Obliczenia Naukowe

Karol Janic

16 listopada 2023

Spis treści

1 Zadanie 1

1.1 Cel

Celem zadania jest implementacja metody rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

1.2 Rozwiązanie

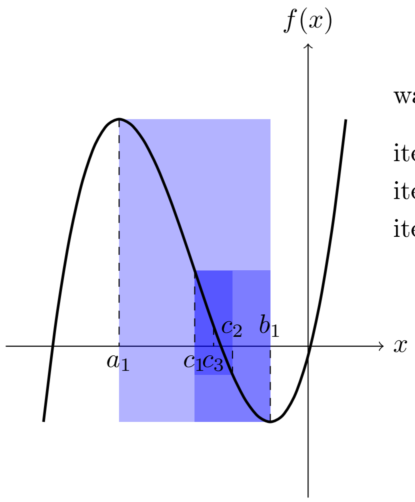
1.2.1 Opis metody

Metoda służy znajdywaniu miejsca zerowego ciągłej funkcji f na pewnym przedziale $[a, b]$. Wykorzystuje ona twierdzenie Darboux, które mówi że jeśli funkcja na końcach przedziału przyjmuje wartości o różnych znakach to w tym przedziale dla pewnego argumentu r przyjmuje również wartość 0. Metoda ta jest metodą iteracyjną i każdej kolejnej iteracji zmniejsza przedział poszukiwań o połowę. Robi to obliczając środek poprzedniego przedziału oraz wartość funkcji w tym punkcie. Następnie na podstawie znaku tej wartości wybiera prawy lub lewy podprzedział. Metoda kończy działanie, gdy wartość funkcji w środku przedziału jest wystarczająco bliska zeru(ϵ) lub rozpatrywany przedział jest wystarczająco mały(δ).

1.2.2 Uwagi implementacyjne

- sprawdzanie tego czy wartości funkcji na końcach przedziału mają różne znaki należy wykonać porównując znaki obu liczb zamiast sprawdzania znaku ich iloczyny, ponieważ mnożenie bardzo małych liczb o różnych znakach może dać wynik zawierający się w przedziale zera maszynowego a mnożenie liczb bardzo dużych może doprowadzić do nadmiaru lub niedomiaru.
- wyznaczenie środka przedziału należy wykonać dodając połowę długości przedziału do jego lewego końca zamiast połowienia sumy końców oby przedziałów, ponieważ błędy arytmetyki mogłyby spowodować, że środek przedziału zawierałby się poza przedziałem

1.2.3 Wizualizacja metody



warunek początkowy dla przedziału $[a_1, b_1]$ jest spełniony, ponieważ $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$

iteracja 1: $c_1 := \frac{a_1+b_1}{2}$, $f(a_1) \cdot f(c_1) > 0$ zatem $a_2 := c_1$ i $b_2 := b_1$

iteracja 2: $c_2 := \frac{a_2+b_2}{2}$, $f(a_2) \cdot f(c_2) < 0$ zatem $a_3 := a_2$ i $b_3 := c_2$

iteracja 3: $c_3 := \frac{a_3+b_3}{2}$, $f(a_3) \cdot f(c_3) < 0$ zatem $a_4 := a_3$ i $b_4 := c_3$

$\vdots$

1.2.4 Pseudokod

Algorytm 1 Metoda bisekcji

```
Dane: f,                                   ▷ funkcja
      a, b,                                ▷ przedział
      δ, ϵ                                 ▷ dokładność obliczeń
Wyniki: c,                                 ▷ przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0
      f(c),                                ▷ wartość funkcji f w punkcie c
      it,                                  ▷ liczba wykonanych iteracji
      err                                  ▷ kod błędu
function MBISEKCJI(f, a, b, ϵ, δ)
    fa ← f(a)
    fb ← f(b)
    if sign(fa) = sign(fb) then
        return 0, 0, 0, 1                  ▷ funkcja nie zmienia znaku na zadanym przedziale
    end if
    e ← b − a
    it ← 0
    while true do
        it ← it + 1
        e ← e/2
        c ← a + e
        fc ← f(c)
        if abs(e) < δ or abs(fc) < ϵ then
            return c, fc, it, 0            ▷ znaleziono pierwiastek z zadaną dokładnością
        end if
        if sign(fa) = sign(fc) then        ▷ wybieramy podprzedział tak aby zachować różne znaki
            a ← c
            fa ← fc
        else
            b ← c
            fb ← fc
        end if
    end while
end function
```

