

Karol Peszek - Opracowanie pomiarów z zadania M8

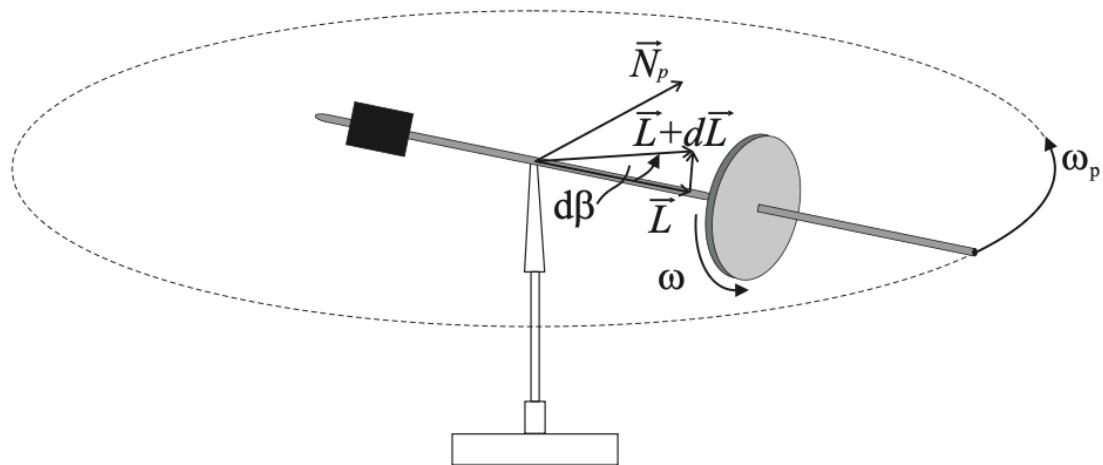
Zestaw pomiarowy 24

1. Cel ćwiczenia

Celem doświadczenia jest zbadanie dynamiki ruchu precesyjnego bąka symetrycznego. W szczególności analizie podlegają:

- Zależność okresu precesji T_p od okresu obrotu tarczy T .
- Wpływ masy dodatkowego obciążenia m na częstotliwość precesji
- Wyznaczenie bezwładności obrotowej tarczy J dwiema metodami dynamicznymi i jedną geometryczną

2. Podstawy teoretyczne



Żyroskop (bąk symetryczny) to bryła sztywna o symetrii obrotowej. Gdy tarcza obraca się z prędkością kątową ω , jej moment pędwu wynosi:

$$L = J\omega$$

Jeżeli na żyroskop działa wewnętrzny moment siły N (pochodzący od ciężarka o masie m na ramieniu r), to powoduje on zmianę kierunku wektora momentu pędwu:

$$N = \frac{dL}{dt}$$

Moment siły jest prostopadły do wektora \vec{L} , zatem żyroskop zaczyna wykonywać ruch precesyjny wokół osi pionowej z prędkością kątową ω_p . Zależność opisuje wzór:

$$N_p = J\omega_p\omega$$

3. Model matematyczny

W doświadczeniu wykorzystujemy mierzalne parametry, takie jak okres obrotu tarczy T oraz okres precesji T_p . Wykorzystując zależność $\omega = \frac{2\pi}{T}$ oraz $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$, otrzymamy równanie robocze:

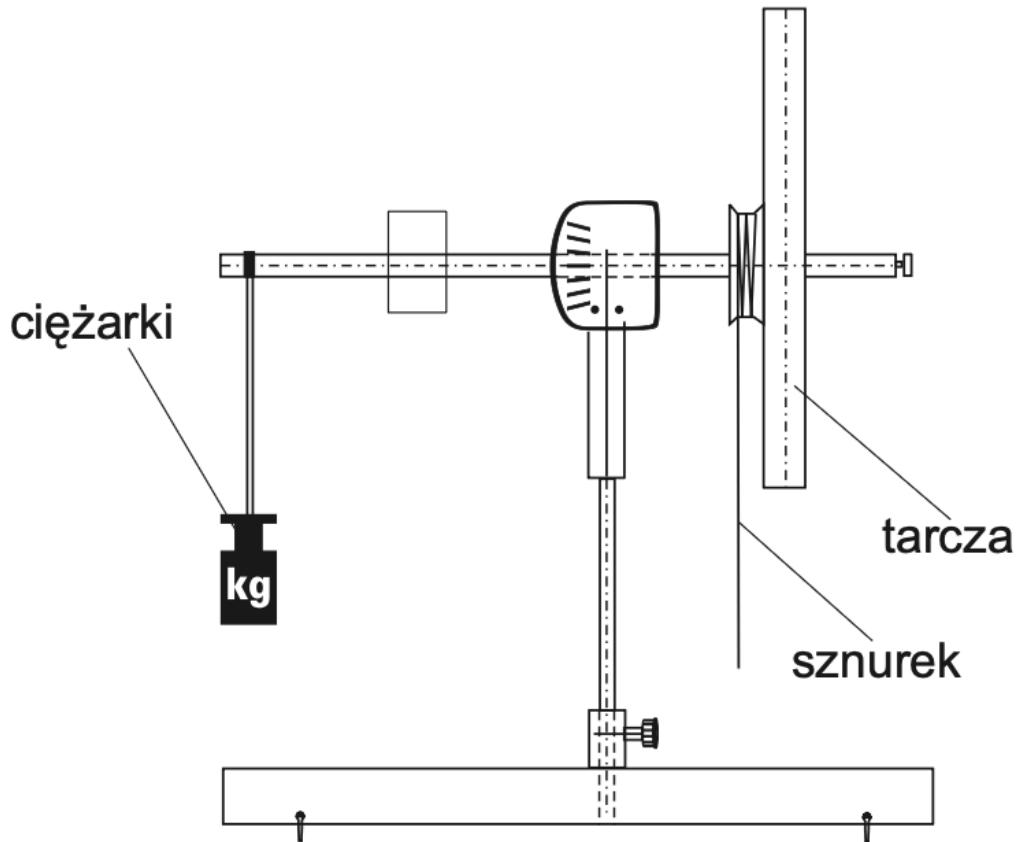
$$mgr = \frac{J \cdot 4\pi^2}{T \cdot T_p}$$

Z powyższego wzoru można wyznaczyć moment bezwładności J poprzez analizę regresji liniowej dla dwóch przypadków:

1. Zmiennej masy m : badając zależność $\frac{1}{T_p} = f(m)$
2. Zmiennej prędkości obrotowej: badając zależność $\frac{1}{T_p} = g(T)$

Dodatkowo moment bezwładności tarczy (traktowanej jako krążek o masie M_t i promieniu R) obliczany jest ze wzoru geometrycznego:

$$J = \frac{1}{2}M_tR^2$$



Rys. 1.7.2: Żyroskop używany do pomiaru czasu precesji.

