

Oczekiwana liczba podgrafów Kuratowskiego w grafie losowym Barabasi Albert G_m^n

1 Oznaczenia

- G_m^n - graf Barabasi Albert o końcowej liczbie wierzchołków n oraz m dodawanych krawędziach do każdego wierzchołka
- $V^+(G)$ - wierzchołki z których krawędzie wychodzą
- $V^-(G)$ - wierzchołki do których krawędzie prowadzą
- $d_G^{in}(v)$ - stopień wejściowy
- $d_G^{out}(v)$ - stopień wyjściowy
- $d_G(v) = d_G^{in}(v) + d_G^{out}(v)$
- $C_G(t)$ - liczba 'przecięć' t , tj. liczba krawędzi (u, v) takich że $u \leq t \leq v$

Uwaga: Pętle dodają jeden do $d_G^{in}(v)$ oraz jeden do $d_G^{out}(v)$ i br.

2 Metoda

Na podstawie *Mathematical results on scale-free random graphs* (paragraf 15 i 12) mamy wzory wyrażające prawdopodobieństwo p_H występowanie pewnego podgrafu H w grafie G_1^n opisanego jako zbiór krawędzi łączących konkretne wierzchołki:

$$p_H = \prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \prod_{ij \in E(H)} \frac{1}{2\sqrt{ij}} \exp(O(\sum_{i \in V(H)} \frac{C_H(i)^2}{i})) \quad (1)$$

Aby opisać graf G_m^n za pomocą modelu z parametrem $m = 1$ budujemy graf $G_1^{m \cdot n}$ taki że każde kolejne m wierzchołków utożsamiamy jako jeden wierzchołek reprezentujący ten z grafu z dowolną wartością m .

Wymaganiami podanych wyżej wzorów jest to aby każda krawędź była zorientowana od wierzchołka o większym numerze to do tego z mniejszym oraz liczba krawędzi wychodzących nie była większa niż 1 - wówczas osadzenie takiego podgrafu w grafie losowym jest możliwe.

3 Oczekiwana liczba K_5

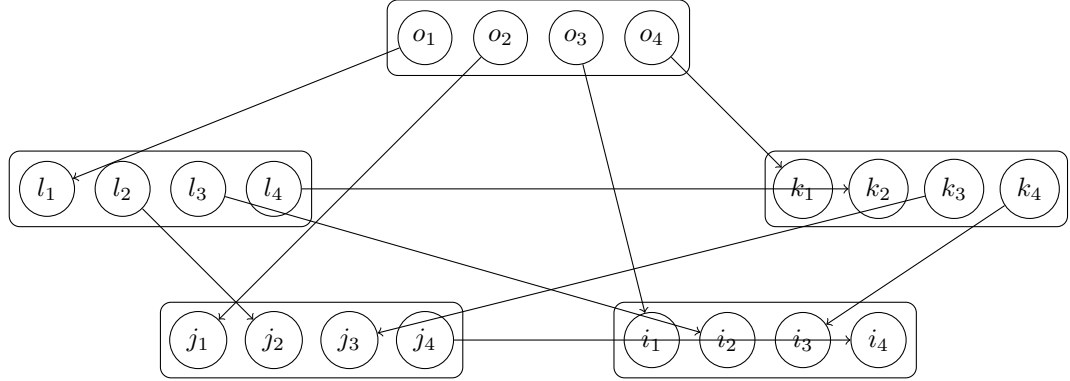
Niech a, b, c, d, e będą wierzchołkami w G_m^n tworzącymi potencjalne K_5 . Bierzemy graf $G = G_1^{n \cdot m}$ oraz graf $H = K_5$. Nadajemy oznaczenia. Wówczas:

- $V(G) = \{1, 2, \dots, n \cdot m\}$
- $E(H) = \{(o_{x_1}, i_{y_1}), (o_{x_2}, j_{y_2}), (o_{x_3}, k_{y_3}), (o_{x_4}, l_{y_4}), (l_{x_5}, i_{y_5}), (l_{x_6}, j_{y_6}), (l_{x_7}, k_{y_7}), (k_{x_8}, i_{y_8}), (k_{x_9}, j_{y_9}), (j_{x_{10}}, i_{y_{10}})\}$
 $a < b < c < d < e$
 $m \cdot (a - 1) \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq m \cdot a$
 $m \cdot (b - 1) \leq j_1, j_2, j_3, j_4 \leq m \cdot b$
 $m \cdot (c - 1) \leq k_1, k_2, k_3, k_4 \leq m \cdot c$
 $m \cdot (d - 1) \leq l_1, l_2, l_3, l_4 \leq m \cdot d$
 $m \cdot (e - 1) \leq o_1, o_2, o_3, o_4 \leq m \cdot e$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_5] &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \mathbb{E}[K_5^*] \\ &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \sum_{1 \leq a < b < c < d < e \leq n} \#K_{a,b,c,d,e}^* \cdot p_{K_{a,b,c,d,e}^*} \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie K_5^* to konkretna instancja K_5 z ustalonymi stopniami wyjściowymi a $K_{a,b,c,d,e}^*$ to K_5^* z ustalonymi indeksami wierzchołków na a, b, c, d, e .

