# Théorie des groupes et algèbre multilinéaire

Karol Gromada

2024-2025

# Table des matières

## Première partie

# Théorie des groupes

# 1 Groupes

## 1.1 Une étude sociologique des groupes

Commençons par définir la notion de groupe.

**Définition 1.1.1.** Un groupe est la donnée d'un triplet $(G, *, e)$ avec $G$ un ensemble muni d'une fonction $\circ : G \times G \to G : (g, h) \mapsto g * h$ appelée **loi de composition**, telle que :

1. la loi $*$ est associative, c'est-à-direă:

$$\forall a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$$

2. $G$ contient un élément $e$, appelé **élément neutre**, tel que $\forall g \in G$, on ait

$$e * g = g = g * e$$

3. Pour tout $g \in G$, il existe $g' \in G$ tel que $g' * g = e$

**Proposition 1.1.2.** Soit $G$ un groupe.

(i) L'élément neutre est unique

(ii) Pour tous $g, h \in G$, si $g * h = e$ alors $h * g = e$

(iii) Pour tout $g \in G$, l'élément $g'$ issu de la condition 3 est unique

***DÉMONSTRATION.*** Ceci est une preuve valable... □

Le corollaire suivant est immédiat.

**Corollaire 1.1.3.** Soit $G$ un groupe. Pour tout $g \in G$, il existe un unique élément $g' \in G$ tel que $g' * g = e = g * g'$.

Cet élément est noté $g^{-1}$ et est appelé l'inverse de $g$.

Par exemple, le singleton $G = \{e\}$, avec la loi $e * e = e$ est un groupe. C'est le groupe **trivial**.

Certains groupes ont la particularité que leur loi de composition est commutative. Définissons la notion de *groupe commutatif*.

**Définition 1.1.4.** Un groupe $G$ est dit **commutatif** (ou **abélien**) si pour tous $g, h \in G$, on a $g * h = h * g$.

Il est important de garder en tête que les groupes commutatifs font figure dexception. On termine cette chapter avec une dernière observation élémentaire.

**Lemme 1.1.5.** Soit $(G, *)$ un groupe. Pour tout élément $g \in G$ et tout entier $n > 0$, on a $(g^{-1})^n = (g^n)^{-1}$.

***DÉMONSTRATION.*** On procède par récurrence sur $n$. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons que l'énonce est vrai pour

$n$. Cela implique que $(g^{-1})^n * g^n = e$. On en déduită:

$$\begin{aligned}(g^{-1})^{n+1} * g^{n+1} &= \left(g^{-1} * (g^{-1})^n\right) * (g^n * g) \\ &= g^{-1} * \left((g^{-1})^n * g^n\right) * g \\ &= g^{-1} * e * g \\ &= g^{-1} * g & = e\end{aligned}$$

Donc $(g^{-1})^{n+1}$ est l'inverse de $g^{n+1}$. □

## 1.2 Groupes de permutations

Intéressons-nous maintenant au cas particulier de l'exemple du début de cours. Prenons $O$ un ensemble non vide, dépourvu de toute autre structure. Dans ce cas, le groupe $\mathrm{Aut}(O)$ est constitué de toutes les permutations des points de $O$, c'est-à-dire de toutes les bijections de $O$ dans lui-même. On note ce groupe $\mathrm{Sym}(O)$ et on l'appelle le **groupe symétrique** associe à $O$.

Dans le cas ou $O = \{1, \ldots, n\}$, on écrit plutôt $\mathrm{Sym}(n)$ ou $S_n$.

Un élément $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ est une fonction bijective qui associe à tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ un entier $\sigma(i)$. Le neutre de $\mathrm{Sym}(n)$ est bien sûr la permutation triviale $\mathrm{Id} : i \mapsto i$. La loi de groupe est la composition des fonctions notée $\circ$. Dans nos notations, le symbole $\circ$ sera omis. On écrit donc

$$\alpha \circ \beta = \alpha\beta$$

et on parle du *produit* de $\alpha$ et $\beta$.

Il est pratique de noter la permutation $\sigma$ comme suit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

**Définition 1.2.1.** On dit que $x \in O$ est un point fixe de $\sigma$ si $\sigma(x) = x$.

Par convention, nous pouvons omettre les points fixes dans la notation matricielle d'une permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$. Par exemple, pour $n = 7$, la permutation

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

fixe 2, 5 et 6.

**Définition 1.2.2.** Le **support** d'une permutation $\sigma$ est le complémentaire de l'ensemble de ses points fixes. On la note $\mathrm{supp}(\sigma)$. Deux permutations sont dites **disjointes** si leurs supports sont disjoints.

**Proposition 1.2.3.** Deux permutations disjointes commutent. Autrement dit, si $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(O)$ sont disjointes, alors $\alpha\beta = \beta\alpha$.