4. Ładowanie danych

```
In [1]: #import odpowiednich bibliotek
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import math

In [2]: #ładowanie pomiarów średnicy dysku, promienia siły oraz czasu precesji
disk_diameter = pd.read_csv('https://raw.githubusercontent.com/karolpeszek/pomiar_precesji/main/disk_diameter.csv')
force_radius = pd.read_csv('https://raw.githubusercontent.com/karolpeszek/pomiar_precesji/main/force_radius.csv')
precession_time = pd.read_csv('https://raw.githubusercontent.com/karolpeszek/pomiar_precesji/main/precession_time.csv')

#konwersja tak, aby średnica dysku i promień siły były w metrach
disk_diameter['D'] = disk_diameter['D'] / 100
force_radius['R'] = force_radius['R'] / 100

#konwersja tak, aby masa ciężarka była w kg
precession_time['m'] = precession_time['m'] / 1000

#tworzymy listę mas ciężarków
masses = np.array(precession_time['m'].unique())

#pomiary precesji zostały dokonane jako połowa okresu więc aby uzyskać cały okres musimy pomnożyć pomiar przez 2
precession_time['T_p'] *= 2
```

5. Obliczenia pośrednie

```
In [3]: #obliczamy średnią średnicę dysku i jej niepewność jako odchylenie standardowe
D = disk_diameter['D'].mean()
u_D = disk_diameter['D'].std(ddof=1) #użycie ddof=1 dla niepewności standardowej próby

#stosujemy współczynnik studenta, aby uwzględnić małą liczbę pomiarów
u_D *= 2.776 #dla 5 pomiarów

print(f"Średnia średnica dysku: {D:.3f} m ± {u_D:.3f} m")
```

Średnia średnica dysku: 0.260 m ± 0.027 m

```
In [4]: #obliczamy średnią promień siły i jego niepewność
r = force_radius['R'].mean()
u_r = force_radius['R'].std(ddof=1) #użycie ddof=1 dla niepewności standardowej próby

#stosujemy współczynnik studenta, aby uwzględnić małą liczbę pomiarów
u_r *= 2.776 #dla 5 pomiarów

print(f"Średni promień siły: {r:.3f} m ± {u_r:.3f} m")
```

Średni promień siły: 0.271 m ± 0.010 m

```
In [5]: #dla każdego pomiaru czasu precesji obliczamy średni okres obrotu tarczy  $T = (T_1 + T_2) / 2$  oraz niepewność
precession_time['T'] = (precession_time['T_1'] + precession_time['T_2']) / 2
```

```
In [6]: #dla każdej masy obliczamy  $1/T \cdot T_p \rightarrow$  dla każdej masy wartość powinna być stała a jej zmienność wynika z ni
precession_time['inv_TTp'] = 1 / (precession_time['T'] * precession_time['T_p'])
```

```
In [7]: #dla każdej masy obliczamy średnią wartość  $1/(T \cdot T_p)$  oraz jej niepewność
```

```
T_Tp_inv = np.array([None for _ in masses])
u_T_Tp_inv = np.array([None for _ in masses])

for i, m in enumerate(masses):
    subset = precession_time[precession_time['m'] == m]
    T_Tp_inv[i] = subset['inv_TTp'].mean()
    u_T_Tp_inv[i] = subset['inv_TTp'].std(ddof=1)

#stosujemy współczynnik studenta, aby uwzględnić małą liczbę pomiarów
u_T_Tp_inv[i] *= 2.252 #dla 10 pomiarów
for i, m in enumerate(masses):
    print(f"Dla masy {m:.3f} kg:  $1/(T \cdot T_p) = {T_Tp_inv[i]:.6f} \text{ 1/s}^2 \pm {u_T_Tp_inv[i]:.6f} \text{ 1/s}^2$ ")
```

Dla masy 0.010 kg: $1/(T \cdot T_p) = 0.074541 \text{ 1/s}^2 \pm 0.102413 \text{ 1/s}^2$
Dla masy 0.020 kg: $1/(T \cdot T_p) = 0.159938 \text{ 1/s}^2 \pm 0.140086 \text{ 1/s}^2$
Dla masy 0.030 kg: $1/(T \cdot T_p) = 0.227281 \text{ 1/s}^2 \pm 0.323740 \text{ 1/s}^2$
Dla masy 0.040 kg: $1/(T \cdot T_p) = 0.431432 \text{ 1/s}^2 \pm 0.337438 \text{ 1/s}^2$
Dla masy 0.060 kg: $1/(T \cdot T_p) = 0.524299 \text{ 1/s}^2 \pm 0.369291 \text{ 1/s}^2$
Dla masy 0.070 kg: $1/(T \cdot T_p) = 0.554994 \text{ 1/s}^2 \pm 0.212062 \text{ 1/s}^2$
Dla masy 0.080 kg: $1/(T \cdot T_p) = 0.722577 \text{ 1/s}^2 \pm 0.819681 \text{ 1/s}^2$
Dla masy 0.090 kg: $1/(T \cdot T_p) = 0.715545 \text{ 1/s}^2 \pm 0.328125 \text{ 1/s}^2$
Dla masy 0.100 kg: $1/(T \cdot T_p) = 0.747053 \text{ 1/s}^2 \pm 0.694370 \text{ 1/s}^2$

```
In [8]: #możemy również policzyć błędy względne i sprawdzić, czy są zgodne z oczekiwaniami
relative_errors = u_T_Tp_inv / T_Tp_inv
for i, m in enumerate(masses):
    print(f"Dla masy {m:.3f} kg: błąd wzgledny  $1/(T \cdot T_p) = {100 * relative_errors[i]:.2f}\%$ ")
```

Dla masy 0.010 kg: błąd wzgledny $1/(T \cdot T_p) = 137.39\%$
Dla masy 0.020 kg: błąd wzgledny $1/(T \cdot T_p) = 87.59\%$
Dla masy 0.030 kg: błąd wzgledny $1/(T \cdot T_p) = 142.44\%$
Dla masy 0.040 kg: błąd wzgledny $1/(T \cdot T_p) = 78.21\%$
Dla masy 0.060 kg: błąd wzgledny $1/(T \cdot T_p) = 70.44\%$
Dla masy 0.070 kg: błąd wzgledny $1/(T \cdot T_p) = 38.21\%$
Dla masy 0.080 kg: błąd wzgledny $1/(T \cdot T_p) = 113.44\%$
Dla masy 0.090 kg: błąd wzgledny $1/(T \cdot T_p) = 45.86\%$
Dla masy 0.100 kg: błąd wzgledny $1/(T \cdot T_p) = 92.95\%$

```
In [9]: #wykonujemy wykres i regresję liniową dla zależności  $1/(T \cdot T_p)$  od masy ciężarki
#np.polyfit z cov=True zwraca macierz kowariancji współczynników
coeffs, cov = np.polyfit(masses.astype(float), T_Tp_inv.astype(float), 1, cov=True)
a, b = coeffs
u_a = np.sqrt(cov[0, 0])
u_b = np.sqrt(cov[1, 1])
print(f"Współczynniki regresji: a = {a:.2f} ± {u_a:.2f}, b = {b:.2f} ± {u_b:.2f}")

#tworzymy wykresy obok siebie
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(14, 6))

#wykres 1: surowe dane z niepewnościami
ax1.errorbar(masses, T_Tp_inv, yerr=u_T_Tp_inv, fmt='o', label='Pomiary z niepewnościami', elinewidth=2,
ax1.set_xlabel(r'Masa ciężarka $[\text{kg}]$')
ax1.set_ylabel(r'$\frac{1}{T \cdot T_p}$ [$\text{s}^{-2}$]')
ax1.set_title(r'Wykres $\frac{1}{T \cdot T_p}$ w funkcji masy ciężarki')
ax1.legend(loc='upper left')
ax1.grid()

#wykres 2: dane z regresją liniową i pasem niepewności
x_plot = np.linspace(0, max(masses) * 1.1, 100)
y_fit = a * x_plot + b
#niepewność dopasowania:  $\sigma_y(x) = \sqrt{\text{var}_a \cdot x^2 + \text{var}_b + 2 \cdot \text{cov}_{ab} \cdot x}$ 
y_err = np.sqrt(cov[0, 0]) * x_plot**2 + cov[1, 1] + 2 * cov[0, 1] * x_plot
ax2.errorbar(masses, T_Tp_inv, yerr=u_T_Tp_inv, fmt='o', label='Pomiary z niepewnościami', elinewidth=2,
ax2.plot(x_plot, y_fit, 'r-', label=f'Regresja:  $y = {a:.2f}x + {b:.2f}$ ')
ax2.fill_between(x_plot, y_fit - y_err, y_fit + y_err, color='red', alpha=0.2, label='Niepewność regresji')
ax2.set_xlabel(r'Masa ciężarka $[\text{kg}]$')
```

