Famous Last Question

Warum wird bei der Histogrammlinearisierung die Entropie kleiner?

Hat das damit zu tun, das einfache HE das Rauschen verstärkt?

Und wieso sieht das Bild trotz schlechterer Entropie besser aus?

Flächenbasierte Bildverbesserung - Rauschunterdrückung

- Rauschunterdrückung durch lineare Operatoren
  - Lineare Operatoren im Orts- und Frequenzbereich
  - Eigenschaften von Rauschunterdrückungsfiltern
  - Unsharp Masking
- Kanteninformation aus linearen Operatoren

Rauschen

- Bildinformation
    - Homogene Regionen mit gleicher Bedeutung
    - Kanten innerhalb von nicht-glatten Objekten
    - Kanten zwischen Objekten
- Was unterscheidet Rauschen von der Bildinformation
    - Rauschen ist ein stochastischer Prozess
    - Benachbarte, ungestörte Bildpixel haben wahrscheinlicher den gleichen Grauwert
    - Der Kantenverlauf benachbarte Kantenpixel ist ähnlich
- Rauschunterdrückung
    - Erhalt von Bildinformation bei gleichzeitiger Reduktion des Rauschens

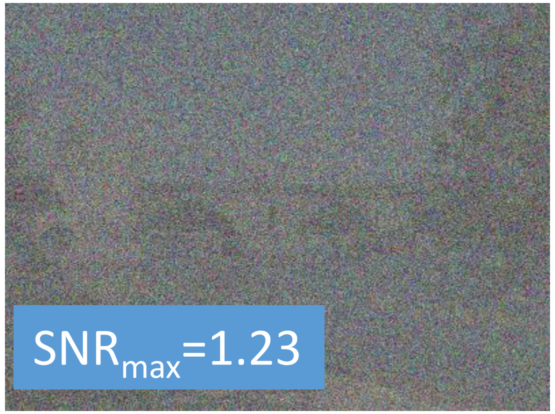
Rauschen als stochastischer Prozess: Zeitliche Folge

- Annahmen
  - Aufnahme mehrerer Bilder $g_i, i = 1, \dots, I$ über einen gegebenen Zeitraum.
  - Bild verändert sich über den Zeitraum nicht (keine Bewegung, keine Beleuchtungsänderung).
  - Erwartungswert *E* des Rauschens *n* ist 0.

- Näherung an die unverrauschte Funktion *f*:
  - $$\begin{aligned} E\{g(m,n)\} &= E\{f(m,n)\} + E\{n(m,n)\} \\ &= E\{f(m,n)\} + 0 = f(m,n) \end{aligned}$$
  - Abschätzung von $E\{g(m,n)\}$ durch Integration über die Bilder.

Beispiel

- Einzelne Aufnahme mit normalverteiltem Rauschen (SNR≈1.2)
- Addition von 10 bzw. 50 Aufnahmen

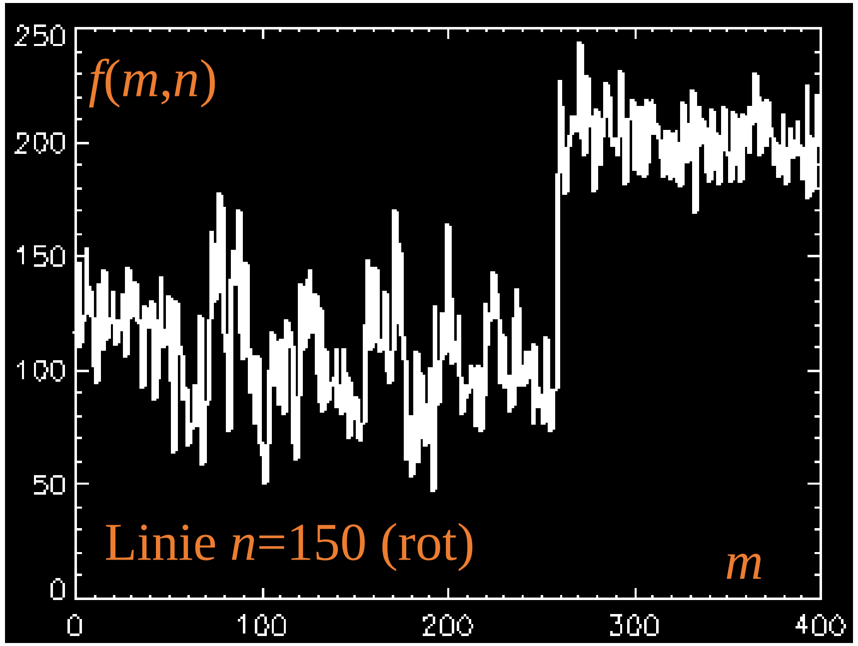


Integration über die Fläche

- Falls für Punkte $(p_0, \dots, p_n)$ $f(p_i) = const.$ gilt, dann kann Rauschen *n* mit $E\{n\} = 0$ durch Mittelung der gemessenen Grauwerte $g(p_i)$ reduziert werden.
- Annahmen:
  - Bild besteht aus homogenen Bereichen.
  - Benachbarte Punkte haben den gleichen Grauwert.
- Rauschunterdrückung:
  - Mittelwertbildung über vorgegebene Nachbarschaft.

Mittelwertbildung durch Konvolution

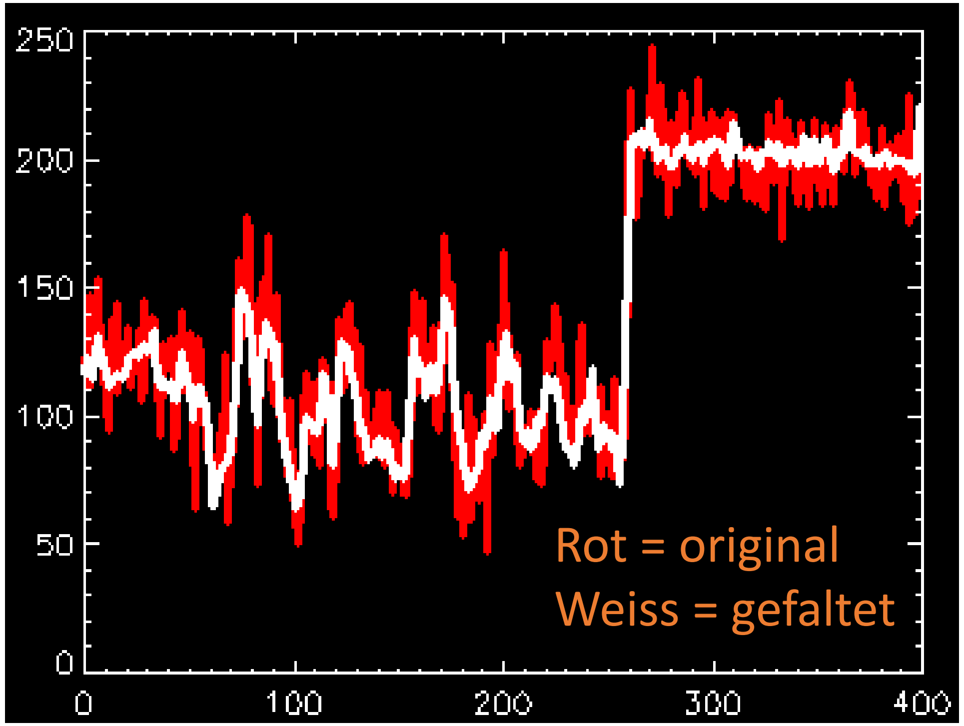
Konvolutionskern: Gleichmäßige Gewichtung der Pixel in einer gegebenen Nachbarschaft

