Zad 9

Dana jest n-wymiarowa zmienna losowa $X=(X_1,\dots,X_n)^T$.
Zmienną $Y=(Y_1,\dots,Y_n)^T$ określamy następująco:

$$Y_1=\overline{X}, \quad Y_k=X_k-\overline{X} \quad \text{dla } k=2,\dots,n$$

Znaleźć wartość Jacobianu:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$$X_k=Y_k+Y_1 \quad \text{dla } k=2,\dots,n$$
$$Y_1=\overline{X} \Rightarrow nY_1=X_1+X_2+\dots+X_n$$
$$X_1=nY_1-X_2-X_3-\dots-X_n=Y_1-Y_2-Y_3-\dots-Y_n$$

Wyznaczymy teraz układ równań:

$$\begin{cases} X_1=Y_1-Y_2-Y_3-\dots-Y_n \\ X_2=Y_1+Y_2 \\ X_3=Y_1+Y_3 \\ \vdots \\ X_n=Y_1+Y_n \end{cases}$$

Teraz obliczamy Jacobian:

$$J=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}=n$$

(Wiemy to, bo obliczyliśmy ten Jacobian w zad 5 na liście 1.)

Zad 11

Chcemy znaleźć rozkład zmiennej

$$M=\frac{n}{\sigma^2}\cdot(\bar{X}\cdot\mu)^2.$$

Zakładamy, że niezależne zmienne losowe X_k podlegają rozkładowi

$$N(\mu,\sigma^2).$$

Wtedy

$$M_{X_k}(t)=e^{[\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2]}$$

$$M_{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k}(t)=M_{\bar{X}}(t)=\prod_{k=1}^{n}M_{\frac{1}{n}X_i}(t)=\left(e^{[\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2)}\right)^n\Big|_{t=\frac{t}{n}}=$$

$$=e^{[\mu t+\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2]}$$

$$M_{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\bar{X}}=e^{[\mu\frac{\sqrt{n}}{\sigma}t+\frac{1}{2n}\sigma^2\frac{n}{\sigma^2}t]}=e^{[\mu\frac{\sqrt{n}}{\sigma}t+\frac{1}{2}t^2]}$$

$$M_{[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\bar{X}-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mu]}=e^{[\mu\frac{\sqrt{n}}{\sigma}t+\frac{1}{2}t^2]}\cdot e^{[-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mu t]}=e^{\frac{1}{2}t^2}\sim N(0,1)$$

Nazwijmy: $[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\bar{X}-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mu]$ jako A.

Wtedy z powyższych rachunków $A\sim N(0,1)$.

Chcemy znaleźć rozkład zmiennej:

$$M=\frac{n}{\sigma^2}(\bar{X}\cdot\mu)^2=A^2$$

Z twierdzenia o rozkładzie chi-kwadrat:

$$Y\sim N(0,1)\Rightarrow Y^2\sim\chi^2(1).$$

Stąd

$$A^2=M\sim\chi(1)\wedge M\sim\mathrm{Gamma}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$