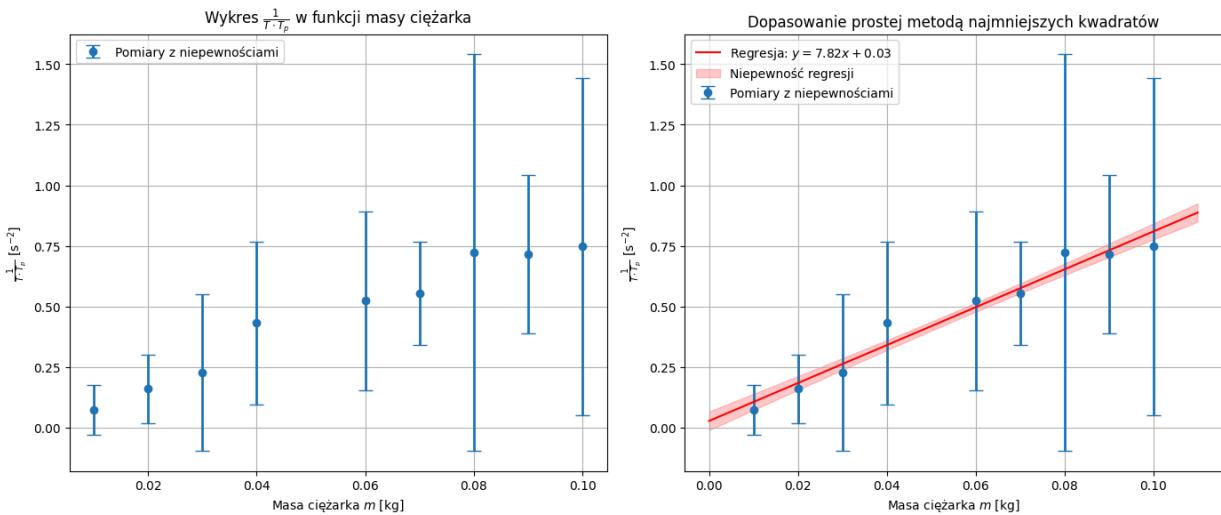
```

ax2.set_ylabel(r'$\frac{1}{T \cdot T_p}$')
ax2.set_title(r'Dopasowanie prostej metodą najmniejszych kwadratów')
ax2.legend(loc='upper left')
ax2.grid()

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Współczynniki regresji: $a = 7.82 \pm 0.61$, $b = 0.03 \pm 0.04$



```

In [10]: #analogiczną regresję można wykonać przy założeniu, że prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych

#model y = ax. Metoda najmniejszych kwadratów: a = sum(x*y) / sum(x**2)
x = masses.astype(float)
y = T_T_p_inv.astype(float)
a_fixed_all_masses = np.sum(x * y) / np.sum(x**2)

#niepewność współczynnika a dla regresji przez początek
n = len(x)
residuals = y - a_fixed_all_masses * x
s2 = np.sum(residuals**2) / (n - 1)
u_a_fixed = np.sqrt(s2 / np.sum(x**2))

print(f"Współczynnik regresji (przechodzącej przez początek): a = {a_fixed_all_masses:.2f} ± {u_a_fixed:.2f}")

#tworzymy wykresy obok siebie
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(14, 6))

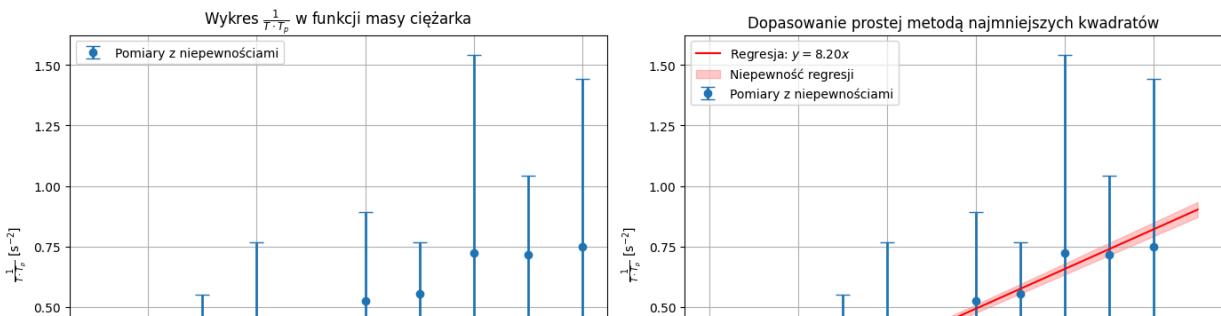
#wykres 1: surowe dane z niepewnościami
ax1.errorbar(masses, T_T_p_inv, yerr=u_T_T_p_inv, fmt='o', label='Pomiary z niepewnościami', elinewidth=2,
              ax1.set_xlabel('Masa ciężarka $m$ [kg]')
              ax1.set_ylabel(r'$\frac{1}{T \cdot T_p}$ [s$^{-2}$]')
              ax1.set_title(r'Wykres $\frac{1}{T \cdot T_p}$ w funkcji masy ciężarka')
              ax1.legend(loc='upper left')
              ax1.grid()

