Sprawozdanie - laboratorium 7

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Karolina Kotłowska, 21 kwiecień 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja

Interpolacja jest to metoda numeryczna, która polega na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji in- terpolacyjnej f, która przyjmuje z góry zadane wartości, w ustalonych punktacji zwanych węzłami. W prze- dziale [a, b] danych jest n + 1 różnych punktów $x_0, x_1, ..., x_n$ (węzły) oraz wartości funkcji w tych punktach: $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, ..., f(x_n) = y_n$. Interpolacje najczęściej przeprowadza się korzystając z wielomianów algebraicznych, wielomianów trygonometrycznych lub funkcji sklejanych. Interpolacja wykorzystywana jest do zagęszczania tablic i efektywniejszego rozwiązywania równań nieli- niowych dla stablicowanych wartości funkcji z określonymi położeniami węzłów, w postaci wielomianowej do lokalnego przybliżania dowolnych funkcji, co ułatwia rozwiązywanie modeli fizycznych, a także do całkowania numerycznego i modelowania powierzchni w dwóch i trzech wymiarach.

1.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi

W przedziale $[a, b]$ mamy $n + 1$ punktów takich, że:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Punkty te określają podziat przedziatu [a, b] na n podprzedziałów tj. $[x_i, x_{i+1}]$. Funkcję $s(x)$ określoną na przedziale [a, b] nazywamy funkcją sklejaną stopnia $m()m1$) jeżeli: 1. $s(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m na każdym podprzedziale (x_i, x_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, n-1$ 2. $s(x) \in C^m$. Punkty x_j nazywamy węzłami funkcji sklejanej. Funkcja $s(x)$ występuje więc w postaci wielomianu, który można przedstawić wzorem:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \cdots + c_{i1}x + c_{i0}, \quad x \in (x_i; x_{x+1}) \tag{2}$$

Funkcja interpolująca jest kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(\text{x})\}$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x) \quad x \in [a, b] \tag{3}$$

1.3 Funkcje sklejane 3 stopnia

Funkcję $s(x)$ nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną stopnia trzeciego dla funkcji $f(x)$, jeżeli:

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n \quad \text{ dla } n2$$

Do określenia funkcji $s(x)$ stopnia trzeciego konieczne jest wyznaczenie $n+3$ parametrów. Poniewalość węzłów jest równa $n+1$ pozostają dwa stopnie swobody. Należy zatem nałożyć dwa dodatkowe warunki, których rodzaj zależy od funkcji $f(x)$ lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału [a, b]. Warunki są następujące:

$$\begin{aligned}
&\text{1 rodzaj (1 pochodna)} - s^{(1)}(a+0) = \alpha_1 \quad s^{(1)}(a+0) = \beta_1, \\
&\text{2 rodzaj (2 pochodna)} - s^{(2)}(a+0) = \alpha_2 \quad s^{(2)}(b-0) = \beta_2, \\
&\text{3 rodzaj (okresowe)} \ - s^{(i)}(a+0) = s^{(i)}(b-0) \quad i = 1, 2
\end{aligned}$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia są najczęściej stosowane

1.4 Interpolacja funkcjami skelanymi poprzez wyzanczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

Oznaczmy $m_j = s^(2)(x_j), j = 0, 1, 2, \cdots, n$. Zgodnie z założeniem druga pochodna funkcji s(x) jest ciągła i liniowa w każdym z podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$, więc możemy całkować nasze wyrażenie dwukrotnie. W wyniku dostajemy nastepujące wyrażenie:

$$s_{i-1} = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$$

Stałe A_iiB_i, można obliczyć korzystając z warunku interpolacji i mają one nastepującą postać:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1})$$
$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_1^2}{6}$$

Teraz problem sprowadza sie do znalezienie m_iim_{i-1}. Aby go rozwiązć, należy rozwiązać układ rownań liniowych:

$$\mathrm{A}\vec{m} = \vec{d}$$

Którego generatorem jest:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i \ (5)$$

