# Oczekiwana liczba podgrafów Kuratowskiego w grafie losowym Barabasi Albert $G_m^n$

## 1 Oznaczenia

- $G_m^n$ - graf Barabasi Albert o końcowej liczbie wierzchołków $n$ oraz $m$ dodawanych krawędziach do każdego wierzchołka
- $V^+(G)$ - wierzchołki z których krawędzie wychodzą
- $V^-(G)$ - wierzchołki do których krawędzie prowadzą
- $d_G^{in}(v)$ - stopień wejściowy
- $d_G^{out}(v)$ - stopień wyjściowy
- $d_G(v) = d_G^{in}(v) + d_G^{out}(v)$
- $C_G(t)$ - liczba 'przecięć' $t$, tj. liczba krawędzi $(u, v)$ takich że $u \leq t \leq v$

Uwaga: Pętle dodają jeden do $d_G^{in}(v)$ oraz jeden do $d_G^{out}(v)$ ¡br¿

## 2 Metoda

Na podstawie *Mathematical results on scale-free random graphs* (paragraf 15 i 12) mamy wzory wyrażające prawdopodobieństwo $p_H$ występowanie pewnego podgrafu $H$ w grafie $G_1^n$ opisanego jako zbiór krawędzi łączących konkretne wierzchołki:

$$p_H = \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \prod_{ij \in E(H)} \frac{1}{2\sqrt{ij}} \exp(O(\sum_{i \in V(H)} \frac{C_H(i)^2}{i})) \tag{1}$$

Aby opisać graf $G_m^n$ za pomocą modelu z parametrem $m = 1$ budujemy graf $G_1^{m \cdot n}$ taki że każde kolejne $m$ wierzchołków utożsamiamy jako jeden wierzchołek reprezentujący ten z grafu z dowolną wartością $m$.
Wymaganiami podanych wyżej wzorów jest to aby każda krawędź była zorientowana od wierzchołka o większym numerze to do tego z mniejszym oraz liczba krawędzi wychodzących nie była większa niż 1 - wówczas osadzenie takiego podgrafu w grafie losowym jest możliwe.

## 3 Oczekiwana liczba $K_5$

Niech $a$,$b$,$c$,$d$,$e$ będą wierzchołkami w $G_m^n$ tworzącymi potencjalne $K_5$. Bierzemy graf $G = G_1^{n \cdot m}$ oraz graf $H = K_5$. Nadajemy oznaczenia. Wówczas:

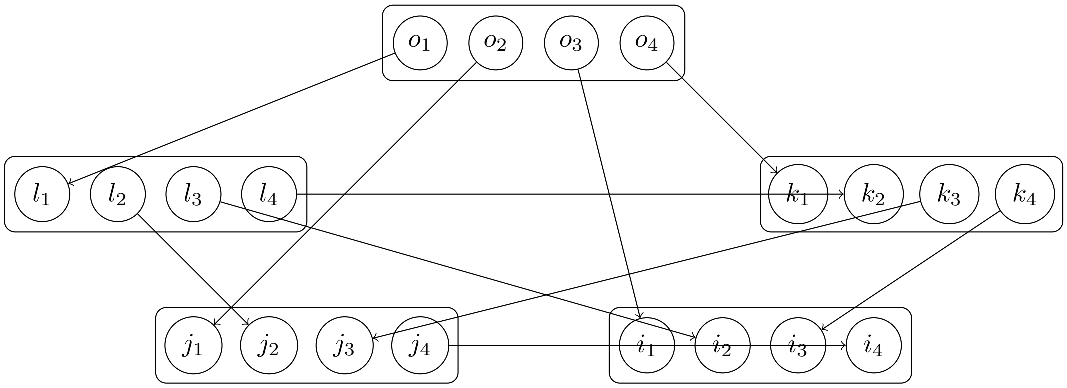
- $V(G) = \{1, 2, \ldots n \cdot m\}$
- $E(H) = \{(o_{x_1}, i_{y_1}), (o_{x_2}, j_{y_2}), (o_{x_3}, k_{y_3}), (o_{x_4}, l_{y_4}), (l_{x_5}, i_{y_5}), (l_{x_6}, j_{y_6}), (l_{x_7}, k_{y_7}), (k_{x_8}, i_{y_8}), (k_{x_9}, j_{y_9}), (j_{x_{10}}, i_{y_{10}})\}$