3.1 Przykładowe $K_{a,b,c,d,e}$ dla $m = 4$



3.2 Wyznaczanie liczby $K_{a,b,c,d,e}$

Zakładamy że $m \geq 4$, ponieważ stopień wyjściowy nie może być większy niż 1 a maksymalna liczba wyjściowych krawędzi ze 'zgrupowanego' wierzchołka to 4.

Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom o_x możemy przyporządkować na $m(m-1)(m-2)(m-3)$ sposoby. Żadne krawędzie nie prowadzą do wierzchołków o_x .

Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom l_x możemy przyporządkować na $m(m-1)(m-2)$ sposobów. Do l_x prowadzi jedna krawędź, której koniec można wybrać na m sposobów. Wówczas jeden wierzchołek ma stopień 1.

Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom k_x możemy przyporządkować na $m(m-1)$ sposobów. Do k_x prowadzą dwie krawędzie, których końce można wybrać na:

- $m(m-1)$ sposobów, wówczas dwa wierzchołki mają stopień 1.
- m sposobów, wówczas jeden wierzchołek ma stopień 2.

Początki krawędzi wychodzących wierzchołkom j_x możemy przyporządkować na m sposobów. Do j_x prowadzą 3 krawędzie, których końce można wybrać na:

- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wówczas 3 wierzchołki mają stopień 1.
- $3 \cdot m(m-1)$ sposobów, wówczas 1 wierzchołek ma stopień 2 i 1 ma stopień 1.
- m sposobów, wówczas jeden wierzchołek ma stopień wyjściowy 3.

Żadne krawędzie nie wychodzą z i_x . Do i_x prowadzą 4 krawędzie, których końce można wybrać na:

- $m(m-1)(m-2)(m-3)$ sposobów, wówczas 4 wierzchołki mają stopień 1.
- $\frac{1}{2} \cdot m(m-1)(m-2) \cdot \binom{4}{2} \cdot 2$ sposobów, wówczas 2 wierzchołki mają stopień 2 a 2 pozostałe stopień 1.
- $\frac{1}{2} \cdot m(m-1) \cdot \binom{4}{2}$ sposobów, wówczas 1 i 2 wierzchołki ma stopień 2.
- $4 \cdot m(m-1)$ sposobów, wówczas 1 wierzchołek ma stopień wyjściowy 3 i 1 ma stopień 1.
- m sposobów, wówczas jeden wierzchołek ma stopień 4.

Mamy zatem $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ różnych konfiguracji wyborów końców krawędzi.

3.3 Wyznaczanie prawdopodobieństwa $p_{K_{a,b,c,d,e}}$

Ponieważ liczba krawędzi H jest stała to liczba C_H jest ograniczona z góry przez stałą. Gdy n jest wystarczająco duże to ilorazy $\frac{C_H(i)^2}{i}$ będą bliskie zeru zatem ostatni z 3 czynników iloczynu można zaniedbać:

$$\begin{aligned} p_{K_{a,b,c,d,e}^*} &= \left(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \frac{1}{2^{10}} \frac{1}{\sqrt{m^{20} a^4 b^4 c^4 d^4 e^4}} \\ &= \left(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \frac{1}{2^{10}} \frac{1}{m^{10} a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \end{aligned} \quad (3)$$

3.4 Wyznaczanie oczekiwanej liczby K_5

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_5] &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \sum_{1 \leq a < b < c < d < e \leq n} \#K_{a,b,c,d,e}^* \cdot p_{K_{a,b,c,d,e}^*} \\ &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \left(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \cdot \frac{1}{2^{10} m^{10}} \cdot \#K_{a,b,c,d,e}^* \sum_{1 \leq a < b < c < d < e \leq n} \frac{1}{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \\ &= \sum_{K_5^* \in \mathbb{K}_5} \left[\left(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \cdot \frac{1}{2^{10} m^{10}} \cdot \#K_{a,b,c,d,e}^* \right] \cdot \left(\frac{1}{5!} \right)^2 \cdot (H_n^2)^5 \end{aligned} \quad (4)$$

