Institut für Simulation & Graphik

Grundlagen der Bildverarbeitung

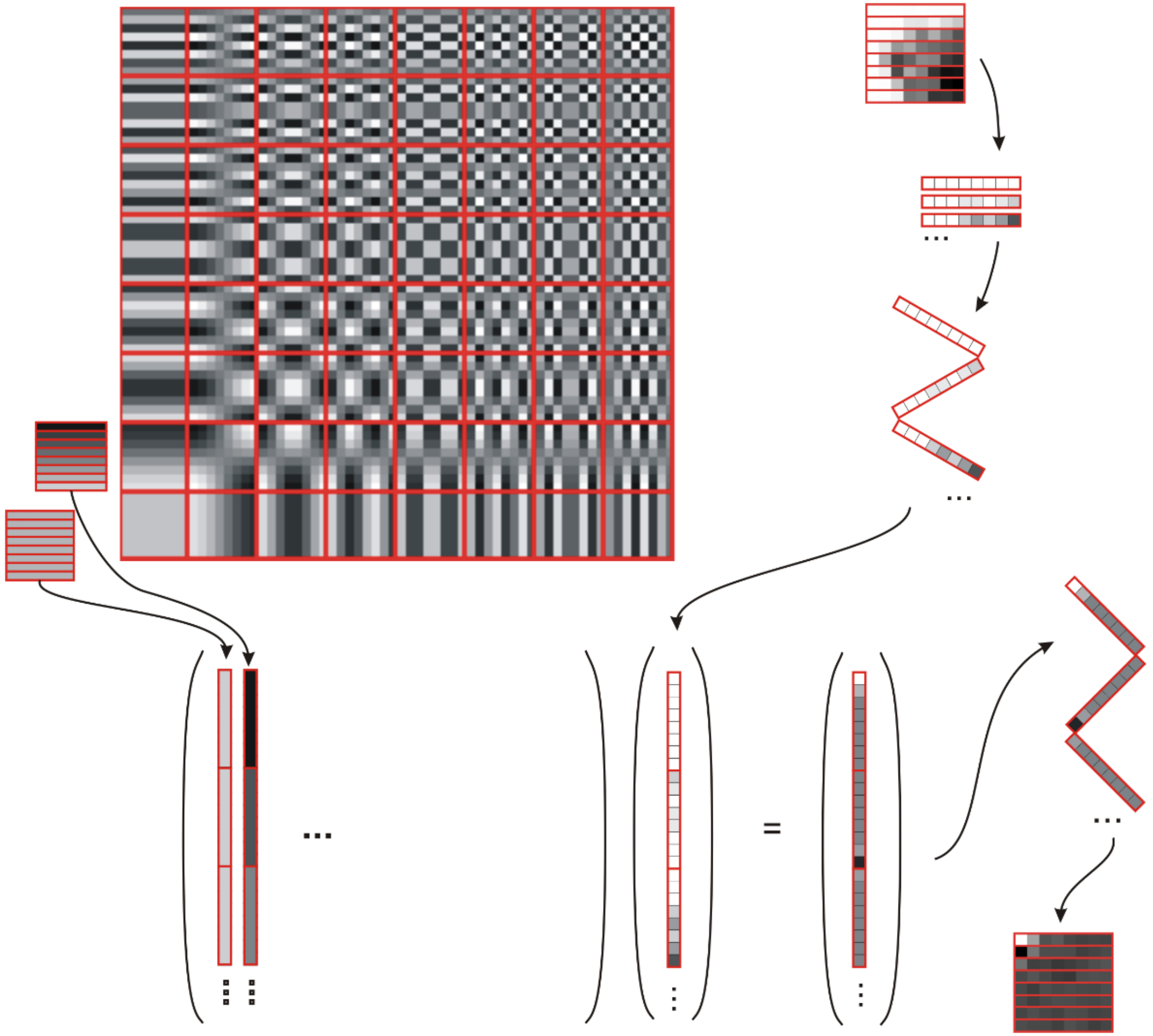
Fouriertransformation

Prof. Dr. Klaus Tönnies

Bildverarbeitung
&
Bildverstehen

Erinnerung JPEG-Kompression

- Wie lassen sich die Basen entwickeln?
  - Sinnvolle Zerlegung
  - Invertierbarkeit
- Geht das für beliebige Blockgrößen?
- Kann man noch mehr damit machen?

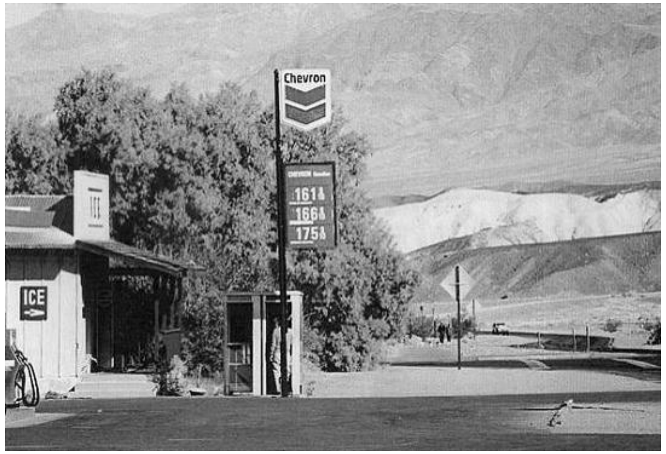


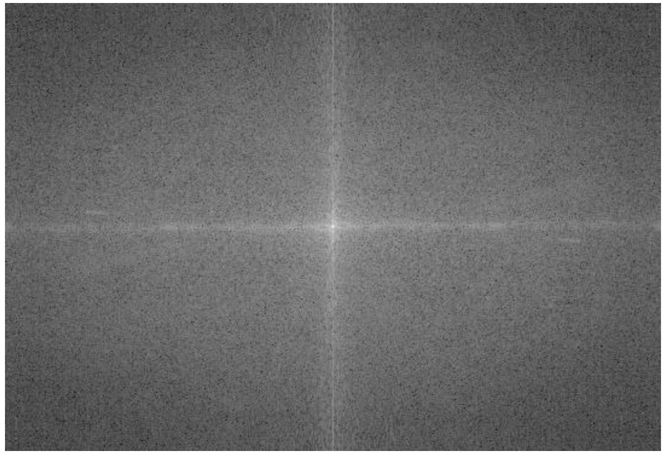
Fouriertransformation

- Vektor- und Funktionsbasen
- Transformation zwischen Basen
- Basisfunktionen der Fouriertransformation
- 1-D und 2-D Fouriertransformation und grundlegende Eigenschaften
- Darstellung der Komponenten der Fouriertransformierten

Fouriertransformation

- Beschreibung einer beliebige Funktion als Summe von gewichteten periodischen Funktionen (*Basisfunktionen*) mit unterschiedlicher Frequenz (*Frequenzraumrepräsentation*).
- Anwendungen
  - Beschreibung des Informationsverlusts bei Digitalisierung
  - Restauration von linearen Störungen
  - Rekonstruktion von Bildern aus Projektionen
  - Schnelle Filterung





Basisfunktionen

- Bilder können als zweidimensionale Funktion $f(m,n)$ aufgefasst werden.
- Jede Funktion kann als Summe von gewichteten Basisfunktionen $b_{u,v}$ aufgefasst werden:

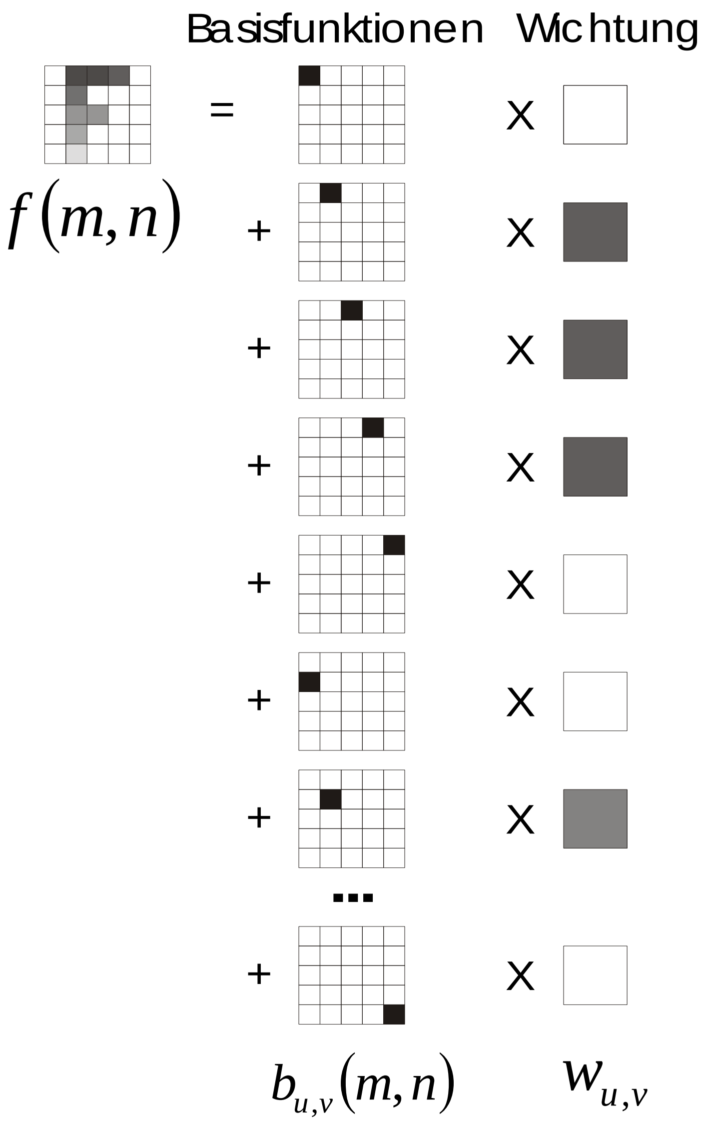
$$f(m,n)=\sum_{v=0}^{M-1}\sum_{u=0}^{N-1} w_{u,v}\cdot b_{u,v}(m,n)$$

- Die Wichtungen $w_{u,v}$ bilden eine neue Funktion $w(u,v)$, die $f(m,n)$ zusammen mit den Basisfunktionen genau beschreibt.
- Die Auswirkung von Veränderungen auf die Wichtungen (z.B. Filterung) hängen von den Basisfunktionen ab.
- Die Fouriertransformation ist die Transformation von einer Ortsbasis in eine Frequenzbasis.

