

Metody Optymalizacji

Karol Janic

1 czerwca 2025

Spis treści

1	Zadanie	2
1.1	Cel	2
1.2	Model	2
1.3	Aproksymacja	2
1.4	Dane	2
1.5	Wyniki i wnioski	2

1 Zadanie

1.1 Cel

Celem zadanie jest implementacja i eksperymentalne zbadanie algorytmu 2-aproksymacyjnego dla problemu szeregowania zadań na niezależnych maszynach, którego celem jest minimalizacja maksymalnego czasu zakończenia zadań (makespan).

1.2 Model

Zadane jest n zadań i m maszyn. Każde zadanie i ma czas wykonania p_i^j na maszynie j . Problem możemy sformułować jako model programowania całkowitoliczbowego z funkcją celu:

$$\min T \quad (1)$$

oraz ograniczeniami:

$$\sum_{j=1}^m x_i^j = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i^j x_i^j \leq T \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

gdzie x_i^j to zmienna binarna, która jest równa 1, jeśli zadanie i jest przypisane do maszyny j , a 0 w przeciwnym przypadku

1.3 Aproksymacja

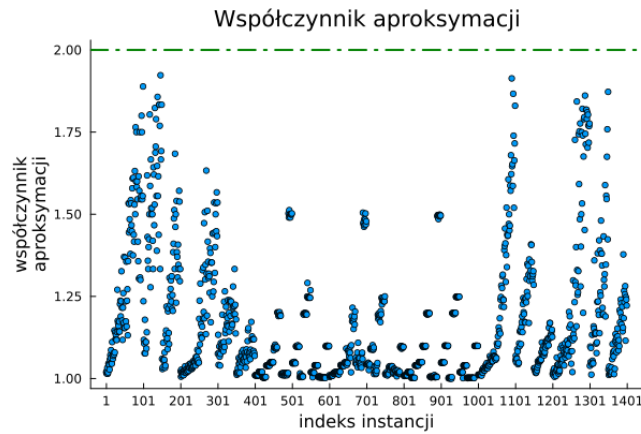
Algorytm 2-aproksymacyjny dla tego problemu składa się z kilku kroków. Pierwszy krok polega na określeniu zakresu makespanu w którym on się znajduje przy użyciu algorytmu zachłannego. Następnie przy pomocy wyszukiwania binarnego i zrelaksowanego modelu programowania całkowitoliczbowego znajdujemy graniczną wartość makespanu T^* oraz odpowiadające mu rozwiązanie. Ostatnim krokiem jest doprowadzenie rozwiązania do postaci całkowitoliczbowej poprzez iteracyjne przypisywanie zadań do maszyn, ponieważ zrelaksowany model może rozdzielać pojedyncze zadania pomiędzy kilka maszyn. Zrelaksowany model uruchamiany jest na ograniczonym przestrzeni rozwiązań - rozważane są tylko te maszyny i zadania, które mają czasy wykonania mniejsze niż T . Interesuje nas wyłącznie odpowiedź, czy istnieje rozwiązanie, które spełnia ograniczenia dla danego T . Przyporządkowanie jednego zadania do jednej maszyny jest możliwe, ponieważ w grafie otrzymanym na podstawie ułamkowych przyporządkowań zadań do maszyn istnieje perfect matching.

1.4 Dane

Eksperymenty przeprowadzono na zbiorach danych ze strony <http://soa.iti.es/problem-instances>. Składały się one z 7 grup problemów, z których każda zawierała 200 instancji problemu. Wartości czasów wykonania zadań były losowane z rozkładu jednostajnego na przedziale na różnych przedziałach - od kilkudziesięciu do kilku tysięcy jednostek czasu.