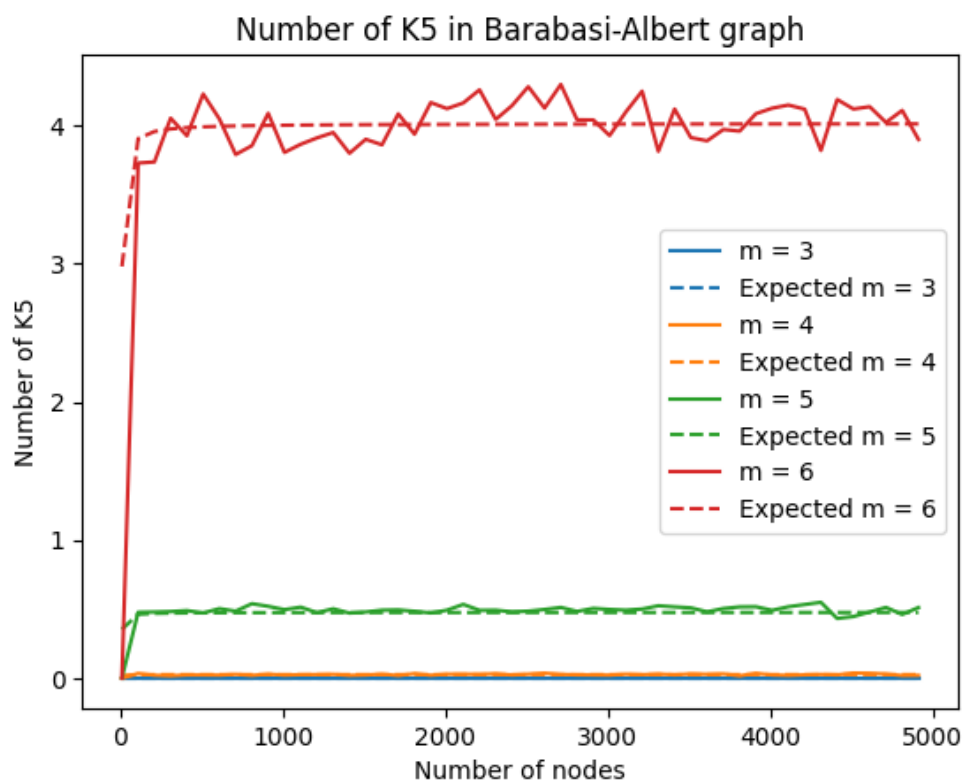
gdzie H_n^2 to n -ta liczba harmoniczna drugiego rodzaju.

Ostatecznie oczekiwana liczba K_5 w grafie G_m^n wynosi:

$$\mathbb{E}[K_5] = \frac{(m^2 - 9)(m^2 - 4)^2(m^2 - 1)^3}{14745600m^2} (H_n^2)^5 \quad (5)$$

3.5 Eksperyment

Dla stałej $\eta \approx \frac{1}{6.7}$ tak prezentuje się porównanie teorii $\eta \cdot \mathbb{E}[K_5]$ i eksperymentu:



4 Oczekiwana liczba $K_{3,3}$

Niech a, b, c, d, e, f będą wierzchołkami w G_m^n tworzącymi potencjalne $K_{3,3}$. Bierzemy graf $G = G_1^{n \cdot m}$ oraz graf $H = K_{3,3}$. Wówczas:

- $V(G) = \{1, 2, \dots, n \cdot m\}$
- Jest 10 różnych ustawień krawędzi w zależności od tego podziału wierzchołków na 2 podzbiory:

$$E(H_1) = \{(p_{x_1}, a_{y_1}), (p_{x_2}, b_{y_2}), (p_{x_3}, c_{y_3}), (o_{x_4}, a_{y_4}), (o_{x_5}, b_{y_5}), (o_{x_6}, c_{y_6}), (l_{x_7}, a_{y_7}), (l_{x_8}, b_{y_8}), (l_{x_9}, c_{y_9})\}$$