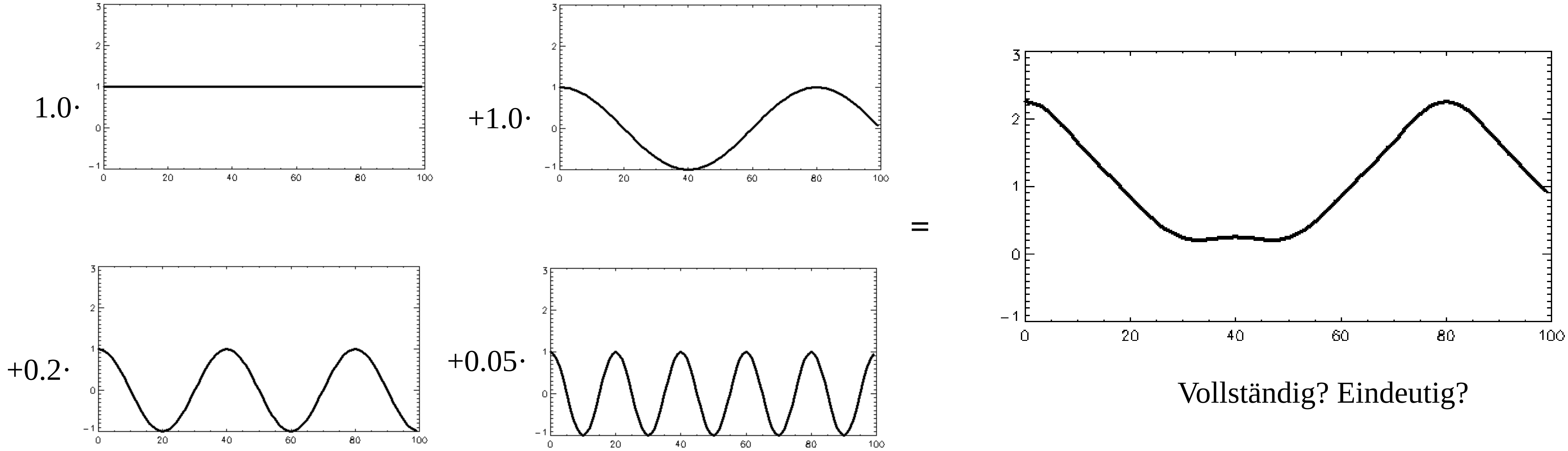
Ortsbasis

- Jede Basisfunktion ist ein Bild, das in einem Pixel den Wert 1 und in allen anderen Pixeln den Wert 0 hat.
- Zwei Basisfunktionen unterscheiden sich dadurch, dass sie den 1-Pixel an unterschiedlichen Stellen haben.
- Vorgeschlagene Basis ist vollständig und eindeutig.

$$f(m,n) = \sum_{v=0}^{M-1} \sum_{u=0}^{N-1} w_{u,v} \cdot b_{u,v}(m,n)$$

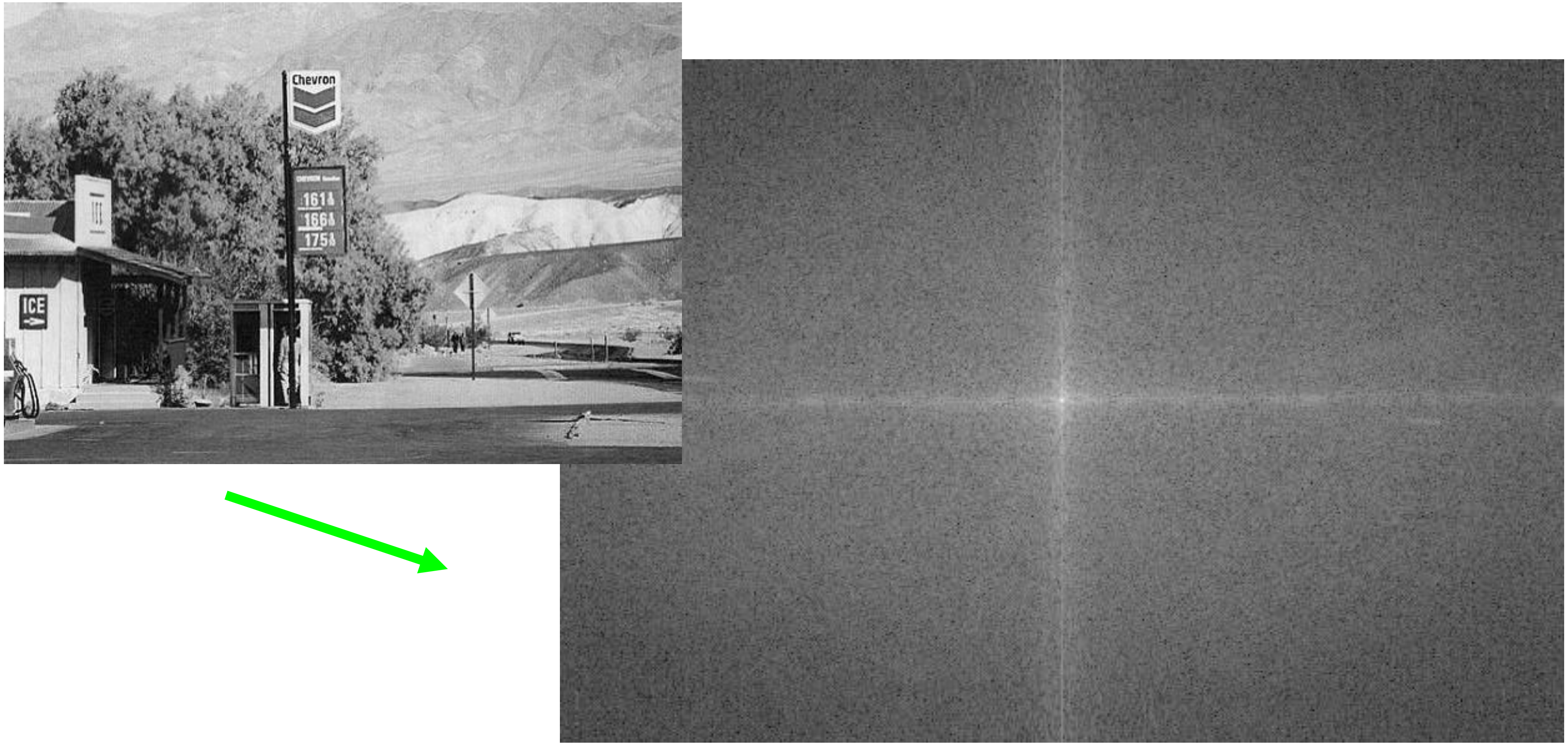


Frequenzbasis (1-D)

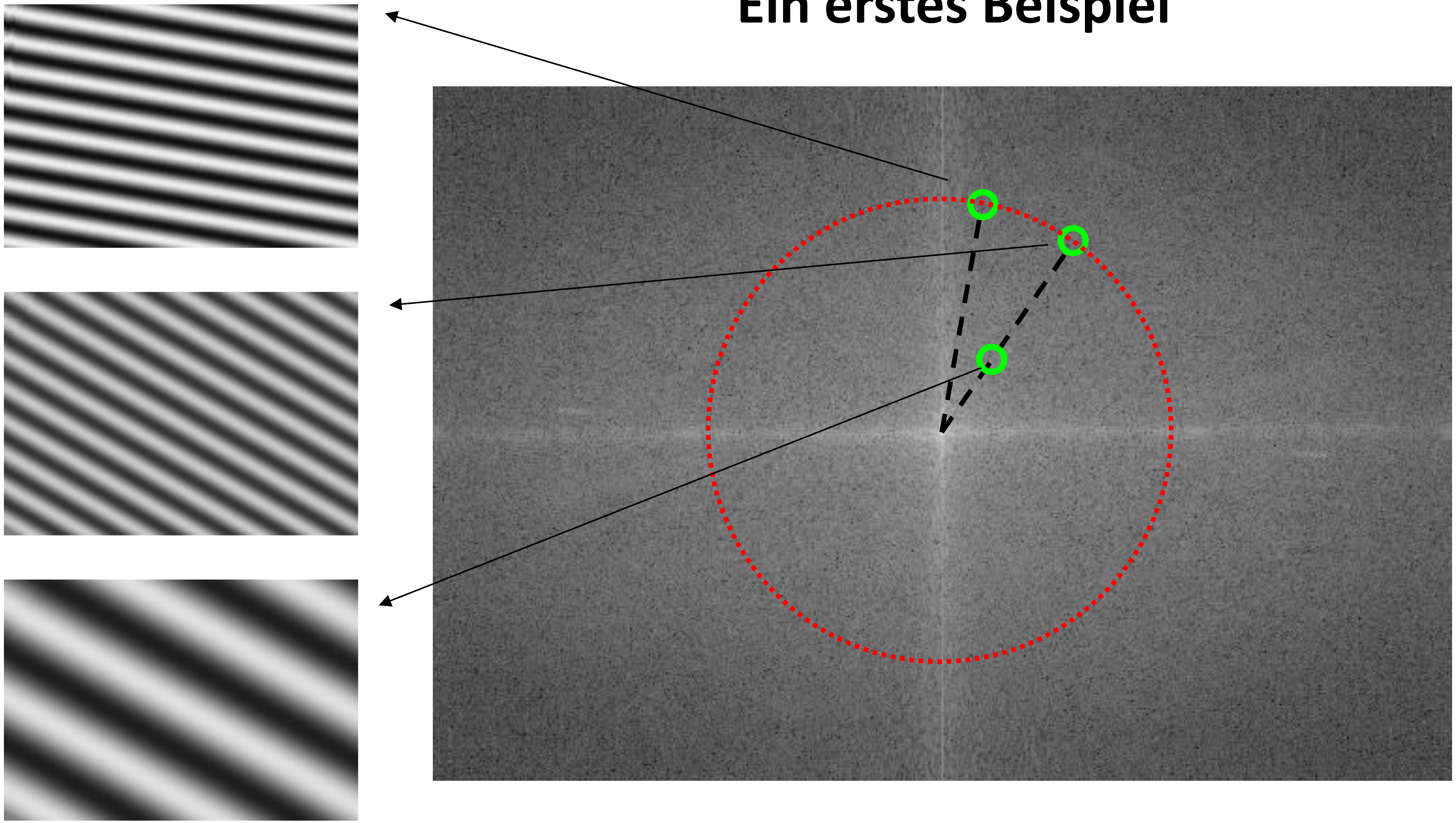


Vollständig? Eindeutig?

