

# Oczekiwana liczba podgrafów Kuratowskiego w grafie losowym Barabasi Albert $G_m^n$

## 1 Oznaczenia

- $G_m^n$  - graf Barabasi Albert o końcowej liczbie wierzchołków  $n$  oraz  $m$  dodawanych krawędziach do każdego wierzchołka
- $V^+(G)$  - wierzchołki z których krawędzie wychodzą
- $V^-(G)$  - wierzchołki do których krawędzie prowadzą
- $d_G^{in}(v)$  - stopień wejściowy
- $d_G^{out}(v)$  - stopień wyjściowy
- $d_G(v) = d_G^{in}(v) + d_G^{out}(v)$
- $C_G(t)$  - liczba 'przecięć'  $t$ , tj. liczba krawędzi  $(u, v)$  takich że  $u \leq t \leq v$

Uwaga: Pętle dodają jeden do  $d_G^{in}(v)$  oraz jeden do  $d_G^{out}(v)$  i brę

## 2 Metoda

Na podstawie *Mathematical results on scale-free random graphs* (paragraf 15 i 12) mamy wzory wyrażające prawdopodobieństwo  $p_H$  występowanie pewnego podgrafu  $H$  w grafie  $G_1^n$  opisanego jako zbiór krawędzi łączących konkretne wierzchołki:

$$p_H = \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \prod_{ij \in E(H)} \frac{1}{2\sqrt{ij}} \exp(O(\sum_{i \in V(H)} \frac{C_H(i)^2}{i})) \quad (1)$$

Aby opisać graf  $G_m^n$  za pomocą modelu z parametrem  $m = 1$  budujemy graf  $G_1^{m \cdot n}$  taki że każde kolejne  $m$  wierzchołków utożsamiamy jako jeden wierzchołek reprezentujący ten z grafu z dowolną wartością  $m$ .

Wymaganiami podanych wyżej wzorów jest to aby każda krawędź była zorientowana od wierzchołka o większym numerze to do tego z mniejszym oraz liczba krawędzi wychodzących nie była większa niż 1 - wówczas osadzenie takiego podgrafu w grafie losowym jest możliwe.

### 3 Oczekiwana liczba $K_5$

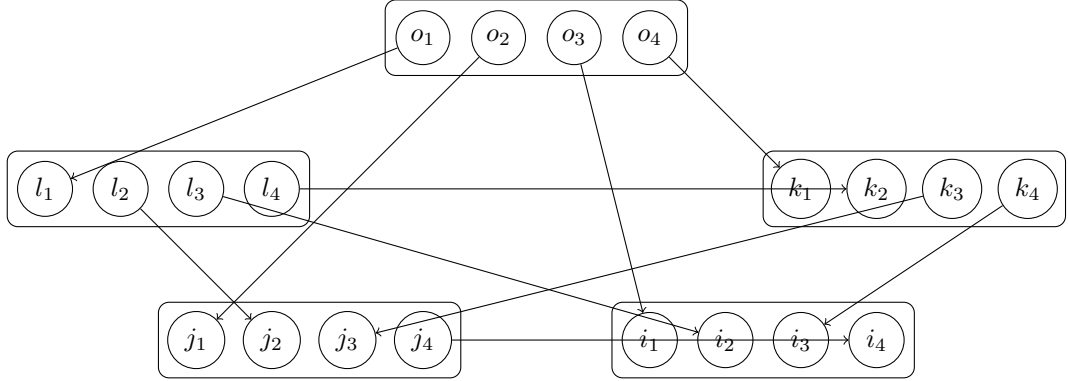
Niech  $a, b, c, d, e$  będą wierzchołkami w  $G_m^n$  tworzącymi potencjalne  $K_5$ . Bierzemy graf  $G = G_1^{n \cdot m}$  oraz graf  $H = K_5$ . Nadajemy oznaczenia. Wówczas:

- $V(G) = \{1, 2, \dots, n \cdot m\}$
- $E(H) = \{(o_{x_1}, i_{y_1}), (o_{x_2}, j_{y_2}), (o_{x_3}, k_{y_3}), (o_{x_4}, l_{y_4}), (l_{x_5}, i_{y_5}), (l_{x_6}, j_{y_6}), (l_{x_7}, k_{y_7}), (k_{x_8}, i_{y_8}), (k_{x_9}, j_{y_9}), (j_{x_{10}}, i_{y_{10}})\}$   
 $a < b < c < d < e$   
 $m \cdot (a - 1) \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq m \cdot a$   
 $m \cdot (b - 1) \leq j_1, j_2, j_3, j_4 \leq m \cdot b$   
 $m \cdot (c - 1) \leq k_1, k_2, k_3, k_4 \leq m \cdot c$   
 $m \cdot (d - 1) \leq l_1, l_2, l_3, l_4 \leq m \cdot d$   
 $m \cdot (e - 1) \leq o_1, o_2, o_3, o_4 \leq m \cdot e$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_5] &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \mathbb{E}[K_5^*] \\ &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \sum_{1 \leq a < b < c < d < e \leq n} \#K_{a,b,c,d,e}^* \cdot p_{K_{a,b,c,d,e}^*} \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie  $K_5^*$  to konkretna instancja  $K_5$  z ustalonymi stopniami wyjściowymi a  $K_{a,b,c,d,e}^*$  to  $K_5^*$  z ustalonymi indeksami wierzchołków na  $a, b, c, d, e$ .