1.5 Wyniki i wnioski

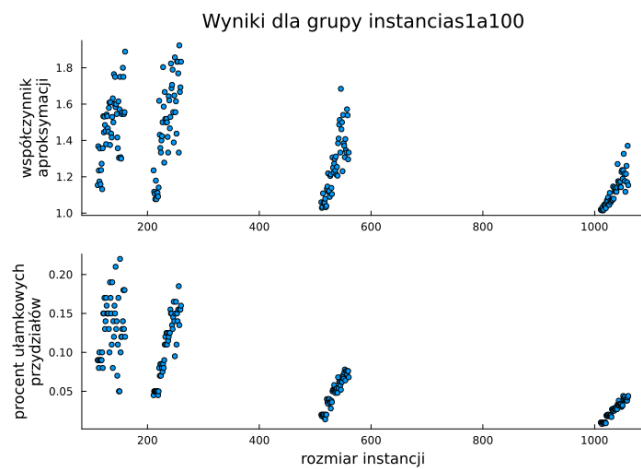
Otrzymane wyniki porównano z najlepszymi znanymi rozwiązaniami dla tych instancji. Na Wykresie 1 przedstawiono ratio otrzymanych rozwiązań do najlepszych znanych rozwiązań dla każdej instancji problemu. Łatwo zauważyć, że dla każdej instancji otrzymane rozwiązanie jest co najwyżej dwukrotnie gorsze od najlepszego znanego rozwiązania, co wskazuje na poprawność algorytmu i jego 2-aproksymacyjność. Ekstrema i wartości średnie poszczególnych serii zawiera Tabela 1. Dla dwóch instancji z serii *Instanciasde1000a1100* otrzymano rozwiązania, które były lepsze niż najlepsze znane rozwiązania - Tabela 1. Wraz ze wzrostem rozmiaru instancji problemu, otrzymane rozwiązania stają się coraz bliższe rozwiązaniom optymalnym a liczba zadań przypisanych łącznie do maszyn rośnie (Wykresy 2 - 8).



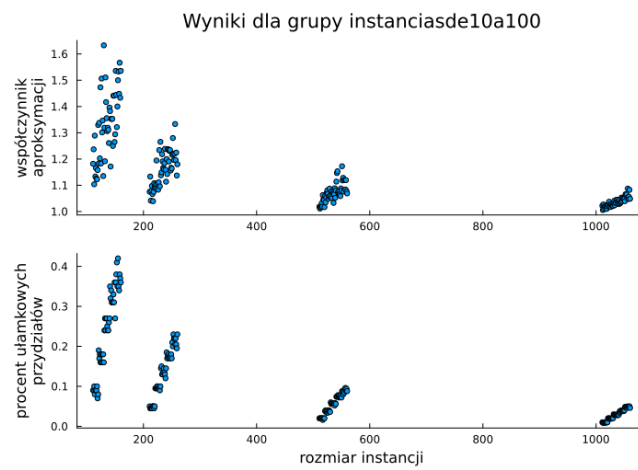
Rysunek 1: Wyniki eksperymentów - ratio otrzymanych rozwiązań do najlepszych znanych rozwiązań

Seria	Min	Max	Średnia
instancias1a100	1.0145	1.9231	1.3399
instanciasde10a100	1.0057	1.6329	1.1499
instancias100a200	1.0047	1.5048	1.0879
instancias100a120	1.0015	1.5124	1.0853
Instanciasde1000a1100	0.9994	1.4988	1.0840
JobsCorre	1.0089	1.9135	1.1855
MaqCorre	1.0052	1.8725	1.2430

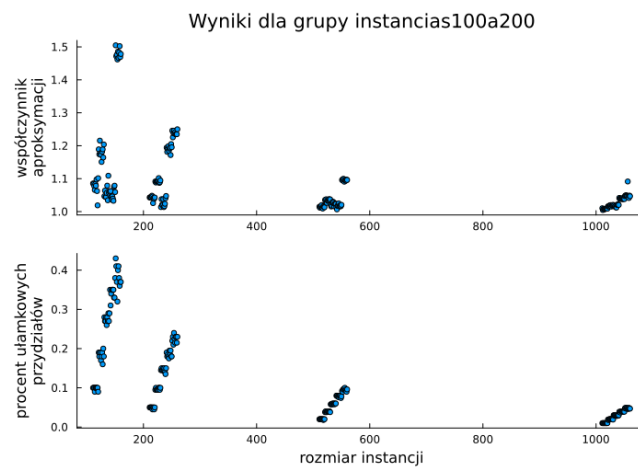
Tabela 1: Ekstrema i wartości średnie dla poszczególnych grup problemów