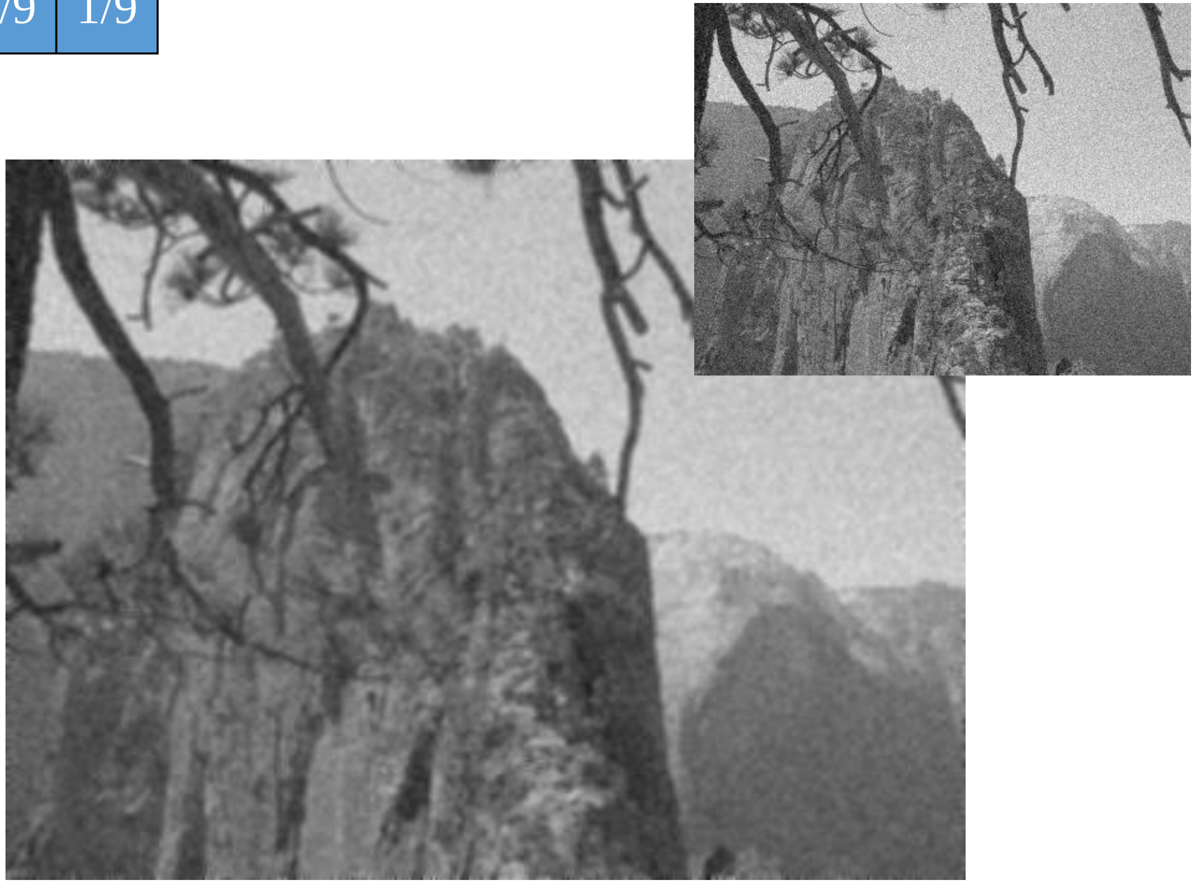


3x3 Mittelwert-Filter

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

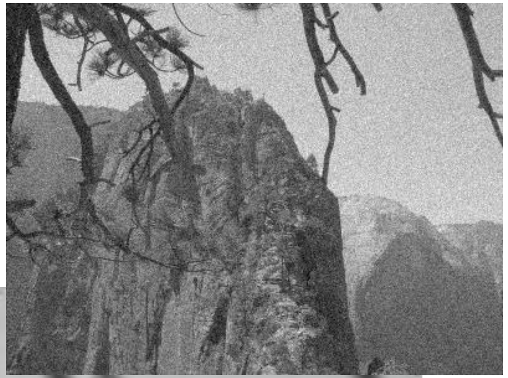
Filterkern

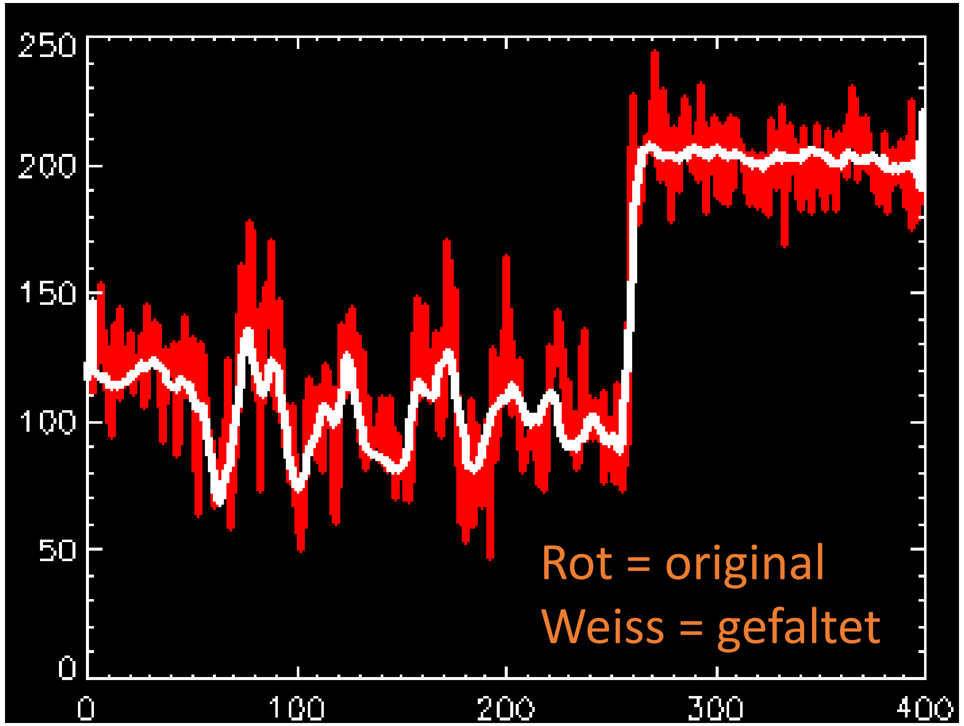


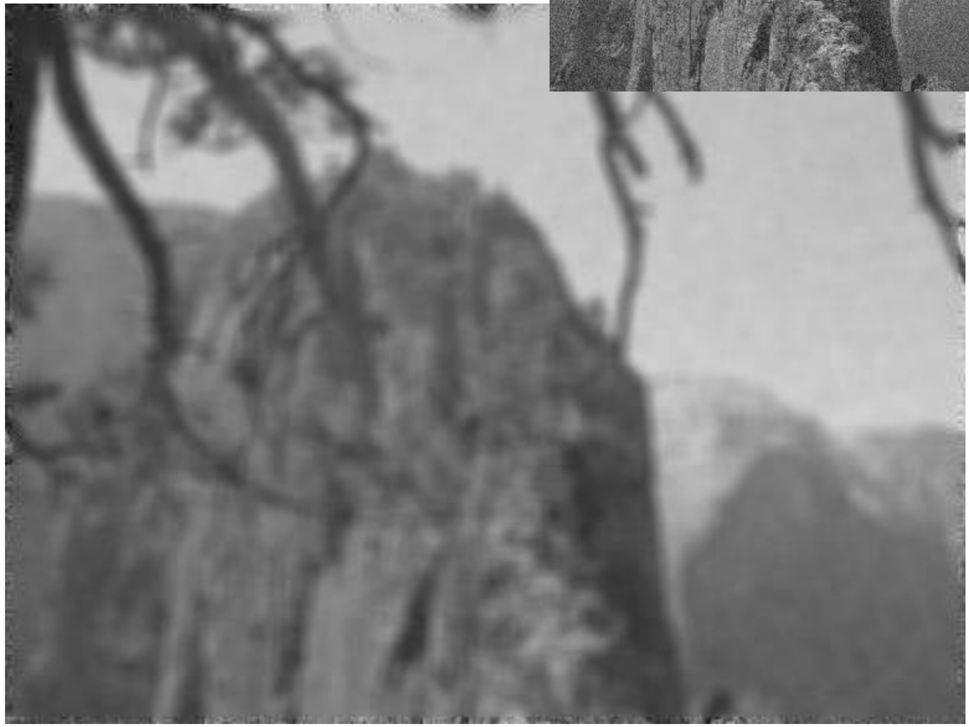


7x7 Mittelwert-Filter

- **Beobachtung**: Kanten werden degradiert.
- **Grund**: Annahme konstanter Funktionswerte ist nicht wahr.

