Sprawozdanie - laboratorium 5

Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej metodą potęgową z redukcją Hotellinga

Karolina Kotłowska, 31 marzec 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Metoda potęgowa wyznaczania wartości i wektorów własnych macierzy

1.1.1 Wektor własny

Wektorem własnym macierzy $A_{[nxn]}$ nazywamy każdy niezerowy wektor V, który zachowuje kierunek po wykonaniu mnożenia przez tę macierz:

$$A \cdot V = \lambda \cdot V \tag{1}$$

Wielkość λ jest wartością własną macierzy A odpowiadającą wektorowi własnemu V.

1.1.2 Metoda potęgowa

Metoda potęgowa polega na wykonaniu ciągu mnożeń przyjętego wektora startowego przez macierz, której dominującej wartości własnej i odpowiadającego wektora własnego poszukujemy. Należy ona do metod iteracyjnych, gdzie w każdym kolejnym kroku iteracji obliczane jest dokłądniej każde rozwiązanie.

Załłóżmy że istnieje n liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy A, które stanowią bazę przestrzeni liniowej: $x_1, x_2 \cdots x_n$.
Wówczas dla dowolnego wektora v_0 zachodzi równość:

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i \tag{2}$$

Jeżeli λ_i stanowią wartości własne macierzy, to:

$$\begin{gathered} \mathbf{A}\mathbf{v}_0 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \mathbf{x}_i \\ \mathbf{v}_m = \mathbf{A}^m \mathbf{v}_0 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^m \mathbf{x}_i \end{gathered} \tag{3}$$

gdzie zakładamy, że wartości własne tworzą ciąg: $\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n\ |$. Jeśli λ_1 jest wartością dominującą oraz v_0 ma składową w kierunku x_1 wówczas zachodzi:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\mathbf{A}^m \mathbf{v}_0}{\lambda_1^m} = a_1 \mathbf{x}_1 \tag{4}$$

Z czego można obliczyć wartość własną, korzystając rónoczesnie z równania (3). Ma to sens dla dowolnego wektora y, który jest nieortogonalny względem x_1

$$\lambda_1 = \lim_{m \to \infty} \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{v}_{m+1}}{\mathbf{y}^T \mathbf{v}_m} \tag{5}$$

W celu wyznaczenia wektora własnego korzystamy z przybliżenia:

$$\boldsymbol{v}_m \approx \lambda_1^m a_1 \boldsymbol{x}_1 \tag{6}$$

Więc, aby wyznaczyć wektor własny $\boldsymbol{x_1}$, liczymy unormowany wektor własny:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{v_m}}{|\boldsymbol{v_m}|} \tag{7}$$

1.2 Redukcja Hottelinga

Za wektor v przyjmujemy lewy wektor własny przynależny do wartości własnej λ_1. Ale na ogół nie znamy lewych wektorów.

Metoda jest więc skutecza tylko w przypadku macierzy symetrycznych, wtedy lewe wektory są identyczne z prawymi

$$\begin{gathered}\mathbf{v}^T\mathbf{x}_1 = 1\\ \mathbf{W}_1 = \mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{v}^T\end{gathered} \tag{8}$$

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^T \tag{9}$$

lub rekurencyjnie:

$$\begin{gathered}\mathbf{W}_0 = \mathbf{A}\\ \mathbf{W}_i = \mathbf{W}_{i-1} - \lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}^T\\ i = 1, 2, \cdots, n-1\end{gathered} \tag{10}$$

Algorytm przeprowadzający iteracyjne wyznaczenie wartości własnych przy użyciu metody potęgowej z redukcją Hotellinga wygląda następująco:

$$\begin{gathered}W_0 = A\\ for\,(k=0; k<K_{val}; k++)\,\{\\ \mathrm{x}_k^0 = [1, 1, \cdots, 1]\\ \text{for }\;(i=1; i <= IT\_MAX; i++)\,\{\\ \mathbf{x}_k^{i+1} = W_k\mathbf{x}_k^i\\ \lambda_k^i = \frac{\left(\mathbf{x}_k^{i+1}\right)^T\mathbf{x}_k^i}{\left(\mathbf{x}_k^i\right)^T\mathbf{x}_k^i}\\ \mathbf{x}_k^i = \frac{x_k^{2+1}}{\left\|\mathbf{x}_k^{i+1}\right\|_2}\}\\ W_{k+1} = W_k - \lambda_k\mathbf{x}_k^i\left(\mathbf{x}_k^i\right)^T\}\end{gathered} \tag{11}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadaniem podczas laboratorium było wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej metodą potęgową z redukcją Hotellinga dwoma sposobami. Najpierw zainicjalizowaliśmy macierz wejściową A o rozmiarze 7x7.

$$A_{ij} = \sqrt{i+j} \tag{12}$$

Zainicjalizowana macierz wyglądała następująco:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.41421 & 1.73205 & 2 & 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843\\ 1.73205 & 2 & 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3\\ 2 & 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228\\ 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662\\ 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 & 3.4641\\ 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 & 3.4641 & 3.60555\\ 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 & 3.4641 & 3.60555 & 3.74166 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Następnie za pomocą znanych już z poprzednich laboratoriów procedur pochodzących z biblioteki Numerical Recipes: tred2 oraz tqli wyznaczyliśmy wartości własne. Wyniki wpisaliśmy do pliku.