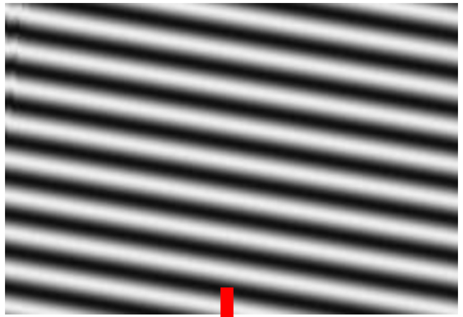
Ein erstes Beispiel



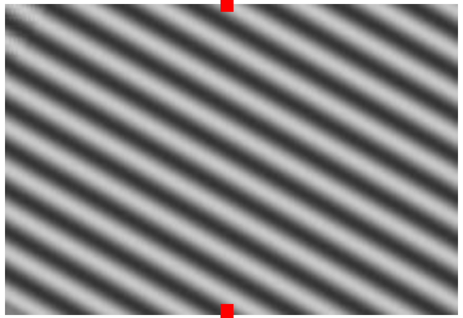
Ein erstes Beispiel



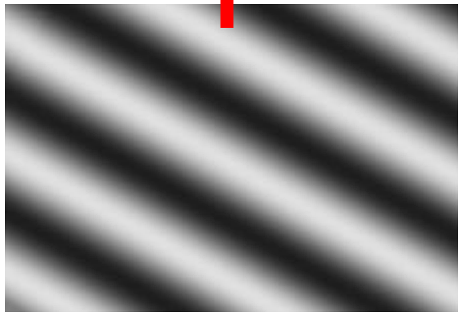
Ein erstes Beispiel



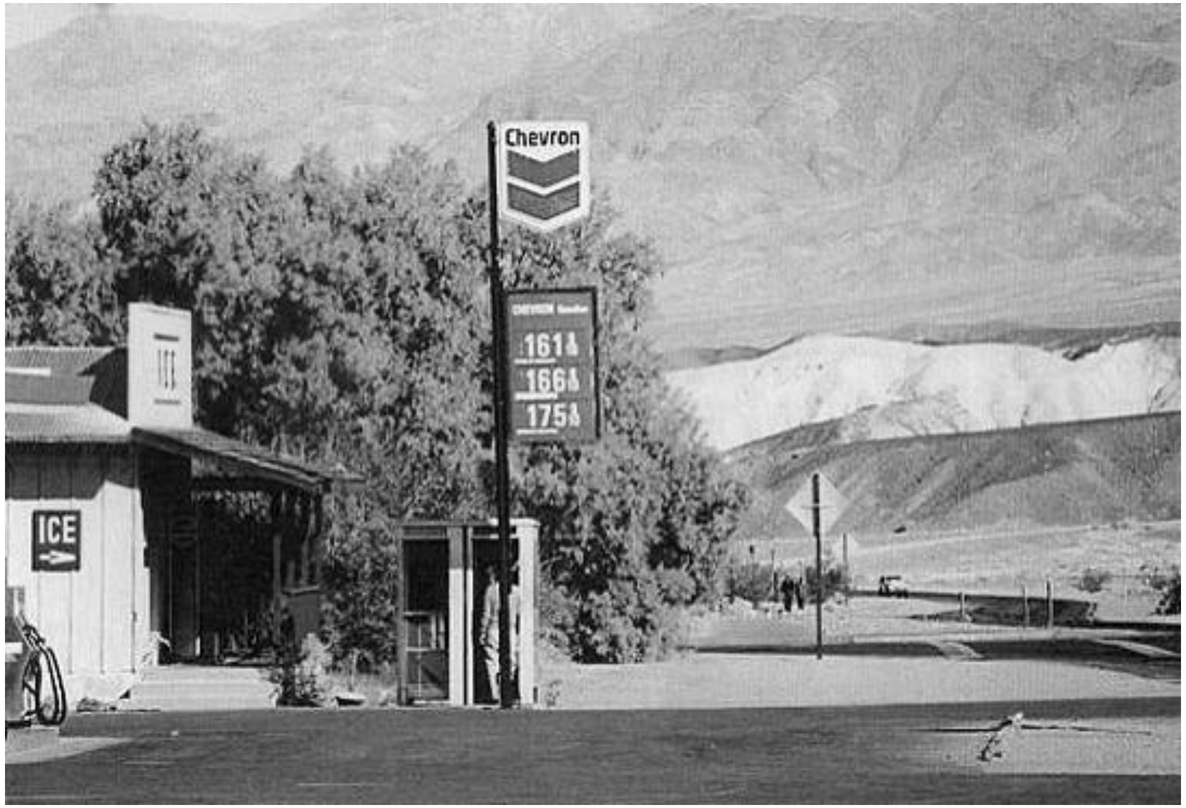
+



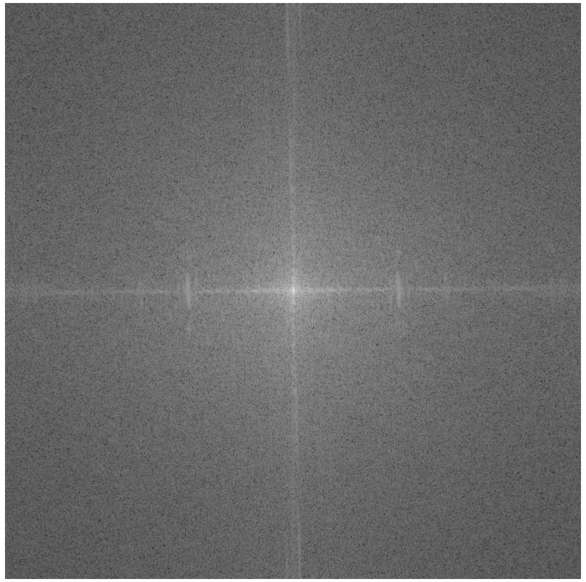
+

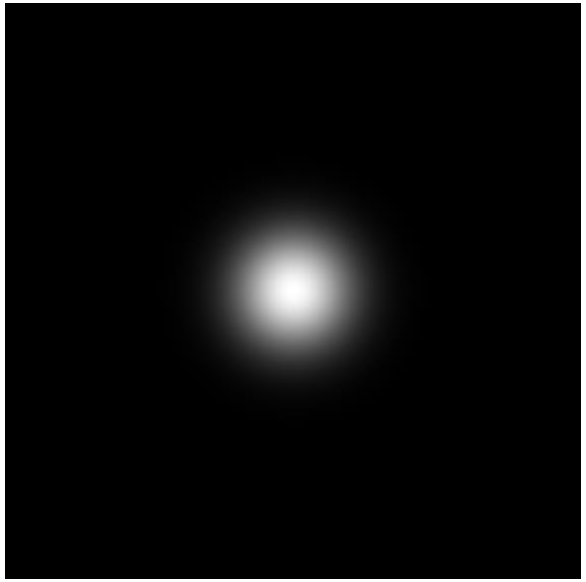


+...=

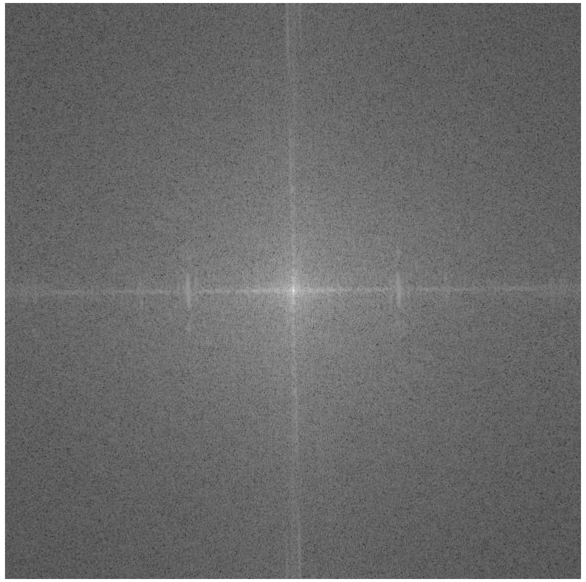


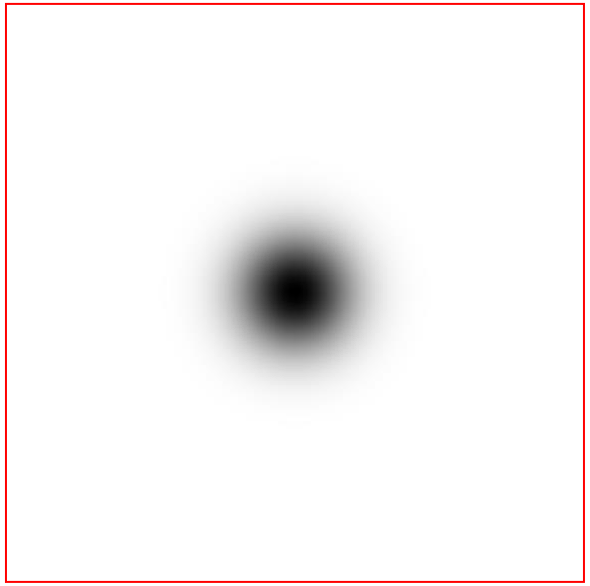
Erste Experimente





Erste Experimente



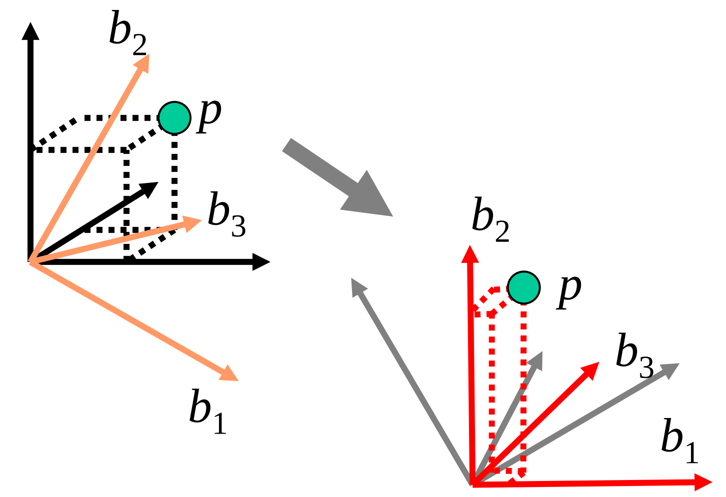


Invertierbarkeit von Ax=b

- Die Transformation ist einfach invertierbar, wenn die Basisfunktionen in A eine *orthogonale Basis* bilden.
  - Was ist Orthogonalität für Funktionen?
  - Wann bilden Basisfunktionen eine orthogonale Basis?
- Transformation: „Projektion“ der Funktion auf die neue Basis.
- Inverse Transformation: Projektion auf die alte Basis.
- Orthogonalität, Projektion, Transformation etc. sind Begriffe aus der *Vektoralgebra* und können auch für Funktionen genutzt werden.