#### 3.1 Przykładowe $K_{a,b,c,d,e}$ dla $m = 4$



### 3.2 Wyznaczanie liczby $K_{a,b,c,d,e}$

Zakładamy że  $m \geq 4$ , ponieważ stopień wyjściowy nie może być większy niż 1 a maksymalna liczba wyjściowych krawędzi ze 'zgrupowanego' wierzchołka to 4.

Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom  $o_x$  możemy przyporządkować na  $m(m-1)(m-2)(m-3)$  sposoby. Żadne krawędzie nie prowadzą do wierzchołków  $o_x$ .

Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom  $l_x$  możemy przyporządkować na  $m(m-1)(m-2)$  sposobów. Do  $l_x$  prowadzi jedna krawędź, której koniec można wybrać na  $m$  sposobów. Wówczas jeden wierzchołek ma stopień 1.

Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom  $k_x$  możemy przyporządkować na  $m(m-1)$  sposobów. Do  $k_x$  prowadzą dwie krawędzie, których końce można wybrać na:

- $m(m-1)$  sposobów, wówczas dwa wierzchołki mają stopień 1.
- $m$  sposobów, wówczas jeden wierzchołek ma stopień 2.

Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom  $j_x$  możemy przyporządkować na  $m$  sposobów. Do  $j_x$  prowadzą 3 krawędzie, których końce można wybrać na:

- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wówczas 3 wierzchołki mają stopień 1.
- $3 \cdot m(m-1)$  sposobów, wówczas 1 wierzchołek ma stopień 2 i 1 ma stopień 1.
- $m$  sposobów, wówczas jeden wierzchołek ma stopień wyjściowy 3.

Żadne krawędzie nie wychodzą z  $i_x$ . Do  $i_x$  prowadzą 4 krawędzie, których końce można wybrać na:

- $m(m-1)(m-2)(m-3)$  sposobów, wówczas 4 wierzchołki mają stopień 1.
- $\frac{1}{2} \cdot m(m-1)(m-2) \cdot \binom{4}{2} \cdot 2$  sposobów, wówczas 2 wierzchołki mają stopień 2 a 2 pozostałe stopień 1.
- $\frac{1}{2} \cdot m(m-1) \cdot \binom{4}{2}$  sposobów, wówczas 1 i 2 wierzchołki ma stopień 2.
- $4 \cdot m(m-1)$  sposobów, wówczas 1 wierzchołek ma stopień wyjściowy 3 i 1 ma stopień 1.
- $m$  sposobów, wówczas jeden wierzchołek ma stopień 4.

Mamy zatem  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$  różnych konfiguracji wyborów końców krawędzi.

### 3.3 Wyznaczanie prawdopodobieństwa $p_{K_{a,b,c,d,e}}$

Ponieważ liczba krawędzi  $H$  jest stała to liczba  $C_H$  jest ograniczona z góry przez stałą. Gdy  $n$  jest wystarczająco duże to ilorazy  $\frac{C_H(i)^2}{i}$  będą bliskie zeru zatem ostatni z 3 czynników iloczynu można zaniedbać:

$$\begin{aligned} p_{K_{a,b,c,d,e}^*} &= \left( \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \frac{1}{2^{10}} \frac{1}{\sqrt{m^{20} a^4 b^4 c^4 d^4 e^4}} \\ &= \left( \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \frac{1}{2^{10}} \frac{1}{m^{10} a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \end{aligned} \quad (3)$$

### 3.4 Wyznaczanie oczekiwanej liczby $K_5$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_5] &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \sum_{1 \leq a < b < c < d < e \leq n} \#K_{a,b,c,d,e}^* \cdot p_{K_{a,b,c,d,e}^*} \\ &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \left( \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \cdot \frac{1}{2^{10} m^{10}} \cdot \#K_{a,b,c,d,e}^* \sum_{1 \leq a < b < c < d < e \leq n} \frac{1}{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \\ &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \left[ \left( \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \cdot \frac{1}{2^{10} m^{10}} \cdot \#K_{a,b,c,d,e}^* \right] \cdot \left( \frac{1}{5!} \right)^2 \cdot (H_n^2)^5 \end{aligned} \quad (4)$$

