Testowanie hipotez statystycznych

Iga Świtalska, Karolina Rakus

Definicje

1. **Hipoteza zerowa** - hipoteza, której prawdziwość poddajemy w wątpliwość, oznaczana ją jako H_0. Hipoteza zerowa jest hipotezą prostą, co oznacza, że wyznacza rozkład prawdopodobieństwa, z którego pochodzi próba.

2. **Hipoteza alternatywna** - hipoteza przeciwko, której sprawdzamy hipotezę zerową. W przeciwieństwie do hipotezy zerowej jest ona hipotezą złożóną. Dla $H_0 : \theta = \theta_0$, hipoteza alternatywna może przyjąć postć: $H_1 : \theta \neq \theta_0$, $H_1 : \theta > \theta_0$ lub $H_1 : \theta < \theta_0$.

3. **Statytyka testowa** -

4. **Poziom istotności** - przyjęte z góry dopuszczalne ryzyko popełnienia błędu pierwszego rodzaju (uznania prawdziwej hipotezy zerowej za fałszywą), pozwalające określić, powyżej jakich odchyleń zaobserwowanych w próbie test rozstrzygnie na korzyść hipotezy alternatywnej. Poziom istotności oznaczamy jako α.

5. **P-wartość** - najmniejszy poziom istotności, przy którym zaobserwowana wartość statystyki prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej.

6. **Zbiór krytyczny** - zbiór wartości statystki testowej prowadzący do odrzucenia hipotezy zerowej H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1.

7. **Błąd pierwszego rodzaju** - odrzucenie hipotezy zerowej, gdy ta jest prawdziwa. Prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju nazywamy poziomem istotności.

8. **Błąd drugiego rodzaju** - przyjęcie hipotezy zerowej, gdy ta jest fałszywa (odrucenie hipotezy zerowej, gdy ta jest prawdziwa). Błąd drugiego rodzaju rozpatrujemy dla zadanej alternatywnej wartości parametru θ. Prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju jest równe $1 -$ moc testu.

9. **Moc testu** - prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej i przyjęcia prawdziwej hipotezy alternatywnej dla zadanej alternatywnej wartości parametru θ.

Przypadek 1

Mając próbę z populacji o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma = 0.2)$, zweryfikujmy $H_0 : \mu = 1.5$, na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ przeciwko następującym hipotezom alternatywnym:

(a) $\mu \neq 1.5$

(b) $\mu > 1.5$

(c) $\mu < 1.5$

Statystyka Z

Na początku wyznaczymy statystykę testową. Dla testów wartości średniej w dziedzinie rozkładów normalych o znanej wariancji ma ona postać:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$

gdzie $\bar{X}$ - średnia z danych, n - ilość danych.
Statystyka Z, pod warunkiem hipotezy zerowej, ma rozkład $N(0, 1)$.

P-wartości

Następnie wyznaczymy p-wartości dla każdej z trzech hipotez alternatywnych, skorzystamy ze wzorów:

(a) $H_1 : \mu \neq 1.5$
p-warotść $= 2\,P_{H_0}(Z \geq |z|) = 2\,(1 - P_{H_0}(Z < |z|)) = 2\,(1 - F_Z(|z|))$

(b) $H_1 : \mu > 1.5$
p-warotść $= P_{H_0}(Z \geq z) = 1 - P_{H_0}(Z < z) = 1 - F_Z(z))$

(c) $H_1 : \mu < 1.5$
p-warotść $= P_{H_0}(Z \leq z) = F_Z(z)) = F_Z(z)),$

gdzie Z - zmienna z rozkładu $N(0, 1)$, z - zaobserwowana dla danych statystyka testowa. W naszym przypaku $z = -7.0415$. Do policzenia p-wartości skorzystamy więc z wartość dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego w punkcie -7.0415. Otrzymaliśmy następujące p-wartości:

	$\mu \neq 1.5$	$\mu > 1.5$	$\mu < 1.5$
p-wartość	$1.9025e-12$	1	$9.5124e-13$

Tabela 1: p-wartości

Wnioski Dla pierwszej i trzeciej hipotezy alternatywnej p-wartość jest bliska 0, odrzucamy więc hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. Dla drugiej hipotezy alternatywnej p-wartość jest równa 1, oznacza to, że dla każdego poziomu istotności nie będziemy odrzucać hipotezy zerowej.