$$a < b < c < d < e$$
$$m \cdot (a - 1) \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq m \cdot a$$
$$m \cdot (b - 1) \leq j_1, j_2, j_3, j_4 \leq m \cdot b$$
$$m \cdot (c - 1) \leq k_1, k_2, k_3, k_4 \leq m \cdot c$$
$$m \cdot (d - 1) \leq l_1, l_2, l_3, l_4 \leq m \cdot d$$
$$m \cdot (e - 1) \leq o_1, o_2, o_3, o_4 \leq m \cdot e$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_5] &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \mathbb{E}[K_5^*] \\ &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \sum_{1 \leq a < b < c < d < e \leq n} \#K^*_{a,b,c,d,e} \cdot p_{K^*_{a,b,c,d,e}} \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $K_5^*$ to konkretna instancja $K_5$ z ustalonymi stopniami wyjściowymi a $K^*_{a,b,c,d,e}$ to $K_5^*$ z ustalonymi indeksami wierzchołków na $a, b, c, d, e$.

### 3.1 Przykładowe $K_{a,b,c,d,e}$ dla $m = 4$



### 3.2 Wyznaczanie liczby $K_{a,b,c,d,e}$

Zakładamy że $m \geq 4$, ponieważ stopień wyjściowy nie może być większy niż 1 a maksymalna liczba wyjściowych krawędzi ze 'zgrupowanego' wierzchołka to 4.

Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom $o_x$ możemy przyporządkować na $m(m-1)(m-2)(m-3)$ sposoby. Żadne krawędzie nie prowadzą do wierzchołków $o_x$.
Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom $l_x$ możemy przyporządkować na $m(m-1)(m-2)$ sposobów. Do $l_x$ prowadzi jedna krawędź, której koniec można wybrać na $m$ sposobów. Wówczas jeden wierzchołek ma stopień 1.
Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom $k_x$ możemy przyporządkować na $m(m-1)$ sposobów. Do $k_x$ prowadzą dwie krawędzie, których końce można wybrać na:

- $m(m-1)$ sposobów, wówczas dwa wierzchołki mają stopień 1.
- $m$ sposobów, wówczas jeden wierzchołek ma stopień 2.

Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom $j_x$ możemy przyporządkować na $m$ sposobów. Do $j_x$ prowadzą 3 krawędzie, których końce można wybrać na:

- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wówczas 3 wierzchołki mają stopień 1.
- $3 \cdot m(m-1)$ sposobów, wówczas 1 wierzchołek ma stopień 2 i 1 ma stopień 1.
- $m$ sposobów, wówczas jeden wierzchołek ma stopień wyjściowy 3.

Żadne krawędzie nie wychodzą z $i_x$. Do $i_x$ prowadzą 4 krawędzie, których końce można wybrać na:

- $m(m-1)(m-2)(m-3)$ sposobów, wówczas 4 wierzchołki mają stopień 1.
- $\frac{1}{2} \cdot m(m-1)(m-2) \cdot \binom{4}{2} \cdot 2$ sposobów, wówczas 2 wierzchołki mają stopień 2 a 2 pozostałe stopień 1.
- $\frac{1}{2} \cdot m(m-1) \cdot \binom{4}{2}$ sposobów, wówczas 1 i 2 wierzchołek ma stopień 2.
- $4 \cdot m(m-1)$ sposobów, wówczas 1 wierzchołek ma stopień wyjściowy 3 i 1 ma stopień 1.
- $m$ sposobów, wówczas jeden wierzchołek ma stopień 4.

Mamy zatem $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ różnych konfiguracji wyborów końców krawędzi.

