Obliczenia Naukowe

Karol Janic

1 grudnia 2023

Spis treści

1 Wstęp

Iterpolacja funkcji za pomocą wielomianu polega na znalezieniu wielomianu p stopnia co najwyżej n, który będzie spełniał $p(x_i) = y_i$ dla zadanych punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, gdzie x_i dla $i = 0, 1, \ldots, n$ są parami różne. Wielomian p można przedstawić jako kombinację liniową $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Jednak takie przedstawienie prowadzi do układu równań z macierzą Vandermonde'a co prowadzi do zadania źle uwarunkowanego. Bazę wielomianu można zmienić na $1, (x - x_0), (x - x_0) \cdot (x - x_1), \ldots, (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_(n - 1))$. Wówczas kolejnymi współczynnikami będą ilorazy różnicowe a taka postać wielomianu nosi nazwę postaci Newtona.

2 Zadanie 1

2.1 Cel

Celem zadania jest implementacja metody obliczającej ilorazy różnicowe funkcji f dla zadanych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ oraz wartości funkcji w tych węzłach $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

2.2 Rozwiązanie

Wielomian p postaci:$\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot q_i(x)$, gdzie c_i to ilorazy różnicowe a $q_i(x) = \prod_{i=0}^{i} (x - x_i)$ jest szukanym wielomianem interpolacyjnym, gdy $\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot q_i(x_i) = y_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Warunek ten można zapisać w postaci układu równań w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & q_1(x_i) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_1(x_n) & \ldots & q_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem takiego układu jest:

$$c_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

gdzie $f[x_i, x_1, \ldots, x_j]$ jest ilorazem różnicowym opartym na węzłach $x_i, \ldots, x_j$ określonym rekurencyjnie:

$$f[x_k] = f(x_k), \qquad 0 \le i \le n$$

$$f[x_i, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}, \qquad 0 \le i < j \le n$$

2.2.1 Opis metody

Prosta implementacja polegałaby na stworzeniu dwuwymiarowej tablicy, w której zapisywane byłyby kolejne wartości ilorazów. Warto jednak zauważyć, że szukane są wyłącznie ilorazy różnicowe, gdzie $x_i = x_0$. Zatem złożoność pamięciową można ograniczyć do $O(1)$ poprzez wyznaczanie ilorazów w miejscu. Kolejność wyznaczania ilorazów przedstawiona jest poniżej. Łatwo zobaczyć że złożoność obliczeniowa wynosi $O(n^2)$.

iteracja	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_n
1	$f[x_0]$	$f[x_1]$	$f[x_2]$	$\cdots$	$f[x_n]$
2		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]+f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_1]+f[x_2]}{x_2 - x_1}$	$\cdots$	$f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_{n-1}]+f[x_n]}{x_n - xn - 1}$
3			$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2]+f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	$\cdots$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_{n-1}, x_n]+f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}$
$\vdots$				$\ddots$	$\vdots$
n					$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n]+f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

2.2.2 Pseudokod

Dane: x, f
Wynik: fx
$xLen \leftarrow$ `length`(x)
$fx \leftarrow f$
for $i = 2$ **to** $xLen$ **do**
  for $j = xLen$ **downto** i **do**
    $fx[j] = \frac{fx[j]-fx[j-1]}{x[j]-x[j-i+1]}$
  end
end

Algorytm 1: Algorytm wyznaczania ilorazów różnicowych

3 Zadanie 2

3.1 Cel

Celem zadania jest implementacja metody wyznaczającej wartość wielomianu zadanego w postaci Newtona dla danego argumentu.

