

Metody Optymalizacji

Karol Janic

1 czerwca 2025

Spis treści

1	Zadanie	2
1.1	Cel	2
1.2	Model	2
1.3	Aproksymacja	2
1.4	Dane	2
1.5	Wyniki i wnioski	2

1 Zadanie

1.1 Cel

Celem zadanie jest implementacja i eksperymentalne zbadanie algorytmu 2-aproksymacyjnego dla problemu szeregowania zadań na niezależnych maszynach, którego celem jest minimalizacja maksymalnego czasu zakończenia zadań (makespan).

1.2 Model

Zadane jest n zadań i m maszyn. Każde zadanie i ma czas wykonania p_i^j na maszynie j . Problem możemy sformułować jako model programowania całkowitoliczbowego z funkcją celu:

$$\min T \tag{1}$$

oraz ograniczeniami:

$$\sum_{j=1}^m x_i^j = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^n p_i^j x_i^j \leq T \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \tag{3}$$

gdzie x_i^j to zmienna binarna, która jest równa 1, jeśli zadanie i jest przypisane do maszyny j , a 0 w przeciwnym przypadku

1.3 Aproksymacja

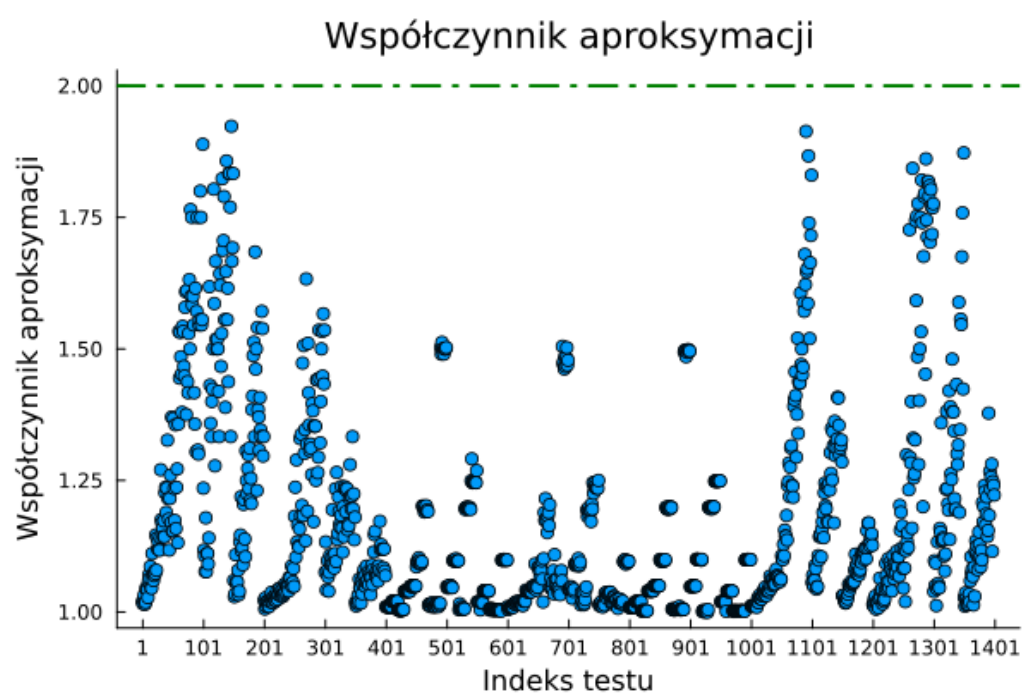
Algorytm 2-aproksymacyjny dla tego problemu składa się z kilku kroków. Pierwszy krok polega na określeniu zakresu makespanu w którym on się znajduje przy użyciu algorytmu zachłannego. Następnie przy pomocy wyszukiwania binarnego i zrelaksowanego modelu programowania całkowitoliczbowego znajdujemy graniczną wartość makespanu T^* oraz odpowiadające mu rozwiązanie. Ostatnim krokiem jest doprowadzenie rozwiązania do postaci całkowitoliczbowej poprzez iteracyjne przypisywanie zadań do maszyn, ponieważ zrelaksowany model może rozdzielać pojedyncze zadania pomiędzy kilka maszyn. Zrelaksowany model uruchamiany jest na ograniczonym przestrzeni rozwiązań - rozważane są tylko te maszyny i zadania, które mają czasy wykonania mniejsze niż T . Interesuje nas wyłącznie odpowiedź, czy istnieje rozwiązanie, które spełnia ograniczenia dla danego T . Przyporządkowanie jednego zadania do jednej maszyny jest możliwe, ponieważ w grafie otrzymanym na podstawie ułamkowych przyporządkowań zadań do maszyn istnieje perfect matching.

1.4 Dane

Eksperymenty przeprowadzono na zbiorach danych ze strony <http://soa.iti.es/problem-instances>. Składały się one z 7 grup problemów, z których każda zawierała 200 instancji problemu. Wartości czasów wykonania zadań były losowane z rozkładu jednostajnego na przedziale na różnych przedziałach - od kilkudziesięciu do kilku tysięcy jednostek czasu.

1.5 Wyniki i wnioski

Otrzymane wyniki porównano z najlepszymi znanymi rozwiązaniami dla tych instancji. Na wykresie 1 przedstawiono ratio otrzymanych rozwiązań do najlepszych znanych rozwiązań dla każdej instancji problemu. Łatwo zauważyć, że dla każdej instancji otrzymane rozwiązanie jest co najwyżej dwukrotnie gorsze od najlepszego znanego rozwiązania, co wskazuje na poprawność algorytmu i jego 2-aproksymacyjność.



Rysunek 1: Wyniki eksperymentów - ratio otrzymanych rozwiązań do najlepszych znanych rozwiązań