Uwagi do zadań z listy nr 4

Antoni Kościelski

1 Zadanie 1

Nie widzę w tym zadaniu żadnych trudności. Proponowałbym takie rozwiązanie: najpierw liczymy całki $\int e^{-x}\,dx$ i $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$, następnie po kolei całki nieoznaczone i oznaczone z funkcji xe^{-x} oraz x^2e^{-x}. Następnie, korzystając z otrzymanych rezultatów, przystępujemy do rozwiązywania kolejnych części zadania. Do tego poza definicjami nic więcej nie powinno być potrzebne. Badając niezależność zmiennych warto przypomnieć sobie komentarz do zadania 6 z listy 3.

2 Zadanie 2

Zadanie to można rozwiązać na dwa sposoby. Najprościej, najpierw dobieramy stała C tak, aby

$$\int_1^2\int_0^3 Cxy + x + y\;dxdy = 1.$$

Następnie sprawdzamy, czy funkcja f na swojej dziedzinie przyjmuje nieujemne wartości. Powinno być intuicyjnie jasne, że jeżeli funkcja f przyjmuje wartości ujemne, to przyjmuje je możliwie daleko od zera. Sprawdzamy więc, co się dzieje w punkcie o współrzędnych $x = 3$ i $y = 2$.

Można też ambitniej zacząć od ustalenia, dla jakich C funkcja f na swojej dziedzinie przyjmuje nieujemne wartości. Jest to szkolne zadanie, choć niebanalne. Okazuje się, że tak jest dla $C \geqslant \frac{-5}{6}$ (wystarczy zagwarantować, aby $f(3, 2) \geqslant 0$). Dalej wyliczamy C i porównujemy z liczbą $\frac{-5}{6}$.

3 Zadania 3 i 4

Nie widzę istotnych trudności.

4 Zadania 5, 6, 8 i 9

Bardzo podobne zadanie jest na liście 3 (zadanie 9).

5 Zadanie 7

5.1 Pewna uwaga

Sformułowanie zadania ma usterkę lub może obowiązuje w nim założenie domyślne. Brakuje założenia, że dystrubuanta F_X jest funkcją ciągłą. Założenie to jest spełnione dla zmiennych o ciągłych rozkładach, dla których istnieje gęstość f_X. Wtedy proste prawdopodobieństwa można obliczać wykonując odpowiednie całkowania, w tym dystrybuanta wyraża się wzorem

$$F_X(a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx.$$

Jeżeli dystrybuana F_X nie jest ciągła, to korzystając z monotoniczności i lewostronnej ciągłości znajdujemy liczby a i b takie, że

$$F_X(a) < b = \lim_{x \leftarrow a^+} F_X(x).$$

Wtedy oczywiście

$$X \leqslant a \vee a < X.$$

Stąd

$$X \leqslant a \vee a + \frac{1}{n} < X$$

dla pewnego n. Teraz z monotoniczności F_X mamy

$$F_X(X) \leqslant F_X(a) \vee b \leqslant F_X(a + \frac{1}{n}) \leqslant F_X(X).$$

Wobec tego, funkcja $F_X(X)$ nie przyjmuje żadnych wartości w przedziale $(F_X(a), b]$ i

$$P(F_X(a) < F_X(X) \leqslant b) = 0.$$

Dla zmiennej Y o rozkładzie $U(0,1)$ mamy jednak

$$P(F_X(a) < Y \leqslant b) = b - F_X(a) > 0.$$

5.2 Rozwiązanie elementarne

Jeżeli dystrybuanta $F_X : R \to [0,1]$ jest ciągła, to istnieje coś w rodzaju funkcji do niej odwrotnej. Weźmy $a \in (0,1)$ i zajmijmy się przeciwobrazem

$$F_X^{-1}(\{a\}) = \{x \in R : F_X(x) = a\}.$$

Własność Darboux implikuje, że ten przeciwobraz jest niepusty, monotoniczność dystrybuanty (słaba „rosnącość") – że jest odcinkiem, a jej ciągłość – że jest to odcinek domknięty. Przyjmijmy, że lewym końcem odcinka $F_X^{-1}(\{a\})$ jest $G(a) = \min F_X^{-1}(\{a\})$.

Oczywiście, $F_X(G(a)) = a$ dla wszystkich $a \in (0,1)$.

Wyliczymy teraz dystrybuantę zmiennej $Y = F_X(X)$. Dla $a \in (0,1)$ i $x \in R$ warunki $F_X(x) < a$ oraz $x < G(a)$ są równoważne. Stąd mamy

$$F_Y(a) = P(F_X(X) < a) = P(X < G(a)) = F_X(G(a)) = a,$$

a także

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a \leqslant 0 \\ a & \text{jeżeli } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jest to oczywiście dystrybuanta rozkładu jednostajnego $U(0,1)$.

