OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG
INF
Institut für Simulation & Graphik

Grundlagen der Bildverarbeitung

2D – Fouriertransformation

Prof. Dr. Klaus Tönnies

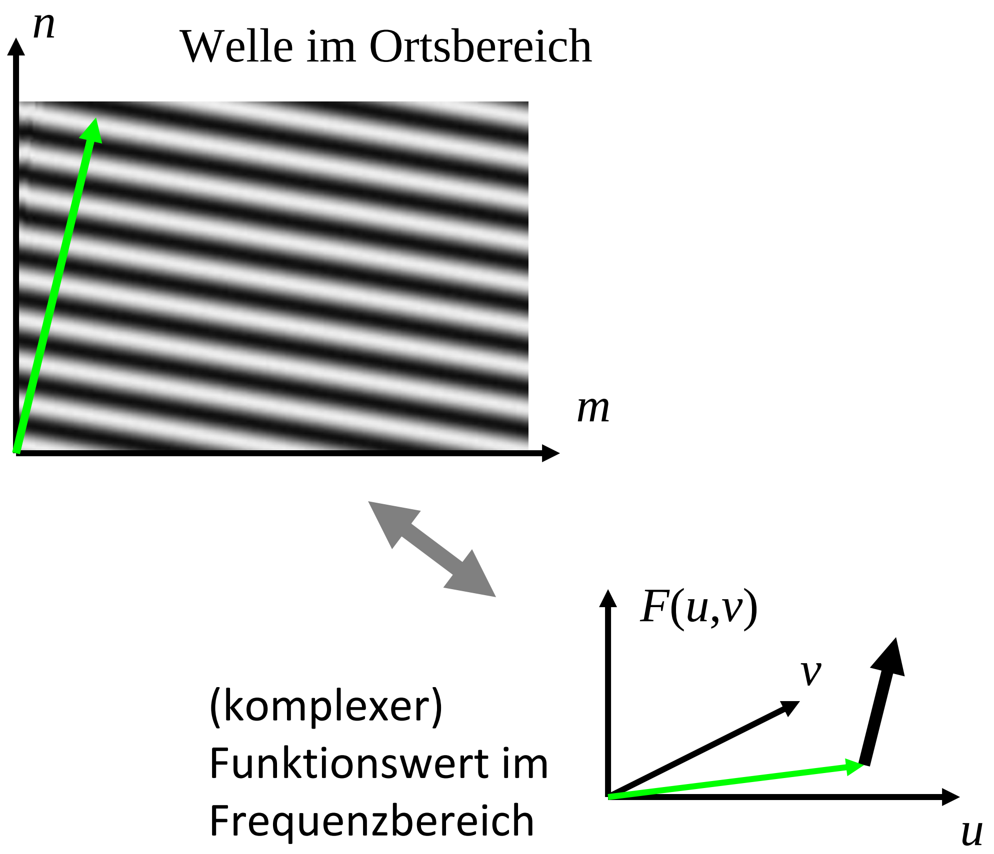
Bildverarbeitung & Bildverstehen

2-D Fouriertransformation

Basisfunktionen sind Wellen (Frequenz, Richtung, Amplitude, Phase):

$$\exp\left(i \cdot {}^{2\pi}\!/_{N} \cdot (mu + nv)\right)$$

Richtung ist durch Vektor (*u v*) gegeben.



Die Basisfunktionen der 2-D Fouriertransformation sind zerlegbar:

$$\exp\left(i \cdot {}^{2\pi}\!/_{N} \cdot (mu + nv)\right) = \exp\left(i \cdot {}^{2\pi}\!/_{N} \cdot mu\right) \cdot \exp\left(i \cdot {}^{2\pi}\!/_{N} \cdot nv\right)$$

2-D Fouriertransformationspaar

$$F(u,v)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)}$$

$$f(m,n)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)}$$

Transformationspaar für Bilder der Größe *M*x*N*

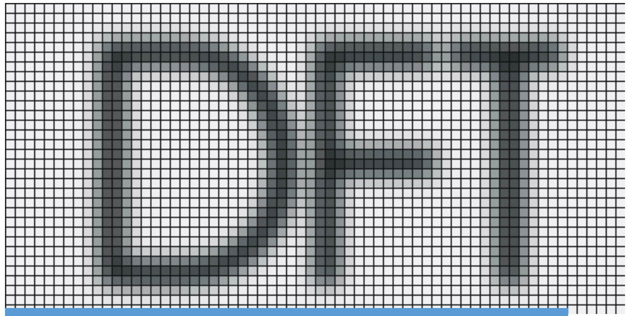
Transformationspaar für quadratische Bilder der Größe *N*x*N*

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\cdot e^{-i\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot(um+vn)}$$

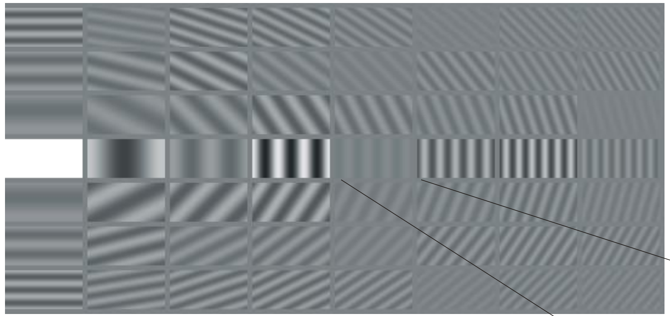
$$f(m,n)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot(um+vn)}$$

Zweidimensionale Fouriertransformation

Bild $f(m,n)$

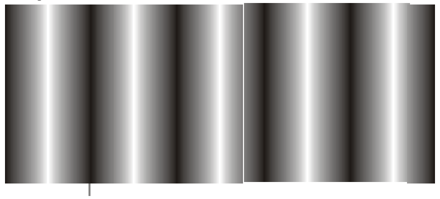


$$= \frac{1}{MN} \cdot \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{i 2\pi \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$$



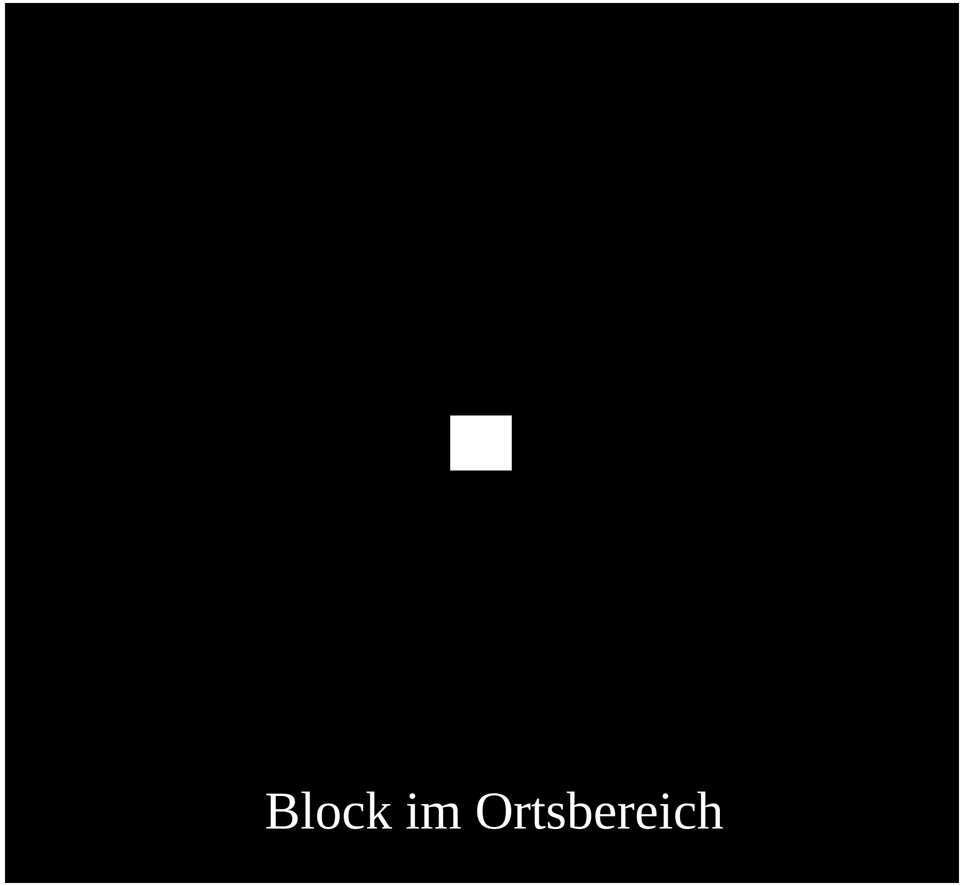
...

Beispiel einer Basisfunktion:

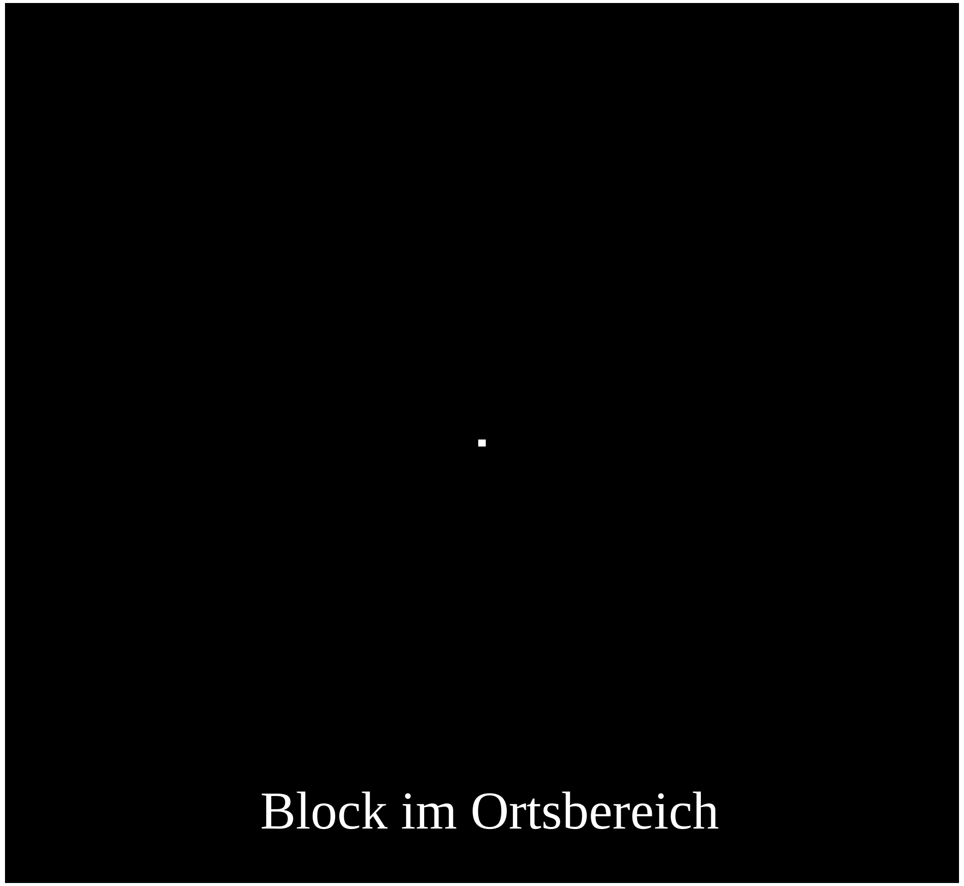
 X  = 

$F(4,0)$

Bilder im Orts- und Frequenzraum

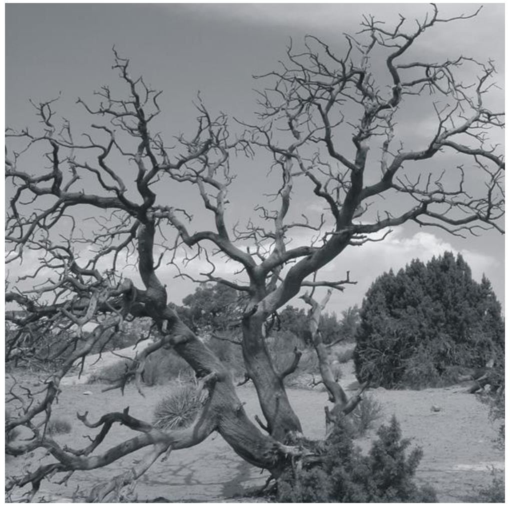


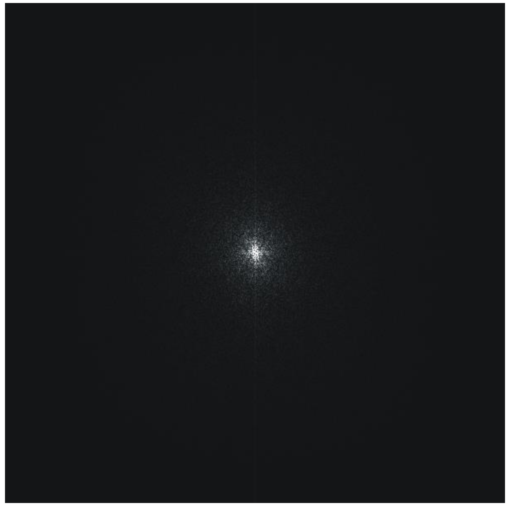
Bilder im Orts- und Frequenzraum



Darstellung der Amplitude

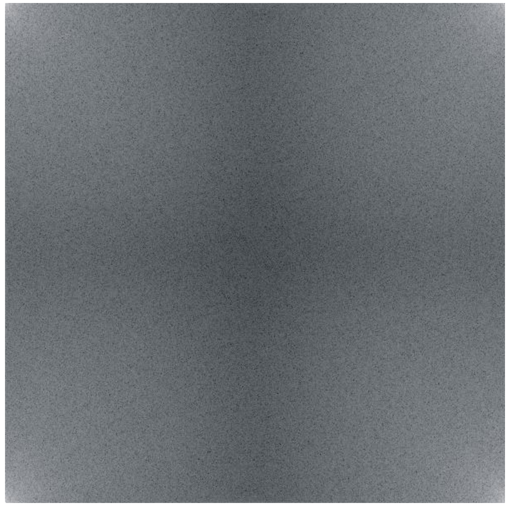
original

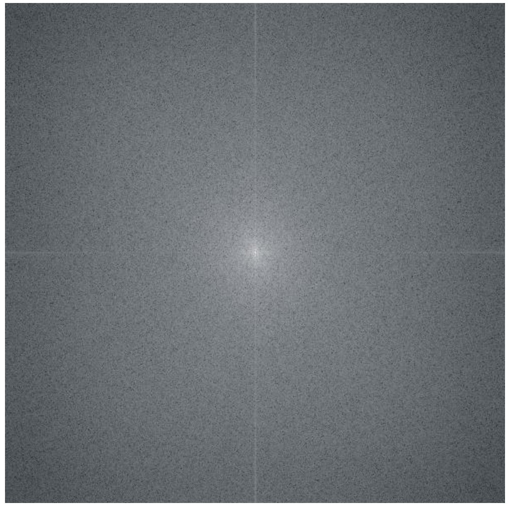




Spektrum
zentriert

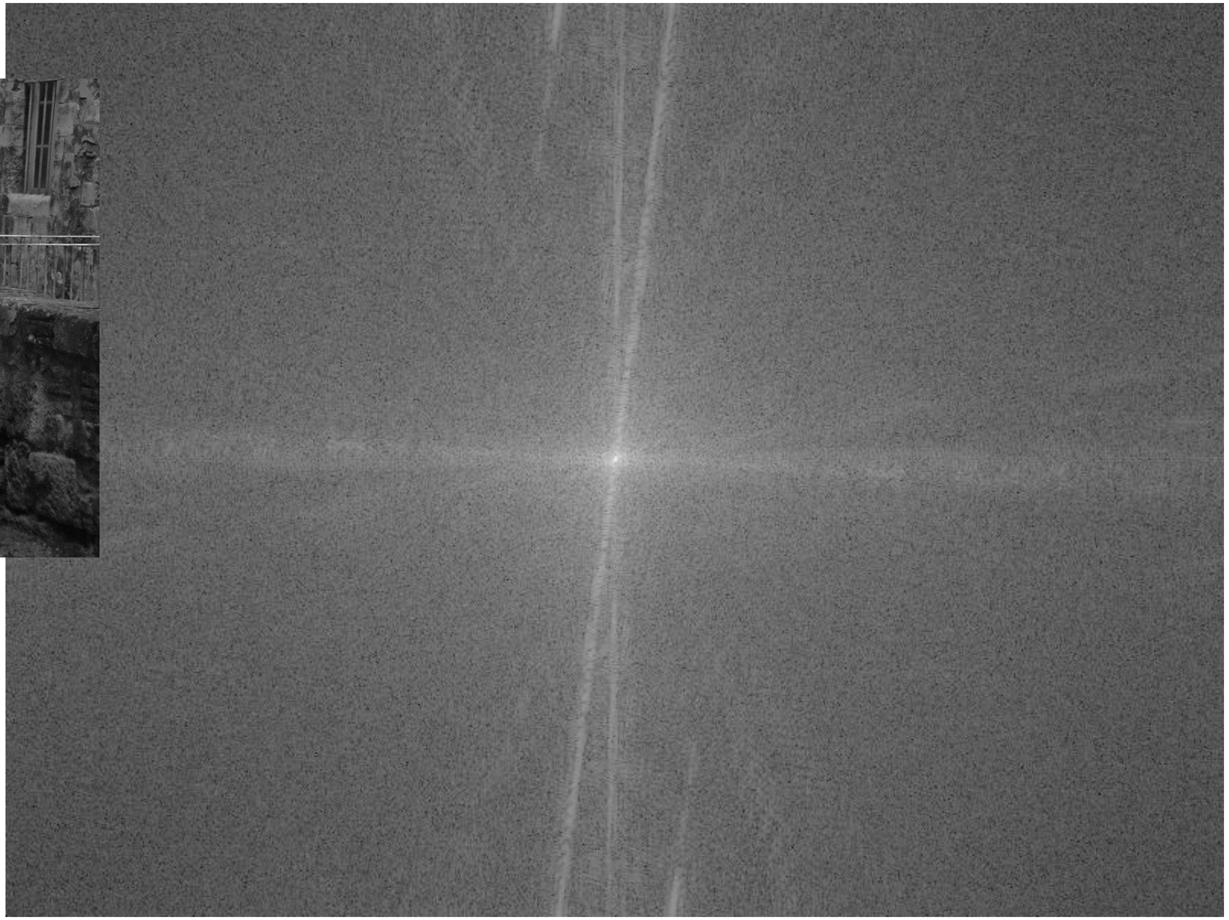
logarithmiertes
Spektrum





logarithmiertes
Spektrum,
zentriert

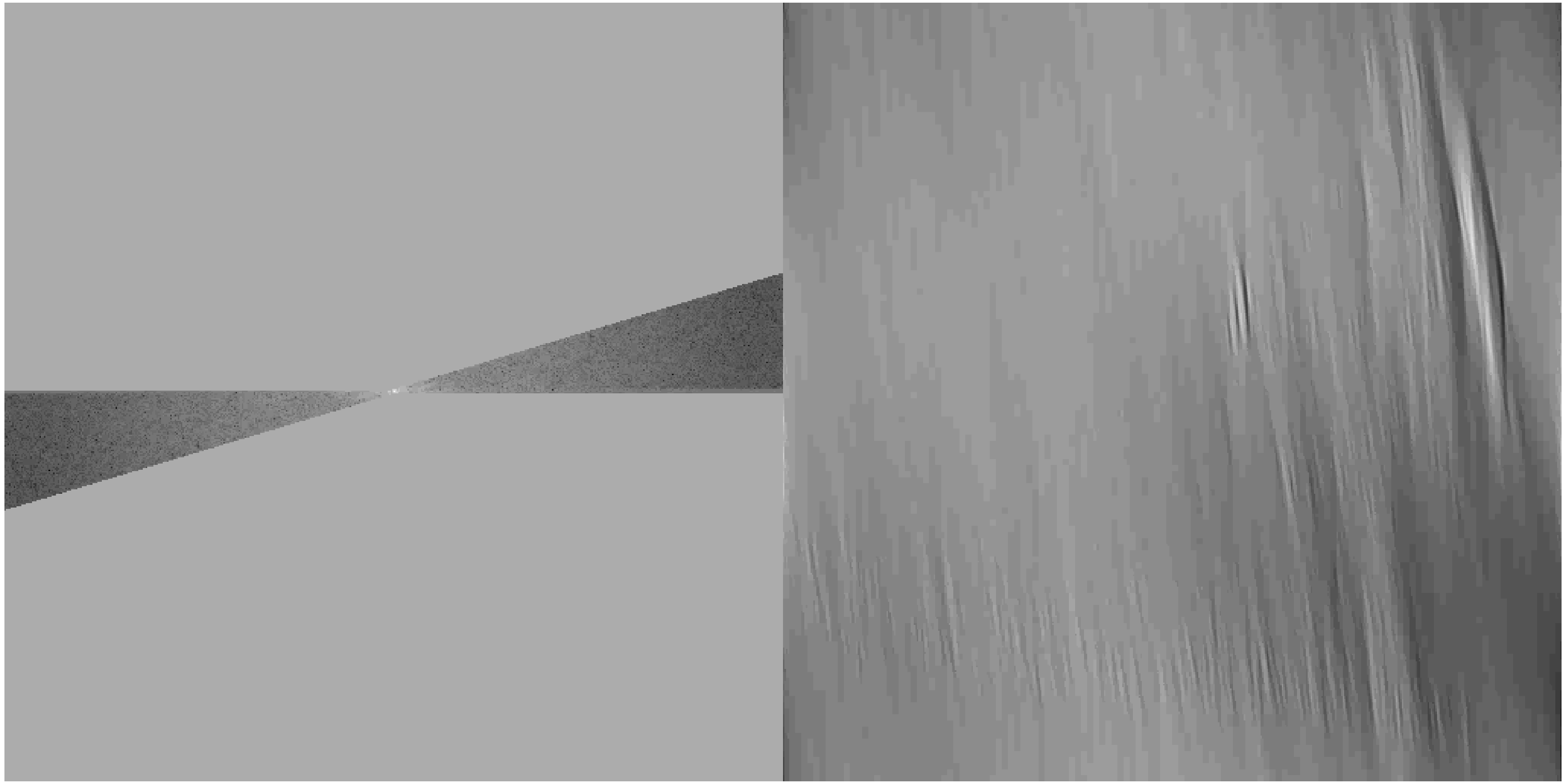
Bilder im Orts- und Frequenzraum



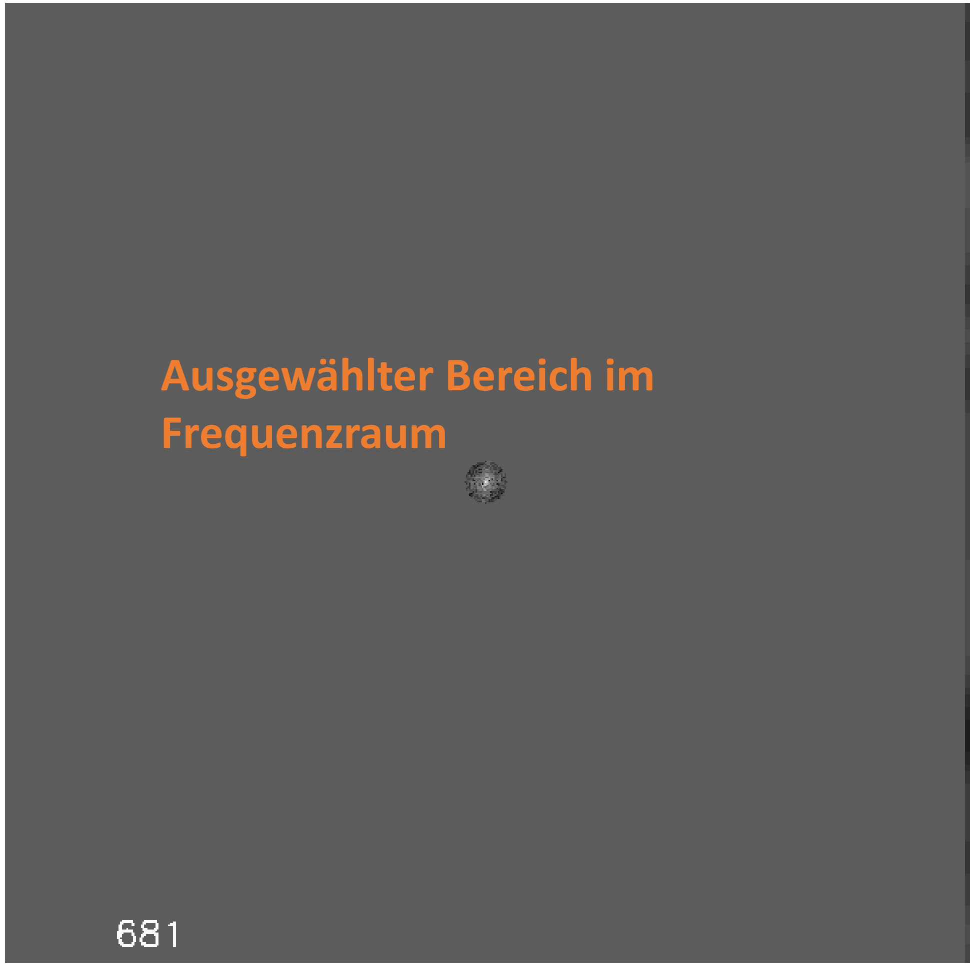
Schrittweise Summation der Komponenten

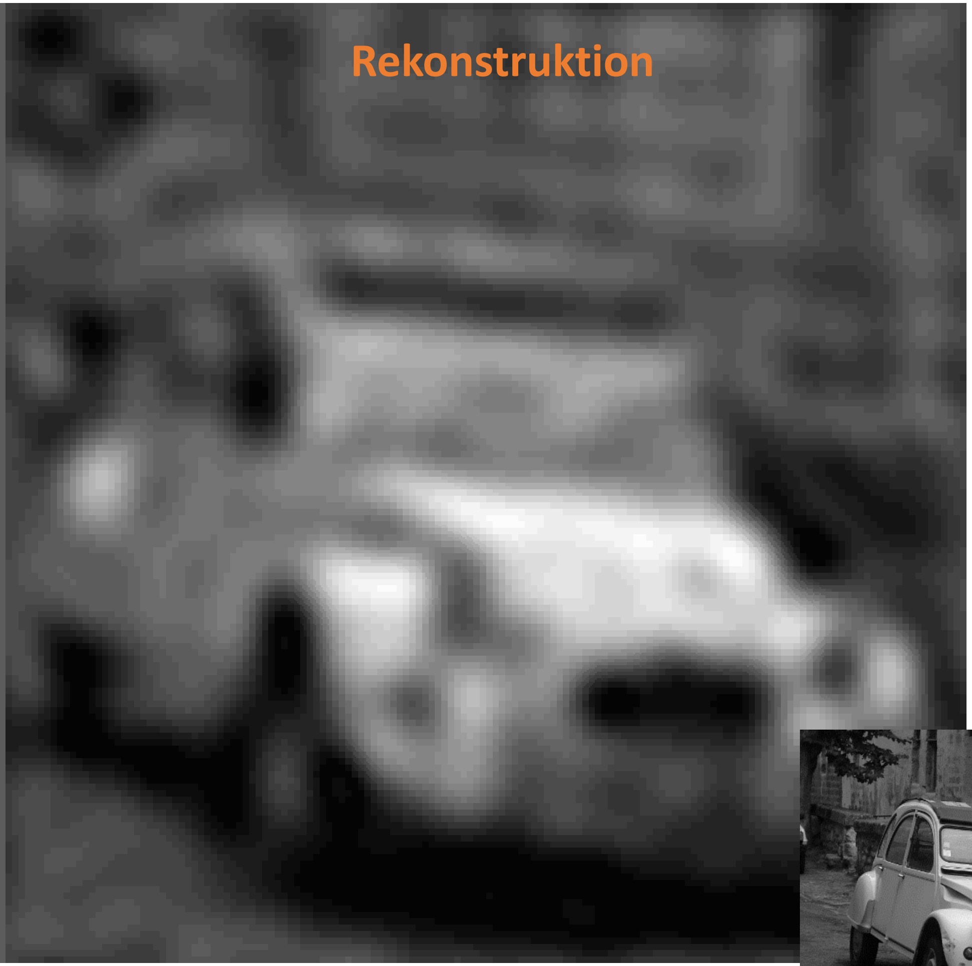
Ausgewählter Bereich im Frequenzraum

Rekonstruktion



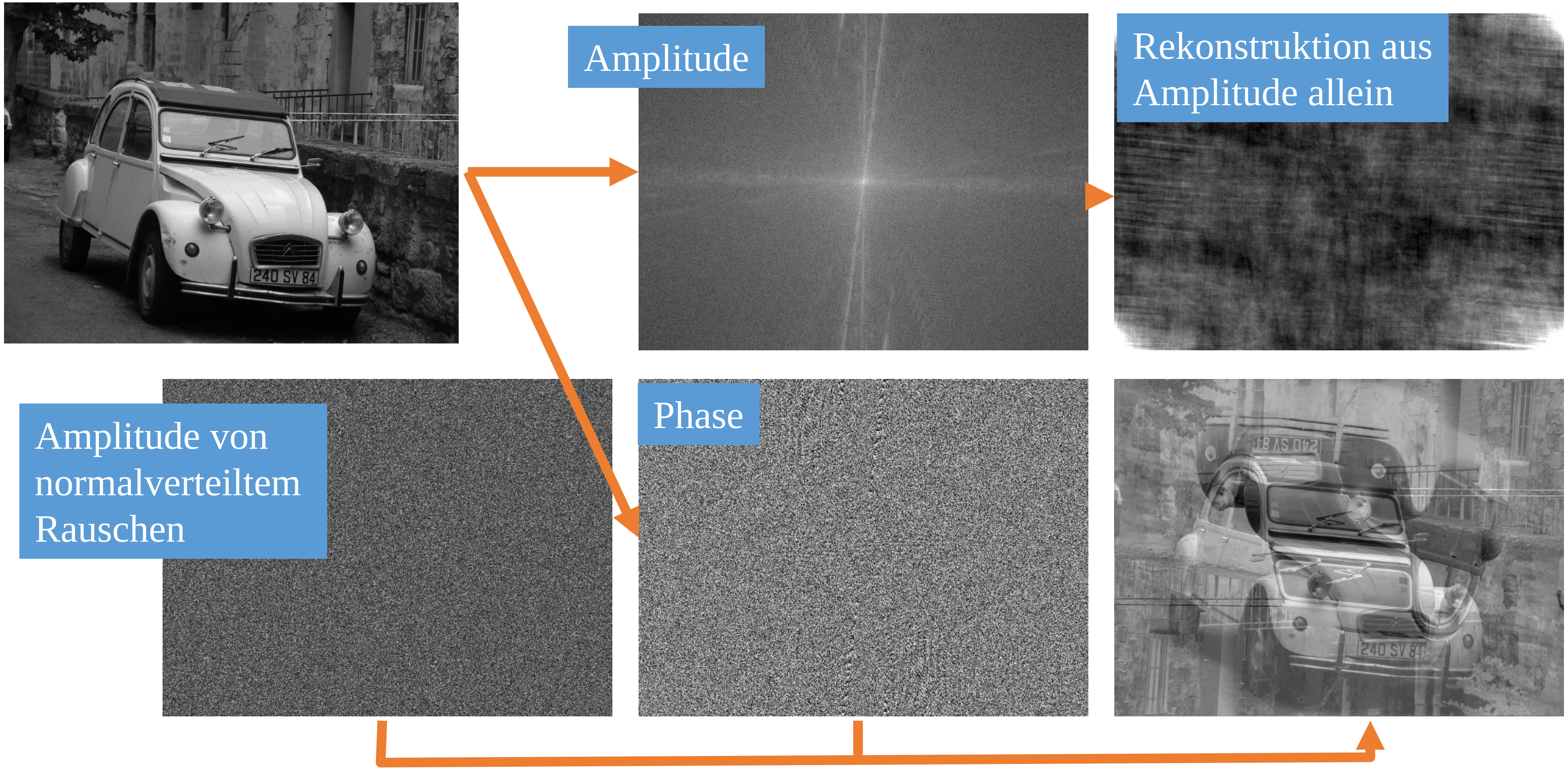
Schrittweise Summation der Komponenten





original

Der Einfluss der Phaseninformation



Fouriertransformation für kontinuierliche Funktionen