Zbiory krytyczne

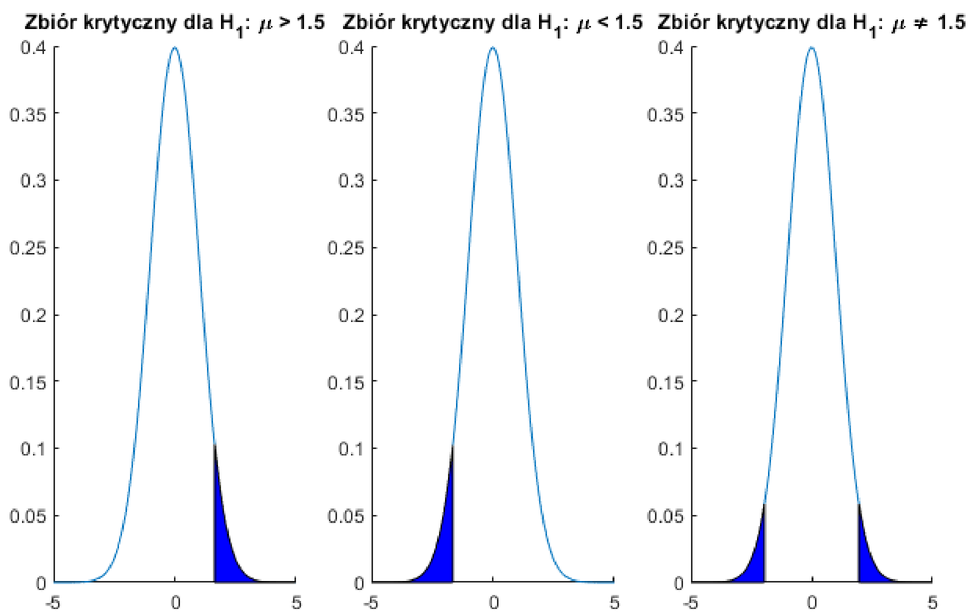
Do wyznaczenia zbiorów krytycznych skorzystamy z poniższych wzorów:

(a) $H_1 : \mu \neq 1.5$
$C = \{z : z < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \vee z > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

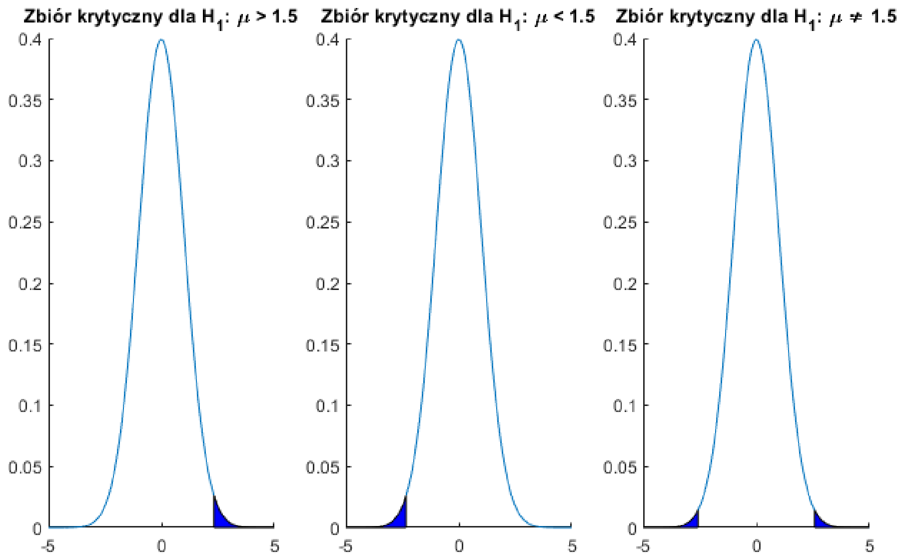
(b) $H_1 : \mu > 1.5$
$C = \{z : z > Z_{1-\alpha}\}$

(c) $H_1 : \mu < 1.5$
$C = \{z : z < -Z_{1-\alpha}\}$,

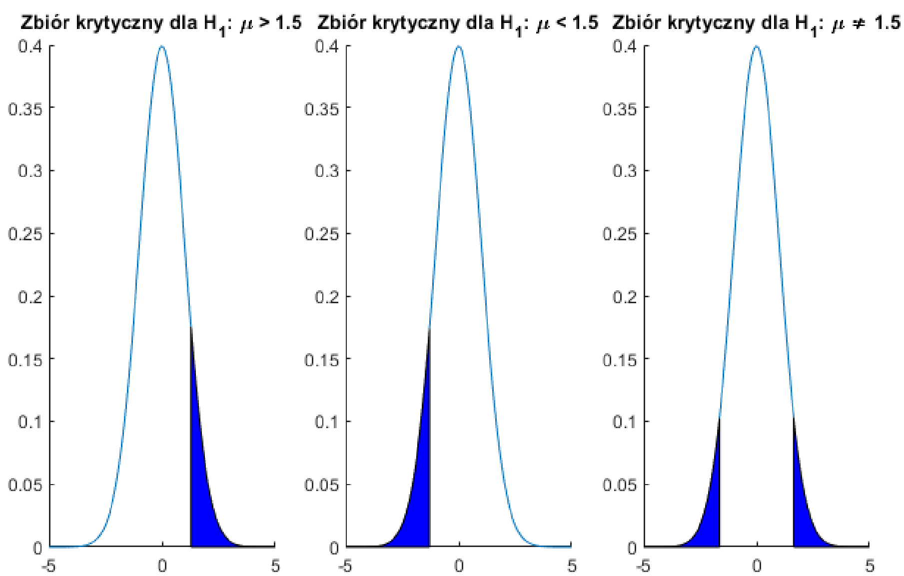
gdzie $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ to kwantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ dla rozkładu $N(0, 1)$,
a $Z_{1-\alpha}$ - kwantyl rzędu $1 - \alpha$.
Zaznaczymy obszary krytyczne na wykresie gęstości standardowego rozkładu normalnego i zbadamy jak będą się one zmieniać dla różnych poziomów istotności.