2 Zadanie 2

2.1 Cel

Celem zadania jest implementacja metody rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą stycznych.

2.2 Rozwiązanie

2.2.1 Opis metody

Metoda służy znajdywaniu miejsca zerowego ciągłej, podwójnie różniczkowalnej funkcji f o pochodnej pf takiej, że $pf(r) \neq 0$, gdzie r jest jednokrotnym pierwiastkiem. Wykorzystuje ona rozwinięcie funkcji f w szereg Taylora w jej miejscu zerowym r w celu jej linealizacji:

$$0 = f(r) = f(x_n) + pf(x_n)(r - x_n) + O((r - x_n)^2) \approx f(x_n) + pf(x_n)(r - x_n),$$

skąd otrzymujemy wzór na kolejne przybliżenia pierwiastka:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{pf(x_n)}$$

Łatwo zauważyć, że wartością x_{n+1} jest punkt przecięcia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_n, f(x_n))$ z osią OX. Metoda ma charakter iteracyjny. Kolejne iteracje wyznaczają kolejne przybliżenia pierwiastka według podane wyżej wzoru. Metoda kończy działanie, gdy różnica pomiędzy kolejnymi przybliżeniami jest dostatecznie mała(δ) lub wartość funkcji w przybliżeniu jest dostatecznie bliska zeru(ϵ). Ważnym założeniem jest także to, aby przybliżenie początkowe x_0 było dostatecznie bliskie dokładnemu zeru funkcji. W przeciwnym wypadku możemu nie zbliżać się do wartości dokładnej. Aby metoda nie działała w nieskończoność warto zabezpieczyć ją poprzez wykonanie jedynie maksymalnie dopuszczalnej liczby iteracji($maxit$).

2.2.2 Uwagi implementacyjne

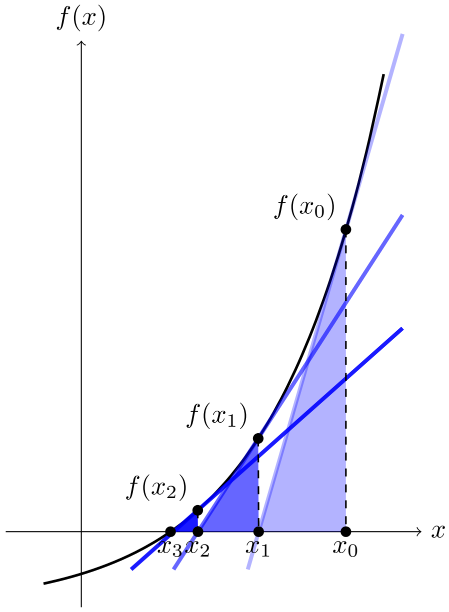
- wyznaczenie kolejnego przybliżenia wymaga dzielenia przez wartość pochodnej funkcji pf; gdy jest ona bliska 0 to wynik dzielenia może być odległy od rzeczywistej wartości co może skutkować opuszczeniem bliskiego otoczenie wyznaczanego miejsca zerowego; należy się przed tym zabezpieczyć