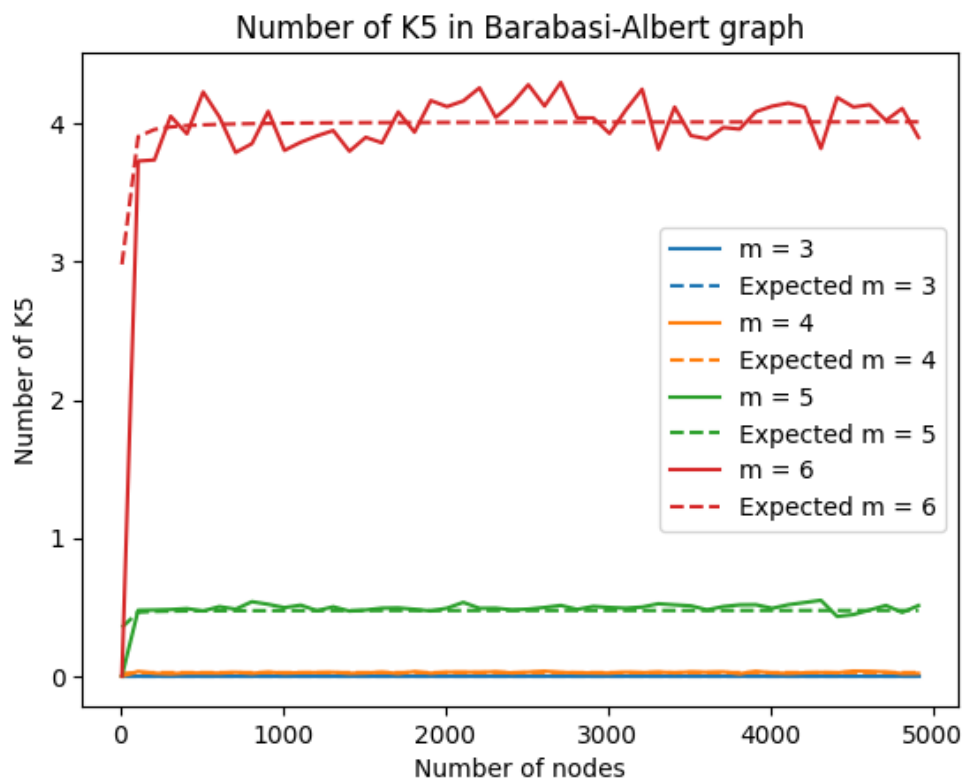
gdzie  $H_n^2$  to  $n$ -ta liczba harmoniczna drugiego rodzaju.

Ostatecznie oczekiwana liczba  $K_5$  w grafie  $G_m^n$  wynosi:

$$\mathbb{E}[K_5] = \frac{(m^2 - 9)(m^2 - 4)^2(m^2 - 1)^3}{14745600m^2} (H_n^2)^5 \quad (5)$$

### 3.5 Eksperyment

Dla stałej  $\eta \approx \frac{1}{6.7}$  tak prezentuje się porównanie teorii  $\eta \cdot \mathbb{E}[K_5]$  i eksperymentu:



Rysunek 1: Porównanie teorii i eksperymentu dla  $K_5$  - 100 prób

## 4 Oczekiwana liczba $K_{3,3}$

Niech  $a, b, c, d, e, f$  będą wierzchołkami w  $G_m^n$  tworzącymi potencjalne  $K_{3,3}$ . Bierzemy graf  $G = G_1^{n \cdot m}$  oraz graf  $H = K_{3,3}$ . Wówczas:

- $V(G) = \{1, 2, \dots, n \cdot m\}$
- Jest 10 różnych ustawień krawędzi w zależności od tego podziału wierzchołków na 2 podzbiory:

$$E(H_1) = \{(p_{x_1}, k_{y_1}), (p_{x_2}, j_{y_2}), (p_{x_3}, i_{y_3}), (o_{x_4}, k_{y_4}), (o_{x_5}, j_{y_5}), (o_{x_6}, i_{y_6}), (l_{x_7}, k_{y_7}), (l_{x_8}, j_{y_8}), (l_{x_9}, i_{y_9})\}$$

$$E(H_2) = \{(p_{x_1}, l_{y_1}), (p_{x_2}, j_{y_2}), (p_{x_3}, i_{y_3}), (o_{x_4}, l_{y_4}), (o_{x_5}, j_{y_5}), (o_{x_6}, i_{y_6}), (k_{x_7}, l_{y_7}), (k_{x_8}, j_{y_8}), (k_{x_9}, i_{y_9})\}$$

$$E(H_3) = \{(p_{x_1}, o_{y_1}), (p_{x_2}, j_{y_2}), (p_{x_3}, i_{y_3}), (l_{x_4}, o_{y_4}), (l_{x_5}, j_{y_5}), (l_{x_6}, i_{y_6}), (k_{x_7}, o_{y_7}), (k_{x_8}, j_{y_8}), (k_{x_9}, i_{y_9})\}$$

$$E(H_4) = \{(o_{x_1}, p_{y_1}), (o_{x_2}, j_{y_2}), (o_{x_3}, i_{y_3}), (l_{x_4}, p_{y_4}), (l_{x_5}, j_{y_5}), (l_{x_6}, i_{y_6}), (k_{x_7}, l_{y_7}), (k_{x_8}, j_{y_8}), (k_{x_9}, i_{y_9})\}$$

$$E(H_5) = \{(p_{x_1}, l_{y_1}), (p_{x_2}, k_{y_2}), (p_{x_3}, i_{y_3}), (o_{x_4}, l_{y_4}), (o_{x_5}, k_{y_5}), (o_{x_6}, i_{y_6}), (j_{x_7}, l_{y_7}), (j_{x_8}, k_{y_8}), (j_{x_9}, i_{y_9})\}$$

$$E(H_6) = \{(p_{x_1}, o_{y_1}), (p_{x_2}, k_{y_2}), (p_{x_3}, i_{y_3}), (l_{x_4}, o_{y_4}), (l_{x_5}, k_{y_5}), (l_{x_6}, i_{y_6}), (j_{x_7}, o_{y_7}), (j_{x_8}, k_{y_8}), (j_{x_9}, i_{y_9})\}$$

$$E(H_7) = \{(o_{x_1}, k_{y_1}), (o_{x_2}, k_{y_2}), (o_{x_3}, i_{y_3}), (l_{x_4}, p_{y_4}), (l_{x_5}, k_{y_5}), (l_{x_6}, i_{y_6}), (j_{x_7}, p_{y_7}), (j_{x_8}, k_{y_8}), (j_{x_9}, i_{y_9})\}$$

