Uwagi do zadania 11 z listy 6

Antoni Kościelski

1 Zadanie 11

Sformułowanie tego zadania nie do końca jest dla mnie jasne. Na przykład, rozwiązanie części a) mogłoby polegać na uzasadnieniu implikacji stwierdzającej, że równość $M_Y(t) = M_X(2t) \cdot M_X(4t)$ pociąga za sobą równość zmiennej Y i pewnej zmiennej postaci $g(X)$. Takiej własności nie da się dowieść, funkcja generująca wyznacza najwyżej rozkład zmiennej, a zmienne o danym rozkładzie mogą być określone na bardzo różnych przestrzeniach i wtedy muszą być różne. Nie jestem też pewien, czy dla określonej przestrzeni da się wskazać taką funkcję g, choć może zwrot "Y jest pewną funkcją X" należy tu rozumieć szerzej niż zwykle. Także nie wiem, jak dokładnie na wykładzie zostało omówione twierdzenie o tym, że funkcja generująca momenty wyznacza rozkład zmiennej (funkcje te wykorzystujemy właśnie do ustalania rozkładów zmiennych). Chyba więc rozwiązanie tego zadania powinno polegać na wskazaniu zależności między zmiennymi X i Y, gwarantującej podaną równość, która jest dostatecznie ogólna. Może też chodzić o odpowiedź na pytanie, jaki powinien być związek między zmiennymi, o ile jakiś jest potrzebny.

1.0.1 Część a)

Może przyjrzyjmy się następującemu przykładowi: czasem siedząc sobie w kawiarni gramy z innymi bywalcami np. w szachy, ale będzie nas interesować bardzo prymitywna gra, w której przeciwnik obstawia wynik rzutu monetą i kładzie na stole złotówkę, rozgrywający kładzie na stole drugą złotówkę i rzuca monetą. Jeżeli przeciwnik dobrze przewidział wynik rzutu, to zabiera ze stołu monety, w przeciwnym razie monety przypadają rozgrywającemu.

W ten sposób została określona przestrzeń zdarzeń elementarnych, czyli rozgrywek w opisaną grę. Wszystko zależy od tego, kto gra, kiedy, jaka jest moneta, od siły porywów wiatru i mnóstwa innych czynników.

Na tej przestrzeni możemy zdefiniować zmienną losową, którą jest zmiana liczby złotówek w posiadaniu rozgrywającego w wyniku rozegrania danej partii. Zmienna ta przyjmuje dwie wartości: 1 i -1.

Powinniśmy jakoś ustalić prawdopodobieństwa, z jakimi te wartości są przyjmowane. Może być różnie, ale zwykle w takich sytuacjach wydaje się nam, że obie wartości są przyjmowane z prawdopodobieństwem 1/2. Teraz możemy uruchomić jakąś matematykę.

Znajdźmy więc funkcję generującą momenty zmiennej X. Jest to

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^{-t} + e^t}{2}.$$

Zmieńmy teraz zasady gry, przyjmijmy, że gracze kładą na stół po 2 złote. Teraz sytuację opisuje zmienna $X_2 = 2 \cdot X$. Przyjmuje z równym prawdopodobieństwem dwie wartości 2 i -2. Jej funkcja generująca momenty jest dana wzorem

$$M_{X_2}(t) = M_{2X}(t) = E(e^{2tX}) = \frac{e^{-2t} + e^{2t}}{2} = M_X(2t).$$

Analogicznie będzie, jeżeli liczbę 2 zastąpimy inną, np. 4 lub 6.

Zauważmy teraz, że

$$M_X(2t) \cdot M_X(4t) = \frac{e^{-2t} + e^{2t}}{2} \cdot \frac{e^{-4t} + e^{4t}}{2} = \frac{e^{-6t} + e^{-2t} + e^{2t} + e^{6t}}{4}$$

i oczywiście nie jest to funkcja generująca momenty zmiennej $6X$.

Zajmimy się teraz inną grą, w której nasz gracz gra z dwoma przeciwnikami. Partia w tej grze polega na rozegraniu partyjki najpierw z pierwszym, a potem z drugim przeciwnikiem. Oczywiście zakładamy, że wynik rzutu monetą dla pierwszego przeciwnika nie wpływu na wynik rzutu dla drugiego. Ponadto z pierwszym przeciwnikiem grą toczy się o 2 złote, a z drugim – o 4 złote.

Po pierwsze zauważmy, że zmieniliśmy przestrzeń zdarzeń elementarnych. W tej przestrzeni możemy zdefiniować zmienną losową Y równą zyskowi rozgrywającego z pojedyńczej partii. Zmienna ta przyjmuje przyjmuje cztery wartości: -6, gdy obaj przeciwnicy rozgrywającego przewidzą wynik rzutu monetą, -2, gdy tylko drugi trafnie poda wynik, poza tym 2 i 6. Zdarzenia "wypadło to, co podał 1. przeciwnik" i "wypadło to, co przewidział 2. przeciwnik" zachodzą z prawdopodobieństwem 1/2. Jeżeli są niezależne, to zmienna Y przyjmuje wartość -6 z prawdopodobieństwem 1/4 i z tym samym prawdopodobieństwem przyjmuje pozostałe wartości. Widać, że

$$M_Y(t) = \frac{e^{-6t} + e^{-2t} + e^{2t} + e^{6t}}{4} = M_X(2t) \cdot M_X(4t).$$

W tej przestrzeni możemy też zdefiniować dwie inne zmienne, Y_1 i Y_2, odpowiednio równe zyskowi w części partii z 1 i 2 przeciwnikiem. Zmienne powinny się okazać niezależne i spełniać związek $Y = Y_1 + Y_2$, a ich funkcje generujące powinny być równe $M_X(2t)$ i $M_X(4t)$.

Odpowiedź na pytanie z zadania powinna być następująca: zmienna Y jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych Y_1 i Y_2 o rozkładach odpowiednio równym rozkładom zmiennych $2X$ i $4X$. Wyliczenie funkcji generującej momenty $M_Y(t)$ jest właściwie oczywiste i wynika z najważnieszych własności funkcji generujących i niezbędnych założeń.

1.1 Część b)

W tej części zadania chyba wszystko jest oczywiste. Jeżeli mamy zmienną X, to zmienna Y określona na tej samej przestrzeni, co X i spełniająca równość $Y = X + 2$ ma podaną w treści zadania funkcję generującą momenty. Jest to oczywista konsekwencja definicji funkcji generującej momenty.

1.2 Część c)

Tym razem dobre rozwiązanie zadania może być trudniejsze do wymyślenia, choć jest bardzo proste. Równość $M_Y(t) = 4M_X(t)$ nie może zajść dla żadnych zmiennych. Gdyby zachodziła, to mielibyśmy

$$1 = E(1) = E(e^{0 \cdot Y}) = M_Y(0) = 4M_X(0) = 4,$$

a to nie jest możliwe.