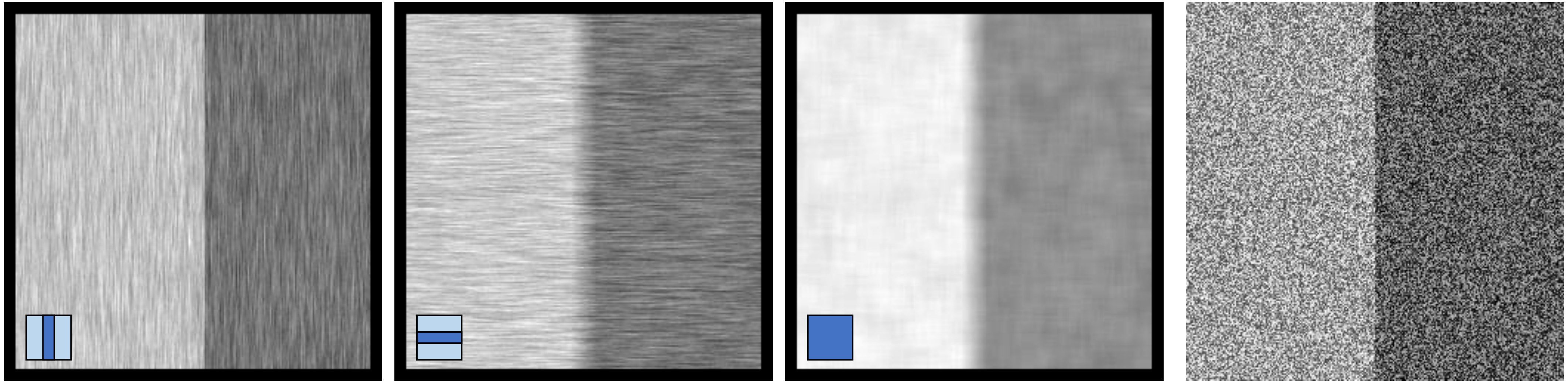






Eigenschaften aller Rauschunterdrückungsfilter

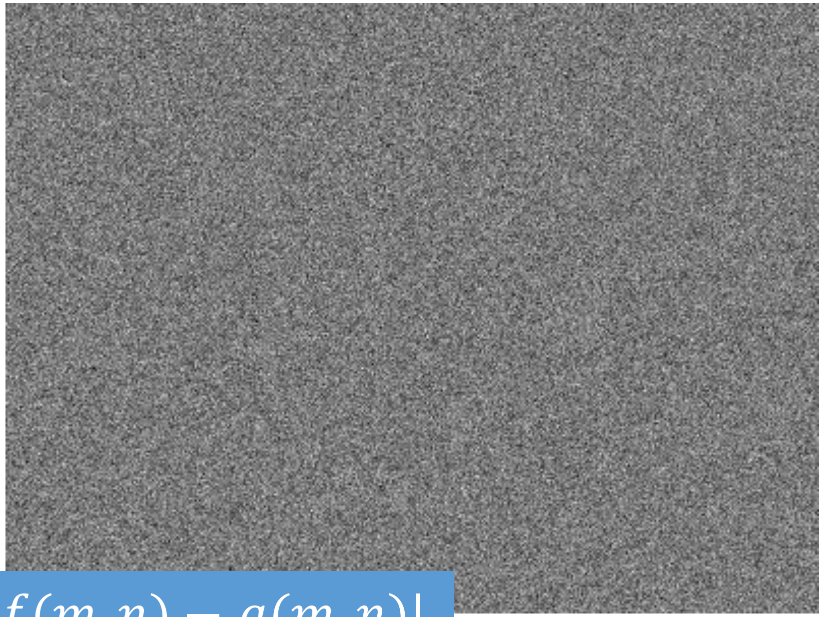
- Die Summe aller Elemente des Faltungskerns ist immer 1.
  - Gesamthelligkeit bleibt gleich.
- Der Faltungskern ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung der Faltungsfunktion
  - Bild wird nicht verschoben und keine Richtung wird bevorzugt



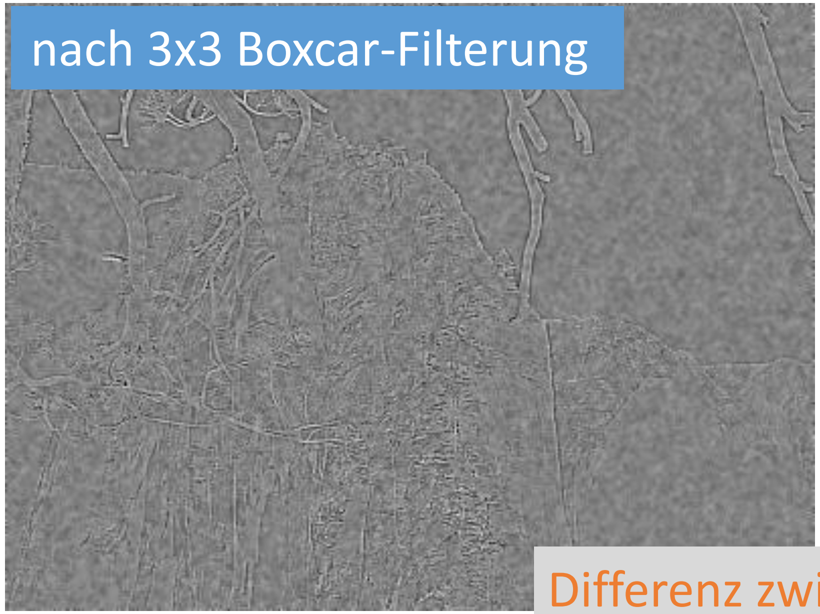
original

Verhalten an Kanten

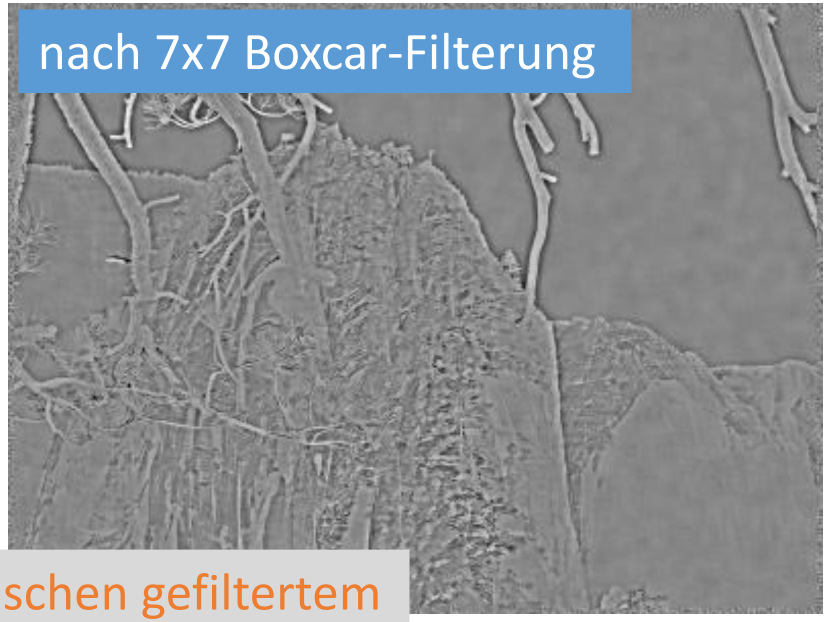
- Was wird heraus gefiltert?



$|f(m,n) - g(m,n)|$



nach 3x3 Boxcar-Filterung



nach 7x7 Boxcar-Filterung

Differenz zwischen gefiltertem und Originalbild

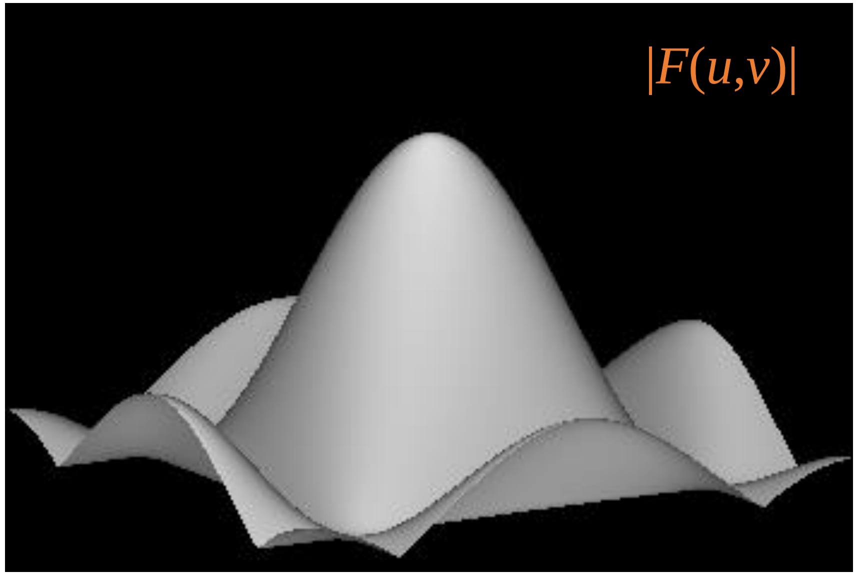
Verhalten an Kanten

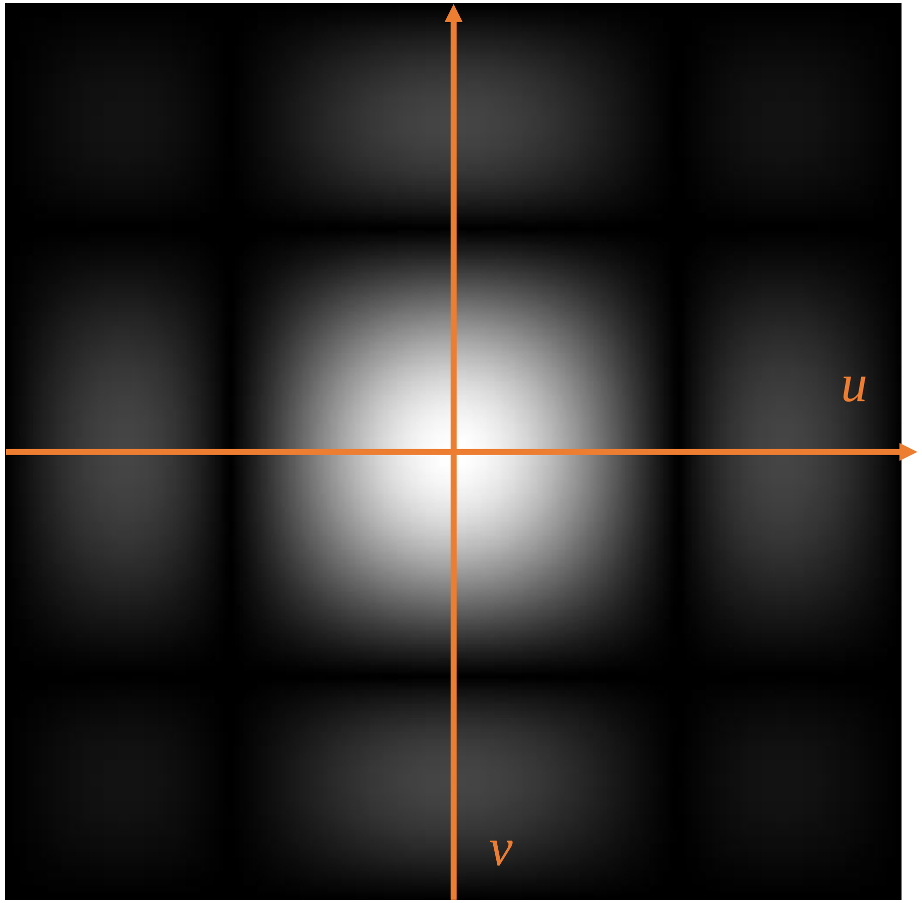
An Kanten ist die Bildinformation nicht lokal konstant

