Sprawozdanie - laboratorium 13

Szacowanie całek niewłaściwych przy użyciu kwadratur Gaussa

Karolina Kotłowska, 3 czerwiec 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Kwadratura

Kwadraturą nazywa się funkcjonał liniowy:

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i(f(x_i) \tag{1}$$

gdzie x_i to węzły kwadratury, a A_i współczynniki kwadratury
który oznacza skończoną sumę. Za pomocą kwadratur oblicza się numerycznie przybliżoną wartość całek oznaczonych:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \tag{2}$$

1.2 Kwadratura Gaussa

To metody catkowania numerycznego polegające na wyborze wag: $p_1, p_2, \cdots, p_n$ oraz węzłów interpolacyjnych: $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a, b]$. Dokonując takich wyborów, całkę:

$$C = \int_a^b \rho(x) f(x) dx$$

można przybliżyć kwadraturą typu:

$$S(f) = \sum_{i=0}^{N} A_i f\left(x_i\right)$$

gdzie współczynniki kwadratury są postaci:

$$A_{k=i} = \int_a^b p(x)\varphi_i(x) dx$$

Funkcja wagowa p(x) jest ustalona dla wybranego przypadku, natomiast poza współczynnikami A_k musimy znaleźć także położenia N+1 węzłów. Położenia węzłów wyznacza się jako zera wielomianów ortogonalnych, których postać zależy od wybranej metody.

1.3 Kwadratura Gaussa-Laguerra'a

Ta metoda przybliża całkę w przedziale $[0, \infty]$, a jej funkcja wagowa jest postaci $p(x) = e^{-x}$. Wielomiany Laguerra'a są postaci:

$$L_n = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

Współczynniki kwadratury obliczane są następująco:

$$A_i = \frac{((N+1)!)^2}{L'_{N+1}\left(x_i\right) L_{N+2}\left(x_i\right)}$$

1.4 Kwadratura Legendre'a

Ta metoda przybliża catkę w przedziale $[a, b], a, b \in R$, a jej funkcja wagowa jest postaci $p(x) = 1$. Wielomiany Laguerra'a są postaci:

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^2} \left(x^2 - 1\right)^n$$

Współczynniki kwadratury obliczane są następująco:

$$A_i = -\frac{2}{(N+2) P_{N+2}(x_i) P'_{N+1}(x_i)}$$

1.5 Kwadratura Gaussa-Hermite'a

Ta metoda przybliża całkę w przedziale $[-\infty, \infty]$, a jej funkcja wagowa jest postaci $p(x) = e^{-x^2}$. Wielomiany Hermite'a są postaci:

$$h_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right)$$

Rekurencyjnie:

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Naszym zadaniem było obliczenie 3 całek za pomocą różnych kwadratur Gaussa: 1. za pomocą kwadratury Gaussa-Legandre'a:

$$c_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

Wartość dokładna całki wynosi $c_{1,a} = \frac{\pi}{3}$, a liczba węzłów wynosiła $n = 2, 3 \cdots, 100$. 2. za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a oraz Gaussa-Legendre'a:

$$c_2 = \int_0^\infty \ln(x) \exp\left(-x^2\right) dx$$

Wartość dokładna catki wynosi $c_{2,a} = 0.8700577$. Liczba węzłów wynosiła $n = 2, 4, 6, \cdots, 100$, a w przypadku kwadratury Gaussa-Legendre'a $x \in [0, 5]$ 3. za pomocą kwadratury Gaussa-Laguere'a:

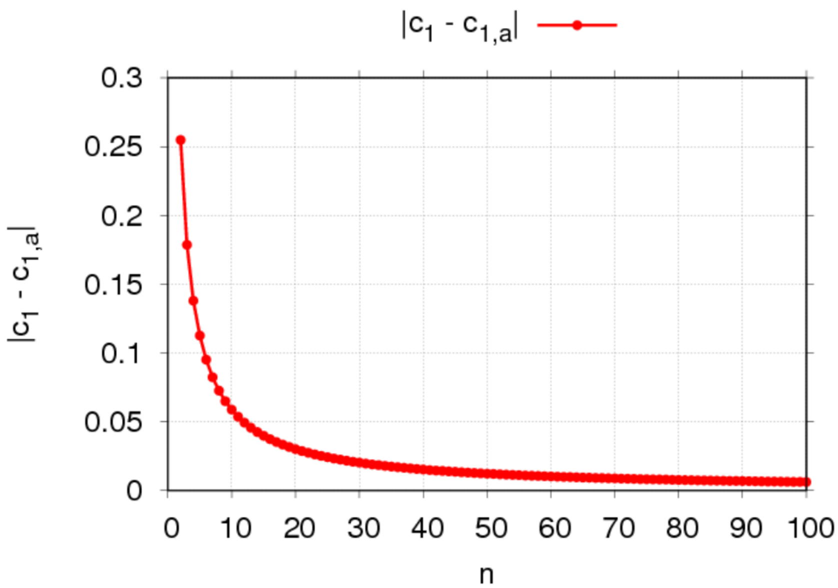
$$c_3 = \int_0^\infty \sin(2x) e^{-3x} dx$$

Wartość dokładna całki wynosi $c_{3,a} = \frac{2}{13}$. Liczba węzłów wynosiła $n = 2, 3, \cdots, 20$.

Skorzystaliśmy z biblioteki Numerical Recipes korzstając z plików: nrutil.h, nrutil.c, gauleg.c. gaulag.c. gammln.c, gauher.c.

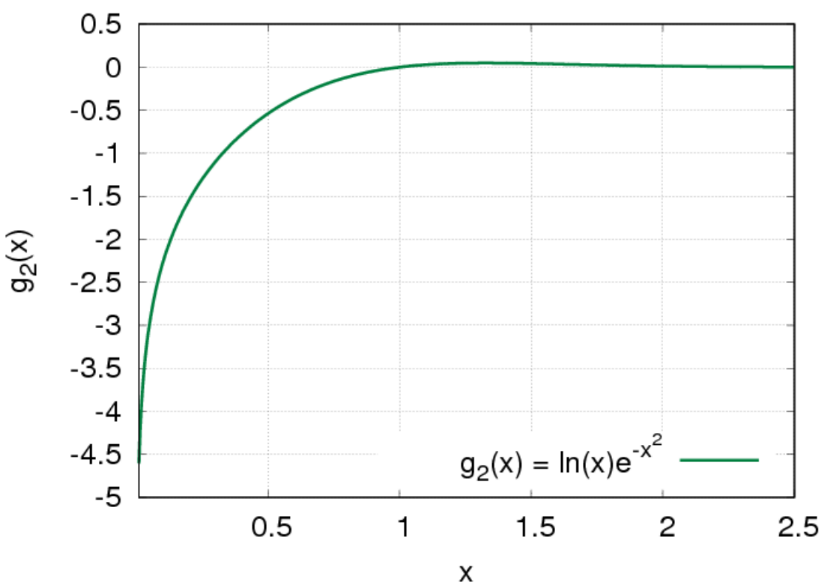
3 Wyniki

Do wykonania zadania wykorzystano program napisany w języku C. Poniżej znajdują wykresy funkcji błędu $f(n) = |c_i - c_{ia}|$ dla liczby weżłów n=2,3...10. Do narysowania wykresów użyliśmy programu gnuplot.

