Algorytmy Optymalizacji Dyskretnej

Lista 2 - Programowanie Liniowe i Całkowitoliczbowe

Karol Janic

kwiecień 2023

1 Zadanie 1

Minimalizacja kosztu zakupu i dostawy paliwa dla lotnisk.

1.1 Opis Modelu

- Definicje Zmiennych Decyzyjnych:
  - $x_{i,j}$ - ilość paliwa w galonach zakupionego przez i-te lotnisko w j-tej firmie, gdzie $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., m\}$, n - liczba rozpatrywanych lotnisk, m - liczba rozpatrywanych firm dostarczających paliwo
- Ograniczenia:
  - określenie zapotrzebowania lotnisk: $\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \geqslant a_i, \quad$ gdzie a_i to zapotrzebowanie i-tego lotniska
  - określenie możliwości firmy: $\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leqslant b_j, \quad$ gdzie b_j to możliwości dostarczania paliwa przez j-tą firmę
- Funkcja Do Minimalizacji: $f_{min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} k_{i,j}, \quad$ gdzie $k_{i,j}$ to koszt zakupu 1 galonu paliwa i jego dostawy z firmy j do lotniska i

1.2 Opis Egzemplarza

- Liczba lotnisk i firm dostarczających paliwo: $n = 4, \quad m = 3$
- Zapotrzebowania(gal):

nr. lotniska	1	2	3	4
zapotrzebowanie	110000	220000	30000	440000

- Możliwości dostaw(gal):

nr. firmy	1	2	3
maks. dostawa	275000	550000	60000

- Koszty($\$/gal$):

	lotnisko 1	lotnisko 2	lotnisko 3	lotnisko 4
firma 1	10	10	9	11
firma 2	7	11	12	13
firma 3	8	14	4	9

1.3 Wyniki i Wnioski

- Łączny koszt zakupów paliwa: 8525000$
- Plan zakupów paliwa(gal):

	lotnisko 1	lotnisko 2	lotnisko 3	lotnisko 4
firma 1	0.0	165000.0	0.0	110000.0
firma 2	110000.0	55000.0	0.0	0.0
firma 3	0.0	0.0	330000.0	330000.0

- Można zauważyć, że w miarę możliwości lotniska pobierają paliwo od firm, które kosztuje ich najmniej aż do wyczerpania zapasów firm
- Wszystkie firmy dostarczają paliwo lotniskom
- Firmy o numerach 1 i 3 wyczerpują całe swoje zapasy paliwa

2 Zadanie 2

Znajdowanie najkrótszej ścieżki pomiędzy miastami z ograniczeniem czasowym.

2.1 Opis Modelu

- Definicje Zmiennych Decyzyjnych
  - zmienna indykatorawa przejazd pomiędzy danymi miastami: $x_{i,j}$, gdzie $i, j \in \{1, .., n\}$ a n jest liczbą rozważanych miast
- Ograniczenia
  - pomiędzy miastami możemy przejechać lub nie: $x_{i,j} \in \{0, 1\}$
  - warunek miasta początkowego: $\sum_{i=1}^{n} x_{p,i} - \sum_{i=1}^{n} x_{i,p} = 1$, gdzie p jest indeksem miasta początkowego
  - warunek miasta końcowego: $\sum_{i=1}^{n} x_{p,i} - \sum_{i=1}^{n} x_{i,p} = -1$, gdzie k jest indeksem miasta końcowego
  - warunek ciągłości trasy: $\sum_{i=1}^{n} x_{m,i} - \sum_{i=1}^{n} x_{i,m} = 0$, gdzie m jest miastem ani nie początkowym ani nie końcowym
  - maksymalny czas jazdy: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} t_{i,j} \leqslant T$, gdzie $t_{i,j}$ oznacza czas przejazdu pomiędzy miastami i oraz j a T jest górną granicą czasu przejazdu
- Funkcja Do Minimalizacji
  - $f_{min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} d_{i,j}$, gdzie $d_{i,j}$ to odległość drogowa pomiędzy miastami i oraz j

