Karol Cidyło

Zadanie 4 z listy 5.

Mamy dane dwa ciągi n - elementowe. Wykorzystując grę z adwersarzem mamy pokazać, że potrzeba **2n - 1** porównań, aby scalić te ciągi. Musimy tak 'złośliwie' konstruować ciągi dla adwersarza,aby było ich **2n** i każde porównanie algorytmu eliminowało maksymalnie jeden ciąg.
Scalanie możemy traktować jak np. część algorytmu sortowania przez scalanie, gdzie w końcowej fazie mamy dwa posortowane ciągi i chcemy połączyć je w jeden, również posortowany ciąg.

Weźmy zestaw wyjściowy(jest to ciąg posortowany rosnąco):
$x_0 = a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, a_3, ..., a_n, b_n$
Mając ciąg x_0 wyprodukujemy **2n - 1** innych zestawów danych takich, że dla każdych kolejnych ciągów x_i będziemy zamieniać ze sobą elementy na pozycjach **i** oraz **i + 1**. To znaczy:
$x_1 = b_1, a_1, a_2, b_2, a_3, a_3, ..., a_n, b_n$
do
$x_{2n-1} = a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, a_3, ..., b_n, a_n$

Razem z naszym zestawem wyjściowym mamy 2n zestawów danych. Dopóki mamy dwa zestawy zgodne z powyższymi algorytm musi być kontynuowany. Odpowiadamy na pytania gracza tak jak dla zestawu wyjściowego.

Gracz zadaje pytania o stosunek a_i do b_j.

Lemat.
Jedno pytanie usuwa maksymalnie jeden zestaw.

Dowód lematu.
Weżmy pytanie o stusunek a_i do b_j.

1. **j > i** Adwersarz mówi, że a_i jest mniejsze od b_j. Nie wyklucza to żadnego zestawu danych z dostępnych. Jeśli $j > i$ to w następnych zestawach nie zamienimy ze sobą elementów a_i oraz b_i, w zestawie wyjściowym kiedy $i < j$ mamy spełnione $a_i < b_j$.

2. $\mathbf{i > j + 1}$ Adwersarz mówi, że a_i jest większe od b_j. Nie wyklucza to żadnego zestawu. Każdy z dostępnych spełnia wymagania. Następne zestawy danych to przestawienie a_i z b_i oraz b_i z a_{i+1}, w zestawach odpowiednio x_{2i-1} oraz x_{2i}. **i** oraz **j** różnią się co najmniej o 2.

3. $\mathbf{i = j}$ Adwersarz mówi, że a_i jest mniejsze od b_j. Wyklucza to przypadek, gdzie a_i jest większe od b_i czyli ciąg x_{2i-1} bo tam zamienialiśmy a_i z a_{i-1} miejscami. Wyklucza jeden zestaw.

4. $\mathbf{i = j + 1}$ Adwersarz mówi, że a_i jest większe od b_j. Wyklucza to przypadek, gdzie a_i jest mniejsze od b_{i-1} czyli ciąg x_{2i-2}, tam zamienialiśmy a_{i-1} z a_i miejscami. Wyklucza jeden zestaw.

Każde zapytanie o a_i oraz b_j jest rozpatrywane w tym jednym z czterech przypadków. Otrzymujemy zatem, że każde zapytanie wyklucza maksymalnie jeden zestaw danych.

$\square$

Na początku również :"wygenerowaliśmy" **2n** zestawów. Wykorzystując lemat pokazujemy, że minimalnie potrzeba **2n - 1** pytań(porównań) do otrzymania końcowego rezultatu z odpowiednim zestawem danych. Czyli do scalenia dwóch ciągów n-elementowych.