$$E(H_8) = \{(p_{x_1}, o_{y_1}), (p_{x_2}, l_{y_2}), (p_{x_3}, i_{y_3}), (k_{x_4}, o_{y_4}), (k_{x_5}, l_{y_5}), (k_{x_6}, i_{y_6}), (j_{x_7}, o_{y_7}), (j_{x_8}, l_{y_8}), (j_{x_9}, i_{y_9})\}$$

$$E(H_9) = \{(o_{x_1}, p_{y_1}), (o_{x_2}, l_{y_2}), (o_{x_3}, i_{y_3}), (k_{x_4}, p_{y_4}), (k_{x_5}, l_{y_5}), (k_{x_6}, i_{y_6}), (j_{x_7}, p_{y_7}), (j_{x_8}, l_{y_8}), (j_{x_9}, i_{y_9})\}$$

$$E(H_{10}) = \{(l_{x_1}, p_{y_1}), (l_{x_2}, o_{y_2}), (l_{x_3}, i_{y_3}), (k_{x_4}, p_{y_4}), (k_{x_5}, o_{y_5}), (k_{x_6}, i_{y_6}), (j_{x_7}, p_{y_7}), (j_{x_8}, o_{y_8}), (j_{x_9}, i_{y_9})\}$$

$$a < b < c < d < e < f$$

$$m \cdot (a - 1) \leq i_1, i_2, i_3 \leq m \cdot a$$

$$m \cdot (b - 1) \leq j_1, j_2, j_3 \leq m \cdot b$$

$$m \cdot (c - 1) \leq k_1, k_2, k_3 \leq m \cdot c$$

$$m \cdot (d - 1) \leq l_1, l_2, l_3 \leq m \cdot d$$

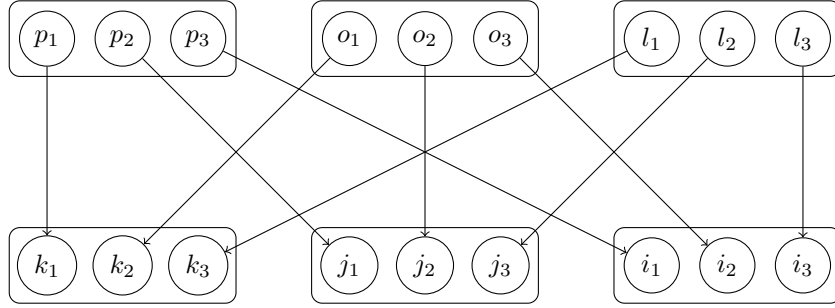
$$m \cdot (e - 1) \leq o_1, o_2, o_3 \leq m \cdot e$$

$$m \cdot (f - 1) \leq p_1, p_2, p_3 \leq m \cdot f$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_{3,3}] &= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \mathbb{E}[K_{3,3}^*] \\ &= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \sum_{1 \leq a < b < c < d < e < f \leq n} \#K_{a,b,c,d,e,f}^* \cdot p_{K_{a,b,c,d,e,f}^*} \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie  $K_{3,3}^*$  to konkretna instancja  $K_{3,3}$  z ustalonymi stopniami wyjściowymi a  $K_{a,b,c,d,e,f}^*$  to  $K_{3,3}^*$  z ustalonymi indeksami wierzchołków na  $a, b, c, d, e, f$ .

#### 4.1 Przykładowe $K_{a,b,c,d,e,f}$ dla $m = 3$



#### 4.2 Wyznaczanie liczby $K_{a,b,c,d,e,f}$

Zakładamy że  $m \geq 3$ , ponieważ stopień wyjściowy nie może być większy niż 1 a maksymalna liczba wyjściowych krawędzi ze 'zgrupowanego' wierzchołka to 3.

##### 4.2.1 $H_1$ , podział na podzbiory: $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z  $p_x, o_x, l_x$  można wybrać na  $[m(m-1)(m-2)]^3$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $k_x, j_x, i_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$  sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

##### 4.2.2 $H_2$ , podział na podzbiory: $\{a, b, d\}, \{c, e, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z  $p_x, o_x, l_x, k_x$  można wybrać na  $[m(m-1)(m-2)]^2 mm(m-1)$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do  $l_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 2.
- $m(m-1)$  sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do  $k_x$  można wybrać na  $m$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $j_x, i_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$  sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

#### 4.2.3 $H_3$ , podział na podzbiory: $\{a, b, e\}, \{c, d, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z  $p_x, o_x, l_x, k_x$  można wybrać na  $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^3$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $o_x, l_x, k_x$  można wybrać na  $m$  sposobów. Końce prowadzące do  $j_x, i_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$  sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

#### 4.2.4 $H_4$ , podział na podzbiory: $\{a, b, f\}, \{c, d, e\}$

Początki krawędzi wychodzących z  $p_x, o_x, l_x, k_x$  można wybrać na  $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^3$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $o_x, l_x, k_x$  można wybrać na  $m$  sposobów. Końce prowadzące do  $j_x, i_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$  sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

#### 4.2.5 $H_5$ , podział na podzbiory: $\{a, c, d\}, \{b, e, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z  $p_x, o_x, l_x, k_x, j_x$  można wybrać na  $[m(m-1)(m-2)]^2 m^3$  sposoby. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $l_x, k_x, j_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$  sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do  $i_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$  sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

#### 4.2.6 $H_6$ , podział na podzbiory: $\{a, c, e\}, \{b, d, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z  $p_x, o_x, l_x, k_x, j_x$  można wybrać na  $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^2 m^2$  sposoby. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $o_x, l_x$  można wybrać na  $m$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $k_x, j_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$  sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.