### 3.3 Wyznaczanie prawdopodobieństwa $p_{K_{a,b,c,d,e}}$

Ponieważ liczba krawędzi $H$ jest stała to liczba $C_H$ jest ograniczona z góry przez stałą. Gdy $n$ jest wystarczająco duże to ilorazy $\frac{C_H(i)^2}{i}$ będą bliskie zeru zatem ostatni z 3 czynników iloczynu można zaniedbać:

$$
\begin{aligned}
p_{K^*_{a,b,c,d,e}} &= \Big(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)!\Big) \frac{1}{2^{10}} \frac{1}{\sqrt{m^{20} a^4 b^4 c^4 d^4 e^4}} \\
&= \Big(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)!\Big) \frac{1}{2^{10}} \frac{1}{m^{10} a^2 b^2 c^2 d^2 e^2}
\end{aligned} \tag{3}
$$

### 3.4 Wyznaczanie oczekiwanej liczby $K_5$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[K_5] &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \sum_{1 \le a < b < c < d < e \le n} \# K^*_{a,b,c,d,e} \cdot p_{K^*_{a,b,c,d,e}} \\
&= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \Big(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)!\Big) \cdot \frac{1}{2^{10} m^{10}} \cdot \# K^*_{a,b,c,d,e} \sum_{1 \le a < b < c < d < e \le n} \frac{1}{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \\
&= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \Big[\Big(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)!\Big) \cdot \frac{1}{2^{10} m^{10}} \cdot \# K^*_{a,b,c,d,e}\Big] \cdot \Big(\frac{1}{5!}\Big)^2 \cdot (H_n^2)^5
\end{aligned} \tag{4}
$$

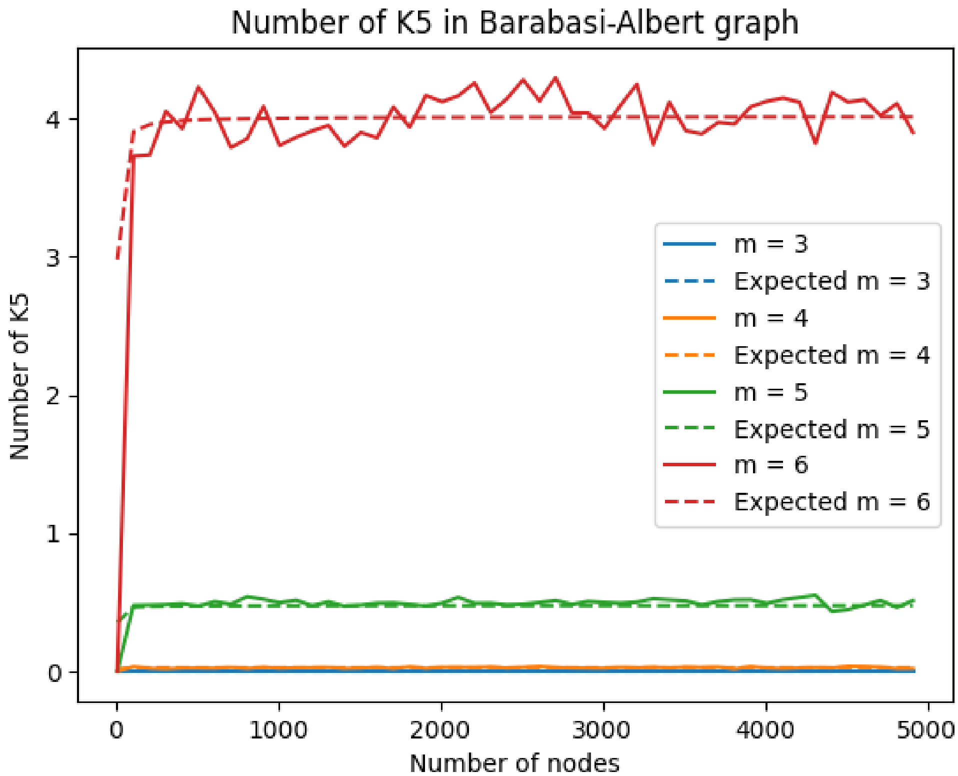
gdzie $H_n^2$ to n-ta liczba harmoniczna drugiego rodzaju.

