

## Methoden der Ökonometrie - Übung 12

### Aufgabe 1:

Betrachten Sie das Regressionsmodell

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

mit deterministischer  $(n \times k)$ -Matrix  $\mathbf{X}$ , die vollen Spaltenrang besitzt und  $\text{Var}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\Omega}$ .

- Berechnen Sie  $\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS})$ , sowie  $\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS})$  und vergleichen Sie.
- Zeigen Sie, dass  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$  genau dann, wenn  $\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{M}_X = \mathbf{O}$ .

### Aufgabe 2:

Sei  $u_t$  ein stationärer AR(1)-Prozess, d.h.

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad |\rho| < 1,$$

welcher in  $u_0 \sim \left(0, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}\right)$  startet.

- Zeigen Sie, dass  $\text{Cov}(u_t, u_{t-j}) = \text{Cov}(u_{t-j}, u_t) = \rho^j \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \rho^2)$  und  $\text{Corr}(u_t, u_{t-j}) = \rho^j$ .
- Bestimmen Sie den OLS-Schätzer  $\hat{\rho}$  für  $\rho$ .
- Zeigen Sie, dass  $\hat{\rho}$  nicht erwartungstreu ist.

### Aufgabe 3:

Testen Sie den Datensatz auf Heteroskedastie. Führen Sie dazu den White-Test durch, fällen Sie die Testentscheidung zu einem Niveau von 5% mit Hilfe folgendem Outputs:

```
> summary(lm(residuals(lm(Mortalität~Breite,data=datenA2))^2~datenA2$Breite+I(datenA2$Breite^2)))

Call:
lm(formula = residuals(lm(Mortalität ~ Breite, data = datenA2))^2 ~
    datenA2$Breite + I(datenA2$Breite^2))

Residuals:
    1      2      3      4      5      6      7 
486.15 -190.07 105.89  42.73 -360.43 106.46 -190.73 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   -26202.84   11614.46  -2.256  0.0871 .
datenA2$Breite    1430.87    622.28   2.299  0.0830 .
I(datenA2$Breite^2)  -19.00      8.21  -2.314  0.0816 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 340.3 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5761,    Adjusted R-squared:  0.3642 
F-statistic: 2.719 on 2 and 4 DF,  p-value: 0.1797
```