2.2.3 Pseudokod

Algorytm 2 Metoda stycznych

```
Dane: f, pf,                                  ▷ funkcja i jej pochodna
      x0,                                     ▷ przybliżenie początkowe
      maxit,                                  ▷ maksymalna liczba iteracji
      δ, ϵ                                    ▷ dokładność obliczeń
Wyniki: c,                                    ▷ przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0
      f(c),                                   ▷ wartość funkcji f w punkcie c
      it,                                     ▷ liczba wykonanych iteracji
      err                                     ▷ kod błędu
function MSTYCZNYCH(f, pf, x0, ϵ, δ)
    fx ← f(x0)
    if abs(fx) < ϵ then
        return x0, fx, 0, 0                   ▷ dane przybliżenie początkowe jest wystarczająco dobre
    end if
    x ← x0
    for it ← 1 to maxit do
        dfx ← pf(x)
        if abs(dfx) < 10.0 · eps(Float64) then
            return x, fx, it, 2               ▷ wartość pochodnej jest bliska zeru
        end if
        newx ← x − fx/dfx
        fx ← f(newx)
        if abs(newx − x) < δ or abs(fx) < ϵ then
            return newx, fx, it, 0
        end if
        x ← newx
    end for
    return x, fx, maxit, 1                    ▷ nie udało znaleźć się wystarczająco dobre rozwiązania w maxit
end function
```

2.2.4 Wizualizacja metody



iteracja 1: wyznaczamy styczną do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$, przecięcie stycznej z osią OX wyznacza kolejne przybliżenie x_1

iteracja 2: wyznaczamy styczną do wykresu funkcji w punkcie $(x_1, f(x_1))$, przecięcie stycznej z osią OX wyznacza kolejne przybliżenie x_2

iteracja 3: wyznaczamy styczną do wykresu funkcji w punkcie $(x_2, f(x_2))$, przecięcie stycznej z osią OX wyznacza kolejne przybliżenie x_3

$\vdots$

3 Zadanie 3

3.1 Cel

Celem zadania jest implementacja metody rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych.

3.2 Rozwiązanie

3.2.1 Opis metody

Metoda służy znajdywaniu miejsca zerowego ciągłej, podwójnie różniczkowalnej funkcji f, takiej że $f'(r) \neq 0$, gdzie r jest jednokrotnym pierwiastkiem równania. Jest ona ulepszoną metodą stycznych poprzez wyeliminowanie potrzeby używania pochodnej funkcji poprzez aproksymację:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

W wyniku podstawienia otrzymujemy wzór rekurencyjny na kolejne przybliżenia pierwiastka:

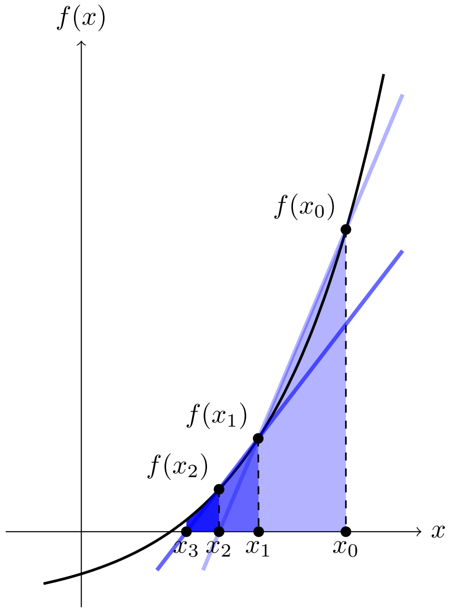
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \cdot f(x_n)$$

W zamian za nieużywanie wzóru pochodnej funkcji potrzebujemy na początku dwa przybliżenia pierwiastka x_0, x_1. Metoda ma charakter iteracyjny. Kolejne iteracje wyznaczają kolejne przybliżenia pierwiastka według podane wyżej wzoru. Metoda kończy działanie, gdy różnica pomiędzy kolejnymi przybliżeniami jest dostatecznie mała(δ) lub wartość funkcji w przybliżeniu jest dostatecznie bliska zeru(ϵ). Ważnym założeniem jest także to, aby przybliżenia początkowe x_0, x_1 były dostatecznie bliskie dokładnemu zeru funkcji. W przeciwnym wypadku możemu nie zbliżać się do wartości dokładnej. Aby metoda nie działała w nieskończoność warto zabezpieczyć ją poprzez wykonanie jedynie maksymalnie dopuszczalnej liczby iteracji($maxit$).