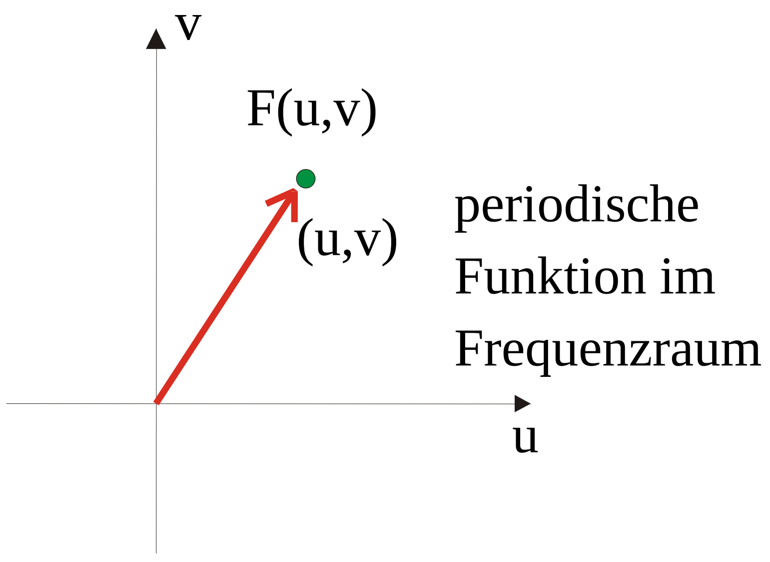
- Anzahl der Funktionswerte geht gegen unendlich.
- Skalarprodukt zwischen Funktionen *f* und *g* ist das Integral der miteinander multiplizierten Funktionen.
- Das Skalarprodukt existiert, wenn die Funktion kontinuierlich und integrierbar ist.
- Fouriertransformation existiert, falls das Skalarprodukt existiert

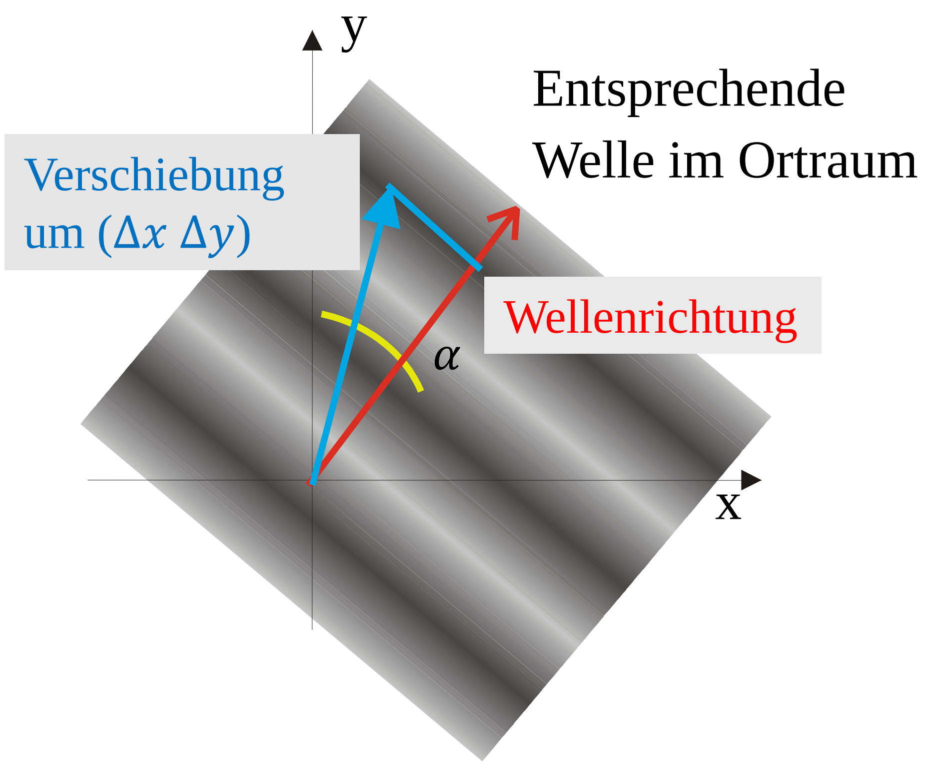
Transformationspaar

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot(ux+vy)}dxdy$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot(ux+vy)}dudv$$

Verhalten: Translation





- Translation im Ortsbereich führt zu einer Translation der zusammensetzenden Wellen.
- Umfang der Translation hängt vom Unterschied zwischen Wellenrichtung (u v) und Translationsrichtung (Dx Dy) ab.
- Im Frequenzbereich bedeutet die Translation eine Phasenverschiebung.