$$E(H_2) = \{\}$$

$$E(H_3) = \{\}$$

$$E(H_4) = \{\}$$

$$E(H_5) = \{\}$$

$$E(H_6) = \{\}$$

$$E(H_7) = \{\}$$

$$E(H_8) = \{\}$$

$$E(H_9) = \{\}$$

$$E(H_{10}) = \{\}$$

$$a < b < c < d < e < f$$

$$m \cdot (a - 1) \leq i_1, i_2, i_3 \leq m \cdot a$$

$$m \cdot (b - 1) \leq j_1, j_2, j_3 \leq m \cdot b$$

$$m \cdot (c - 1) \leq k_1, k_2, k_3 \leq m \cdot c$$

$$m \cdot (d - 1) \leq l_1, l_2, l_3 \leq m \cdot d$$

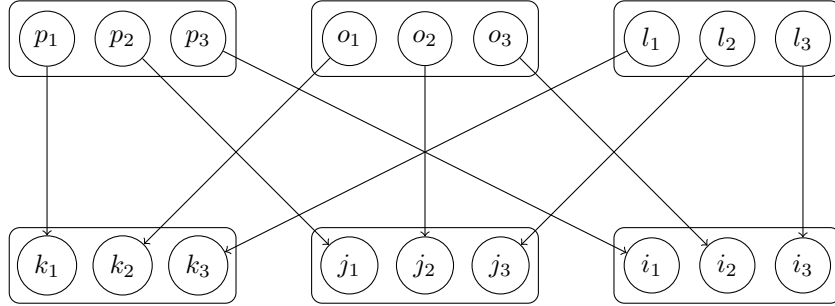
$$m \cdot (e - 1) \leq o_1, o_2, o_3 \leq m \cdot e$$

$$m \cdot (f - 1) \leq p_1, p_2, p_3 \leq m \cdot f$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_{3,3}] &= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \mathbb{E}[K_{3,3}^*] \\ &= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \sum_{1 \leq a < b < c < d < e < f \leq n} \#K_{a,b,c,d,e,f}^* \cdot p_{K_{a,b,c,d,e,f}^*} \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $K_{3,3}^*$ to konkretna instancja $K_{3,3}$ z ustalonymi stopniami wyjściowymi a $K_{a,b,c,d,e,f}^*$ to $K_{3,3}^*$ z ustalonymi indeksami wierzchołków na a, b, c, d, e, f .

4.1 Przykładowe $K_{a,b,c,d,e,f}$ dla $m = 3$



4.2 Wyznaczanie liczby $K_{a,b,c,d,e,f}$

Zakładamy że $m \geq 3$, ponieważ stopień wyjściowy nie może być większy niż 1 a maksymalna liczba wyjściowych krawędzi ze 'zgrupowanego' wierzchołka to 3.

4.2.1 H_1 , podział na podzbiory: $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z p_x, o_x, l_x można wybrać na $[m(m-1)(m-2)]^3$ sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z k_x, j_x, i_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

4.2.2 H_2 , podział na podzbiory: $\{a, b, d\}, \{c, e, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z p_x, o_x, l_x, k_x można wybrać na $[m(m-1)(m-2)]^2 mm(m-1)$ sposobów. Końce krawędzi prowadzących do l_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 2.
- $m(m-1)$ sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do k_x można wybrać na m sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z j_x, i_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

4.2.3 H_3 , podział na podzbiory: $\{a, b, e\}, \{c, d, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z p_x, o_x, l_x, k_x można wybrać na $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^3$ sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z o_x, l_x, k_x można wybrać na m sposobów. Końce prowadzące do j_x, i_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

4.2.4 H_4 , podział na podzbiory: $\{a, b, f\}, \{c, d, e\}$

Początki krawędzi wychodzących z p_x, o_x, l_x, k_x można wybrać na $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^3$ sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z o_x, l_x, k_x można wybrać na m sposobów. Końce prowadzące do j_x, i_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

4.2.5 H_5 , podział na podzbiory: $\{a, c, d\}, \{b, e, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z p_x, o_x, l_x, k_x, j_x można wybrać na $[m(m-1)(m-2)]^2 m^3$ sposoby. Końce krawędzi prowadzących do jednego z l_x, k_x, j_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$ sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do i_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

4.2.6 H_6 , podział na podzbiory: $\{a, c, e\}, \{b, d, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z p_x, o_x, l_x, k_x, j_x można wybrać na $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^2 m^2$ sposoby. Końce krawędzi prowadzących do jednego z o_x, l_x można wybrać na m sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z k_x, j_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$ sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do i_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

4.2.7 H_7 , podział na podzbiory: $\{a, c, f\}, \{b, d, e\}$

Początki krawędzi wychodzących z p_x, o_x, l_x, k_x, j_x można wybrać na $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^2m^2$ sposoby. Końce krawędzi prowadzących do jednego z o_x, l_x można wybrać na m sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z k_x, j_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$ sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do i_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

4.2.8 H_8 , podział na podzbiory: $\{a, d, e\}, \{b, c, f\}$

Początki krawędzi wychodzących z p_x, o_x, l_x, k_x, j_x można wybrać na $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^2m^2$ sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z o_x, l_x można wybrać na m sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z k_x, j_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$ sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do i_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