3.2 Rozwiązanie

Zauważmy, że wielomian interpolacyjny można zapisać w nastepujący sposób:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot q_i(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot q_i(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_i) =$$
$$= c_0 + (c_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_i)) \cdot (x - x_0) =$$
$$= c_0 + (c_1 + (c_2 + \sum_{i=3}^{n} c_i \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_i)) \cdot (x - x_1)) \cdot (x - x_0) = \ldots$$

Otrzymujemy zależność, która jest bazą do zastosowania uogólnionego schematu Hornera: $p(x) = w_0(x)$, gdzie:

$$w_n(x) = c_n$$
$$w_k(x) = c_k + (x - x_k) \cdot w_{k+1}(x), \quad k = n-1, \ldots, 0$$

3.2.1 Opis metody

Stosując wyżej opisaną zależność można zaimplementować metodę wyznaczania wartości wielomianu. Złożoność obliczeniowa algorytmu wynosi $O(n)$ a pamięciowa $O(1)$.

3.2.2 Pseudokod

Dane: x, fx, t
Wynik: ft
$xLen \leftarrow$ `length`(x)
$ft \leftarrow fx[xLen]$
for $i = xLen - 1$ **downto** 1 **do**
  $ft \leftarrow fx[i] + (t - x[i]) \cdot ft$
end

Algorytm 2: Algorytm wyznaczania wartości wielomianu w postaci Newtona

4 Zadanie 3

4.1 Cel

Celem zadania jest implementacja metody wyznaczającej postać naturalną wielomianu interpolacyjnego danego w postaci Newtona.

4.2 Rozwiązanie

Rozwińmy pierwsze wyrazy zależności otrzymanej w poprzednim zadaniu:

$$w_n(x) = c_n$$

$$w_{n-1}(x) = c_{n-1} + (x - x_{n-1}) \cdot w_n(x) = c_{n-1} + (x - x_{n-1}) \cdot c_n = c_n \cdot x - x_{n-1} \cdot c_n + c_{n-1}$$

$$\begin{aligned} w_{n-2}(x) &= c_{n-2} + (x - x_{n-2}) \cdot w_{n-1} = c_{n-2} + (x - x_{n-2}) \cdot (c_{n-1} + (x - x_{n-1}) \cdot c_n) = \\ &= c_n \cdot x^2 + (c_{n-1} - (x_{n-1} + x_{n-2}) \cdot c_n) \cdot x - x_{n-2} \cdot (c_{n-1} - x_{n-1} \cdot c_n) + c_{n-2} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

4.2.1 Opis metody

Łatwo zauważyć, że początkowe współczynniki przy kolejnych potęgach x_i wynoszą c_i, gdzie $0 \leq i \leq n$ a następnie pomniejszane są o $x_i \cdot a_{j+1}$, gdzie $i \leq j < n$ a a_{j+1} jest aktualną wartością współczynnika wyznaczoną wcześniej. Zależność ta prowadzi do algorytmu o złożoności obliczeniowej $O(n^2)$ oraz pamięciowej $O(1)$.

4.2.2 Pseudokod

Dane: x, fx
Wynik: a
$xLen \leftarrow$ `length`(x)
$a \leftarrow fx$
for $i = xLen - 1$ **downto** 1 **do**
  for $j = i$ **to** $xLen - 1$ **do**
    $a[j] \leftarrow a[j] - a[j+1] \cdot x[i]$
  end
end

Algorytm 3: Algorytm wyznaczania postaci naturalnej wielomianu zadanego w postaci Newtona

5 Zadanie 4

5.1 Cel

Celem zadania jest implementacja metody interpolującej podaną funkcję na zadanym przedziale przy pomocy wyżej zaimplentowach metod oraz węzłów zdefiniowanych w nastepujący sposób:

$$x_k = a + k \cdot h, \quad h = (b - a)/n, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

5.2 Rozwiązanie

5.2.1 Opis metody

Metoda interpoluje funkcję a następnie wizualizuje na wykres zadaną funkcję, wyznaczony wielomian interpolujący oraz węzły.

6 Zadanie 5

6.1 Cel

Celem zadania jest przetestowanie zaimplentowanych metod na funkcjach $f_1(x) = e^x$ na przedziale $[0, 1]$ oraz $f_2(x) = x^2 \cdot sinx$ na przedziale $[-1, 1]$. Badany jest także wpływ stopnia wielomianu na dokładność interpolacji dobierając go ze zbioru $\{5, 10, 15\}$.

