Sprawozdanie - laboratorium 7

Aproksymacja w bazie wielomianów Grama.

Karolina Kotłowska, 5 maj 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Aproksymacja

Aproksymacja liniowa funkcji $f(x)$ (aproksymowanej - przybliżanej) polega na wyznaczeniu współczynników $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ funkcji aproksymującej, takich że:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$$

gdzie $\varphi_i(x)$ są funkcjami bazowymi $(m+1)$ wymiarowej podprzestrzeni X_{m+1}. Zadamy, aby funkcja $F(x)$ spelniała warunek

$$\|f(x) - F(x)\| = \text{ minimum.}$$

Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od rodzaju problemu: 1. Podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą $-1, \sin(\mathrm{x}), \cos(\mathrm{x}), \ldots, \sin(\mathrm{kx}), \cos(\mathrm{kx})$ 2. Podprzestrzeń wielomianów stopnia mz bazą $-1, x, x^2, x^3, \ldots, x^m$ (lub wielomiany ortogonalne) 3. Podprzestrzeń zwiazana z własnościami rozważanego problemu, np.: $\exp\left(-ax^2 + bx + c\right)$

1.2 Aproksymacja średniokwadratowa w bazie wielomianów ortgonalnych

Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ nazywamy ortogonalnymi na dyskretnym zbiorze punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jeśli funkcje f i g spełniają warunki:

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{n} f\left(x_i\right) g\left(x_i\right) = 0, \\ \sum_{i=0}^{n} \left[f\left(x_i\right)\right]^2 > 0 \\ \sum_{i=0}^{n} \left[g\left(x_i\right)\right]^2 > 0\end{gathered}$$

W aproksymacji średniokwadratowej ciąg funkcyjny

$$\{\varphi_m(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$$

stanowi bazę ortogonalną dla węzłów aproksymacji $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jeśli narzucimy dwa warunki:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j\left(x_i\right) \varphi_k\left(x_i\right) = 0, \quad j \neq k$$

oraz nie wszystkie węzly są zerami tych wielomianów

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2\left(x_i\right) > 0.$$

Wówczas macierz układu normalnego przy aproksymacji wielomianami ortogonalnymi jest macierz diagonalną. Macierz ukladu jest dobrze uwarunkowana więc układ posiada jedno rozwiązanie. W celu znalezienia wektorów ortogonalnych na siatce zakladamy, ze węzly są równoodlegle

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

i wykonujemy przekształcenie

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad x_i \to q_i.$$

Naszym zadaniem jest znalezienie ciągu wielomianów

$$\left\{F_i^{(n)}(q)\right\} = F_0^{(n)}(q), F_1^{(n)}(q), \ldots, F_m^{(n)}(q)$$

postaci

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q(q-1) + \cdots + a_k q(q-1)\cdots(q-k+1)$$

spelniające warunek ortogonalności

$$\sum_{i=0}^{n} F_j^{(n)}(i) F_k^{(n)}(i) = 0 \Longleftrightarrow j \neq k$$

Korzystamy z postaci wielomianu czynnikowego

$$q^{[k]} = q(q-1)\cdots(q-k+1),$$
$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q^{[1]} + a_2 q^{[2]} + \cdots + a_k q^{[k]}$$

dodatkowo normujemy wielomiany do 1 tzn. mają one postać

$$\hat{F}_k^{(n)}(0) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = 1 + b_1 q^{(1]} + b_2 q^{[2)} + \cdots + b_k q^{[k]}.$$

Szukane wielomiany ortogonalne są wielomianami Grama

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[n]}} .$$

Mając zdefiniowaną bazę, można znaleźć funkcję aproksymującą $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \hat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{i=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \hat{F}_k^{(n)}\left(\frac{x-x_0}{h}\right), \quad m \leqslant n \tag{1}$$

$$c_k = \textstyle\sum_{i=0}^{n} y_i F_k^{(n)}(x_i)$$
$$s_k = \textstyle\sum_{i=0}^{n} \left[F_k^{(n)}(q)\right]^2$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadaniem byto wykonanie aproksymacji funkcji

$$f_{\text{szum}} = f(x) + C_{\text{rand}}(x)$$

przy użyciu wielomianów Grama w przedziale $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ na siatce równoodleglych węzłów, gdzie funkcja $f(x)$ jest zdefiniowana nastepująco:

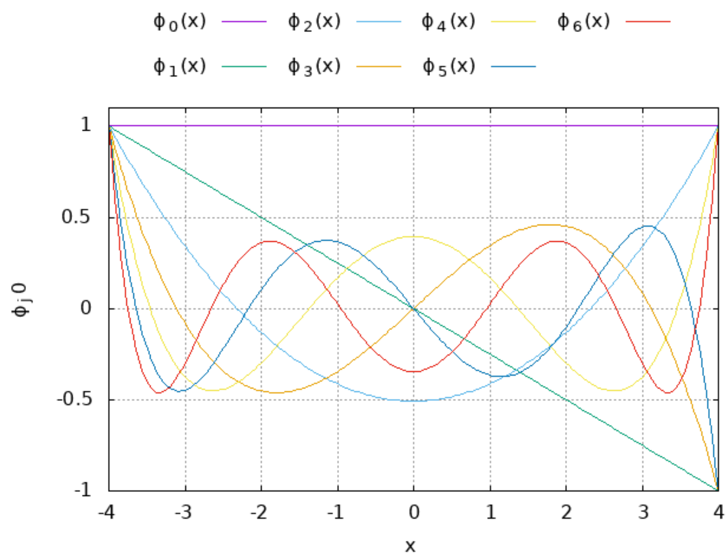
$$f(x) = \sin\left(\frac{14\pi x}{x_{\max} - x_{\min}}\right)\left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}\right)\right)$$

a C_{rand} jest niewielkim zaburzeniem stochastycznym zdefiniowanym jako:

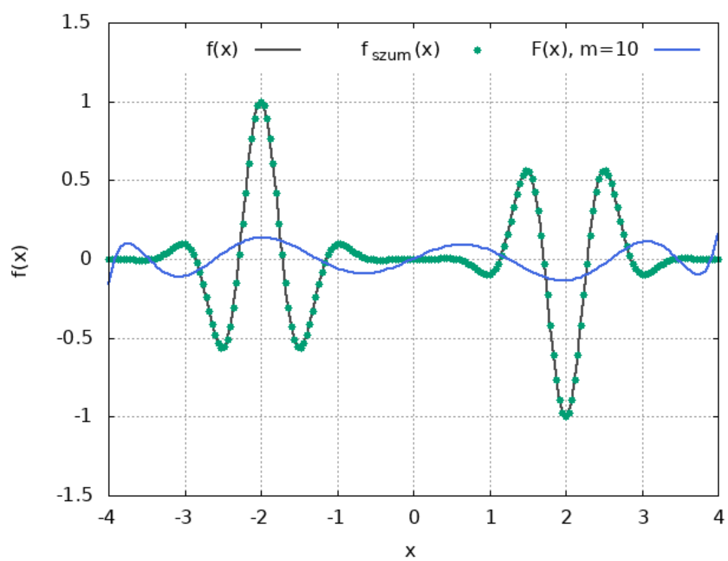
$$C_{\text{rand}} = \frac{Y - 0.5}{5}$$

gdzie $Y \in [0,1]$ jest liczbą pseudolosową o rozkładzie równomiernym. Przyjęto liczbę węzłów równą 201. Aproksymację funkcji przeprowadzono kolejno dla $m = 10, 30, 50$ wielomianów. Przyjęto wage $w(x) = 1.0$. Funkcję aproksymującą porównano na wykresach z funkcją aproksymowaną oraz bez szumu. W celu porównania wyników wykonano równiez aproksymacje funkcji $f(x)$ bez szumu.

