Sprawozdanie - laboratorium 3

Iteracyjne rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jakobiego

Karolina Kotłowska, 18 marzec 2021

1 Wstęp teoretyczny

Tematem laboratorium było zapoznanie się ze sposobem rozwiązywnia układów równań z wykorzystaniem metod iteracyjnych.

1.1 Metoda Jakobiego

Metoda Jakobiego jest to jedna z metod rozwiązywania układu równań liniowych. W postaci macierzowej taki układ równań wygląda tak:

$$A * \vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

A-macierz kwadratowa współczynników $\vec{x}$ - wektor niewiadomych $\vec{b}$ - wektor wyrazów wolnych
Metoda polega na poczatkowym rozłożeniu macierzy A na 3 macierze L,U oraz D. Macierz L jest macierzą trójkątną górną z wyzerowanymi elementami na przekątnej, macierz U jest macierzą trójkątną dolną z wyzerowanymi elementami na daigonali oraz macierz D jest macierzą diagonalną.

$$A = L + D + U \tag{2}$$

Więc układ można zapisać jako:

$$(L + D + U)x = b \tag{3}$$

a po przekształceniach:

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{1}b \tag{4}$$

zatem równanie macierzowe w postaci iteracyjnej można zapisać jako:

$$x^{i+1} = -D^{-1}(L + U)x^{i} + D^{-1}b \tag{5}$$

Z powyższych przekształceń otrzymaliśmy wzór na obliczenie i-tego elementu nowego przybliżenia (x_n[i]) dysponując przybliżeniem z poprzedniej iteracji (wektor x_s):

$$x_n[i] = \frac{1}{a_{ii}} * (b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_n[j]) \tag{6}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Na laboratoriach zapoznaliśmy się z równaniem różniczkowym, które opisuje ruch ciała poddanego działaniu siły sprężystej $-\omega$*x, siły tarcia $-\beta * V$ zależnej od prędkości oraz siły wymuszającej ruch $F_0 sin(\Omega * t)$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega x - \beta V + F_0 sin(\Omega t) \tag{7}$$

Naszym zadaniem było rozwiązanie układu równań iteracyjną metodą Jakobiego dla ruchu ciała na sprężynie dla trzech przypadków opisanych poniżej. Zadanie wykonaliśmy dla 2000 iteracji z krokiem czasowym h=0.02.
Przyjeliśmy pewne stałe początkowe:
- x(t= 0) = $x_0 = 1$
- V(t = 0) = $V_0 = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} = 0$

$$1)\ \beta = 0.0, F_0 = 0.0, \omega = 0.8 \tag{8}$$

$$2)\ \beta = 0.4, F_0 = 0.0, \omega = 0.8 \tag{9}$$

$$3)\ \beta = 0.4, F_0 = 0.1, \omega = 0.8 \tag{10}$$

Uzyskaliśmy zatem poniższy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & ... & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Pierwszym etapem realizacji zadania było stworzenie trzech wektorów $d_{0,1,2}$, które posłużyły do przechowywania macierzy. Było to możliwe, ponieważ macierz naszego układu równań $A * \vec{x} = \vec{b}$ jest trójdiagonalna więc do jej przechowania wystarczą 3 wektory.

$$d_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a_3 & a_3 & .... & a_3 \end{bmatrix}$$
$$d_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & a_2 & a_2 & .... & a_2 \end{bmatrix}$$
$$d_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_1 & .... & a_1 \end{bmatrix}$$

Następnie za pomocą utworzonego i wyzerowanego wcześniej wektora x, metodą Jakobiego wyznaczyliśmy każde kolejne przybliżenie ze wzoru:

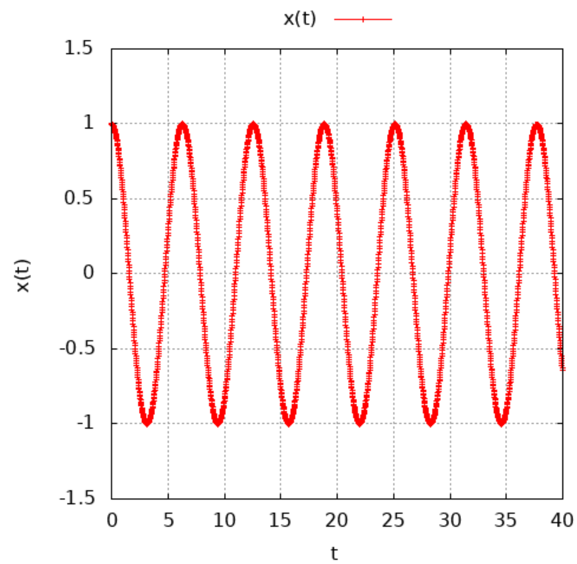
$$x_n[i] = \frac{1}{d_0} * (b[i] - d_1[i] * x_s[i-1] - d_2[i] * x_s * [i-2] \tag{12}$$

Celem było wyznaczenie i-tego elementu nowego przybliżenia (xn[i]) dysponując przybliżeniem z poprzedniej iteracji (wektor xs).