***Démonstration.*** Soit $x \in O$ un point quelconque. Supposons d'abord que $x \in \mathrm{supp}(\alpha)$. Comme $\mathrm{supp}(\alpha)$ et $\mathrm{supp}(\beta)$ sont disjoints, $x \notin \mathrm{supp}(\beta)$ ce qui signifie que $x$ est fixé par $\beta$. Donc $\alpha\beta(x) = \alpha(x)$.
De plus, on sait que $\alpha(x) \in \mathrm{supp}(\alpha)$, sinon $\alpha(x)$ serait fixé par $\alpha$, ce qui impliquerait que $\alpha\alpha(x) = \alpha(x)$ et donc que $\alpha(x) = x$ et $x \notin \mathrm{supp}(\alpha)$. De manière analogue, on peut appliquer l'argument précédent et déduire que $\beta\alpha(x) = \alpha(x)$. On obtient ainsi que $\alpha\beta(x) = \alpha(x) = \beta\alpha(x)$. En échangeant $\alpha$ et $\beta$, on obtient la même conclusion dans le cas ou $x \in \mathrm{supp}(\beta)$.
Enfin, si $x \notin \mathrm{supp}(\alpha)$ et $x \notin \mathrm{sup}(\beta)$ alors $x$ est fixé à la fois par $\alpha$ et $\beta$ ce qui implique que $\alpha\beta(x) = \alpha(x) = x = \beta(x) = \beta\alpha(x)$.
Et donc, $\alpha\beta = \beta\alpha$ quelque soit $x \in O$. □

Définissons maintenant ce qu'est une permutation cyclique.

**Définition 1.2.4.** Une permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(O)$ est appelée un **cycle** (ou est dite **cyclique**) si pour tous $x, y \in \mathrm{supp}(\sigma)$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\sigma^n(x) = y$.
Lorsque $\mathrm{supp}(\sigma)$ est fini de cardinal $k$, on dit que $\sigma$ est un $k$-**cycle**.

**Remarque.** Si $\sigma$ est un $k$-cycle, et que $x \in \mathrm{supp}(\sigma)$, alors

$$\sigma = \begin{pmatrix} x & \sigma(x) & \cdots & \sigma^{k-1}(x) \\ \sigma(x) & \sigma^2(x) & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Vu que les cycles jouent un rôle important, il convient de leur réserver la notation

$$\sigma = \begin{pmatrix} x & \sigma(x) & \sigma^2(x) & \cdots & \sigma^{k-1}(x) \end{pmatrix}$$

Notre prochain objectif est de montrer que dans le groupe $\mathrm{Sym}(n)$, tout élément est un produit de cycles disjoints.

**Théorème 1.2.5.** Soit $n > 0$ un entier. Pour toute permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$, il existe des cycles $\gamma_0, \ldots, \gamma_l$ tels que :

(i) $\sigma = \gamma_0 \cdots \gamma_l$.

(ii) pour $i \neq j$, les cycles $\gamma_i$ et $\gamma_j$ sont disjoints.

(iii) pour tout $i$ on a $\mathrm{supp}(\gamma_i) \subseteq \mathrm{supp}(\sigma)$.

***DÉMONSTRATION.*** On pose $m = |\mathrm{supp}(\sigma)|$ et on procède par récurrence sur ce $m$.
Si $m = 0$, la permutation $\sigma$ est triviale. On peut la voir comme un 0-cycle. Elle est évidemment disjointe de toute autre permutation. L'énonce est donc vrai.
Supposons maintenant $m > 0$, de sorte que $\mathrm{supp}(\sigma)$ est non vide. Soit $x \in \mathrm{supp}(\sigma)$ un point quelconque. Considérons la suite

$$x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots$$

de points de $O = \{1, \ldots, n\}$. Comme $O$ est fini, il doit exister des entiers $p > q \geq 0$ tels que $\sigma^p(x) = \sigma^q(x)$. En post-composant par $(\sigma^q)^{-1} = \sigma^{-q}$, on trouve que $\sigma^{p-q}(x) = x$. Soit maintenant $k \geq 0$ le plus petit entier positif ou nul tel que $\sigma^k(x) = x$. Les points de l'ensemble

$$O(x) = \left\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{k-1}(x)\right\}$$

sont deux à deux distincts et permutés cycliquement par $\sigma$. Définissons un $k$-cycle $\gamma_0$ en posant

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} x & \sigma(x) & \cdots & \sigma^{k-1}(x) \end{pmatrix}$$

Clairement, la permutation $\sigma$ préservé $O(x)$, c'est-à-dire

$$\sigma(y) \in O(x) \text{ pour tout point } y \in O(x)$$

et la restriction de $\sigma$ à $O(x)$ coïncide avec $\gamma_0$. Notons que

$$\mathrm{supp}(\gamma_0) = O(x) \subseteq \mathrm{supp}(\sigma).$$

En outre, la permutation $\gamma_0^{-1}\sigma$ fixe chacun des points de $O(x)$. Comme $\gamma_0$ agit comme l'identité sur le complémentaire de $O(x)$, on en déduit que

$$\mathrm{supp}(\sigma) = O(x) \sqcup \mathrm{supp}(\gamma_0^{-1}\sigma)$$

En particulier $\gamma_0$ est disjoint de la permutation $\gamma_0^{-1}\sigma$. Dès lors, l'hypothèse de récurrence s'applique à $\gamma_0^{-1}\sigma$, qui s'écrit donc comme un produit de cycles

$$\gamma_0^{-1}\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_l$$

satisfaisant les conditions (ii) et (iii) du théorème. En multipliant l'égalité qui précède par $\gamma_0$ à gauche, on trouve $\sigma = \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_l$, ce qui prouve (i). Comme $\mathrm{supp}(\sigma)$ est la réunion disjointe de $O(x)$ et de $\mathrm{supp}(\gamma_0^{-1}\sigma)$, les assertions (ii) et (iii) découlent de l'hypothèse de récurrence. $\square$

**Définition 1.2.6.** Soit $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ des cycles disjoints tels que $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_l$. La représentation $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_l$ est appelée **décomposition standard de $\sigma$ en un produit de cycles**. Cette écriture de $\sigma$ est unique à une permutation près de l'ordre des facteurs $\gamma_i$.