6.2 Rozwiązanie

Zwizualizowano interpolację podanych wyżej funkcji oraz zestawiono wyniki wraz z teoretycznymi przewidywaniami błędu interpolacji.

6.3 Wyniki

Wielomiany bardzo dobrze interpolują zadane funkcje f_1 oraz f_2. Jest to zgodne z teoretyczny przewidywaniami, gdyż błąd interpolacji wyraża się wzorem:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

$$|f_1(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{6!} \cdot e^1 \cdot \prod_{i=0}^{5} |\frac{1}{2} - x_i| \approx 2 \cdot 10^{-6}$$

$$|f_2(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{6!} \cdot (12 \cdot x \cdot cos(x) - (-30 + x^2) \cdot sin(x)) \prod_{i=0}^{5} |0 - x_i| \approx 5 \cdot 10^{-5}$$

gdzie $x \in [a, b]$ oraz $\zeta_x \in (a, b)$.

7 Zadanie 6

7.1 Cel

Celem zadania jest przetestowanie zaimplentowanych metod na funkcjach $f_3(x) = |x|$ na przedziale $[-1, 1]$ oraz $f_4(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[-5, 5]$. Badany jest także wpływ stopnia wielomianu na dokładność interpolacji dobierając go ze zbioru $\{5, 10, 15\}$.

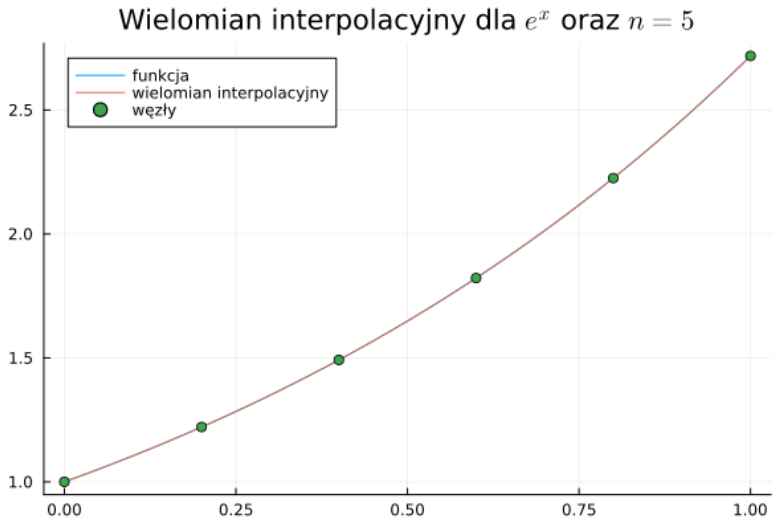
7.2 Rozwiązanie

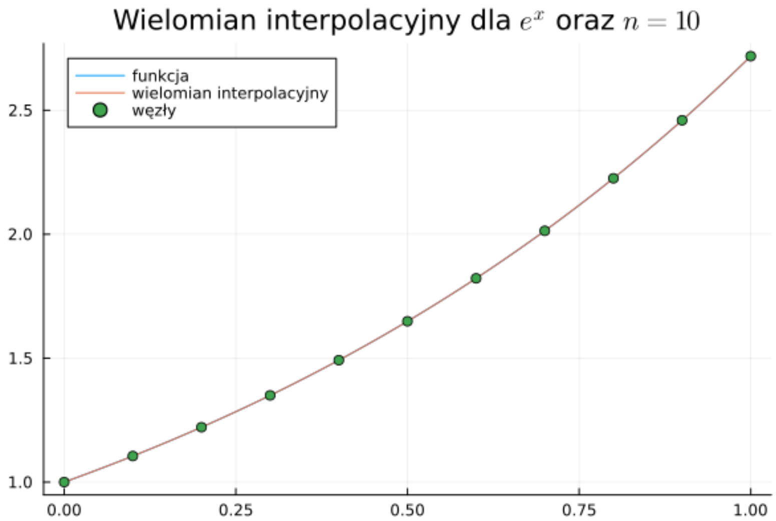
Zwizualizowano interpolację podanych wyżej funkcji oraz zestawiono wyniki wraz z teoretycznymi przewidywaniami błędu interpolacji.

