Zad 10

Niech $Y_1 = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$, $Y_2 = X_{(2)}$, $Y_3 = \frac{X_{(1)}+X_{(3)}}{2}$.

Chcemy udowodnić, że wartości oczekiwane są takie same:

$$E(Y_1) = E(Y_2) = E(Y_3) = \frac{a}{2}.$$

Dodatkowo zakładamy, że $X_k \sim U[0,a]$, $k=1,2,3$.

1. Policzymy $E(Y_1)$

$$E(Y_1) = E\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right) = \text{(z własności wartości oczekiwanej)}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\left[E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)\right]$$

Wartość oczekiwana $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{a-0}{2}$ (z własności rozkładu jednostajn.)

$$E(Y_1) = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{a}{2} = \frac{a}{2} \quad \blacksquare$$

2. Policzymy $E(Y_2)$

Z własności rozkładu jednostajnego, gęstość $f(x) = \frac{1}{a-0} = \frac{1}{a}$

a dystrybuanta $F(x) = \frac{x-0}{a-0} = \frac{x}{a}$, dla każdego X_k.

Z zad 9 wiemy, że $f_{(2)}(x) = 6F(x)(1-F(x))\cdot f(x)$

Zatem $f_{(2)}(x) = 6\cdot\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} = 6\frac{x\left(1-\frac{x}{a}\right)}{a^2}$

$$E(Y_2) = E(X_{(2)}) = \int_0^a x f_{(2)}(x)\,dx = \int_0^a 6\frac{x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)}{a^2}dx = \frac{6}{a^2}\int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx =$$
$$= \frac{6}{a^2}\int_0^a x^2\,dx - \frac{6}{a^3}\int_0^a x^3\,dx = \frac{6}{a^2}\cdot\frac{1}{3}a^3 - \frac{6}{a^3}\cdot\frac{1}{4}a^4 = 2a - \frac{6}{4}a = \frac{1}{2}a \quad \blacksquare$$

3. Policzymy $E(Y_3)$

Wiemy, że $Y_3 = \frac{X_{(1)} + X_{(3)}}{2} = \frac{3Y_1 - Y_2}{2}$

Stąd

(z wł. wart. oczek.)

$$E(Y_3) = E\left(\frac{3Y_1 - Y_2}{2}\right) = \frac{3E(Y_1) - E(Y_2)}{2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}{2} = \frac{2\frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{2}$$ ■

Zad 12

(X,Y) - oznacza wybrany losowo punkt na płaszczyźnie. Współrzędne X i Y są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0,1)$.
Od zmiennej (X,Y) przechodzimy do zmiennej (R,Θ), gdzie R i Θ są współrzędnymi biegunowymi punktu (X,Y).

Chcemy wykazać, że gęstość zmiennej (R,Θ) określona jest wzorem:

$$g(r,\Theta) = \frac{1}{2\pi} e^{\left(-\frac{r^2}{2}\right)}, \text{ gdzie } 0<\Theta<2\pi, \quad 0<r<\infty.$$

Z własności, że $X, Y \sim N(0,1)$ znamy funkcje gęstości X i Y:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{y^2}{2}\right)}$$

Z niezależności zmiennych X i Y:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)}, \quad \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{cases}$$

Wykonujemy podstawienie

$$X = R\cdot\cos\Theta$$
$$Y = R\cdot\sin\Theta$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \Theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\Theta & -R\cdot\sin\Theta \\ \sin\Theta & R\cdot\cos\Theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos^2\Theta\cdot R - \sin^2\Theta(-R) = R(\sin^2\Theta + \cos^2\Theta) = R\cdot 1 = R$$

$$g(r,\theta) = f_{X,Y}(x(R,\theta), y(R,\theta)) \cdot |J| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{\left(-\frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{2}\right)} \cdot r =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot r \cdot e^{\left(-\frac{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot r \cdot e^{\left(-\frac{r^2 \cdot 1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot r \cdot e^{\left(-\frac{r^2}{2}\right)}$$

$\blacksquare$