2.2 Opis Egzemplarza

- liczba miast: $n = 10$
- połączenie pomiędzy miastami

d[km] t[min]	Warszawa	Kraków	Łódź	Wrocław	Poznań	Gdańsk	Gdynia	Szczecin	Toruń	Bydgoszcz
Warszawa	x	x	136 102	348 232	312 211	340 224	x	566 346	259 168	308 198
Kraków	290 217	x	434 277	268 206	459 312	x	x	648 344	446 300	495 340
Łódź	140 104	280 226	x	214 145	211 168	340 207	362 226	x	183 124	x
Wrocław	355 229	273 189	222 147	x	182 134	x	509 314	417 259	358 231	x
Poznań	311 199	458 300	218 150	185 134	x	311 194	332 212	x	x	139 92
Gdańsk	348 240	x	337 207	482 319	311 205	x	20 30	x	170 112	167 113
Gdynia	383 264	x	x	509 313	336 220	36 30	x	358 272	194 128	191 129
Szczecin	x	647 387	269 159	394 253	265 177	370 266	355 263	x	x	259 225
Toruń	262 170	x	x	392 249	189 146	168 109	194 123	314 246	x	46 50
Bydgoszcz	310 205	x	164 114	313 212	132 104	167 112	x	259 228	46 53	x

- Miasto początkowe: Gdynia
- Miasto końcowe: Kraków
- Ograniczenia czasowe: 440 min, 450 min

2.3 Wyniki i Wnioski

- Wynik dla ograniczenia czasowego: 440 min:
  - Długość trasy: 653 km
  - Czas przejazdu: 436 min
  - Trasa: Gdynia → Gdańsk → Łódź → Kraków
- Wynik dla ograniczenia czasowego: 450 min:
  - Długość trasy: 635 km
  - Czas przejazdu: 442 min
  - Trasa: Gdynia → Bydgoszcz → Łódź → Kraków
- Usunięcie ograniczeń na całkowitoliczbowość(w zamian dodanie ograniczenia: $x_{i,j} \geqslant 0$) generuje niepoprawne rozwiązanie: zmienne $x_{i,j}$ przyjmują wartości niecałkowice. W zamian czas podróży jest równy jemu dolnemu ograniczeniu
- Usunięcie ograniczeń na całkowitoliczbowość(w zamian dodanie ograniczenia: $x_{i,j} \geqslant 0$) oraz ograniczeń na czas podróży generuje poprawny wynik toższamy z wynikiem gdy ograniczeniem jest 450 minut

3 Zadanie 3

Minimalizacja liczby radiowozów w pewnym mieście.

3.1 Opis Modelu

- Definicje Zmiennych Decyzyjnych:
  - k - łączna liczba radiowozów w mieście
  - $x_{i,j}$ - liczba radiowozów w i-tej dzielnicy i na j-tej zmianie, gdzie $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., m\}$, n - liczba rozpatrywanych dzielnic, m - liczba rozpatrywanych zmian
- Ograniczenia:
  - określenie minimalnej i maksymalnej liczby radiowozów w danej dzielnicy i na danej zmianie: $c_{i,j}^{min} \leqslant x_{i,j} \leqslant c_{i,j}^{max}$, gdzie $c_{i,j}^{min}$ i $c_{i,j}^{max}$ to odpowiednio minimalna i maksymalna liczba radiowozów w i-tej dzielnicy i na j-tej zmianie
  - określenie minimalnej liczby radiowozów w danej dzielnicy: $\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \geqslant a_i$, gdzie a_i to minimalne obłożenie w i-tej dzielnicy
  - określenie minimalnej liczby radiowozów na danej zmianie: $\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \geqslant b_i$, gdzie b_j to minimalne obłożenie na j-tej zmianie
  - ograniczenie liczby radiowozów na zmianie: $\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leqslant k$
- Funkcja Do Minimalizacji: $f_{min} = k$

3.2 Opis Egzemplarza

- Liczba dzielnic i zmian: $n = 3$, $m = 3$
- Minimalna liczba radiowozów:

nr. zmiany	1	2	3
obsada	10	20	18

- Minimalna liczba radiowozów:

nr. dzielnicy	1	2	3
obsada	10	14	13

- Ograniczenia na radiowozy:

min/max	zmiana 1	zmiana 2	zmiana 3
dzielnica 1	2/3	4/7	3/5
dzielnica 2	3/5	6/7	5/10
dzielnica 3	5/8	7/12	6/10

3.3 Wyniki i Wnioski

- Łączna liczba radiowozów: 20
- Rozdział radiowozów:

	zmiana 1	zmiana 2	zmiana 3
dzielnica 1	3	4	5
dzielnica 2	3	7	7
dzielnica 3	8	9	6

4 Zadanie 4

Plan monitoringu terenu z kontenerami zawierającymi cenny ładunek.