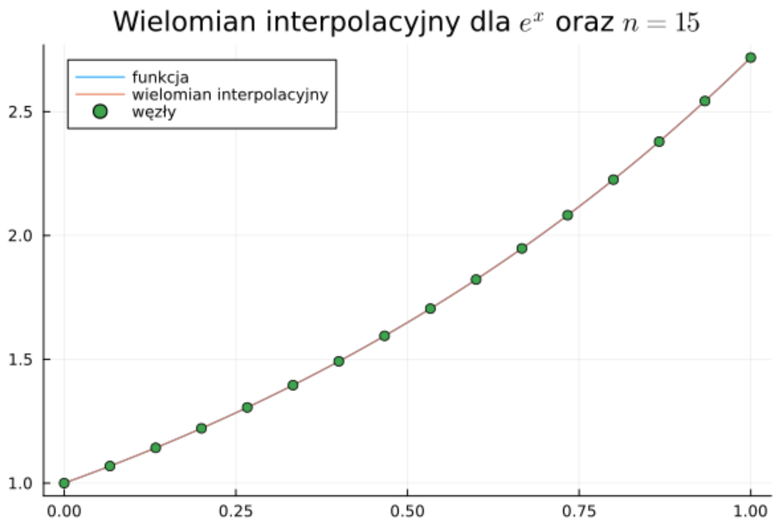
7.3 Wyniki

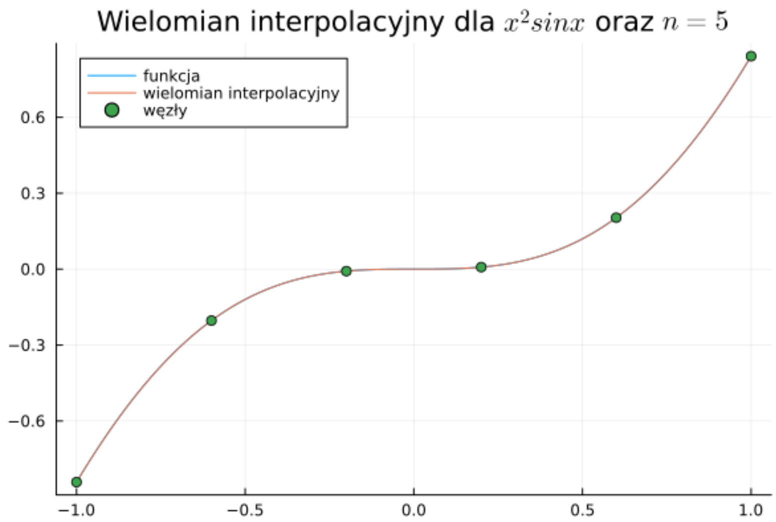
W przypadku funkcji f_3 wielomian interpolacyjny gorzej interpoluje zadaną funkcję. Wzrost stopnia wielomianu powoduje lepszą dokładność interpolacji w okolicach zera ale pogarsza ją dla argumentów bliżej końców przedziałów. Powodem takiego zachowania może być fakt, że f_3 nie jest funkcją różniczkowalną w przeciwieństwie do wielomianu interpolującego.