Berechnung der Phasenverschiebung

$$p_{u,v} = \frac{\left|(\Delta x \quad \Delta y)\right| \cdot \cos(\alpha)}{T_{u,v}}$$

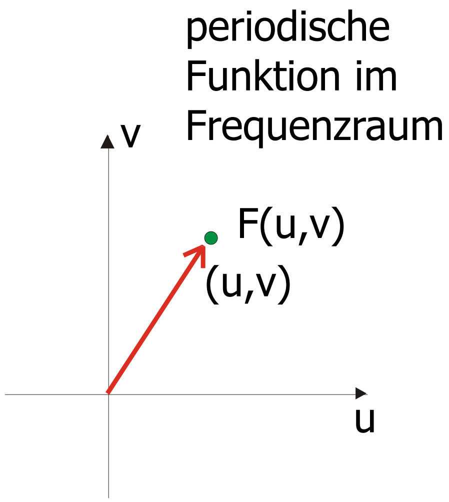
mit $\cos(\alpha)$- Winkel zwischen Wellenrichtung und Richtung von $(\Delta x\ \Delta y)$

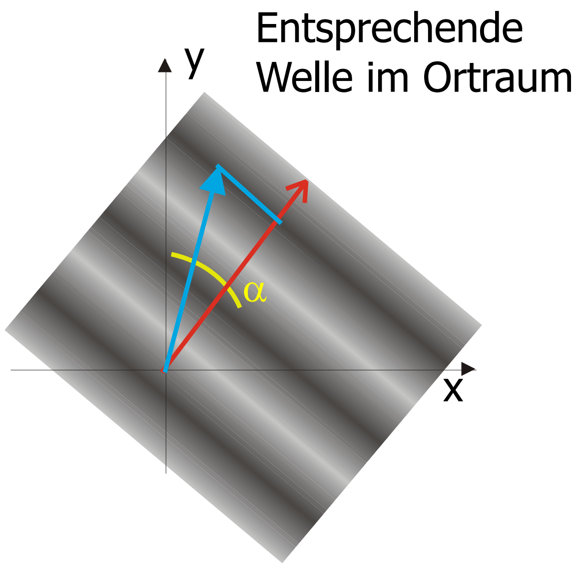
$T_{u,v}$ - Wellenlänge = 1/Frequenz

$$\cos(\alpha) = \frac{(\Delta x \quad \Delta y) \bullet (u \quad v)}{\left|(\Delta x \quad \Delta y)\right| \cdot \left|(u \quad v)\right|}$$

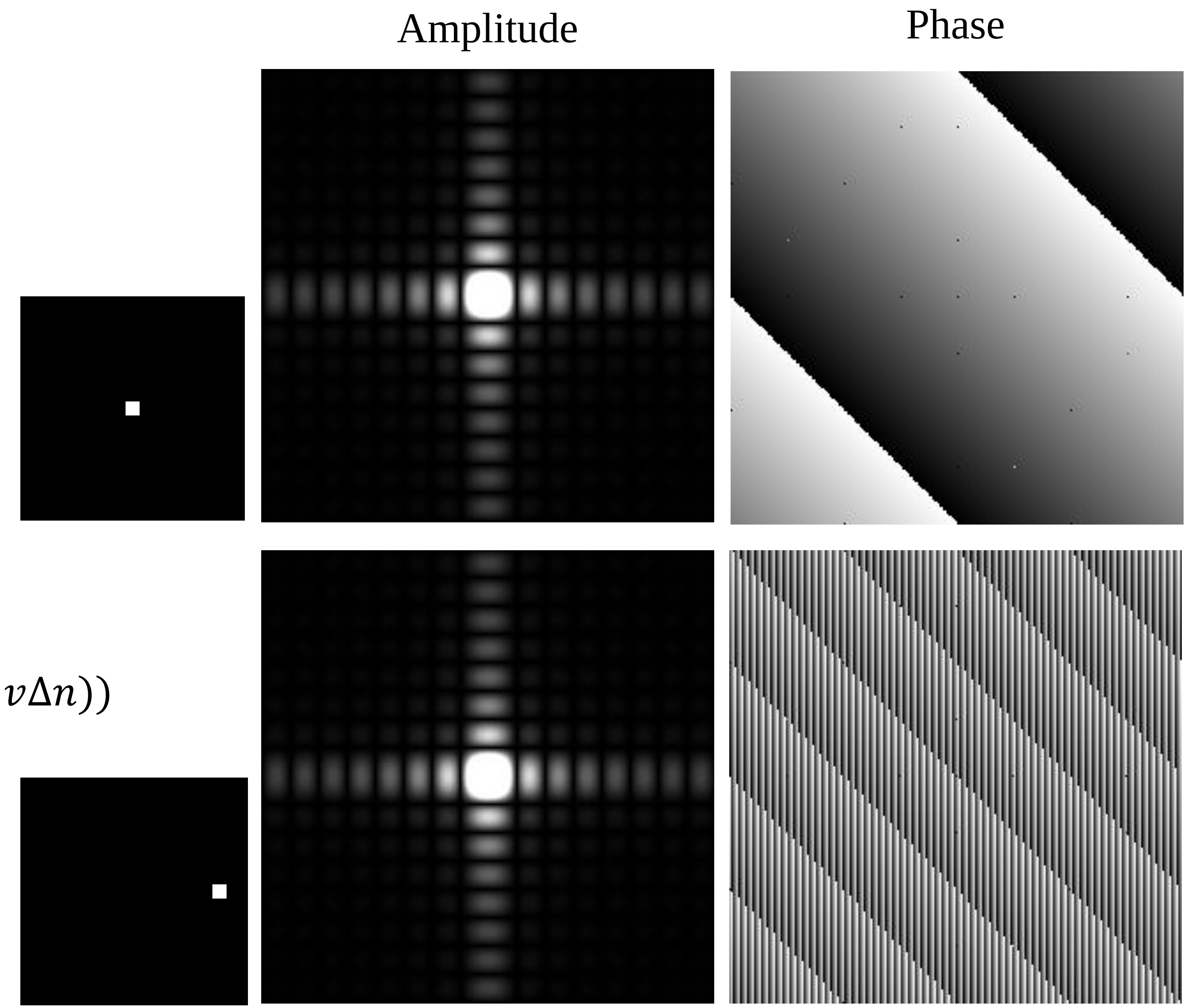
$$T_{u,v} = \frac{N}{2\pi} \left|(u \quad v)\right|$$

$$\Rightarrow p_{u,v} = i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot (u\Delta x + v\Delta y)$$





Translation (Beispiel)



Translation um (Δm, Δn) führt zu einer Phasenverschiebung

$$F'(u,v) = F(u,v)\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}(u\Delta m + v\Delta n)\right)$$

Translation um *M*/2

- Für eine diskrete Fouriertransformation auf einer Funktion mit *M* Werten gilt

$$F\left(u-\frac{N}{2}\right) \Leftrightarrow f(m)\exp\left(i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}m\right) = f(m)\exp(i\pi m) = f(m)(-1)^m$$

- Für die 2-D Variante gilt entsprechend

$$F\left(u-\frac{N}{2}, v-\frac{N}{2}\right) \Leftrightarrow f(m,n)\exp\left(i\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}m+\frac{N}{2}n\right)\right)$$

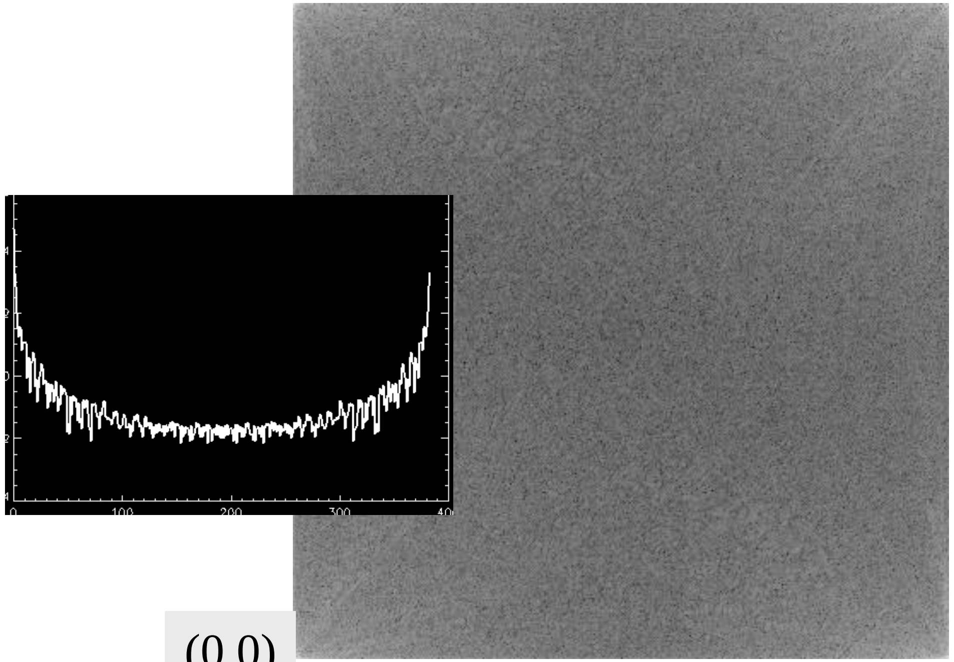
$$= f(m,n)\exp(i\pi(m+n)) = f(m,n)(-1)^{m+n}$$

Verschiebung von (0..*N*-1,0..*N*-1) nach (-*N*/2..*N*/2-1,-*N*/2..*N*/2-1) ändert nur die Phase!