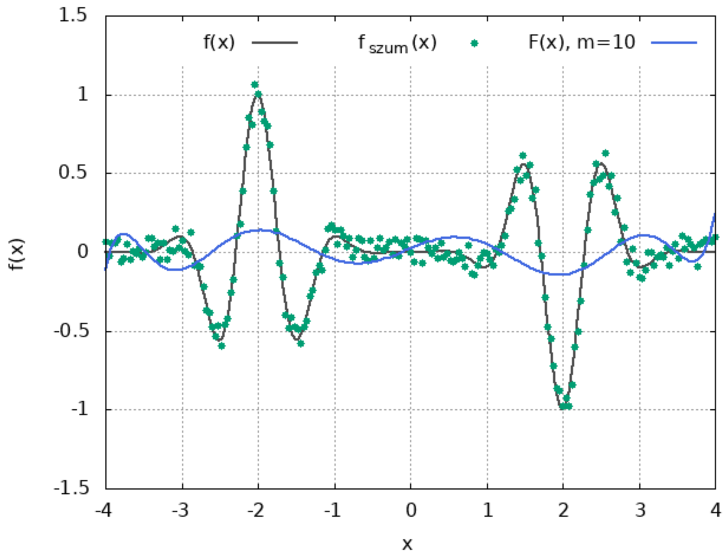
3 Wyniki



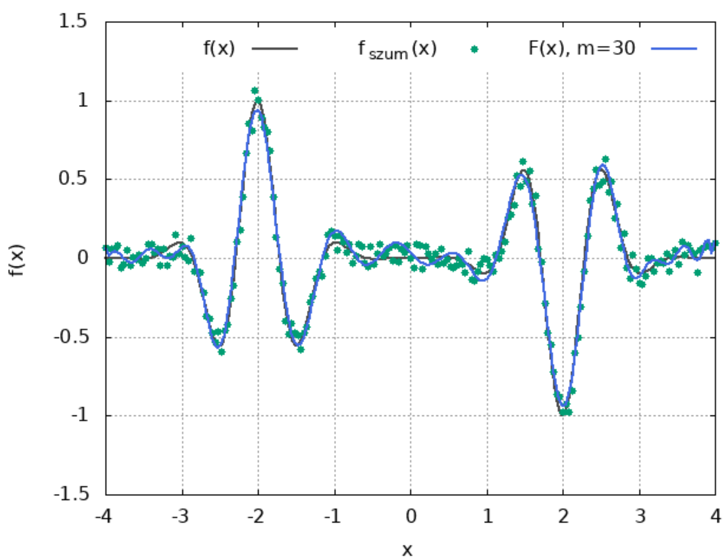
Rysunek 1: Siedem pierwszych wielomianów Grama w przedziale [4, 4]



