Matematika – Pravdepodobnosť

Na základe prednášok Doc. RNDr. Jaroslava Tišera, CSc.

0. Úvod

Tento text je pokusom o prepis prednášok z predmetu X01M4A vyučovanom v letnom semestri školského roku 2006/2007.

Ďakujem doc. RNDr. J. Tišerovi, CSc. za samotné prednášky (bez nich by tento text vôbec nevznikol) a prečítanie textu.

Ani to však neznamená, že text je bezchybný. Budem vďačný za upozornenie na prípadnú chybu, prípadne za akúkoľvek pomoc s textom, jeho doplnenie a podobne.

Spracoval Karol Bujaček, e-mail: bujackar@fel.cvut.cz.

Tento text je umiestnený na http://landau.mk.cvut.cz/gitweb/.

Verzia zo dňa: 9. 7. 2012

1. Pravdepodobnosť

1.1. Príklad. Hodím dva krát kockou. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň raz padla šestka? Aká je množina všetkých výsledkov?

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\ \vdots & & & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \dots & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

priaznivé

Obrázok 1.1.: Množina výsledkov.

Pravdepodobnosť vypočítam ako podiel priaznivých výsledkov (tie v rámčeku) a všetkých výsledkov.

$$P = \frac{11}{36} = 0{,}30\bar{5}$$

□

1.2. Príklad. Dvaja hráči striedavo hádžu mincou. Vyhrá ten, ktorému prvému padne panna. Aká je pravdepodobnosť, že vyhrá ten kto začínal?

Množina výsledkov (P — panna, O — orol):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= P \\ \omega_2 &= OP \\ \omega_3 &= OOP \\ &\vdots \\ \omega_n &= \underbrace{O \dots OP}_{n} \end{aligned}$$

Aká je množina priaznivých hier? Všetky tie s nepárnym indexom, teda $\omega_{2i+1}; \quad i = 0, 1, \dots$

Pravdepodobnosť priaznivého javu (jedného z celej množiny) je

$$P(\omega_{2i+1}) = \frac{1}{2^{2i+1}}.$$

Jedna polovica vychádza z toho, že ide o mincu a pravdepodobnosť, že padne panna je 1/2. Je rovnaká ako pravdepodobnosť, že padne orol. Nepredpokladám, že niekto je tak šikovný, aby hodil mincu na hranu, ani to, že mincu stratím. Exponent menovateľa súvisí s počtom hodov — aby bola hra priaznivá (pre toho kto začína), musí nastať nepárny počet hodov.

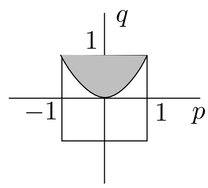
Celková pravdepodobnosť, že zvíťazí ten, kto začínal je súčet všetkých nepárnych hier. Ide o geometrickú postupnosť, jej súčet môžem vyjadriť ako $s_n = a_0(q^n - 1)/(q - 1)$. Pritom platí $q = 1/4$ a $a_0 = 1$.

$$P(\text{zvíťazí začínajúci}) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\omega_{2i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

□

1.3. Príklad. Zvolíme si náhodne dve čísla $p, q \in \langle -1; 1 \rangle$. Aká je pravdepodobnosť, že rovnica $x^2 + 2px + q = 0$ má komplexný koreň?

Výsledok je množina čísel p, q z tohto intervalu (dvojica čísel). Kvadratická rovnica má komplexný koreň ak jej diskriminant D je záporný. Teda $D = 4p^2 - 4q < 0 \Longrightarrow p^2 < q$.



Obrázok 1.2.: Množina výsledkov.

Snažím sa získať plochu nad parabolou (na obrázku tmavá). Integrovaním ale získam plochu pod parabolou. Preto od celkovej plochy nad osou p odčítam tú časť pod parabolou.

$$P = \frac{2 - \int\limits_{-1}^{1} p^2 \,\mathrm{d}\, p}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[\frac{p^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

□

1.4. Definícia. *Priestor elementárnych javov.* Množinu Ω všetkých výsledkov budeme nazývať priestor elementárnych javov. Jav je reprezentovaný podmnožinou $A \subset \Omega$.

Ak je $A \subset \Omega$, potom doplnok A^C je jav opačný.

$$A^C = \Omega \backslash A = \{x \in \Omega | x \notin A\}$$

Pre $A, B \subset \Omega$ je jav $A \cap B$ označujúci, že javy A a B nastali súčasne.

Jav $A \cup B$ znamená, že nastal aspoň jeden z javov A alebo B.

Ak sú množiny disjunktné (majú prázdny prienik) tak ide o navzájom sa vylučujúce javy.

$\omega \in \Omega$ je elementárny jav.

□

Zjednotenie množín značím ako

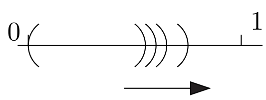
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots,$$

prienik množín ako

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cup \ldots.$$

1.5. Príklad.

$$A_i = (0, 1 - \frac{1}{i}), \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, 1)$$

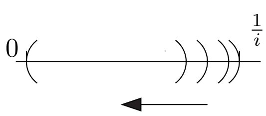


Obrázok 1.3.: Rozširujúci sa interval.

□

1.6. Príklad.

$$B_i = (0, \frac{1}{i}), \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$$



Obrázok 1.4.: Zmenšujúci sa interval.

1.7. Tvrdenie.

1. $\left(\bigcup_i A_i\right)^C = \bigcap_i {A_i}^C$
2. $\left(\bigcap_i A_i\right)^C = \bigcup_i {A_i}^C$

□

1.8. Dôkaz.

x, ktoré nepatrí ani do jednej množiny A_i, sa nachádza v doplnku ku každej množine a teda aj v prieniku týchto doplnkov.

$x \in (\bigcup_i A_i)^C \Leftrightarrow x \notin \bigcup_i A_i \Leftrightarrow \forall_i x \notin A_i \Leftrightarrow \forall_i x \in {A_i}^C \Leftrightarrow x \in \bigcap_i {A_i}^C$

Pre druhý prípad platí obdobné. To, že x patrí do doplnku prieniku množín A_i je ekvivalentné s tým, že x nepatrí do tohto prieniku. Z toho plynie, že x neleží aspoň v jednej z množín A_i a leží aspoň v jednom doplnku ${A_i}^C$. Teda leží v $\bigcup_i {A_i}^C$.

$x \in (\bigcap_i A_i)^C \Leftrightarrow x \notin \bigcap_i A_i \Leftrightarrow \exists i : x \notin A_i \Leftrightarrow \exists i : x \in {A_i}^C \Leftrightarrow x \in \bigcup_i {A_i}^C$

□

1.9. Definícia. *Sigma-algebra.* Označíme si systém podmnožín reprezentujúcich javy ako $\mathcal{A}$. Jeho vlastnosti:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. Ak je $A \in \mathcal{A}$, potom $A^C \in \mathcal{A}$ (s každou množinou tam patrí aj jej doplnok),
3. Ak sú $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A}$, potom $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

Z týchto vlastností a predošlého tvrdenia môžem ukázať, že pre množiny $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ platí, že $\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$:

$$\bigcap_i A_i = \left(\left(\bigcap_i A_i\right)^C\right)^C = \left(\bigcup_i {A_i}^C\right)^C \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \bigcup_i {A_i}^C \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall_i {A_i}^C \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall_i A_i \in \mathcal{A}$$

Z tvaru posledného členu vidíme, že $\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$.

Systém $\mathcal{A}$ sa nazýva σ-algebra — sigma-algebra. Nemá nič spoločné s algebrou ako takou, je to len názov.

□

1.10. Príklad. Najmenšia sigma-algebra:

$$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$$

Najväčšia sigma-algebra:

$$\mathcal{A} = \{\text{systém všetkých podmnožín}\}$$

□

Pravdepodobnosť javu A je číslo $P(A) \in \langle 0; 1\rangle$. Zobrazenie P je funkcia podmnožín. P vedie z množiny $\mathcal{A}$ do intervalu $\langle 0; 1\rangle$.

1.11. Definícia. *Pravdepodobnosť.* Zobrazenie $P : \mathcal{A} \to \langle 0; 1\rangle$ sa nazýva pravdepodobnosťou (pravdepodobnostným zobrazením), ak spĺňa požiadavky ktoré máme:

1. $P(\Omega) = 1$ predstavuje jav istý.
2. Ak máme javy $A_1 \subset A_2$, potom $P(A_1) \leq P(A_2)$.
3. Ak sú $A_1, A_2, \ldots$ disjunktné, potom $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

□

1.12. Poznámka. K bodu 2. A_2 si môžme predstaviť ako $A_1 + B$. Je pravdepodobnejšie, že sa stane nejaký jav „a ešte niečo naviac“.

□

1.13. Veta. Majme pravdepodobnostné zobrazenie P. Potom platí

1. $P(\emptyset) = 0$. Jav nemožný.
2. $A_1 \subset A_2$, potom $P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 \backslash A_1)$.
3. A_1, A_2 javy, potom $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.
4. $A_1, A_2, \ldots$ javy, potom $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$.

□

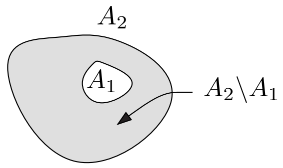
1.14. Dôkaz.

1. Použijem (3) z definície pravdepodobnostného zobrazenia pre $A_1 = \Omega$, $A_2 = A_3 = \ldots = 0$.

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) = P(\Omega) + P(\emptyset) + \ldots.$$

Odtiaľ plynie, že $P(\emptyset) = 0$.

2. Tým som dostal $A_2 = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1)$ disjunktné. Pomocou bodu (3) z definície vidieť, že $P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 \backslash A_1)$.

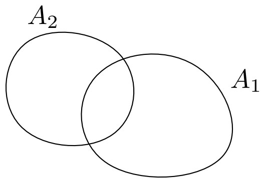


Obrázok 1.5.: Pravdepodobnosť nadmnožiny.

3. $A_1 \cup A_2 = A_2 \cup (A_1 \backslash A_2) = A_2 \cup (A_1 \backslash (A_1 \cap A_2))$. Pomocou dokázaného (2) viem, že $P(A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$.

Odtiaľ získavam pre pravdepodobnosť zjednotenia vzťah $P(A_1 \cup A_2) = P(A_2) + P(A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)) = P(A_2) + P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$.

