Ile razy trzynastego przypada w piątek? O zadaniu 2 z listy 3

Antoni Kościelski

1 Pierwsze spostrzeżenia

Ponumerujmy dni tygodnia. Poniedziałek ma numer 1, wtorek – 2, sobota – 6. Łatwo domyślić się jakie numery mają pozostałe dni robocze. Kłopot jest z niedzielą. Powinna być siódmym dniem tygodnia, ale umówmy się, że ma numer 0. Do numerów dni będziemy dodawać jakieś liczby. Będzie to jednak dodawanie modulo 7, które będziemy oznaczać symbolem $+_7$.

Będziemy rozważać funkcję dt, która dacie i numerowi roku przyporządkowuje numer dnia tygodnia przypadający w wybranym dniu roku będącego argumentem. Jeżeli data jest ustalona, będziemy ją pomijać w zapisie. Tak więc, jeżeli D oznacza 23 marca, to

$$dt_D(2021) = dt_{23marca}(2021) = dt(2021) = 2.$$

Nie definiujemy funkcji dt_D dla daty 29 lutego.

Definicja funkcji dt zależy oczywiście od numeracji lat i zasad tworzenia kalendarza. Dla uproszczenia, przez chwilę będziemy zakładać, że lata przestępne występują regularnie co 4 lata, ewentualnie ograniczamy nasze rozważania do okresu, w którym podany warunek jest spełniony. Wtedy funkcja dt spełnia następujący, łatwy do sprawdzenia warunek rekurencyjny:

$$dt(n+1) = \begin{cases} dt(n) +_7 2 & \text{gdy } n \equiv 0 \textbf{ mod } 4 \text{ i data } D \text{ przypada przed 29 lutego,} \\ dt(n) +_7 2 & \text{gdy } n \equiv 3 \textbf{ mod } 4 \text{ i data } D \text{ przypada po 29 lutego,} \\ dt(n) +_7 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wynika z niego przez rozważenie przypadków, że

$$dt(n+4) = dt(n) +_7 5$$

dla wszystkich n, a także

$$dt(n+28) = dt(n) +_7 35 = dt(n).$$

Zajmijmy się teraz ciągiem

$$dt(n),\ dt(n+1),\ dt(n+2),\ \ldots,\ dt(n+27).$$

Biorąc co czwarty element tego ciągu rozbijamy go na zbiory

$$X_i = \{dt(n+i+4k) \mid k = 0, 1, \ldots, 6\}$$

dla $i = 0, 1, 2$ i 3. Są to zbiory postaci $\{a + 5k \textbf{ mod } 7 \mid k = 0, 1, \ldots, 6\}$ i wszystkie są siedmioelementowe. Wobec tego, w rozważanym ciągu każda liczba naturalna < 7 występuje dokładnie 4 razy. Czyli w każdym okresie 28 lat, w którym lata przestępne pojawiają się regularnie, data D przypada w ustalony dzień tygodnia dokładnie 4 razy.

2 Dokładniejsza formalizacja sytuacji

Niech teraz $nr_D(n)$ oznacza numer dnia o dacie D w roku n, czyli liczbę dni w roku n o dacie wcześniejszej niż D. Mamy więc $nr_{1stycznia}(n) = 0$.

Chcielibyśmy, aby zachodził wzór

$$nr_D(m) - nr_{D'}(m) = nr_D(n) - nr_{D'}(n), \tag{1}$$

który mówi, że między datami D i D' w latach m i n upływa tyle samo dni. Niestety, nie jest on prawdziwy, a to przez 29 lutego. Zachodzi jednak w dwóch przypadkach: gdy lata m i n są tego samego rodzaju (przestępne lub nie), oraz gdy daty D i D' są tego samego rodzaju, a więc albo gdy obie daty są z początku roku (z przed 29 lutego), albo z końca roku (po 29 lutego). Datę 29 lutego będziemy ignorować, nie będzie dla nas normalną datą, ale musimy uwzględnić jej istnienie. Powinniśmy w ogóle unikać dat z 29 dniem miesiąca.