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$
$$\mu_i = 1 - \lambda_i$$

Wektor wyrazów wolnych inicjalizowany jest w nastepujący sposób:

$$d_i = \frac{6}{h_1 + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$$

Odleglość międzywęzłowa określa h_i

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

Należy okreslić jeszcze warunki brzegowe:

$$m_0 = \alpha, \quad m_n = \beta$$

Po wprowadzeniu powyzszych warunków uklad (4) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ \beta \end{bmatrix}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadaniem w trakcie laboratoriów było stworzenie programu, który będzie przeprowadzał interpolację funkcjami sklejanymi, korzystający z interpolacji funkcjami sklejanymi poprzez wyznazcenie wartości drugich pochodnych. Zadaniem było napisanie dwóch kluczowych funkcji:

- wyznacz M(double *xw, double *yw, double *m, int n, double alfa, double beta) - funkcja wyznaczjąca wartości drugich pochodnych w węzłach. Argumentami funkcji miały być: wektor węzłów xw, wektor z wartościami funkcji w węzłach yw, liczba węzłów n, wektor do którego funkcja miała zapisać wartości drugich pochodnych m, wartości drugich pochodnych w skrajnych węzłach alfa i beta. W tym celu należało rozwiązać układ równań, by otrzymać jako rozwiązanie wektor drugich pochodnych, korzystając z dowolnej metody, która to umożliwia - dla swojego programu wybrałam do tego procedurę realizującą transformację Householdera.

- wyznacz Sx(double *xw, double *yw, double *m, int n, double x) - funkcja służącą do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym. Pierwsze cztery argumenty są takie same jak wyżej, a argument x to aktualna wartość argumentu.

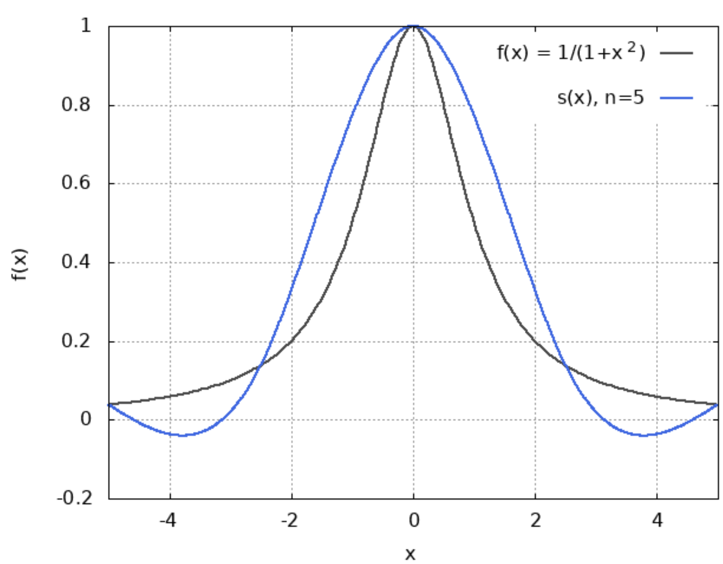
Zadanie zreazlizowaliśmy na dwóch funkcjach: $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oraz $f_2(x) = cos(2x)$.

Ostatnim zadaniem było wyznaczenie wartości drugich pochodnych dla funkcji $f_1(x)$ i porównanie je z wartościami wyliczonymi ze wzoru:

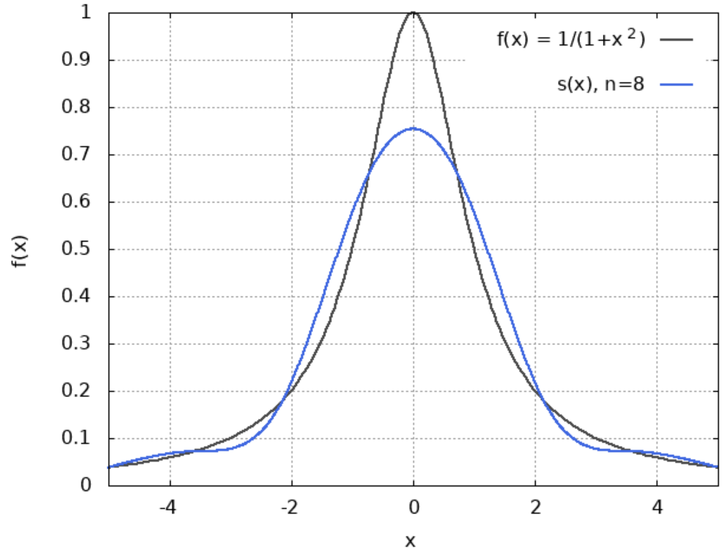
$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\delta x) - 2f(x) + f(x+\delta x)}{(\delta x)^2}, \tag{4}$$

dla przyjętego $\delta x = 0.01$. Dla obliczonych wartości wykonaliśmy wykres, w zależności od położenia węzłów.