- Erwartungswert der ungestörten Funktion ergibt sich als Mittel der überdeckten Gebiete
- Größere Faltungskerne vergrößern den Bereich der Unschärfe

Richtungsabhängigkeit des Mittelwertfilters

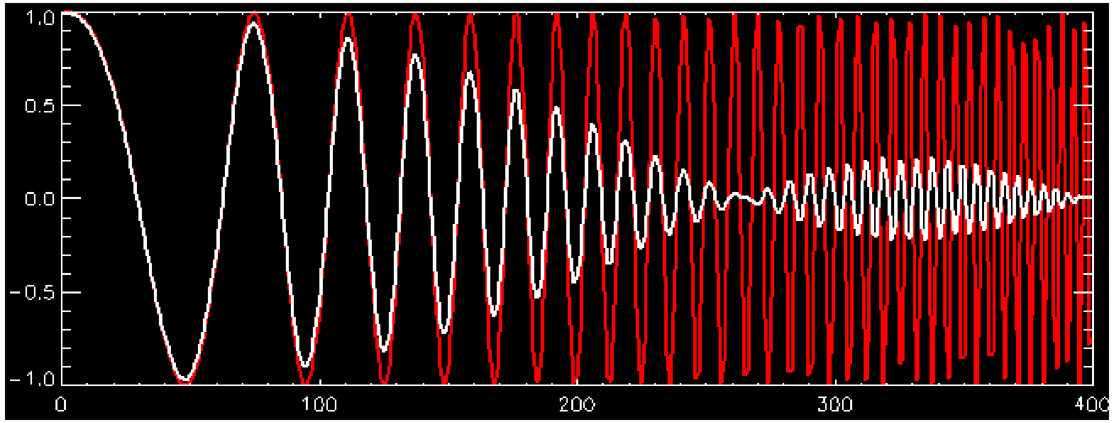
Transferfunktion (Repräsentation im Frequenzraum).

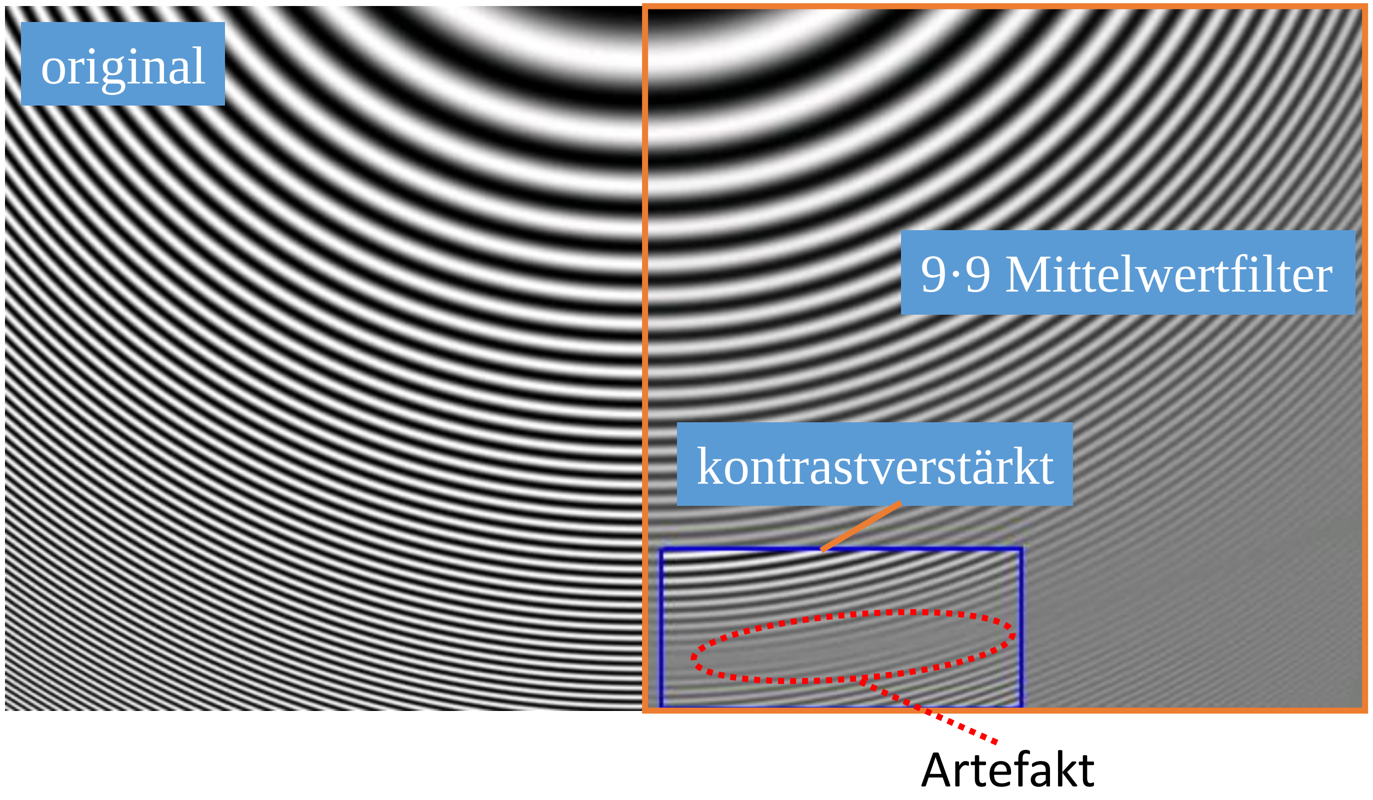




Auswirkungen

- Bildzeile
  - **rot**: vor der Filterung
  - **weiß**: nach Filterung





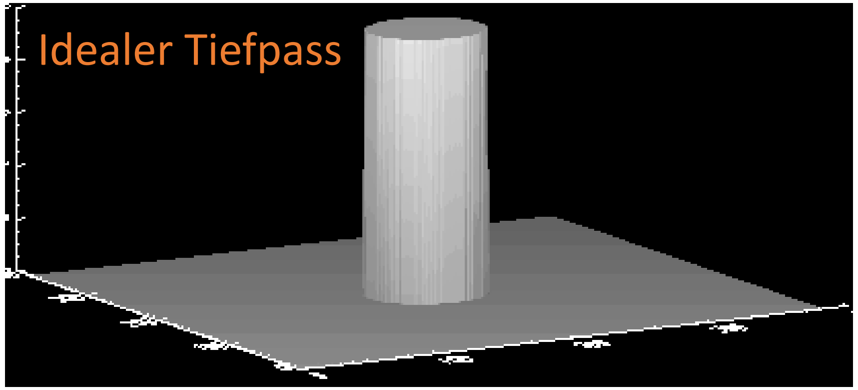
Erinnerung: Butterworth-Tiefpassfilter

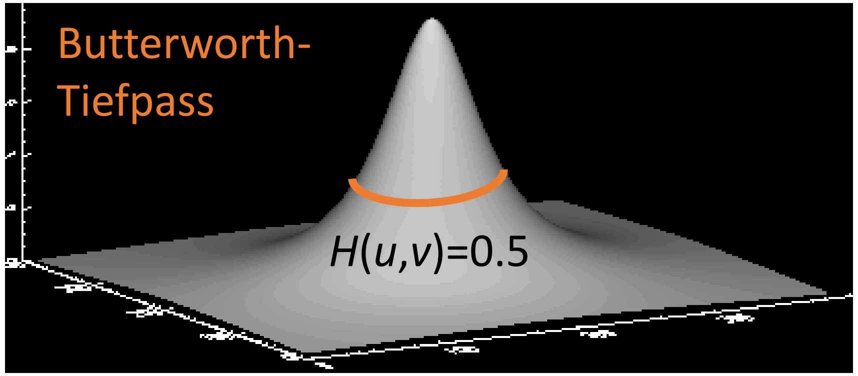
- Frequenzen werden im Frequenzraum gleichmäßig mit zunehmender Frequenz abgeschwächt.
- Butterworth-Tiefpass-Filter:

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left(D(u,v)/D_0\right)^{2n}}$$

D_0: Cutoff-Frequenz,

$D(u,v)$: Frequenz, d.h. Abstand vom Ursprung





Butterworth vs. Einfacher Tiefpass

Ortsraum-Alternative: Binomialfilter

Eindimensionaler Binomialfilter B^p = [1 1]*[1 1] *…*[1 1] (p-mal):