Orthogonale Vektorbasis

- Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.
- *N* Vektoren bilden eine Basis für einen *N*-dimensionalen Raum, wenn sie alle orthogonal zueinander sind.
- Projektion eines Vektors *p* auf einen Basisvektor *b* ist durch das normierte Skalarprodukt zwischen ihnen gegeben.
- Beispiel:
  - Koordinatenvektoren eines dreidimensionalen Raums.



$$\vec{b}_i \bullet \vec{b}_j = 0, \quad \text{für } i, j = 1,2,3 \wedge i \neq j$$

$$\vec{p}^{\,B} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \bullet \vec{b}_1}{\left\|\vec{b}_1\right\|} & \frac{\vec{p} \bullet \vec{b}_2}{\left\|\vec{b}_2\right\|} & \frac{\vec{p} \bullet \vec{b}_3}{\left\|\vec{b}_3\right\|} \end{pmatrix}$$

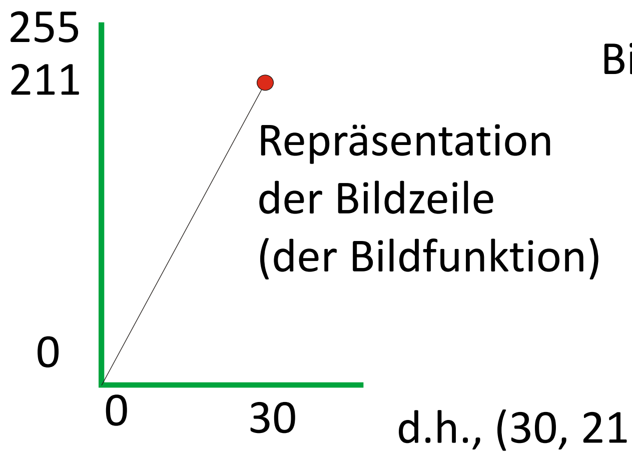
Funktionen statt Vektoren

- Eine Funktion $f(x)$ ist auch durch vollständige Aufzählung aller Werte eindeutig definiert: $f(x) = \{f(x_1), f(x_2), \ldots\}$
- Skalarprodukt zwischen Funktionen f_1 und f_2:
  - Reeller, unbeschränkter Definitionsbereich $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx$
  - Reeller, beschränkter Definitionsbereich $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_1(x) f_2(x) dx$
  - Ganzzahliger, unbeschränkter Definitionsbereich $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n) f_2(n)$
  - Ganzzahliger, beschränkter Definitionsbereich $\sum_{n=0}^{N-1} f_1(n) f_2(n)$
- Orthogonale Basen können wie für Vektoren definiert und genutzt werden.

Funktion als Vektor (Beispiel)

Ein Bild kann als Funktion mit endlichem Definitionsbereich aufgefasst werden.

Anzahl der Bildelemente = Anzahl der Funktionswerte = Vektordimension.



Bildzeile (ziemlich kurz):  entspricht (30, 211)

d.h., $(30, 211) = 30 \cdot (1,0) + 211 \cdot (0,1)$

Vektoren der *orthogonalen Basis*

Transformation in eine andere Basis

- Die Transformation in eine andere Basis ist invertierbar,
  - wenn sie *orthogonal* ist
  - wenn die *Anzahl der Basisvektoren gleich* bleibt.
- Orthogonalität der zwei Funktionen: $[f_1 \bullet f_2](n) = \sum_{n=0}^{N-1} f_1(n) \cdot f_2(n) = 0$
- Jede orthogonale Basis kann durch Rotation (und Translation) aus jeder anderen Basis für die gleiche Funktion erzeugt werden.
- Transformation entspricht einer Rotation (und ggf. Translation):

$$\mathrm{T}_b[f](u) = \sum_{n=0}^{1} f(n) \cdot b_u(n)$$

$$b_1(n) = (\cos\alpha \quad \sin\alpha)$$

$$b_2(n) = (-\sin\alpha \quad \cos\alpha)$$

Transformation in Vektor-Matrix-Schreibweise

- Funktion kann als Vektor $\vec{f}$ ihrer Funktionswerte repräsentiert werden:

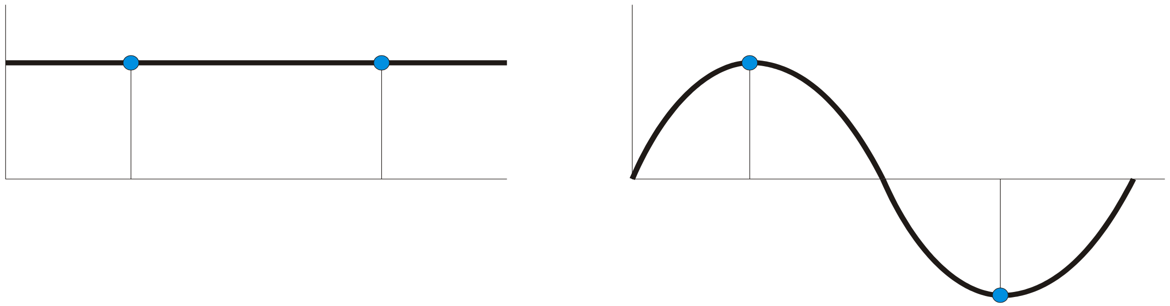
$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f(0) & f(1) & \dots & f(N-1) \end{pmatrix}$$

- Basisfunktionen b_u können in einer quadratischen Matrix **B** zusammengefasst werden:

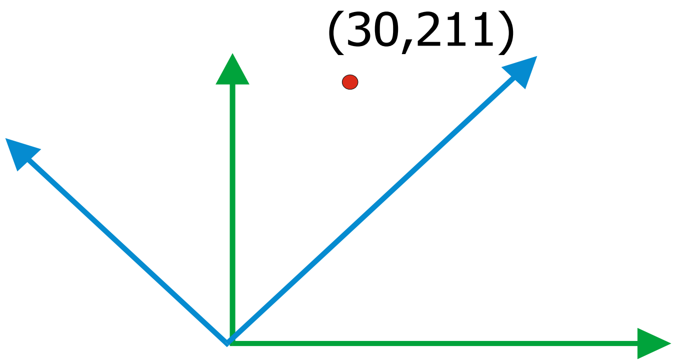
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0(0) & b_1(0) & \dots & b_{N-1}(0) \\ b_0(1) & b_1(1) & & \dots \\ \dots & & & \\ b_0(N-1) & \dots & & b_{N-1}(N-1) \end{pmatrix}$$

- Transformation auf die neue Basis $\vec{F}$ ist die Multiplikation des Vektors mit der Matrix **B**: $\vec{F} = \vec{f} \times \mathbf{B}$

Orthogonale periodische Funktionen



Basis:
(1, 1)
(1, -1)



Transformation:

$$(30,211) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (241, -181)$$

Rücktransformation:

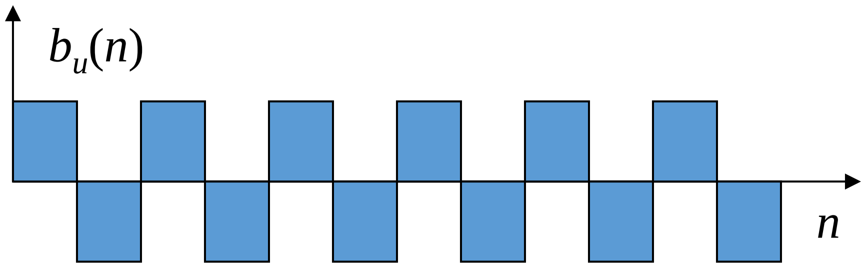
$$(241,-181) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = (60, 422)$$

Anmerkung:

Das Resultat der Rücktransformation muss skaliert werden, weil die Basis nicht normiert ist.

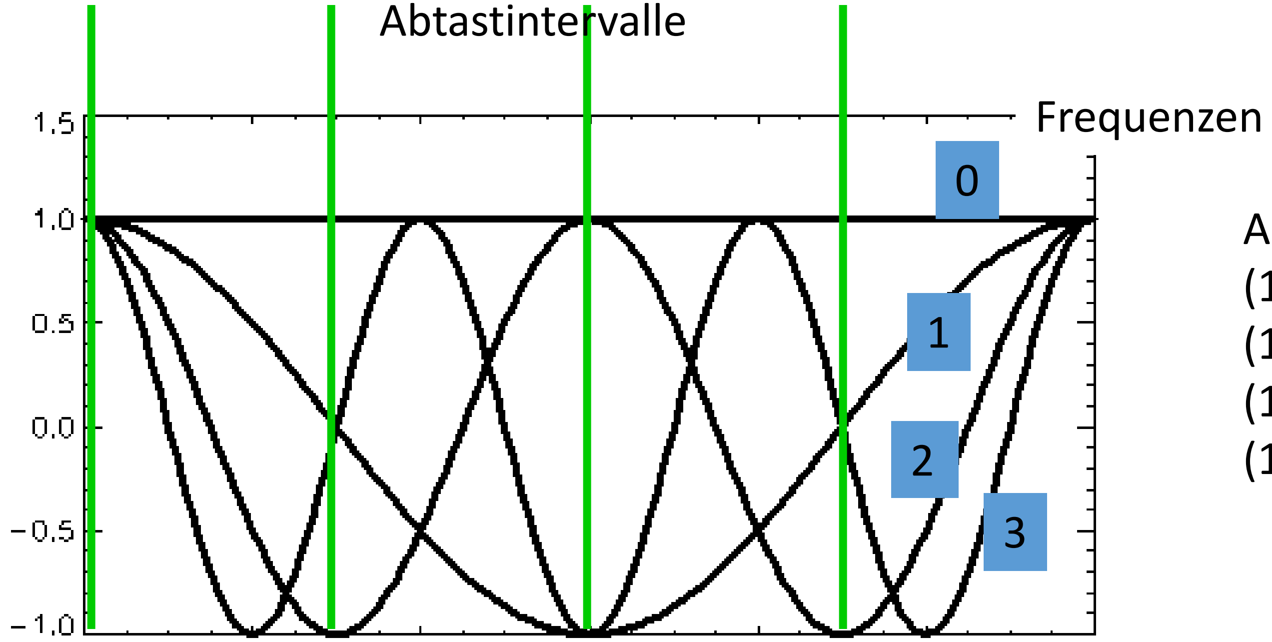
Vollständige Basis

- Basisfunktionen seien Kosinuskurven mit Frequenzen 0,1,2,...: $b_u(n) = \cos(nu \cdot 2p/N)$, u=0,1,2...
- Problem:
  Die maximal repräsentierbare Schwingungsanzahl für eine Funktion mit N Werten ist $N/2$
  ►Anzahl der Basisfunktionen ist $N/2$.