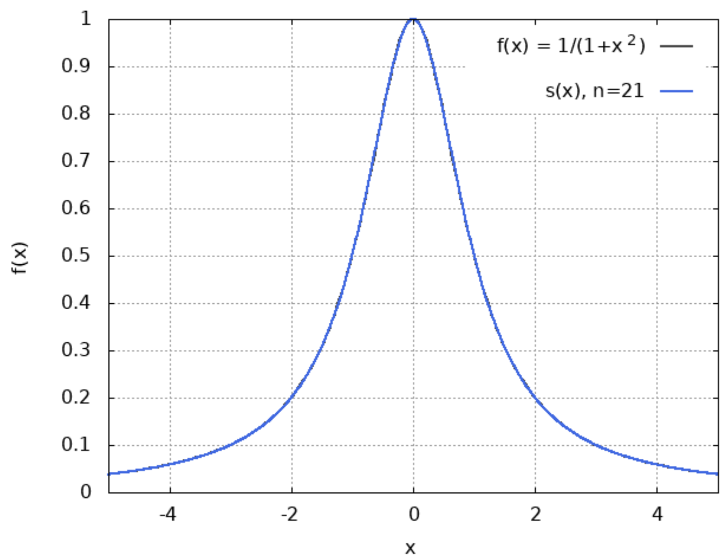
3 Wyniki



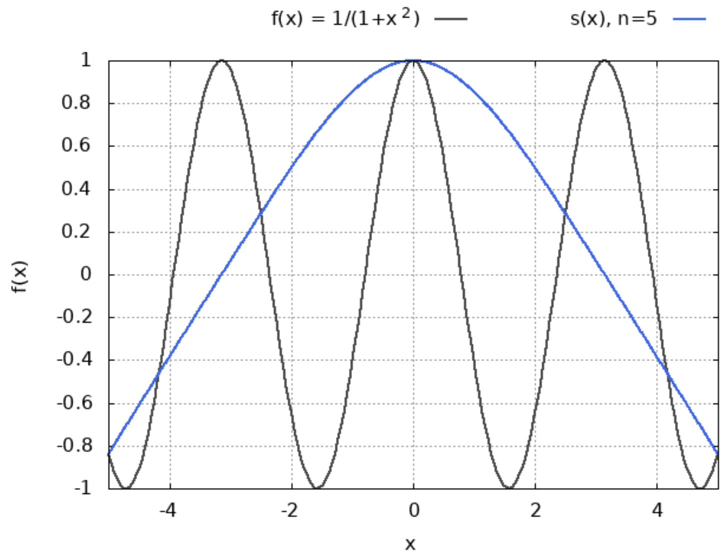
Rysunek 1: Wyniki interpolacji funkcji f1(x) = 1 1+x2 kubicznymi funkcjami sklejanymi dla 5 węzłów.



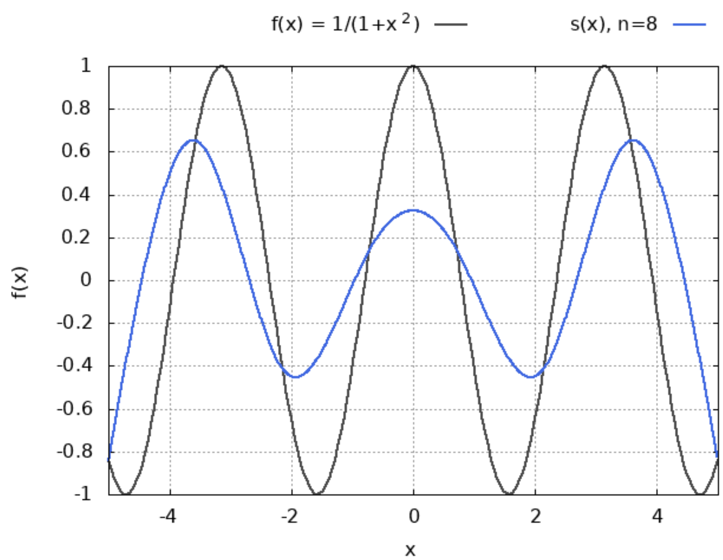
Rysunek 2: Wyniki interpolacji funkcji f1(x) = 1 1+x2 kubicznymi funkcjami sklejanymi dla 8 węzłów