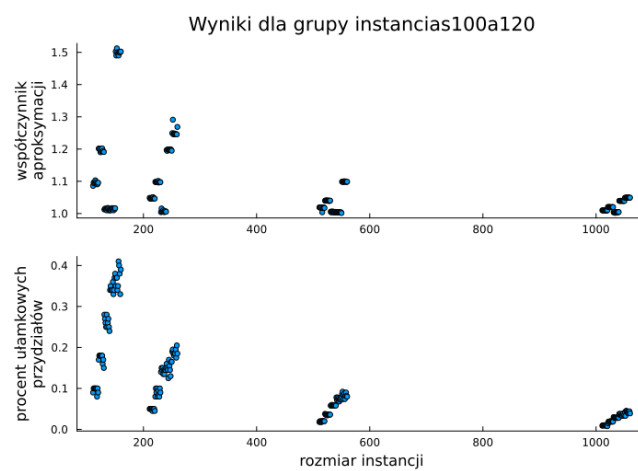
Rysunek 2: Wyniki eksperymentów dla grupy instancias1a100



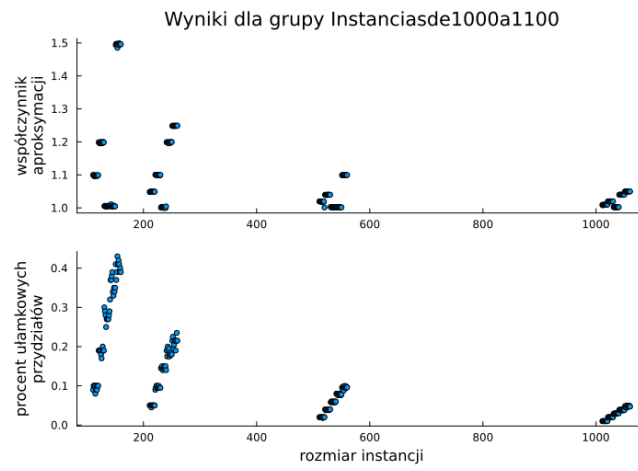
Rysunek 3: Wyniki eksperymentów dla grupy instancjasde10a100



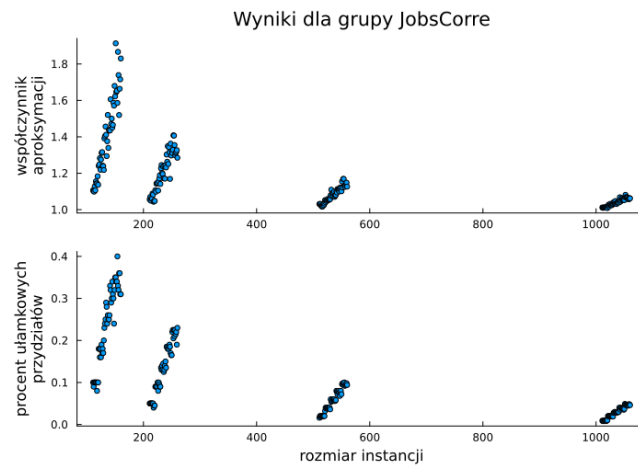
Rysunek 4: Wyniki eksperymentów dla grupy instancjas100a200



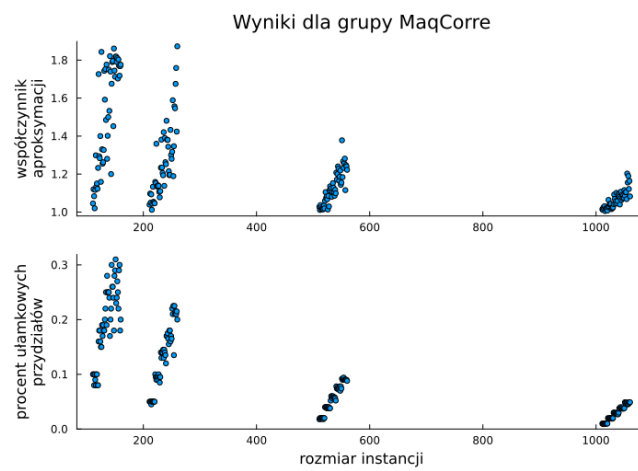
Rysunek 5: Wyniki eksperymentów dla grupy instancjas100a120



Rysunek 6: Wyniki eksperymentów dla grupy instanciasde1000a1100



Rysunek 7: Wyniki eksperymentów dla grupy JobsCorre



Rysunek 8: Wyniki eksperymentów dla grupy MaqCorre