Sprawozdanie - laboratorium 6

Poszukiwanie zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia (metoda Newtona)

Karolina Kotłowska, 14 kwiecień 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Wznaczanie zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia

Przyjmijmy, że szukamy pierwiastków rzeczywistych równania f(x)=0, gdzie f(x) jest funkcją nieliniową. Korzystamy przy tym z metod iteracyjnych czyli poprawiania kolejnych przybliżeń pierwiastków.

Funkcję f(x) można zapisać w postaci:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

Pzy podzieleniu przez dwumian otrzymujemy:

$$f(x) = (x - x_j)\left(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_0\right) + R_j \tag{2}$$

Współczynniki nowego wielomianu $\left(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_0\right)$ wyznaczamy rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ b_k &= a_{k+1} + x_j b_{k+1}, k = n-1, n-2, \ldots, 0 \\ R_j &= a_0 + x_j b_0 \end{aligned}$$

Po wykonaniu kolejnego dzielenia otrzymujemy:

$$f(x) = (x - x_j)^2 \left(c_{n-2} x^{n-2} + c_{n-3} x^{n-3} + \ldots + c_0\right) + R_j' (x - x_j) + R_j$$

Zera wielomianu możemy wyznaczyć iteracyjnie stosując zmodyfikowane wzory jednokrokowe. W naszym przypadku skorzystamy z metody Newtona, która jest opisana poniżej.

1.2 Metoda Newtona

Metoda Newtona jest to algorytm iteracyjny wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji.

Założenia, którę musi spełniać funkcja są nastepujące:

- funkcja f oraz jej pierwsza i druga pochodna są ciągłe w badanym przedziale [a, b]
- wewnątrz [a, b] znajduje się dokładnie jeden pierwiastek
- f(a)*f(b) < 0
- pierwsza i druga pochodna mają stały znak w badanym przedziale [a ,b]

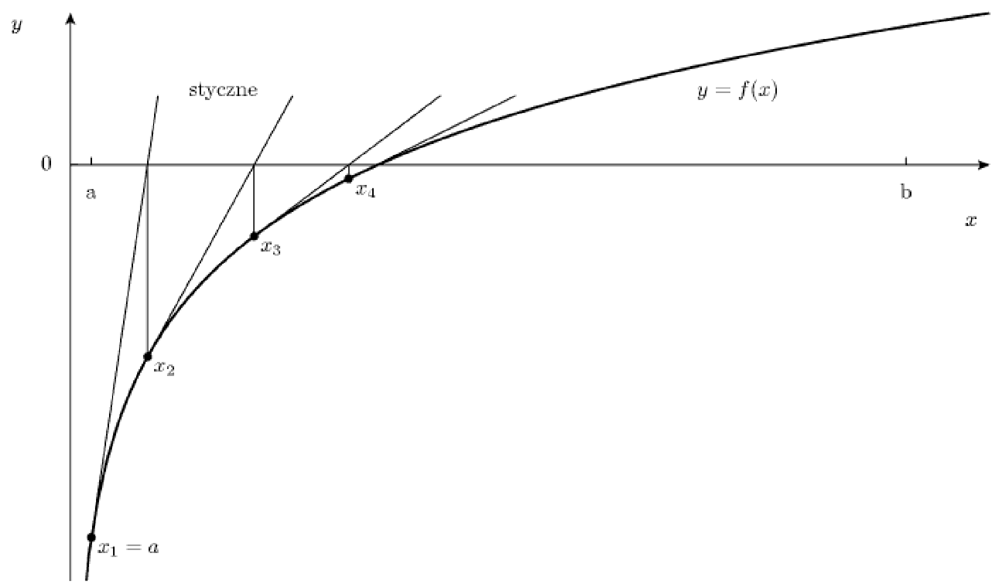
Działanie metody przebiega w krokach zaprezentowanych niżej:

1. Z końca przedziału [a,b] w którym funkcja ma ten sam znak co druga pochodna należy poprowadzić styczną do wykresu funkcji y=f(x)

2. Styczna przecina oś 0X w punkcie x1 który stanowi pierwsze przybliżenie rozwiązania
3. sprawdzamy czy f(x1)=0, jeśli nie to z tego punktu prowadzimy kolejną styczną
4. Druga styczna przecina oś 0X w punkcie x2 który stanowi drugie przybliżenie
5. Kroki 3-4 powtarzamy iteracyjne aż spełniony będzie warunek $|x_{k+1} - x_k| \leqslant \epsilon$