$B^0 = 1^{-1} \cdot [1]$

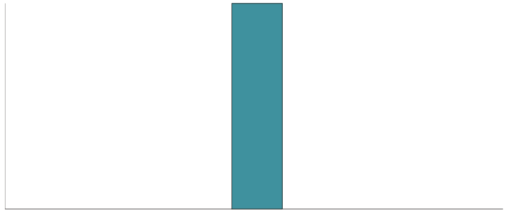
$B^1 = 2^{-1} \cdot [1\ 1]$

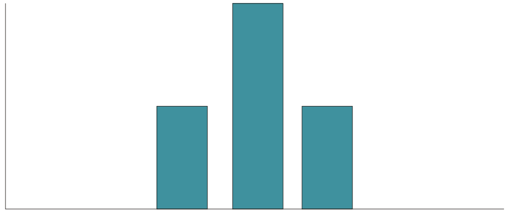
$B^2 = 4^{-1} \cdot [1\ 2\ 1]$

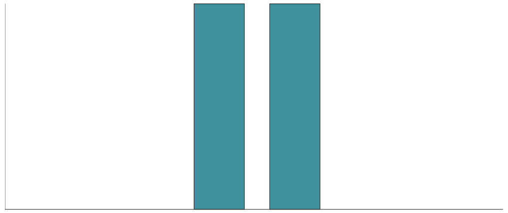
$B^3 = 8^{-1} \cdot [1\ 3\ 3\ 1]$

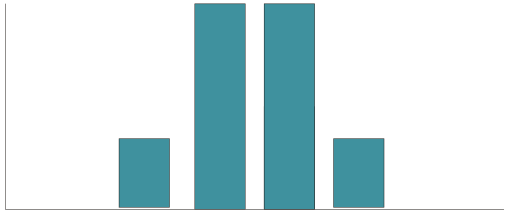
$B^4 = 16^{-1} \cdot [1\ 4\ 6\ 4\ 1]$

…



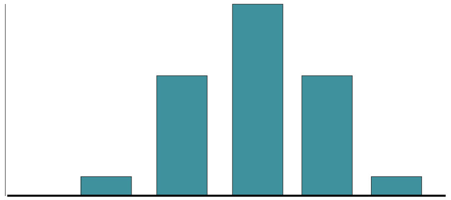






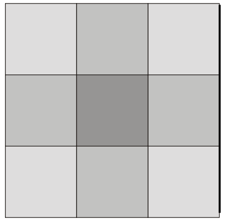
Zweidimensionaler Binomialfilter $\mathbf{B}^p = B^p * (B^p)^T$:

$$\mathbf{B}^2 = 4^{-1} \cdot [1\ 2\ 1]^T \cdot 4^{-1} \cdot [1\ 2\ 1] = 16^{-1} \cdot \left\langle \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \right\rangle$$



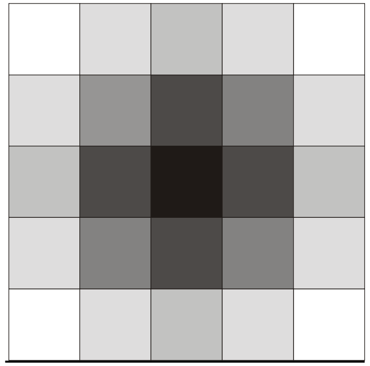
Zweidimensionale Binomialfilter

$$\mathbf{B}^2 = 1/16 \cdot [1\ 2\ 1]^T \cdot [1\ 2\ 1] = 1/16 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

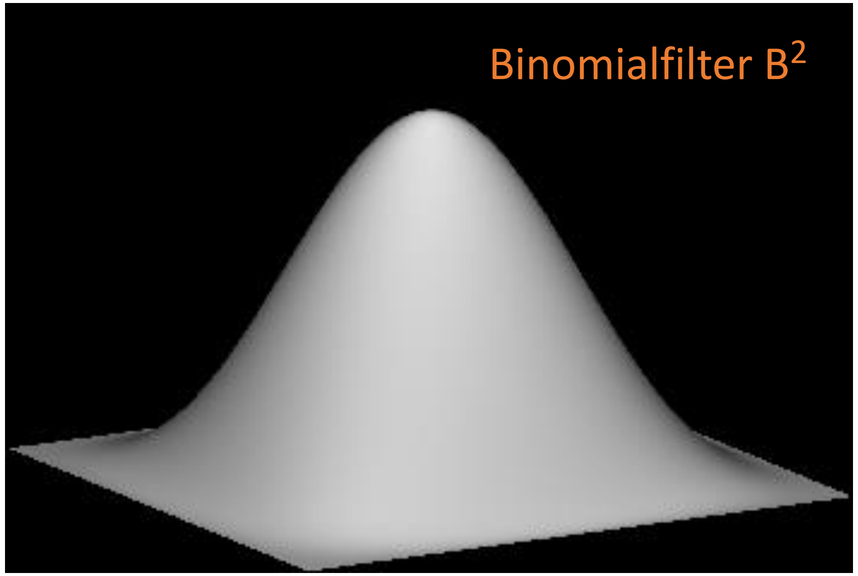


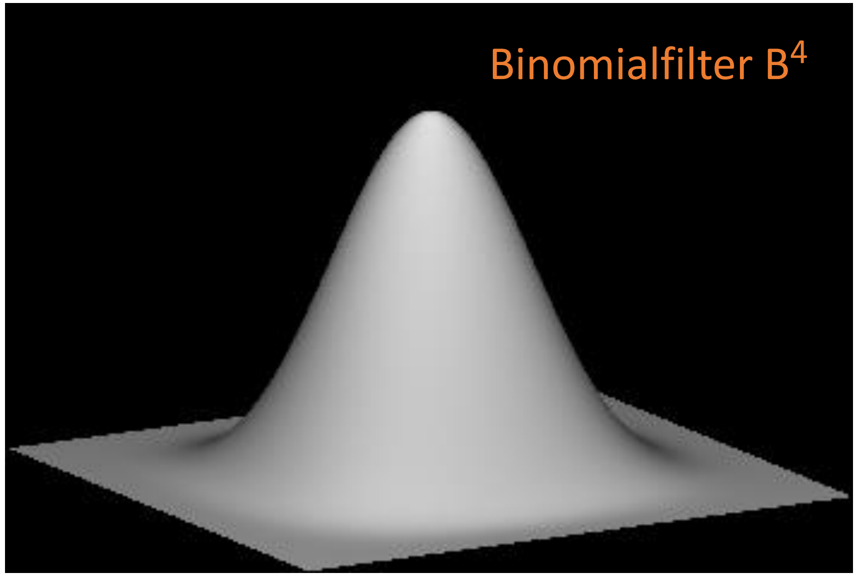
$$\mathbf{B}^3 = 1/64 \cdot [1\ 3\ 3\ 1]^T \cdot [1\ 3\ 3\ 1] = 1/64 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^4 = 1/256 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$