Oblasť prieniku som započítal dvakrát – z množiny A_1 aj z množiny A_2. Preto som túto oblasť raz musel odčítať.



Obrázok 1.6.: Pravdepodobnosť zjednotenia.

4. Zavediem disjunktné pomocné množiny:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 \backslash A_1 \\
B_3 &= A_3 \backslash (A_1 \cup A_2) \\
&\vdots \\
B_n &= A_n \backslash (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i).
\end{aligned}
$$

Zjednotenie týchto pomocných množín je rovnaké ako zjednotenie pôvodných. $\bigcup_i B_i = \bigcup_i A_i$. Ďalej použijem bod 3. z predchádzajúcej definície. Získavam tak $P(\bigcup_i A_i) = P(\bigcup_i B_i) = \sum_i P(B_i) \leq \sum_i P(A_i)$. Posledná nerovnosť platí pretože $B_i \subseteq A_i$ (od A_i som vždy odčítal zjednotenie množín s menším indexom).

□

1.15. Veta. *Princíp inklúzie a exklúzie* Majme javy $A_1, \ldots, A_n$. Potom

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n).$$

□

1.16. Dôkaz. Indukcia: $n = 1$ – platí ($n = 2$ v predchádzajúcej vete).

Predpokladáme, že vzorec platí pre $n-1$ množín. Položíme $\tilde{A} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$. Tým dostaneme

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(\tilde{A} \cup A_n) = P(\tilde{A}) + P(A_n) - P(\tilde{A} \cap A_n) = \\
= \left[\sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i<j\leq n-1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \right] + \\
+ P(A_n) - P((A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \cap A_n)) = [\ldots] + P(A_n) - \\
- \left[\sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) - \sum_{i<j\leq n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_n) + \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \right].
\end{aligned}
$$

□

1.17. Príklad. Do n obálok s adresami zaradíme náhodne n listov. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jeden list bude v správnej obálke?

$A_i = \{\text{v i} - \text{tej obálke je správny list}\} \quad i = 1, \dots, n$. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = ?$

Vlastne hľadám pravdepodobnosť toho, že „jeden list je v správnej" alebo „dva listy sú v správnej" alebo ...

Pre pravdepodobnosť toho, že jeden list je v správnej obálke môžem napísať $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Celkovo mám $n!$ možností ako listy rozmiestniť. Ak jeden vložím do správnej obálky, ostáva mi už len $(n-1)!$ možností ako ostatné listy rozmiestnim.

Analogicky môžem napísať vzťah aj pre viac listov v správnej obálke:

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!},$$
$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!}.$$

Hľadaný výsledok získam ako súčet všetkých týchto možností. Kombinačným číslom vyjadrujem, že z n obálok môžem vybrať ľubvolných x ktoré sú v správnej obálke.

$$P(A_i \cup \ldots \cup A_n) = \binom{n}{1}\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} =$$
$$= 1 - \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{(n-2)!}{n!} + \frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{(n-3)!}{n!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

Čo môžem spraviť s takou sumou? Kto má dobrú pamäť a vie ako pomocou sumy môžme napísať e^x, vyhral.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Je to veľmi podobná suma ako tá v našom príklade. Pre $x = -1$:

$$\mathrm{e}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Ešte treba drobnú úpravu exponentu. Rozložím ho na $(-1)^n \cdot (-1)$. Tým teda zmením znamienko pred sumou. Posledná úprava ktorú treba je zmeniť index prvého prvku v sume z $n = 1$ na $n = 0$. Ten môžem zmeniť ak následne odčítam to, čo som ním pričítal. V tomto prípade pre $n = 0$ to je -1.

Po skombinovaní týchto krokov pre hľadanú pravdepodobnosť získavam vzťah

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}(-1)^{n+1}\right) + 1 = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\right) + 1 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

□

1.18. Definícia. *Nezávislé javy.* Hovoríme, že javy A_1, A_2 sú nezávislé, ak platí rovnosť

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Pre javy $A_1, \ldots, A_2$ platí, že sú nezávislé, ak pre každý výber $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

□

1.1. Bernoulliho schéma, Bernoulliho pokusy

Robíme sériu n nezávislých pokusov a každý pokus má len dva možné výsledky – 0, 1. Počet výsledkov typu 1 označíme X.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

kde $p = P(\text{výsledok} = 1)$.

Z n pokusov je k priaznivých. Týchto n môžme vybrať ľubovoľným spôsobom. To vyjadruje prvá časť vzťahu. Druhá časť vyjadruje jav opačný — pre ten ostáva už len $n - k$ možností (ostatné sú úspešné).

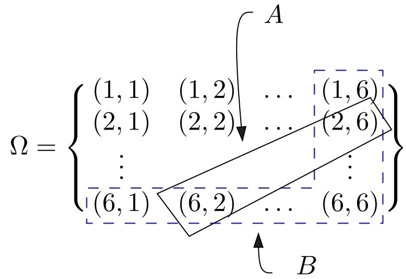
□

1.19. Dôkaz. 0 1 0 … 0 → n pokusov; 1 je použitá k-krát, 0 je použitá $n - k$-krát.

1.2. Podmienená pravdepodobnosť

1.20. Príklad. Hodíme dvakrát kockou.

Jav A: súčet je osem, jav B: padla aspoň jedna šestka.



Obrázok 1.5.: Hod kockou.

$$P(A) = \frac{5}{36} \approx 0{,}139$$
$$P(A|B) = \frac{2}{11} \approx 0{,}182$$

□

1.21. Definícia. *Podmienená pravdepodobnosť.* Majme javy A, B a $P(B) > 0$. Podmienená pravdepodobnosť javu A za podmienky B je $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Za množinu všetkých javov považujeme B a priaznivé javy sú tie javy z množiny B, ktoré patria aj do množiny A.

□

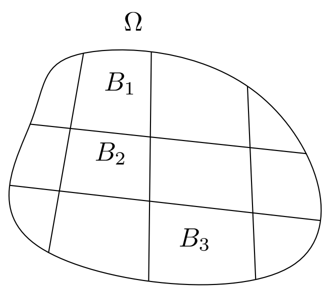
1.22. Veta. *O úplnej (celkovej) pravdepodobnosti.* Majme javy B_1, B_2, … také, že ak ich zjednotíme, tak dostaneme celý základný priestor – $\bigcup_i B_i = \Omega$. Javy B_i sú disjunktné. Potom pre jav A platí $P(A) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.

□

1.23. Dôkaz.

$$\sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i) = \sum_i \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} \cdot P(B_i) = \sum_i P(A \cap B_i) = \langle\!\langle \text{pretože sú disjunktné} \rangle\!\rangle$$
$$= P\left(\bigcup_i (A \cap B_i)\right) = P(A)$$

Pokryjú celý priestor.



Obrázok 1.6.: Celková pravdepodobnosť.

□

1.24. Veta. *Bayesova.* Majme $B_1, B_2, \dots$ javy také, že sú disjunktné a $\bigcup_j B_j = \Omega$. Potom pre jav A platí

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}.$$

□

1.25. Dôkaz.

$$\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{\frac{P(A\cap B_i)}{P(B_i)}P(B_i)}{P(A)} = P(B_i|A).$$

□

1.26. Príklad. Majme dva koše. K_1: tri biele a päť červených guľôčok. K_2: dve biele a jedna červená guľôčka. Náhodne zvolíme kôš a vytiahneme guľôčku. Jav $A = \{\text{je biela}\}$.

$$P(A|K_1) = \frac{3}{8}$$
$$P(A|K_2) = \frac{2}{3}$$

$P(A) = P(A|K_1)P(K_1) + P(A|K_2)P(K_2) = \frac{3}{8}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{3}{16} + \frac{1}{3} \approx 0{,}52$
Sčítaním som zahrnul všetky možnosti vytiahnutia bielej guľôčky — z prvého aj z druhého koša.
Po vytiahnutí guľôčky vidíme, že je biela. Aká je pravdepodobnosť, že to bolo z koša K_1?

Na toto využijem vetu o úplnej pravdepodobnosti. Súčet v menovateli vyjadruje všetky možnosti vytiahnutia bielej guľôčky (teda z oboch košov). Čitateľ len tie pre prvý kôš.

$$P(K_1|A) = \frac{P(A|K_1)P(K_1)}{P(A|K_1)P(K_1) + P(A|K_2)P(K_2)} = \frac{\frac{3}{8}\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8} + \frac{2}{3}} = \frac{9}{9+16} = \frac{9}{25} = 0{,}36.$$

V koši K_2 bolo viac bielych ku červeným, preto je preferovaný.

□

1.3. Náhodná veličina

1.27. Príklad. Hodíme dvakrát kockou. Aká je pravdepodobnosť, že výsledky sa líšia najviac o jednu?
X_i je počet bodov v i-tom hode; $i = 1, 2$.

$$|X_1 - X_2| \leq 1$$

X_i je funkcia definovaná na obore Ω. Miesto funkcie hovoríme o náhodnej veličine.

$$X_1(i,j) = i \quad X_2(i,j) = j,$$

kde $(i,j) \in \Omega = \{(i,j)|i,j = 1,\dots,6\}$.
(i,j) je vlastne množina výsledkov všetkých hodov. □

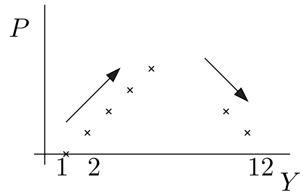
1.28. Definícia. *Náhodná veličina.* Funkcia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sa nazýva náhodná veličina, ak platí, že $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \subset I\} \in \mathcal{A}$ pre každý interval $I \subset \mathbb{R}$.
Náhodná veličina každému možnému výsledku pokusu priradzuje nejaké reálne číslo.

□

Ak sú X_1 a X_2 náhodné veličiny, potom aj $X_1 + X_2$, $X_1 \cdot X_2$ a X_1/X_2 sú tiež náhodné veličiny. Dokonca ak $X_1, X_2, \dots$ sú náhodné veličiny potom aj $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ je tiež náhodná veličina (plynie z definície $\mathcal{A}$).

1.29. Príklad. X_1, X_2 sú výsledky dvoch hodov kockou.
$Y = X_1 + X_2$; $Y = 2, \dots, 12$. Nemôžem hodiť menší súčet než 2 – najmenšia hodnota na oboch kockách je 1. Rovnako platí aj pre maximum. To, že hodím takýto extrém vyjadruje pravdepodobnosť $P(Y = 2) = P(Y = 12) = \frac{1}{36}$. Buď na oboch kockách padnú jednotky, alebo šestky.