5.3 Ważne twierdzenie

Mając zmienną losową X i jej rozkład często szukamy rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Y = h(X)$ dla rzeczywistej funkcji h. Z tego powodu podaje się różne zależności między tymi rozkładami. W szczególności na ćwiczeniach pojawił się już wzór taki, jak

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)|$$

podający zależność między gęstościami zmiennych X i $Y = h(X)$. Problemem jest tylko, czy ten wzór jest słuszny zawsze, czy tylko czasami, a jeżeli czasami, to jakie warunki muszą być spełnione, aby zachodził.

W literaturze (np. Mirosław Krzyśko, Statystyka matematyczna, wyd. nauk. UAM) można znaleźć następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1 *Przypuśćmy, że zmienna losowa X ma gęstość $f_X : R \to R$, $D = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$, a jest $h : R \to R$ przekształceniem, które zbiór D przeprowadza wzajemnie jednoznacznie na zbiór H. Wtedy jeżeli funkcja odwrotna h^{-1} ma ciągłą i niezerową pochodną, to funkcja f_Y dana wzorem*

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)|$$

na zbiorze H i przyjmująca wartość 0 poza H jest gęstością zmiennej losowej $h(X)$.

5.4 Drugie rozwiazanie

Będziemy korzystać z przytoczonego wyżej twierdzenia. Dodatkowo i nie wiadomo na jakiej podstawie będziemy zakładać, że gęstość f_X zmiennej X jest ciągła i dodatnia na całej prostej. Część przyjętych założeń jest mało istotna. Podobną trudność miałoby to zadanie przy założeniu, że gęstość jest dodatnia na pewnej półprostej lub na pewnym odcinku. Prawdę mówiąc, rzadko spotykamy się z gęstościami, które nie spełniają takich założeń.

W naszym przypadku h jest dystrybuantą F_X rozkładu zmiennej X (czyli $h = F_X$). Wiemy więc, że pochodna

$$h'(x) = (F_X)'(x) = f_X(x),$$

a więc funkcja h ma ciągłą i dodatnią pochodną. Ze znanych z analizy matematycznej twierdzeń (np. z twierdzenia o wartości średniej) wynika, że jest to funkcja rosnąca i w konsekwencji różnowartościowa. Niewątpliwie przekształca zbiór liczb rzeczywistych na odcinek $(0, 1)$. Ma więc funkcję odwrotną h^{-1} określoną na odcinku $(0, 1)$. Powołując się znowu na twierdzenia o ciągłości i różniczkowalności funkcji odwrotnej, które powinny być znane z analizy matematycznej, stwierdzamy, że funkcja h^{-1} spełnia założenia przytoczonej w poprzednim rozdzialiku twierdzenia. Możemy więc skorzystać z tego twierdzenia. W ten sposób otrzymujemy, że gęstość zmiennej $Y = h(X)$ wyraża się na odcinku $(0, 1)$ wzorem

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)| = (F_X)'(F_X^{-1}(y)) \cdot (F_X^{-1})'(y)$$

(dodatniość pochodnej h^{-1} wynika np. z wzoru pochodną funkcji odwrotnej). Licząc dalej na podstawie wzoru na pochodną złożenia otrzymujemy, że

$$(F_X)'(F_X^{-1}(y)) \cdot (F_X^{-1})'(y) = (F_X(F_X^{-1}(y))' = y' = 1.$$

Ostatecznie, gęstość f_Y przyjmuje wartość 1 na odcinku $(0, 1)$ i jest równa 0 dla pozostałych argumentów. Nie ulega wątpliwości, że jest to gęstość rozkładu jednostajnego $U(0, 1)$.

6 Zadanie 10

Zostało pominięte.

7 Zadanie 11

Jest to zadanie tego samo typu, co kilka wcześniejszych. Ma jednak nowy element: zmienna, której gęstość szukamy nie jest w pełni określona. Naturalną dziedziną zmiennej dla przekszałconej zmiennej X jest dziedzina zmiennej X, co w tym przypadku jest niemożliwe. Mamy więc do wyboru dwa rozwiązania: albo poprawiamy teorię dopuszczając zmienne nie w pełni określone, albo zamiast $\frac{1}{X}$ rozważamy inaczej zdefiniowaną zmienną. W tym przypadku opowiedziałbym się za drugim rozwiązaniem. Przyjmijmy więc, że

$$Y = \frac{1}{X} = \begin{cases} \frac{1}{X} & \text{czyli odwrotność } X\text{, jeżeli } x \neq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Oczywiście, byłoby lepiej, gdyby wyżej zdefiniowana funkcja była inaczej oznaczana, ale może wystarczy, jeżeli będziemy pamiętać o zmianie definicji.

