Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Finančna matematika 1. stopnja

Projekt pri predmetu Finančni praktikum

The firefighter problem

Karolina Šavli in Klara Travnik

Ljubljana, januar 2023

Kazalo

1 Opis in formulacija problema

1.1 Predstavitev

The firefighter problem oziroma *problem gasilca* je optimizacijski problem, katerega cilj je minimiziranje števila pogorelih vozlišč na grafu.
Vhodni podatki problema so:

- graf G,
- množica vozlišč $B_{init} \subseteq V(G)$, na katerih v času 0 izbruhne požar,
- število gasilcev D.

V vsaki časovni enoti ($t > 0$) gasilci izberejo nepogorela vozlišča, ki jih bodo rešili tako, da čim bolj omejijo požar. Ta se razširi le na sosednja vozlišča pogorelih v prejšnji časovni enoti, ki jih gasilci niso uspeli rešiti. Proces se ponavlja dokler požar ni zajezen.

Predpostavke problema so še:

- če je bilo vozlišče v nekem času t rešeno ali je pogorelo, obvelja rešeno oz. pogorelo tudi v vseh prihodnjih časih,
- vozlišče v ne more biti hkrati označeno kot pogorelo in rešeno,
- v vsakem času t je na voljo fiksno število gasilcev; vsak lahko reši eno vozlišče, torej je v vsakem času največ D na novo rešenih.

1.2 Program

Opisani problem sva v programu CoCalc, v programskem jeziku SageMath zapisali kot **celoštevilski linearni program (CLP)**:

```
def clp(G, B, gasilci):
''' vhodni podatki:
     G           izbran graf
     B           vozlišča, ki na začetku zgorijo
     gasilci     število gasilcev, ki v vsakem koraku gasijo požar
 izhodni podatki:
     seznam oblike [število časovnih enot, pogorela/burnt vozlišča po časih,
     zaščitena/defended vozlišča po časih] '''
cas = 10
while True:
    casi = range(1, cas+1) # uprabljamo pri zankah

    # CLP:
    p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=False) # CLP
    d = p.new_variable(binary=True) # spremenljivka, defended
    b = p.new_variable(binary=True) # spremenljivka, burnt

    p.set_objective(sum(b[i, cas] for i in G)) # minimiziramo število
    pogorelih vozlišč na koncu

    for t in casi:
        for i in G:
            for j in G[i]: # j je številka v seznamu vozlišča i, sosed od i
```

```
                p.add_constraint(b[i,t] + d[i,t] - b[j,t-1] >= 0)
            p.add_constraint(b[i,t] + d[i,t] <= 1)
            p.add_constraint(b[i,t] - b[i,t-1] >= 0)
            p.add_constraint(d[i,t] - d[i,t-1] >= 0)
        p.add_constraint(sum((d[i,t] - d[i,t-1]) for i in G) <= gasilci)

    for i in G:
        p.add_constraint(b[i,0] == (1 if i in B else 0))
        p.add_constraint(d[i,0] == 0)

    k = p.solve()
    l = p.get_values(b)
    m = p.get_values(d)

    #Ali je problem končan?
    n = skrcitev(l, cas) # burnt vozlišča v cas
    e = skrcitev(m, cas) # defended vozlišča v cas
    skupaj = n + e

    koncan = 1
    # sosedi od pogorelih vozlišč so lahko pogoreli ali zaščiteni.
    Ne smejo biti prazna vozlišča
    for pogorelo_vozlisce in n:
        for sosed_od_pogorelo_vozlisce in G[pogorelo_vozlisce]:
            if sosed_od_pogorelo_vozlisce not in skupaj:
                koncan = 0
    koncan

    if koncan == 1:
        break
    else:
        cas += 10

return [k, l, m]
```

CLP sva želeli zastaviti tako, da v argumentu funkcije ni potrebno nastaviti časa, za katerega naj bi bil CLP končan. Zato sva nastavili nek začeten čas $cas = 10$, za katerga je bil rešen algoritem. Potem sva preverili, če je ta **rešitev končna**, torej, ali je vrednost spremenljivk v zadnji časovni enoti ustrezna. To pomeni, da za vsako vozlišče, ki je zgorelo, velja, da je vsako sosednje vozlišče le-tega tudi zgorelo, ali pa bilo rešeno. V nasprotnem primeru proces še ne bi bil končen, in čas *cas* se nastavi na večjo vrednost ter ponovimo algoritem.