$P(Y = 3) = \frac{2}{36}$.



Obrázok 1.7.: Pravdepodobnosť pri hode dvoma kockami.

□

1.30. Definícia. *Distribučná funkcia.* Majme náhodnú veličinu X. Distribučná funkcia príslušná náhodnej veličine X je funkcia $F_X(t)$.

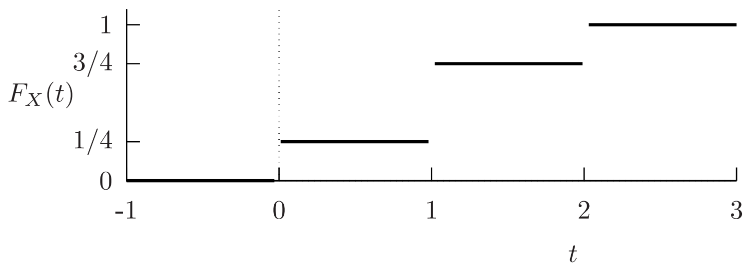
$$F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq t\}) = P(X \leq t)$$

□

1.31. Príklad. Hodíme dva krát mincou. Náhodný jav X je počet panien. Ako vyzerá distribučná funkcia?

$X = 0, 1, 2, \ldots$

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0; & t < 0. \text{ Nemôže padnúť záporný počet panien.} \\ 1/4; & t \in \langle 0, 1). \text{ Nepadne žiadna panna.} \\ 3/4; & t \in \langle 1, 2). \text{ Nepadne žiadna alebo padne jedna panna.} \\ 1; & t \geq 2. \text{ Nepadne žiadna alebo padne jedna alebo dve panny.} \end{cases}$$



Obrázok 1.8.: Distribučná funkcia.

□

1.32. Príklad. Zostrojíme kocku s hranou x. Číslo x zvolíme náhodne, $x \in \langle 0; 1\rangle$. Zaujíma nás objem V. Aká je jeho distribučná funkcia?

Distribučná funkcia s parametrom t ukazuje aká je pravdepodobnosť, že objem je menší alebo rovný ako t.

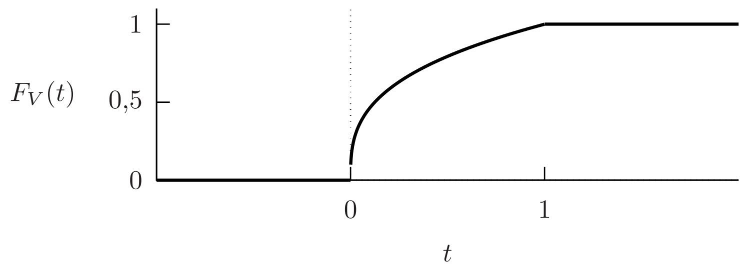
Keďže objem kocky je úmerný tretej mocnine jeho hrany, teda $V = x^3$, môžme pravdepodobnosť $P(x^3 \leq t)$ upraviť na $P(x \leq \sqrt[3]{t})$.

Pre distribučnú funkciu teda platí:

$$F_V(t) = P(V \leq t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1; & t \geq 1 \\ \sqrt[3]{t}; & t \in \langle 0; 1\rangle \end{cases}.$$

Nulová pravdepodobnosť záporného objemu (fyzikálne nemožné) a jednotková pravdepodobnosť objemu menšieho alebo rovného než jedna (s hranou o maximálnej veľkosti 1 väčší objem nedosiahneme) je zrejmá.

Zaujímavý je ten interval, v ktorom sa objem mení, teda $t \in \langle 0; 1\rangle$. Distribučná funkcia je na tomto intervale úmerná tretej odmocnine parametru, čo je znázornené na obrázku.



Obrázok 1.9.: Distribučná funkcia.

□

1.33. Tvrdenie. $P(X \in (a; b\rangle) = F_X(b) - F_X(a)$.

□

1.34. Dôkaz.

$$F_X(b) = P(X \leq b) = P(X \in (-\infty; b\rangle) = P(X \in ((-\infty; a\rangle \cup (a; b\rangle) = \\ = P(X \in (-\infty; a\rangle) + P(X \in (a; b\rangle) = P(X \leq a) + P(X \in (a; b\rangle) = F_X(a) + P(X \in (a; b\rangle).$$

□

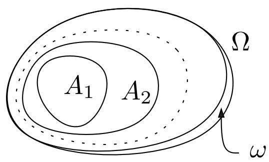
1.35. Veta. Majme $F_X(t)$ distribučnú funkciu. Potom platí:

1. $F_X(t)$ je neklesajúca.
2. $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$.
3. $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$.

□

1.36. Dôkaz.

1. Ak sú $t_1 \leq t_2$, potom $F_X(t_1) = P(X \leq t_1) \leq P(X \leq t_2) = F_X(t_2)$ (z vlastnosti P: $A_1 \subset A_2$; $P(A_1) \leq P(A_2)$).
2. Označíme si $A_n = (X \leq n)$.



Obrázok 1.10.: Vnorené javy. ω je bod mimo zjednotenia.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. Ak by to neplatilo, tak bod ktorý tam nepatrí by nemal reálnu hodnotu. Platilo by $X(\omega) > n$ pre každé n, čo je spor.

Naviac platí: $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \Omega$ pre akékoľvek k — A_n v sebe zahŕňa aj $A_{n-1}, \ldots$. Je to totiž jej nadmnožina, $A_n = (X \leq n) \supseteq (X \leq n-1) = A_{n-1}$.

Distribučná funkcia je s pravdepodobnosťou vo vzťahu podľa $F_X(n) = P(x \leq n) = P(A_n)$.

Celý priestor elementárnych javov môžem vyjadriť ako

$$\Omega = \bigcup_{n=k}^{\infty} = A_k \cup (A_{k+1} \backslash A_k) \cup (A_{k+2} \backslash A_{k+1}) \cup \ldots = A_k \cup \bigcup_{i=k}^{\infty} (A_{i+1} \backslash A_i).$$

Je to vlastne zjednotenie počiatočnej množiny A_k a prstencových obalov okolo nej. Takéto zjednotenie nemá spoločný prienik. Preto môžem využiť vlastnosť, že pravdepodobnosť zjednotenia je súčet pravdepodobností a napísať:

$$I = P(\Omega) = P(A_k \cup \bigcup_{i=k}^{\infty} (A_{i+1} \backslash A_i) = P(A_k) + \sum_{i=k}^{\infty} P(A_{i+1} \backslash A_i).$$

Pretože suma v poslednom člene je konvergujúca, je

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} P(A_{i+1} \backslash A_i) = 0$$

(odobral som vnútornú množinu a sčítam prstence, ktoré ju obklopujú a tvoria jej nadmnožiny; čím je k väčšie, tým menej prstencov nasčítam).

Z poslednej rovnice vychádza, že

$$1 = \lim_{k\to\infty} P(A_k) + 0 = \lim_{k\to\infty} F_x(k)$$

a teda $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$.

3.

$$0 \le F_X(-n) = P(X \le -n) = P(-X \ge n) = 1 - P(-X < n) \le 1 - P(-X \le n-1) = 1 - F_{-X}(n-1)$$

Po prevedení na limitu

$$0 \le \lim_{n\to\infty} F(-n) \le 1 - \lim_{n\to\infty} F_{-X}(n-1) = 0,$$

z čoho $\lim_{n\to\infty} F_X(-n) = 0$.

□

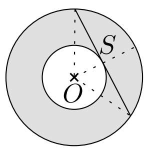
1.37. Príklad. Majme jednotkový kruh. Spravíme v ňom náhodnú tetivu tak, že zvolený bod S bude jej stredom. Označíme X ako dĺžku tetivy. Bod O je stred kruhu.

$S = (x, y)$, vzdialenosť S a O je $\sqrt{x^2 + y^2}$. Dĺžku tetivy zistím ak si uvedomím, že jej polovica je tvorená odvesnou trojuholníka s preponou rovnou polomeru kruhu a druhou odvesnou tvorenou úsečkou SO. Podľa Pythagorovej vety platí $X = 2\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$.

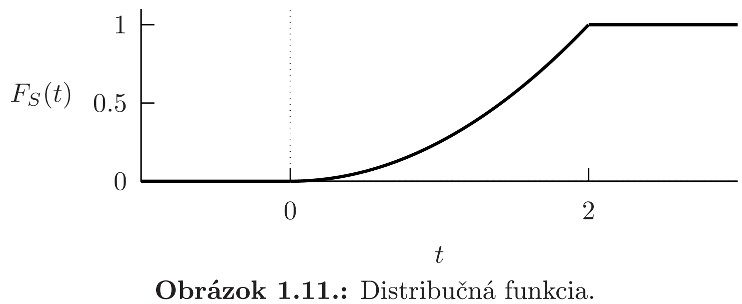
$$F_X(t) = P(X \le t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1; & t \ge 2 \\ P\left(2\sqrt{1-(x^2+y^2)} \le t\right); & t \in \langle 0, 2) \end{cases}$$

$$P\left(2\sqrt{1-(x^2+y^2)} \le t\right) = P\left(1 - (x^2+y^2) \le \frac{t^2}{4}\right) = P\left(1 - \frac{t^2}{4} \le x^2 + y^2\right) =$$

$$= P\left(\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \le \sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{\pi - \pi(1 - t^2/4)}{\pi} = \frac{t^2}{4}.$$



Obrázok 1.10.: Hodnota $1 - t^2/4$ vyjadruje šírku medzikružia (označené šedou farbou). Číslo π predstavuje celý kruh, $\pi - \pi(1 - t^2/4)$ je vnútorný kruh (biely).



Obrázok 1.11.: Distribučná funkcia.

□

1.38. Príklad. Zostrojíme náhodnú tetivu pomocou voľby bodu A na kružnici. Spojíme ho so stredom O. Na tejto úsečke bude bod S. Tetiva má stred v bode S.