3.2.2 Uwagi implementacyjne

- aby zapewnić, że wartość bezwzględna funkcji nie będzie rosła, przy wyznaczeniu kolejnych przybliżej należy tak zamieniać x_k oraz x_{k+1} aby $|f(x_k)| \leq |f(x_{k+1})|$

3.2.3 Wizualizacja metody



iteracja 1: wyznaczamy sieczną przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$, przecięcie siecznej z osią OX wyznacza kolejne przybliżenie x_2

iteracja 2: wyznaczamy sieczną przez punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$, przecięcie siecznej z osią OX wyznacza kolejne przybliżenie x_3

$\vdots$

3.2.4 Pseudokod

Algorytm 3 Metoda siecznych

Dane: f, ▷ funkcja
x_0, x_1 ▷ przybliżenia początkowe
$maxit$, ▷ maksymalna liczba iteracji
δ, ϵ ▷ dokładność obliczeń
Wyniki: c, ▷ przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$
$f(c)$, ▷ wartość funkcji f w punkcie c
it, ▷ liczba wykonanych iteracji
err ▷ kod błędu

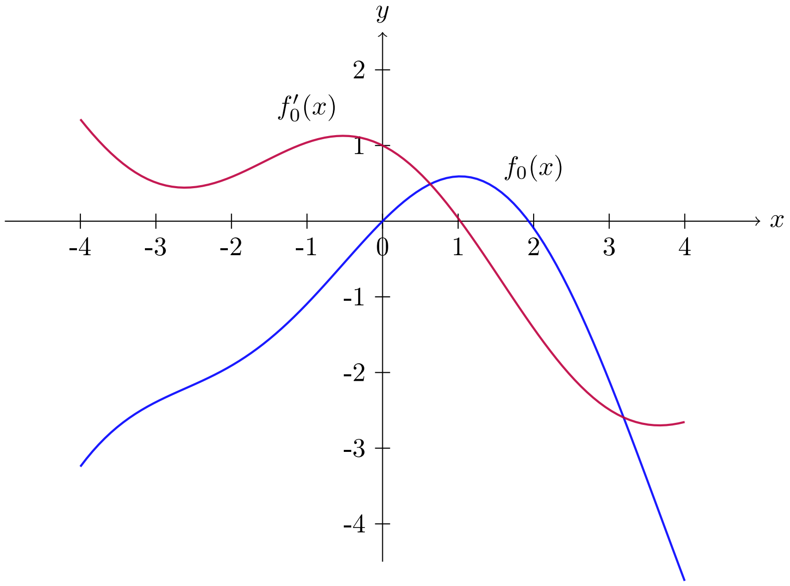
function MSIECZNYCH$(f, x_0, x_1, \epsilon, \delta)$
  $fx0 \leftarrow f(x_0)$
  $fx1 \leftarrow f(x_1)$
  for $it \leftarrow 1$ **to** maxit **do**
    if $abs(fxo) > abs(fx1)$ **then**
      swap(x_0, x_1**)**
      swap($fx0, fx1$**)**
    end if
    $s \leftarrow (x_1 - x_0)/(fx1 - fx0)$
    $x_1 \leftarrow x_0$
    $fx1 \leftarrow fx0$
    $x_0 \leftarrow x_0 - fx0 \cdot s$
    $fx0 \leftarrow f(x_0)$
    if $abs(x_1 - x_0) < \delta$ *or* $abs(fx0) < \epsilon$ **then**
      return $x_0, fx0, it, 0$
    end if
  end for
  return $x_0, fx0, maxit, 1$ ▷ nie udało znaleźć się wystarczająco dobre rozwiązania w *maxit*
end function