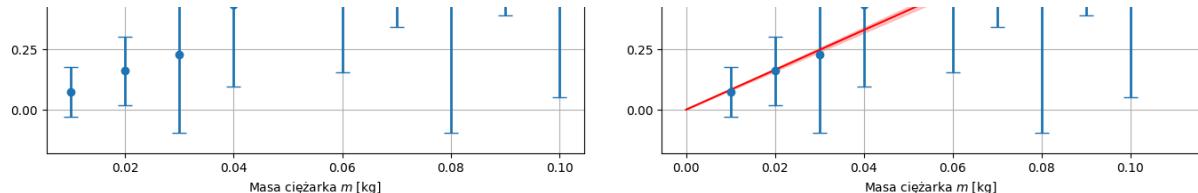
#wykres 2: dane z regresją liniową i pasem niepewności
x_plot = np.linspace(0, max(masses) * 1.1, 100)
y_fit = a_fixed_all_masses * x_plot
y_err = u_a_fixed * np.abs(x_plot)
ax2.errorbar(masses, T_T_p_inv, yerr=u_T_T_p_inv, fmt='o', label='Pomiary z niepewnościami', elinewidth=2,
              ax2.plot(x_plot, y_fit, 'r', label=f'Regresja: $y = {a_fixed_all_masses:.2f}x$')
              ax2.fill_between(x_plot, y_fit - y_err, y_fit + y_err, color='red', alpha=0.2, label='Niepewność regresji')
              ax2.set_xlabel('Masa ciężarka $m$ [kg]')
              ax2.set_ylabel(r'$\frac{1}{T \cdot T_p}$ [s$^{-2}$]')
              ax2.set_title(r'Dopasowanie prostej metodą najmniejszych kwadratów')
              ax2.legend(loc='upper left')
              ax2.grid()

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Współczynnik regresji (przechodzącej przez początek): $a = 8.20 \pm 0.28$





```
In [11]: #teraz wykonamy wykres i regresję dla zależności 1/T_p od T grupując pomiary po masach ciężarków
```

```
#obliczamy odwrotność okresu precesji
precession_time['inv_Tp'] = 1 / precession_time['T_p']

#przygotowanie kolorów dla różnych mas
colors = plt.cm.viridis(np.linspace(0, 1, len(masses)))
max_T = precession_time['T'].max()

#wykres dla regresji y = ax + b
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 16))

for m, color in zip(masses, colors):
    subset = precession_time[precession_time['m'] == m]
    x = subset['T'].values
    y = subset['inv_Tp'].values

    #wykres 1: Punkty pomiarowe
    ax1.plot(x, y, 'o', color=color, label=f'm={m:.3f} kg')

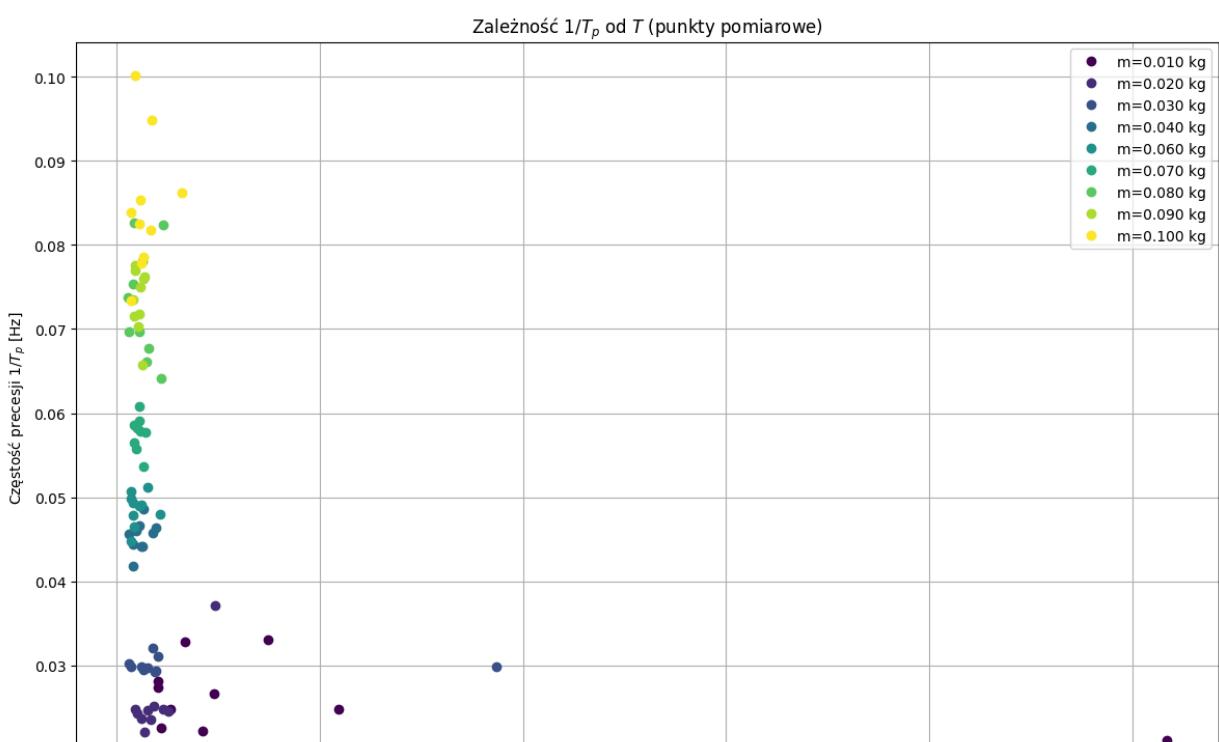
    #regresja y = ax + b z macierzą kowariancji
    coeffs, cov = np.polyfit(x, y, 1, cov=True)
    a, b = coeffs

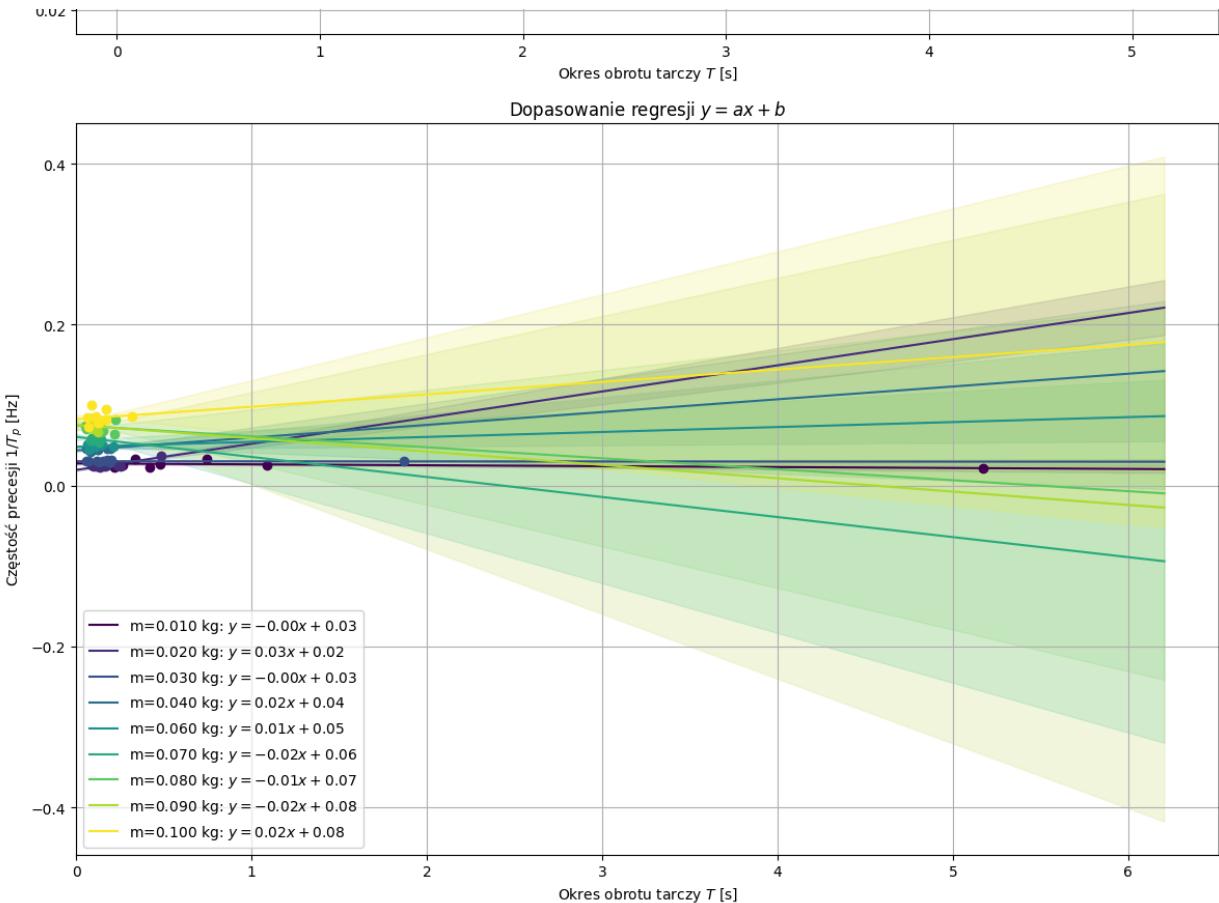
    #wykres 2: Punkty + Regresja z pasem niepewności
    ax2.plot(x, y, 'o', color=color)
    x_plot = np.linspace(0, max_T * 1.2, 100)
    y_fit = a * x_plot + b
    y_err = np.sqrt(cov[0, 0] * x_plot**2 + cov[1, 1] + 2 * cov[0, 1] * x_plot)
    ax2.plot(x_plot, y_fit, '-', color=color, label=f'm={m:.3f} kg: $y={a:.2f}x{b:+.2f}$')
    ax2.fill_between(x_plot, y_fit - y_err, y_fit + y_err, color=color, alpha=0.15)

ax1.set_xlabel(r'Okres obrotu tarczy $T$ [s]')
ax1.set_ylabel(r'Częstość precesji $1/T_p$ [Hz]')
ax1.set_title(r'Zależność $1/T_p$ od $T$ (punkty pomiarowe)')
ax1.legend()
ax1.grid()

ax2.set_xlabel(r'Okres obrotu tarczy $T$ [s]')
ax2.set_ylabel(r'Częstość precesji $1/T_p$ [Hz]')
ax2.set_title(r'Dopasowanie regresji $y=ax+b$')
ax2.legend()
ax2.grid()
ax2.set_xlim(left=0)

plt.tight_layout()
plt.show()
```