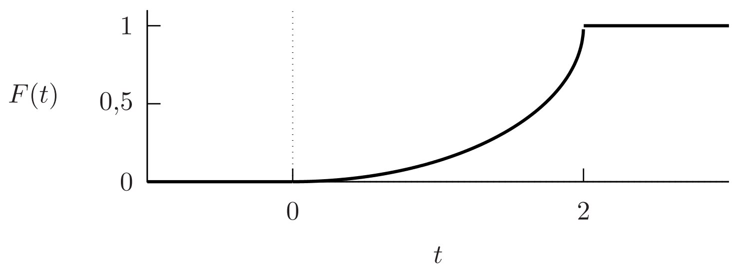
Voľba A je voľba uhlu $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$. $\Omega = \{(\alpha, S) | \alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle, S \in \langle 0, 1\rangle\}$. Dĺžka úsečky OS je s.

Dĺžka tetivy je $l = 2\sqrt{1 - s^2}$ a predstavuje náhodnú veličinu.

Distribučná funkcia

$$F(t) = P(l \le t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1; & t \ge 2 \text{ (tetiva by mala väčšiu dĺžku než priemer kružnice)} \\ P(2\sqrt{1-s^2} \le t); & t \in \langle 0, 2) \rangle \end{cases}$$

$$P\left(2\sqrt{1-s^2} \le t\right) = P\left(1 - s^2 \le \frac{t^2}{4}\right) = P\left(s^2 \ge 1 - \frac{t^2}{4}\right) = P\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} \le s\right) =$$
$$= \frac{2\pi}{2\pi}\left(1 - \sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\right) = 1 - \sqrt{1-\frac{t^2}{4}}.$$



Obrázok 1.12.: Distribučná funkcia.

□

1.39. Príklad. Tetivu zostrojím spojením dvoch náhodne zvolených bodov na kružnici. Bod B náhodne zvolím a bod A získam pootočením o uhol α. $\Omega = \langle 0, 2\pi \rangle$.

Pomocou Kosínusovej vety [1] vyjadrím kvadrát dĺžky tetivy ako

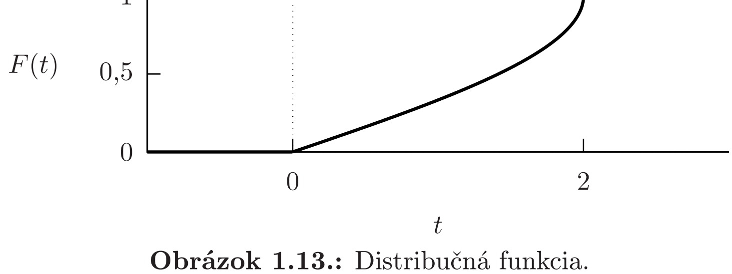
$$l^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos\alpha = 2 - 2\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha) = \left\langle\!\!\left\langle \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) \right\rangle\!\!\right\rangle = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Po odmocnení dostávam pre dĺžku tetivy vzťah $l = 2\sin\frac{\alpha}{2}$. Pre distribučnú funkciu platí

$$F(t) = P(l \le t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \ge 2 \\ P(l \le t) & t \in \langle 0, 2) \end{cases}$$

$$P(l \le t) = P\left(2\sin\frac{\alpha}{2} \le t\right) = P\left(\sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{t}{2}\right) = \frac{2 \cdot 2\arcsin(t/2)}{\underbrace{2\pi}_{\text{celková dĺžka}}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{t}{2}$$

Pri úprave som využil to, že $\sin\frac{\alpha_0}{2} = \frac{t}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha_0}{2} = \arcsin\frac{t}{2} \Leftrightarrow \alpha_0 = 2\arcsin\frac{t}{2}$.



Obrázok 1.13.: Distribučná funkcia.

□

[1] Vzťah medzi stranami a, b, c trojuholníka s vnútornými uhlami α, β, γ je vo vzťahu podľa rovnice $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$. Uhol α je protiľahlý ku strane a. Platí ekvivalentne aj po zámene jednotlivých strán a uhlov.

Tieto tri príklady boli veľmi podobné. Vždy šlo o zostrojenie tetivy a hľadanie pravdepodobnosti, že jej dĺžka bude menšia ako nejaký parameter. Môže prekvapiť to, že nám vyšiel vždy iný výsledok. Je treba si uvedomiť, že tetivu sme zostrojili vždy iným spôsobom. Preto je pri riešení reálnych príkladov uvedomiť si aké vlastnosti má skúmaný jav. Ak by sme nepresne určili jeho vlastnosti (a boli by sme si pri tom istí, že sme žiadnu chybu nespravili), tak výsledok môže byť nezmysel.

1.40. Príklad. Aká je pravdepodobnosť, že dĺžka náhodnej tetivy je aspoň 1, teda

$$P(l \geq 1) = P\left(l \in (1, \infty)\right) = F(\infty) - F(1) = 1 - F(1)?$$

Postupne pre prípady z predošlých príkladov:

i) $F(t) = t^2/4$
$P = 1 - 1/4 = 3/4$

ii) $F(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2/4}$
$P = 1 - \left(1 - \sqrt{1 - 1/4}\right) = \sqrt{3}/2$

iii) $F(t) = 2/\pi \cdot \arcsin(t/2)$
$P = 1 - 2/\pi \cdot \arcsin(1/2) = 1 - 2/\pi \cdot \pi/6 = 2/3$

Uvedené distribučné funkcie platia pre parameter t z intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

□

1.41. Definícia. *Diskrétna náhodná veličina.* Náhodná veličina sa nazýva diskrétna, ak jej distribučná funkcia je po častiach konštantná.

Pravdepodobnostná funkcia $P(t) = P(X = t)$.

1.42. Definícia. *Absolútne spojitá. Hustota.* Náhodná veličina X sa nazýva absolútne spojitá, ak existuje funkcia f taká, aby $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,\mathrm{d}\,s$ (tj. $F'_X = f$). Funkcia f sa potom nazýva hustota.

Podľa hustoty vieme, ktoré hodnoty sú najpravdepodobnejšie. Najväčšia hustota predstavuje najväčšiu pravdepodobnosť.

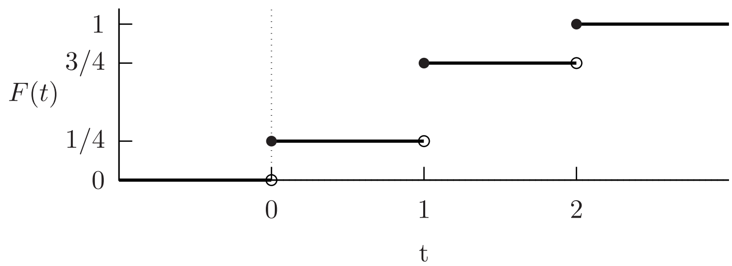
$$P(X \in \langle a, b \rangle) = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}\,s$$

Hustota je navyše taká nezáporná funkcia, pre ktorú platí

$$P(X \in (-\infty, \infty)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\mathrm{d}\,s = 1.$$

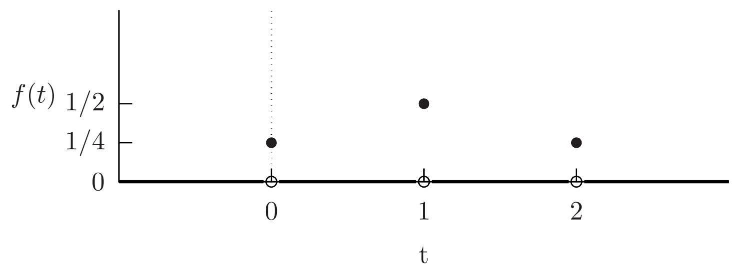
□

1.43. Príklad. Dva krát hodíme mincou, náhodný jav X predstavuje počet panien.



Obrázok 1.14.: Distribučná funkcia diskrétnej náhodnej veličiny.

Hustota $f(t)$ je výška skoku $F_x(t)$.



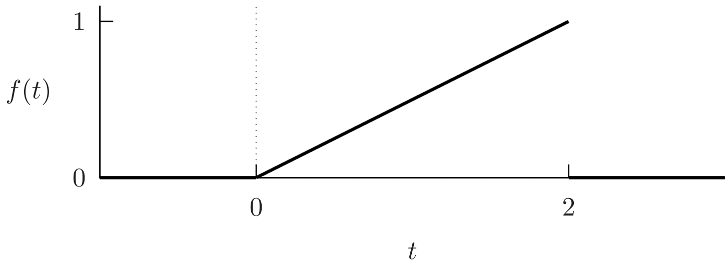
Obrázok 1.15.: Pravdepodobnostná funkcia.

□

1.44. Príklad. Pre predchádzajúce príklady s tetivou určiť hustotu.

i)

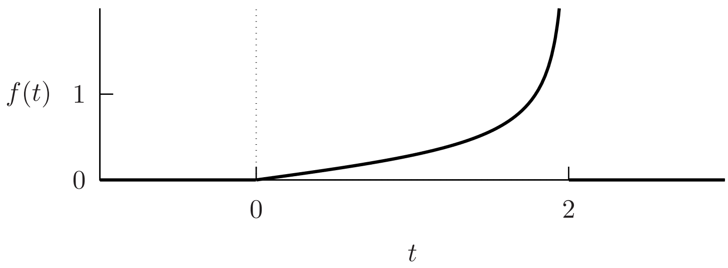
$$f(t)=\begin{cases}0; & t\notin\langle 0,2)\ \text{(nulová derivácia)}\\ (t^2/4)'=(t/2); & t\in\langle 0,2)\end{cases}$$



Obrázok 1.16.: Hustota pravdepodobnosti.

ii)

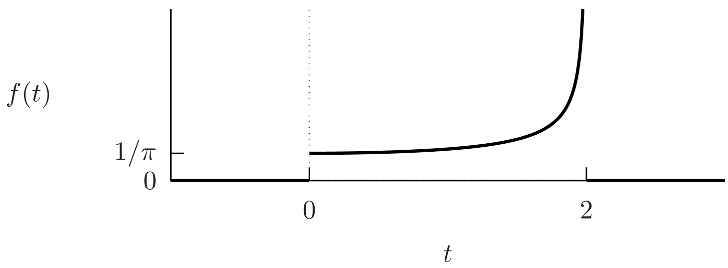
$$f(t)=\begin{cases}0; & t\notin\langle 0,2)\\ \left(1-\sqrt{1-(t^2/4)}\right)'=-\frac{1/2}{\sqrt{1-(t^2/4)}}(-t/2)=\frac{t/4}{\sqrt{1-(t^2/4)}}; & t\in\langle 0,2)\end{cases}$$



Obrázok 1.17.: Hustota pravdepodobnosti.

iii)

$$f(t)=\begin{cases}0; & t\notin\langle 0,2)\\ \left(\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{t}{2}\right)'=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-(t/2)^2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-(t/2)^2}}; & t\in\langle 0,2)\end{cases}$$



Obrázok 1.18.: Hustota pravdepodobnosti.