Translation um $M/2$ (Beispiel)

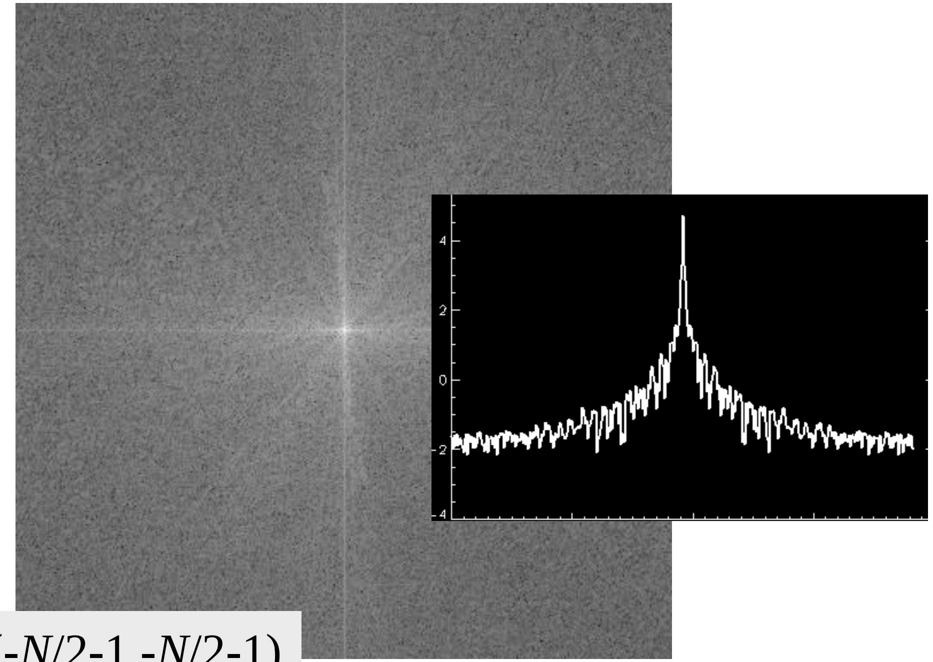
$|F(u,v)|$, $u=-N/2...+N/2-1$, $v=-N/2...+N/2-1$ ist gleichwertig zu $|F(u,v)|$, $u=0,...,N-1$, $v=0,...,N-1$.

$(N-1,N-1)$



$(0,0)$

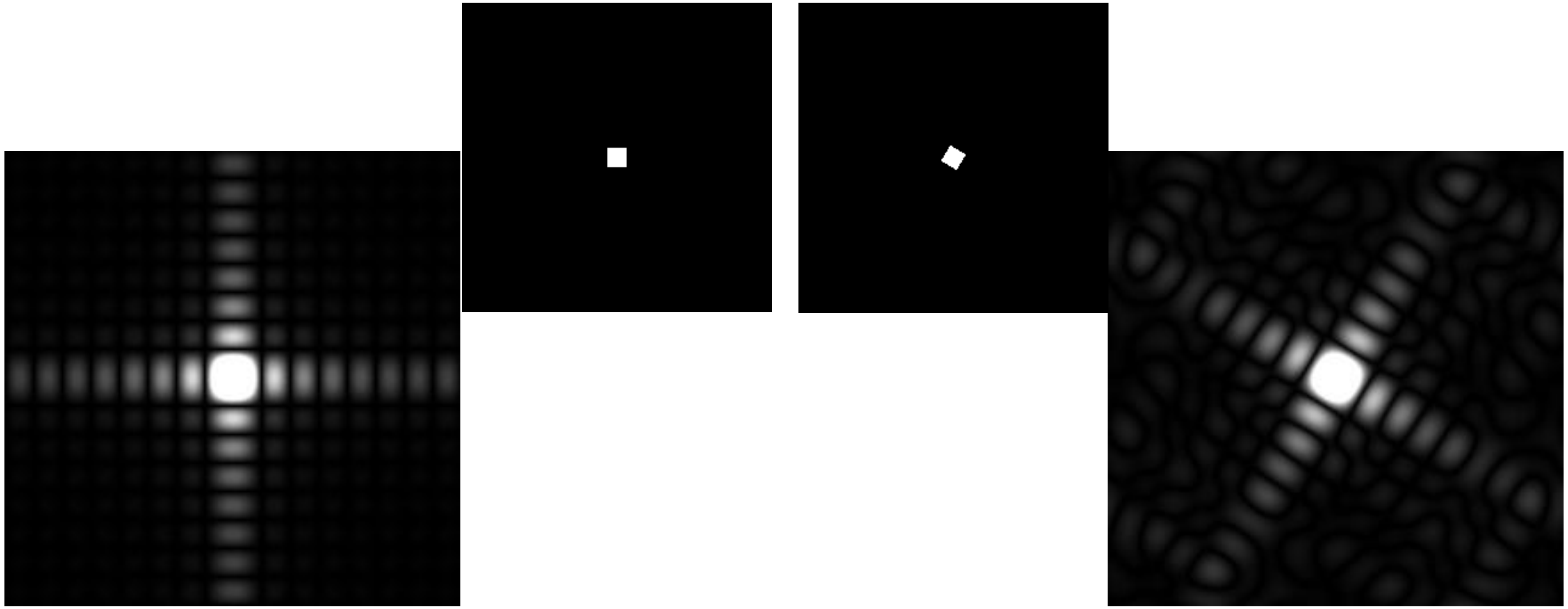
$(N/2,N/2)$



$(-N/2-1,-N/2-1)$

Rotation

Rotation: $F(u,v)$ wird in gleicher Weise rotiert wie $f(m,n)$.



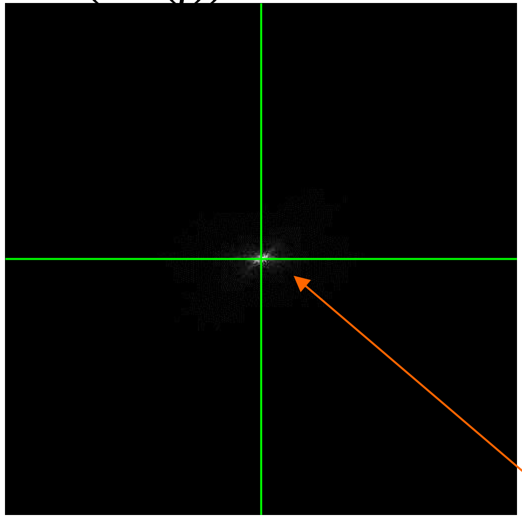
Mittelwert der Funktion

$$F(0,0) = \frac{1}{N^2} \sum_n \sum_m f(m,n) \exp\left(-i \cdot 2\pi \cdot \frac{0n + 0m}{N} \right)$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_n \sum_m f(m,n) \exp(0)$$

$$= f_{avg}$$

abs(**FT**(*f*))



$\xrightarrow{\mathbf{FT}^{-1}}$

$F(0,0) = (123.5\ ,\ 0.0)$

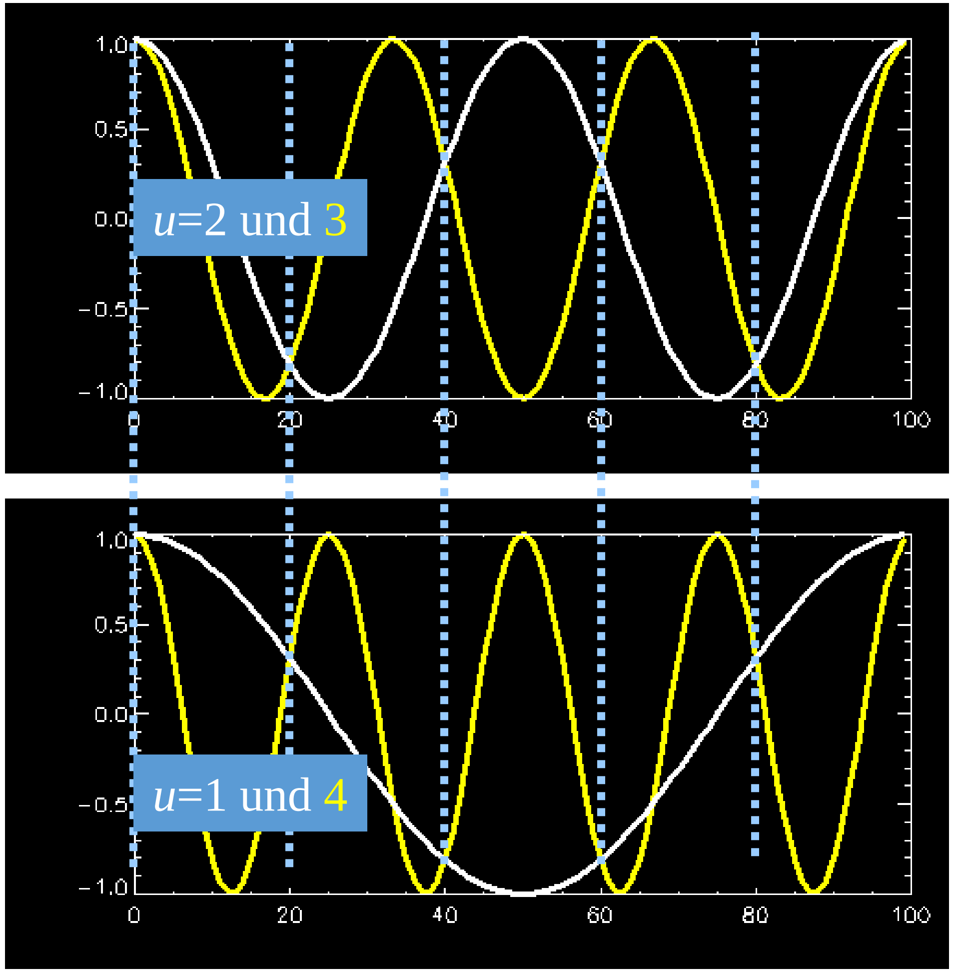
Periodizität und Symmetrie

- Für ein- und zweidimensionale Funktionen mit M bzw. M und N Werten gilt:
  - $F(u) = F(u+M)$, $f(m)=f(m+M)$
  - $F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N)$
  - $f(m,n) = f(m+M,n) = f(m,n+N) = f(m+M,n+N)$
- Für reellwertige Funktionen f gilt für die Fouriertransformierte:
  - $F(u) = {}^*F(-u)$
  - $F(u,v) = {}^*F(-u,-v)$

  (reduziert die zu berechnenden Werte auf die Hälfte)

  *x=*a-ib* ist die *komplex-konjugierte* der komplexen Zahl *a=a+ib.*

Symmetrie der abgetasteten Kosinusfunktion

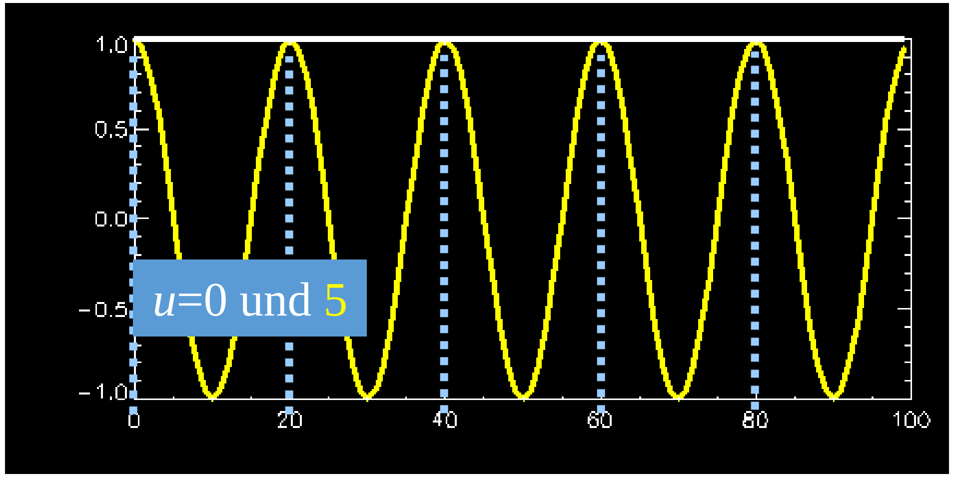


Beispiel für M=5:

$$\left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}2m\right)\right| = \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}(-2)m\right)\right| = \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}3m\right)\right|$$

$$\left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}1m\right)\right| = \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}(-1)m\right)\right| = \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}4m\right)\right|$$

$$\left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}0m\right)\right| = \left|\exp\left(i\frac{2\pi}{5}5m\right)\right|$$



Separabilität

Die Fouriertransformation ist *separabel*, d.h., sie kann zunächst in M-Richtung und anschließend auf diesen Zwischenergebnissen in N-Richtung ausgeführt werden.