Za točen čas, za katerega dobimo končno rešitev (proces se v naslednjih časih ne spreminja), sva napisali sledečo funkcijo:

```
def cas_potreben(G, B, gasilci):
    ''' iz p.solve() pridobi čas po katerem se nič več ne spremeni
    -> dobimo potreben čas '''
    #cas = 10 #začetni cas
    cas = 10
    while True:
    t, burnt, defended = clp(G, B, gasilci)

    urej_burnt = sorted(burnt.items(), key=lambda tup: tup[0][1])
    #uredi glede na čas po vozliščih naraščajoče
    urej_defended = sorted(defended.items(), key=lambda tup: tup[0][1])

    vredn_burnt= []
    for i, v in urej_burnt:
        vredn_burnt.append(v)
    # pridobim ven vrednosti spremnljivk b v časih in vozliščih naraščajoče

    vredn_defended= []
    for i, v in urej_defended:
        vredn_defended.append(v)
```

```
# pridobim ven vrednosti spremnljivk d v časih in vozliščih naraščajoče

# from itertools import islice
from itertools import accumulate
dolzina = [len(G)] * (cas +1)
#Vrednosti zgrupiram v paketke, v vsakem je toliko vrednosti,
kolikor je vozlišč
seznami_vrednosti_po_casih_burnt = [tuple(vredn_burnt[x - y: x])
for x, y in zip(accumulate(dolzina), dolzina)]

seznami_vrednosti_po_casih_defended = [tuple(vredn_defended[x - y: x])
for x, y in zip(accumulate(dolzina), dolzina)]

d = next(i for i in range(len(dolzina)) if all(len(set(l[i:i+2])) == 1
for l in (seznami_vrednosti_po_casih_burnt, seznami_vrednosti_po_casih_defended)))

if d < cas:
    break
else:
    cas += 10
return d
```

Funkcija *cas_potreben* torej za vsak graf, podmnožico vozlišč B grafa ter določeno število gasilcev izračuna potreben čas za rešitev algoritma. Pomembna opomba tukaj je, da ta čas ni enak časovni zahtevnosti algoritma. Potreben čas predstavlja število časovnih enot v procesu širjenja požara in reševanju vozlišč.

2 Vizualizacija problema

2.1 Predstavitev funkcij za barvanje

Za lažjo predstavo poteka problema sva napisali funkcijo *barvanje_po_korakih*, ki z barvanjem vozlišč grafa prikazuje širjenje in zajezevanje požara. Koda funkcije je naslednja:

```
def barvanje_v_casu_t(G, B, gasilci, t):
    ''' pomožna funkcija barvanje_v_casu_t izriše graf in pobarva vozlišča v
    določenem času (t). Začetna vozlišča oz. izvor pošara pobarva v zeleno,
    pogorela v  rdečo, zaščitena pa v modro. '''

    b = skrcitev(clp(G, B, gasilci)[1], t) # burnt v času t BREZ ZAČETNIH B
    for el in B:
        b.remove(el)
    d = skrcitev(clp(G, B, gasilci)[2], t) # defended vozlišča v času t
    return G.show(partition = [b, B, d])

def barvanje_po_korakih(G, B, gasilci):
    ''' funkcija, ki za vsako časovno enoto nariše situacijo na grafu.
    Barve:
        - zelena: oglišča kjer se požar začne (B)
        - rdeča: pogorela
        - modra: zaščitena '''

    time = cas_potreben(G, B, gasilci)
    print("Število potrebnih časovnih korakov: " + str(time))
    for t in range(0, time + 1):
        print("Situacija v času " + str(t) + ":")
        barvanje_v_casu_t(G, B, gasilci, t)
```

Funkcija *barvanje_po_korakih* deluje s pomočjo funkcije *barvanje_v_casu_t*, ki predstavlja situacijo v času t. Funkcijo si za lažje razumevanje poglejmo na konkretnem primeru.