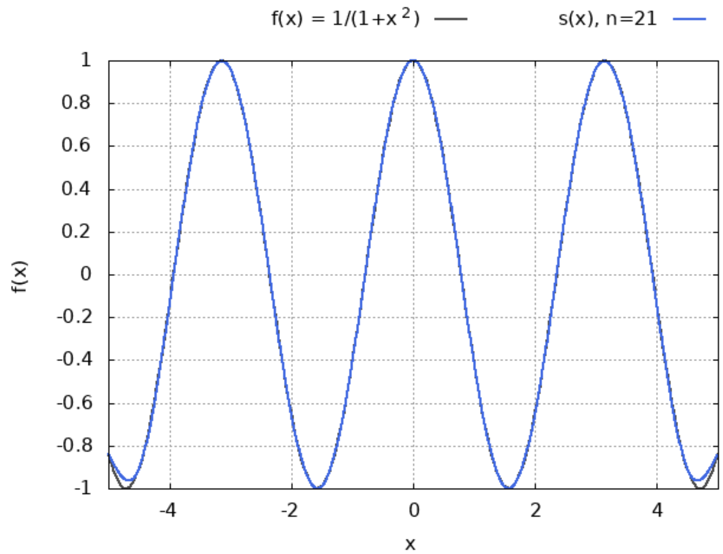
Rysunek 3: Wyniki interpolacji funkcji f1(x) = 1 1+x2 kubicznymi funkcjami sklejanymi dla 21 węzłów



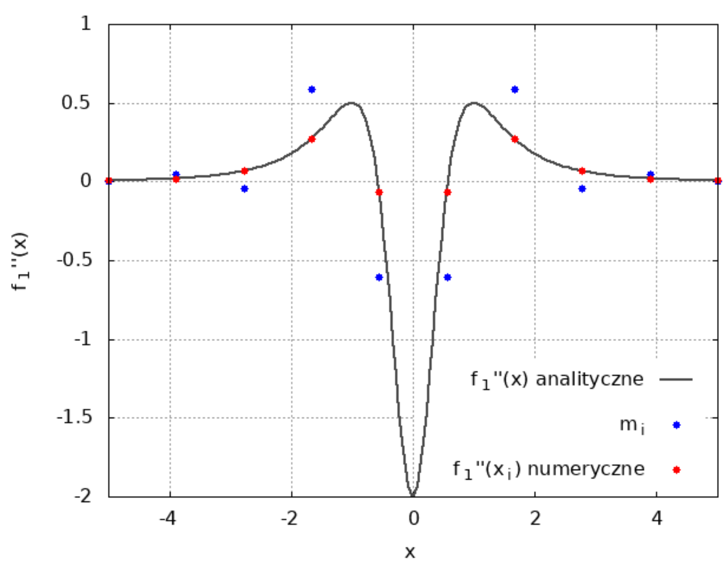
Rysunek 4: Wyniki interpolacji funkcji f2(x) = cos(2x) kubicznymi funkcjami sklejanymi dla 5 węzłów.



Rysunek 5: Wyniki interpolacji funkcji f2(x) = cos(2x) kubicznymi funkcjami sklejanymi dla 8 węzłów.



Rysunek 6: Wyniki interpolacji funkcji f2(x) = cos(2x) kubicznymi funkcjami sklejanymi dla 21 węzłów.



Rysunek 7: Wartości drugich pochodnych wyznaczone algorytmem interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n = 10 węzłów porównane z wartościami wynikającymi z ilorazu różnicowego oraz z pochodną wyprowadzoną analitycznie.

4 Wnioski

Metoda interpolacji funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartosci drugich pochodnych w węzłach jest szybką i łatwą do zaimplementowania metodą. Przy zwiększaniu się liczby węzłów, otrzymywaliśmy coraz dokładniejsze wyniki. Dla liczby węzłów równej 21, jakość interpolacji znacznie się polepszyła i nie zaobserwowaliśmy efektu Rungego. Wyznaczanie drugich pochodnych w węzłach za pomocą napisanej przez nas procedury jest jednak niedokładne i lepsze wyniki uzyskane zostały numerycznie.