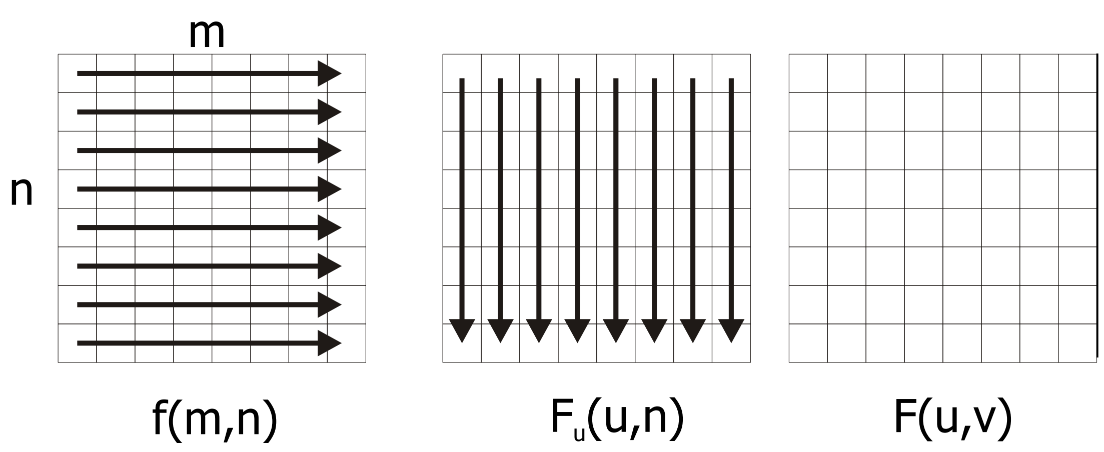
$$F(u,v) = \frac{1}{N^2}\sum_n \sum_m f(m,n)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{um+vn}{N}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_n \sum_m f(m,n)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{um}{N}\right)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{vn}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_n \left[\sum_m f(m,n)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{um}{N}\right)\right]\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{vn}{N}\right)$$

kann aus der inneren Summe ausgeklammert werden.

$$= \frac{1}{N^2}\sum_n F_u(m,n)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{vn}{N}\right)$$

Reduziert den Berechnungs-aufwand von O(N^4) auf O(N^3).

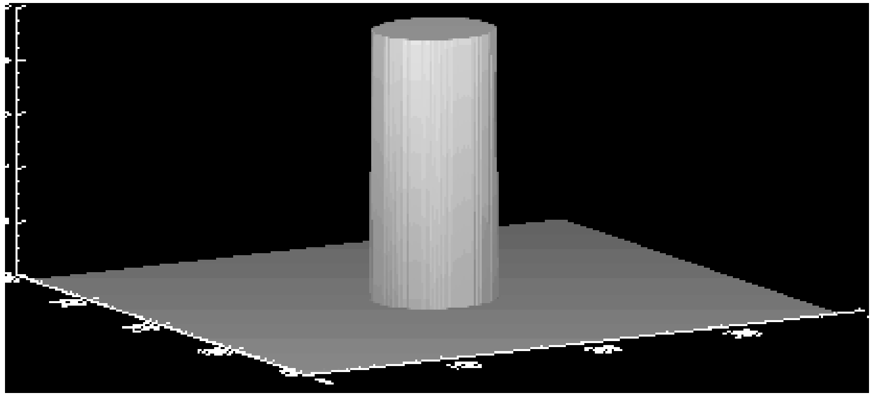


Filterung

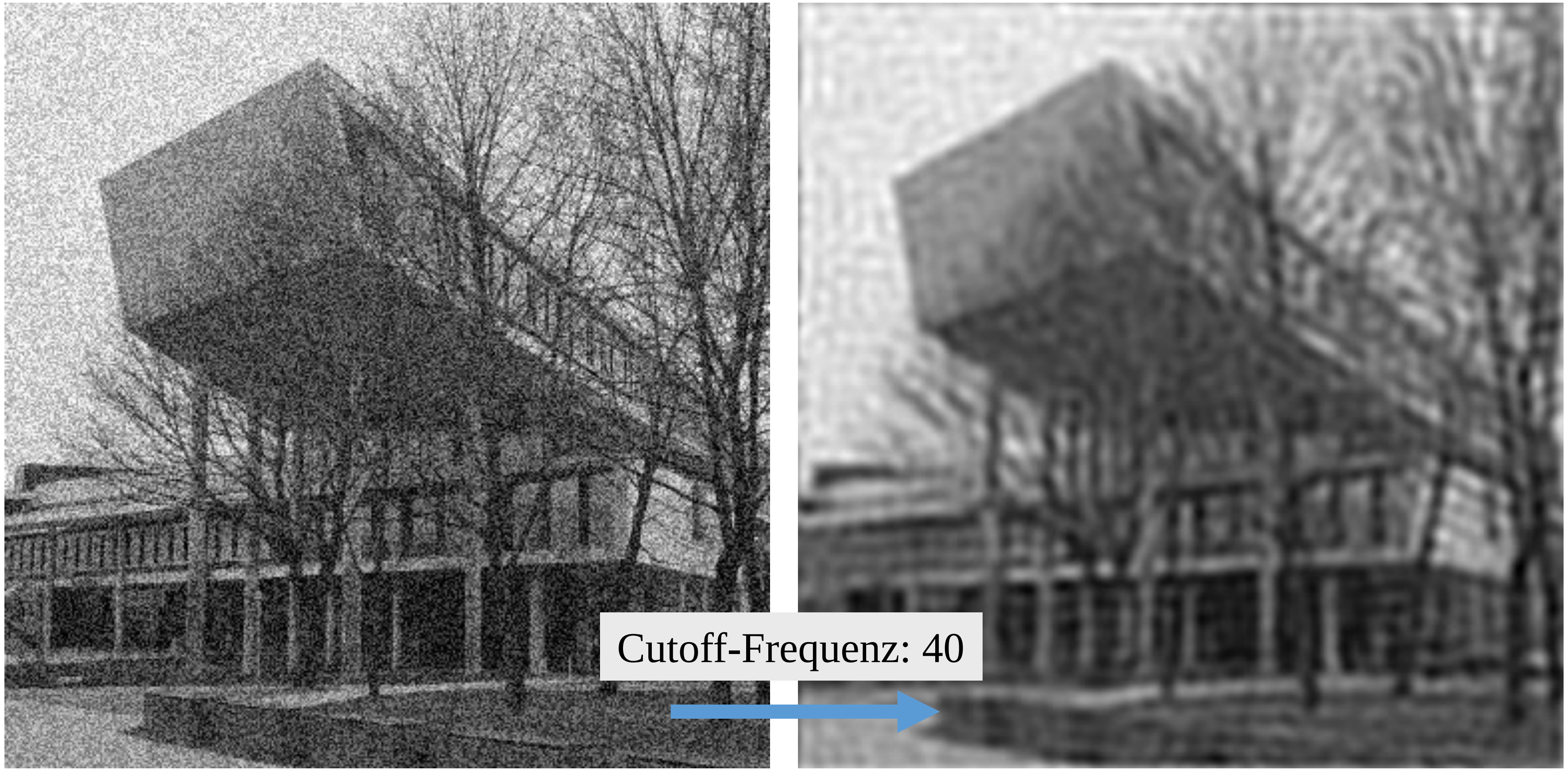
- Filterung im Frequenzraum: Veränderung der Funktionswerte vor der Rücktransformation.
- Motivation: Semantische Trennung von Bildern im Frequenzraum, z.B., niedrige Frequenzen zeigen Intensitäten, hohe zeigen Kanten
- Ideales Tiefpassfilter

$$H_{F_{\max}}(u,v)=\begin{cases}1 & \text{, falls } u^2+v^2 \le F_{\max}^2 \\ 0 & \text{, sonst.}\end{cases}$$