2.2 Primer na Petersonovem grafu

Potek problema in barvanje predstavimo na pretersonovem grafu.
Funkcija *barvanje_po_korakih* zahteva tri argumente in sicer graf G, množico izvornih vozlišč B ter *gasilci*, ki predstavlja število gasilcev, ki bodo v vsaki časovni enoti gasili požar. Izberemo si naslednje:

```
G = graphs.PetersenGraph()
B = [1, 5]
gasilci = 2
```

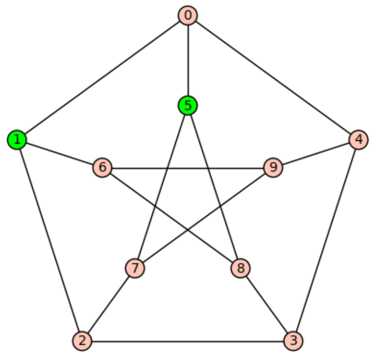
Imamo torej Petersonov graf, na katerem bo požar izbruhnil v vozliščih 1 in 5 in v vsaki časovni enoti ga bosta gasila dva gasilca.
Opomba: množico vozlišč B bi lahko izbrali tudi naključno in sicer s funkcijo, ki bo predstavljana v nadaljevanju, in za aragument prejme graf ter število vozlišč, ki bi radi da so izvor požara.

Če zaženemo

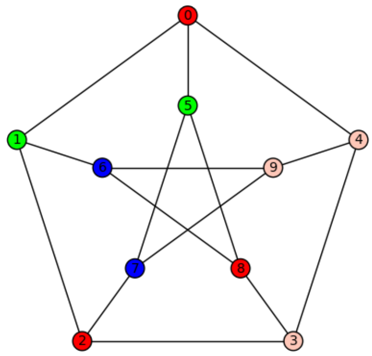
```
barvanje_po_korakih(G2, B2, gasilci2)
```

dobimo naslednje:

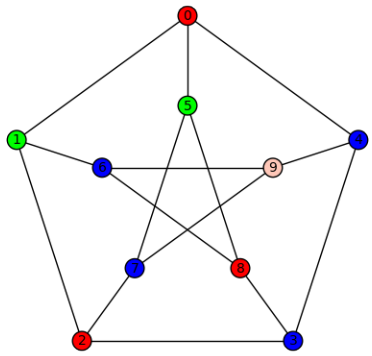
```
Število potrebnih časovnih korakov: 2
Situacija v času 0:
```




```
Situacija v času 1:
```



```
Situacija v času 2:
```



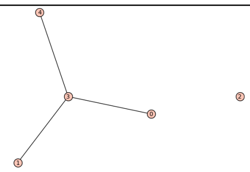
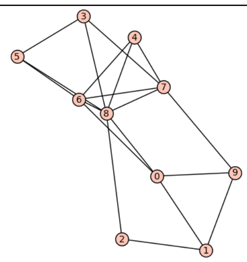
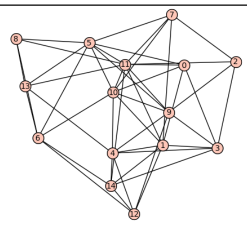
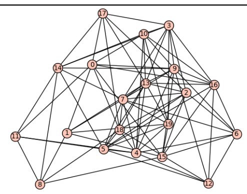
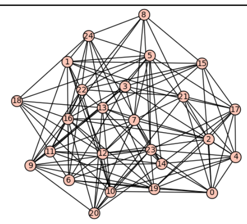
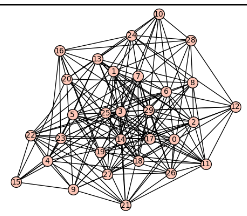
Funkcija *barvanje_po_korakih* nam na začetku izpiše število potrebnih časovnih korakov, ki ga izračuna z že predstavljeno funkcijo *cas_potreben*. Nato pa nam izriše situacijo v vsakem časovnem koraku:

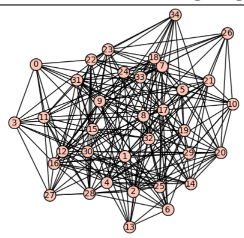
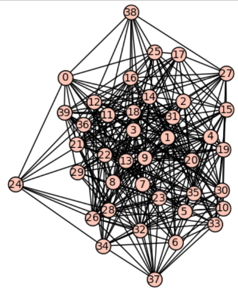
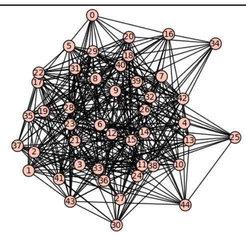
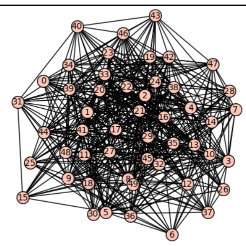
- situacija <u>v času 0</u> so zgolj vozlišča izvora požara, v našem primeru vozlišči 1 in 5. Vozlišča izvora požara so tekom celotne grafične predstavitve pobarvane v zeleno.
- v naslednjem časovnem koraku, <u>času 1</u> dva gasilca zaščitita požar in sicer v vozlišču 6 in 7. Zaščitena vozlišča so pobarvana z modro. Po tem ko gasilca zaščitita omenjeni vozlišči, se požar lahko naprej razširi le v vozlišče 2 in 0 (iz že zagorelega vozlišča 1) ter v vozlišče 8 (iz že zagorelega vozlišča 5). Pogorela vozlišča so pobarvana z rdečo.

- v naslednjem času, času 2 gasilca ponovno zaščitita vozlišči in sicer 3 ter 4. Z grafičnega prikaza je razvidno, da se požar ne more več razširiti naprej. Edino nepogorlo in nezaščiteno vozlišče je vozlišče 9.

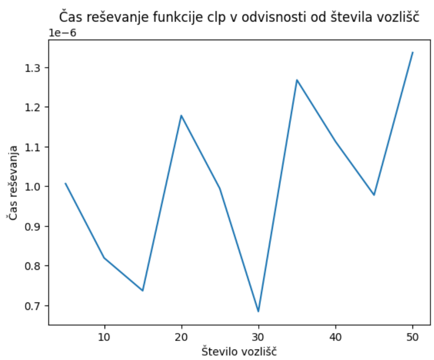
3 Časovna zahtevnost na konkretnih primerih

Kot zanimivost sva s pomočjo *Python* knjižnice *timeit* generirali funkcijo, ki nam vrne čas reševanja funkcije *clp*, opisane v prvem poglavju. Kot že znano, funkcija *clp* sprejme tri argumente: graf, množico izvorov požara in število gasilcev. Funkciji sva podali poljuben graf, naključno vozlišče (eno samo) ter določili sva, da bo požar gasil samo en gasilec. Slednje sva naredili na desetih grafih z različnim številom vozlišč in dobili sva naslednje razultate:

število vozlišč	slika obravnavanega grafa	časovna zahtevnost
5		1.0068004485219717e-06
10		8.19600245449692e-07
15		7.370006642304361e-07
20		1.1784009984694422e-06
25		9.944007615558803e-07
30		6.845992174930871e-07

število vozlišč	slika obravnavanega grafa	časovna zahtevnost
35		1.2680000509135426e-06
40		1.1128009646199644e-06
45		9.780007530935108e-07
50		1.3369994121603667e-06

Dobljene razultate predstavimo še na grafu:



Opazimo, da čas reševanje grafa za naše primere ni v nobeni relaciji s številom vozlišč. Predvidevamo pa lahko, da je čas reševanje v splošnem večji za grafe z večjim številom vozlišč. To bi lahko s simulatijo tudi pokazale in sicer na podoben način kot sva izvedli testiranje v naslednjem poglavju.

4 Testiranje programa glede na število vozlišč grafa

4.1 Potek dela

Za izvedbo testiranja programa sva spisali funkcijo *seznam_naborov_st_vozlisc_cas*, ki kot argumente sprjme $seznam\_imen\_grafov$, *st_gasilcev* ter *stevilo_vozlic_v_B*. Tekom funkcije se sprehodimo čez $seznam\_imen\_grafov$ (seznam poljubnih imen grafov) in sestavljamo nov seznam sestavljen iz naborov oblike

$$(\text{število vozlišč grafa}, \text{potreben čas reševanje problema na grafu})\,.$$

