

## Methoden der Ökonometrie - Übung 10

### Aufgabe 1:

- a) In der Vorlesung haben Sie den  $p$ -Wert bei einer zweiseitigen Alternativhypothese betrachtet,  $H_0 : \beta = \beta_0$  gegen  $H_1 : \beta \neq \beta_0$  für  $z \sim N(\beta, \sigma^2)$  (erinnern Sie sich daran). Leiten Sie jetzt den  $p$ -Wert für Tests mit Hypothesen der Form  $H_0 : \beta \leq \beta_0$  gegen  $H_1 : \beta > \beta_0$ , sowie  $H_0 : \beta \geq \beta_0$  gegen  $H_1 : \beta < \beta_0$  her.
- b) Bestimmen Sie jeweils das Monotonieverhalten des  $p$ -Werts bei steigenden/fallenden  $n$  bzw. steigendem/fallendem  $\sigma$ .
- c) Diskutieren Sie den Wahrheitsgehalt folgender Aussagen:
- Falls der  $p$ -Wert = 0.05 ist, besteht nur eine 5% Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese wahr ist.
  - Falls zwei Studien den gleichen  $p$ -Wert haben, bedeutet das den gleichen Anhaltspunkt gegen die Nullhypothese gefunden zu haben.
  - Falls die Nullhypothese belassen wird, ist sie mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  wahr.
  - Der  $p$ -Wert ist die Wahrscheinlichkeit die beobachteten Daten zu erhalten, falls die Nullhypothese wahr ist.

### Aufgabe 2:

$X_1, \dots, X_n$  sind u.i.v. Zufallsvariablen. Die Teststatistik  $T = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  hat unter der Nullhypothese die Verteilungsfunktion  $F_{H_0}$ .

Für einen rechtseitigen Test ist der  $p$ -Wert definiert als  $p_{rechts} = P[T \geq t | H_0]$ . Für einen linksseitigen Test gilt  $p_{links} = P[T \leq t | H_0]$ .

Zeigen Sie davon ausgehend, dass der  $p$ -Wert für einseitige Tests unter der Nullhypothese auf dem Intervall  $[0, 1]$  uniformverteilt ist. Sie können annehmen, dass  $F_{H_0}$  stetig und invertierbar ist.

### Aufgabe 3:

- a) Betrachten Sie das Testproblem aus Aufgabe 1a)  $H_0 : \beta = \beta_0$  gegen  $H_1 : \beta \neq \beta_0$  zum Signifikanzniveau  $\alpha$  unter der Normalverteilungsannahme mit bekanntem  $\sigma$ . Es sei der wahre Parameter  $\beta = \beta_1 \neq \beta_0$ . Berechnen Sie die Macht des Test als Funktion von  $\beta_1$ .
- b) Bestimmen Sie jeweils das Monotonieverhalten der Macht in Abhängigkeit von  $\beta_1, n, \sigma$  und  $\alpha$ .

### Aufgabe 4:

- a) Sei  $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ , wobei  $\mathbf{\Sigma} (m \times m)$  positiv definit ist. Zeigen Sie:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} \sim \chi_m^2.$$

*Hinweis:* Beachten Sie Result 30 im Matrix Reader.

- b) Zeigen Sie: Falls  $y \sim t_n$ , dann  $y^2 \sim F_{1,n}$ .