□

1.4. Základné typy rozdelení

1.4.1. Diskrétne

1. Bernoulliho (Binomické) $B(n,p)$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Číslo n vyjadruje počet pokusov, k je počet priaznivých výsledkov. Hodnota p je pravdepodobnosť úspechu v jednom pokuse.

2. Geometrické

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \quad k = 1, 2, \dots$$

Priaznivý jav nastane až v k-tom pokuse — po padnutí $k - 1$ nepriaznivých hodov. X je teda náhodná veličina vyjadrujúca počet pokusov do prvého úspechu.

3. Rovnomerné

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Rozdelenie, kde všetky javy majú rovnakú pravdepodobnosť úspechu. Číslo n je počet všetkých možností ktoré môžu nastať.

4. Poissonovo $P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, \dots$$

Priaznivý jav sa vyskytne k krát. Pravdepodobnosť p jeho výskytu v jednom pokuse je malá a týchto pokusov je veľký počet n. Číslo $\lambda = np$.

1.4.2. Spojité

1. Rovnomerné na $\langle a, b\rangle$

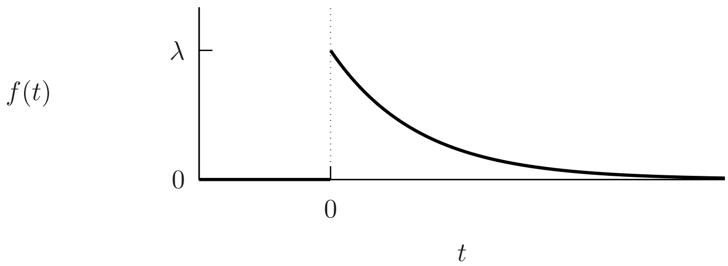
$$f(t) = \begin{cases} 0; & t \notin \langle a, b\rangle \\ \frac{1}{b-a}; & t \in \langle a, b\rangle \end{cases}$$

Hodnota pravdepodobnosti je konštantná na celom intervale hodnôt, ktoré náhodná veličina nadobúda. Je nepriamo úmerná veľkosti tohto intervalu.

2. Exponenciálne $E(\lambda)$

$$f(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}; & t \geq 0 \end{cases}$$

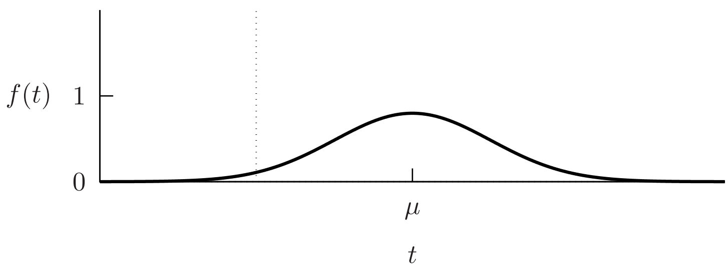
Ukazuje pravdepodobnosť toho, že jav nastane, v závislosti na parametri. Tým býva obvykle čas a jav znázorňuje pravdepodobnosť, že nejaké zariadenie bude po tomto čase fungovať.



Obrázok 1.16.: Hustota exponenciálneho rozdelenia.

3. Normálne $N(\mu, \sigma)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad t \in \mathbb{R}$$



Obrázok 1.17.: Hustota normálneho rozdelenia. $\sigma = 0.5$.

□

1.45. Príklad. Bernoulliho rozdelenie.

Hádžeme n-krát mincou, X je počet panien. $p = P(\text{panna})$.

□

1.46. Príklad. Geometrické rozdelenie.

Koľko krát musíme hodiť kockou, než nám padne prvý krát šestka? $p = P(\text{padne } 6)$.

□

1.47. Príklad. Rovnomerné rozdelenie.

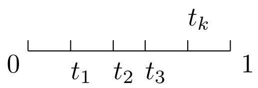
Hodíme kockou, X je počet bodov pri hode kockou. $n = 6$, $p = \frac{1}{6}$.

□

1.48. Príklad. Poissonovo rozdelenie.

Uvažujme telefónny uzol a počet prichádzajúcich spojení behom jednej hodiny. Ich počet označíme X. Zistíme $P(X = k)$.

$t_1, \ldots, t_k$ sú časy prichádzajúcich spojení.



Obrázok 1.16.: Časy prichádzajúcich spojení.

Rozdelíme delením interval $\langle 0, 1\rangle$ na n dielkov dĺžky $1/n$ tak, aby v každom bol najviac jeden z údajov $t_1, \ldots, t_k$.

Tým dostaneme Bernoulliho schému so sériou n-pokusov, kde „úspech“ znamená, že v príslušnom dielku leží nejaké spojenie – nejaké z čísel $t_1, \ldots, t_k$.

Potom $P(X = k)$ znamená, že sme mali úspech k krát.

$$P(X = k) \approx \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Model s pevným n je priblíženie, správny výsledok je pre $n \to \infty$.

P závisí na tom aké jemné delenie máme:

$$P(X = k) \approx \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}.$$

Hľadáme, ako závisí p_n na indexe n.

Pre $k = 0$:

$$P(X = 0) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{0} p_n^0 (1-p_n)^{n-0} = \lim_{n\to\infty} (1-p_n)^n = \left\langle\!\!\left\langle a^b = \mathrm{e}^{b\cdot\ln(a)} \right\rangle\!\!\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n\cdot\ln(1-p_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln(1-p_n) = \left\langle\!\!\left\langle \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \right\rangle\!\!\right\rangle =$$

(pre $n \to \infty$ je $p_n \to 0$)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1-p_n)}{(-p_n)} (-p_n \cdot n) = \lim_{n\to\infty} (-p_n \cdot n) = -\lambda.$$

Vieme, že má vyjsť nejaké vlastné číslo. Odtiaľ plynie, že $p_n = \lambda/n$. Záver:

$$P(X=k)=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}=$$
$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{\overbrace{(1-\lambda/n)^n}^{e^{-\lambda}}}{\underbrace{(1-\lambda/n)^k}_{1}}=$$
$$=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}=\frac{\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Pravdepodobnosť pre všetky hodnoty parametru sa rovná 1, teda aj súčet od $k=0,\dots,\infty$ má byť rovný 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\right)=e^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=1.$$

Bernoulliho vzorec aproximuje Poissono rozdelenie.

□

1.49. Príklad. Aká je pravdepodobnosť, že medzi 500 náhodne vybranými ľudmi je k takých, ktorí majú narodeniny 1. 1.?

$$P=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$n=500$, $p=1/365$.

$$P=\binom{500}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k\left(\frac{364}{365}\right)^{500-k}.$$

Pri Poissonovom rozdelení $(\lambda^k/k!)\mathrm{e}^{-\lambda}$ je v tomto prípade $\lambda=500/365$.

Pre $k=1,2,6$:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=6$
B:	0,2573	0,3484	0,2388	0,0023
P:	0,2541	0,3481	0,2385	0,0023

Niekoho môže zaujať, že táto závislosť nie je monotónna. To je spôsobené tým, že máme viac ľudí ako dní. Takže je menej pravdepodobné, že je deň v ktorom sa nikto nenarodil než aby sa v ňom narodil jeden človek. Na to aby sa v ňom narodili dvaja ľudia už ale máme malý súbor ľudí.

□

1.50. Definícia. *Nezávislé náhodné veličiny.* Povieme, že náhodné veličiny X_1, X_2, … sú nezávislé, ak pre každý výber intervalov I_1, I_2, … sú javy $(X_1\in I_1)$, $(X_2\in I_2)$, … nezávislé.

$$((X_i\in I_i)=\{\omega\in\Omega|X_i(\omega)\in I_i\})$$

□

1.51. Definícia. *Náhodný vektor.* Majme vektor $\boldsymbol{X}=(X_1,\dots,X_n)$, kde $X_1,\dots,X_n$ sú náhodné veličiny. Nazývame ho náhodný vektor.

Distribučná funkcia $F_{\boldsymbol{X}}(t_1,\dots,t_n)=P\left((X_1\le t_1)\cap(X_2\le t_2)\cap\ldots\cap(X_n\le t_n)\right)$.

Povieme, že náhodný vektor je absolútne spojitý ak existuje funkcia $f(s_1,\dots,s_n)$ taká, že

$$F_{\boldsymbol{X}}(t_1,\dots,t_n)=\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2}\cdots\int_{-\infty}^{t_n}f(s_1,s_2,\dots,s_n)\,\mathrm{d}\,s_1\,\mathrm{d}\,s_2\ldots\,\mathrm{d}\,s_n.$$

Funkcia $f(s_1,\dots,s_n)$ sa nazýva hustota (rozdelenia).

$$f(t_1,\dots,t_n)=\frac{\partial^n}{\partial t_1\partial t_2\cdots\partial t_n}F_{\boldsymbol{X}}(t_1,\dots,t_n).$$

Funkcie $F_{\boldsymbol{X}}$ a f sa nazývajú združená distribučná funkcia a združená hustota.

□

1.52. Veta. Majme $X_1,\dots,X_n$ náhodné veličiny a označíme si vektor $\boldsymbol{X}=(X_1,\dots,X_n)$.
Potom tvrdenia

1. $X_1,\dots,X_n$ sú nezávislé,
2. $F_{\boldsymbol{X}}(t_1,\dots,t_n)=F_{X_1}(t_1)\cdot F_{X_2}(t_2)\cdot\dots\cdot F_{X_n}(t_n)$,
   a v prípade, že vektor $\boldsymbol{X}$ je absolútne spojitý, potom aj
3. $f(t_1,\dots,t_n)=f_{X_1}(t_1)\cdot\dots\cdot f_{X_n}(t_n)$

sú ekvivalentné.