Końce krawędzi prowadzących do  $i_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$  sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

#### 4.2.7 $H_7$ , podział na podzbiory: $\{a, c, f\}, \{b, d, e\}$

Początki krawędzi wychodzących z  $p_x, o_x, l_x, k_x, j_x$  można wybrać na  $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^2m^2$  sposoby. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $o_x, l_x$  można wybrać na  $m$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $k_x, j_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$  sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do  $i_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$  sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

#### 4.2.8 $H_8$ , podział na podzbiory: $\{a, d, e\}, \{b, c, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z  $p_x, o_x, l_x, k_x, j_x$  można wybrać na  $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^2m^2$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $o_x, l_x$  można wybrać na  $m$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $k_x, j_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$  sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do  $i_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$  sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

#### 4.2.9 $H_9$ , podział na podzbiory: $\{a, d, f\}, \{b, c, e\}$

Początki krawędzi wychodzących z  $p_x, o_x, l_x, k_x, j_x$  można wybrać na  $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^2m^2$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $o_x, l_x$  można wybrać na  $m$  sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $k_x, j_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$  sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do  $i_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$  sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

#### 4.2.10 $H_{10}$ , podział na podzbiory: $\{a, e, f\}, \{b, c, d\}$

Początki krawędzi wychodzących z  $p_x, o_x, l_x, k_x, j_x$  można wybrać na  $[m(m-1)(m-2)]^2m^3$  sposoby. Końce krawędzi prowadzących do jednego z  $l_x, k_x, j_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$  sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do  $i_x$  można wybrać na:

- $m$  sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$  sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$  sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

Przypadki  $H_3, H_4$  oraz  $H_6, H_7, H_8, H_9$  są tożsame.

### 4.3 Wyznaczanie prawdopodobieństwa $p_{K_{a,b,c,d,e,f}}$

Ponieważ liczba krawędzi  $H$  jest stała to liczba  $C_H$  jest ograniczona z góry przez stałą. Gdy  $n$  jest wystarczająco duże to ilorazy  $\frac{C_H(i)^2}{i}$  będą bliskie zeru zatem ostatni z 3 czynników iloczynu można zaniedbać:

$$\begin{aligned} p_{K_{a,b,c,d,e,f}}^* &= \left( \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \frac{1}{2^9} \frac{1}{\sqrt{m^{18} a^3 b^3 c^3 d^3 e^3 f^3}} \\ &= \left( \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \frac{1}{2^9} \frac{1}{m^9 a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} f^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (7)$$

#### 4.4 Wyznaczanie oczekiwanej liczby $K_{3,3}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[K_{3,3}] &= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \sum_{1 \leq a < b < c < d < e < f \leq n} \#K_{a,b,c,d,e,f}^* \cdot p_{K_{a,b,c,d,e,f}^*} \\
&= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \left( \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \cdot \frac{1}{2^9 m^9} \\
&\quad \cdot \#K_{a,b,c,d,e,f}^* \sum_{1 \leq a < b < c < d < e < f \leq n} \frac{1}{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} f^{\frac{3}{2}}} \\
&= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \left[ \left( \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \cdot \frac{1}{2^9 m^9} \cdot \#K_{a,b,c,d,e,f}^* \right] \cdot \left( \frac{1}{6!} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot (H_n^{\frac{3}{2}})^6
\end{aligned} \tag{8}$$

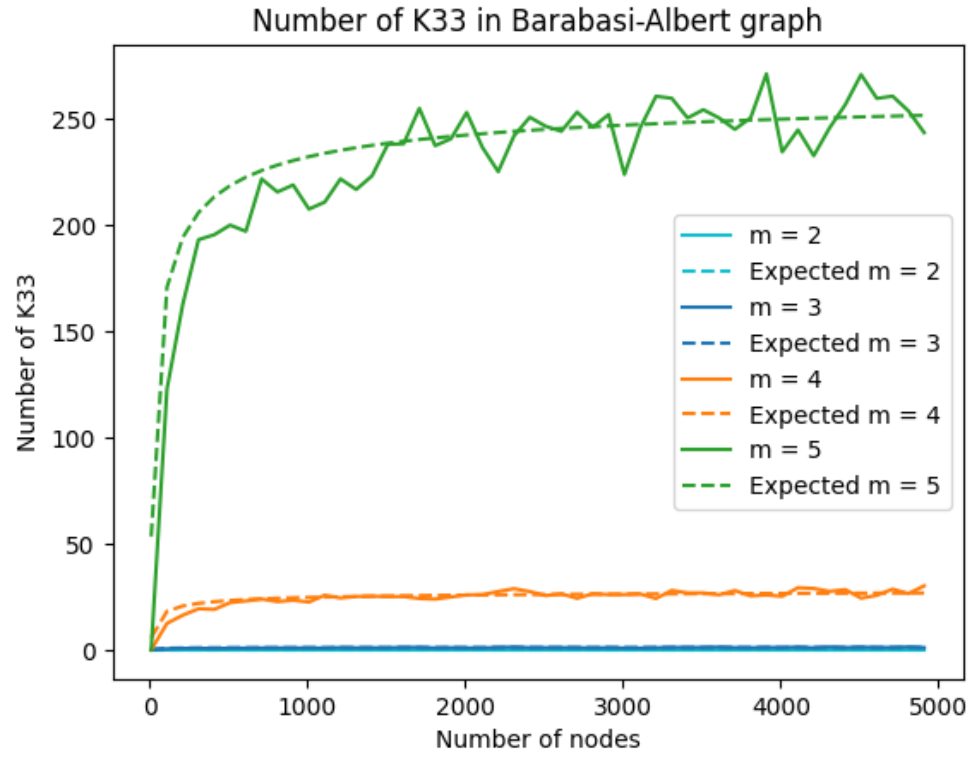
gdzie  $H_n^{\frac{3}{2}}$  to n-ta liczba harmoniczna rodzaju  $\frac{3}{2}$ .

