Universität Duisburg-Essen
Lehrstuhl für Ökonometrie
Prof. Dr. Christoph Hanck
M.Sc. Karolina Gliszczynska

Wintersemester 2022/2023

Methoden der Ökonometrie - Übung 4

Aufgabe 1:

Betrachten Sie für $\boldsymbol{X}$ $(n \times k)$ das lineare Regressionsmodell

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u},$$

wobei $E\left(u_t | X_{t1}, \ldots, X_{tk}\right) = 0$, $t = 1, \ldots, n$.

a) Zeigen Sie $E\left(X_{ti} u_t\right) = 0$ für alle $t = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$.

b) Zeigen Sie, wie aus a) die k Momentenbedingungen aus der Vorlesung folgen.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie für $\boldsymbol{X}$ $(n \times k)$ das lineare Regressionsmodell

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u},$$

wobei $\operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) = k$.

a) Zeigen Sie, dass der OLS Schätzer die Bedingung 1. Ordnung für ein Extremum der Summe der Residuenquadrate erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass der Ausdruck auch tatsächlich die Residuenquadrate minimiert, indem Sie für einen beliebigen Schätzer $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ zeigen, dass $\mathrm{SSR}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}) \geq \mathrm{SSR}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$.
Hinweis: Berechnen Sie

$$\begin{aligned}\mathrm{SSR}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}) &= \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right)^T \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{X}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right)^T \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{X}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = \ldots\end{aligned}$$

c) Zeigen Sie, dass für $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} \neq \hat{\boldsymbol{\beta}}$ sogar $\mathrm{SSR}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}) > \mathrm{SSR}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ gilt.

Aufgabe 3:

Es seien $u_1, \ldots, u_n$ i.i.d. $N(0,1)$ verteilt. Außerdem seien $x_1, \ldots, x_n$ bekannte reelle Zahlen und seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ unbekannte Parameter. Welche der folgenden Modelle sind linear?
Finden Sie bei den nicht linearen Modellen, falls möglich eine Transformation $y_i' = h(y_i)$, sodass y_i' ein lineares Modell ist und geben Sie es in Matrixschreibweise an.

a) $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$

b) $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i^2 + u_i^2$

c) $y_i = e^{\beta_1} e^{\beta_2 x_i} x_i^{\beta_3} e^{u_i}$

Bestimmen Sie außerdem zu dem Modell b) explizit den OLS-Schätzer

Aufgabe 4:

a) Betrachten Sie das lineare Regressionsmodell

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t, \qquad t = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, wenn X um eine Einheit steigt, dann verändert y um β_2 Einheiten.

b) Betrachten Sie das lineare Regressionsmodell

$$\log(y_t) = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t, \qquad t = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, wenn X um eine Einheit steigt, dass die prozentuale Veränderung von y (ungefähr) $100 \cdot \beta_2\%$ beträgt.
Hinweis: Nutzen Sie folgende Näherung: $\log(x) \approx x - 1$ in der Nähe von $x = 1$.

c) Betrachten Sie das lineare Regressionsmodell

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_t^2 + u_t, \qquad t = 1, \ldots, n.$$

Bestimmen Sie die marginalen Änderung in y bei einer Änderung in X.