Transferfunktion des Binomialfilters



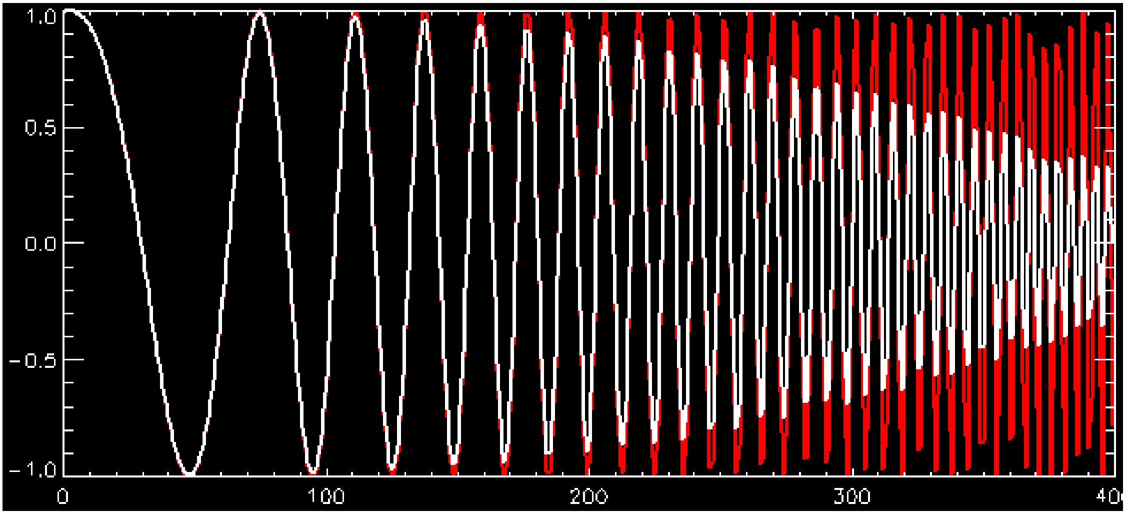


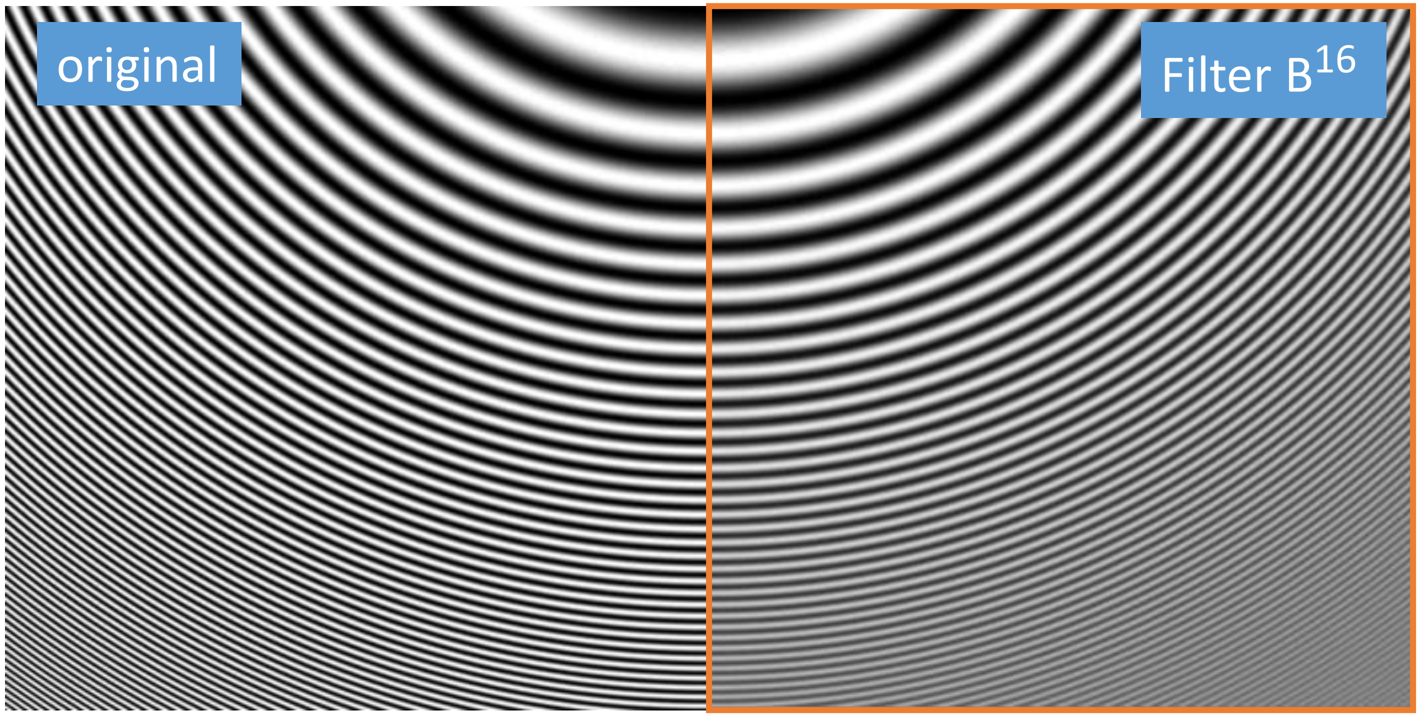
Weniger Artefakte an Kanten sind zu erwarten.

Filterresultate des Binomialfilters

Bildzeile

- **rot**: vor der Filterung
- **weiß**: nach Filterung





Butterworth-Filter vs. Binomialfilter

- Ideales Tiefpassfilter: kompakter Träger im Frequenzraum, aber artefakt-verursachende Ortsraumrepräsentation

 Butterworth-Filter: kontrolliert monoton fallende Funktion im Frequenzraum, deren Ortsraumrepräsentation ebenfalls monoton fällt.

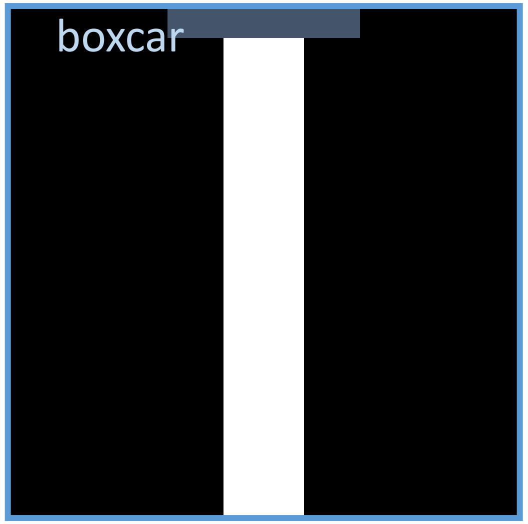
- Mittelwertfilter: kompakter Träger im Ortsraum, aber artefakt-verursachende Frequenzraumrepräsentation

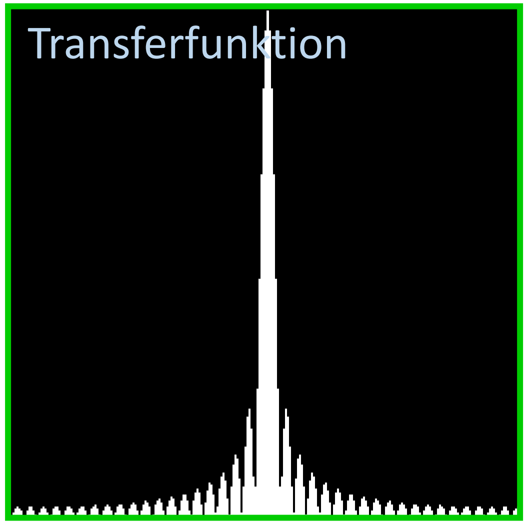
 Binomial-Filter: monoton fallende Funktion mit kompaktem Träger im Ortsraum, deren Frequenzraumrepräsentation monoton fällt.

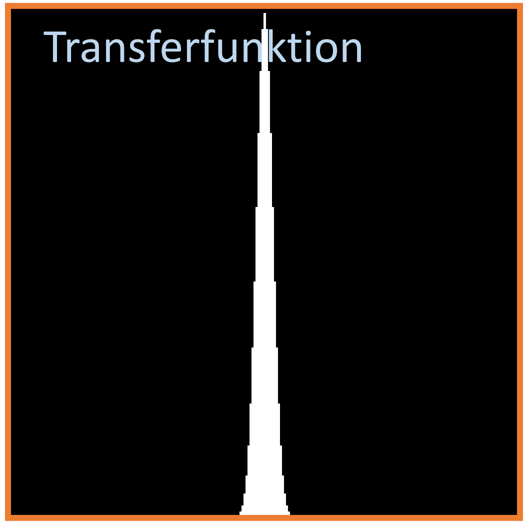
Binomialfilter und Gaußfunktion

Für größere Filterkerne nähert sich das Binomialfilter der Gauß'schen Glockenkurve an.

Der Betrag der Transferfunktion einer solchen Funktion ist wieder eine Gauß'sche Glockenkurve.







$$\mathrm{gauss}(x,y) = [\sigma\cdot\sqrt{2\pi}]^{-1} \cdot \exp\left[-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)\right]$$

Filterung mit 2D Gaußfilter

s=1.5

s=3.0

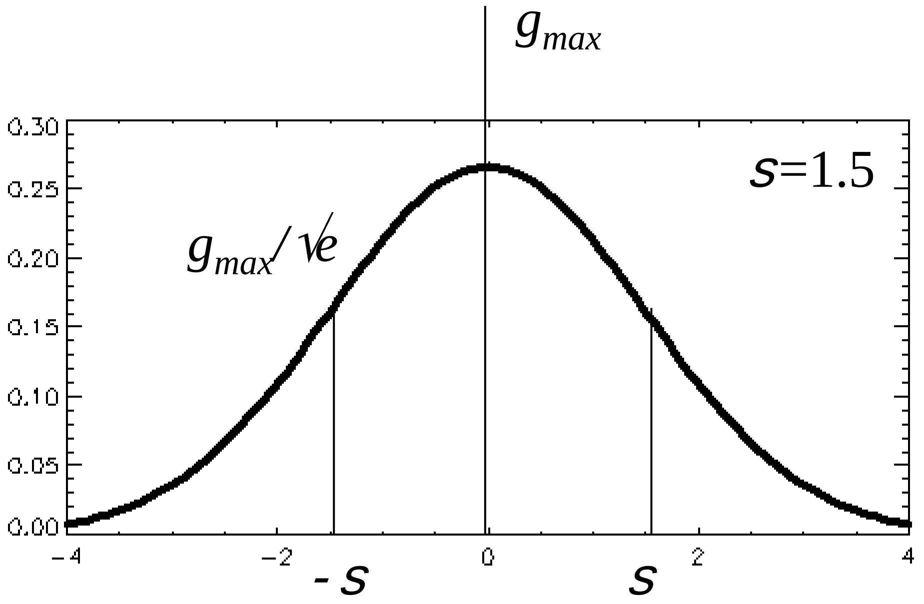
Gaußkurve und Gaussfilter

Funktion wird nie Null

- Filterkern endlicher Größe „schneidet“ die Funktion ab
- Kerngröße ca. 2×3s+1
- ausgewählter Filterkern muss normiert werden