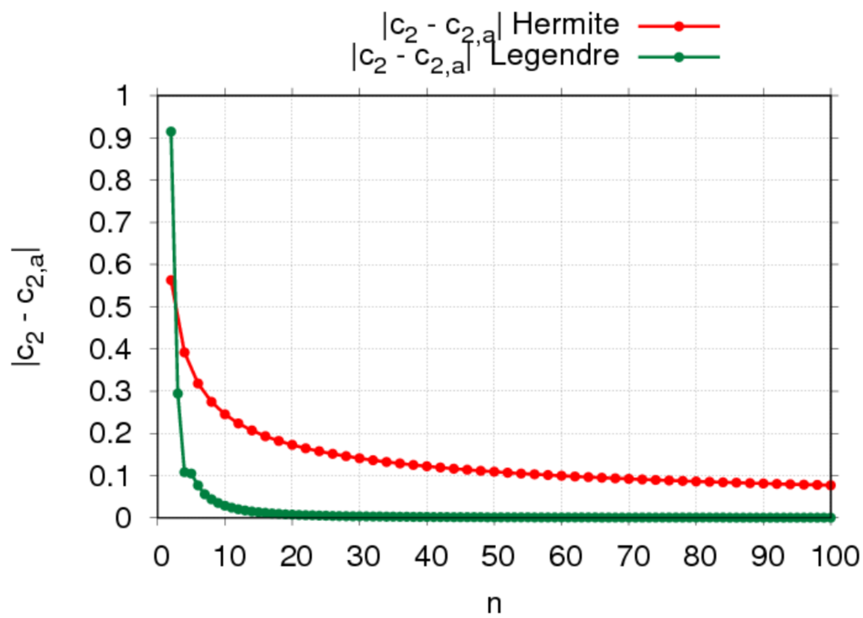


Rysunek 1: Funkcja błędu od liczby węzłów dla pierwszej całki

Wraz ze wzrostem liczby węzłów całkowania zauważalne jest zmniejszenie błędu. Funkcja błędu zależy od liczby węzłów w sposób przypominający zależność eksponencjalną. W końcowych iteracjach wynik można uznać za dokładny.

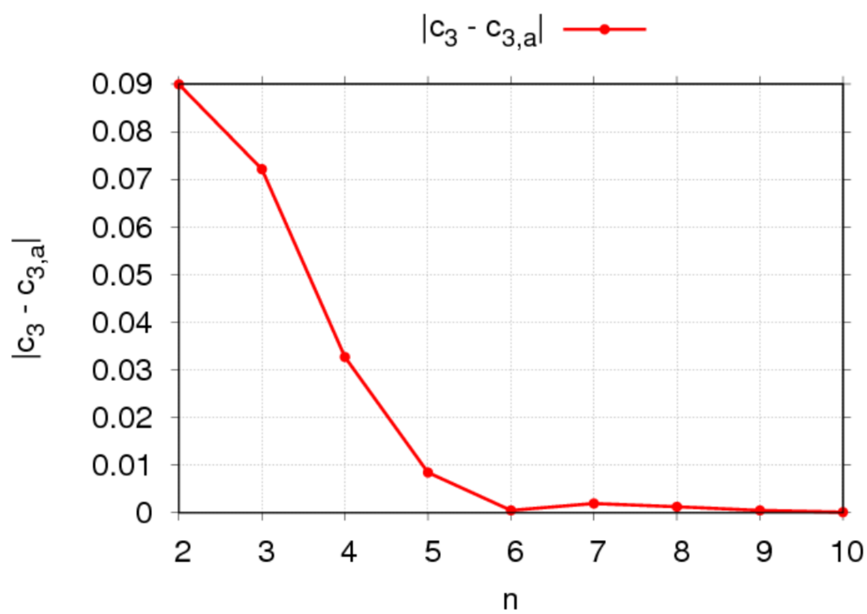


Rysunek 2: Analityczny wykres funkcji podcałkowej



Rysunek 3: Funkcja błędu od liczby węzłów dla drugiej całki dla dwóch metod

Dla drugiej całki, na wykresie, kwadratura Legendre'a okazała się dokładniejsza niż kwadratura Hermita, dając mały błąd już od n = 30 podczas gdy kwadratura Hermite'a nawet dla 100 węzłów nie dawała dostatecznie niewielkiego błędu.



Rysunek 4: Funkcja błędu od liczby węzłów dla trzeciej całki

Dla trzeciej całki na wykresie można zobaczyć szybką zbieżność. Już dla 10 węzłów błąd całkowania jest bliski zeru. Uzyskane wyniki są właściwe.

4 Wnioski

Kwadratury Gaussa pozwalają na wyznaczenie wartości całek niewłaściwych oznaczonych. Natomiast nie wszystkie rodzaje kwadratur dają wystarczająco dokładne rezultaty dla konkretnych przypadków funkcji podcałkowej. Zależność błędu całkowania zależy między innymi od rozmieszczenia węzłów w przedziale. Dlatego należy dobrać odpowiednią kwadraturę do rozważanej całki jak i przedziału całkowania. W naszym przypadku dla drugiej całki nieodpowiednia okazała się kwadratura Hermite'a podczas gdy kwadratura Legandre'a spełniała swoje zadanie.