Sprawozdanie - laboratorium 1

Rozwiązywanie Układów Algebraicznych Równań Liniowych metodami bezpośrednimi

Karolina Kotłowska, 4 marzec 2021

1 Wstęp teoretyczny

Tematem pierwszego laboratorium było zapoznanie się z bibliotekami Numerical Methods oraz rozwiązanie zadania dotyczącego rozwiązywania układów równań metodami bezpośrednimi.

1.1 Metoda Gaussa-Jordana

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana jest to jeden ze sposobów rozwiązywania układów równań z wieloma niewiadomymi.

Przykład:
Układ początkowy równań liniowych:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Ten układ można zapisać macierzowo wpisując w macierz A współczynniki układu, a w macierz wynikową – macierz b, wyrazy wolne. Macierz x zawiera niewiadome.

A*x=b

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Następnie wpisujemy ten układ do macierzy rozszerzonej, aby w kolejnych krokach otrzymać wyznacznik macierzy jednostkowej:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Przekształcamy macierz, w taki sposób, aby zarówno poniżej jak i poniżej przekątnej otrzymać współczynniki zerowe. Taką macierz otrzymujemy najpierw sprowadzając macierz do postaci schodkowej, zerując dolną część poniżej przekątnej i to samo robimy z górną częścią. Na końcu sprowadzamy macierz do postaci macierzy jednostkowej. Po przekształceniach otrzymujemy taki układ:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} \frac{8}{3} \\ 2 \\ \frac{-1}{3} \end{matrix}\right|$$

Należy pamiętać, że zamian wierszy nie wpływa na rozwiązanie. W ten właśnie sposób rozwiązujemy układ równań liniowych metodą eliminacji Gaussa-Jordana.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Oscylatorem harmonicznym nazywamy układ drgający, który wykonuje ruch harmoniczny. Prosty oscylator harmoniczny z drugiej zasady dynamiki Newtona możemy opisać za pomocą równania różniczkowego:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t). \tag{1}$$

Po przybliżeniu drugiej pochodnej położenia x w chwili t otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}. \tag{2}$$

Wprowadzając odpowiednie oznaczenia $\Delta t = h$, x_i=$x(ih)$otrzymujemy iteracyjną zależność na x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1}:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \tag{3}$$

Początkowe wartości zostały ściśle ustalone:

$x_0 = A$ (A to wychylenie początkowe ze stanu rónowagi)

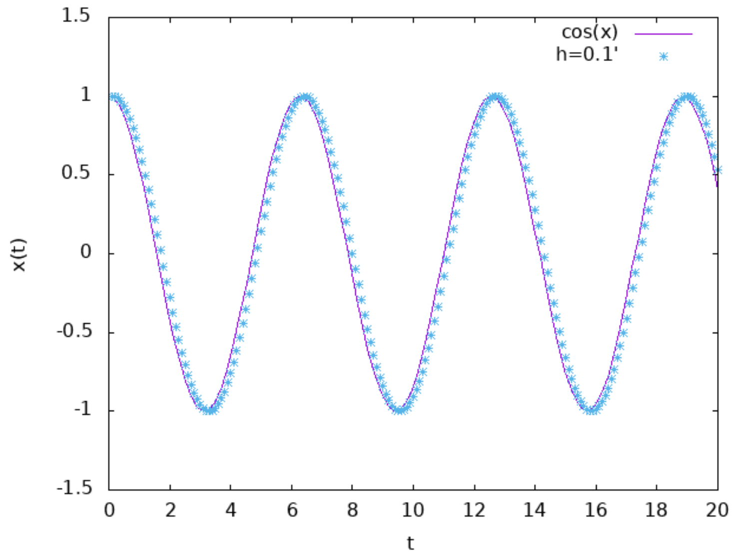
$(x_1$-$x_1)/h = v_0$ (v_0 to początkowa wartość prędkości ciała)

Celem laboratorium było rozwiązanie poniższego układu równań metodą Gaussa-Jordana, dla wyżej opisanego układu. Przyjęte zostały warunki k/m=1,A=1, $v_0 = 0$ oraz ustalony został krok całkowania h=0.1. Zadanie wykonane zostało dla macierzy 200x200

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

2.2 Wyniki

Otrzymane wyniki zostały wyeksportowane do odpowiedniego pliku, a następnie, korzystając z programu Gnuplot, narysowany został wykres. Na wykresie pokazana jest zależność wychylenia w czasie. Otrzymany wykres (rys 1) jest graficzną interpretacją rozwiązania układu równań z zadania.



Rysunek 1: Wychylenie x(t) uzyskane metodą eliminacji Gaussa-Jordana

Można zauważyć, że otrzymane wyniki obliczone numerycznie (rys 1) pokrywają się z do funkcją cos(t), która została wygenerowana dla wartości wynikowych z zadania. Naniesiony x(t)=cos(t) wynika z analitycznego rozwiązania oscylatora harmonicznego x(t)=Acos(ωt), dla naszych warunków początkowych (A=1).

3 Wnioski

Zwiększając liczbę kroków otrzymamy dokładniejsze pomiary, natomiast znacznie zwiększona będzie liczba obliczeń.

Metoda zaimplementowana w zadaniu jest uniwersalna na tyle, że można jej używać również dla dużych macierzy.

Do rozwiązania zadania skorzystaliśmy z metody eliminacji Gaussa-Jordana, która w przeciwieństwie do metody eliminacji Gaussa wykonuje około 1,5 razy więcej działań, co wiąże się ze zwiększonym nakładem obliczeń. Zaletą natomiast jest to, że metoda pozwala na rozwiązywanie układów równań dla dużej ilości zmiennych.