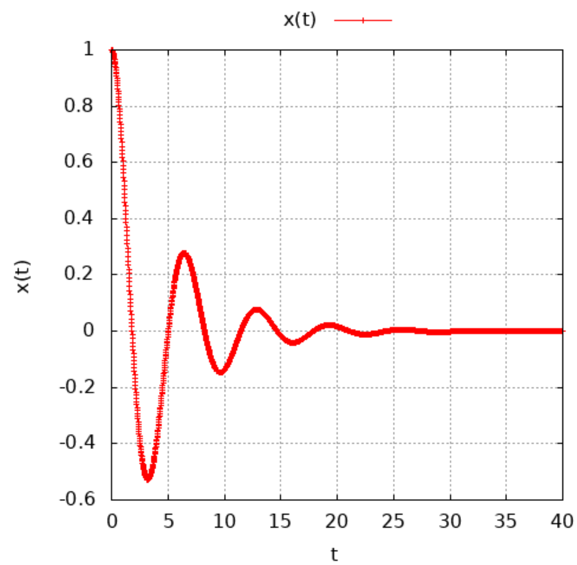
Iterację skończyliśmy dla 10000 powtórzeń.

2.2 Wyniki

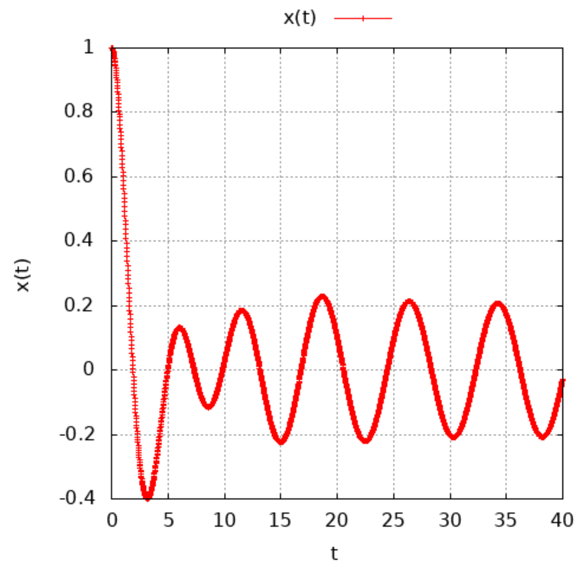
Korzystając z programu gnuplot wygenerowaliśmy wykresy dla naszych wyników. Poniżej przedstawione są zależności wychylenia w czasie, dla układu podanego w zadaniu.



Rysunek 1: Zależność wychylenia od czasu dla $\beta = 0.0, F_0 = 0.0, \omega = 0.8$



Rysunek 2: Zależność wychylenia od czasu dla $\beta = 0.4, F_0 = 0.0, \omega = 0.8$



Rysunek 3: Zależność wychylenia od czasu dla $\beta = 0.4, F_0 = 0.1, \omega = 0.8$

3 Wnioski

Metoda Jakobiego jest metodą do iteracyjnego rozwiązywania układów wielu równań. Polega na obliczaniu kolejnych przybliżeń za pomocą iteracyjnego wzoru. W zadaniu skorzystaliśmy z faktu, że nasza macierz była macierzą trójdiagonalną, przez co obliczenia zaoszczędziły zużycie pamięci. Z wygenerowanych wykresów możemy odczytać, że dla pierwszego przypadku drgania są rozłożone równomiernie, dla drugiego przypadku drgania zanikają w czasie, dla trzeciego przypadku początkowo następuje wygaszenie, a później amplituda drgań zwiększa się, natomiast nie wraca już do stanu początkowego. Wszystkie wykresy zgadzają się z teoretycznym opisem ruchu ciała drgającego na sprężynie z uwzględnieniem odpowiednio: tarcia lub siły wymuszjącej.