Sprawozdanie - laboratorium 2

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Karolina Kotłowska, 12 marzec 2021

1 Wstęp teoretyczny

Tematem laboratorium było zapoznanie się z rozkładem LU macierzy oraz wykonanie zadań dotyczących odwrócenia macierzy, obliczenia wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy.

1.1 Rozkład LU

Metoda LU jest to jedna z metod rozwiązywania układu równań liniowych. Polega na znalezieniu dwóch macierzy: L (macierz trójkątna dolna) i U (macierz trójkątna dolna). Taki rozkład pozwala w prosty sposób wyliczyć następujący układ:

$$A * \vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

A-macierz kwadratowa współczynników $\vec{x}$ - wektor niewiadomych $\vec{b}$ - wektor danych

Pierwszym etapem jest zapisanie macierzy A za pomocą macierzy L i U:

$$A = L * U \tag{2}$$

co dalej możemy przekształcić:

$$A * \vec{x} = L * U * \vec{x} = \vec{b}, U * \vec{x} = \vec{b} \tag{3}$$

co ostatecznie pozwala nam zapisać dwa równania, a rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania dwóch układów równań z macierzami trójkątnymi:

$$L * \vec{y} = \vec{b} \tag{4}$$

$$U * \vec{x} = \vec{b} \tag{5}$$

Jest to metoda bardziej optymalna gdyż zmniejsza ilość naszych obliczeń z $n^3/3$ (jak było to przy metodzie Gaussa-Jordana) do n^2

1.2 Wyznacznik macierzy

Korzystając z twierdzenia Cauchy'ego oraz z faktu, że wyznaczik macierzy trójkątnej jest iloczynem jego składników na przekątnej, zapisujemy, że można go obliczyć za pomocą wzoru:

$$det(A) = det(LU) = det(L) * det(U) \tag{6}$$

1.3 Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Pojęcie numerycznego uwarunkowania zadania określa wrażliwość wyniku na zaburzenia danych. Zaburzenia określa się poprzez wskaźnik uwarunkowania macierzy który mówi o tym, w jakim stopniu błąd reprezentacji numerycznej danych wejściowych danego problemu wpływa na błąd wyniku. Oblicz się go stosując poniższy wzór:

$$A_{1,\infty} = max_{1i,j \leqslant n}|a_i, a_j| \tag{7}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Naszym zadaniem było wykonanie różnych operacji na macierzy. W zadaniu pracowaliśmy na macierzy A o wymiarze 4x4, wypełnionej elementami otrzymanymi z równania:

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j + \delta} \tag{8}$$

δ =0 (warunek początkowy)
Pierwszym zadaniem było znalezienie rozkładu LU macierzy A korzystając z funkcji: ludcmp, która dokonuje rozkładu LU na danej macierzy. Ta operacja nadpisała macierz A, macierzą LU. Dlatego rozdzieliliśmy te dwie macierze na dwie trójkątne. Przyjęliśmy, że na diagonali macierzy L znajdują się same jedynki.Kolejnym etapem było obliczenie wyznacznika macierzy A. Korzystając z poprzednich oblizceń, wymnożyliśmy ze sobą elementy leżące na diagonali macierzy LU.
Następnym etapem było znalezienie macierzy odwrotnej A^{-1} Utworzone zostały wektory wyrazów wolnych, które następnie zostały użyte do rozwiązania 4 układów równań co pozwoliło na znalezienie macierzy odwrotnej. Następnie te wyniki zostały wpisane do macierzy wynikowej Do rozwiązywania układów równań wykorzystaliśmy funkcję lubksb.
Mając macierz odwrotną można było obliczyć iloczyn A*A^{-1} Utworzyliśmy 3 pętle, które pomnożyły obie macierze i zwróciły wynik.
Końcowym etapem było obliczenie wskaźnika uwarunkowania macierzy. W prosty sposób możliwe było znalezienie maximum z macierzy A oraz A^{-1}, a następnie pomnożenie tych dwóch składników.

2.2 Wyniki

Macierz A wypełniona:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.333 & 0.25 & 0.2 & 0.16667 \\ 0.25 & 0.2 & 0.16667 & 0.14286 \\ 0.2 & 0.16667 & 0.14286 & 0.125 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Rozkład LU macierzy A zaprezentował się w ten sposób:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1666 & 0.14285 & 0.125 \\ 0 & -0.083 & -0.1071 & -0.1125 \\ 2.5 & 1 & -0.002381 & -0.0041 \\ 1.25 & 0.1 & 0.4999 & -0.00006 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Elementy na diagonali macierzy LU i wyznacznik:

$$U_{11} = 0.2, U_{22} = -0.083, U_{33} = -0.002381, U_{44} = -0.00006, \tag{11}$$

$$U_{11} * U_{22} * U_{33} * U_{44} = -2.362156e - 09$$

Wektory wyrazów wolnych, służące do obliczenie macierzy odwrotnej.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Iloczyn macierzy AA-1

$$\begin{bmatrix} 0.999985 & 0 & 0.000977 & 0.000244 \\ -0.000015 & 1 & -0.000732 & 0.000244 \\ 0 & 0.000122 & 0.999756 & 0.000244 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Wskaźnik uwarunkowanaia macierzy:

cond=14700

3 Wnioski

3.1

Wynik, który otrzymaliśmy jest zbliżony do rozwiązania teoretycznego. Z definicji, iloczyn macierzy A i A^{-1} powinien się równań macierzy jednostkowej. Natomiast nasz wynik nieco od tego odbiega. Przy odpowiednim zaokrągleniu wartości, można uznac macierz A*A-1 za macierz bliską jednostkowej.

3.2

Wyznacznik macierzy A został policzony za pomocą rozkładu LU i jest on równy iloczynowi elementów leżących na przekątnej macierzy U.

3.3

Wskaźnik uwarunkowania określa wrażliwość na zaburzenia danych. W naszym przypadku wskaźnik wyniósł 14670, co jest dużą wartością. Porządana wartość wskaźnika jest niska (świadczy o dobrym uwarunkowaniu zadania), natomiast w naszym przypadku musimy mówić o źle uwarunkowanym zadaniu.