Ostatecznie oczekiwana liczba $K_5$ w grafie $G_m^n$ wynosi:

$$
\mathbb{E}[K_5] = \frac{(m^2-9)(m^2-4)^2(m^2-1)^3}{14745600 m^2} (H_n^2)^5 \tag{5}
$$

### 3.5 Eksperyment

Dla stałej $\eta \approx \frac{1}{6.7}$ tak prezentuje się porównanie teorii $\eta \cdot \mathbb{E}[K_5]$ i eksperymentu:



## 4 Oczekiwana liczba $K_{3,3}$

Niech $a, b, c, d, e, f$ będą wierzchołkami w $G_m^n$ tworzącymi potencjalne $K_{3,3}$. Bierzemy graf $G = G_1^{n \cdot m}$ oraz graf $H = K_{3,3}$. Wówczas:

- $V(G) = \{1, 2, \dots n \cdot m\}$
- Jest 10 różnych ustawień krawędzi w zależności od tego podziału wierzchołków na 2 podzbiory:

  $E(H_1) = \{(p_{x_1}, a_{y_1}), (p_{x_2}, b_{y_2}), (p_{x_3}, c_{y_3}), (o_{x_4}, a_{y_4}), (o_{x_5}, b_{y_5}), (o_{x_6}, c_{y_6}), (l_{x_7}, a_{y_7}), (l_{x_8}, b_{y_8}), (l_{x_9}, c_{y_9})\}$

  $E(H_2) = \{\}$

  $E(H_3) = \{\}$

  $E(H_4) = \{\}$

  $E(H_5) = \{\}$

  $E(H_6) = \{\}$

  $E(H_7) = \{\}$

  $E(H_8) = \{\}$

  $E(H_9) = \{\}$

  $E(H_{10}) = \{\}$

  $a < b < c < d < e < f$

  $m \cdot (a-1) \leq i_1, i_2, i_3 \leq m \cdot a$

  $m \cdot (b-1) \leq j_1, j_2, j_3 \leq m \cdot b$

  $m \cdot (c-1) \leq k_1, k_2, k_3 \leq m \cdot c$

  $m \cdot (d-1) \leq l_1, l_2, l_3 \leq m \cdot d$

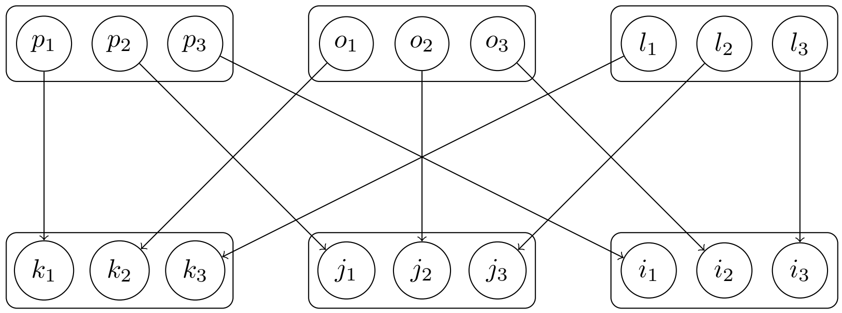
  $m \cdot (e-1) \leq o_1, o_2, o_3 \leq m \cdot e$

  $m \cdot (f-1) \leq p_1, p_2, p_3 \leq m \cdot f$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_{3,3}] &= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \mathbb{E}[K_{3,3}^*] \\ &= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \sum_{1 \leq a<b<c<d<e<f \leq n} \# K_{a,b,c,d,e,f}^* \cdot p_{K_{a,b,c,d,e,f}^*} \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $K_{3,3}^*$ to konkretna instancja $K_{3,3}$ z ustalonymi stopniami wyjściowymi a $K_{a,b,c,d,e,f}^*$ to $K_{3,3}^*$ z ustalonymi indeksami wierzchołków na $a, b, c, d, e, f$.

### 4.1 Przykładowe $K_{a,b,c,d,e,f}$ dla $m = 3$




### 4.2 Wyznaczanie liczby $K_{a,b,c,d,e,f}$

Zakładamy że $m \geq 3$, ponieważ stopień wyjściowy nie może być większy niż 1 a maksymalna liczba wyjściowych krawędzi ze 'zgrupowanego' wierzchołka to 3.

#### 4.2.1 $H_1$, podział na podzbiory: $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z $p_x, o_x, l_x$ można wybrać na $[m(m-1)(m-2)]^3$ sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z $k_x, j_x, i_x$ można wybrać na:

- $m$ sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopien wynosi 1.

#### 4.2.2 $H_2$, podział na podzbiory: $\{a, b, d\}, \{c, e, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z $p_x, o_x, l_x, k_x$ można wybrać na $[m(m-1)(m-2)]^2 mm(m-1)$ sposobów. Końce krawędzi prowadzących do $l_x$ można wybrać na:

- $m$ sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 2.
- $m(m-1)$ sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do $k_x$ można wybrać na $m$ sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z $j_x, i_x$ można wybrać na:

- $m$ sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopien wynosi 1.