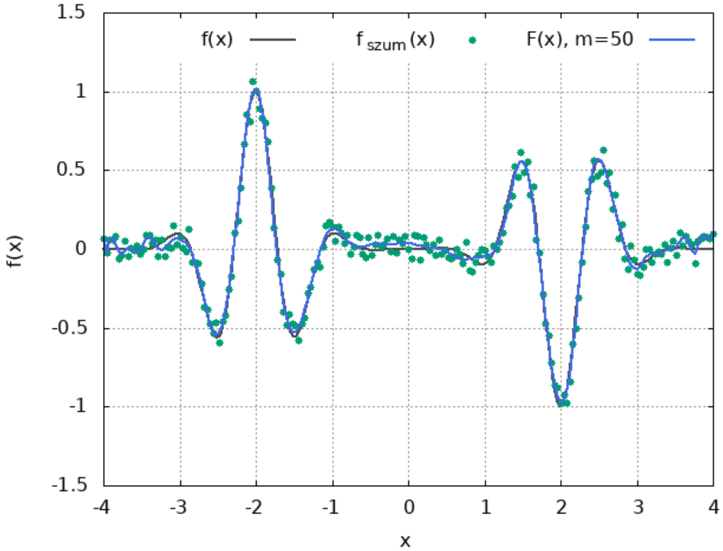
Rysunek 2: m=10



Rysunek 3: m=10

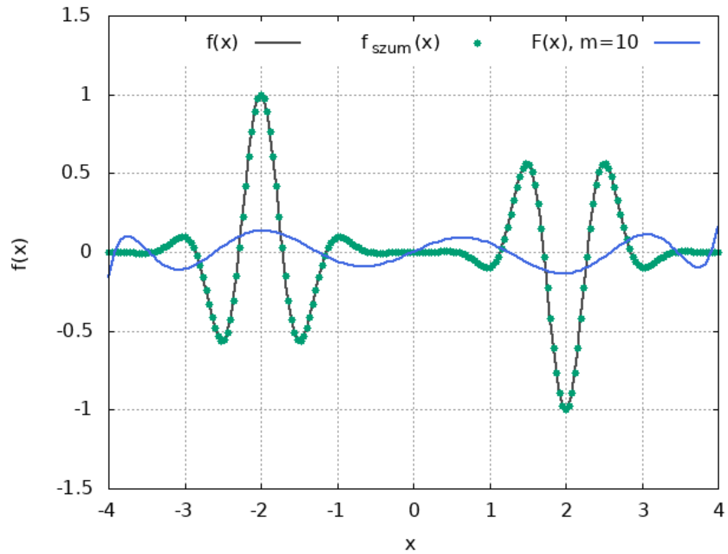


Rysunek 4: m=30

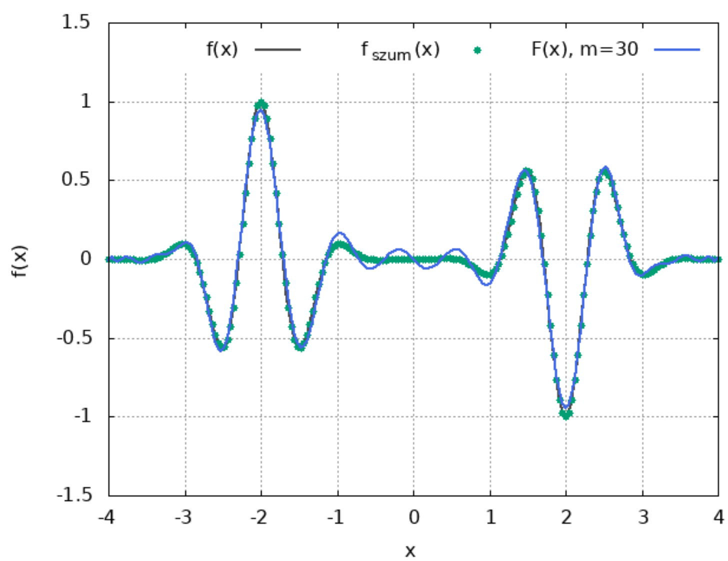


Rysunek 5: m=50

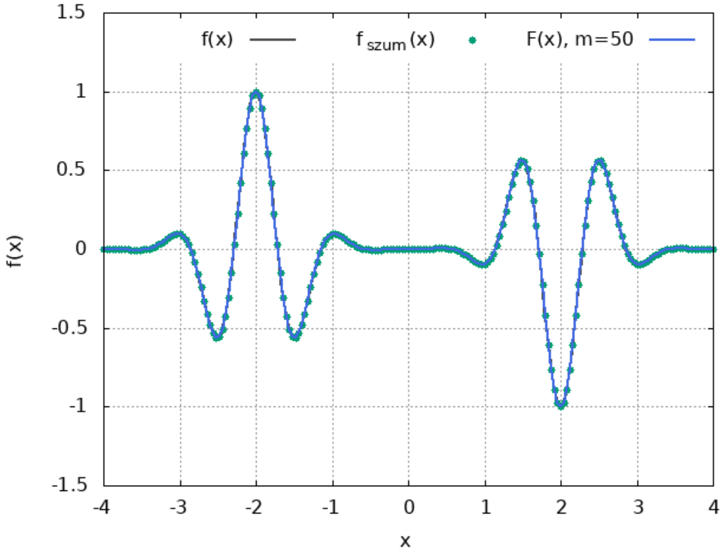
Powyżej przedstawiono wyniki aproksymacji funkcji zaszumionej dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama. Dla m=30 otrzymane wyniki są zbliżone do funkcji oryginalnej, natomiast w niektorych miejscach występują dosyć duże oscylacje. Dla m=50 wykres wyraźnie przypomina wykres oryginalnej funkcji oraz oscylacje uległy zmniejszeniu. Oscylacje, które pozostały są spowodowane dodanym szumem.



Rysunek 6: m=10



Rysunek 7: m=30



Rysunek 8: m=50

Powyżej przedstawiono wyniki aproksymacji funkcji niezaszumionej dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama. Wykresy są wyraźnie wygładzone. Dla m=10 widzimy duże oscylacje. Dla m=30, oscylacje nadal są zauważalne, natomiast dla m=50, nasze wyniki, wyraźnie pokrywają się z oryginalną funkcją. Ostatni obrazek świadczy o poprawności przeprowadzonej aproksymacji. Wraz ze zwiększeniem liczby wielomianów, oscylacje się zmniejszają.

4 Wnioski

Metoda aproksymacji w bazie Grama pozwala uzyskać funkcję zbliżoną do funkcji oryginalnej pomimo występowania szumu. Efekt idealnego dopasowania uzykać można dopiero po zlikwidowaniu zaszumienia. Zwiększając liczbę wielomianów, uzyskano dokładniejsze wyniki - co oznacza, że ilość wielomianów wpływa na dokładność aproksymacji.