- Zusätzlich benötigte Basisfunktionen sollten die gleiche Semantik haben.

Beispiel: 4 Basisfunktionen



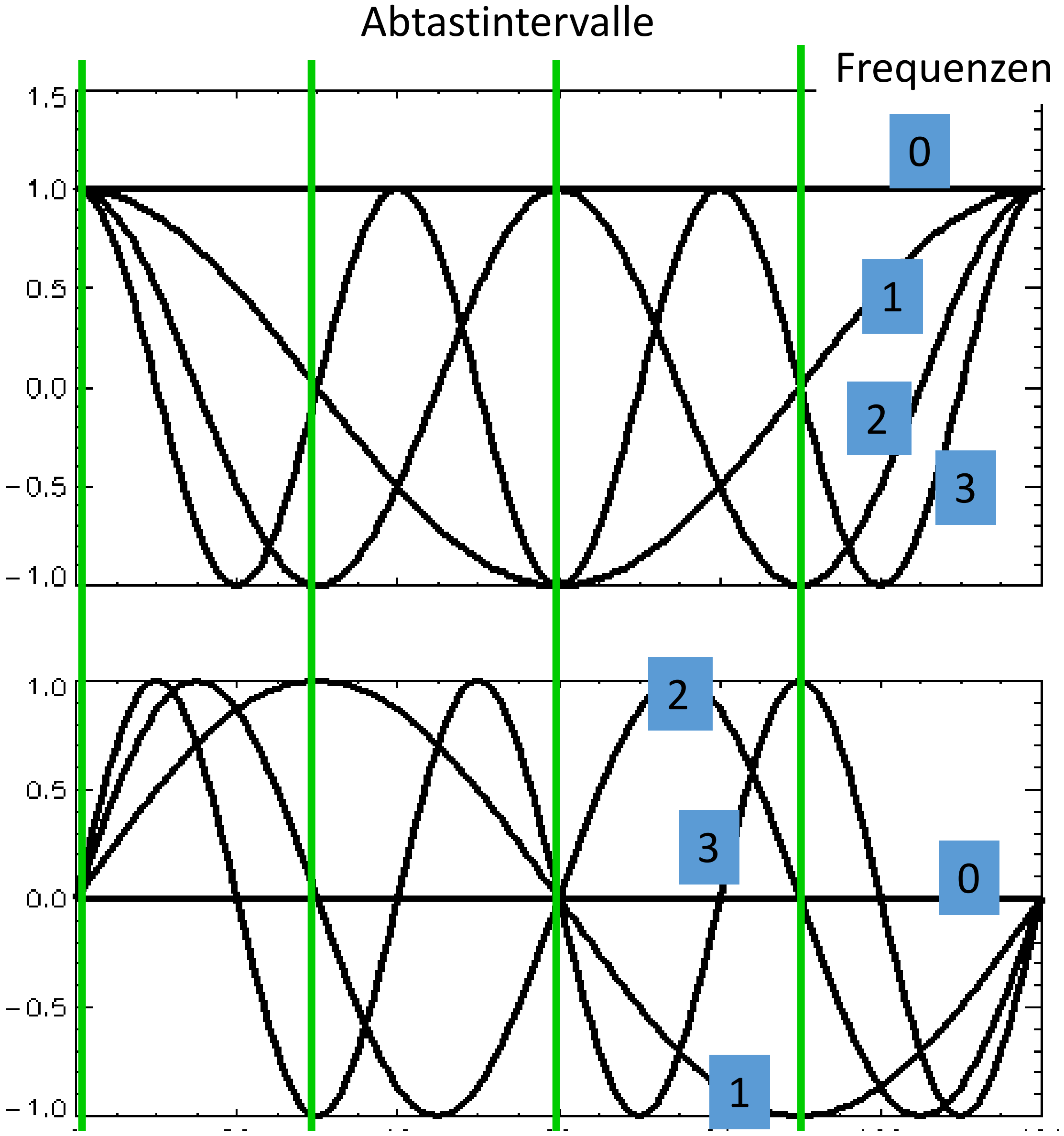
Abgetastete Kosinuswellen:
(1 1 1 1)
(1 0 –1 0)
(1 –1 1 –1)
(1 0 –1 0)

Lösungen:

– frequenzverschobene Perioden (DCT).

– komplexe periodische Funktionen (FT).

Basisfunktionspaare



Abgetastete Kosinuswellen:
(1 1 1 1)
(1 0 –1 0)
(1 –1 1 –1)
(1 0 –1 0)

Abgetastete Sinuswellen:
(0 0 0 0)
(0 1 0 –1)
(0 0 0 0)
(0 –1 0 1)

Komplexe periodische Funktionen

1. Projektion auf Vektor von Basisfunktionen:

- $\vec{b}_u(n) = \begin{bmatrix} b_{u,\cos} & b_{u,\sin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(nu \cdot 2\pi / N) & \sin(nu \cdot 2\pi / N) \end{bmatrix}$
- $\vec{F}(u) = \begin{bmatrix} \vec{f} \times \mathbf{B}_{\cos} & \vec{f} \times \mathbf{B}_{\sin} \end{bmatrix}$

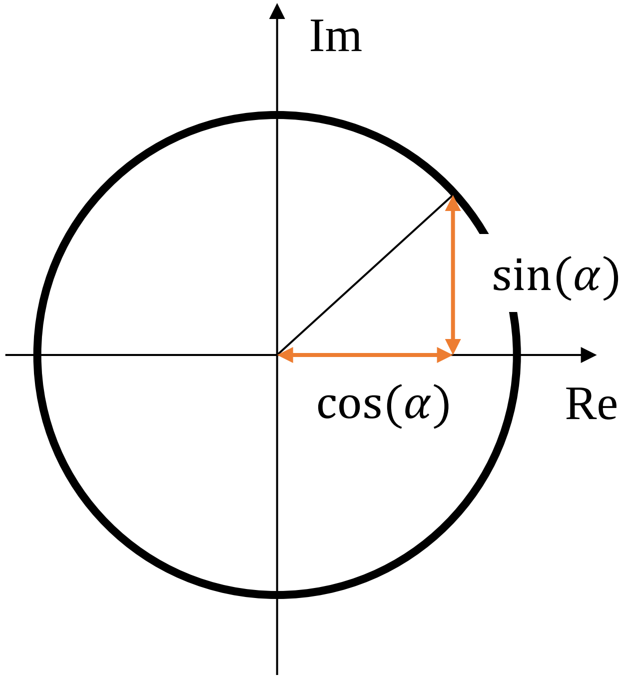
2. Definition des Skalarprodukts:

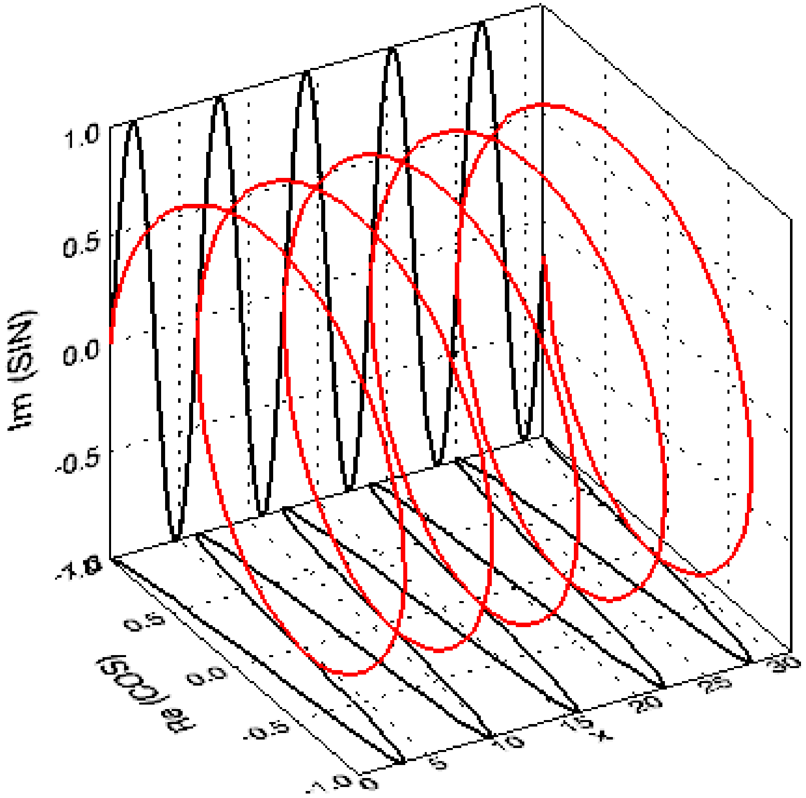
- Betrachtung der beiden Komponenten des Vektors als Real- und Imaginärteil

$$\vec{b}_u(n) = \cos(nu \cdot 2\pi / N) + i \cdot \sin(nu \cdot 2\pi / N)$$

- Komplexes Skalarprodukt

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$





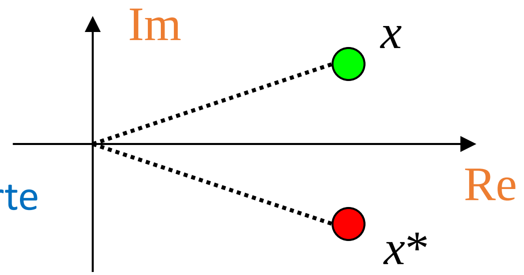
Alle Werte für komplexe Zahlen der Form $\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$ liegen auf einem Kreis mit Abstand 1 in der komplexen Ebene.

