabe ist den Zusammenhang zwischen den drei Abhängigkeitskonzepten aufzeigen, nämlich

$$X, Y \text{ sind unabhängig} \implies E(X|Y) = E(X) \implies Cov(X,Y) = 0,$$

wobei die jeweiligen Umkehrungen nicht gelten. Zeigen Sie:

a) Sind X und Y unabhängig, so gilt $E(X|Y) = E(X)$.
Hinweis: Es reicht dies für stetige Zufallsvariablen zu zeigen.

b) Gilt $E(X|Y) = E(X)$, so sind X und Y unkorreliert, d.h. $Cov(X,Y) = 0$.

c) Die Umkehrung von b) gilt nicht, d.h.

$$Cov(X,Y) = 0 \not\Rightarrow E(X|Y) = E(X).$$

Hinweis: Betrachten Sie das Gegenbeispiel $X = Y^2$ und Y, wobei $Y \sim N(0,1)$.

d) Die Umkehrung von a) gilt nicht, d.h

$$E(X|Y) = E(X) \not\Rightarrow X, Y \text{ sind unabhängig}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $X = YZ$, wobei Z eine zentrierte, von Y unabhängige Zufallsvariable ist.

e) Zeigen Sie direkt unter Nutzung der Definition der Kovarianz, dass

$$X, Y \text{ sind unabhängig} \Longrightarrow Cov(X,Y) = 0.$$

Aufgabe 3:

a) Definiere die **bedingte Varianz** als

$$Var(X|Y) := E\left((X - E(X|Y))^2 \, |Y \right).$$

Zeigen Sie für Zufallsvariablen X, dass

$$Var(X) = E\left(Var(X|Y)\right) + Var\left(E(X|Y)\right).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $Var(X|Y) = E(X^2|Y) - E(X|Y)^2$.

b) Zeigen Sie, dass sich der MSE eines skalaren Parameter $\hat{\beta}$ wie folgt zerlegen lässt:

$$MSE(\hat{\beta}) = Var(\hat{\beta}) + Bias(\hat{\beta})^2.$$