## 1.3 Transpositions et signature

# Deuxième partie

# Algèbre multilinéaire

# 2 Formes linéaires

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $V$ et $W$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On définit

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{A : V \to W \mid A \text{ linéaire}\}$$

Une toute première affirmation est que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La preuve se fait très simplement. Soit $A, B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. On définit l'addition comme

$$\begin{aligned} A + B : V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto (A + B)(v) \overset{\text{def}}{=} A(v) + B(v) \end{aligned}$$

et la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ comme

$$\begin{aligned} \lambda A : V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto (\lambda A)(v) \overset{\text{def}}{=} \lambda \cdot (A(v)) \end{aligned}$$

La preuve en découle trivialement.

## 2.1 Formes linéaires

**Définition 2.1.1.** Une forme linéaire sur un espace vectoriel $V$ sur $\mathbb{K}$ est une application linéaire

$$f : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

On définit aussi le dual a $V$ qui est $V^* = \{\text{formes linéaires sur } V\}\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$

**Théorème 2.1.2.** Soit $\dim(V) = n < \infty$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base ordonnée de $V$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi : V^* &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ f &\longmapsto (f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire donc $\dim(V^*) = n$.
En outre, $V^*$ possède une seule base ordonnée $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ définie par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$. C'est la base duale.

***DÉMONSTRATION.*** $\varphi$ est linéaire, car $\forall f, g \in V^*$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g) &= ((\lambda f + \mu g)(e_1), \dots, ((\lambda f + \mu g)(e_n))) \\ &= (\lambda f(e_1) + \mu g(e_1), \dots, \lambda f(e_n) + \mu g(e_n)) \\ &= \lambda\,(f(e_1), \dots, f(e_n)) + \mu\,(g(e_1), \dots, g(e_n)) \\ &= \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g) \end{aligned}$$

De plus, $\varphi$ est injective car

$$\begin{aligned}\ker(\varphi) &= \{f \in V^* \mid (f(e_1), \dots, f(e_n)) = (0, \dots, 0)\} \\ &= \{f \in V^* \mid f(v) = 0 \ \forall v \in V\} \\ &= \{0\}\end{aligned}$$

Pour vérifier la surjectivité, définissons pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ une forme linéaire $e_i^* : V \to \mathbb{K}$ telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Observons que

$$\begin{aligned}\varphi(e_i^*) &= (e_i^*(e_1), \dots, e_i^*(e_i), \dots, e_i^*(e_n)) \\ &= (0, \dots, 1, \dots, 0) \\ &= i\text{-eme vecteur de la base canonique de } \mathbb{K}^n\end{aligned}$$

Cela implique que $\mathbb{K}^n$ contient une base de $\mathbb{K}^n$ et contient dès lors tout $\mathbb{K}^n$ puisque $\varphi$ est linéaire. On conclut donc que $\varphi$ est un isomorphisme. □

**Remarque.** Soit $V, W$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Fixons $f \in V^*$ et $w \in W$. Définissons ensuite

$$\begin{aligned}B_{(f,w)} : V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto f(v) \cdot w\end{aligned}$$

Alors, $B_{(f,w)}$ est linéaire donc $B_{(f,w)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Cette construction fourni une application

$$\begin{aligned}V^* \times W &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ (f, w) &\longmapsto B_{(f,w)}\end{aligned}$$

Cette application est bilinéaire. Elle dépend linéairement de chacune des 2 variables.

## 2.2 Bidual

Le bidual de $V$ est défini comme $V^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (V^*)^*$. Ses éléments sont parfois appelés des cocovecteurs.
Soit $v \in V$ fixe et

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_v : V^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto f(v)\end{aligned}$$

Cette application $\mathrm{ev}_v$ est un cocovecteur. En effet, $\forall f, g \in V^*$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_v(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)(v) \\ &= \lambda f(v) + \mu g(v) \\ &= \lambda\, \mathrm{ev}_v(f) + \mu\, \mathrm{ev}_v(g)\end{aligned}$$

**Remarque.** Tout vecteur est un cocovecteur.

**Théorème 2.2.1** (Bidual).
(i) L'application $V \to V^{**} : v \mapsto \mathrm{ev}_v$ est linéaire et injective.
(ii) Si $\dim(V) = n < \infty$ alors, elle est aussi surjective (et donc c'est un isomorphisme).