Kolejne przybiżenia wyznaczane są ze wzoru:

$$x_{i+1} = x_j - \frac{R_j}{R'_j} \tag{3}$$



Rysunek 1: Ilustracja działania metody Newtona. Źródło: $https://pl.wikipedia.org/wiki/MetodaNewtona$

1.2.1 Oszacowanie błędu

Niech pierwsza (f') i druga (f'') pochodna funkcji f będzie ciągła oraz wartość pierwszej pochodnej $f'(\alpha) \neq 0$, gdzie α jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, tzn. $f(\alpha) = 0$. Można wykazać, że błąd metody Newtona wynosi

$$\alpha - x_n \approx x_{n+1} - x_n$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Celem zadania było wyznaczenie zer wielomianu: f(x)=$x^5 + 14x^4 + 33x^3 - 92x^2 - 196x + 240$. Najpierw określiliśmy stopień wielomianu, oraz utworzyliśmy tablice przechowujące współczynniki wielomianu. Skorzystaliśmy z algorytmu podanego w treści zadania, który uzupełniliśmy o funkcję wyznaczającą wartość przybliżenia oraz reszty z dzielenia. Przyjęliśmy pewne wartości startowe $x_0 = 0$ oraz ustaliliśmy ilość iteracji $IT_{MAX} = 30$. Do pliku wpisywaliśmy kolejno: numer zera, numer iteracji, wartość przybliżenia x_j oraz wartość reszty z dzielenia R_j i R'_j.

3 Wyniki

Do pliku wpisaliśmy kolejno: kolejno: L (numer miejsca zerowego), it (numer iteracji), x_{it} (wartość przybliżenia) oraz wartość reszty z dzielenia R_j (resztę z dzielenia wielomianu w danej iteracji)i R'_j (resztę z powtórnego dzielenia wielomianu w danej iteracji.)

L	it	x_{it}	R_{it}	R'_{it}
1	1	1.22449	240	−196
1	2	0.952919	−43.1289	−158.813
1	3	0.999111	10.5714	−228.86
1	4	1	0.195695	−220.179
1	5	1	7.96468e − 05	−220
1	6	1	1.32729e − 11	−220

Tabela 1: Pierwsze miejsce zerowe: $x = 1$

L	it	x_{it}	R_{it}	R'_{it}
2	1	−5.45455	−240	−44
2	2	−4.46352	−120.975	122.071
2	3	−4.10825	−24.2755	68.3304
2	4	−4.00957	−4.31754	43.7539
2	5	−4.00009	−0.347977	36.6891
2	6	−4	−0.00323665	36
2	7	−4	−2.90891e − 07	36

Tabela 2: Drugie miejsce zerowe: $x = -4$

L	it	x_{it}	R_{it}	R'_{it}
3	1	15	−60	4
3	2	9.20218	5850	1009
3	3	5.53752	1687.53	460.488
3	4	3.38316	469.259	217.818
3	5	2.33534	118.159	112.767
3	6	2.0277	22.07	71.739
3	7	2.00021	1.67505	60.9441
3	8	2	0.0128842	60.0073
3	9	2	7.83733e − 07	60

Tabela 3: Trzecie miejsce zerowe: $x = 2$

L	it	x_{it}	R_{it}	R'_{it}
4	1	−2.30769	30	13
4	2	−2.94284	5.32544	8.38462
4	3	−2.99954	0.403409	7.11433
4	4	−3	0.00321531	7.00092
4	5	−3	2.10929e − 07	7

Tabela 4: Czwarte miejsce zerowe: $x = -3$

L	it	x_{it}	R_{it}	R'_{it}
5	1	−10	10	1
5	2	−10	0	1

Tabela 5: Piąte miejsce zerowe: x=-10

4 Wnioski

Korzystając z metody iterowanego dzielenia metodą Newtona udało się otrzymać wyniki zgodne z wartościami teoretycznymi. Metoda Newtona jest metodą o zbieżności kwadratowej (p=2). Oznacza to,że metoda ma bardzą bardzo szybką zbiezność. Wadą jest to, że we wzorze występuje pochodna, której obliczenie może być trudne dla niektórych funkcji. Jednakże metodę Newtona najczęściej stosuje się do wielomianów, których pochodne są bardzo proste i liczy się je algorytmicznie. Metoda pozwala ona znaleźć pierwiastki o parzystej i nieparzstej krotności. Kłopotem mogą być pierwiastki wielokrotne, dla których zbieżność algorytmu staje się liniowa. Dla takich przypadków metoda Newtona może być dużo wolniejsza od innych.