

Wskaźnik planarności w grafach Barabasi Albert

1 Cel

Chcemy oceniać szansę na wystąpienie podpodziału $K_{3,3}$ lub K_5 w grafie G_n^m . Zaczynamy od pustego grafu. W każdym kroku dodajemy nową krawędź/ nowy wierzchołek z krawędzią. Co każde dodanie krawędzi na podstawie indeksu planarności decydujemy jaki kolor jej nadać. Każdy kolor odpowiada jednej z warstw na które rozkładamy graf. Indeks ten liczymy dla każdej warstwy osobno.

2 Założenia

1. Dowolne ścieżki pomiędzy wierzchołkami nie powinny wpływać na wskaźnik, ponieważ mogą zostać zkontraktowane.
2. Wskaźnik powinien uwzględniać to, że każda krawędź może zostać użyta tylko raz.
3. Trzeba uwzględnić to aby wierzchołki tworzyły klikę czy graf pełny dwudzielny.

3 Realizacja

Weźmy pewną ścieżką P w grafie: p_1, \dots, p_k i zdefiniujmy funkcję:

$$\tau(P) = \phi(p_1) \cdot \left(\prod_{i=2}^{k-1} \psi(p_i) \right) \cdot \phi(p_k) \quad (1)$$

gdzie: $\phi(p) = \frac{\min\{d, \deg(p)\}}{d}$ oraz $\psi(p) = \frac{1}{\deg(p)-1}$.

Tak zdefiniowana funkcja $\tau(P)$ zwraca wartości z przedziału $(0, 1]$. Wartość 1 oznacza, że ścieżka P może zostać zkontraktowana do krawędzi łączącej dwa wierzchołki stopnia d oraz wierzchołki w niej występujące nie występują w innym podgrafie.

Sumując wartości $\tau(P)$ dla wszystkich ścieżek pomiędzy dwoma wierzchołkami p_i, p_j otrzymamy 'oczekiwaną liczbę ścieżek', które mogą zostać skontraktowane do krawędzi łączącej dwa wierzchołkami stopnia d o 'oczekiwanym stopniu d' ' - oznaczenie $\tau(P(p_i, p_j))$.

Aby określić wartość τ dla całego grafu mnożymy τ dla ścieżek pomiędzy wierzchołkami tworzącymi potencjalne klikę oraz potencjalne pełne grafy dwudzielne.

4 Usprawnienia obliczeniowe

Z analizy grafów planarnych wynika, że podgrafy będące podpodziałami grafów $K_{3,3}$ oraz K_5 mają rozmiar $O(\log_2(n))$, zatem wystarczy w analizie wziąć pod uwagę ścieżki takiej długości.

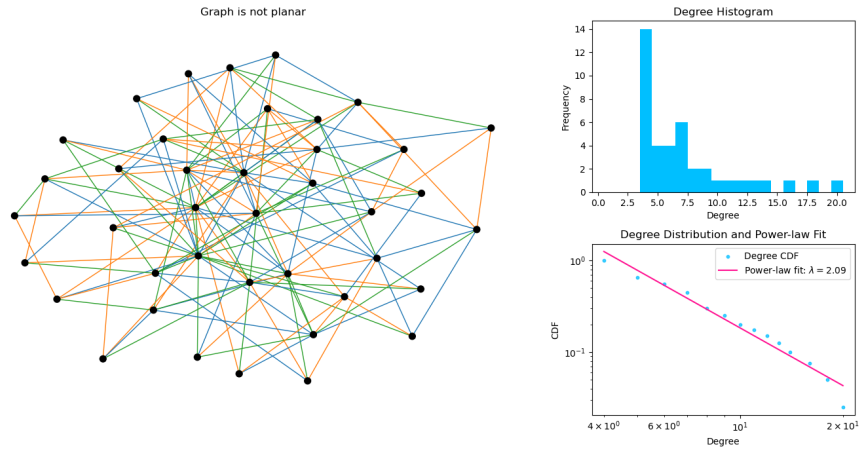
Przy pojawianiu się nowego wierzchołka/krawędzi wystarczy zaktualizować część wartości. Można to będzie osiągnąć poprzez trzymanie jakiś dodatkowych informacji lub lekką modyfikację funkcji τ . Można do iloczynów wartości krawędzi grafów $K_{3,3}$ oraz K_5 zastować jakiś próg, aby wartości poniżej 0.1 nie były brane pod uwagę. Można także liczyć logarytm wartości τ dla ścieżek aby zamienić iloczyny na sumy.

5 Zalety

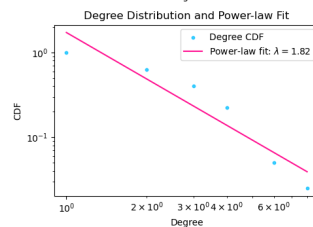
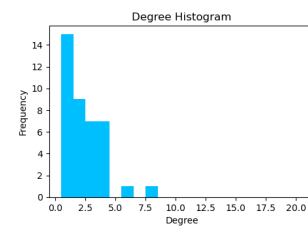
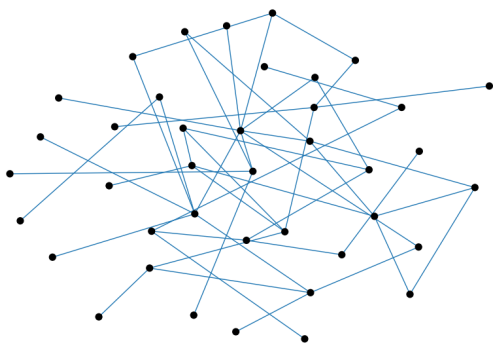
Mając policzone wartości τ dla danych ścieżek można analizować które miejsca w grafie są problematyczne oraz szacować ile krawędzi będzie zakłócać planarność grafu.

6 Przykład użycia

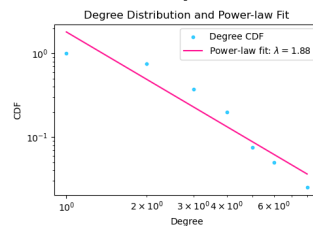
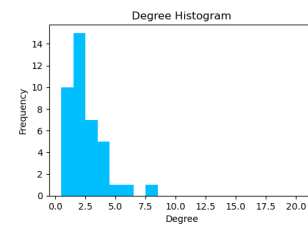
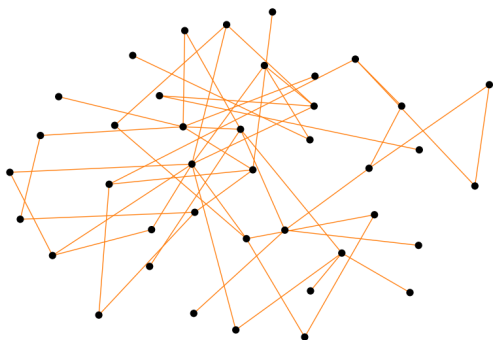
Efekty kolorowania przy użyciu wskaźnika opisanego wyżej. Generowany jest graf BA dla parametru $m = 5$ oraz $n = 30$ i liczbie kolorów 3. Po dodaniu każdej krawędzi wyznaczany jest wskaźnik planarności dla każdej warstwy(koloru). Wierzchołki kolorowane są na podstawie najniższej wartości wskaźnika planarności. Pod uwagę brane są wszystkie ścieżki - bez ograniczeń na długość.



Embedding 1 is planar



Embedding 2 is planar



Embedding 3 is planar