4.2.9 H_9 , podział na podzbiory: $\{a, d, f\}, \{b, c, e\}$

Początki krawędzi wychodzących z p_x, o_x, l_x, k_x, j_x można wybrać na $m(m-1)(m-2)[m(m-1)]^2m^2$ sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z o_x, l_x można wybrać na m sposobów. Końce krawędzi prowadzących do jednego z k_x, j_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$ sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do i_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

4.2.10 H_{10} , podział na podzbiory: $\{a, e, f\}, \{b, c, d\}$

Początki krawędzi wychodzących z p_x, o_x, l_x, k_x, j_x można wybrać na $[m(m-1)(m-2)]^2m^3$ sposoby. Końce krawędzi prowadzących do jednego z l_x, k_x, j_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień jest równy 2.
- $m(m-1)$ sposobów, wtedy są dwa stopnie równe 1.

Końce krawędzi prowadzących do i_x można wybrać na:

- m sposobów, wtedy jeden stopień wejściowy wynosi 3.
- $3m(m-1)$ sposobów, wtedy jeden stopień jest 2 a drugi 1.
- $m(m-1)(m-2)$ sposobów, wtedy każdy stopień wynosi 1.

Przypadki H_3, H_4 oraz H_6, H_7, H_8, H_9 są tożsame.

4.3 Wyznaczanie prawdopodobieństwa $p_{K_{a,b,c,d,e,f}}$

Ponieważ liczba krawędzi H jest stała to liczba C_H jest ograniczona z góry przez stałą. Gdy n jest wystarczająco duże to ilorazy $\frac{C_H(i)^2}{i}$ będą bliskie zeru zatem ostatni z 3 czynników iloczynu można zaniedbać:

$$\begin{aligned} p_{K_{a,b,c,d,e,f}}^* &= \left(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \frac{1}{2^9} \frac{1}{\sqrt{m^{18} a^3 b^3 c^3 d^3 e^3 f^3}} \\ &= \left(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \frac{1}{2^9} \frac{1}{m^9 a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} f^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (7)$$

4.4 Wyznaczanie oczekiwanej liczby $K_{3,3}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[K_{3,3}] &= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \sum_{1 \leq a < b < c < d < e < f \leq n} \#K_{a,b,c,d,e,f}^* \cdot p_{K_{a,b,c,d,e,f}^*} \\
&= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \left(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \cdot \frac{1}{2^9 m^9} \\
&\quad \cdot \#K_{a,b,c,d,e,f}^* \sum_{1 \leq a < b < c < d < e < f \leq n} \frac{1}{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} f^{\frac{3}{2}}} \\
&= \sum_{K_{3,3}^* \in \mathbb{K}_{3,3}} \left[\left(\prod_{v \in V^-(H)} d_H^{in}(v)! \right) \cdot \frac{1}{2^9 m^9} \cdot \#K_{a,b,c,d,e,f}^* \right] \cdot \left(\frac{1}{6!} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot (H_n^{\frac{3}{2}})^6
\end{aligned} \tag{8}$$

gdzie $H_n^{\frac{3}{2}}$ to n-ta liczba harmoniczna rodzaju $\frac{3}{2}$.

Ostatecznie oczekiwana liczba $K_{3,3}$ w grafie G_m^n wynosi:

$$\mathbb{E}[K_{3,3}] = \frac{(m^2 - 1)^2 (5m^8 - 35m^6 + 74m^4 - 64m^2 + 32)}{2211840 \sqrt{5} m^3} (H_n^{\frac{3}{2}})^6 \tag{9}$$

4.5 Eksperyment

Dla stałej $\eta \approx \frac{1}{0}$ tak prezentuje się porównanie teorii $\eta \cdot \mathbb{E}[K_{3,3}]$ i eksperymentu:

5 Oczekiwana liczba podgrafów będących podpodziałami K_5

Podpodziały powstają poprzez dodawanie wierzchołków stopnia 2 na istniejących krawędziach.

Niech v_1, \dots, v_n będą wierzchołkami w G_m^n tworzącymi potencjalne podpodziały K_5 . Bierzemy graf $G = G_1^{n,m}$ oraz graf H będący pewnym podpodziałem K_5 .

$$\mathbb{E}[H] = \sum_{k=0}^n \binom{k}{5} 10^{k-5} (k-2)^2 (k-3)! \sum_{H^* \in \mathbb{H}} \sum_{1 \leq v_1 \dots v_k \leq n} \#H_{v_1 \dots v_k}^* \cdot p_{H_{v_1 \dots v_k}^*} \quad (10)$$