Komplexes Skalarprodukt

Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren mit komplexen Elementen:

- Summe der Produkte der Komponenten des ersten Vektors mit der komplex-konjugierten Komponenten des zweiten Vektors.
- Die komplex-konjugierte zu $x=a+i\cdot b$ ist $x^*=a-i\cdot b$.

Komplex-konjugierte komplexe Zahl



Skalarprodukt:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_i^* = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\mathrm{Re}(x_i) + i\,\mathrm{Im}(x_i)\right)\left(\mathrm{Re}(y_i) - i\,\mathrm{Im}(y_i)\right)$$

Repräsentation als Exponentialfunktion

- Taylorreihenentwicklung für Kosinus und Sinus:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

- Taylorreihenentwicklung für e^{ix}:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \Rightarrow e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots$$

- Es gilt daher wegen $i^2 = -1$: $\cos(x) + i \cdot \sin(x) = e^{ix}$
- Phasenverschiebung α kann in komplexen Funktionen als Multiplikation ausgedrückt werden:

$$\cos(x+\alpha) + i\sin(x+\alpha) = \exp(i(x+\alpha)) = \exp(i\alpha)\exp(ix)$$

1-D Basisfunktionen

Bildfunktion: $f(n)$, n=0,N-1,

also: N Basisfunktionen

$b_u(n) = \exp(i \cdot 2p/N \cdot n \cdot u)$, mit Frequenzen u=0,N-1

z.B. $b_0(n)$ = [(1,0), (1,0), ... , (1,0)]

Transformation **FT** : **FT**(**f**) = **F** = **f** ×**B** (Vektor-Matrix-Schreibweise)

$$F(u) = \sum_n f(n) \exp\left(-i \cdot {}^{2\pi}\!/_{N}\, nu\right)$$, für alle u=0,N-1

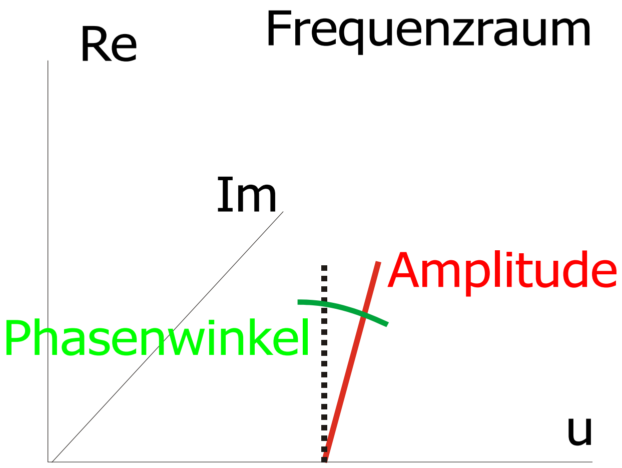
Rücktransformation **FT**$^{-1}$: **FT**$^{-1}$(**F**) = **F**×**B**^{T} (Vektor-Matrix-Schreibweise)

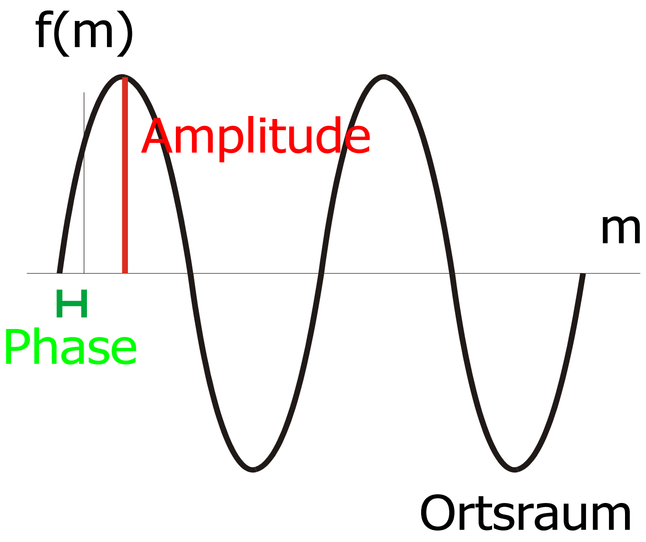
$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_u F(u) \exp\left(i \cdot {}^{2\pi}\!/_{N}\, nu\right)$$, für alle n=0,N-1

Skalierungsfaktor, weil die Basisfunktionen nicht normiert sind.

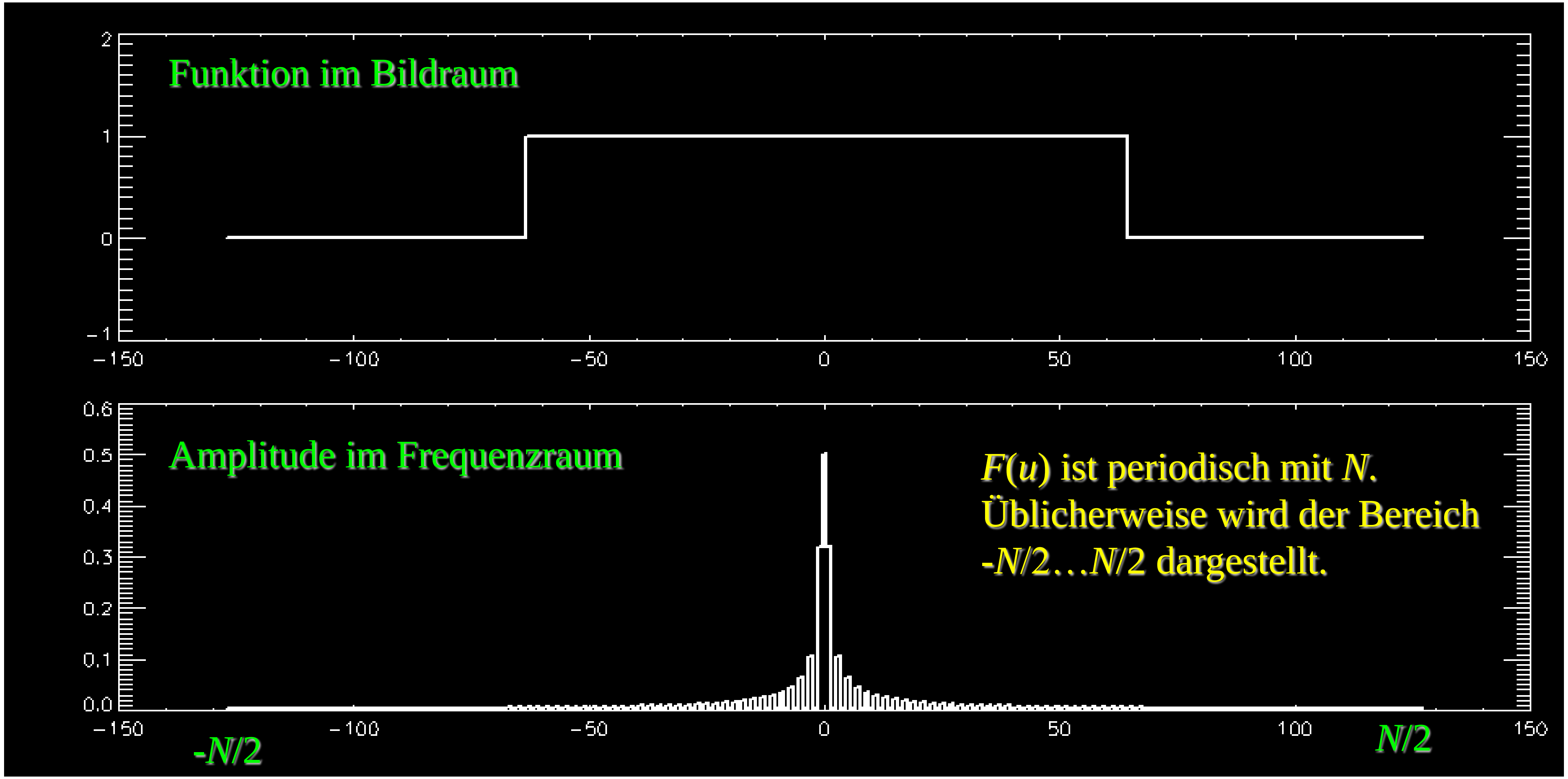
Phase und Amplitude

- Das Resultat der Fouriertransformation ist eine komplexe Funktion $F(u)$.
- Der Betrag eines Funktionswerts ist die Amplitude und der Winkel zur reellen Achse ist die Phase zur Gewichtung der betreffenden Basisfunktion

