Algebra

Zadanie 5, Lista 3

Współczynniki wielomianów stopnia co najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{R}_5$ tworzą wektory o ośmiu współrzędnych:

$$W(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_7x^7 \qquad \overrightarrow{v} = (a_0, a_1, ..., a_7)$$

Dodawanie i mnożenie wektorów działa tak jak dodawanie i mnożenie wielomianów:

$$A(x) = a_3x^3 + a_5x^5, \qquad B(x) = b_3x^3 + b_4x^4$$

$$\text{S(x)=A(x) + B(x)=}(a_3 + b_3)x^3 + b_4x^4 + a_5x^5 \qquad 2 \cdot A(x) = 2 \cdot (a_3x^3 + a_5x^5) = 2a_3x^3 + 2a_5x^5$$

Działamy w $\mathbb{R}_5$, więc:

$$2x^3 + 4x^3 = (6 \; mod \; 5) \cdot x^3 = 1 \cdot x^3 = x^3$$

Fakt 3.9: Jeśli F : V W jest przekształceniem liniowym oraz LIN($v_1, ..., v_k$) =V *to* $Im(F) = LIN(F(v_1), ..., F(v_k))$.

Skorzystamy z tego faktu do obliczenia obrazu (Im(F))

$\mathbb{V}$ jest przestrzenią wielomianów stopnia co najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{R}_5$.
Weźmy wektory standardowe $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, ... , $\overrightarrow{e_8}$. Wtedy:
$\mathbb{V}$=LIN($\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, ... , $\overrightarrow{e_8}$)
Im(F)=LIN(F($\overrightarrow{e_1}$), F($\overrightarrow{e_2}$), ... , F($\overrightarrow{e_8}$))

Z definicji przekształcenia:

$F(\overrightarrow{e_1}) = 0$
$F(\overrightarrow{e_2}) = 1$
$F(\overrightarrow{e_3}) = 2x + 2$
$F(\overrightarrow{e_4}) = 3x^2 + 6x = 3x^2 + x$
$F(\overrightarrow{e_5}) = 4x^3 + 12x^4 = 4x^3 + 2x^4$
$F(\overrightarrow{e_6}) = 5x^4 + 20x^3 = 0$
$F(\overrightarrow{e_7}) = 6x^5 + 30x^4 = x^5$
$F(\overrightarrow{e_8}) = 7x^6 + 42x^5 = 2x^6 + 2x^5$

Definicja 2.1 (notatki):, B jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, gdy LIN(B) = $\mathbb{V}$ oraz B jest liniowo niezależny.
Wektory niezależne ze zbioru $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ... , \overrightarrow{e_8})\}$ tworzą bazę $\mathbb{V}$.
Wyznaczymy ją przeprowadzając eliminację Gaussa:

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 2&2&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&0&0&0\\ 0&0&2&4&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&2&0 \end{array}\right| \sim^1 \left|\begin{array}{cccccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 2&2&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&0&0&0\\ 0&0&2&4&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right| \sim^2 \left|\begin{array}{cccccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right|$$

$\sim^1$: **Przeniesienie wierszy pustych na dół macierzy**
$\sim^2$: **Odjęcie od siebie wierszy i podzielenie (aby doprowadzić do postaci z samymi jedynkami)**

Stąd:
Baza obrazu: $\{1, x, x^2, x^3, x^5, x^6\}$ (odczytujemy niezerowe kolumny) $dim(Im(F)) = 6$ (6 elementów bazy)
Baza jądra: $\{x^4, x^7\}$ (2 zerowe kolumny macierzy) $dim(ker(F)) = 2$ (2 elementy jądra)

Twierdzenie 3.10:

$$dim(\mathbb{V}) = dim(Im(F)) + dim(ker(F))$$

$$dim(\mathbb{V}) = 8 = dim(Im(F)) + dim(ker(F) = 6 + 2$$

Co zgadza się z twierdzeniem 3.10