Ostatecznie oczekiwana liczba  $K_{3,3}$  w grafie  $G_m^n$  wynosi:

$$\mathbb{E}[K_{3,3}] = \frac{(m^2 - 1)^2 (5m^8 - 35m^6 + 74m^4 - 64m^2 + 32)}{2211840 \sqrt{5} m^3} (H_n^{\frac{3}{2}})^6 \tag{9}$$

## 4.5 Eksperyment

Dla stałej  $\eta \approx \frac{1}{1.6}$  tak prezentuje się porównanie teorii  $\eta \cdot \mathbb{E}[K_{3,3}]$  i eksperymentu:



Rysunek 2: Porównanie teorii i eksperymentu dla  $K_{3,3}$  - 100 prób

## 5 Oczekiwana liczba podgrafów będących podziałami pewnego grafu $F$

Podpodziały powstają poprzez dodawanie wierzchołków stopnia 2 na istniejących krawędziach.

Niech  $v_1, \dots, v_k$ , będą wierzchołkami w  $G_m^n$  tworzącymi potencjalny podpodział  $F$ . Bierzemy graf  $G = G_1^{n \cdot m}$  oraz graf  $H$  będący pewnym podpodziałem  $F$ .

### 5.1 Wyznaczanie liczby podpodziałów $F$ zbudowanych na $k$ wierzchołkach

Spśród wierzchołków  $v_1, \dots, v_k$  wybieramy  $|V(F)|$  wierzchołków, które stworzą graf  $F$ . Robimy to na  $\binom{k}{|V(F)|}$  sposobów. Następnie pozostałe wierzchołki rozdzielamy na  $|E(F)|$  krawędzi. Rozdzielen tych wierzchołków na  $|E(F)|$  grup jest  $\binom{k' + |E(F)| - 1}{|E(F)| - 1}$ , gdzie  $k' = k - |V(F)|$ . Każdy podział daje nam rozbitcie  $k' = k_1 + k_2 + \dots + k_{|E(F)|}$ , gdzie  $k_i$  to liczba wierzchołków przyporządkowana do  $i$ -tej krawędzi. Następnie podział na dane rozbitcie możemy zrealizować na  $\frac{k'!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_{|E(F)|}!}$  sposobów. Wierzchołki w każdej krawędzi można ustawić na  $k_i!$  sposobów. Zatem różnych podziałów jest:

$$\binom{k' + |E(F)| - 1}{|E(F)| - 1} \cdot \frac{k'!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_{|E(F)|}!} \cdot k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_{|E(F)|}! = \binom{k' + |E(F)| - 1}{|E(F)| - 1} \cdot k'! \quad (10)$$

Więc różnych podpodziałów  $F$  jest:

$$\#F_k = \binom{k}{|V(F)|} \cdot \#F \cdot \binom{k - |V(F)| + |E(F)| - 1}{|E(F)| - 1} \cdot (k - |V(F)|)! \quad (11)$$

### 5.2 Wyznaczanie prawdopodobieństwa $p_{F_k}$

Dodanie ciągu wierzchołków stopnia 2 na krawędziach grafu  $F$  w rozważanym modelu dodaje nam 'zgrupowane' wierzchołki, które mają:

1. jeden stopień wejściowy i jeden stopień wyjściowy, dla wierzchołków których jeden sąsiad ma wyższy numer a drugi niższy.
2. dwa stopnie wyjściowe, dla wierzchołków których obaj sąsiedzi mają niższe numery.
3. dwa stopnie wejściowe, dla wierzchołków których obaj sąsiedzi mają wyższe numery.

W 1. przypadku mamy  $m \cdot m$  możliwości, w 2.  $m \cdot (m - 1)$  a w 3.  $m \cdot m$ . W pierwszym i drugim przypadku stopnie wejściowe nie przekraczają 1, w trzecim przypadku nie przekraczają 1. W 3. przypadku jest  $m$  sytuacji, gdzie stopień wejściowy wynosi 2 a w pozostałych  $m(m - 1)$  2 stopnie wynoszą 1.