#### 4.2.3 $H_3$, podział na podzbiory: $\{a, b, e\}, \{c, d, f\}$

#### 4.2.4 $H_4$, podział na podzbiory: $\{a, b, f\}, \{c, d, e\}$

#### 4.2.5 $H_5$, podział na podzbiory: $\{a, c, d, \}, \{b, e, f\}$

#### 4.2.6 $H_6$, podział na podzbiory: $\{a, c, e\}, \{b, d, f\}$

#### 4.2.7 $H_7$, podział na podzbiory: $\{a, c, f\}, \{b, d, e\}$

#### 4.2.8 $H_8$, podział na podzbiory: $\{a, d, e\}, \{b, c, f\}$

#### 4.2.9 $H_9$, podział na podzbiory: $\{a, d, f\}, \{b, c, e\}$

#### 4.2.10 $H_{10}$, podział na podzbiory: $\{a, e, f\}, \{b, c, d\}$

### 4.3 Wyznaczanie prawdopodobieństwa $p_{K_{a,b,c,d,e,f}}$

Ponieważ liczba krawędzi $H$ jest stała to liczba $C_H$ jest ograniczona z góry przez stałą. Gdy $n$ jest wystarczająco duże to ilorazy $\frac{C_H(i)^2}{i}$ będą bliskie zeru zatem ostatni z 3 czynników iloczynu można zaniedbać:

$$\begin{aligned} p_{K^*_{a,b,c,d,e,f}} &= \Big(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)!\Big)\frac{1}{2^9}\frac{1}{\sqrt{m^{18}a^3b^3c^3d^3e^3f^3}} \\ &= \Big(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)!\Big)\frac{1}{2^9}\frac{1}{m^9 a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} f^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{7}$$

### 4.4 Wyznaczanie oczekiwanej liczby $K_{3,3}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_{3,3}] &= \sum_{K^*_{3,3} \in \mathbb{K}_{3,3}} \sum_{1 \le a<b<c<d<e<f \le n} \#K^*_{a,b,c,d,e,f} \cdot p_{K^*_{a,b,c,d,e,f}} \\ &= \sum_{K^*_{3,3} \in \mathbb{K}_{3,3}} \Big(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)!\Big) \cdot \frac{1}{2^9 m^9} \\ &\quad \cdot \#K^*_{a,b,c,d,e,f} \sum_{1 \le a<b<c<d<e<f \le n} \frac{1}{a^2b^2c^2d^2e^2} \\ &= \sum_{K^*_{3,3} \in \mathbb{K}_{3,3}} \Big[\Big(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)!\Big) \cdot \frac{1}{2^9 m^9} \cdot \#K^*_{a,b,c,d,e,f}\Big] \cdot \Big(\frac{1}{6!}\Big)^{\frac{3}{2}} \cdot (H_n^{\frac{3}{2}})^6 \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie $H_n^{\frac{3}{2}}$ to n-ta liczba harmoniczna rodzaju $\frac{3}{2}$.

Ostatecznie oczekiwana liczba $K_{3,3}$ w grafie $G_m^n$ wynosi:

$$\mathbb{E}[K_{3,3}] = (H_n^{\frac{3}{2}})^6 \tag{9}$$

## 4.5 Eksperyment

# 5 Oczekiwana liczba podgrafów będących podpodziałami $K_5$

Podpodziały powstają poprzez dodawanie wierzchołków stopnia 2 na istniejących krawędziach.
Niech $v_1, \dots v_n$ będą wierzchołkami w $G_m^n$ tworzącymi potencjalne podpodziały $K_5$. Bierzemy graf $G = G_1^{n \cdot m}$ oraz graf $H$ będący pewnym podpodziałem $K_5$.

$$\mathbb{E}[H] = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{5} 10^{k-5} (k-2)^2 (k-3)! \sum_{H^* \in \mathbb{H}} \sum_{1 \leq v1 \dots v_k \leq n} \# H^*_{v1 \dots v_k} \cdot p_{H^*_{v1 \dots v_k}} \tag{10}$$