In [12]:

```
#wykres dla regresji  $y = ax$  (przechodzącej przez 0)
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 16))
max_T = precession_time['T'].max()

a_fixed_by_mass = {}

for m, color in zip(masses, colors):
    subset = precession_time[precession_time['m'] == m]
    x = subset['T'].values
    y = subset['inv_Tp'].values

    #wykres 1: Punkty pomiarowe
    ax1.plot(x, y, 'o', color=color, label=f'm={m:.3f} kg')

    #regresja  $y = ax$ 
    #metoda najmniejszych kwadratów dla  $y=ax$ :  $a = \sum(xy) / \sum(x^2)$ 
    a_fixed_by_mass[m] = np.sum(x * y) / np.sum(x**2)

    #niepewność współczynnika a dla regresji przez początek
    n = len(x)
    residuals = y - a_fixed_by_mass[m] * x
    s2 = np.sum(residuals**2) / (n - 1)
    u_a_m = np.sqrt(s2 / np.sum(x**2))

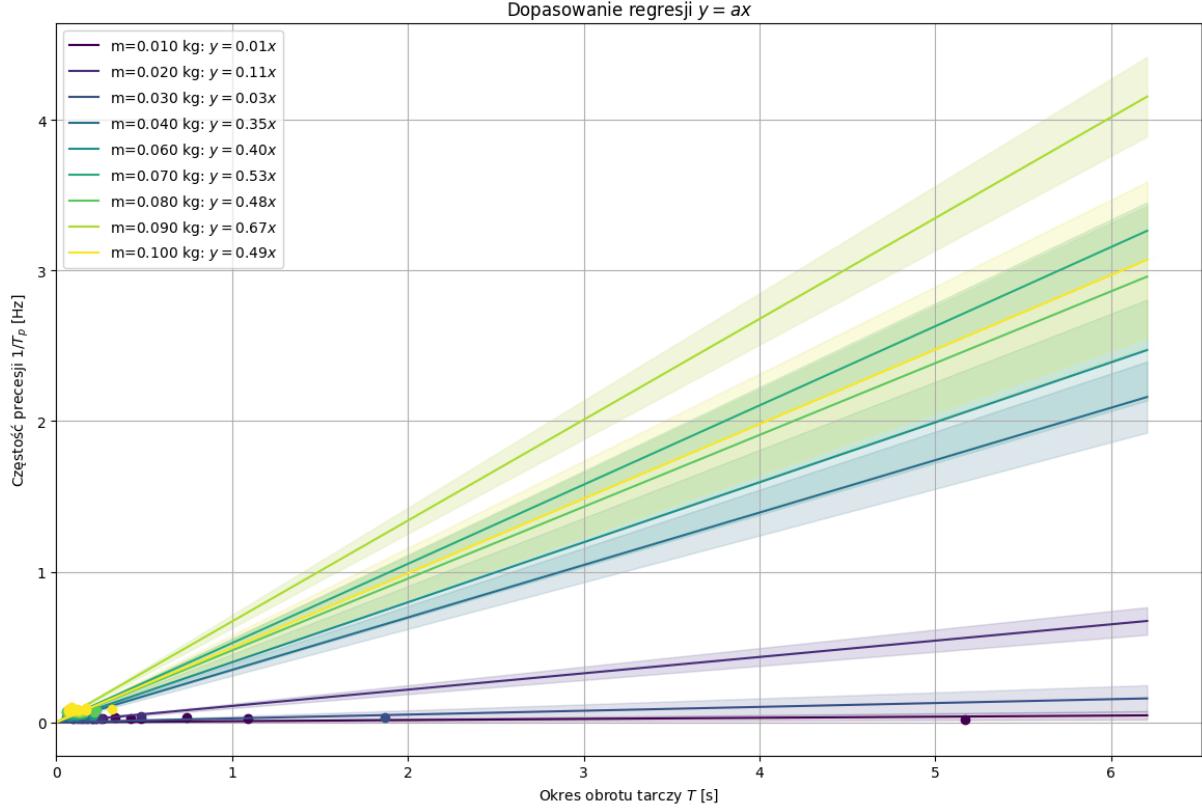
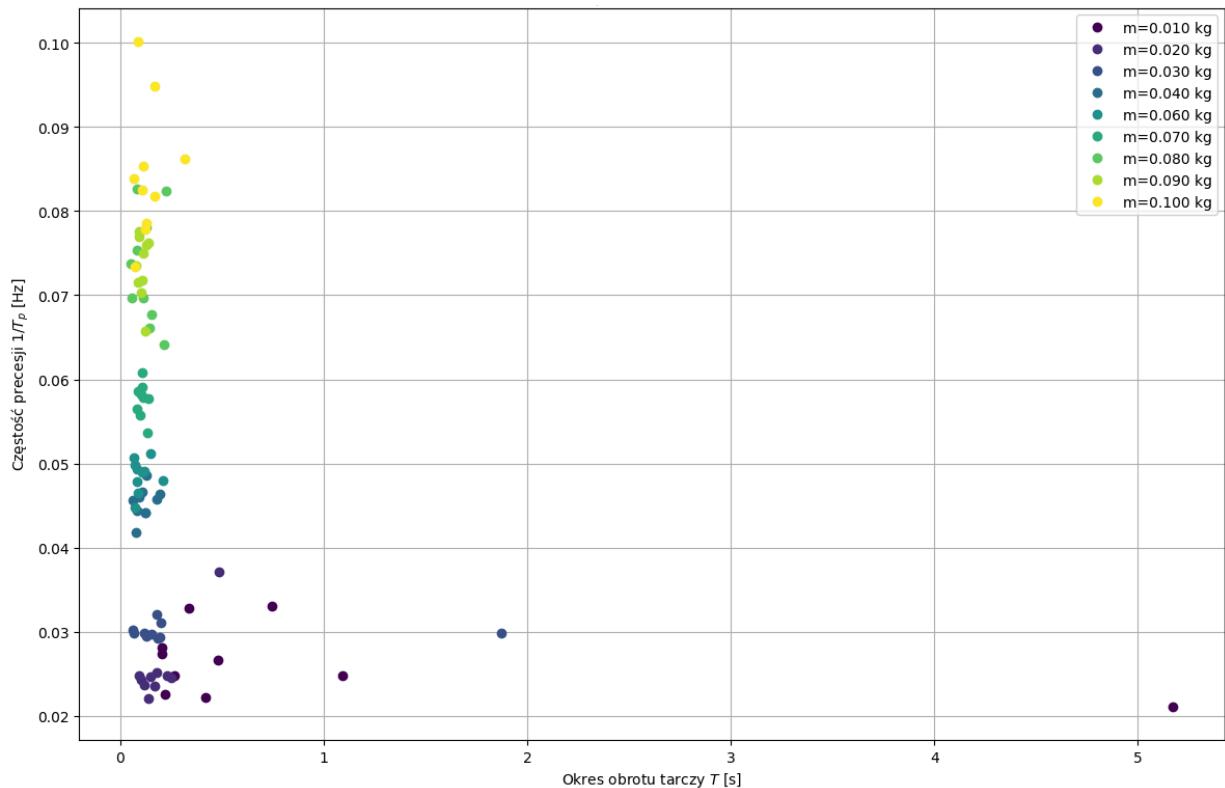
    #wykres 2: Punkty + Regresja z pasem niepewności
    x_plot = np.linspace(0, max_T * 1.2, 100)
    y_fit = a_fixed_by_mass[m] * x_plot
    y_err = u_a_m * np.abs(x_plot)
    ax2.plot(x_plot, y_fit, '-', color=color, label=f'm={m:.3f} kg: $y={a_fixed_by_mass[m]:.2f}x$')
    ax2.fill_between(x_plot, y_fit - y_err, y_fit + y_err, color=color, alpha=0.15)

ax1.set_xlabel(r'Okres obrotu tarczy $T$ [s]')
ax1.set_ylabel(r'Częstość precesji $1/T_p$ [Hz]')
ax1.set_title(r'Zależność $1/T_p$ od $T$ (punkty pomiarowe)')
ax1.legend()
ax1.grid()

ax2.set_xlabel(r'Okres obrotu tarczy $T$ [s]')
ax2.set_ylabel(r'Częstość precesji $1/T_p$ [Hz]')
ax2.set_title(r'Dopasowanie regresji $y=ax$')
ax2.legend()
ax2.grid()
ax2.set_xlim(left=0)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Zależność $1/T_p$ od T (punkty pomiarowe)



6. Obliczanie momentów bezwładności różnymi sposobami

In [13]:

```
#aby policzyć numeryczny moment bezwładności tą metodą musimy ustalić stałe:
g = 9.81
pi = 3.41

#ustawianie masy tarczy w kg
M_t = 1.185

#obliczamy promień tarczy
R = D / 2
u_R = u_D / 2
print(f"Promień tarczy: {R:.3f} m ± {u_R:.3f} m")
```

Promień tarczy: 0.130 m ± 0.014 m

Obliczanie momentu bezwładności przy założeniu, że tarcza jest idealnym dyskiem matematycznym

In [14]:

```
#wyznaczenie momentu bezwładności tarczy metodą geometryczną
J_geom = (1/2) * M_t * R**2

#obliczanie niepewności metodą różniczki zupełnej
#zakładamy, że M_t jest stałą, więc liczymy pochodną cząstkową tylko po R
#J = (1/2) * M_t * R^2
#|dJ/dR| = M_t * R
u_J_geom = ((M_t * R * u_R) ** 2) ** 0.5

#zaokrąglenie niepewności w górę do 1 cyfry znaczącej
order = math.floor(math.log10(u_J_geom))
factor = 10 ** order
u_J_geom Rounded = math.ceil(u_J_geom / factor) * factor
#zaokrąglenie wyniku do tego samego miejsca dziesiętnego
decimal_places = -order
J_geom Rounded = round(J_geom, decimal_places)

print(f"Moment bezwładności (geometryczny): {J_geom Rounded:.{decimal_places}f} kg*m^2")
print(f"Niepewność (geometryczna): {u_J_geom Rounded:.{decimal_places}f} kg*m^2")
```

Moment bezwładności (geometryczny): 0.010 kg*m^2
 Niepewność (geometryczna): 0.003 kg*m^2

Obliczanie momentu bezwładności korzystając z policzonej regresji $\frac{1}{TT_p} = a \cdot m$, gdzie a jest współczynnikiem regresji przechowywanej w zmiennej `a_fixed_all_masses`

Przekształcamy tutaj wzór podany wyżej:

$$\begin{aligned} mgr &= \frac{J \cdot 4\pi^2}{T \cdot T_p} \Big|_{TT_p} \\ mgrTT_p &= J \cdot 4\pi^2 \Big|_{\frac{1}{4\pi^2}} \\ J &= \frac{mgrTT_p}{4\pi^2} \\ J &= \frac{mgr}{4\pi^2 \cdot \frac{1}{TT_p}} \end{aligned}$$

Korzystamy tutaj z regresji liniowej $\frac{1}{TT_p} = a \cdot m$

$$\begin{aligned} J &= \frac{\cancel{m} gr}{4\pi^2 \cdot a \cdot \cancel{m}} \\ J &= \frac{gr}{4\pi^2 \cdot a} \end{aligned}$$

In [15]:

