Universität Duisburg-Essen
Lehrstuhl für Ökonometrie
Prof. Dr. Christoph Hanck
M.Sc. Karolina Gliszczynska

Wintersemester 2022/2023

# Methoden der Ökonometrie - Übung 1

**(Übung am 12.10.2022)**

## Aufgabe 1:

a) Seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Matrixprodukt $\boldsymbol{AB}$. Warum lässt sich $\boldsymbol{BA}$ nicht berechnen?

b) Sei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$. Sie haben damit gezeigt, dass $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ im Allgemeinen.

c) Kennen Sie ein Beispiel quadratischer Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$, bei denen $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ doch gilt?

## Aufgabe 2:

a) Seien $\boldsymbol{A}\,(m \times n)\,, \boldsymbol{B}\,(n \times p)$ Matrizen.
Zeigen Sie: $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T$.
*Hinweis:* Es reicht $\left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T\right)_{ij} = \left((\boldsymbol{AB})^T\right)_{ij}$ für beliebige $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, m$ zu zeigen, wobei $(\boldsymbol{C})_{ij}$ den Eintrag in der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte der Matrix $\boldsymbol{C}$ bezeichnet.

b) Sei $\boldsymbol{A}\,(m \times m)$ eine idempotente Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$.
Zeigen Sie: $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

c) Sei $\boldsymbol{A}\,(m \times m)$ eine symmetrische, idempotente Matrix.
Zeigen Sie: Die Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}$ sind positiv semidefinit.

d) Sei $\boldsymbol{A}\,(m \times m)$ eine orthogonale Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$.
Zeigen Sie: $\lambda = -1$ oder $\lambda = 1$.
*Hinweis:* Betrachten Sie $(\boldsymbol{Av})^T\,(\boldsymbol{Av})$ für den Eigenvektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ zum Eigenwert $\lambda$.

e) Seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\,(m \times m)$ Matrizen.
Zeigen Sie: $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{BA})$.

f) Sei $\boldsymbol{A}\,(m \times m)$ eine beliebige Matrix.
Zeigen Sie: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T$ ist symmetrisch.

g) Sei $\boldsymbol{A}\,(m \times n)$ eine Matrix.
Zeigen Sie: $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ sind symmetrische, positiv semidefinite Matrizen.

**Aufgabe 3:**

a) Bestimmen Sie die Determinanten, sowie gegebenenfalls die Inversen folgender Matrizen:

(i) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$,

(ii) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & c \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ invertierbar? Bestimmen Sie für diese $c$ das Inverse der Matrix.

**Aufgabe 4:**

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und die dazugehörigen Eigenvektoren.

b) Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen

(i) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{pmatrix}$$