□

1.53. Dôkaz. Dokážeme cyklicky. Volíme $n=2$.
1. $\to$ 2.
Zvolíme si $I_1=(-\infty,t_1\rangle$, $I_2=(-\infty,t_2\rangle$. Potom 1. hovorí, že javy $(X_1\in I_1)$ a $(X_2\in I_2)$ sú nezávislé.

$$\begin{aligned}F_{\boldsymbol{X}}(t_1,t_2)&=P\left((X_1\le t_1)\cap(X_2\le t_2)\right)=P\left((X_1\in I_1)\cap(X_2\in I_2)\right)=P(X_1\in I_1)\cdot P(X_2\in I_2)=\\&=P(X_1\le t_1)\cdot P(X_2\le t_2)=\\&=F_{X_1}(t_1)\cdot F_{X_2}(t_2).\end{aligned}$$

2. $\to$ 3.

$$\begin{aligned}f(t_1,t_2)&=\frac{\partial^2F_{\boldsymbol{X}}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left(F_{X_1}(t_1)\cdot F_{X_2}(t_2)\right)=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial}{\partial t_2}F_{X_1}(t_1)\cdot F_{X_2}(t_2)\right)=\\&=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(F_{X_1}(t_1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t_2}F_{X_2}(t_2)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t_1}F_{X_1}(t_1)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t_2}F_{X_2}(t_2)=\\&=f_{X_1}(t_1)\cdot f_{X_2}(t_2).\end{aligned}$$

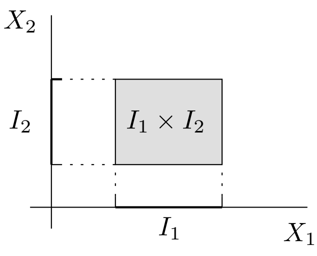
Funkciu dvoch premenných som mohol rozdeliť na dve funkcie (podľa predchádzajúceho bodu). Potom je parciálna derivácia totožná s deriváciou podľa jednej premennej.
3. $\to$ 1.
Majme intervaly $I_1,I_2\subset\mathbb{R}$ a chceme overiť, že javy $(X_1\in I_1)$ a $(X_2\in I_2)$ sú nezávislé.
Obecne platí

$$P(X\in I)=\int_I f_X(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Podobne pre vektor $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ a množinu $A\subset\mathbb{R}^2$ je

$$P(\boldsymbol{X}\in A)=\iint_A f(s_1,s_2)\,\mathrm{d}\,s_1\,\mathrm{d}\,s_2$$

kde $f(s_1,s_2)$ je združená hustota vektoru $\boldsymbol{X}$.
Označíme $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$.



Obrázok 1.17.: Množina.

$$(X_1 \in I_1) \cap (X_2 \in I_2) = (\boldsymbol{X} \in I_1 \times I_2)$$

$$\begin{aligned}
P\left((X_1 \in I_1) \cap (X_2 \in I_2)\right) &= P(\boldsymbol{X} \in I_1 \times I_2) = \iint_{I_1 \times I_2} f(s_1, s_2)\,\mathrm{d}\,s_1\,\mathrm{d}\,s_2 = \\
&= \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(s_1, s_2)\,\mathrm{d}\,s_1 \right) \mathrm{d}\,s_2 = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f_{X_1}(s_1) f_{X_2}(s_2)\,\mathrm{d}\,s_1 \right) \mathrm{d}\,s_2 = \\
&= \int_{I_2} f_{X_2}(s_2) \left(\int_{I_1} f_{X_1}(s_1)\,\mathrm{d}\,s_1 \right) \mathrm{d}\,s_2 = \int_{I_1} f_{X_1}(s_1)\,\mathrm{d}\,s_1 \cdot \int_{I_2} f_{X_2}(s_2)\,\mathrm{d}\,s_2 = \\
&= P(X_1 \in I_1) \cdot P(X_2 \in I_2).
\end{aligned}$$

□

1.54. Definícia. *Marginálna hustota.* Hustota k-tej zložky vektoru $(X_1, \ldots, X_n)$ sa zistí zo združenej hustoty $f_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n)$ tak, že

$$f_{X_k}(t_k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n)\,\mathrm{d}\,t_1 \ldots \mathrm{d}\,t_{k-1}\,\mathrm{d}\,t_{k+1} \ldots \mathrm{d}\,t_n.$$

Integrujem podľa všetkých premenných okrem k-tej. f_{X_k} sa nazýva marginálna hustota.

□

1.55. Definícia. *Stredná hodnota náhodnej veličiny.* Majme náhodnú veličinu X. Stredná hodnota $E(X)$ je:

1. v prípade diskrétnej náhodnej veličiny

$$E(X) = \sum_t t P(X = t) = \sum_t t f_X(t)$$

2. v prípade absolútne spojitej náhodnej veličiny

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

kde $f_X(t)$ je hustota náhodnej veličiny X.

□

1.56. Príklad. Hodíme kockou, X je počet bodov. Aká je stredná hodnota?

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k \underbrace{P(X = k)}_{1/6} = \frac{1 + 2 + \cdots + 6}{6} = 3{,}5.$$

□

1.57. Príklad.

$$f_X(t) = \begin{cases} 0; & t \notin \langle a, b \rangle \\ 1/(b-a); & t \in \langle a, b \rangle \end{cases}$$

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_a^b t \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

O aké rozdelenie ide? Áno, je to rovnomerné rozdelenie.

□

1.58. Príklad. Hádžeme mincou, pokiaľ nepadne panna. $X = 1, 2, \ldots$ je počet potrebných hodov. Ako dlho musíme hádzať, teda aká je hodnota $E(X) =$?

$$P(\text{panna}) = p$$
$$P(\text{orol}) = 1 - p$$

$$E(X) = \sum_t tP(X = t) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \langle\!\langle P(X = k) = (1-p)^{k-1}p \rangle\!\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p =$$
$$= p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

Využil som poznatok o geometrickej rade,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

čo je po derivovaní

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Je to vlastne súčet a ten sa derivuje člen po člene. Pozor na zmenu sčítacieho indexu k. Pre $k = 0$ je $x^k = 1$ a derivácia je nulová a preto v druhej sume volím $k = 1$.

Pre symetrickú mincu platí

$$E(X) = \frac{1}{1/2} = 2.$$

Na to aby padla panna je treba hodiť dva krát.

□

1.59. Veta. Majme náhodné veličiny X a Y. Potom:

1. $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$;
2. $Z = \varphi(X)$, $E(Z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}\,t$;
3. $Z = \psi(X, Y)$, potom $E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s,t) f_{(X,Y)}(s,t)\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t$.

Ak sú X, Y nezávislé, potom

$$E(XY) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\infty}^{\infty} stf_{(X,Y)}(s,t)\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} stf_X(s)f_Y(t)\,\mathrm{d}\,s\right)\mathrm{d}\,t =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} tf_Y(t)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} sf_X(s)\,\mathrm{d}\,s\right)\mathrm{d}\,t = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} sf_X(s)\,\mathrm{d}\,s\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} tf_Y(t)\,\mathrm{d}\,t\right) =$$
$$= E(X)\cdot E(Y)$$

(Väčšinou neplatí $\int \varphi\psi = \int\varphi\int\psi$.)

□

1.60. Príklad. Náhodná veličina X má Bernoulliho rozdelenie, teda

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Aká je stredná hodnota $E(X)$? Rozdelenie je diskrétne, teda $X = 0, 1, \ldots, n$.

Strednú hodnotu určím podľa definičného vzťahu ako

$$E(X) = \sum_{k=0} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Zavediem také náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots, X_n$, aby pre ne platilo

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{v } k\text{-tom hode padla panna} \\ 0 & \text{padol orol} \end{cases}.$$

Potom $X = X_1 + \dots + X_n$ a

$$E(X_k) = 1P(X_k = 1) + 0P(X_k = 0) = p.$$

Použitím predchádzajúcej vety dostanem výsledok

$$E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np.$$

V prípade symetrickej mince je to polovica hodov.

1.61. Definícia. *Rozptyl. Kovariancia.* Majme X, Y náhodné veličiny.
Rozptyl je definovaný ako

$$D(X) = E(X - E(X))^2$$

a kovariancia ako

$$C(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Rozptyl vyjadruje ako veľmi je funkcia rozkmitaná.

1.62. Tvrdenie. Rozptyl môžem upraviť do tvaru

$$D(X) = E(X)^2 - (E(X))^2$$

a kovarianciu do tvaru

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

□

1.63. Dôkaz. Využijem to, že $E(E(X)) = E(X)$ [1].

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X - E(X))^2 = E(X^2 - 2X \cdot E(X) + (E(X))^2) = E(X^2) - E(2X \cdot E(X)) + E(E(X))^2 = \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = \\ &= E(X^2) - (E(X))^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= E(XY - X \cdot E(Y) - Y \cdot E(X) + E(X) \cdot E(Y)) = \\ &= E(XY) - E(Y) \cdot E(X) - E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y) = \\ &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y). \end{aligned}$$

□

1.64. Poznámka. Platí $C(X,X) = D(X)$.
Pre X, Y nezávislé je

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0.$$

Ďalej platí $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$.

□

1.65. Veta. Majme X, Y nezávislé veličiny. Potom:
1. $D(a) = 0$,
2. Ak X a Y sú nezávislé, tak $D(aY + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$.

□

1.66. Dôkaz.

[1] Plynie z toho, že $E(X)$ je konštanta.

$D(a) = E(a^2) - [E(a)]^2 = a^2 - (a)^2 = 0$

$$\begin{aligned} D(aX+bY) &= E(aX+bY)^2 - (E(aX+bY))^2 = E(a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2) - (aE(X)+bE(Y))^2 = \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(XY) + b^2E(Y^2) - (a^2(E(X))^2 + 2abE(X)\cdot E(Y) + b^2(E(Y))^2) = \\ &= a^2[E(X^2) - (E(X))^2] + b^2[E(Y^2) - (E(Y))^2] = \\ &= a^2D(X) + b^2D(Y). \end{aligned}$$

□

1.67. Príklad. Náhodná veličina X a Bernoulliho rozdelenie $B(n,p)$,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Stredná hodnota je $EX = np$. Akú hodnotu má rozptyl DX?
Zavediem náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ takto:

$$X_k = \begin{cases} 1; & \text{úspech v } k\text{-tom pokuse,} \\ 0; & \text{neúspech v } k\text{-tom pokuse.} \end{cases}$$

Potom $X = X_1 + \dots + X_n$. Rozptyl vyjadrím ako $D(X) = D(X_1) + \dots + D(X_n)$.
Úprava $E(X^2) = E(X)$ je možná preto, lebo na tej mocnine nezáleží. X nadobúda hodnoty 0 alebo 1, ktoré sa po umocnení nezmenia.

$$D(X_k) = E(X_k^2) - (E(X_k))^2 = E(X_k) - (E(X_k))^2$$

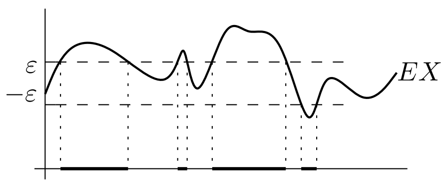
a

$$E(X_k) = 0 \cdot P(X_k = 0) + 1 \cdot P(X_k = 1) = p.$$

Po dosadení $D(X_k) = p - p^2 = (1-p)p$. Záver je, že $D(X) = np(1-p)$.