***Démonstration.*** (i) Soient $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f \in V^*$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_{\lambda v + \mu g}(f) &= f(\lambda v + \mu w) \\ &= \lambda f(v) + \mu f(w) \\ &= \lambda\, \mathrm{ev}_v(f) + \mu\, \mathrm{ev}_w(f) \\ &= (\lambda\, \mathrm{ev}_v + \mu\, \mathrm{ev}_w)(f)\end{aligned}$$

Donc $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ est linéaire.
Supposons $v \in V \setminus \{0\}$. On peut alors choisir une base $Q$ de $V$ qui contient $v$. Il existe alors un seul unique $f \in V^*$ tel que $f(v) = 1$ et $f(w) = 0$ pour tout $w \in Q \setminus \{v\}$. Donc

$$\mathrm{ev}_v(f) = 1 \neq 0 \implies \mathrm{ev}_v \neq 0 \implies v \notin \ker(\mathrm{ev})$$

Donc $\ker(\mathrm{ev}) = \{0\}$ et ev est injective.
(ii) Par le théorème 2.1.2 on sait que $\dim(V^*) = n$. De manière analogue, $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = n$. Par le théorème du rang, elle est aussi surjective. □

## 2.3 Transposée

Considérons maintenant deux espaces vectoriels $V, W$ sur $\mathbb{K}$ et une application $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

**Définition 2.3.1.** L'application

$$\begin{aligned} A^\top : W^* &\longrightarrow V^* \\ f &\longmapsto f \circ A \end{aligned}$$

est appelée la transposée de $A$.

**Théorème 2.3.2.** Soit $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

(i) La transposée $A^\top : W^* \to V^*$ est linéaire.
(ii) $\forall B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ on a $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.
(iii) $\forall B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ on a $(A \circ B)^\top = B^\top \circ A^\top$.
(iv) Si $\dim(V), \dim(W) < \infty$ alors $A$ est bijective si et seulement si $A^\top$ l'est et $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$.

***Démonstration.*** (i) Soient $\varphi, \psi \in W^*$ des formes linéaires et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ des scalaires. On a

$$\begin{aligned} A^\top(\lambda\varphi + \mu\psi) &= (\lambda\varphi + \mu\psi) \circ A \\ &= \lambda\varphi \circ A + \mu\psi \circ A \\ &= \lambda A^\top(\varphi) + \mu A^\top(\psi) \end{aligned}$$

ce qui confirme que $A^\top$ est linéaire.
(ii) Soit $\varphi \in W^*$. On a

$$\begin{aligned} (A + B)^\top(\varphi) &= \varphi \circ (A + B) \\ &= \varphi \circ A + \varphi \circ B \\ &= A^\top(\varphi) + B^\top(\varphi) \\ &= (A^\top + B^\top)(\varphi) \end{aligned}$$

(iii) Soit $\varphi \in W^*$. On a

$$\begin{aligned} (A \circ B)^\top(\varphi) &= \varphi \circ (A \circ B) \\ &= (\varphi \circ A) \circ B \\ &= A^\top(\varphi) \circ B \\ &= B^\top\left(A^\top(\varphi)\right) \\ &= (B^\top \circ A^\top)(\varphi) \end{aligned}$$

(iv) Remarquons d'abord que si $\mathrm{Id} : V \to V : v \mapsto v$ est l'application identique alors $\mathrm{Id}^\top$ est l'application identique sur $V^*$. En effet, pour toute forme linéaire $\varphi \in V^*$, on a $\mathrm{Id}^\top(\varphi) = \varphi \circ \mathrm{Id} = \varphi$. Si maintenant $A : V \to W$ est inversible, elle admet un inverse $A^{-1}$ et on a $\mathrm{Id} = A^{-1} \circ A$ ce qui implique que $\mathrm{Id}^\top = A^\top \circ (A^{-1})^\top$ par le point (iii). Cela confirme que $A^\top$ est inversible et que son inverse est $(A^{-1})^\top$. La réciproque s'établit de manière analogue. □

# 3 Application multilinéaire et produit tensoriel

## 3.1 Application bilinéaire

**Définition 3.1.1.** Soit $V_1, V_2, W$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : V_1 \times V_2 \to W$ est bilinéaire si elle est linéaire en chacune de ses coordonnés. C'est-à-dire que $\forall v_2 \in V_2$ fixé, $V_1 \to W : x \mapsto f(x, v_2)$ est linéaire et $\forall v_1 \in V_1$ fixé, $V_2 \to W : y \mapsto f(v_1, y)$ est linéaire.

Donnons quelques exemples d'applications bilinéaires.

**Exemple 1 :** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}$ alors le produit scalaire

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\left(\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \longmapsto \vec{x} \cdot \vec{y} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est une application (et même forme !) bilinéaire. Il y a plus d'exemples, mais flm d'écrire.

