Universität Duisburg-Essen
Lehrstuhl für Ökonometrie
Prof. Dr. Christoph Hanck
M.Sc. Karolina Gliszczynska

Wintersemester 2022/2023

Methoden der Ökonometrie - Übung 6

Aufgabe 1:

Sei

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{u},$$

erinnern Sie sich an die Aussage des Frisch-Waugh-Lovell Theorems: $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ kann durch Regression von $\boldsymbol{y}$ auf $\boldsymbol{X}_1$ und $\boldsymbol{X}_2$ sowie durch Regression $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}$ auf $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2$ gleichermaßen berechnet werden.

a) Sie können noch mehr zeigen: Die Residuen von der Regression $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}$ auf $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2$ sind gleich der Residuen $\hat{\boldsymbol{u}}$ der Regression $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{u}$.
Hinweis: Falls $\hat{\boldsymbol{u}}$ die Residuen der Regression von $\boldsymbol{y}$ auf $\boldsymbol{X}_1$ und $\boldsymbol{X}_2$ sind, dann $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \hat{\boldsymbol{u}}$. Multiplizieren Sie beide Seiten der Gleichung von links mit $\boldsymbol{M}_1$.

b) Zeigen Sie, dass sich $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ berechnen lässt, indem man $\boldsymbol{y}$ auf $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2$ regressiert. Zeigen Sie weiterhin, dass die Residuen dieser Regression nicht mit $\hat{\boldsymbol{u}}$ übereinstimmen. Zeigen Sie auch, dass das SSR von $\boldsymbol{y}$ auf $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2$ nicht das selbe ist wie das SSR von $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}$ auf $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie das lineare Regressionsmodell

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u},$$

wobei einer der Regressoren eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass sich die Summe der OLS-Residuen zu Null ergibt, d.h. $\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t = 0$.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie,

$$R_u^2 = \frac{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}.$$

b) Betrachten Sie für $\boldsymbol{X}$ $(n \times k)$ das lineare Regressionsmodell

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u},$$

wobei $\operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) = k$. Zeigen Sie, falls die Anzahl an Regressoren gleich der Anzahl an Beobachtungen ist, also $n = k$ ist, dann ist das Bestimmtheitsmaß $R^2 = 1$. (Es ist egal, ob Sie das unzentrierte oder zentrierte Bestimmtheitsmaß für den Beweis wählen.)