Zauważmy, że mamy trzy równoważności:

$$\frac{1}{X} < t \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad X \leqslant 0 \vee X > \frac{1}{t}$$

w przypadku, gdy $t > 0$,

$$\frac{1}{X} < t \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \frac{1}{t} < X < 0$$

dla $t < 0$ oraz

$$\frac{1}{X} < 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad X < 0.$$

Przytoczone równoważności trzeba sprawdzić uwzględniając zmianą definicje zmiennej Y, rozważając odpowiednie przypadki. Pozwalają one wyliczyć dystrybuantę Y:

$$F_Y(t) = P(\frac{1}{X} < t) = \begin{cases} P(X \leqslant 0 \vee X > \frac{1}{t}) & \text{jeżeli } t > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{gdy } t = 0 \\ P(\frac{1}{t} < X < 0) & \text{dla } t < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2} - F_X(\frac{1}{t}) & \text{jeżeli } t > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{gdy } t = 0 \\ \frac{1}{2} - F_X(\frac{1}{t}) & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

(trzeba uwzględnić ciągłość i symetryczność rozkładu zmiennej X).

Mając wzór na dystrybuantę Y bez trudu znajdujemy gęstość Y dla argumentów $t \neq 0$:

$$F'_Y(t) = -F'_X(\frac{1}{t}) \cdot \frac{-1}{t^2} = f_X(\frac{1}{t}) \cdot \frac{-1}{t^2} = f_X(t).$$

Pozostaje więc do zbadania gęstość Y dla $t = 0$.

Aby znaleźć pochodną F_Y w zerze liczymy pochodne jednostronne bezpośrednio z definicji i korzystając z reguły de l'Hospitala:

$$F'_Y(0) = \lim_{t \to 0-} \frac{\frac{1}{2} - F_X(\frac{1}{t}) - \frac{1}{2}}{t} = \lim_{t \to 0-} \frac{-f_X(\frac{1}{t}) \cdot \frac{-1}{t^2}}{1} = \lim_{t \to 0-} f_X(t) = f_X(0)$$

(i podobnie z prawej strony). Być może te rachunki da się jakoś ominąć.

8 Dodatek o zadaniu 6 z listy 3, raz jeszcze

Rozkład zmiennej losowej, gęstość i dystrybuanta rozkładu są funkcjami i mają swoje dziedziny. Co gorsze, dziedziny te można wybierać na wiele sposobów. Podstawowy, najbardziej ogólny i niewygodny sposób jest następujący: rozkład zwykłej zmiennej losowej jest prawdopodobieństwem określonym na σ-ciele wszystkich podzbiorów borelowskich zbioru liczb rzeczywistych, a gęstości i dystrybuanty są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych. W przypadku zmiennych dwuwymiarowych "wszystko" powinno być określone na R^2 zamiast na R.

Często (np. w zadaniu 5) rozkład definiujemy przez wskazanie gęstości określonej na mniejszej dziedzinie: zamiast na R^2 gęstość f została określona na mniejszej dziedzinie D, którą jest trójkąt uwidoczniony na rysunku (powiedzmy, że z brzegiem). Wtedy mamy dwie możliwości. Możemy myśleć, że co prawda gęstość została określona na D, ale w rzeczywistości jest określona na R^2 i poza D jest stale równa 0. Możemy też myśleć, że gęstość jednak nie jest określona poza D i wtedy "wszystko" musimy zrelatywizować do D. Ten drugi sposób jest wygodniejszy, ale trzeba pamiętać, że "wszystko" jest zrelatywizowane.

8.1 Nieco długie rozwiązanie

Podstawowe twierdzenie pozwalające na badanie niezależności zmiennych losowych w takiej sytuacji stwierdza, że

Twierdzenie 8.1 *Jeżeli X i Y są zmiennymi losowymi, ich rozkłady mają gęstości f_X i f_Y odpowiednio, a $f_{X,Y}$ jest gęstością łącznego rozkładu tych zmiennych, to zmienne te są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall x \in R \, \forall y \in R \;\; f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y). \;\; \Box$$

Twierdzenie to jest dostosowane sposobu myślenia, który zakłada, że gęstości są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych i wymaga testowania odpowiedniej równości dla wszystkich par liczb rzeczywistych. Wynika z niego natychmiast, że

Lemat 8.2 *Jeżeli gęstości f_X i f_Y niezależnych zmiennych losowych są dodatnie odpowiednio na odcinkach $[a,b]$ i $[c,d]$, to gęstość łączna $f_{X,Y}$ pary zmiennych X i Y jest dodatnia na prostokącie $[a,b] \times [c,d]$.* $\Box$