W dalszych rozważaniach zwykle zakładamy, że zajmujemy datami tego samego rodzaju, i tym samym, że zachodzi wzór (1). Można mu nadać postać

$$nr_D(m) - nr_D(n) = nr_{D'}(m) - nr_{D'}(n). \tag{2}$$

Dni tygodnia zmieniają się cyklicznie. Mamy więc następujący wzór

$$dt_D(n) = nr_D(n) +_7 dt_{1stycznia}(n)$$

(operacje związane z numerami dni tygodnia wykonujemy modulo 7, wynik powinien być < 7). Stąd, dla dat tego samego rodzaju wzorowi (2) można nadać postać

$$dt_D(m) -_7 dt_D(n) = dt_{D'}(m) -_7 dt_{D'}(n). \tag{3}$$

Wzór (3) stwierdza, że wartość

$$p(m, n) = dt_D(n) -_7 dt_D(m)$$

($m < n$) zależy od rodzaju D, ale nie zależy od samej daty i jest taka sama dla dat tego samego rodzaju. Będziemy nazywać ją przesunięciem.

Przesunięcia spełniają oczywistą równość

$$p(m, n) = p(m, k) +_7 p(k, n)$$

($m < k < n$). Łatwo też sprawdzić, że dla dat z początku roku mamy

$$p(m, m+1) = \begin{cases} 2 & \text{jeżeli rok } m \text{ jest przestępny} \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

a dla dat końcowych –

$$p(m, m+1) = \begin{cases} 2 & \text{jeżeli rok } m+1 \text{ jest przestępny} \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wzory te wymagają założenia, że żadne dwa kolejne lata nie są przestępne.

Będzie jeszcze potrzebne pojęcie okresu. Pojęcie to możemy formalizować jako skończony przedział $[m, n)$ w zbiorze liczb naturalnych (lepiej: prawostronnie otwarty, choć to ma niewielkie znaczenie), ale chodzi nam o okres czasu, lata od roku o numerze m do roku poprzedzającego rok n.

Dla ustalonej daty D będziemy rozważać tablicę indeksowaną liczbami < 7 (lub wektor o siedmiu współrzędnych) $L_D(okres)$ ($L(okres)$ dla ustalonego D), której i-ty element jest dany wzorem

$$L_D(okres)[i] = liczba\ elementow\ zbioru\ \{k \in okres : dt_D(k) = i\}.$$

Tak więc na przykład data D w rozważanym okresie *okres* przypada $L_D(okres)[3]$ razy w środę. Znowu mamy oczywiste wzory

$$L([m,n))[i] = L([m,k))[i] + L([k,n))[i] \tag{4}$$

(w tym wzorze dodajemy liczby naturalne) oraz

$$L([m,n)) = L([m,k)) + L([k,n))$$

(teraz dodajemy wektory).

Okresy $[m_1, n_1)$ i $[m_2, n_2)$ nazywamy analogicznymi, jeżeli $m_1 - m_2 = n_1 - m_2$ oraz każdy rok $k \in [m_1, n_1)$ jest przestępny wtedy i tylko wtedy, gdy przestępnym jest rok $k - m_1 + m_2$.

Przyjmijmy, że $m_1 < m_2$. Dla analogicznych okresów $[m_1, n_1)$ i $[m_2, n_2)$ oraz $j < n_1 - m_1$ mamy $p(m_1, m_1 + j) = p(m_2, m_2 + j)$. Można to łatwo dowieść przez indukcję korzystając z przytoczonych własności przesunięcia p. Zachodzi też równość

$$p(m_1, m_1 + j) +_7 p(m_1 + j, m_2 + j) = p(m_1, m_2 + j) = p(m_1, m_2) +_7 p(m_2, m_2 + j).$$

Stąd dla $j < n_1 - m_1$ otrzymujemy, że

$$p(m_1 + j, m_2 + j) = p(m_1, m_2 + j) -_7 p(m_1, m_1 + j) = p(m_1, m_2).$$

Ta równość z kolei pozwala dowieść najważniejszy wzór dla analogicznych okresów $[m_1, n_1)$ i $[m_2, n_2)$:

$$\begin{aligned}
&L([m_2, n_2))[i] = \\
&= |\ \{k \in [m_2, n_2) : dt(k) = i\}\ | = |\ \{j < n_1 - m_1 : dt(m_2 + j) = i\}\ | = \\
&= |\ \{j < n_1 - m_1 : dt(m_1 + j) +_7 p(m_1 + j, m_2 + j) = i\}\ | = \\
&= |\ \{j < n_1 - m_1 : dt(m_1 + j) = i -_7 p(m_1, m_2)\}\ | = L([m_1, n_1))[i -_7 p(m_1, m_2)].
\end{aligned}$$