4 Zadanie 4

4.1 Cel

Celem zadania jest przetestowanie zaimplementowanych metod na przykładzie funkcji $f_0(x) = \sin x - (\frac{x}{2})^2$

4.2 Rozwiązanie



Rysunek 1: Wizualizacja $f_0(x) = \sin x - (\frac{x}{2})^2$ oraz $f_0'(x) = \cos x - \frac{x}{2}$

Użyto zaimplementowanych wcześniej metod z podanymi poniżej argumentami:

- **mbisekcji:** $a := 1.5$, $b := 2.0$, $delta := 0.5 \cdot 10^{-5}$, $epsilon := 0.5 \cdot 10^{-5}$
- **mstycznych:** $x0 := 1.5$, $delta := 0.5 \cdot 10^{-5}$, $epsilon := 0.5 \cdot 10^{-5}$, $maxit := 1024$
- **msiecznych:** $x0 := 1.0$, $x1 := 2.0$, $delta := 0.5 \cdot 10^{-5}$, $epsilon := 0.5 \cdot 10^{-5}$, $maxit := 1024$

4.3 Wyniki

Metoda	**Wyznaczony pierwiastek**	**Wartość funkcji w pierwiastku**	**Liczba iteracji**	**Kod błędu**
mbisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
mstycznych	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
msiecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

Tabela 1: Wyniki eksperymentów dla $f_0(x) = \sin x - (\frac{x}{2})^2$

4.4 Wnioski

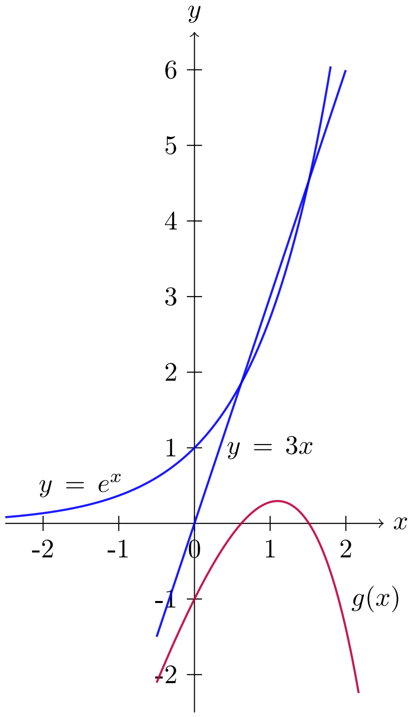
- używając metody bisekcji, stycznych oraz siecznych z podobnymi parametrami początkowymi i taką samą zadaną dokładnością otrzymano bliskie sobie wartości pierwiastka rozwiązywanego równania
- wartości najbliższe wartościom dokładnym otrzymano przy pomocy metody stycznych
- metoda bisekcji potrzebowała największej liczby iteracji do otrzymania wyniki; jest to zgodne z oczekiwaniami, ponieważ jej współczynnik zbieżności wynosi 2, metody stycznych 1 a metody siecznych ≈ 1.6
- znając pochodną funkcji, bliskie przybliżenie szukanego pierwiastka oraz wiedząc, że pochodna jest "dobra" warto użyć metody stycznych

5 Zadanie 5

5.1 Cel

Celem zadania jest znalezienie wartości x dla których wykresy funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$ przecinają się.

5.2 Rozwiązanie



Rysunek 2: Wizualizacja $y = 3x$, $y = e^x$, $g(x) = 3x - e^x$

Na podstawie wizualizacji funkcji $g(x) = 3x - e^x$ określono przedziały w których znajdują się miejsca zerowe tej funkcji, które są argumentami dla których wykresy funkcji o wzorach $3x$ oraz e^x przecinają się.
Dla przedziałów $[0.0, 1.0]$, $[1.0, 2.0]$ i dokładności $delta = epsilon = 10^{-4}$ użyto metody bisekcji.