Introduisons la notation suivante.

$$\mathcal{L}(V_1, V_2; W) = \{\text{application bilinéaire de } V_1 \times V_2 \text{ dans } W\}$$

**Affirmation :** $\mathcal{L}(V_1, V_2; E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La preuve se fait tres simplement a partir des définitions suivantes. Soit $f, g \in \mathcal{L}(V_1, V_2, W)$, on pose

$$(f + g)(v_1, v_2) = f(v_1, v_2) + g(v_1, v_2)$$
$$(\lambda f)(v_1, v_2) = \lambda f(v_1, v_2)$$

On se pose donc la question naturelle quelle est la dimension de $\mathcal{L}(V_1, V_2; W)$ ? Fixons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $V_1$ et $(d_1, \dots, d_m)$ une base de $V_2$. Tout $\varphi \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W)$ est déterminé par $\varphi(e_i, d_j) = w_{ij} \in W$. Soit $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$. On peut réécrire ces 2 vecteurs comme

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{K}) \ \text{ et } \ v_2 = \sum_{j=1}^{m} \mu_j d_j \quad (\mu_j \in \mathbb{K})$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, v_2) &= \varphi\left(\sum_i \lambda_i e_i, \sum_j \mu_j d_j\right) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \varphi(e_i, d_j) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j w_{ij} \end{aligned}$$

Pour l'inverse, choisissons $n \cdot m$ vecteurs de $W$, disons $x_{ij} \in W$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ alors $\exists! \psi \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W)$ tel que $\psi(e_i, d_j) = x_{ij}$. En effet, on peut poser

$$\psi\left(\underbrace{\sum \lambda_i e_i}_{v_1}, \underbrace{\sum \mu_j d_j}_{v_2}\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j x_{ij}$$

On voit ainsi que les éléments de l'espace auquel on est intéressé sont déterminés par $n \cdot m$ vecteurs de $W$ qui lui-même est un espace dont là d'immersion est, disons $l$. On conclut donc que

$$\dim\left(\mathcal{L}(V_1, V_2; W)\right) = n \cdot m \cdot l$$

## 3.2 Application bilinéaire universelle

Soit $V_1, V_2, U$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

**Définition 3.2.1.** Une application $\varphi \in \mathcal{L}(V_1, V_2; U)$ est appelée universelle si pour tout espace vectoriel $W$ sur $\mathbb{K}$ et $\forall h \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W)$, $\exists! \tilde{h} : U \to W$ linéaire telle que $\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ on a $h(v_1, v_2) = \tilde{h}(\varphi(v_1, v_2))$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "h"'] & U \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{h}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

**Théorème 3.2.2.** Il existe un espace vectoriel $U$ sur $\mathbb{K}$ ou $\varphi \in \mathcal{L}(V_1, V_2; U)$ est universelle.

***DÉMONSTRATION.*** On va voir qu'on peut poser

$$U = \mathcal{L}(V_1^*, V_2^*; \mathbb{K})$$

On doit construire

$$\begin{aligned} \varphi : V_1 \times V_2 &\longrightarrow U \\ (v_1, v_2) &\longmapsto \varphi(v_1, v_2) : V_1^* \times V_2^* \longrightarrow \mathbb{K} \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, v_2) : V_1^* \times V_2^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (f_1, f_2) &\longmapsto f_1(v_1) \cdot f_2(v_2) \end{aligned}$$

**(Affirmation 1)** $\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, on a $\varphi(v_1, v_2) \in U$.
Autrement dit, le scalaire $\varphi(v_1, v_2)(f_1, f_2) \in \mathbb{K}$ dépend linéairement de $f_1$ et $f_2$. Fixons $f_2 \in V_2^*$. Soit $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ et $g, g' \in V_1^*$. Alors on a

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, v_2)(\lambda g + \lambda' g', f_2) &= (\lambda g + \lambda' g')(v_1) \cdot f_2(v_2) \\ &= (\lambda g(v_1) + \lambda' g'(v_1)) \cdot f_2(v_2) \\ &= \lambda g(v_1) f_2(v_2) + \lambda' g'(v_1) f_2(v_2) \\ &= \lambda \varphi(v_1, v_2)(g, f_2) + \lambda' \varphi(v_1, v_2)(g', f_2) \end{aligned}$$

L'argument pour la linéarité par rapport à $f_2$ est analogue.
**(Affirmation 2)** L'application

$$\begin{aligned} \varphi : V_1 \times V_2 &\longrightarrow U \\ (v_1, v_2) &\longmapsto \varphi(v_1, v_2) \end{aligned}$$

est bilinéaire.
Fixons $v_2 \in V_2$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in V_1$ et $(f_1, f_2) \in V_1^* \times V_2^*$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + \mu y, v_2)(f_1, f_2) &= f_1(\lambda x + \mu y) f_2(v_2) \\ &= (\lambda f_1(x) + \mu f_1(y)) f_2(v_2) \\ &= \lambda f_1(x) f_2(v_2) + \mu f_1(y) f_2(v_2) \\ &= \lambda \varphi(x, v_2)(f_1, f_2) + \mu \varphi(y, v_2)(f_1, f_2) \\ &= \left(\lambda \varphi(x, v_2) + \mu \varphi(y, v_2)\right)(f_1, f_2) \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $\varphi$ est universelle. Pour démontrer ceci, construisons d'abord une base de $U$. Choisissons $(e_1, \dots, e_n)$ et $(d_1, \dots, d_m)$ des bases ordonnées de $V_1$ et $V_2$.
**(Affirmation 3)** L'ensemble $\{\varphi(e_i, d_j) \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\} \subseteq U$ est une base de $U$.
Cet ensemble est linéairement indépendant. En effet, soit $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$ un choix de $nm$ scalaires tels que

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}\varphi(e_i, d_j) = 0.$$

L'égalité implique que $\forall (f_1, f_2) \in V_1^* \times V_2^*$ on a

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}\varphi(e_i, d_j)(f_1, f_2) = 0$$