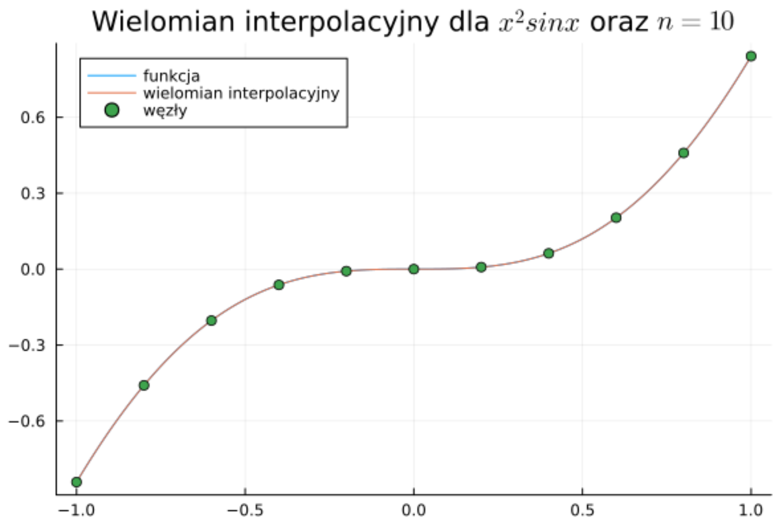
W przypadku funkcji f_4 wielomian interpolacyjny także gorzej interpoluje zadaną funkcję. Wzrost stopnia wielomianu powoduje lepszą dokładność w okolicach środka układu współrzędnych jednak znacząco pogarsza dokładność dla argumentów bliższych końców zadanego przedziału. Jest to efekt Rungego, który polega na pogorszeniu interpolacji pomimo powiększenia stopnia wielomianu interpolującego. Powodem takiego zachowania jest zły dobór węzłów - tj. dobór węzłów w taki sposób aby odległości między nimi były stałe. Dobrowadza to do wniosku, że nie zawsze zwiększenie stopnia wielomianu poprawia dokładność interpolacji. Warto rozważyć inny dobór węzłów.

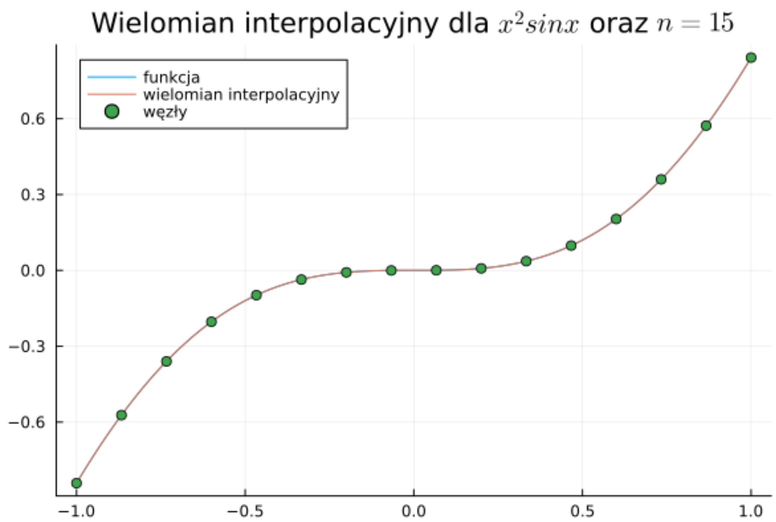

Wielomian interpolacyjny dla e^x oraz $n = 5$
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły
2.5
2.0
1.5
1.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

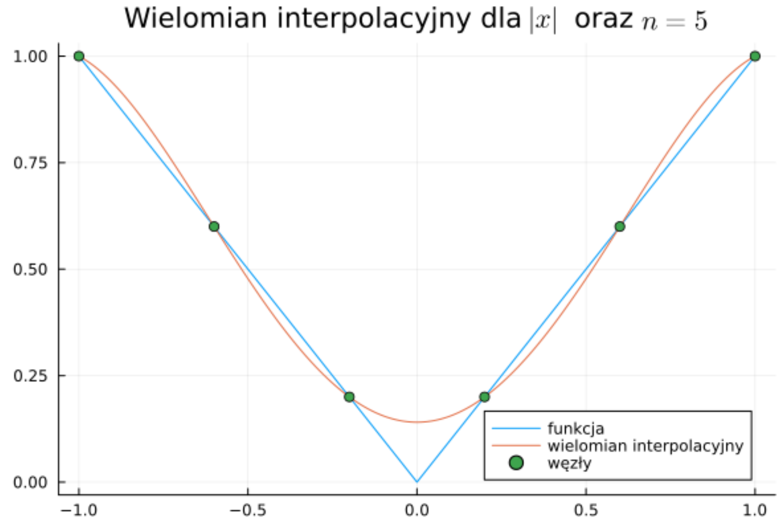

Wielomian interpolacyjny dla e^x oraz $n = 10$
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły
2.5
2.0
1.5
1.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

