Sprawozdanie - laboratorium 7

Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona do całkowania przy użyciu wzorów Simpsona i Milne

Karolina Kotłowska, 26 maj 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Kwadratura

Kwadraturą nazywa się funkcjonał liniowy:

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i(f(x_i) \tag{1}$$

gdzie x_i to węzły kwadratury, a A_i współczynniki kwadratury
który oznacza skończoną sumę. Za pomocą kwadratur oblicza się numerycznie przybliżoną wartość całek oznaczonych:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \tag{2}$$

1.2 Metoda Simpsona

Metoda Simpsona oparta jest na przybliżeniu funkcji podcałkowej f(x) wielomianem stopnia drugiego. Jest to tzw. metoda parabol.

$$S = \sum_{i=0}^{(n/2)-1} \frac{h}{3}\left(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}\right) \tag{3}$$

1.3 Metoda Milne'a

Metoda Milne'a oparta jest na przybliżeniu funkcji podcałkowej f(x) wielomianem 4. stopnia.

$$S = \sum_{i=0}^{(n/4)-1} \frac{4h}{90}\left(7f_{4i} + 32f_{4i+1} + 12f_{4i+2} + 32f_{4i+3} + 7f_{4i+4}\right) \tag{4}$$

1.4 Ekstrapolacja Richardsona

Ekstrapolacja Richardsona jest procesem rekurencyjnego wyznaczania pewnej wielkości (pochodnej, całki), co można zdefiniować przy pomocy wzoru:

$$D_{n,k-1} = L + \sum_{j=k}^{\infty} A_{jk}\left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j} \tag{5}$$

Algorytm jest następujący:
1) wybierane jest h i liczone:

$$D_{n,0} = \phi\left(\frac{h}{2^n}\right), n = 0, 1, 2, \ldots, M, \tag{6}$$

gdzie M - ilość powtórzeń algorytmu h - szerokość podprzedziału
2) następnie obliczane jest:

$$D_{n,k} = \frac{4^k D_{n,k-1} - D_{n-1,k-1}}{4^k - 1} \tag{7}$$

Obliczając rekurencyjnie wyrazy wg podpunktu 2. otrzymuje się przybliżenia:

$$\begin{gathered} D_{n,0} = L + O\left(h^2\right) \\ D_{n,1} = L + O\left(h^4\right) \\ D_{n,2} = L + O\left(h^6\right) \\ D_{n,3} = L + O\left(h^8\right) \\ D_{n,k-1} = L + O\left(h^{2k}\right), h \to 0 \end{gathered} \tag{8}$$

gdzie L - kolejne przybliżenia funkcji

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Dana jest funkcja: $f(x) = ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1)sin(18x)$. Naszym zadaniem było obliczenie wartości całki I=$\int_0^1 f(x)\,dx$ dwoma metodami: metodą Simspona oraz Milne'a.

- dla metody Simpsona posługując sie krokiem $h_w = \frac{b-a}{2^{w+1}}$
- dla metody Milne'a posługując się krokiem $h_w = \frac{b-a}{2^{w+2}}$

gdzie h_w to szerokość podprzedziałów

3 Wyniki

Do wykonania zadania wykorzystano program napisany w języku C. Poniżej znajdują się wartości z tablicy wartości całek dla kolejnych kroków.

-0.0971410499								
0.4083851989	0.5768939485							
-0.2209681412	-0.4307525879	-0.4979290236						
-0.1880063997	-0.1770191525	-0.1601035901	-0.1547412817					
-0.1865747211	-0.1860974949	-0.1867027177	-0.1871249261	-0.1872519207				
-0.1864922827	-0.1864648033	-0.1864892905	-0.1864859028	-0.1864833968	-0.1864826455			
-0.1864872311	-0.1864855472	-0.1864869302	-0.1864868927	-0.1864868966	-0.1864869000	-0.1864869011		
-0.1864869169	-0.1864868122	-0.1864868965	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	
-0.1864868973	-0.1864868908	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960

Rysunek 1: Wyniki dla metody Simspona

0.4420869488								
-0.2629250305	-0.4979290236							
-0.1858089502	-0.1601035901	-0.1375818946						
-0.1864792758	-0.1867027177	-0.1884759929	-0.1892838357					
-0.1864867868	-0.1864892905	-0.1864750620	-0.1864433012	-0.1864321619				
-0.1864868943	-0.1864869302	-0.1864867728	-0.1864869587	-0.1864871299	-0.1864871836			
-0.1864868960	-0.1864868965	-0.1864868943	-0.1864868962	-0.1864868960	-0.1864868957	-0.1864868957		
-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	
-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960

Rysunek 2: Wyniki dla metody Milne'a

w	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$
0	-0.0971410499	-0.0971410499
1	0.4083851989	0.5768939485
2	-0.2209681412	-0.4979290236
3	-0.1880063997	-0.1547412817
4	-0.1865747211	-0.1872519207
5	-0.1864922827	-0.1864826455
6	-0.1864872311	-0.1864869011
7	-0.1864869169	-0.1864868960
8	-0.1864868973	-0.1864868960

Rysunek 3: Wyniki dla metody Simspona $D_{w,0}, D_{w,w}$

w	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$
0	0.4420869488	0.4420869488
1	-0.2629250305	-0.4979290236
2	-0.1858089502	-0.1375818946
3	-0.1864792758	-0.1892838357
4	-0.1864867868	-0.1864321619
5	-0.1864868943	-0.1864871836
6	-0.1864868960	-0.1864868957
7	-0.1864868960	-0.1864868960
8	-0.1864868960	-0.1864868960

Rysunek 4: Wyniki dla metody Milne'a $D_{w,0}, D_{w,w}$

Analizując elementy z pierwszych kolumn i elementy z diagonali, można zauważyć, że w metodzie Milne'a, szybiej uzyskujemy wartośc oczekiwaną (w szóstej iteracji), natomiast w metodzie Simpsona dopiero w siódmej iteracji.

W obu metodach otrzymaliśmy wynik oczekiwany - wartość całki wyniosła -0.186486896.

4 Wnioski

Korzystając z ekstrapolacji Richardsona przy pomocy wzorów Milne'a oraz Simpsona, udało się obliczyć wartość zadanej całki. Metodą Milne'a, uzyskalismy szybciej dobre przybliżenie.

Metoda Milne'a jest szybką i skuteczną metodą obliczenia wartości całki. Jej przewagą nad metodą Simpsona jest to, że daje szybciej wartość dobrego przybliżenia.