Koda funkcije:

```
import random
def nakljucno_izberi_vzolisca(graf, n):
    ''' funkcija naključno izbere n vozlišč iz grafa graf '''
    return random.sample(list(graf), n)

def seznam_naborov_st_vozlisc_cas(seznam_imen_grafov, st_gasilcev, stevilo_vozlisc_v_B):
    ''' funkcija, ki sprejme seznam v katerem so imena grafov, število gasilcev ter
        število vozlišč, ki jih želimo v začetni množici B.
        Vrne pa seznam naborov oblike (število vozlišč, potreben čas reševanje problema)'''

    # sprehodimo se po seznam_imen_grafov in sestavljamo nabor:
    seznam_naborov = []
    for graf in seznam_imen_grafov:
        B1 = nakljucno_izberi_vzolisca(graf, stevilo_vozlisc_v_B)
        B2 = nakljucno_izberi_vzolisca(graf, stevilo_vozlisc_v_B)
        potreben_cas1 = cas_potreben(graf, B1, st_gasilcev)
        potreben_cas2 = cas_potreben(graf, B2, st_gasilcev)
        seznam_naborov.append((len(graf), potreben_cas1))
        seznam_naborov.append((len(graf), potreben_cas2))

    return seznam_naborov
```

V funkciji sva si pomagali s funkcijo $nakljucno\_izberi\_vzolisca$, ki kot argument sprejme poljuben graf $graf$ ter poljubno pozitivno število n. Funkcija vrne n poljubnih vozlišč $grafa$. Funkcijo sva uporabili pri generiranju množice začetnih vozlišč B. Razlog pa je, da požar lahko izbruhne kjerkoli.

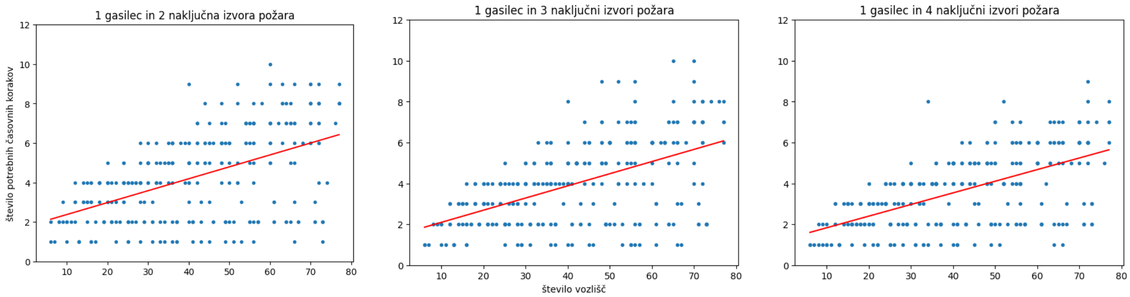
Funkcijo *seznam_navorov_st_vozlisc_cas* sva izvedli na zelo velikem seznamu grafov. Grafi seznama so bili različnih velikosti in oblik. Obravnavo rezultatov sva razdelili glede na spremenljivki *st_gasilcev* ter *stevilo_vozlic_v_B*.
Ločili sva primera:

- *st_gasilcev* $= 1$ in *stevilo_vozlic_v_B* $= \{2, 3, 4\}$
- *st_gasilcev* $= 2$ in *stevilo_vozlic_v_B* $= \{2, 3, 4\}$

Iz dobljenih podatkov sva nato sestavili *.csv* datoteko. Podatke sva vizualzirali s pomočjo *Python* knjižnice *pandas*. V grobem sva predstavlili odvisnost časa reševanje problema od števila vozlišč grafa. Število vozlišč obravnanih grafov je med 6 in 77. Grafične prikaze sva nazadnje nadgradili še z linarno regresijo.