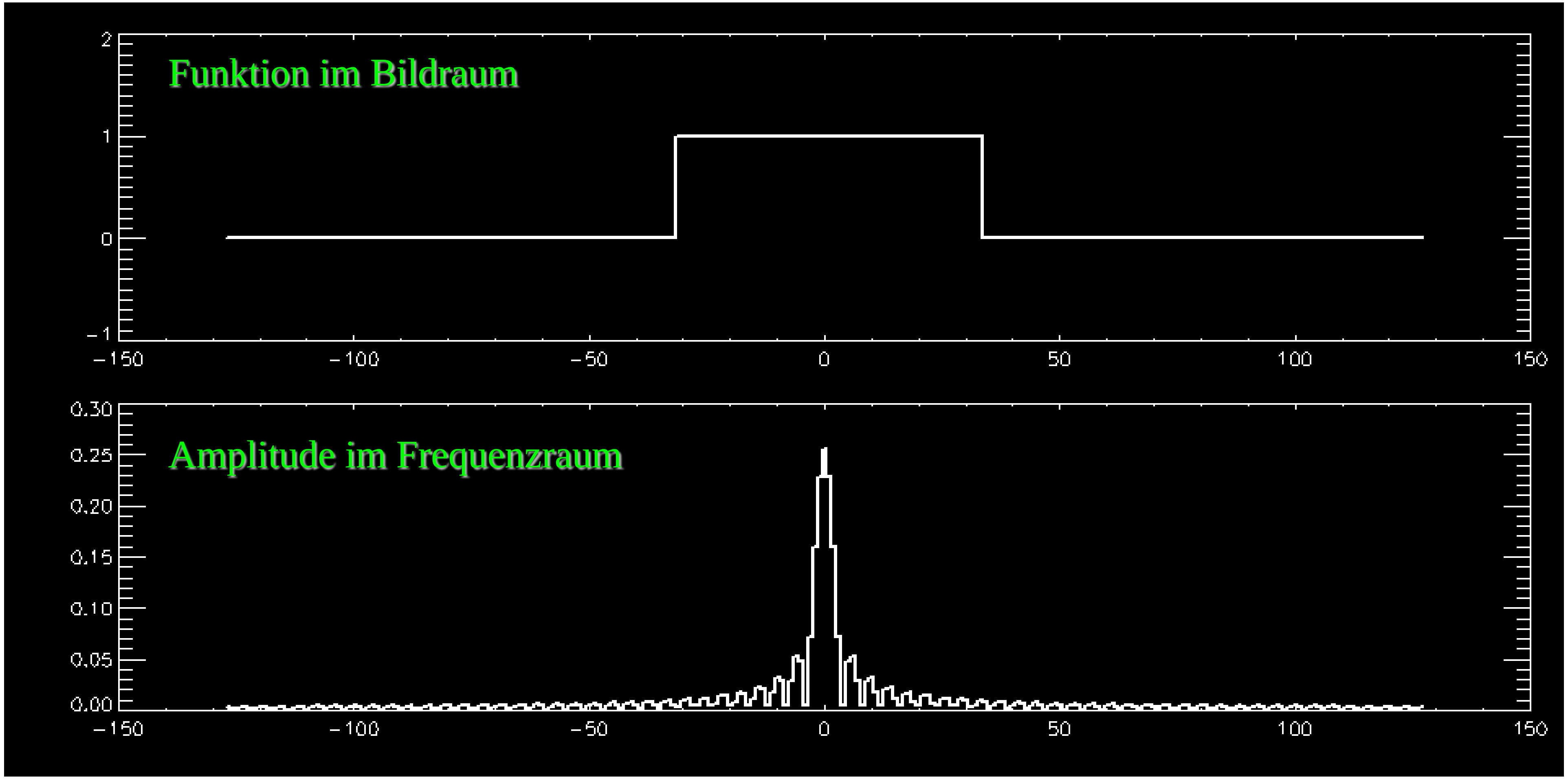




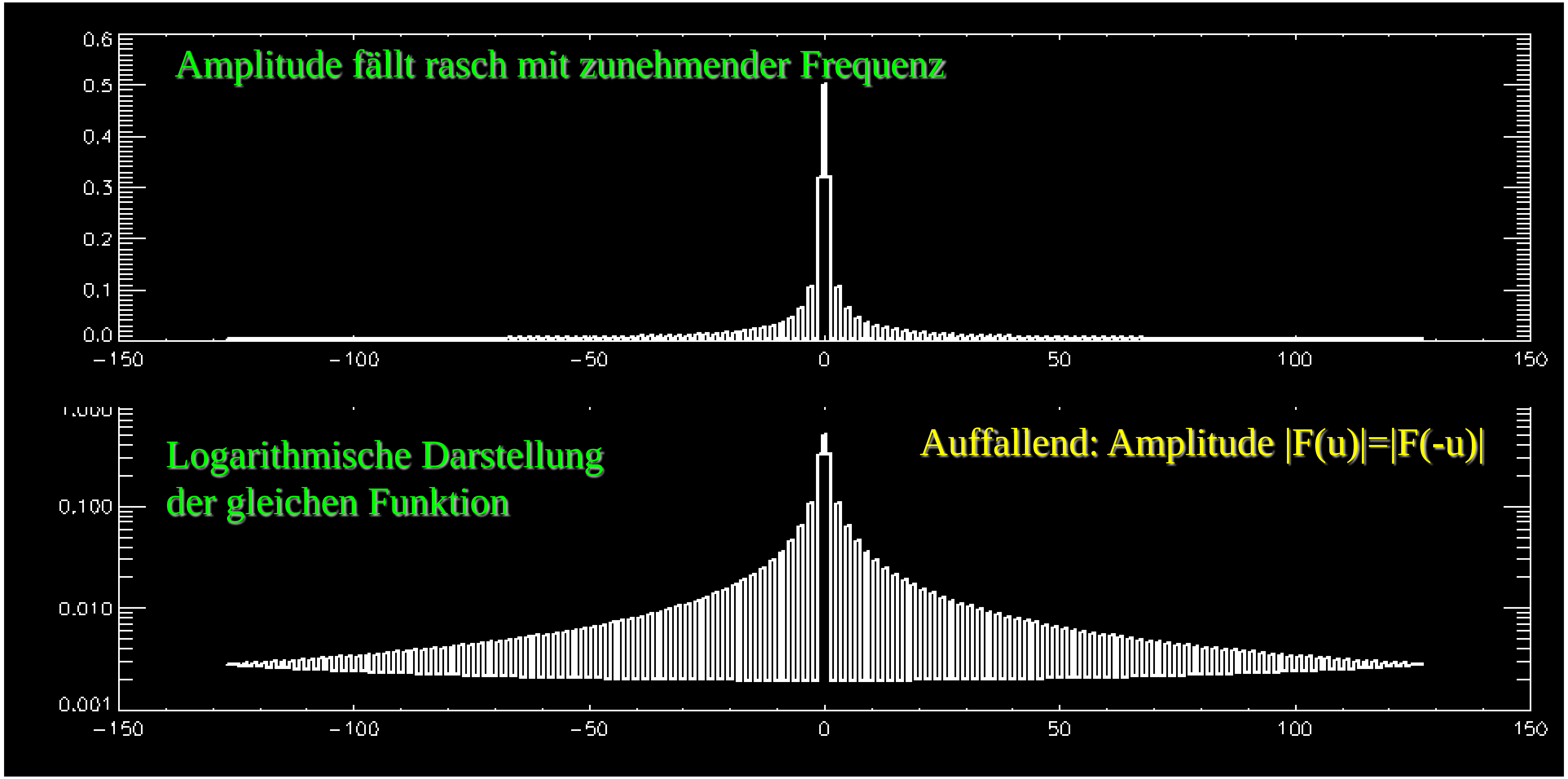
Beispiel 1-D Fouriertransformation



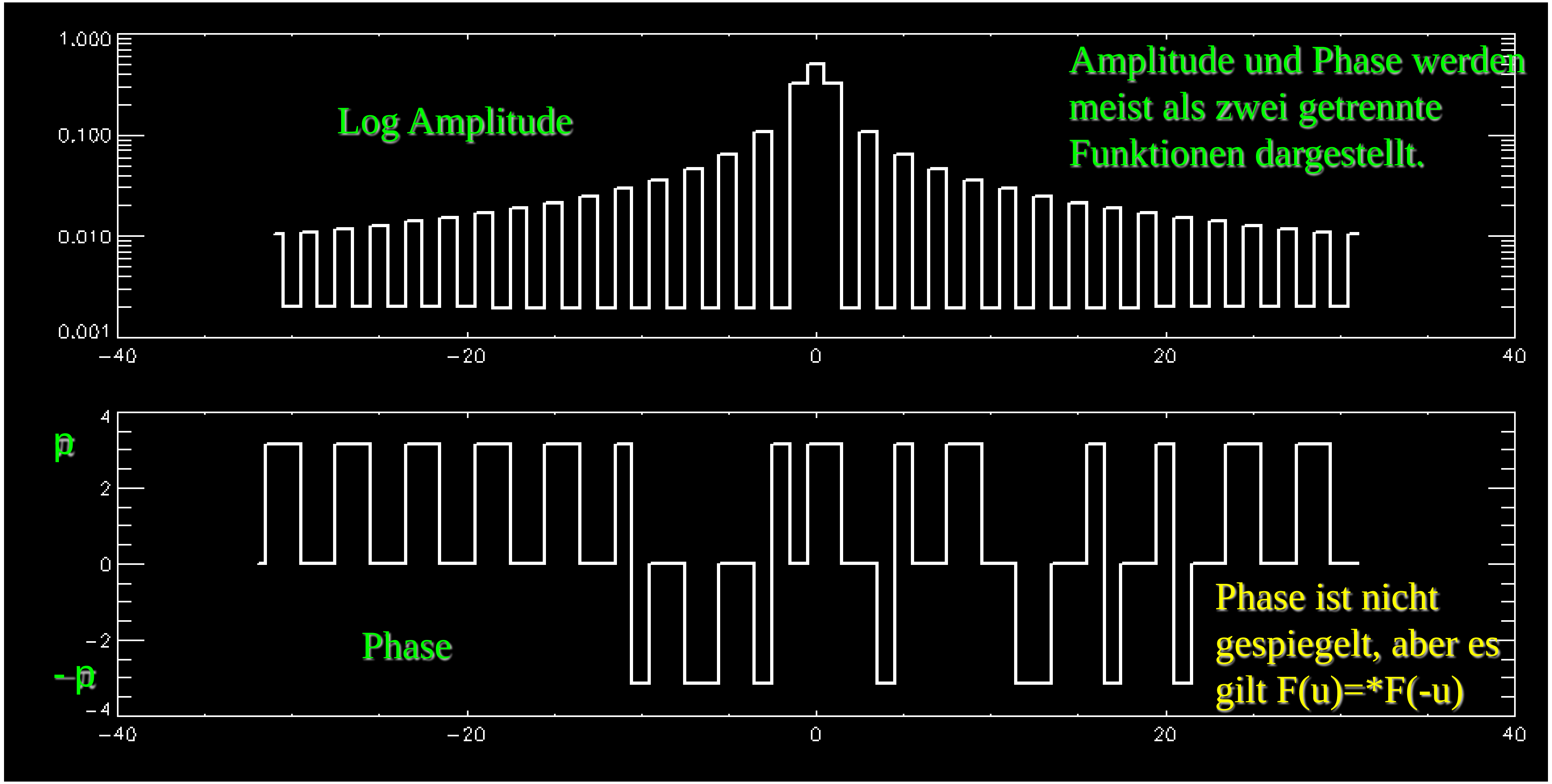
Beispiel 1-D Fouriertransformation



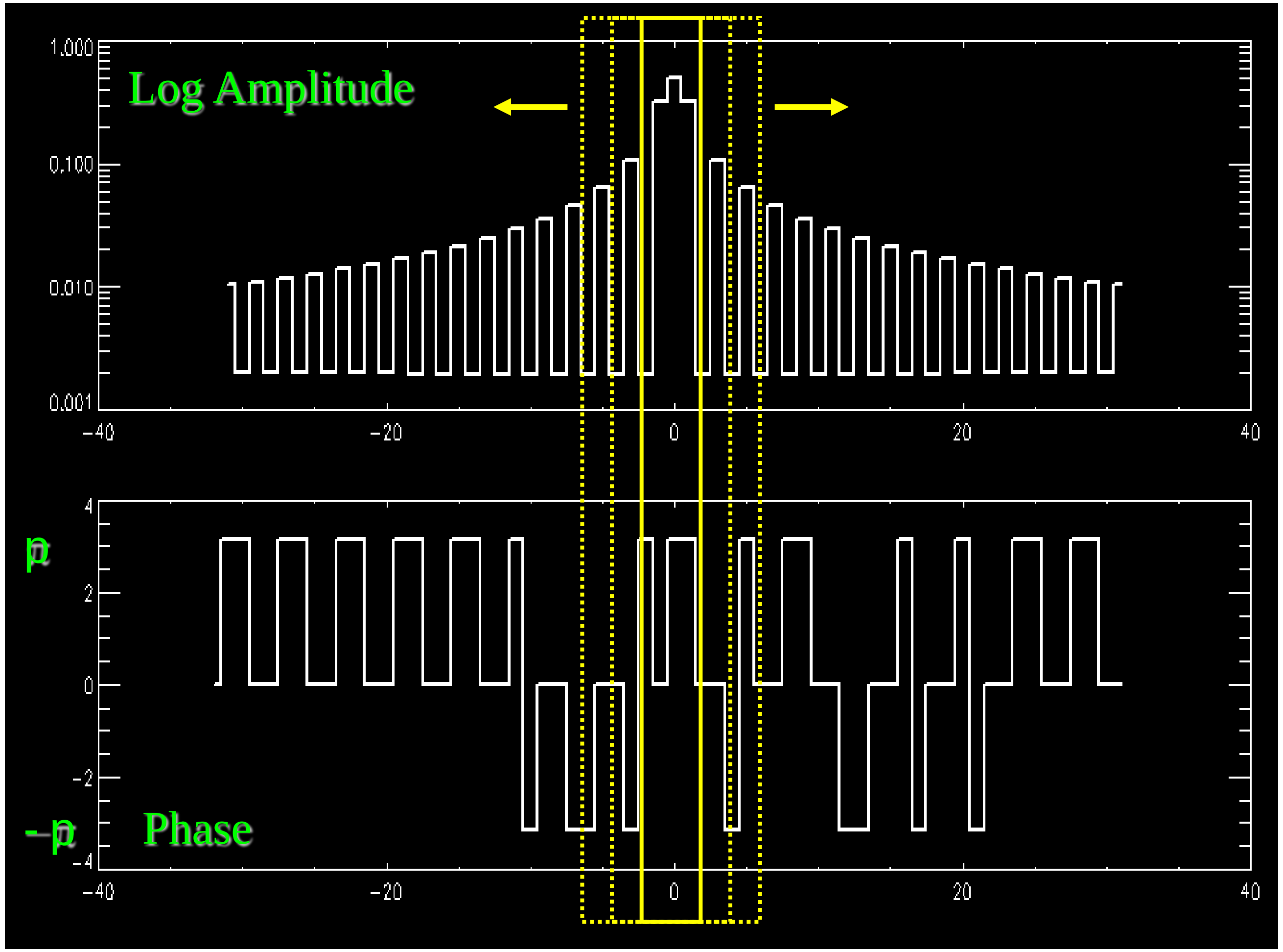
Logarithmische Darstellung der Amplitude



Amplitude und Phase

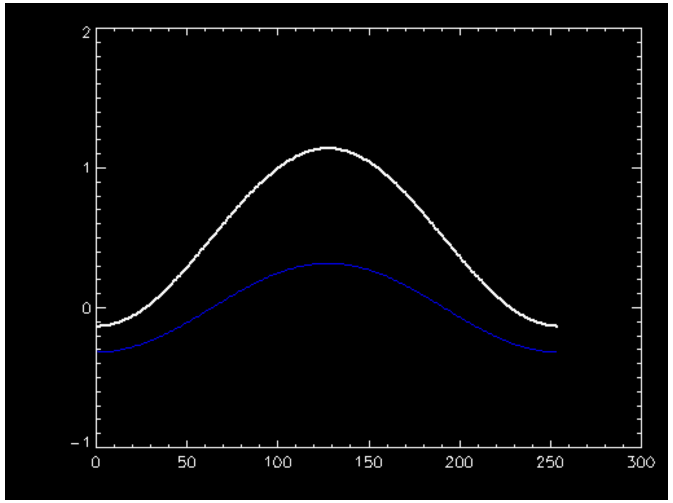


Rücktransformation

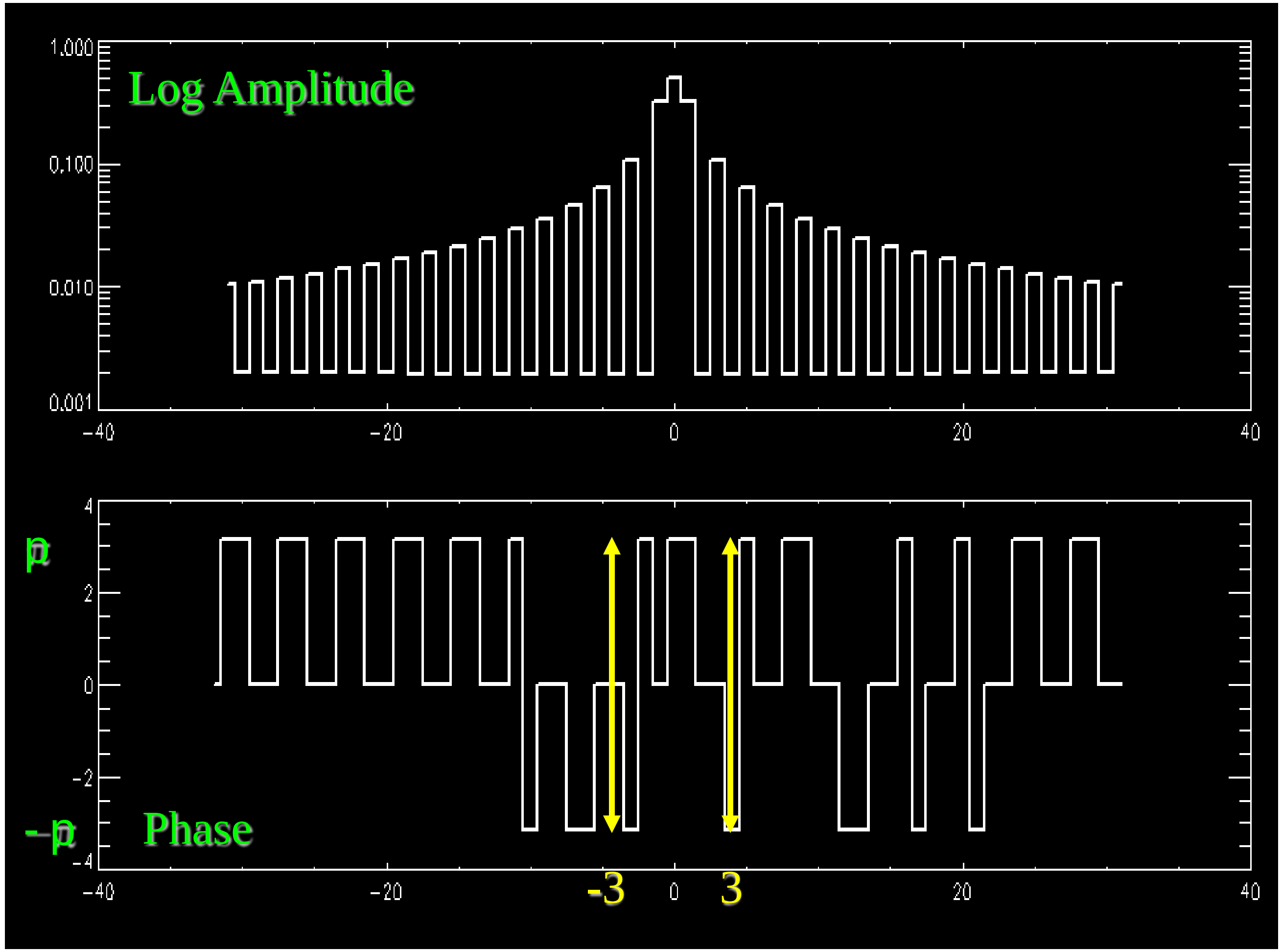


Summation der mit Amplitude und Phase modifizierten Sinus/Kosinuskurven.

Realteil der summierten Wellen