5.3 Wyniki

Przedział	**Wyznaczony pierwiastek r**	**g(r)**	**Liczba iteracji**	**Kod błędu**	**3r**	**e^r**
$[0.0, 1.0]$	0.619140625	-9.066320343276146e-5	9	0	1.8573312117965672	1.857421875
$[1.0, 2.0]$	1.51171875	-0.000638447089475136	8	0	4.534517802910525	4.53515625
$[0.0, 2.0]$	-	-	-	1	-	-

Tabela 2: Wyniki eksperymentów dla $f_0(x) = \sin x - (\frac{x}{2})^2$

5.4 Wnioski

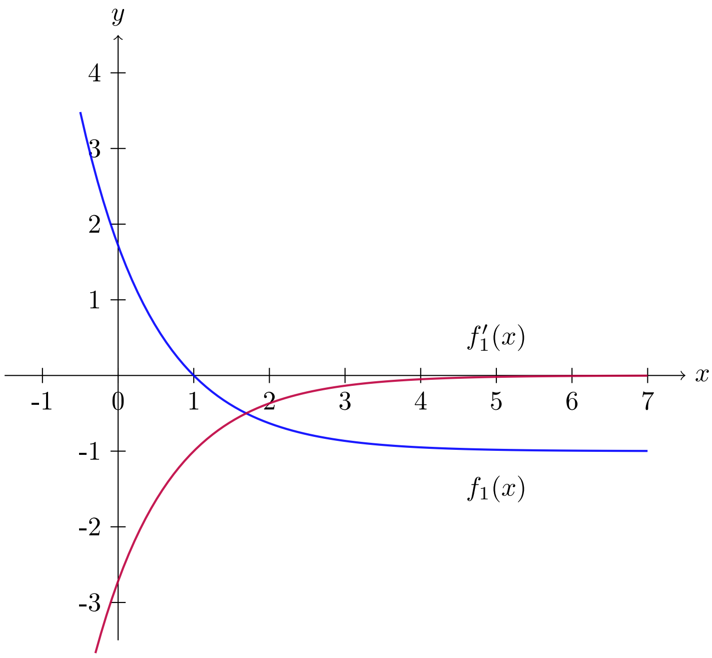
- metoda bisekcji poprawnie znajduje miejsce przecięcia dwóch funkcji po zapisaniu ich w odpowiedniej formie
- metoda wymaga uprzedniej analizy badanej funkcji, tj. znalezienia podprzedziałów, w których występuje zero funkcji oraz których końce mają rożne znaki wartości funkcji - tego warunku nie spełnia przedział $[0.0, 2.0]$

6 Zadanie 6

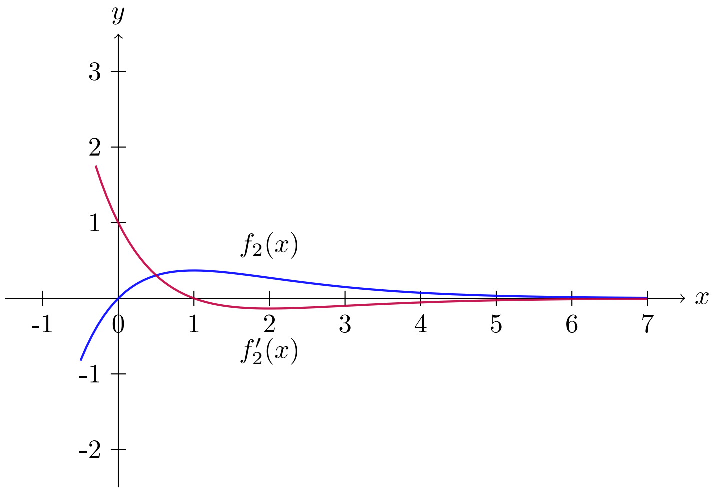
6.1 Cel

Celem zadania jest znalezienie miejsc zerowych funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$

6.2 Rozwiązanie



Rysunek 3: Wizualizacja $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_1'(x) = -e^{1-x}$



Rysunek 4: Wizualizacja $f_2(x) = xe^{-x}$ oraz $f_2'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

Przetestowano zaimplementowane funkcje dla różnych dany początkowych oraz $delta = epsilon = 10^{-5}$.

