

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Dodatek do wykładu z 8. marca

Zadania

1. Prosty dowód równości $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Zachodzą równości:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1, \quad E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

Jest zatem $E(aX + b) = \int_{\mathbb{R}} (ax + b) f(x) dx = a \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx + b \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = aE(X) + b$.

Można powiedzieć ogólniej: jeżeli $Y = g(X)$, to $E(Y) = E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$.

2. Definicja dystrybuanty zmiennej losowej.

Definicja 1. Niech X będzie zmienną losową. Dystrybantą $F_X(t)$ nazywamy funkcję określoną jako $F_X(t) = P(X < t)$.

Jeżeli wiadomo o jakiej zmiennej losowej mówimy, to używamy oznaczenia $F(t)$. W wypadku dyskretnym $F_X(t) = \sum_{x_i < t} p_i$, w wypadku zmiennej typu ciągłego $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$.

3. Nawiązując do wypadku ciągłego i dystrybuanty $F(t)$ powołajmy się na tzw. "pierwsze główne twierdzenie rachunku całkowego".

Twierdzenie 1.

Funkcja $f(x)$ jest całkowalna na zbiorze \mathbb{R} . Niech $F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$. Jest wówczas:

- (a) funkcja $F(t)$ jest ciągła w \mathbb{R} ,
- (b) funkcja $F(t)$ jest różniczkowalna w każdym punkcie t ciągłości funkcji $f(t)$, i w tychże punktach jest $F'(t) = f(t)$.

Z czysto praktycznego (obliczeniowego) punktu widzenia interesuje nas podpunkt (b).

4. Dodatkowy przykład na zamianę zmiennych (czyli komentarz do zadania L1.6).

Weźmy pod uwagę funkcję $f(x, y) = xy$ na obszarze $[0, 2] \times [0, 1]$. Sprawdzamy na początek, że

$$\int_0^2 \int_0^1 xy dy dx = \int_0^2 \frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^1 dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = 1.$$

Wprowadźmy nowe zmienne $S = X + Y$, $T = X - Y$. Przekształcenie odwrotne to $X = \frac{S+T}{2}$ oraz $Y = \frac{S-T}{2}$. Obliczenie $J \equiv J_{xy}$ daje

$$J_{xy} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \quad (1)$$

Zauważmy też, że (pochodna funkcji odwrotnej to odwrotność pochodnej wyjściowej funkcji)

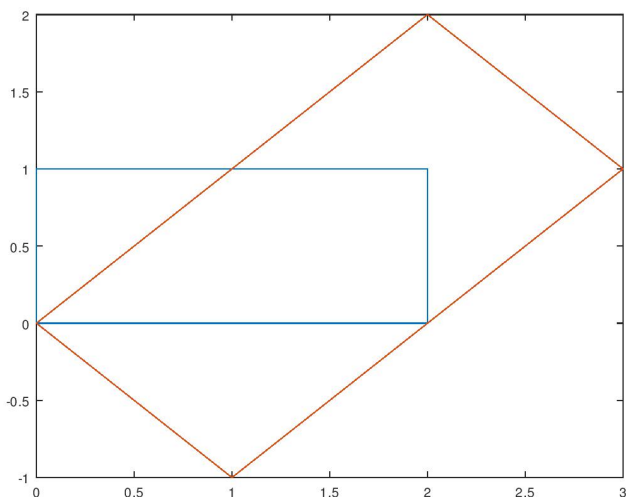
$$J_{st} = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 = \frac{1}{J_{xy}}.$$

Mamy więc dwa elementy dla funkcji $f(x(s, t), y(s, t))$:

$$(a) \quad g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t)) = \frac{s^2 - t^2}{4},$$

$$(b) \quad |J_{xy}| = \frac{1}{2}$$

Do określenia pozostaje jeszcze znalezienie obszaru całkowania. Wprawdzie $s \in [0, 3]$, $t \in [-1, 2]$ ale $\neg((s, t) \in [0, 3] \times [-1, 2])$. Na rysunku poniżej zaznaczono obszary całkowania dla funkcji $f(x, y)$, $g(s, t)$. Rozpoczynamy od stwierdzenia, że $s \in [0, 3]$. Dla ustalonego s należy znaleźć przedział zmienności dla t . Wówczas przejdziemy do obliczenia całki $\int_0^3 \int_{l(s)}^{h(s)} g(s, t) |J| dt ds$. Symbole $l(s), h(s)$ oznaczają granice całkowania po zmiennej t przy ustalonej wartości s .



$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 < \frac{s+t}{2} < 2 \\ 0 < \frac{s-t}{2} < 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -s < t < 4-s \\ s-2 < t < s \end{cases}.$$

W podsumowaniu: dla ustalonego $s \in [0, 3]$ jest $t \in [\max\{-s, s-2\}, \min\{4-s, s\}]$. Pod całką występuje wyrażenie $\frac{s^2 - t^2}{8} dt ds$, natomiast całki oznaczone są następujące

$$\int_0^1 \int_{-s}^s \dots + \int_1^2 \int_{s-2}^s \dots + \int_2^3 \int_{s-2}^{4-s} \dots = 1.$$

Witold Karczewski