1.68. Veta. *Čebyševova nerovnosť.* Majme náhodnú veličinu X s konečným rozptylom $D(X)$. (Ak je nekonečný, tak nerovnosť platí, ale nič nám nehovorí; uvidíme neskôr.) Potom pre každé $\varepsilon > 0$ platí:

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$



Obrázok 1.18.: K Čebyševovej nerovnosti.

□

1.69. Dôkaz.
Predpokladajme, že X je absolútne spojitá s hustotou $f_X(t)$.
Položíme $Y = |X - E(X)|$. Ako to vyzerá s $E(Y^2)$? Všimneme si, že absolútna hodnota je zbytočná a teda

$$E(Y^2) = E(|X - E(X)|^2) = E((X - E(X))^2) = D(X),$$

čo sa rovná rozptylu náhodnej veličiny.
Spočítame $E(Y^2)$:
Podľa vzorca $E(\varphi(Y)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f_Y(t)\, \mathrm{d}\, t$ získam vzťah

$$E(Y^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 f_Y(t) \,\mathrm{d}\, t \geq \cdots$$

Ak zmenším integračný obor tak sa hodnota zmenší – integrujem kladú funkciu.

$$\cdots \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} t^2 f_Y(t) \,\mathrm{d}\, t \geq \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon^2 f_Y(t) \,\mathrm{d}\, t = \varepsilon^2 \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} f_Y(t) \,\mathrm{d}\, t = \cdots$$

Pretože $P(Y \in (a,b)) = \int\limits_a^b f_Y(t) \,\mathrm{d}\, t$, môžem pokračovať.

$$\cdots = \varepsilon^2 P(Y \in (\varepsilon, \infty)) = \varepsilon^2 (P(Y > \varepsilon)) = \varepsilon^2 P(|X - E(X)| > \varepsilon).$$

To dohromady dáva

$$D(X) \geq \varepsilon^2 P(|X - E(X)| > \varepsilon),$$

z čoho po vydelení ε^2 dostaneme Čebyševovu nerovnosť.
Tá nám umožní počítať iný typ príkladov.

□

1.70. Príklad. Majme dve mince. Jedna je symetrická, druhá má pravdepodobnosť $P(\text{panna}) = 3/4$. Jednu zvolíme a hodíme n hodov.

Koľko je treba hodov aby sme so zadanou istotou 95 % určili typ mince?

(Úplne to je až pri $n \to \infty$, ale takto máme aspoň nejakú pravdepodobnosť, že to vyšlo. Aj tá nesymetrická minca sa môže tváriť ako symetrická, ale nie je to veľmi pravdepodobné.)

Označíme si n počet hodov, s_n počet panien v nich.

$s_n/n = 1/2$ pre symetrickú mincu a $s_n/n = 3/4$ pre nesymetrickú mincu.

Okolo každého z bodov s_n vytvoríme rovnako veľké disjunktné okolia s polomerom $1/8$. Podľa toho, do ktorého z nich nám spadne vypočítaná hodnota, budeme usudzovať o akú mincu ide.

Pre nesymetrickú mincu

$$P\left(\left|\frac{s_n}{n} - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{1}{8}\right) \geq 0{,}95$$

pre isté n.

Ekvivalentne s obrátenými podmienkami pre symetrickú aj nesymetrickú mincu

$$P\left(\left|\frac{s_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{8}\right) \leq 0{,}05,$$
$$P\left(\left|\frac{s_n}{n} - \frac{3}{4}\right| > \frac{1}{8}\right) \leq 0{,}05.$$

Použijeme Čebyševovu nerovnosť.

Zvolíme hodnotu náhodnej veličiny $X = s_n/n$.

Pre symetrickú mincu platí

$$E(X) = E\left(\frac{s_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(s_n) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$D(X) = D\left(\frac{s_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(s_n) = \frac{1}{n^2} n \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4n}.$$

(Pretože už z minula vieme, že $D(s_n) = np(1-p)$.)

$$P\left(\left|\frac{s_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{8}\right) = P\left(|X - EX| > \frac{1}{8}\right) \leq \frac{DX}{(1/8)^2} = \frac{1/(4n)}{1/64} = \frac{16}{n} \leq 0{,}05.$$

Dostávam teda vzťah pre minimálny počet hodov $n \geq 16/0{,}05 = 320$.

Pre nesymetrickú mincu platí

$$E(X) = \frac{1}{n}E(s_n) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$D(X) = D\left(\frac{s_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(s_n) = \frac{1}{n^2}n\frac{3}{16} = \frac{3}{16n}.$$

$$P\left(|X - E(X)| > \frac{1}{8}\right) \le \frac{D(X)}{(1/8)^2} = \frac{3/(16n)}{1/64} = \frac{12}{n} < 0{,}05.$$

V tomto prípade je minimálny počet hodov $n \ge 12/0{,}05 = 240$.

Záver: hodíme 320 hodov a zistíme relatívny počet panien. Podľa toho do akého okolia (či k 1/2 alebo k 3/4) to padne, môžem s 95 % istotou povedať, ktorá minca to je.

Časom uvidíme, že sa dá tento typ nerovnosti zlepšiť. V Čebyševovej nerovnosti je veľa zanedbávania a je málo presná. Neskôr uvidíme, že n môže byť menšie.

□

1.71. Veta. *Zákon veľkých čísel.* Majme postupnosť nezávislých náhodných veličín $X_1, X_2, \ldots$ s rovnakou distribučnou funkciou.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - E(X_i)\right| > \varepsilon\right) = 0,$$

pre každé ε. $i = 1, \ldots, n$.

Náhodné veličiny $X_1, \ldots X_n$ môžu reprezentovať výsledky merania, stredná hodnota $E(X_i)$ je „skutočná hodnota“.

Po prevedení do doplnkového tvaru

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - E(X_i)\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Čím viac meraní, tým je väčšia pravdepodobnosť, že aritmetický priemer sa od skutočnej hodnoty líši o náš ε.

□

1.72. Dôkaz.

Označíme $X = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

Potom

$$E(X) = E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \cdots + E(X_n)).$$

Pretože $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n)$ (majú rovnakú distribučnú funkciu), platí

$$E(X) = \frac{1}{n}nE(X_1) = E(X_1).$$

Rozptyl je

$$D(X) = D\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)) = \frac{D(X_1)}{n}.$$

Rozptyl $D(X)$ je rozptyl aritmetického priemeru.

Čo nám Čebyševova nerovnosť dá?

Chceme počítať

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - E(X_1)\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(|X - E(X)| > \varepsilon\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{D(X)}{\varepsilon^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{D(X_1)}{n\varepsilon^2}.$$

Ak $n \to \infty$ tak ten zlomok má limitu 0. Pretože pravdepodobnosť nie je menšia než nula.

□

1.73. Definícia. *Konvolúcia.* Majme také funkcie f, g aby platlo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \,\mathrm{d}\, t < \infty$$

a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \,\mathrm{d}\, t < \infty.$$

Konvolúcia funkcií f, g sa nazýva funkcia

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) \,\mathrm{d}\, s.$$

Môžme sa na to pozerať ako na „iný“ súčin.

□

1.74. Poznámka. Nie je dôležité v ktorej funkcii sa nachádza posun s.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) \,\mathrm{d}\, s = \begin{vmatrix} u = t-s \\ \mathrm{d}\, u = -\,\mathrm{d}\, s \end{vmatrix} = \int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(t-u)(-\,\mathrm{d}\, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) \,\mathrm{d}\, u$$

□

Prečo sa tu tá konvolúcia vyskytuje?

1.75. Veta. Majme dve nezávislé náhodné veličiny X, Y. Každá bude mať hustotu rozloženia $f_X(t)$ a $f_Y(t)$.

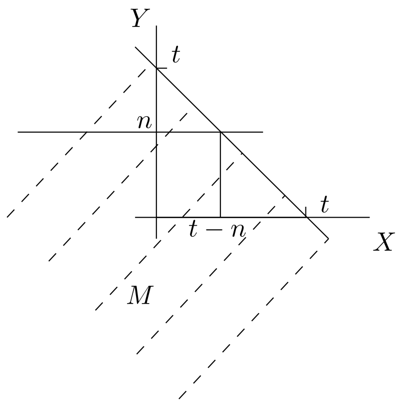
Potom $Z = X + Y$ má hustotu danú funkciou

$$f_Z = f_X * f_Y.$$

□

1.76. Dôkaz.

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(X + Y \leq t) = \cdots$$



Obrázok 1.19.: Množina $\{(X,Y) | X + Y \leq t\}$.

$$\cdots = P\left((X,Y) \in M\right) = \iint_M f_{(X,Y)}(s,u) \,\mathrm{d}\, s \,\mathrm{d}\, u = \iint_M f_X(s) f_Y(u) \,\mathrm{d}\, s \,\mathrm{d}\, u =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-u} f_X(s) f_Y(u) \,\mathrm{d}\, s \,\mathrm{d}\, u = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) \left(\int_{-\infty}^{t-u} f_X(s) \,\mathrm{d}\, s \right) \mathrm{d}\, u = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) P(X \leq t-u) \,\mathrm{d}\, u =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) F_X(t-u) \,\mathrm{d}\, u.$$

Teraz sa pozrieme na začiatok a na koniec. Deriváciou podľa t dostaneme

$$f_Z(t) = (F_Z(t))' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(u)F_X(t-u)\,\mathrm{d}\,u\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(u)f_X(t-u)\,\mathrm{d}\,u = f_Y * f_X.$$

$\square$

Ak má náhodná veličina X normálne rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$, potom

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,t = \cdots$$

Exponent exponenciály je zložitý. Preto volím substitúciu:

$$\cdots = \left|\begin{array}{ccc} (t-u)/\sigma & = & u \\ t & = & \sigma u + \mu \\ \mathrm{d}\,t & = & \sigma\,\mathrm{d}\,u \end{array}\right| = \cdots$$

Integračné medze ostávajú nezmenené.

$$\cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sigma u + \mu)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\sigma\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}\,u + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}\,u = \cdots$$

Miesto počítania integrálu si môžme všimnúť ich vlastnosti. V prvom integráli je nepárna funkcia. To, čo sa načíta v ∞, sa odčíta v $-\infty$. Prvý integrál je teda nulový.

