

Zad 9

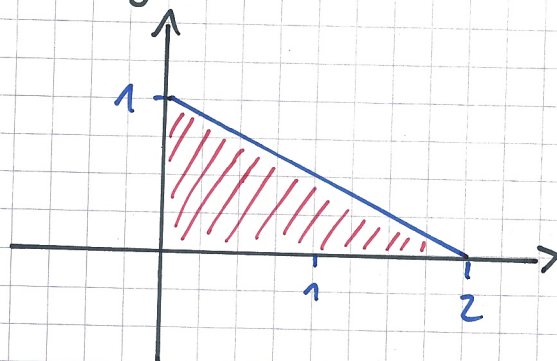
Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość $f(x, y) = \frac{15}{2} x^2 y$

Równanie prostej ograniczającej:

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Całka z gęstości powinna wynosić 1.

$$\int_0^2 \int_0^{1-\frac{1}{2}x} \frac{15}{2} x^2 y dy dx = 1$$



$$0 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 1 - \frac{1}{2}x$$

$$\begin{cases} T = \frac{x}{2} \\ Z = Y, \end{cases} \quad \begin{cases} X = TY = TZ \\ Y = Z \end{cases}$$

Obliczymy Jakobian

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial T} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial T} & \frac{\partial y}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z & T \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = Z$$

$$g(t, z) = f(x(t, z), y(t, z)) \cdot |J| = \frac{15}{2} \overbrace{t^2}^{x^2, x=tz} \overbrace{z^2}^{y^2, y=z} \cdot 2 \cdot 2^{\overbrace{1}^{|J|}} = \frac{15}{2} t^2 z^4$$

Granice:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 &\Rightarrow 0 \leq t \cdot z \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{1}{2}x &\Rightarrow 0 \leq z \leq 1 - \frac{1}{2}tz \end{aligned} \right\} \Rightarrow t \geq 0, \quad 0 \leq z \leq \frac{2}{t+2}$$

$$g_1(T) = \int_0^{\frac{2}{t+2}} \frac{15}{2} t^2 z^4 dz = \frac{48 t^2}{(t+2)^5} \leftarrow \text{funkcja gęstości zmiennej losowej } T$$

$$\int_0^\infty \frac{48 t^2}{(t+2)^5} dt = 1 \leftarrow \text{Wynosi 1, czyli wyznaczyliśmy } g_1(T) \text{ prawidłowo.}$$