Stąd otrzymujemy, że dziedzina pary niezależnych zmiennych losowych przypomina prostąt (w prostych przypadkach jest wręcz prostokątem) i raczej nie powinna być trójkątem (chyba, że jest sztucznie określona na niepotrzebnie dużym trójkącie). Jest to zresztą zgodne z intuicjami. Jeżeli zmienne losowe mają gęstości określone na odcinkach, to dziedzina gęstości pary tych zmiennych powinna zależeć raczej od tych odcinków, być określona na iloczynie kartezjańskim tych odcinków i nie powinna w jakiś szczególny sposób zależeć od samych zmiennych.

W szczególności, samo zadanie 6 jest z rodzaju "głupich" pytań. Dobrym rozwiązania tego zadania jest stwierdzenie, że przecież zmienne z zadania nie mają prawa być niezależne: dziedzina gęstości łącznej zależy od jakiś związków między X i Y. Nie znaczy to, że zadanie jest niedobre, wszyscy powinniśmy umieć odpowiadać też na takie pytania.

Formalne rozwiązanie oczywiście wynika z przytoczonego twierdzenia. Mamy

$$\frac{27}{128} = \frac{3}{16} \cdot \frac{9}{8} = f_X(\frac{1}{2}) f_Y(\frac{3}{4}) \neq f_{X,Y}(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \;\; \text{(wart. nieokr., ew. } = 0),$$

a także

$$\frac{9}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = f_X(1) f_Y(\frac{1}{2}) \neq f_{X,Y}(1, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}.$$

9 Dodatek o zadaniu 9 z listy 3, raz jeszcze

Rozwiążemy dokładniej część a). Mamy więc zmienną losową X. Co o niej wiemy? No, że właśnie mamy problem "dziedzin". Trzeba go jakoś rozwiązać. A więc zakładam, że zmienna X przyjmuje wartości z przedziału $[-2, 2]$, ma rozkład jednostajny określony na tym przedziale, to znaczy jego gęstością f_X jest funkcja określona jedynie na tym odcinku, przyjmująca stale wartość $\frac{1}{4}$. Zajmijmy się więc zmienną losową $Y = | X |$. Łatwo ustalić, że przyjmuje ona wartości w przedziale $[0, 2]$. Będziemy szukać dystrybuanty F_Y (lub podobnej funkcji) dla zmiennej Y. Wtedy dla $t \in [0, 2]$ mamy

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(| X | < t) = P(-t < X < t) = \int_{-t}^{t} \frac{1}{4}\, dt = \frac{t}{2}$$

(a dla innych t – niekoniecznie, zwłaszcza zawodzi trzecia równość). Gdyby zmienna losowa Y miała ciągłą gęstość f, to także

$$P(Y < t) = \int_0^t f(x)\, dx = \frac{t}{2}.$$

Główne twierdzenie z podstawowego wykładu analizy matematycznej dla informatyków, dotyczące całki Riemanna stwierdza, że dla ciągłych funkcji podcałkowych, pochodna po t

$$\left(\int_0^t f(x)\, dx\right)' = f(t), \quad \text{a więc} \quad f(t) = \left(\frac{t}{2}\right)' = \frac{1}{2}.$$

W ten sposób pokazaliśmy dwie rzeczy:

1. dystrybuanta $F_Y : [0, 2] \to [0, 1]$ jest dana wzorem $F_Y(t) = \frac{t}{2}$,
2. jeżeli rozkład zmiennej Y ma na odcinku $[0, 2]$ ciągłą gęstość f, to $f(x) = \frac{1}{2}$.

Aby pozbyć się niepotrzebnego założenia zauważmy, że oba rozkłady: zmiennej Y i ten o gęstości f, mają tę samą dystrybuantę. Trzeba jeszcze wiedzieć, że dystrybuanta jednoznacznie wyznacza rozkład, a więc rozkład zmiennej Y jest rozkładem o gęstości f.

Może jeszcze drugi przykład bez szczegółów. Mając zmienną X o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[-1, 1]$ szukamy rozkładu zmiennej $Y = X^3$. Oczywiście Y przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$ i dla t z tego przedziału

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X^3 < t) = P(X < \sqrt[3]{t}) = \int_{-1}^{\sqrt[3]{t}} \frac{1}{2}\, dx = \frac{\sqrt[3]{t} + 1}{2}.$$

Stąd dla $t \in [-1, 1]$

$$f_Y(t) = \left(\frac{\sqrt[3]{t} + 1}{2}\right)' = \frac{1}{6\sqrt[3]{t^2}}.$$