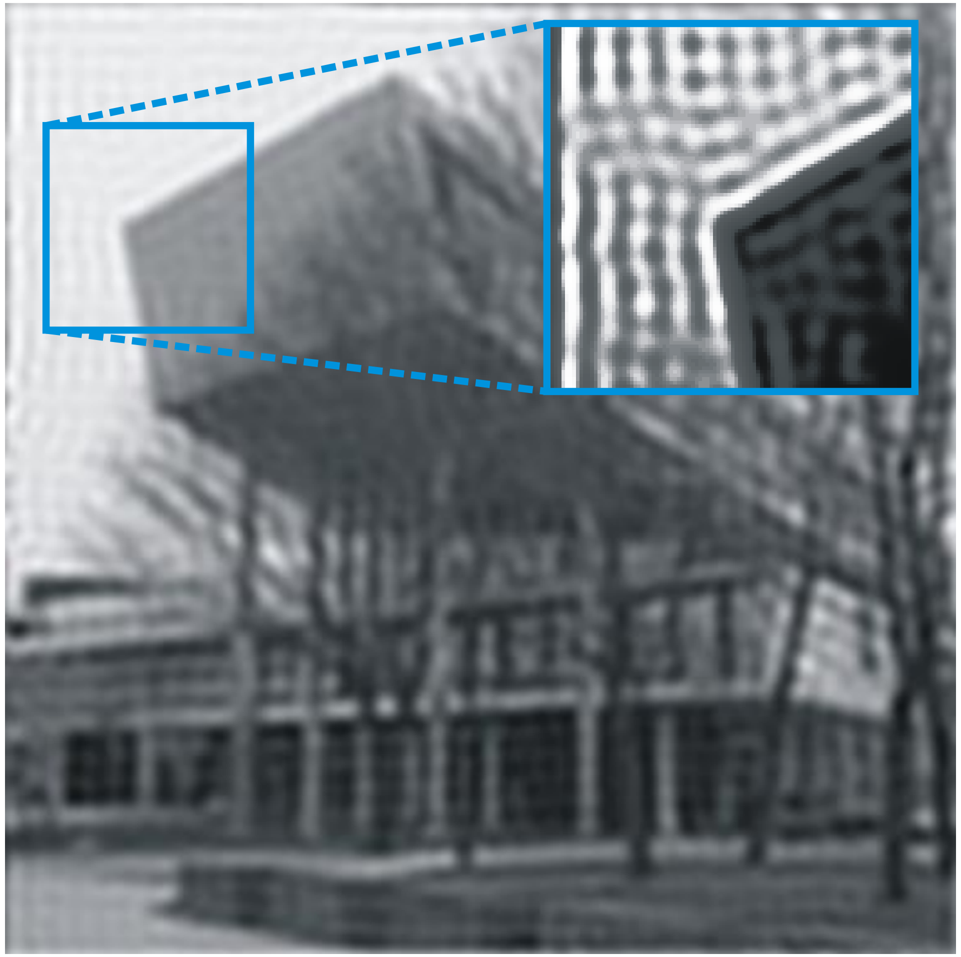
F_{max} – Cut-Off-Frequenz

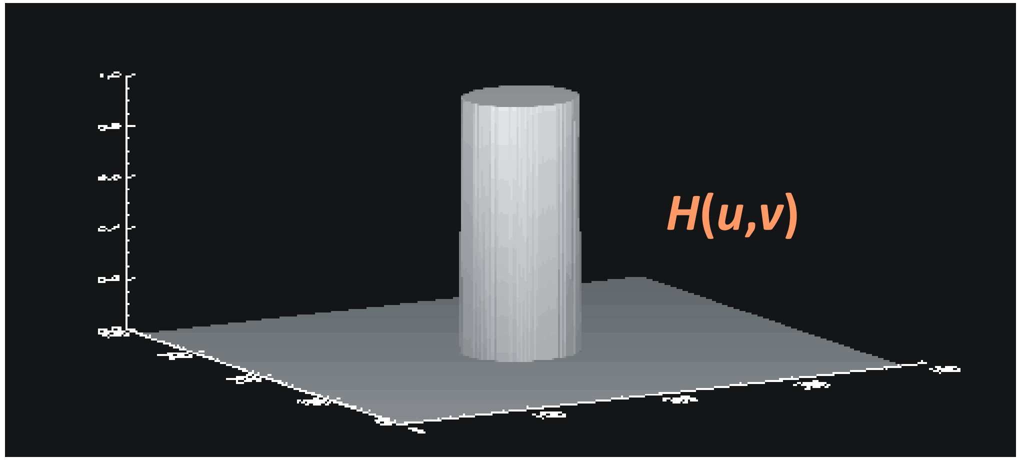


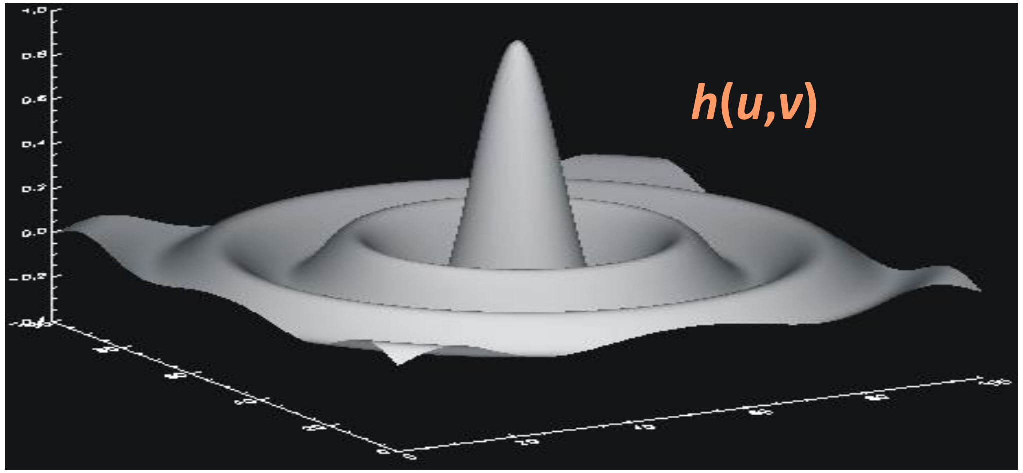
Beispiel Tiefpassfilter



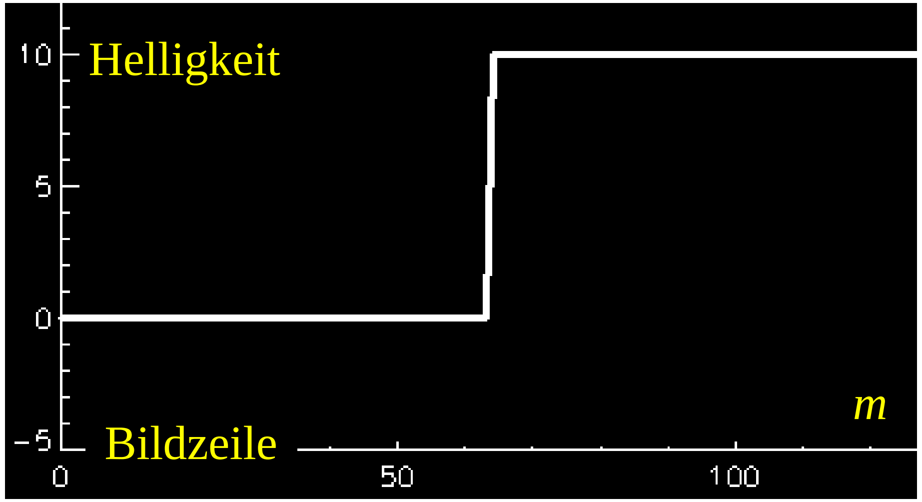
Ringing-Artefakt



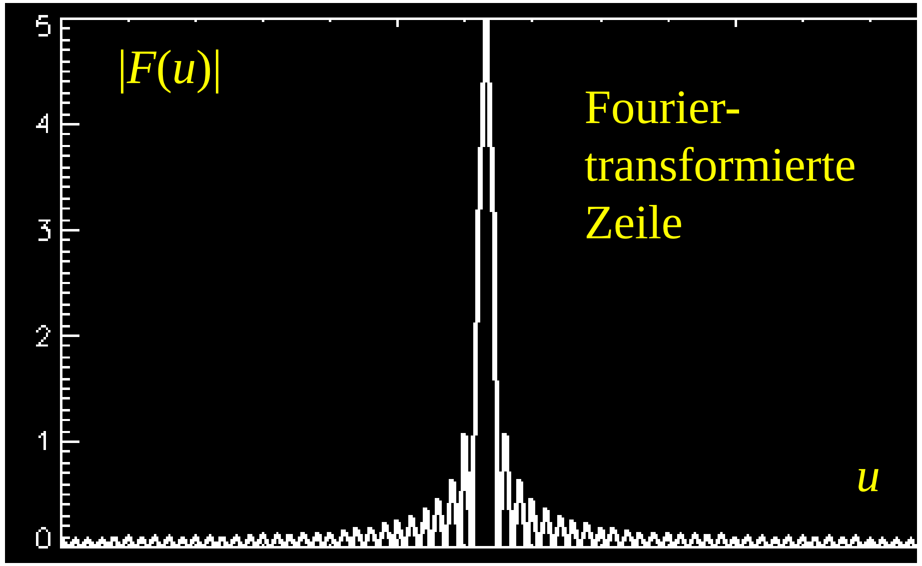




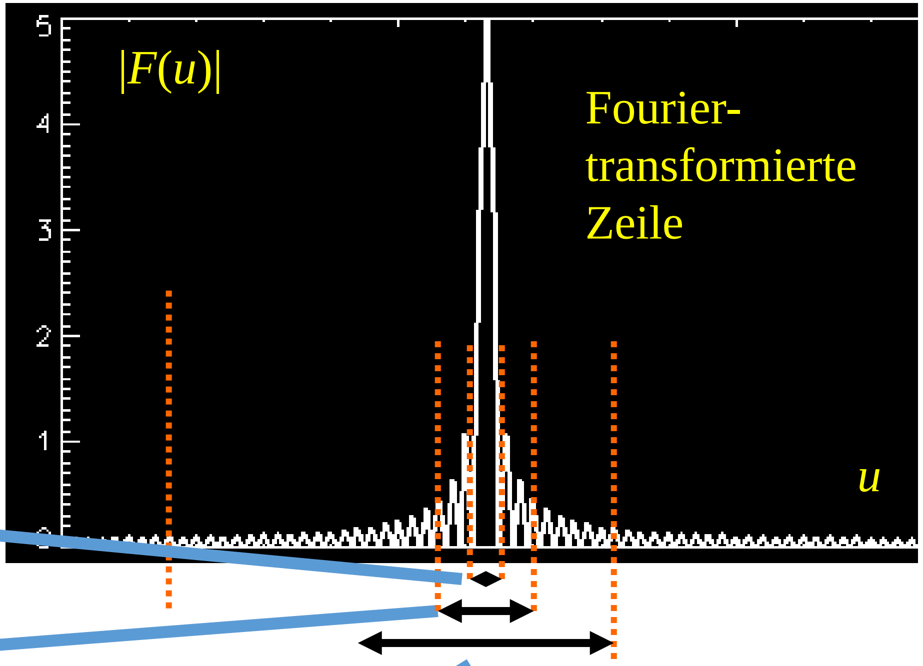
Das Ringing-Artefakt verstehen



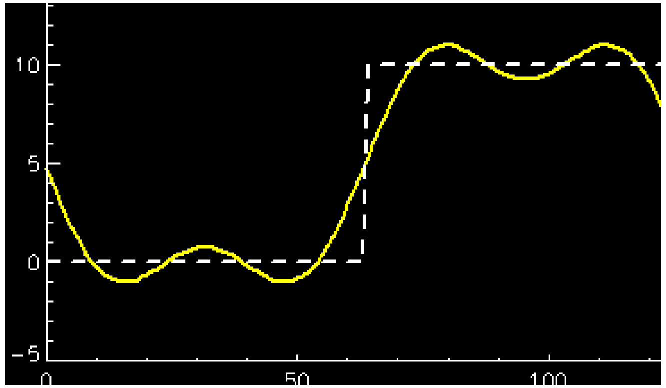
Das Ringing-Artefakt entsteht, weil scharfe Kanten durch Wellen ***aller*** Frequenzen beschrieben werden.



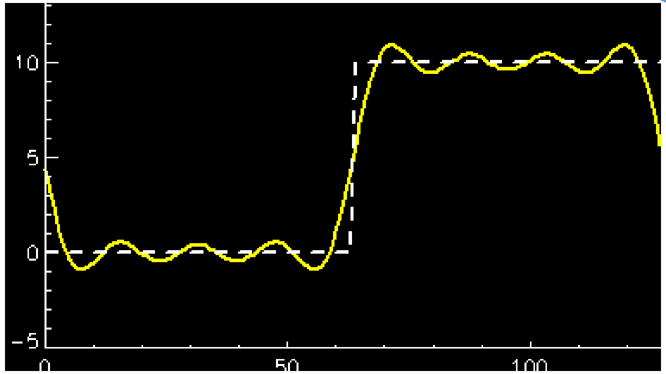
Filterung



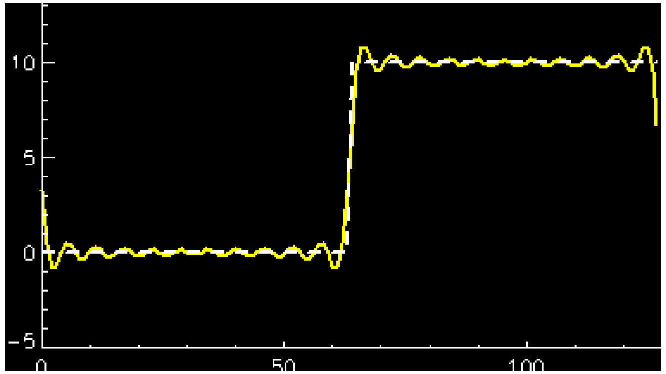
|F(u)|
Fourier-
transformierte
Zeile
u
5
4
3
2
1



10
5
0
−5
0
50
100



10
5
0
−5
0
50
100



10
5
0
−5
0
50
100

Butterworth-Filter

Frequenzen werden nicht gelöscht, sondern nur abgeschwächt.