Wzór ten stwierdza, że mając tablicę $L(okres)$ wyliczenie takiej tablicy dla analogicznego okresu wymaga stosownego przesunięcia zawartości $L(okres)$. Dowiedliśmy więc, że dla analogicznych okresów mamy

$$L([m_2, n_2))[i] = L([m_1, n_1))[i -_7 p(m_1, m_2)]. \tag{5}$$

3 Obliczenia

3.1 Okresy czteroletnie

Dla krótkich okresów wyliczenie odpowiednich tablic i przesunięć nie wymaga żadnej teorii, choć można się nią posłużyć. Niżej są przedstawione tablice L_D dla pojedyńczej daty D będącej niedzielą w roku n oraz potrzebne przesunięcia

$p = p(n, n+4)$ w czterech przypadkach. Rozważamy dwa rodzaje okresów czteroletnich: złożone z trzech zwykłych lat, po których jest rok przestępny, oraz złożone z czterch zwykłych lat. Obliczenia zależą też od rodzaju daty: daty mogą być z początku roku (sprzed 29 lutego) lub z końca roku.

okres	*data*	$L[0]$	$L[1]$	$L[2]$	$L[3]$	$L[4]$	$L[5]$	$L[6]$	p
3 zwykłe i przestępny	$D < 29.02$	1	1	1	1	0	0	0	5
3 zwykłe i przestępny	$D > 29.02$	1	1	1	0	1	0	0	5
4 zwykłe	$D < 29.02$	1	1	1	1	0	0	0	4
4 zwykłe	$D > 29.02$	1	1	1	1	0	0	0	4

3.2 Okres dwunastoletni

Teraz będziemy zajmować się tylko okresami, które składają się trzech kolejnych okresów złożonych z trzech lat zwykłych i z roku przestępnego. Cały czas obowiązuje założenie, że w pierwszym roku okresu wybrana data przypada w niedzielę.

Najpierw zajmujemy się datami z początku roku. Obliczenia są oparte o wzory (5) i (4). Wzór (5) każe odpowiednio przesuwać tablicę L. Wytłuszczone cyfry pokazują, jak jest przesuwana zawartość pierwszego elementu tablicy. Wzór (4) każe potem sumować kolumny.

$[po,$	$ko)$	$dt_D(po)$	$L[0]$	$L[1]$	$L[2]$	$L[3]$	$L[4]$	$L[5]$	$L[6]$	$p(po, ko)$
n	$n+4$	0	**1**	1	1	1	0	0	0	5
$n+4$	$n+8$	5	1	1	0	0	0	**1**	1	3
$n+8$	$n+12$	3	0	0	0	**1**	1	1	1	1
n	$n+12$		2	2	1	2	1	2	2	1

Dalej mamy to same obliczenia dla dat z drugiej części roku.

$[po,$	$ko)$	$dt_D(po)$	$L[0]$	$L[1]$	$L[2]$	$L[3]$	$L[4]$	$L[5]$	$L[6]$	$p(po, ko)$
n	$n+4$	0	**1**	1	1	0	1	0	0	5
$n+4$	$n+8$	5	1	0	1	0	0	**1**	1	3
$n+8$	$n+12$	3	1	0	0	**1**	1	1	0	1
n	$n+12$		3	1	2	1	2	2	1	1

3.3 Okres szesnastoletni

Teraz zajmiemy się okresami szesnastu lat pojawiającymi się pod koniec wieku, które kończą się czterema latami zwykłymi.

Dla dat z początku roku mamy:

$[po,$	$ko)$	$dt_D(po)$	$L[0]$	$L[1]$	$L[2]$	$L[3]$	$L[4]$	$L[5]$	$L[6]$	$p(po, ko)$
n	$n+12$	0	**2**	2	1	2	1	2	2	1
$n+12$	$n+16$	1	0	**1**	1	1	1	0	0	4
n	$n+16$	5	2	3	2	3	2	2	2	5

A teraz podobna tabela dla dat z drugie części roku:

$[po,$	$ko)$	$dt_D(po)$	$L[0]$	$L[1]$	$L[2]$	$L[3]$	$L[4]$	$L[5]$	$L[6]$	$p(po, ko)$
n	$n+12$	0	3	1	2	1	2	2	1	1
$n+12$	$n+16$	1	0	**1**	1	1	1	0	0	4
n	$n+16$	5	3	2	3	2	3	2	1	5

3.4 Cztery wieki

Teraz już możemy przeanalizować, co dzieje się w czterech całych wieków. Okres ten uważamy za sumę

$$[1601, 1685) \cup [1685, 1701) \cup [1701, 1785) \cup [1785, 1801) \cup [1801, 1885)\cup$$

$$\cup[1885, 1901) \cup [1901, 1985) \cup [1985, 1997) \cup [1997, 2001).$$

W poniższej tabelce brakuje okresów

$$[1601, 1685), [1701, 1785), [1801, 1885), [1901, 1985).$$

Każdy z nich jest sumą trzech regularnych okresów 28-letnich, w których każda data pojawia się w każdym dokładnie cztery razy, łącznie 576 razy. Warto zwrócić jeszcze uwagę, że takie 28-letnie okresy nie powodują przesunięcia dni tygodnia: jeżeli jakaś data w pierwszym roku była na przykład w środę, to także w pierwszym roku po zakończenia takiego okresu tę będzie w środę.