Prenons le cas particulier ou $f_1 = e_s^*$ et $f_2 = d_t^*$. Alors on a

$$0 = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\varphi(e_i, d_j)(e_s^*, d_t^*) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \underbrace{e_s^*(e_i)}_{\delta_{si}} \underbrace{d_t^*(d_j)}_{\delta_{tj}} = \lambda_{st}$$

Montrons que les $\varphi(e_i, d_j)$ formes une famille génératrice. Il y a $nm$ vecteurs dans cet ensemble. On observe que

$$\begin{aligned} \dim(U) &= \dim(\mathcal{L}(V_1, V_2; \mathbb{K})) \\ &= \dim(V_1^*) \dim(V_2^*) \\ &= \dim(V_1) \dim(V_2) \\ &= nm \end{aligned}$$

On doit dès lors montrer encore que $\varphi$ est universelle. Soit $W$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $h \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W)$ donnés. On veut montrer que $\exists! \tilde{h} : U \to W$ linéaire tel que

$$h = \tilde{h} \circ \varphi \tag{$*$}$$

On sait que les $\varphi(e_i, d_j)$ forment une base de $U$. De plus,

$$\tilde{h}(\varphi(e_i, d_j)) = h(e_i, d_j) \tag{$**$}$$

est nécessaire pour que $(*)$ soit vraie. L'existence et l'unicité sont donc vérifiées. Il reste a verifier que $(*)$ est vraie pour tous les points du domaine.
Soit $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, $v_1 = \sum_i \lambda_i e_i$ et $v_2 = \sum_j \mu_j d_j$ avec $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \tilde{h} \circ \varphi(v_1, v_2) &= \tilde{h}\left(\varphi\left(\sum_i \lambda_i e_i, \sum_j \mu_j d_j\right)\right) \\ &= \tilde{h}\left(\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \varphi(e_i, d_j)\right) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \tilde{h}(\varphi(e_i, d_j)) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j h(e_i, d_j) \\ &= h\left(\sum_i \lambda_i e_i, \sum_j \mu_j d_j\right) \\ &= h(v_1, v_2) \end{aligned}$$

donc $(*)$ est vérifiée. □

Introduisons une notation.

**Notation.** $U = V_1 \otimes V_2$ est le produit tensoriel de $V_1$ et $V_2$ et $\varphi(v_1, v_2) = v_1 \otimes v_2$ est le produit tensoriel de $v_1$ et $v_2$.

Le produit tensoriel des vecteurs $v_1$ et $v_2$ est donc l'application bilinéaire universelle

$$\begin{aligned} \otimes : V_1 \times V_2 &\longrightarrow U \\ (v_1, v_2) &\longmapsto v_1 \otimes v_2 \end{aligned}$$

Le tenseur élémentaire $v_1 \otimes v_2$ est aussi une forme bilinéaire sur $V_1^* \times V_2^*$

$$v_1 \otimes v_2(f_1, f_2) = f_1(v_1)f_2(v_2)$$

**Théorème 3.2.3.** Le produit tensoriel

$$\begin{aligned} \otimes : V_1 \times V_2 &\longrightarrow U = V_1 \otimes V_2 \\ (v_1, v_2) &\longmapsto v_1 \otimes v_2 \end{aligned}$$

est univoquement déterminé (à isomorphisme près) par la propriété universelle.

**Remarque.** Attention. Une erreur courante est de penser que l'égalité

$$V_1 \otimes V_2 = \{v_1 \otimes v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

est vraie. Ce n'est **pas** le cas !
Autrement dit, $\varphi : V_1 \times V_2 \to U$ n'est pas surjective. Par contre, $V_1 \otimes V_2$ contient une base $\{e_i \otimes d_j : i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$

Soit

$$\begin{aligned} - \otimes - : V_1^* \times V_2^* &\longrightarrow V_1^* \otimes V_2^* \\ (f_1, f_2) &= \longmapsto f_1 \otimes f_2 \end{aligned}$$

l'application bilinéaire universelle sur $V_1^* \times V_2^*$. En outre, $V_1^* \otimes V_2^*$ s'identifie a $\mathcal{L}(V_1^{**}, V_2^{**}; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(V_1, V_2/\mathbb{K})$.

Soit $(f_1, f_2) \in V_1^* \times V_2^*$ et

$$\begin{aligned} f_1 \otimes f_2 : V_1 \times V_2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto f_1(v_1)f_2(v_2) \end{aligned}$$

A titre d'exemple, disons que $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique. Comment construire une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ ? On vient de voir que le produit tensoriel de 2 formes linéaires est une forme bilinéaire.

Donc par exemple, prenons l'application

$$\begin{aligned} e_3^* \otimes e_4^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) &\longmapsto x_3 \cdot y_4 \end{aligned}$$

Pour un autre exemple, le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. On peut l'ecrire comme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left( \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes e_i^* \right) \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)$$

# 4 Application multilinéaire et algèbre tensorielle

Commençons par définir ce qu'est une application $l$-linéaire.

**Définition 4.0.1.** Soit $l \geq 1$ un entier et $V_1, \ldots, V_l, W$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $l$-linéaire est une fonction

$$f : V_1 \times \cdots \times V_l \longrightarrow W$$

qu'est linéaire sur chacune des coordonnés. Si $W = \mathbb{K}$ on parle de forme $l$-linéaire.