Separabilität macht Filterung effizient:

$$g(x,y) = g(x) * g(y)$$

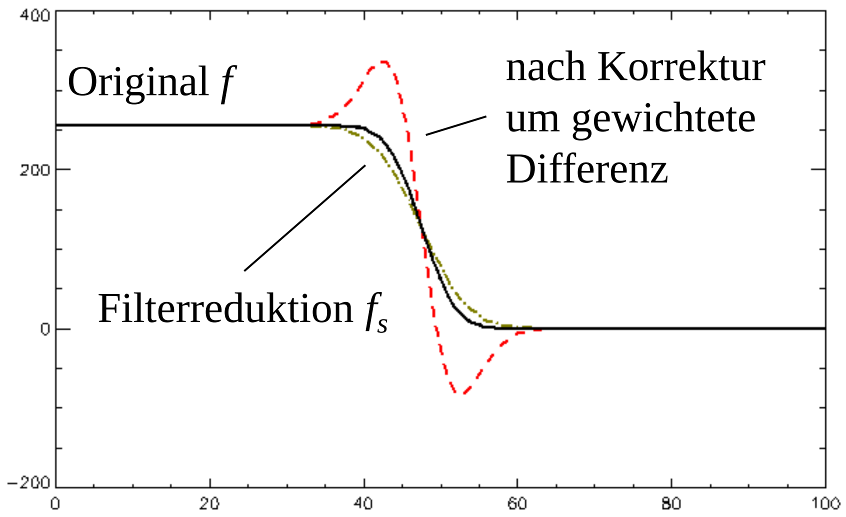


Glätten für Kanten: Unsharp Masking

- Gaußfilter verwenden, um Unschärfe abzuziehen.
- Idee:
  - Berechne Bild f_s durch Filterung von f mit Gaußfunktion mit Standardabweichung s
  - Addiere mit p gewichtete Differenz f-f_s auf das Originalbild

    $$f_{USM}=f+p(f-f_s)$$

    (p wird oft in Prozent angegeben, d.h. 50% entspricht p=0.5)
  - f_{USM} wird für f eingesetzt, falls der Unterschied zwischen f und f_s größer ist, als eine Schwelle t.

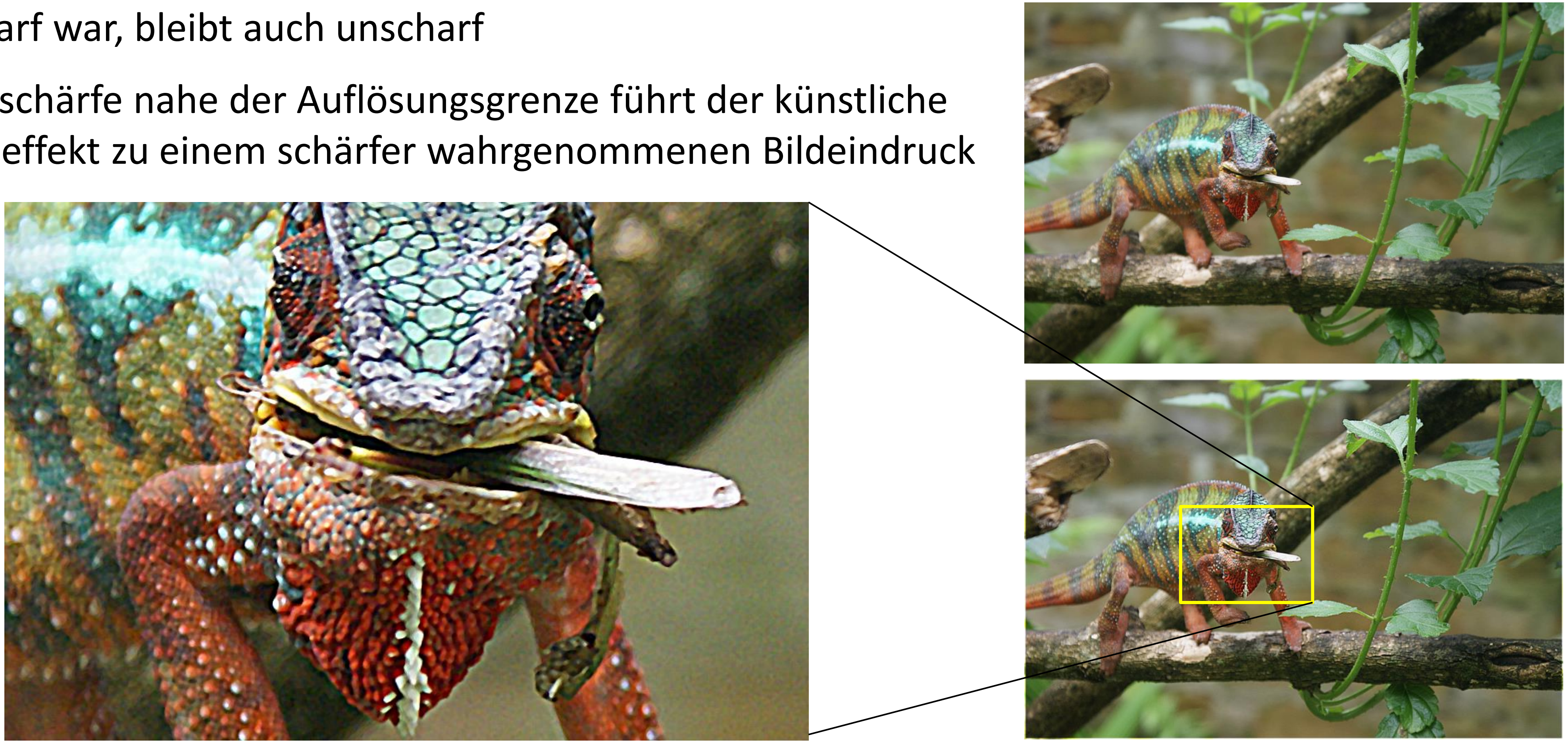


Unsharp Masking - Parameter

- s (radius)
  - je größer der Radius, desto breiter ist der verstärkende Rand an Kanten
  - Der Wert ist die Standardabweichung der Gaußfunktion, d.h. die Breite ist ca. 6-mal größer
- p (amount)
  - Je größer der Wert ist, desto höher ist die Verstärkung an den Rändern
- t (threshold)
  - Je höher der Wert ist, desto stärker muss die Kante sein, damit überhaupt ein Sharpening stattfindet
  - Jeder Wert $t>0$ führt dazu, dass das Filter nicht mehr linear ist (Artefakte sind möglich!)

Unsharp Masking ist keine Bildrestauration

- was unscharf war, bleibt auch unscharf
- nur bei Unschärfe nahe der Auflösungsgrenze führt der künstliche Machbandeffekt zu einem schärfer wahrgenommenen Bildeindruck



Kanten

- Rauschunterdrückung versagt an Kanten
- Kanten sind wesentliche Bestandteile der abgebildeten Information
- Kantenfilter
  - heben Kanteninformation gegenüber restlicher Bildinformation hervor
  - produzieren Kantenpixel, aber noch nicht Kantenzüge
  - verorten die Kantenaspekte im hochfrequenten Bereich des Frequenzspektrums

Kanten und USM

- USM erhöht die Bildschärfe durch Addition von $p(f\text{-}fs)$ ➡ Kanteninformation ist durch $f\text{-}fs$ gegeben.
- Resultat $f\text{-}fs$

Subtraktionsbild

Geglättetes Bild ist das Ergebnis einer Faltung des Originalbildes mit einem Tiefpassfilter s_s , also ist

…und im Frequenzraum $f - f_s = f - f * s_\sigma$

…also ist das „kantenartige“ durch einen Hochpassfilter gegeben

$$F - F_s = F - F \cdot S_\sigma = F\left(1 - S_\sigma\right)$$

Erinnerung: Butterworth-Hochpassfilter

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left(D_0 / D(u,v)\right)^{2n}}$$