```
J_dyn_all_masses = (g * r) / (4 * (pi ** 2) * a_fixed_all_masses)
#do policzenia niepewności skorzystamy z tego, że uznajemy g, pi oraz a za stałe bez niepewności
u_J_dyn_all_masses = (g * u_r) / (4 * (pi ** 2) * a_fixed_all_masses)

print(f"Moment bezwładności (dynamiczny): {J_dyn_all_masses:.6f} kg*m^2")
print(f"Niepewność (dynamiczna): {u_J_dyn_all_masses:.6f} kg*m^2")
```

Moment bezwładności (dynamiczny): 0.006969 kg*m^2
 Niepewność (dynamiczna): 0.002106 kg*m^2

Obliczanie momentu bezwładności korzystając z policzonych regresji $\frac{1}{T_p} = a \cdot T$ dla ustalonej masy m , gdzie a jest współczynnikiem regresji przechowywanym wraz z masami w słowniku `a_fixed_by_mass`

Przekształcamy tutaj wzór podany wyżej:

$$\begin{aligned} mgr &= \frac{J \cdot 4\pi^2}{T \cdot T_p} \Big|_{TT_p} \\ mgrTT_p &= J \cdot 4\pi^2 \Big|_{\frac{1}{4\pi^2}} \\ J &= \frac{mgrTT_p}{4\pi^2} \\ J &= \frac{mgr}{4\pi^2 \cdot \frac{1}{TT_p}} \end{aligned}$$

Korzystamy tutaj z regresji liniowej $\frac{1}{T_p} = a \cdot T$

$$J = \frac{mgr}{4\pi^2 \cdot \frac{a \cancel{T}}{\cancel{T}}}$$

$$J = \frac{mgr}{4\pi^2 \cdot a}$$

```
In [16]: #obliczanie momentu bezwładności metodą dynamiczną dla każdej masy osobno
results = {}
for m in masses:
    a_fixed = a_fixed_by_mass[m]
    J_dyn = (m * g * r) / (4 * (pi ** 2) * a_fixed)
    #do policzenia niepewności skorzystamy z tego, że uznajemy g, pi oraz a za stałe bez niepewności
    u_J_dyn = (m * g * u_r) / (4 * (pi ** 2) * a_fixed)
    results[m] = (J_dyn, u_J_dyn)
print(f"Dla masy {m:.3f} kg: Moment bezwładności (dynamiczny): {J_dyn:.6f} kg*m^2 ± {u_J_dyn:.6f} kg*m^2")
```

Dla masy 0.010 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.076948 kg*m^2 ± 0.002896 kg*m^2
Dla masy 0.020 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.010544 kg*m^2 ± 0.000397 kg*m^2
Dla masy 0.030 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.067089 kg*m^2 ± 0.002525 kg*m^2
Dla masy 0.040 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.006568 kg*m^2 ± 0.000247 kg*m^2
Dla masy 0.060 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.008610 kg*m^2 ± 0.000324 kg*m^2
Dla masy 0.070 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.007607 kg*m^2 ± 0.000286 kg*m^2
Dla masy 0.080 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.009588 kg*m^2 ± 0.000361 kg*m^2
Dla masy 0.090 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.007683 kg*m^2 ± 0.000289 kg*m^2
Dla masy 0.100 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.011548 kg*m^2 ± 0.000435 kg*m^2

```
In [17]: #finalnie możemy przedstawić podsumowanie wyników (momenty bezwładności wraz z niepewnościami względnymi i
summary_data = {
    'Metoda': [],
    'Masa ciężarka (kg)': [],
    'Moment bezwładności (kg*m^2)': [],
    'Niepewność (kg*m^2)': [],
    'Niepewność względna (%)': []
}

#dodajemy wynik geometryczny
summary_data['Metoda'].append('Geom.')
summary_data['Masa ciężarka (kg)'].append('N/A')
summary_data['Moment bezwładności (kg*m^2)'].append(J_geom)
summary_data['Niepewność (kg*m^2)'].append(u_J_geom)
summary_data['Niepewność względna (%)'].append((u_J_geom / J_geom) * 100)

#dodajemy wynik dynamiczny dla całego zbioru danych
summary_data['Metoda'].append('Dyn. (wszystkie masy)')
summary_data['Masa ciężarka (kg)'].append('N/A')
summary_data['Moment bezwładności (kg*m^2)'].append(J_dyn_all_masses)
summary_data['Niepewność (kg*m^2)'].append(u_J_dyn_all_masses)
summary_data['Niepewność względna (%)'].append((u_J_dyn_all_masses / J_dyn_all_masses) * 100)

#dodajemy wyniki dynamiczne dla każdej masy
for m in masses:
    J_dyn, u_J_dyn = results[m]
    summary_data['Metoda'].append('Dyn.')
    summary_data['Masa ciężarka (kg)'].append(m)
    summary_data['Moment bezwładności (kg*m^2)'].append(J_dyn)
    summary_data['Niepewność (kg*m^2)'].append(u_J_dyn)
    summary_data['Niepewność względna (%)'].append((u_J_dyn / J_dyn) * 100)

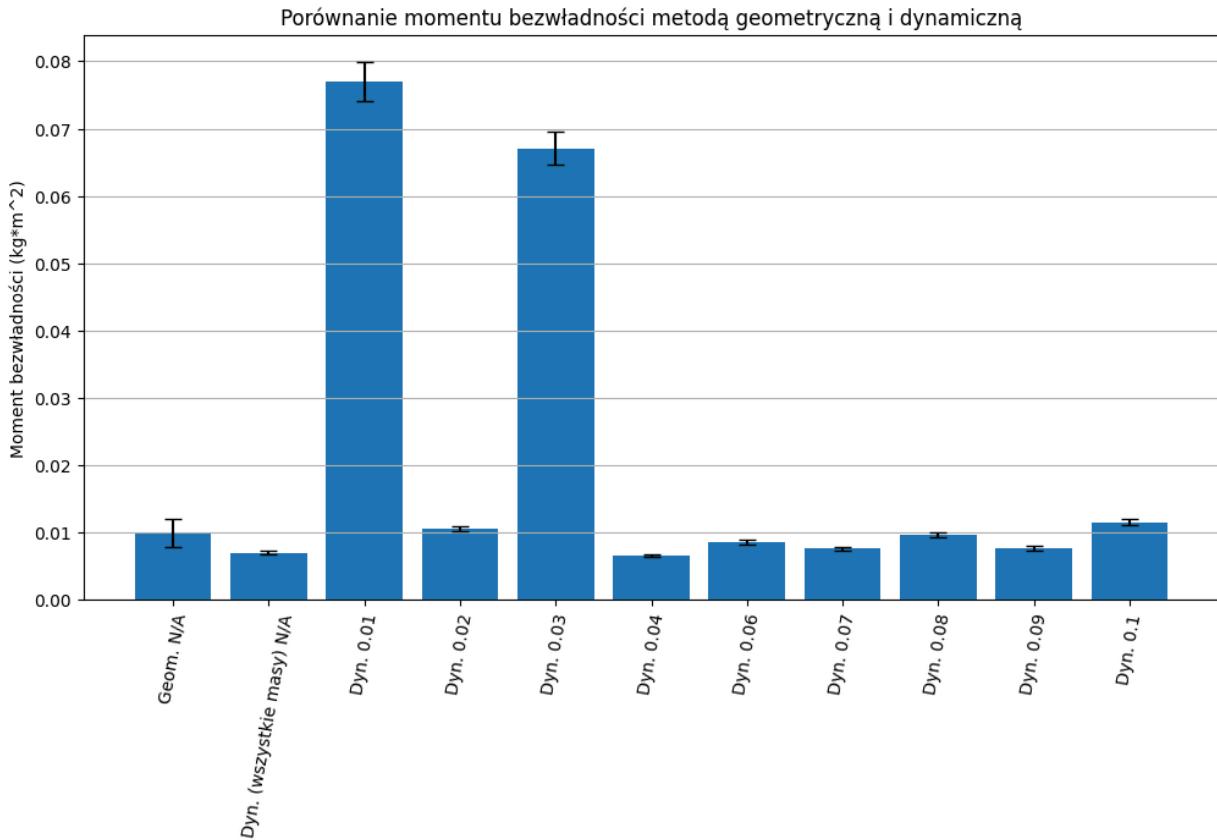
summary_df = pd.DataFrame(summary_data)
print("\nPodsumowanie wyników momentu bezwładności:")