Rysunek 1: Zbióry krytyczne dla $\alpha = 0.05$



Rysunek 2: Zbiory krytyczne dla $\alpha = 0.01$



Rysunek 3: Zbiory krytyczne dla $\alpha = 0.1$

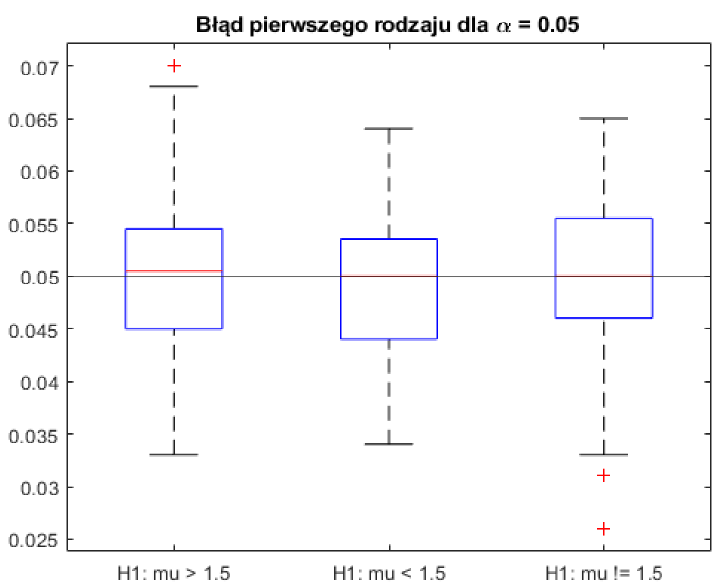
Wnioski Im większy poziom istotności, tym większe zbiory krytyczne, czyli większe prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy ta jest prawdziwa ...

Błąd pierwszego rodzaju

Aby obliczyć prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju generujemy próbę o rozkładzie normalnym, zgodnym z hipotezą zerową, o długości $n = 1000$. Wyliczamy wartość statystyki testowej Z i sprawdzamy czy znajduje się ona w zbiorze krytycznym. Powtarzamy powyższe kroki $N = 1000$ razy.
Symulacyjnie wyznaczonym prawdopodobieństwem błędu pierwszego rodzaju będzie stosunek ilości powtórzeń, dla których statystyka wpadła do obszaru krytycznego do ilości wszystkich powtórzeń N.

	$\mu \neq 1.5$	$\mu > 1.5$	$\mu < 1.5$
błąd pierwszego rodzaju	0.0499	0.0501	0.0489

Tabela 2: Średnie prawdopodobieństwa błędu pierwszego rodzaju dla $\alpha = 0.05$



Rysunek 4: Rozkład prawdopodobieństwa błędu pierwszego rodzaju dla $\alpha = 0.05$

Wnioski Błąd pierwszego rodzaju jest zbliżony do poziomu istotności $\alpha = 0.05$ niezależnie od przyjętej hipotezy alternatywnej.

Moc testu i błąd drugiego rodzaju

Aby obliczyć prawdopodobieństwo błedu drugiego rodzaju generujemy próbę o rozkładzie normalnym, zgodnym z hipotezą alternatywną, o długości $n = 1000$. Wyliczamy wartość statystyki testowej Z i sprawdzamy czy znajduje się ona poza zbiorem krytycznym. Powtarzamy powyższe kroki $N = 1000$ razy.
Symulacyjnie wyznaczoną mocą testu będzie stosunek ilości powtórzeń, dla których statystyka nie wpadła do obszaru krytycznego do ilości wszystkich powtórzeń N. Moc testu to $1 -$ prawdopodobieństwo błedu drugiego rodzaju.
Będziemy rozważać moc testu i błąd drugiego rodzaju dla poziomu istotności $\alpha = 0.05$, ale dla różnych odległości między alterantywną wartością parametru μ oraz wartością $\mu_0 = 1.5$.

Dla $H_1 : \mu \neq 1.5$:

μ	1.47	1.48	1.49	1.51	1.52	1.53
moc testu	0.9972	0.8854	0.3514	0.3508	0.8861	0.9976
błąd drugiego rodzaju	0.0028	0.1146	0.6486	0.6492	0.1138	0.0024

Dla $H_1 : \mu > 1.5$:

μ	1.51	1.52	1.53
moc testu	0.4738	0.9353	0.9989
błąd drugiego rodzaju	0.5262	0.0647	0.0011

Dla $H_1 : \mu < 1.5$:

μ	1.47	1.48	1.49
moc testu	0.9990	0.9355	0.4744
błąd drugiego rodzaju	0.0010	0.0645	0.5256

Wnioski Moc testu zwiększa się wraz ze wzrostem odległości odległości między alterantywną wartością parametru μ oraz wartością $\mu_0 = 1.5$.