4.1 Opis Modelu

- Definicje Zmiennych Decyzyjnych
  - $x_{i,j}$ - zmienna indykatorowa kamerę na danym polu placu gdzie $i \in \{0, ..., n-1\}$, $j \in \{0, ..., m-1\}$, a $n \times m$ oznacza rozmiar placu(liczbę kolumn i wierszy)
- Ograniczenia
  - kamera może być lub nie być zainstalowana na danym polu: $x_{i,j} \in \{0, 1\}$
  - kamera nie może znajdować się na polu na którym znajduje się kontener: $x_{i,j} = 0$, jeśli na polu w kolumnie i oraz wierszu j znajduje się kontener
  - każdy kontener musi być w zasięgu conajmniej jednej kamery: $\sum_{i=\max\{px-k,0\}}^{\min\{px+k,n-1\}} x_{i,py} + \sum_{j=\max\{py-k,0\}}^{\min\{py+k,m-1\}} x_{px,j} \geqslant 1$, gdzie (px, py) to pozycja kontenera a k to zasięg kamery(liczba pól, które obserwuje na prawo, lewo, w górę i dół od siebie)
- Funkcja Do Minimalizacji
  - $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} x_{i,j}$

4.2 Opis Egzemplarza

- Rozmiar planszy: $n = 5, \quad m = 5$
- Zasięg kamer: $k = 1$ / $k = 2$
- Rozmieszczenie kontenerów:

K		K		K
K				
	K		K	
	K	K	K	
K	K			K

4.3 Wyniki i Wnioski

- $k = 1$:

  Minimalna liczba kamer: 7

K	x	K	x	K
K	x			
	K	x	K	
x	K	K	K	x
K	K	x		K

- $k = 2$:

  Minimalna liczba kamer: 4

K		K	x	K
K				
x	K		K	
x	K	K	K	
K	K		x	K

5 Zadanie 5

Planowanie produkcji w fabryce.

5.1 Opis Modelu

- Definicje Zmiennych Decyzyjnych
  - ilość produkowanych produktów w kilogramach: p_i, dla $i \in \{1, ..., n\}$, gdzie n to liczba produkowanych produktów
- Ograniczenia
  - ilość produktów jest nieujemna; dla $i = 1, ..., n: \quad p_i \geqslant 0$
  - ograniczenie produkcji danego produktu; dla $i = 1, ..., n: \quad p_i \leqslant m_i, \quad$ gdzie m_i to popyt na produkt
  - ograniczenie czasu działania maszyn; dla $j = 1, ..., m: \quad \sum_{i=1}^{n} p_i c_{i,j} \leqslant C_j, \quad$ gdzie m to liczba maszyn w fabryce, $c_{i,j}$ to potrzebny czas maszyny j na wyprodukowanie 1 kilograma produktu i w minutach, a C_j to maksymalny czas działania maszyny j w minutach
- Funkcja Do Maksymalizacji
  - $f_{max} = \sum_{i=1}^{n} p_i z_i - \sum_{i=1}^{n} p_i k_i - \sum_{j=1}^{m} l_j \sum_{i=1}^{n} p_i c_{i,j}, \quad$ gdzie z_i to zysk na 1 kilogramie produktu i, k_i to koszt produkcji 1 kilograma produktu i a l_j to koszt działania maszyny j przez 1 minutę

5.2 Opis Egzemplarza

- Liczba produktów i maszyn: $n = 4, \quad m = 3$
- Popyt:

nr. produktu	1	2	3	4
popyt [kg]	400	100	150	500
koszt [$/kg]	4	1	1	1
zysk [$/kg]	9	7	6	5

- Specyfikacja maszyn:

nr. maszyny	1	2	3
maks. czas pracy [min]	3600	3600	3600
koszt pracy [$/godz.]	2	2	3

- Czas pracy maszyny dla danego produktu[min/kg]:

	maszyna 1	maszyna 2	maszyna 3
produkt 1	5	10	6
produkt 2	3	6	4
produkt 3	4	5	3
produkt 4	4	2	1

5.3 Wyniki i Wnioski

- Zysk: 3632.5$
- Plan produkcji:

nr. produktu	1	2	3	4
ilość [kg]	125.0	100	150	500

- Można zauważyć, że ilość produkowanych produktów jest maksymalna(równa popytowi) dla tych typów produktów, gdzie przechód za kilogram jest największy