6.3 Wyniki

6.3.1 Metoda bisekcji dla $f_1(x)$

a	b	Wyznaczone zero	Wartość w zerze	Liczba iteracji	Kod błędu
0.0	2.0	1.0	0.0	1	0
-1.0	5.0	1.00006103515625	-6.1033293642709374e-5	15	0
1.0	512.0	1.0000609159469604	-6.0914091621788735e-5	23	0
256.5	-256.5	0.9999961853027344,	3.814704541582614e-6	18	0
$-5.0 \cdot 10^6$	$5.0 \cdot 10^6$	1.00000761449337	-7.614464379912533e-6	33	0

6.3.2 Metoda bisekcji dla $f_2(x)$

a	b	Wyznaczone zero	Wartość w zerze	Liczba iteracji	Kod błędu
-5.0	5.0	0.0	0.0	1	0
-3.0	7.0	3.0517578125e-5	3.0516646816636094e-5	16	0
0.0	10.0	7.62939453125e-5	7.628812476844761e-5	17	0
-3.0	0.0	-9.1552734375e-5	-9.156111666187633e-5	15	0
-2.0	1024.0	511.0	6.0805189678747255e-220	1	0

6.3.3 Metoda stycznych dla $f_1(x)$

x0	Wyznaczone zero	Wartość w zerze	Liczba iteracji	Kod błędu
1.0	1.0	0.0	0	0
0.0	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4	0
-2.0	0.9999877637594053	1.223631545776982e-5	6	0
-5.0	0.999984567543171	1.5432575910079294e-5	9	0
-7.0	0.9999844095452799	1.5590576251778288e-5	11	0
-10.0	0.9999843859457858	1.561417611428695e-5	14	0
-512.0	-256.0	4.10848635681094e111	256	1
2.0	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	0
5.0	0.9999996427095682	3.572904956339329e-7	54	0
7.0	-140.4287934927351	2.640855242262125e61	256	1
10.0	NaN	NaN	256	1
512.0	512.0	-1.0	1	2

6.3.4 Metoda stycznych dla $f_2(x)$

x0	Wyznaczone zero	Wartość w zerze	Liczba iteracji	Kod błędu
0.0	0.0	0.0	0	0
1.0	1.0	0.36787944117144233	1	2
2.0	12.228417566135983	5.979102365781934e-5	8	0
4.0	12.228417566135983	5.979102365781934e-5	7	0
16.0	16.0	1.8005627955081459e-6	0	0
256.0	256.0	1.6937628305176282e-109	0	0
-1.0	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
-2.0	-3.775651605669814e-5	-3.775794163811521e-5	6	0
-4.0	-1.5586599258811135e-6	-1.5586623553037713e-6	9	0
-16.0	-2.0358324570344394e-5	-2.0358739035942602e-5	22	0
-256.0	-4.042760404177798	-230.3703269366329	256	1

6.3.5 Metoda siecznych dla $f_1(x)$

x0	x1	Wyznaczone zero	Wartość w zerze	Liczba iteracji	Kod błędu
0.0	1.0	1.0	0.0	1	0
0.0	0.5	0.9999098501025039	9.015396112022067e-5	4	0
-10.0	-5.0	0.9999985625881762	1.43741285696386e-6	14	0
-32.0	0.0	2.561689409277081e-13	1.7182818284583492	1	0
1.5	3.0	0.9999997679008488	2.3209917809907665e-7	6	0
2.0	4.0	0.9999881213444997	1.1878726051905986e-5	8	0
2.0	16.0	1.9999999985244834	-0.6321205582857454	2	0
32.0	64.0	32.0	-0.9999999999999656	2	0