Soit $l, l', l'' \geq 1$ des entiers, $f \in \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_l; \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{L}(V_1', \ldots, V_{l'}'; \mathbb{K})$ et $h \in \mathcal{L}(V_1'', \ldots, V_{l''}''; \mathbb{K})$ des formes multilinéaires. Alors

$$\begin{aligned} f \otimes g : V_1 \times \cdots V_l \times V_1' \times \cdots V_{l'}' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, \ldots, v_l, v_1', \ldots, v_{l'}') &\longmapsto f(v_1, \ldots, v_l) g(v_1', \ldots, v_{l'}') \end{aligned}$$

est une forme $(l + l')$-linéaire. De plus, on a

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$$

Ensuite, soit $f_1, \ldots, f_l$ des formes linéaires sur $V_1, \ldots, V_l$ respectivement, c'est-à-dire $f_i \in V_i^*$. Alors $f_1 \otimes \cdots \otimes f_l \in \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_l; \mathbb{K})$. En outre,

$$\dim(\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_l; \mathbb{K})) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2) \cdots \dim(V_l)$$

Une base de cet espace est donnée par

$$\left\{ e_{1,i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{l,i_l}^* \mid 1 \leq i_1 \leq \dim(V_1), \ldots, 1 \leq i_l \leq \dim(V_l) \right\}$$

ou $\left\{ e_{j,i_j}^* \mid 1 \leq j \leq \dim(v_j) \right\}$ est une base duale à une base de $V_j$. Enfin, on a un isomorphisme linéaire $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_l^* \cong \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_l; \mathbb{K})$. Un cas particulier important de cela est quand on prend $V$ ou $V^*$ comme espace vectoriel considérés.

**Définition 4.0.2.** Un tenseur d'espèce $\binom{p}{q}$ sur $V$ est une forme $(p + q)$-linéaire

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

On note $T_q^p(V)$ l'espace des tenseurs d'espèce $\binom{p}{q}$. On dit aussi que $T$ est $p$-fois covariant et $q$-fois contravariant.

On donne quelques cas particuliers.
$T_0^1(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*, \mathbb{K}) = V^{**} \cong V$ qui est l'espace des cocovecteurs.
$T_1^0(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) = V^*$ qui est l'espace des covecteurs.
$T_2^0(V) = \mathcal{L}(V, V; \mathbb{K})$ qui est l'espace des formes bilinéaires sur $V$.

$$\begin{aligned} T_q^p(V) &= \mathcal{L}(\underbrace{V^*, \ldots, V^*}_{p}, \underbrace{V, \ldots, V}_{q}; \mathbb{K}) \\ &\cong V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^* \end{aligned}$$

et aussi $\dim(T_q^p(V)) = (\dim(V))^{p+q}$

On obtient une base de $T_q^p(V)$ en fixant une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $V$ et en considérant $\left\{ e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_i}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_q}^* \right\}$

# 5 Produit extérieur

## 5.1 Application symétrique, anti-symétrique et alternée

**Définition 5.1.1.** Soit $f : V^l \to W$ une application $l$-linéaire. $f$ est **symétrique** si $\forall \sigma \in \mathrm{Sym}(l)$, $\forall (v_1, \dots, v_l) \in V^l$ on a

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)}) = f(v_1, \dots, v_l).$$

$f$ est **anti-symétrique** si $\forall \sigma \in \mathrm{Sym}(l)$, $\forall (v_1, \dots, v_l) \in V^l$ on a

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_1, \dots, v_l).$$

$f$ est **alternée** si $\forall (v_1, \dots, v_l) \in V^l$, $\exists i, j \in \{1, \dots, l\}$ avec $i \neq j$ tel que si $v_i = v_j$ alors $f(v_1, \dots, v_l) = 0$.

**Proposition 5.1.2.** Toute application $l$-linéaire $f : V^l \to W$ alternée est automatiquement anti-symétrique.

***Démonstration.*** Commençons par prouver le cas $l = 2$. Soit $x, y \in V$. Vu que par hypothèse $f$ est alternée, on a

$$f(x - y, x - y) = 0$$

$f$ est 2-linéaire donc on peut écrire

$$0 = f(x, x) - f(y, x) - f(x, y) + f(y, y)$$

qui donne l'égalité

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

Traitons ensuite le cas $l \geq 2$. Soit $(v_1, \dots, v_l) \in V^l$ et, soit $\sigma \in \mathrm{Sym}(l)$. Si $\sigma$ est une transposition, disons $\sigma = (i\ j)$, on observe que

$$\begin{aligned} v_{\sigma(h)} &= v_h \\ v_{\sigma(i)} &= v_j & \qquad \forall h \in \{1, \dots, l\} \setminus \{i, j\} \\ v_{\sigma(j)} &= v_i \end{aligned}$$

Donc tous les $v_h$ ou $h \neq i, j$ sont fixes. Par le cas $l = 2$, on déduit que si $\sigma$ est une transposition alors $f(v_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(l)}) = -f(v_1, \dots, v_l)$.
En général, $\sigma$ est un produit de transpositions, disons