### 5.2.1 Oczekiwana liczba przypadków 1., 2., 3.

Dla każdego wierzchołka  $i$  niebędącego w  $V(F)$  definiujemy zmienną losową  $X_i^w$  taką, że:

- 1, gdy  $i$  spełnia warunek z punktu  $w$
- 0, w przeciwnym przypadku

Oczekiwana liczba wierzchołków spełniających warunek  $w$  wynosi  $\mathbb{E}[X_i^w] = \frac{1}{3}$ , ponieważ dany wierzchołek  $i$  i jego sąsiedztwo reprezentują 3 różne liczby. Mogą one być w relacji ze sobą na 6 sposobów, z których 2 spełniają warunek 1., 2. lub 3. Wówczas oczekiwana liczba wierzchołków spełniających warunek 3. wynosi (zakładamy niezależność zmiennych losowych):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{i \notin V(F)} X_i^w\right] &= \sum_{i \notin V(F)} \mathbb{E}[X_i^w] \\ &= \frac{k - |V(F)|}{3} \end{aligned} \quad (12)$$

Dodanie wierzchołków stopnia 2 wpływa na stopnie grafu  $F$ , ale że  $F$  jest mały to wpływ jest znikomy.

Należy także określić liczbę  $C_{F_k}$  - liczbę krawędzi  $(i, j)$  takich, że  $i \leq t \leq j$ . Dla każdego wierzchołka  $t$  z  $V(F)$  mamy maksymalnie  $t - 1$  wierzchołków o numerach mniejszych od  $t$  oraz  $k - t$  wierzchołków o numerach większych od  $t$  co przekłada się na prawdopodobieństwo  $\frac{t-1}{k} \cdot \frac{k-t}{k-1}$  trafienia na parę zliczaną przez  $C_{F_k}$ . Maksymalnie takich par może być  $k - 1$  zatem oczekiwana liczba  $C_{F_k}$  wynosi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_{F_k}] &= (k - 1) \cdot \frac{t - 1}{k} \cdot \frac{k - t}{k - 1} \\ &= \frac{(t - 1)(k - t)}{k} \end{aligned} \quad (13)$$

Co przekłada się na:

$$\begin{aligned} O(\exp(\sum_{t \in V(F_k)} \frac{C_{F_k}(t)^2}{t})) &= O(\exp(\sum_{t=1}^k \frac{(t-1)^2(k-t)^2}{k^2})) \\ &= O(\exp(k^2)), \end{aligned} \quad (14)$$

Ale formułę z notacją  $O(\cdot)$  można zamienić na dokładną formułę:

$$p_H = \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \prod_{v \in V^+(H)} \frac{1}{2v-1} \prod_{v \notin V^+(H)} (1 + \frac{C_H(v)}{2v-1}) \quad (15)$$

Wtedy ostatni czynnik można zapisać jako

$$\begin{aligned}
\prod_{t \notin V^+(H)} \left(1 + \frac{(t-1)(k-t)}{2t-1}\right) &= \prod_{t \notin V^+(H)} \left(1 + \frac{k-t}{2k}\right) \\
&= \prod_{t \notin V^+(H)} \left(\frac{3}{2} - \frac{t}{2k}\right) \\
&\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{k}{2}}
\end{aligned} \tag{16}$$

Mając konkretne ustawienie  $k$  wierzchołków wyznaczamy  $p_{F_k}$  przemnożone dla różnych rozłożeń stopni. Na podstawie opisanych wyżej 3. przypadków mamy 2 możliwości rozdziału stopni.

**Wszystkie stopnie są nie większe niż 1:**

Jest ich  $(m^2)^{\frac{k'}{3}} \cdot (m(m-1))^{\frac{k'}{3}} \cdot (m(m-1))^{\frac{k'}{3}} = (m^4(m-1)^2)^{\frac{k'}{3}} \approx (m^2)^{k'}$

$$p_{F_k^1} = \frac{1}{2^{k'}} \cdot \frac{1}{v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_{k'}} \cdot m^{k'}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{k'}{3}} \tag{17}$$

**Występują stopnie 2 - opisane w przypadku 3.:**

Jest ich  $(m^2)^{\frac{k'}{3}} \cdot (m(m-1))^{\frac{k'}{3}} \cdot m^{\frac{k'}{3}} = (m^4(m-1))^{\frac{k'}{3}} \approx (m^{\frac{5}{3}})^{k'}$

$$p_{F_k^2} = 2^{\frac{k'}{3}} \cdot \frac{1}{2^{k'}} \cdot \frac{1}{v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_{k'}} \cdot m^{k'}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{k'}{3}} \tag{18}$$

Co możemy połączyć w jedno wyrażenie określające oczekiwane  $F_k$  dla konkretnego ustawienia wierzchołków  $v_1, \dots, v_k$  -  $\mathbb{E}[F_k^{\#}]$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F_k^{\#}] &= (m^2)^{k'} \cdot \frac{1}{2^{k'}} \cdot \frac{1}{v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_{k'}} \cdot m^{k'}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{k'}{3}} \\
&\quad + (m^{\frac{5}{3}})^{k'} \cdot 2^{\frac{k'}{3}} \cdot \frac{1}{2^{k'}} \cdot \frac{1}{v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_{k'}} \cdot m^{k'}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{k'}{3}} \\
&= (m^{k'} + (2m^2)^{\frac{k'}{3}}) \cdot \frac{1}{2^{k'}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{k'}{3}} \cdot \frac{1}{v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_{k'}}}
\end{aligned} \tag{19}$$

Gdy  $v_{i_1} < \dots < v_{i_{k'}}$  wybierzemy z  $n$  wierzchołków to otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F_k^*] &= \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_k \leq n} \mathbb{E}[F_k^{\#}] \\
&= (m^{k'} + (2m^2)^{\frac{k'}{3}}) \cdot \frac{1}{2^{k'}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{k'}{3}} \cdot \frac{1}{k!} \cdot H_n^{k'} \\
&= (m^{k'} + (2m^2)^{\frac{k'}{3}}) \cdot \frac{1}{2^{k'}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{k'}{3}} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \log_2(n)^{k'}
\end{aligned} \tag{20}$$