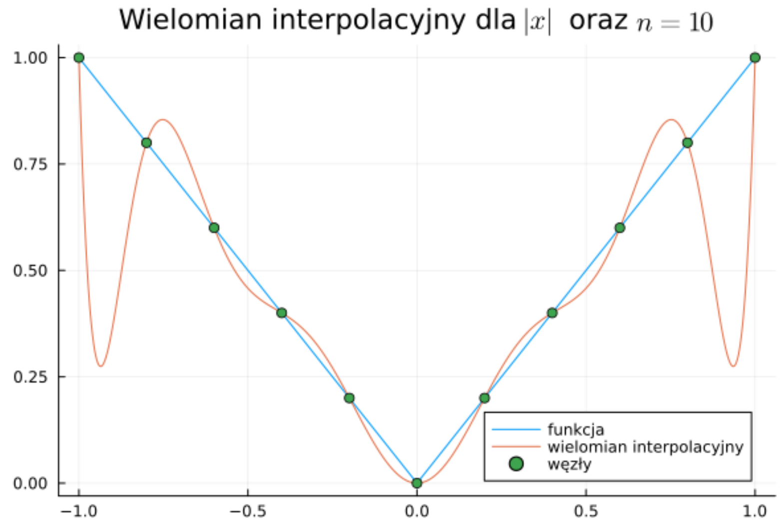

Wielomian interpolacyjny dla e^x oraz $n = 15$
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły
2.5
2.0
1.5
1.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

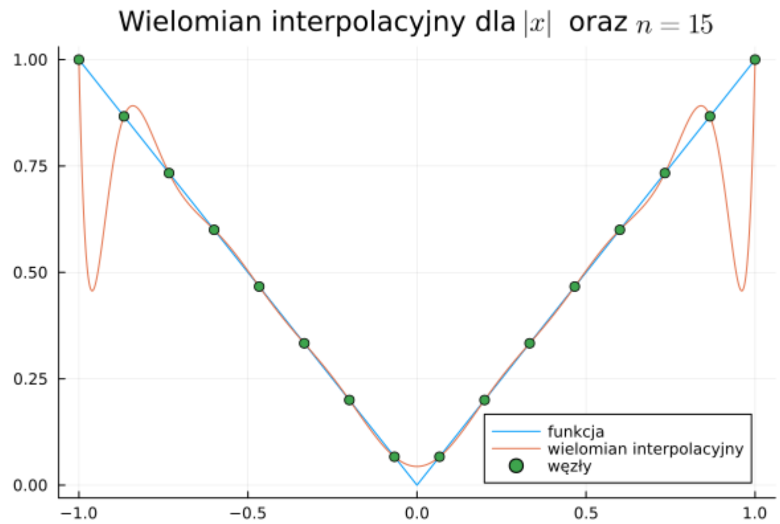

Wielomian interpolacyjny dla $x^2 sinx$ oraz $n = 5$
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły
0.6
0.3
0.0
−0.3
−0.6
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

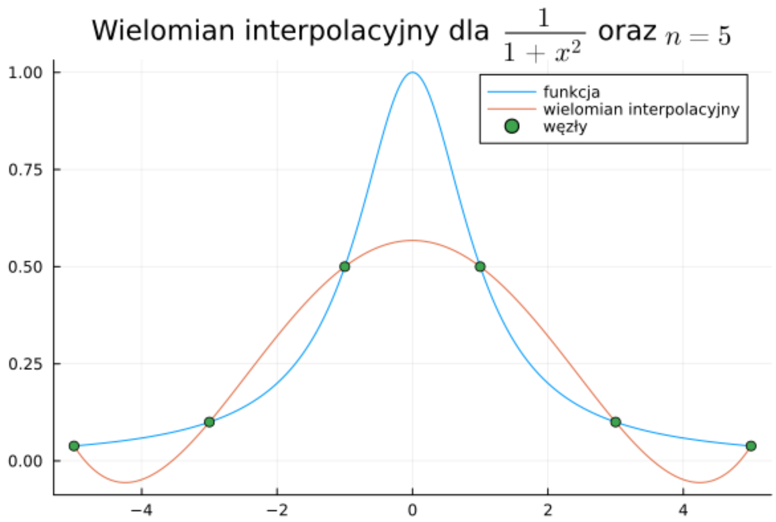

Wielomian interpolacyjny dla $x^2 sinx$ oraz $n = 10$
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły
0.6
0.3
0.0
−0.3
−0.6
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