6.3.6 Metoda siecznych dla $f_2(x)$

x0	x1	Wyznaczone zero	Wartość w zerze	Liczba iteracji	Kod błędu
-1.0	0.0	0.0	0.0	1	0
-2.0	-1.0	-6.982568902521766e-6	-6.982617658960467e-6	7	0
-8.0	-4.0	-4.594470908463521e-5	-4.594682004942155e-5	13	0
-16.0	-1.0	-0.999999713216569	-2.718280269343002	1	0
1.0	2.0	11.777830432946175	9.036880338187556e-5	10	0

6.4 Obserwacje

6.4.1 Metoda bisekcji

- gdy końce początkowego przedziału leżą symetrycznie względem miejsca zerowego funkcji to zbieżność jest natychmiastowa
- gdy długość początkowego przedziału rośnie to rośnie także liczba niezbędnych iteracji do znalezienia miejsca zerowe funkcji
- gdy przedział początkowy jest "bardziej symetryczny" względem pierwiastka funkcji to potrzebna jest mniejsza liczba iteracji do jego znalezienia
- gdy funkcja nie przyjmuje wartości bliskich 0(bliskość określona poprzez podany do funkcji epsilon) to wynik metody dla dowolnie dużego przedziału jest poprawny

6.4.2 Metoda stycznych

- gdy początkowe przybliżenie jest wystarczająco bliskie rzeczywistej wartości to metoda od razu zwraca wynik
- gdy początkowa wartość jest bliska rozwiązania rzeczywistego to metoda szybko zbiega
- gdy wartość funkcji jest bliska zera dla początkowego przybliżenia to metoda bardzo szybko zwraca niepoprawny wynik
- gdy wartość bezwzględna pochodnej osiąga duże wartości to styczna jest prawie pionowa i wówczas aby metoda zbiegła niezbędna jest bardzo duża liczba iteracji
- gdy wartość bezwzględna pochodnej osiąga wartości bliskie zeru, ale nie tak bliskie "aby metoda to wykryła" to styczna jest prawie pozioma a kolejne przybliżenia są bardzo dalekie od rzeczywistego pierwiastka funkcji, przez co metoda rozbiega

6.4.3 Metoda siecznych

- gdy jedno z przybliżeń początkowych jest wystarczająco bliskie rzeczywistej wartości to metoda od razu zwraca wynik
- gdy przybliżenia początkowe są bliskie rozwiązania rzeczywistego to metoda szybko zbiega gdy wartość funkcji jest bliska zera dla początkowego przybliżenia to metoda bardzo szybko zwraca niepoprawny wynik
- gdy kolejne początkowe przybliżenia oddalają się od siebie to rośnie liczba niezbędnych iteracji do uzyskania wyniku
- gdy wartość bezwzględna pochodnej osiąga duże wartości to kolejne sieczne są prawie pionowe i wówczas kolejne przybliżenia są sobie bardzo bliskie co skutkute przyjęciem błędnej wartości jako przybliżenie pierwiastka badanej funkcji
- gdy wartość bezwzględna pochodnej osiąga wartości bliskie zeru, to kolejne wartości funkcji są bliskie i wtedy następuje dzielenie przez rożnicę bliskich sobie liczb co może prowadzić do niedokładności i rozbiegania metody

6.5 Wnioski

- metoda bisekcji jest zbieżna globalnie(z wyjątkami, gdy badana funkcja osiąga wartości bliskie zera) zaś metoda stycznych i siecznych jest zbieżna lokalnie
- metoda bisekcji(zbieżność kwadratowa) zbiega powoli zaś metoda stycznych(zbieżność liniowa) oraz metoda siecznych(współczynnik zbieżności ≈ 1.68) zbiegają szybko
- przed użyciem powyższych metod należy zbadać funkcję, której pierwiastka szukamy aby odpowiednio dobrać pozostałe parametry metod
- w celu zapewnienia zbieżności i szybkości wyznaczania pierwiastka można używać powyższych metod hybrydowo - metodą bisekcji znaleźć pierwsze przybliżenie a następnie użyć metody stycznych lub siecznych do ich poprawienia