4.2 1 gasilec & 2, 3 ali 4 izvori požara

Za parametre $st\_gasilcev = 1$ in $stevilo\_vozlic\_v\_B = \{2, 3, 4\}$ sva dobile naslednje grafične prikaze:



Dodatno sva izračunali še povprečno število potrebnih časovnih korakov:

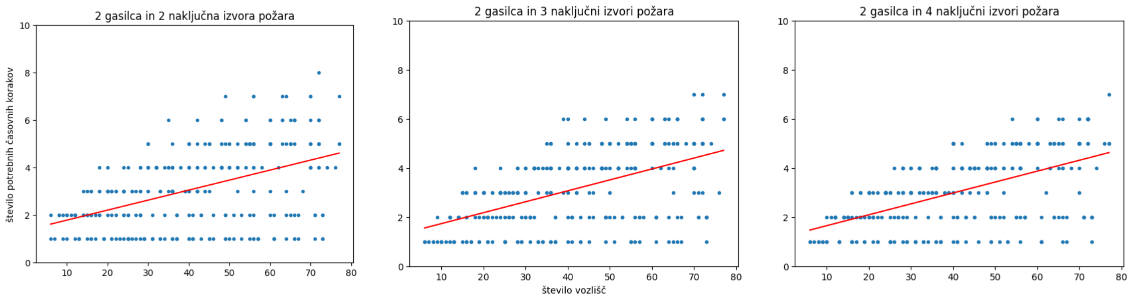
- 1 gasilec in 2 naključna izvora požara: 4.304,
- 1 gasilec in 3 naključni izvora požara: 3.993,
- 1 gasilec in 4 naključni izvora požara: 3.645.

Tako iz grafov kot tudi iz izračuna je razvidno, da se število potrebnih časovnih korakov z višanjem števila izvorov požara veča. To seveda ni presenetljivo, saj bo 1 gasilec zagotovo potreboval več časa za omejitev 4 izvorov požara, kot na primer 2 izvorov požara.

Komentar: opazimo, da so dobljena povprečja precej majhna. Slednje si lahko razlagamo z dejstvom, da je bilo v seznamu grafov več grafov z manjšim številom vozlišč (manj kot 40). Slednji grafi pa za zaključek problema potrebujejo manj časa kot grafi z večjim število vozlišč.

4.3 2 gasilca & 2, 3 ali 4 izvori požara

Za parametre $st\_gasilcev = 2$ in $stevilo\_vozlic\_v\_B = \{2, 3, 4\}$ sva dobile naslednje grafične prikaze:



Dodatno sva izračunali še povprečno število potrebnih časovnih korakov:

- 2 gasilca in 2 naključna izvora požara: 3.121,
- 2 gasilca in 3 naključni izvora požara: 3.151,
- 2 gasilca in 4 naključni izvora požara: 3.164.

V tem primeru pridemo do podobnega sklepa kot v prejšnjem (1 gasilec omejuje požar): število potrebnih časovnih korakov se z višanjem števila izvorov požara veča.

4.4 Primerjava primerov z 1 gasilcem in 2 gasilci

Primerjamo grafe in razultate, ki smo jih dobili v prejšnjih dveh primerih. Z grafa in tudi iz povprečji je opazno, da je število potrebnih časovnih enot manjše v primeru, ko imamo 2 gasilca, saj večje število gasilcev prej omeji požar.

5 Zaključek

V praksi najdemo več različic optimizacijskega problema gasilca. Na primer **širjenje bolezni** v manjši skupnosti, kjer z vozlišči grafa predstavimo ljudi in s povezavami stike z drugimi. Če je vozlišče v grafu okuženo, ostane nalezljivo za A časovnih enot in lahko okuži sosede v tem časovnem okviru. Gasilce pa v tem primeru nadomestijo ukrepi proti širjenju (e.g. razkuževanje, nošenje mask,...).
V igri **policistov in roparja** rešujemo problem, ali lahko D policistov ujame roparja, ki se premika po povezavah grafa. Podobnost pa lahko najdemo tudi pri vzpostavljanju **komunikacijske mreže med člani uporniškega gibanja** tako, da se minimizira število izdaj članov.

Delo najinega projekta zajema celoštevilski linearni program. Problema pa bi se lahko lotili še na kakšen drug način. V vsakem časovnem koraku iteracije bi lahko kot rešeno označili vozlišče z največjo stopnjo. Tako bi preprečili, da, v primeru da zagori, bi se ogenj razširil na sosednja vozlišča le-tega. V nasprotnem primeru bi bila zajezitev požara težja. S takim načinom bi potem morali pri testiranju pogledati razmerje med najvišjo stopnjo grafa in časom. Vendar pa na tak način najverjetneje ne bi dobili najboljše rešitve, kot pri linearnem programu.