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_1 \cdots \tau_n \\ \gamma &= \tau_1 \cdots \tau_{n-1} \\ \tau &= \tau_n = (i\ j) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)}) &= f(v_{\gamma\tau(1)}, \dots, v_{\gamma\tau(l)}) \\ &= f(v_{\gamma(1)}, \dots, v_{\gamma(j)}, \dots, v_{\gamma(i)}, \dots, v_{\gamma(l)}) \\ &= -f(v_{\gamma(1)}, \dots, v_{\gamma(i)}, \dots, v_{\gamma(j)}, \dots, v_{\gamma(l)}) \\ &= (-1)(-1)^{n-1} f(v_1, \dots, v_l) \\ &= (-1)^n f(v_1, \dots, v_l) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_1, \dots, v_l) \end{aligned}$$

□

Il est évident que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et impaire. En effet,

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

De manière analogue, toute forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ est la somme d'une forme bilinéaire symétrique et anti-symétrique. En effet, soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

alors, on peut écrire

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x)) + \frac{1}{2}(f(x, y) - f(y, x))$$

## 5.2 Produit extérieur

**Définition 5.2.1.** Soit $f : V^l \to W$ une application $l$-linéaire.
La **symétrisée** de $f$ est

$$S(f) : (v_1, \dots, v_l) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(l)} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)})$$

L'**anti-symétrisée** de $f$ est

$$A(f) : (v_1, \dots, v_l) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(l)} \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)})$$

**Théorème 5.2.2.**

1. $S(f) : V^l \to W$ est $l$-linéaire et symétrique.
2. $A(f) : V^l \to W$ est $l$-linéaire et alternée (et donc aussi anti-symétrique).

***Démonstration.*** $S(f)$ et $A(f)$ sont $l$-linéaire, car elles sont définies comme combinaisons linéaires de $l!$ formes $l$-linéaire. Tritons maintenant la seconde partie du théorème.
(1) Soit $\gamma \in \mathrm{Sym}(l)$ et $(v_1, \dots, v_l) \in V^l$. On a

$$\begin{aligned} S(f)(v_{\gamma(1)}, \dots, v_{\gamma(l)}) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(l)} f(v_{\gamma\sigma(1)}, \dots, v_{\gamma\sigma(l)}) \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathrm{Sym}(l)} f(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(l)}) \\ &= S(f)(v_1, \dots, v_l) \end{aligned}$$

Donc le caractère symétrique de $S(f)$ est vérifié.
Ensuite, soit $(v_1, \dots, v_l) \in V^l$. On doit vérifier que si $\exists i < j$ tel que $v_i = v_j$ alors $A(f)(v_1, \dots, v_l) = 0$. Posons

$$E = \left\{\sigma \in \mathrm{Sym}(l) \mid \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)\right\}$$

et

$$E' = \left\{\sigma \in \mathrm{Sym}(l) \mid \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)\right\}$$

Par définition, $\mathrm{Sym}(l) = E \sqcup E'$.

$$\begin{aligned} A(f)(v_1, \dots, v_l) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(l)} \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)}) \\ &= \underbrace{\sum_{\sigma \in E} \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)})}_{\overset{\text{def}}{=} T} + \underbrace{\sum_{\sigma \in E'} \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)})}_{\overset{\text{def}}{=} T'} \end{aligned}$$

Notre but est dès lors de montrer que $T' = -T$.
Observons que $E$ et $E'$ sont en bijection. Posons $\tau = (i\ j)$. On a

$$\begin{aligned} \sigma \in E &\iff \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) \\ &\iff \sigma^{-1}\tau(j) < \sigma^{-1}\tau(i) \\ &\iff \sigma^{-1}\tau^{-1}(j) < \sigma^{-1}\tau^{-1}(i) \\ &\iff (\tau\sigma)^{-1}(j) < (\tau\sigma)^{-1}(i) \\ &\iff (\tau\sigma)^{-1}(i) > (\tau\sigma)^{-1}(j) \\ &\iff \tau\sigma \in E' \end{aligned}$$

L'application $\sigma \mapsto \tau\sigma$ établi donc une bijection de $E$ vers $E'$.
Par notre hypothèse de début, $v_i = v_j$ donc $\forall k \in \{1, \ldots, l\}$, on a

$$v_{\tau(k)} = \begin{cases} v_k & \text{si } k \neq i, j \\ v_j = v_i & \text{si } k = i \\ v_i = v_j & \text{si } k = j \end{cases}$$

On voit donc que $v_{\tau(k)} = v_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, l\}$. On a

$$\begin{aligned} T' &= \sum_{\sigma' \in E'} \operatorname{sgn}(\sigma') f(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in E} \operatorname{sgn}(\tau\sigma) f(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(l)}) \\ &= -\sum_{\sigma \in E} \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(l)}) \\ &= -T \end{aligned}$$

$\square$

**Définition 5.2.3.** Le produit extérieur de $l$ formes linéaires $f_1, \ldots, f_l \in V^*$ est défini par

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_l = A(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_l.$$

Pour un exemple de ce concept, prenons $V = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2\times 1}$. On prend

$$e_1^* \wedge e_2^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned} e_1^* \wedge e_2^* \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &= A(e_1^* \otimes e_2^*) \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= e_1^* \otimes e_2^* \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) - e_1^* \otimes e_2^* \left( \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$