Najpierw prowadzimy obliczenia dla dat z początku roku:

$[po,$	$ko)$	$dt_D(po)$	$L[0]$	$L[1]$	$L[2]$	$L[3]$	$L[4]$	$L[5]$	$L[6]$	$p(po, ko)$
1685	1701	0	**2**	3	2	3	2	2	2	5
1785	1801	5	2	3	2	2	2	**2**	3	5
1885	1001	3	2	2	2	**2**	3	2	3	5
1985	1997	1	2	**2**	2	1	2	1	2	1
1997	2001	2	0	0	**1**	1	1	1	0	5
suma			8	10	9	9	10	8	10	0
			48	48	48	48	48	48	48	0
1601	2001	0	56	58	57	57	58	56	58	0

A teraz analogiczne obliczenia dla dat z końca roku:

$[po,$	$ko)$	$dt_D(po)$	$L[0]$	$L[1]$	$L[2]$	$L[3]$	$L[4]$	$L[5]$	$L[6]$	$p(po, ko)$
1685	1701	0	**3**	2	3	2	3	2	1	5
1785	1801	5	3	2	3	2	1	**3**	2	5
1885	1901	3	3	2	1	**3**	2	3	2	5
1985	1997	1	1	**3**	1	2	1	2	2	1
1997	2001	2	0	0	**1**	1	1	0	1	5
suma			10	9	9	10	8	10	8	0
			48	48	48	48	48	48	48	0
1601	2001	0	58	57	57	58	56	59	55	0

3.5 m-ty dzień miesiąca

Do tej pory prowadziliśmy obliczenia dla pojedyńczej daty. Teraz zajmiemy się dwunastoma datami trzynastego.

Wybierzmy początkową niedzielę w styczniu 1601 roku i przyjmijmy, że jest to m-ty dzień stycznia. Wyliczymy teraz, ile razy w ciągu 400 lat m-ty dzień miesiąca przypada w poszczególne dni tygodnia. Rok 1601 nie jest przestępny. W styczniu m-tym dniem tygodnia jest niedziela, w lutym – środa, w pozostałych miesiącach (a więc po 29 lutego) m-ty dzień miesiąca przypada jeden raz w niedzielę, poniedziałek, wtorek i czwartek oraz dwa razy w środę, piątek i sobotę.

dzień	*razy*	$L[0]$	$L[1]$	$L[2]$	$L[3]$	$L[4]$	$L[5]$	$L[6]$
0	1	**8**	10	9	9	10	8	10
3	1	10	8	10	**8**	10	9	9
0	1	**10**	9	9	10	8	10	8
1	1	8	**10**	9	9	10	8	10
2	1	10	8	**10**	9	9	10	8
3	2	8	10	8	**10**	9	9	10
		8	10	8	**10**	9	9	10
4	1	10	8	10	8	**10**	9	9
5	2	9	10	8	10	8	**10**	9
		9	10	8	10	8	**10**	9
6	2	9	9	10	8	10	8	**10**
		9	9	10	8	10	8	**10**
suma		12	15	13	13	15	12	16
plus		96	96	96	96	96	96	96
dni	*opuszcz.*	576	576	576	576	576	576	576
razem		684	687	685	685	687	684	688

Z przeprowadzonych obliczeń wynika także, data m-tego stycznia 2001 przypadnie w ten sam dzień, co w styczniu 1601 roku. Powinna więc przypaść w niedzielę. Wobec tego powinniśmy przyjąć, że m jest równe 7 albo 14. Ostateczny wynik obliczeń otrzymamy przesuwając odpowiednio liczby znalezionej tablicy:

p	$L[0]$	$L[1]$	$L[2]$	$L[3]$	$L[4]$	$L[5]$	$L[6]$
6	**684**	687	685	685	687	684	688
	687	685	685	687	684	688	**684**

Ostatecznie ustaliliśmy, że w okresie 400 lat od 1 stycznia 1601 trzynasty dzień miesiąca przypadał w piątek aż 688 razy.