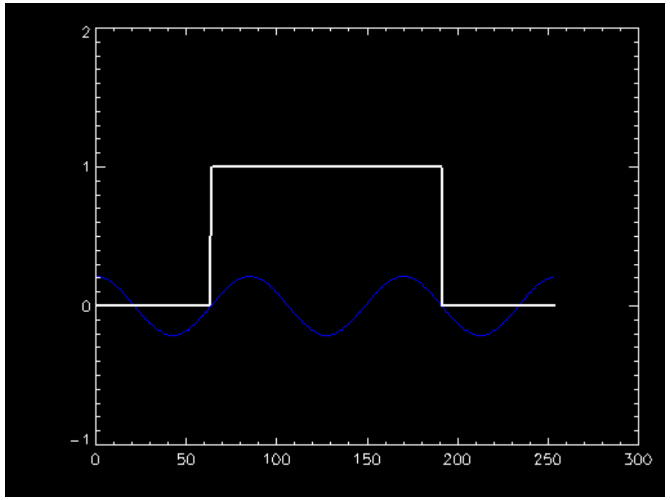


Phasenverschiebung



Summation der mit Amplitude und Phase modifizierten Sinus/Kosinuskurven.

Realteil der summierten Wellen



Was sollten Sie heute gelernt haben?

- Orthogonale Funktionsbasis
- Komplexe periodische Funktionen
- 1-d Fouriertransformation
- Darstellung von Amplitude und Phase

Famous Last Question

Warum enthält die Fouriertransformierte Funktion F(u) redundante Information?

$F(u) = {}^*F(-u)$, d.h. F ist exakt bestimmt,
falls man die Hälfte der Werte kennt