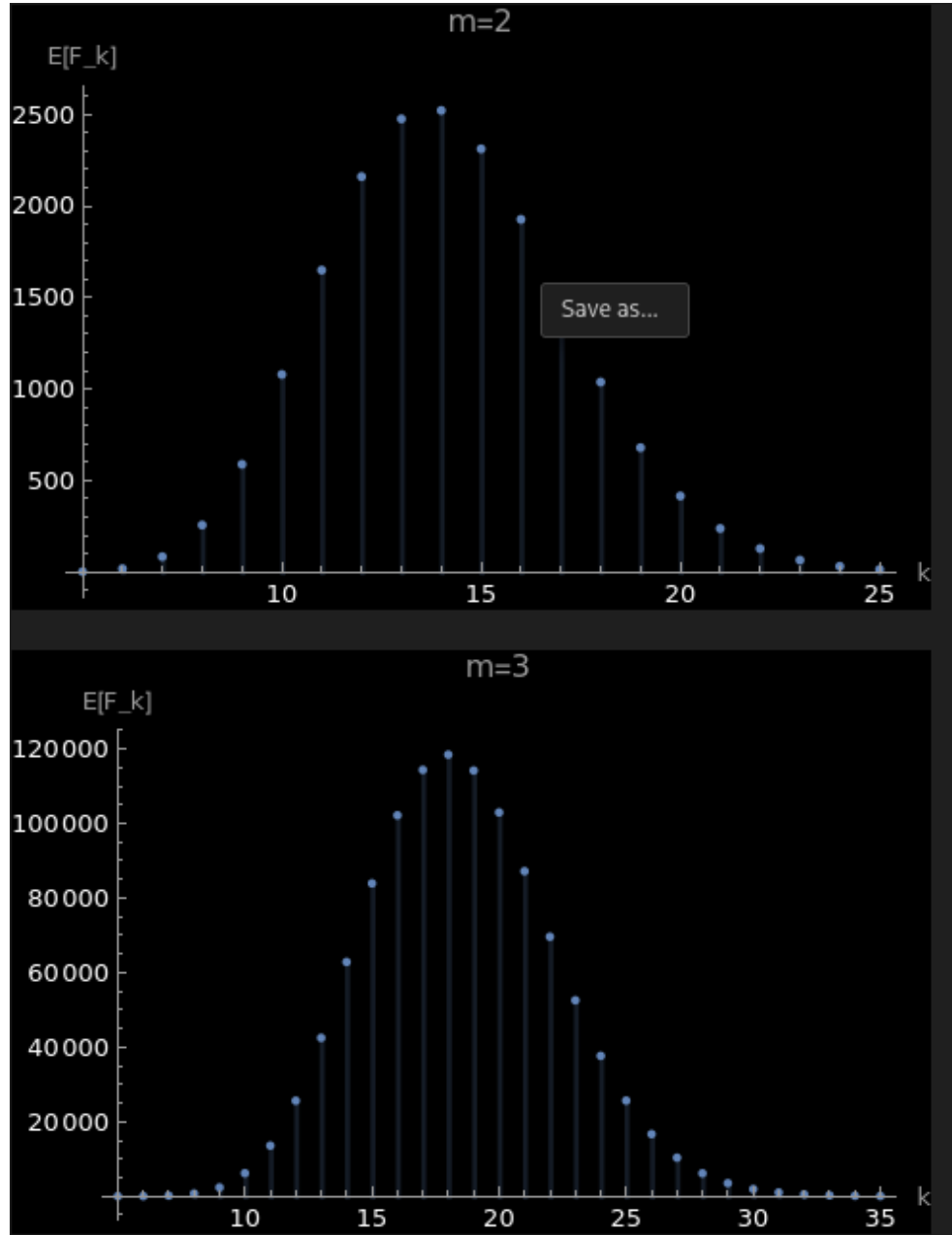
### 5.3 Wyznaczanie oczekiwanej liczby $F_k$

Wystarczy już tylko przemnożyć  $\mathbb{E}[F_k^*]$  przez  $\#F_k$  i zsumować po  $k = 1, \dots, n$ :

$$\mathbb{E}[F] = \sum_{k=1}^n \#F_k \cdot \mathbb{E}[F_k^*] \tag{21}$$

#### 5.4 Wizualizacja $\mathbb{E}[F_k^*]$

Zmiana wartości dla różnych  $k \in \{1, \dots, 25\}$  dla  $m = 2$  i  $n = 1000$ :





## 6 Obserwacje

- Model BA nie jest skłonny do planarności
- Dla  $m = 1$  w grafie nie powstają cykle, więc nie ma powodów do nieplanarności
- Dla  $m > 1$  grafy szybko stają się nieplanarne
- Powodem nieplanarności częściej są podpodziały  $K_{3,3}$  niż  $K_5$
- Podpodziałami najczęściej występującymi są te zbudowane na  $(\log_2(n) + 5) \cdot O(m^x)$  albo  $(\log_2(n) + 5) + O(m^x)$  wierzchołkach - obserwacja ostatnich wizualizacji. Zatem podpodziałów należy szukać w podgrafach rozmiarów  $O(\log_2(n))$ .