Kolejnym krokiem było zaimplementowanie metody potęgowej wyznaczania wartości własnych. Użyliśmy do tego algorytmu z równania (11). W kolejnych krokach iteracyjnych wpisywaliśmy odpowiednio wektory własne do pliku.

3 Wyniki

Wyniki otrzymane z procedur tred2 oraz tqli pokrywały się z wartościami z treści zadania. Natomiast wykonując iteracyjnie zadanie, otrzymaliśmy poniższe wartości własne macierzy A:
λ_2=19.7862
λ_3=-0.712341
λ_4=-0.0133172
λ_5=-0.000335581
λ_6=-6.55765e-06
λ_7=8.71798e-07
λ_8=-5.77264e-08

Wyniki z treści zadania:
$\lambda_2 = 19.7862$
$\lambda_3 = -0.71234$
$\lambda_4 = -0.0133172$
$\lambda_5 = -0.000335307$
$\lambda_6 = -6.60271e - 06$
$\lambda_7 = 8.49657e - 07$
$\lambda_8 = -2.38169e - 07$

Otrzymane wyniki nieznacznie różniły się od wartości podanych w treści zadania, jednak prowadzący uznał, że mogą to być błędy zaokrągleń, gdyż obliczenia są wykonywane na bardzo małych liczbach. Rónież sama metoda nie gwarantuje nam 100 % dokładności - każda kolejność własna jest wyznaczana już mniej dokładnie.

W kolejnych iteracjach otrzymaliśmy wektory własne:
wektor wlasny 1: 0.000316437 0.00944702 -0.118174 0.434087 -0.703662 0.528799 -0.150814
wektor wlasny 2: 0.018107 -0.179062 0.554902 -0.605123 -0.0525201 0.489622 -0.2259
wektor wlasny 3: 0.0861851 -0.458569 0.558077 0.213581 -0.353813 -0.409538 0.36375
wektor wlasny 4: -0.280883 0.647489 0.0788781 -0.353559 -0.40785 -0.122144 0.435172
wektor wlasny 5: 0.591856 -0.257656 -0.44991 -0.362881 -0.143694 0.140693 0.45692
wektor wlasny 6: -0.688672 -0.406036 -0.181407 0.0069974 0.170418 0.315487 0.446468
wektor wlasny 7: 0.297971 0.327213 0.353722 0.378209 0.401105 0.422698 0.443198

Pomijając w kodzie linijkę odpowiadającą za normowanie wektora w każdej iteracji, otrzymujemy trochę inne wyniki, natomiast wektory własne pozostały bez zmian.
$\lambda_2 = 19.7862$
$\lambda_3 = -0.712341$
$\lambda_4 = -0.0133178$
$\lambda_5 = -0.00033598$
$\lambda_6 = -7.10793e - 06$
$\lambda_7 = 4.43579e - 07$
$\lambda_8 = -4.02198e - 07$

Można zauważyć, że wyniki zaczynają się 'psuć' już w drugiej iteracji. Normalizacja wektora zapewnia nam zachowanie kierunku oraz zapobiega dominacji na dany kierunek. Przy braku normalizacji dlugość wektora w kolejnych krokach rosłaby do nieskończoności (jeżli wartość wektora startowego byłby wieksza do jedności) lub malała do zera (w przeciwnym przypadku). Brak normalizacji nie gwarantuje poprawności wyników.

4 Wnioski

Metoda potęgowa jest prosta i skuteczna, natomiast nie jest ani najszybsza, ani najpopularniejsza. Gdy potrzebujemy znaleźć tylko jedną dominującą wartość własną oraz wektor do niej przynależny jest wtedy często używana. Inne zastosowanie ma w algorytmie PageRank, wspomagającym tworzenie rankingu stron internetowych, wymyślonym przez twórców wyszukiwarki Google.

Metoda z redukcją Hotellinga pozwala na wyznaczenie wartości oraz wektorów własnych tylko dla macierzy symetrycznych. Dokładność obliczeń zależy od liczby iteracji. Dla większych powtórzeń uzyskamy dokładniejsze wyniki. Same wyniki nie gwarantują 100 % skuteczności, gdyż w metodzie z redukcją Hotellinga każda wyznaczana wartosć jest wyznaczana mniej dokładnie. Błędy mogą również wynikać z niedokładności zaokrągleń kompilatora.