summary_df.head(len(summary_df))
```

Podsumowanie wyników momentu bezwładności:

	Metoda	Masa ciężarka (kg)	Moment bezwładności (kg*m^2)	Niepewność (kg*m^2)	Niepewność względna (%)
0	Geom.	N/A	0.009982	0.002106	21.096052
1	Dyn. (wszystkie masy)	N/A	0.006969	0.000262	3.763718
2	Dyn.	0.01	0.076948	0.002896	3.763718
3	Dyn.	0.02	0.010544	0.000397	3.763718
4	Dyn.	0.03	0.067089	0.002525	3.763718
5	Dyn.	0.04	0.006568	0.000247	3.763718
6	Dyn.	0.06	0.008610	0.000324	3.763718
7	Dyn.	0.07	0.007607	0.000286	3.763718
8	Dyn.	0.08	0.009588	0.000361	3.763718
9	Dyn.	0.09	0.007683	0.000289	3.763718
10	Dyn.	0.1	0.011548	0.000435	3.763718

```
In [18]: # przedstawiamy również te dane w formie wykresu słupkowego z niepewnościami
plt.figure(figsize=(12, 6))
bars = plt.bar(summary_df.index, summary_df['Moment bezwładności (kg*m^2)'], yerr=summary_df['Niepewność (kg*m^2)'])
plt.xticks(summary_df.index, summary_df['Metoda'] + ' ' + summary_df['Masa ciężarka (kg)'].astype(str), rotation=45)
plt.ylabel('Moment bezwładności (kg*m^2)')
plt.title('Porównanie momentu bezwładności metodą geometryczną i dynamiczną')
plt.grid(axis='y')
plt.show()
```



7. Interpretacja otrzymanych wyników

Jak można zauważyć na wykresie słupkowym modele dynamiczne dla mas 10g i 30g stanowczo odbiegają od reszty zarówno w kwestii wartości jak i dużo większego błędu. Powodem takich rozbieżności może być dużo większy błąd względny wyrażenia $\frac{1}{TT_p}$, które dla mas 10g i 30g wynoszą około 60%, a dla pozostałych mas wynoszą około 30-40%.

8. Obliczanie ostatecznego wyniku wraz z niepewnością

W tym celu obliczymy wynik odrzucając pomiary dla 10g i 30g i korzystając z obliczonych wartości dla pozostałych mas ciężarków.

```
In [19]: # usuwanie mas 10g i 30g
results_filtered = {m: results[m] for m in results if m not in [0.010, 0.030]}
print("\nWyniki po usunięciu mas 10g i 30g:")
for m in results_filtered:
    J_dyn, u_J_dyn = results_filtered[m]
    print(f"Dla masy {m:.3f} kg: Moment bezwładności (dynamiczny): {J_dyn:.6f} kg*m^2 ± {u_J_dyn:.6f} kg*m^2")
```

Wyniki po usunięciu mas 10g i 30g:
Dla masy 0.020 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.010544 kg*m^2 ± 0.000397 kg*m^2
Dla masy 0.040 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.006568 kg*m^2 ± 0.000247 kg*m^2
Dla masy 0.060 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.008610 kg*m^2 ± 0.000324 kg*m^2
Dla masy 0.070 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.007607 kg*m^2 ± 0.000286 kg*m^2
Dla masy 0.080 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.009588 kg*m^2 ± 0.000361 kg*m^2
Dla masy 0.090 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.007683 kg*m^2 ± 0.000289 kg*m^2
Dla masy 0.100 kg: Moment bezwładności (dynamiczny): 0.011548 kg*m^2 ± 0.000435 kg*m^2

```
In [20]: # obliczanie średniej ważonej J po usunięciu mas 10g i 30g
final_J = np.sum([m[0] / (m[1]**2) for m in results_filtered.values()]) / np.sum([1 / (m[1]**2) for m in results_filtered])
final_u_J = (1 / np.sum([1 / (m[1]**2) for m in results_filtered])) ** 0.5

# Zaokrąglenie niepewności w górę do 1 cyfry znaczącej
order_final = math.floor(math.log10(final_u_J))
factor_final = 10 ** order_final
final_u_J_rounded = math.ceil(final_u_J / factor_final) * factor_final
# Zaokrąglenie wyniku do tego samego miejsca dziesiętnego
decimal_places_final = -order_final
```

```

final_J_rounded = round(final_J, decimal_places_final)

print(f"Średnia ważona J po usunięciu mas 10g i 30g:")
print(f" J = {final_J_rounded:.{decimal_places_final}f} kg·m² ± {final_u_J_rounded:.{decimal_places_final}f}")
print(f" Błąd względny: {100 * final_u_J / final_J:.2f}%")

# Porównanie z modelem geometrycznym
print("\nPorównanie z modelem geometrycznym")
print(f" J_dyn = {final_J_rounded:.{decimal_places_final}f} ± {final_u_J_rounded:.{decimal_places_final}f}")
print(f" J_geom = {J_geom_rounded:.{decimal_places_final}f} ± {u_J_geom_rounded:.{decimal_places_final}f}")

# Sprawdzenie zgodności w zakresie niepewności rozszerzonej (k=2)
diff = abs(final_J - J_geom)
u_diff = (final_u_J**2 + u_J_geom**2)**0.5
print(f"\n |J_dyn - J_geom| = {diff:.6f} kg·m²")
print(f" U(J_dyn - J_geom) (k=2) = {2*u_diff:.6f} kg·m²")

if diff <= 2 * u_diff:
    print(" ✓ Wyniki są ZGODNE w zakresie niepewności rozszerzonej (k=2)")
else:
    print(" ✗ Wyniki NIE SĄ ZGODNE w zakresie niepewności rozszerzonej (k=2)")

```

Średnia ważona J po usunięciu mas 10g i 30g:

J = 0.0083 kg·m² ± 0.0002 kg·m²

Błąd względny: 1.45%

Porównanie z modelem geometrycznym:

J_dyn = 0.0083 ± 0.0002 kg·m²

J_geom = 0.0100 ± 0.0030 kg·m²

|J_dyn - J_geom| = 0.001681 kg·m²

U(J_dyn - J_geom) (k=2) = 0.004219 kg·m²

✓ Wyniki są ZGODNE w zakresie niepewności rozszerzonej (k=2)

Zatem ostatecznie wyliczony moment bezwładności tarczy to $J = 0.0083 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \pm 0.0002 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$