Wielomian interpolacyjny dla $x^2 sinx$ oraz $n = 15$
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły
0.6
0.3
0.0
−0.3
−0.6
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

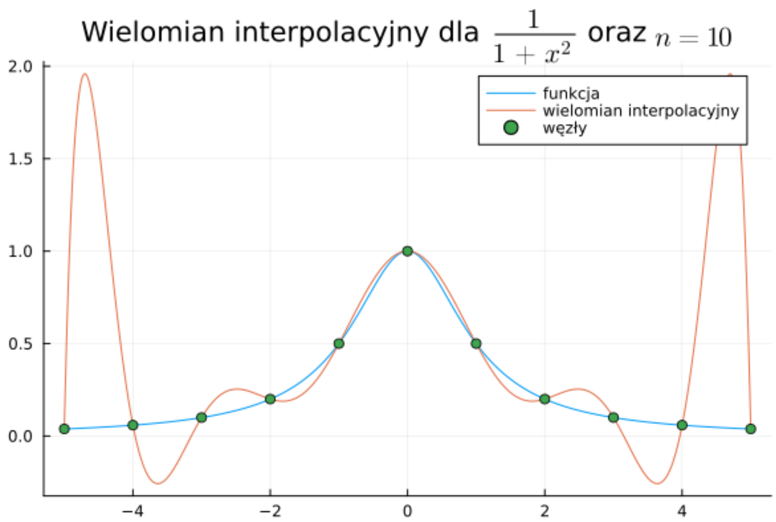

Wielomian interpolacyjny dla $|x|$ oraz $n = 5$
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły


Wielomian interpolacyjny dla $|x|$ oraz $n = 10$
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły

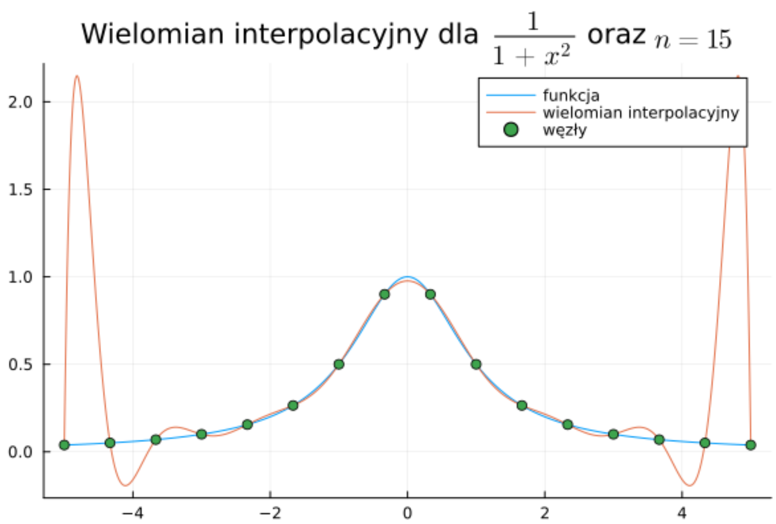

Wielomian interpolacyjny dla $|x|$ oraz $n = 15$
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły



Wielomian interpolacyjny dla $\frac{1}{1+x^2}$ oraz $n = 5$
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły



Wielomian interpolacyjny dla $\frac{1}{1+x^2}$ oraz $n = 10$
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły



Wielomian interpolacyjny dla $\frac{1}{1+x^2}$ oraz $n = 15$
funkcja
wielomian interpolacyjny
węzły