Druhý integrál je tzv. Laplaceov integrál. Primitívna funkcia k nemu síce existuje, ale nedá sa zložiť zo známych funkcií. Jeho hodnoty sú tabuľkované. Integrál z tejto funkcie cez celé $\mathbb{R}$ je rovný hodnote $\sqrt{2\pi}$.

$$\cdots = 1 = E(X).$$

Ako vyzerá rozptyl? Podľa definície vieme, že rozptyl

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Vypočítame strednú hodnotu X^2.

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,t = \cdots$$

Použijeme rovnakú substitúciu ako pri počítaní predošlého integrálu:

$$\cdots = \left|\frac{t-\mu}{\sigma} = u\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sigma u + \mu)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}u^2}\sigma\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma^2u^2 + 2\sigma\mu u + \mu^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}\,u = \cdots$$

Integrál znova môžme rozložiť na viac integrálov. Tretí je znova Laplaceov integrál a rovná sa $\sqrt{2\pi}\mu$. Druhý integrál je nulový, pretože rovnako ako minule obsahuje nepárnu funkciu.
Ostáva nám teda spočítať iba prvý integrál.

$$\cdots = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2\mathrm{e}^{1/2u^2}\,\mathrm{d}\,u + \mu^2 = \cdots$$

Použijeme metódu „Per-partes“:

$$\cdots = \left| \begin{array}{ll} u = f & u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} = g' \\ 1 = f' & -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} = g \end{array} \right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[-u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\, \mathrm{d}\, u \right\} + \mu^2 = \cdots$$

Znova si môžme miesto počítania integrálu všimnúť jeho vlastnosti. Prvý integrál má záporný exponent, ktorý sa zväčšuje a preto pre $\pm\infty$ konverguje k nule.

Druhý integrál je Laplaceov integrál, ktorého hodnotu už poznáme.

$$\cdots = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sqrt{2\pi} \right\} + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

Odtiaľ vidíme, že pre rozptyl platí

$$D(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

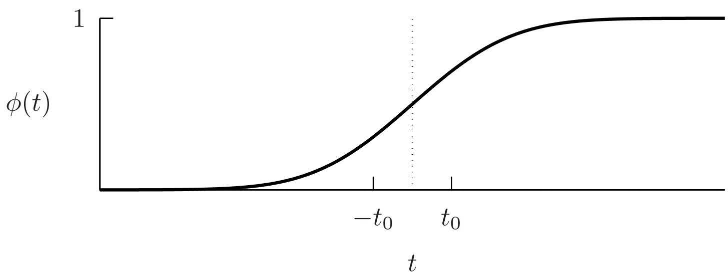
Pretože s Laplaceovým integrálom budeme potrebovať pracovať, označíme si ho ako

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\, \mathrm{d}\, u;$$

potom pre jeho deriváciu platí

$$\phi'(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Koeficient $1/\sqrt{2\pi}$ sme sem dali preto, aby limita $\phi(t)$ v nekonečne vychádzala 1.



Obrázok 1.20.: Závislosť Laplaceovho integrálu na integračnej medzi t.

Platí

$$\phi(t_0) + \phi(-t_0) = 1.$$

1.77. Definícia. *Štandardizovaný súčet.* Majme nezávislé náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots$. (Pod X_i si môžme predstaviť výsledky meraní.)

$E(X_i) = \mu$ a $D(X_i) = \sigma^2$. Položíme

$$X_i^* = \frac{X_i - \mu}{\sigma}.$$

To má výhodu v tom, že ich stredná hodnota bude 0 a rozptyl 1. To sú dosť „príjemné“ hodnoty.

Potom

$$E(X_i^*) = E\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) = \cdots$$

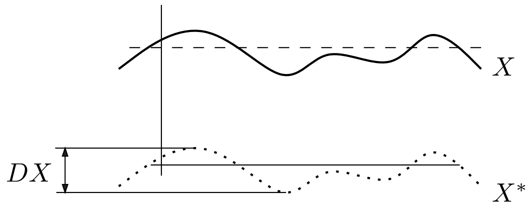
Konštanty zo strednej hodnoty vytkneme a dostávame:

$$\cdots = \frac{1}{\sigma}(E(X_i) - E(\mu)) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0.$$

Pre rozptyl platí

$$D(X_i^*) = D\left(\frac{1}{\sigma}(X_i - \mu)\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left(D(X_i) - D(\mu)\right) = \frac{1}{\sigma^2}(\sigma^2 - 0) = 1.$$

Aj tu sa konštanty vytýkali – s druhou mocninou. Konštantná funkcia sa nerozptyluje.



Obrázok 1.21.: Transformovaná náhodná veličina.

Funkciu posunieme tak, aby $E(X^*) = 0$ a $D(X^*) = 1$.
Štandardizovaný súčet náhodných veličín $X_1, X_2, \dots$ je

$$S_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1^* + X_2^* + \cdots X_n^*) = \frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Prečo takýto súčet? Chceme stále strednú hodnotu nulovú a rozptyl jednotkový. To zaručí voľba koeficientu.

Platí, že

$$E(S_n^*) = 0,$$
$$D(S_n^*) = D\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1^* + \cdots + X_n^*)\right) = \frac{1}{n}n = 1.$$

□

1.78. Veta. Centrálna limitná veta. Majme postupnosť nezávislých náhodných veličín $X_1, X_2, \dots$, ktoré majú $E(X_i) = \mu$ a $D(X_i) = \sigma^2$.

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} P(a < S_n^* < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}\,u.$$

Vyjadrené iným spôsobom:

$$\lim_{t\to\infty} F_{S_n^*}(t) = \phi(t).$$

Nemusíme vedieť ako sa chovajú jednotlivé pokusy. Ale vieme, že ak ich budeme mať väčší počet, tak sa súbor náhodných veličín bude chovať tak, ako keby mal rozdelenie podľa Gaussovej krivky.

1.79. Príklad. Majme dve mince. Symetrickú a nesymetrickú s $P(\text{panna}) = 3/4$. Koľko je treba hodov aby sme s 95 % istotou mohli určiť o akú mincu ide?

Tento príklad sme už počítali pomocou Čebyševovej nerovnosti. Teraz k výpočtu použijeme centrálnu limitnú vetu.

Zavedieme si: $X_i = \begin{cases} 1 & \text{v } i\text{-tom hode padla panna} \\ 0 & \text{nepadla panna} \end{cases}.$

Súčet $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ vyjadruje počet panien v n hodoch.

Hľadáme kritérium podľa ktorého môžme povedať, o akú mincu ide.

Vieme, že ak by $n \to \infty$, tak

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n} \to E(X).$$

Teoretické pravdepodobnosti sú 1/2 a 3/4. Okolo týchto bodov vytvoríme disjukntné okolia, ktorých polomer bude $\varepsilon = 1/8$. Pre každú mincu musíme počítať zvlášť.

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \le \varepsilon\right) \ge 0{,}95.$$

Hľadáme, ako sa od tohto μ líši aritmetický priemer. Otázka znie, aké musí byť n, aby jav mal požadovanú pravdepodobnosť?

Musíme použiť štandardizovaný súčet, podmienku vyjadríme pomocou S_n^*.

$$-\varepsilon \le \frac{X_1 + \cdots X_n}{n} - \mu \le \varepsilon$$

$$-\varepsilon \le \frac{X_1 + \cdots X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \varepsilon \quad \Big/ \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \le S_n^* \le \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$$

Pre aké n je

$$P\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \le S_n^* \le \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \ge 0{,}95?$$

Centrálna limitná veta hovorí, že

$$P\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \le S_n^* \le \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}} \mathrm{e}^{-(1/2)u^2}\,\mathrm{d}\,u = \phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \phi\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) =$$

$$= \phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \left(1 - \phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right) = 2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1.$$

Ešte nepoznáme σ,

$$\sigma^2 = D(X).$$

To môžme spočítať, alebo si všimneme, že hádzanie mincou je vlastne Bernoulliho schéma a tam rozptyl poznáme. Ale skúsime si to spočítať.

$$\sigma^2 = D(X_i) = E(X_i)^2 - (E(X_i))^2 = \cdots$$

V prvom člene nezáleží na mocnine. Kde bola 1 tam ostáva, kde bola 0 tam ostáva.

$$\cdots = E(X_i) - (E(X_i))^2.$$

Pre jeden hod platí

$$E(X_i) = 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) = p,$$

pravdepodobnosť pre rôzne mince je $p = 1/2$ alebo $p = 3/4$.
Odtiaľ vidíme, že $\sigma^2 = p - p^2 = p(1-p)$.
Môžme spočítať prípad symetrickej mince:
$\varepsilon = 1/8$, $\sigma^2 = 1/4$.

$$2\phi\left(\frac{\frac{1}{8}\sqrt{n}}{\frac{1}{2}}\right) - 1 \ge 0{,}95$$

$$2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1 \ge 0{,}95$$

$$\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \ge 0{,}975$$

Môžme vypočítať integrál, alebo nájsť v tabuľkách, pre akú hodnotu parametra má funkcia ϕ hľadanú hodnotu:

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \ge 1{,}96$$

$$n \ge 62.$$

Pre prípad nesymetrickej mince:
$\varepsilon = 1/8$, $\sigma^2 = 3/16$.

$$2\phi\left(\frac{\frac{1}{8}\sqrt{n}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}\right) - 1 \geq 0{,}96$$
$$\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}\right) \geq 0{,}975$$
$$\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{3}} \geq 1,96$$
$$n \geq 47.$$

Záver: Na to, aby sme so zadanou pravdepodobnosťou určili o akú mincu ide, je potrebných aspoň 62 hodov.