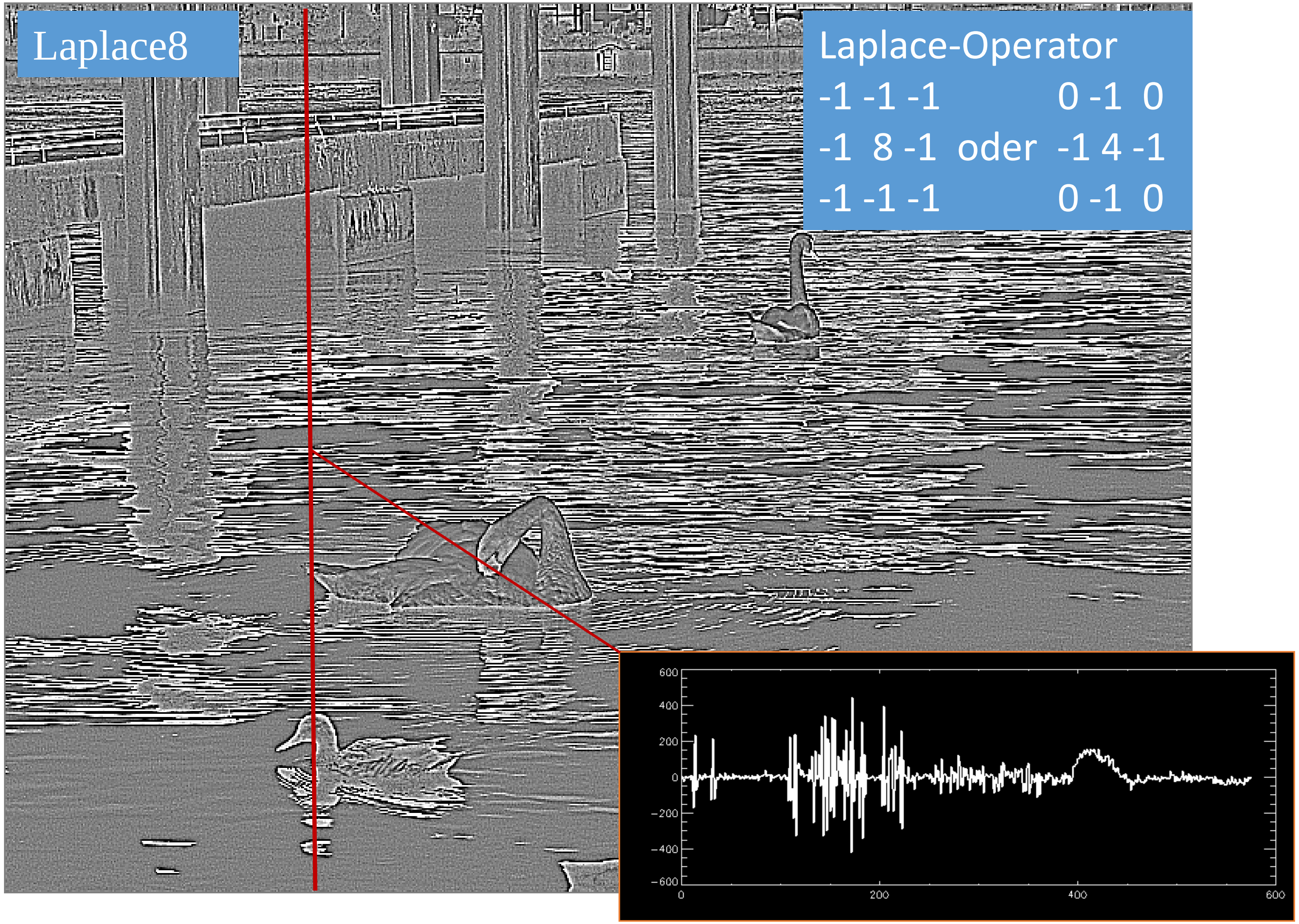
Hochpassfilter = Kantenfilter?

- nicht die ganze Wahrheit
  - Hochpassfilter entsprechen näherungsweise einem Laplace-Filter
  - Laplace-Filter: Summe der partiellen zweiten Ableitungen in x- und in y-Richtung
- Laplace-Filter und Kanten
  - Definieren den Ort einer Kante (durch Nulldurchgänge)
  - geben nicht Stärke und Richtung einer Kante an (so, wie Gradienten)

Laplace Funktion

- Summe der partiellen zweiten Ableitungen: $\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$
- Nulldurchgänge der Laplacefunktion = zusammenhängende Kurven
- Approximation durch Kombination einer doppelten Differenzbildung in *x*- und *y*-Richtung,
  - z.B. Faltung eines Differenzoperators [-1 1] mit sich selbst: [-1 2 -1]
  - ergibt für [-1 1]*[-1 1] + $[-1\ 1]^T$*$[-1\ 1]^T$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
  - Summe **aller** partiellen Ableitungen: $\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$: $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Nulldurchgänge



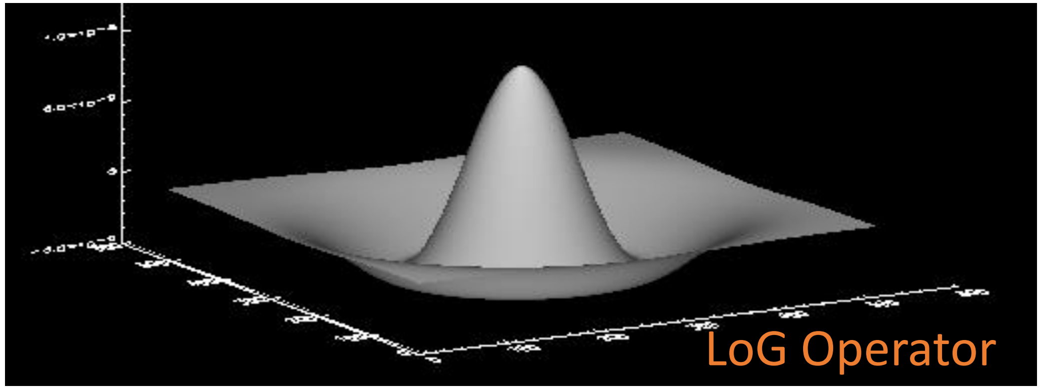
Laplace-Operator

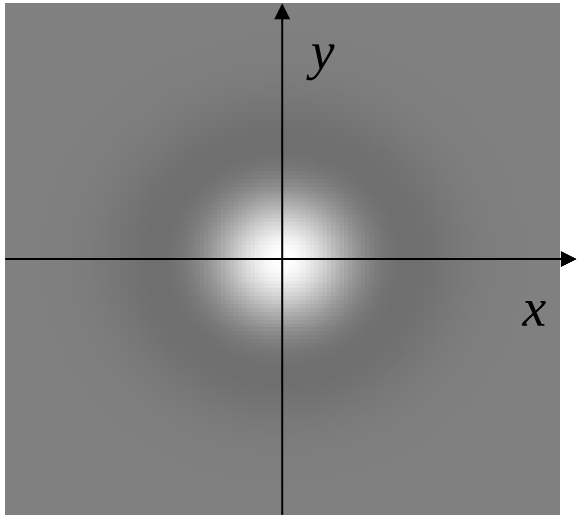
$$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}$$

Marr-Hildreth-Filter = LoG-Filter

- Laplacian-of-Gaussian, d.h. Laplaceoperator auf die Gaußfunktion angewendet.

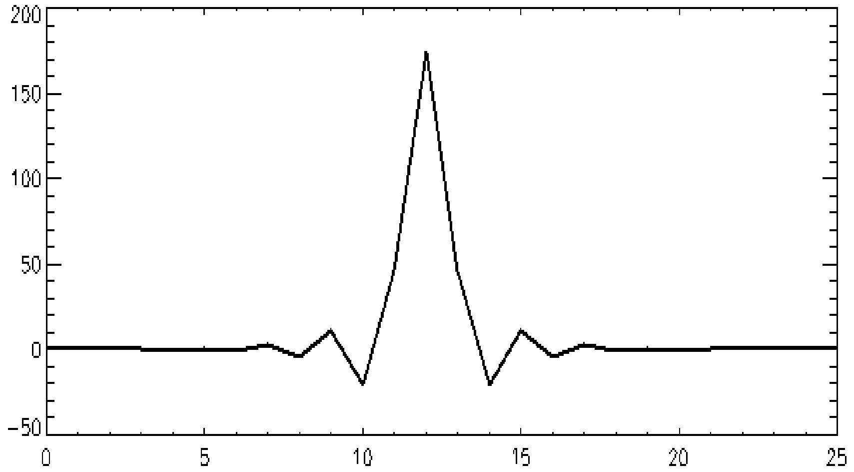
$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \text{ mit } f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$





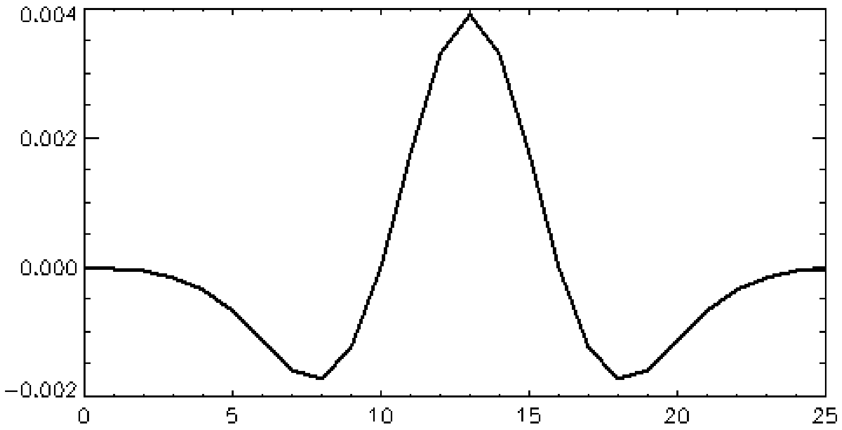
$$LoG(x,y) = \frac{1}{\pi\sigma^4}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Vergleich Butterworth-Hochpass und LoG im Ortsraum



Butterworth-Hochpassfilter (Querschnitt)

LoG-Filter (Querschnitt)



Was sollten Sie heute gelernt haben

- Rauschunterdrückung durch Lineare Filterung
- Artefakte bei der Filterung
- Standardfilter zur Rauschfilterung in Orts- und Frequenzraum
- Kanten: Unsharp Masking und Laplace-Operator

Famous Last Question

Wie könnte man linearen Filter benutzen, um (nahezu) randparallele Ecken (Winkel 90° oder kleiner) zu finden?