- Tiefpass-Filter:

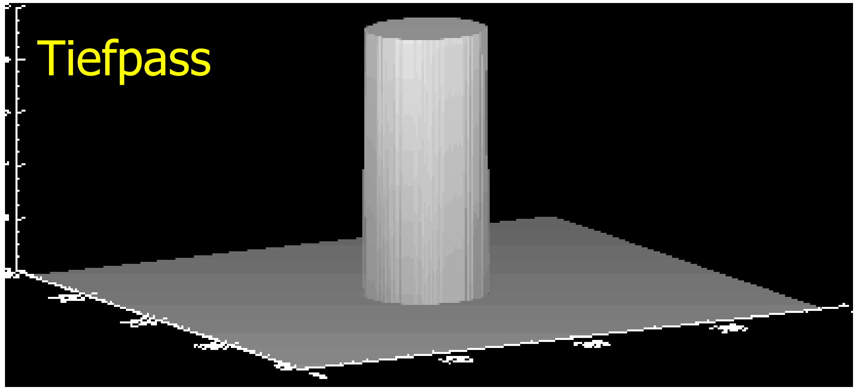
$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left(D(u,v)/D_0\right)^{2n}}$$

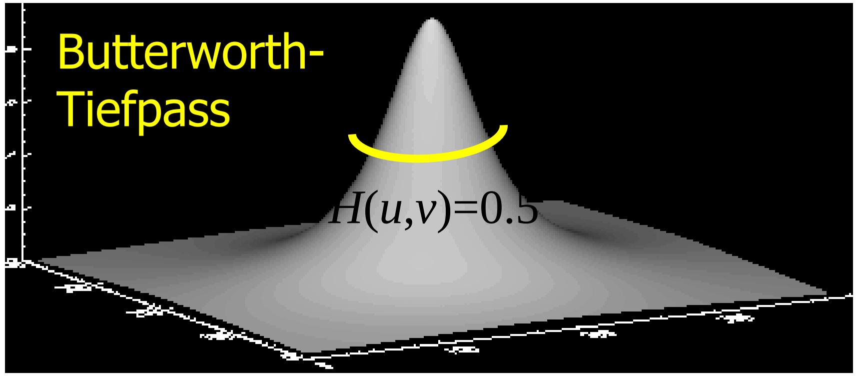
- Hochpass-Filter:

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left(D_0/D(u,v)\right)^{2n}}$$

D_0: Cutoff-Frequenz,

$D(u,v)$: Frequenz, d.h. Abstand vom Ursprung





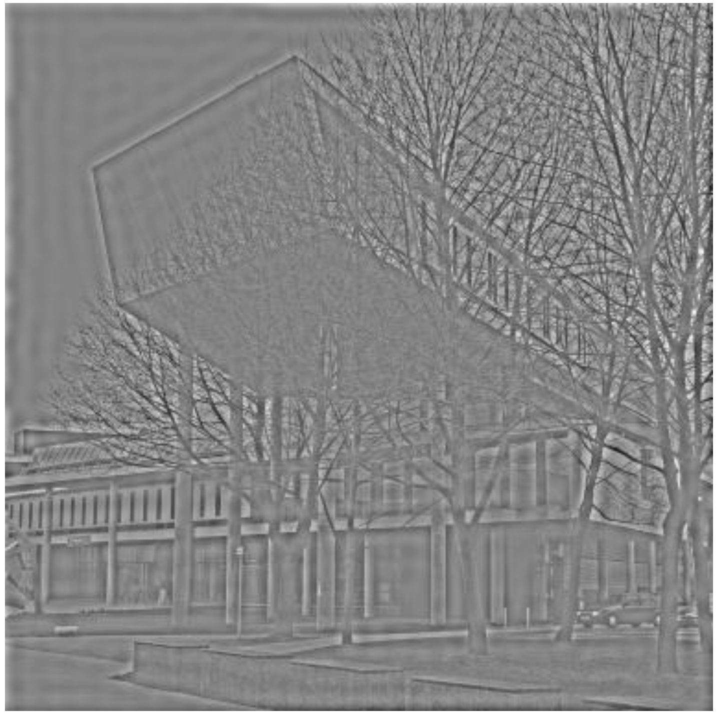
Butterworth vs. Einfacher Tiefpass

Kantenhervorhebung durch Frequenzraumfilterung

- Kanten weisen mehr hochfrequente Anteile auf wie homogene Gebiete

► Hochpassfilterung

$$H_{F_{\max}}(u,v)=\begin{cases}1 & \text{, falls } u^2+v^2 \geq F_{\max}^2\\ 0 & \text{, sonst.}\end{cases}$$



Butterworth-Hochpassfilter

$$H_{F_{\max}}(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\left(F_{\max}^2 \big/ \left(u^2+v^2\right)\right)^k} & u\neq 0 \vee v\neq 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Filtern im Ortsraum

- Wenn die Fouriertransformation invertierbar ist, dann sollte die Filterung auch im Ortsraum durchführbar sein.
- Wie sieht **FT**$^{-1}$($F \cdot H$) aus?

$$\mathbf{FT}^{-1}(F(u)H(u)) = \mathbf{FT}^{-1}\left[\sum_k f(k)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{uk}{N}\right)\sum_m h(m)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{um}{N}\right)\right]$$

$$= \mathbf{FT}^{-1}\left[\sum_k\sum_m f(k)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{uk}{N}\right)h(m)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{um}{N}\right)\right]$$

$$= \mathbf{FT}^{-1}\left[\sum_k\sum_m f(k)h(m)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{uk}{N}\right)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{um}{N}\right)\right]$$

$\left(\text{Verschiebeeigenschaft } h(m)\exp(-\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}uk) = h(m-k)\right)$

$$= \mathbf{FT}^{-1}\left[\sum_m\sum_k f(k)h(m-k)\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{um}{N}\right)\right]$$

$$= \mathbf{FT}^{-1}\left[\sum_m\left[\sum_k f(k)h(m-k)\right]\exp\left(-i\cdot 2\pi\cdot\frac{um}{N}\right)\right]$$

$$= \mathbf{FT}^{-1}\left[\mathbf{FT}\left(\left[\sum_k f(k)h(m-k)\right]\right)\right] = \sum_k f(k)h(m-k)$$

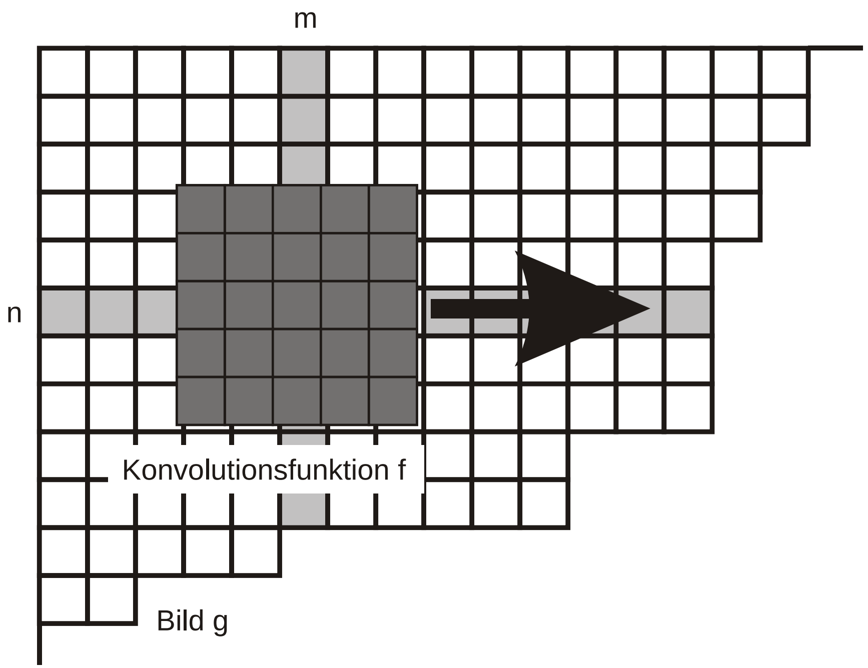
Konvolution (Faltung)

Konvolution (auch: **Faltung**) erzeugt ein neues Bild *h* durch eine gewichtete Summe von Bildelementen in *g*:

$$h(m,n)=(g*f)(m,n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}g(i,j)\cdot f(m-i,n-j)$$

Die Gewichtungsfunktion *f* heißt **Konvolutionsfunktion** (oder **Faltungsfunktion**)

Die Konvolution entspricht der Filterung durch Multiplikation im Frequenzraum



Eigenschaften der Konvolution

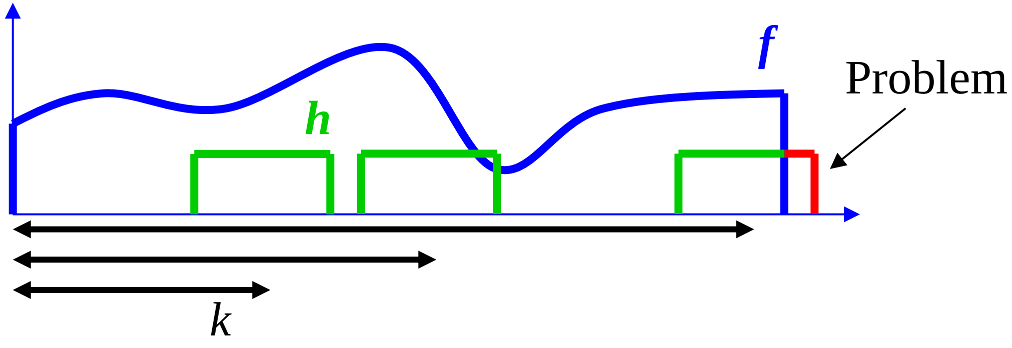
- Operatorzeichen: „*“ (bedeutet nicht Multiplikation!)
- Linear
- Verschiebungsinvariant
- Kommutativ: $[g_1 * g_2](m,n) = [g_2 * g_1](m,n)$.
- Assoziativ: $g_1 * ([g_2 * g_3](m,n)) = [g_1 * g_2](m,n) * g_3(m,n)$

Vorteil der Assoziativität

Mehrere Störoperatoren können zu einem gemeinsamen Operator zusammengefasst werden.

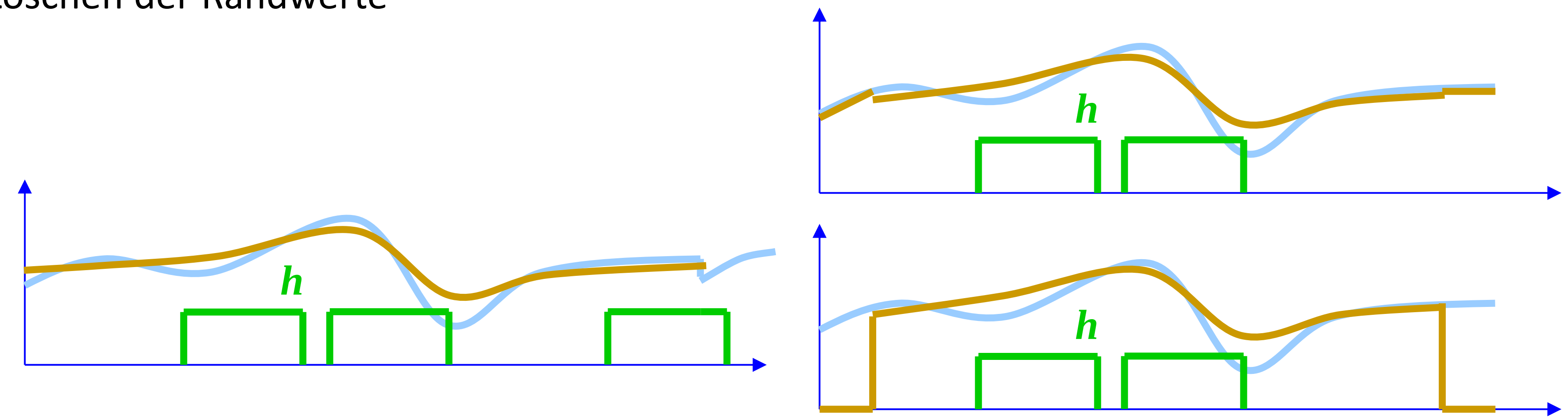
Konvolutionskern (Faltungskern)

- Konvolution (1D): $[f*h](m)=S_{k=-\infty,\infty}\, f(k)\cdot h(m-k)$
- Die meisten Konvolutionsfunktionen h sind nur in einem kleinen Intervall von Null verschieden (Konvolutionskern).
- Mit $h(n)\neq 0$ für $-K\leq n\leq K$ ist: $[f*h](m)=S_{k=-K,K}\, f(k)\cdot h(m-k)$.
- Problem: ***Rand*** von *f*.



Konvolution am Bildrand

- Lösung 1: periodische Fortsetzung des Bildes
  (diese Lösung wird automatisch gewählt, wenn im Frequenzraum multipliziert wird)
- Lösung 2: Rand ist undefiniert
  - Beibehaltung des ursprünglichen Resultats
  - Löschen der Randwerte



Konvolution am Bildrand

Was sollten Sie heute gelernt haben?

- 2D-Fouriertransformation
- Bedeutung von Frequenz, Amplitude, Phase und Wellenrichtung
- Darstellung der Fouriertransformierten
- Eigenschaften der Fouriertransformierten
- Filterung und Konvolution

Famous Last Question

Was geschieht, wenn man die Frequenzraumrepräsentation vor der Rücktransformation komplex-konjugiert?

Warum?