

Modelowanie cen akcji za pomocą Geometrycznego Ruchu Browna

Karolina Łukasik

9 czerwca 2023

Spis treści

1 Testy symulacji	1
1.1 Wynik symulacji dla $\sigma = 0$	1
1.2 Wynik symulacji dla $\sigma \geq 0$	1
1.3 Estymacja parametru sigma	2
2 Analiza cen akcji firmy Amazon	2

1 Testy symulacji

1.1 Wynik symulacji dla $\sigma = 0$

Przeprowadzając symulacje napisanym w zadaniu pierwszym skrypcem i podstawiając wartość $\sigma = 0$ w parametrze funkcji, łatwo można zauważyć, że cena akcji tylko rośnie. By zbadać z czego to wynika, musimy przyjrzeć się sposobie, w jaki obliczaliśmy kolejne ceny akcji. Kolejne wartości uzyskiwaliśmy dla $1 \leq i \leq n$ ze wzoru:

$$S_{i\frac{t}{n}} = S_{(i-1)\frac{t}{n}} \cdot e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{t}{n} + \sigma\sqrt{\frac{t}{n}}Z_i}$$

Możemy łatwo wyprowadzić wzór na cenę akcji $S_{i\frac{t}{n}}$ dla $\sigma = 0$:

$$S_{i\frac{t}{n}} = S_{(i-1)\frac{t}{n}} \cdot e^{(r-\frac{0^2}{2})\frac{t}{n} + 0\sqrt{\frac{t}{n}}Z_i} = S_{(i-1)\frac{t}{n}} \cdot e^{r\frac{t}{n}}$$

Parametr r (drift), t (czas) i n (liczba kroków w czasie od 0 do t) są dodatnie, więc $e^{r\frac{t}{n}} \geq 1$ i tym samym kolejne ceny akcji rosną eksponencjalnie.

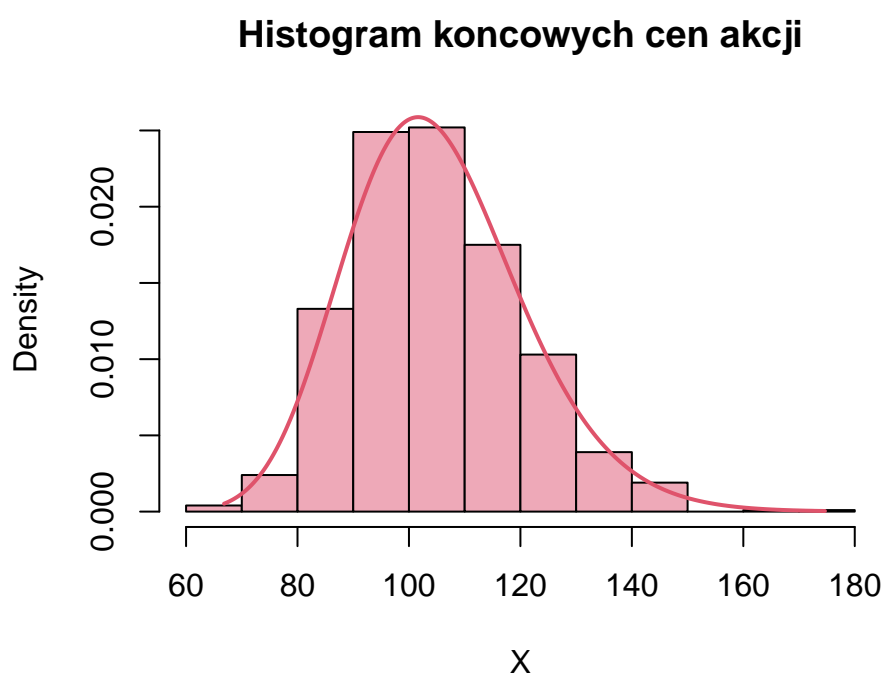
1.2 Wynik symulacji dla $\sigma \geq 0$

W kolejnym kroku przeprowadziłam symulacje dla parametrów:

- liczba ścieżek: $N = 1000$
- liczba kroków: $n = 250$
- cena początkowa: $S_0 = 100$

- drif: $r = 0.05$
- volatility: $\sigma = 0.15$
- czas w latach: $t = 1$
- ziarno: $seed = 19098$

Uzyskałam tym samym 1000 różnych ścieżek i cen końcowych akcji oraz estymacji parametru σ zapisanych w pliku output.txt. Możemy za pomocą tych danych wygenerować histogram cen końcowych akcji.



Rysunek 1: Porównanie histogramu końcowych cen akcji i funkcji gęstości rozkładu log normalnego przy tych samych parametrach

Na wykresie widać, że kształt histogramu jest zbliżony kształtem do krzywej rozkładu lognormalnego o wyestymowanych parametrach.

1.3 Estymacja parametru sigma

Dla każdej ścieżki wyliczyliśmy tzw. realized volatility. Idąc dalej możemy wyliczyć ich średnią.

```
mean(X$RealizedVolatility)

## [1] 0.1496337
```

Widać, że wyestymowana wartość jest bardzo bliska parametrowi $\sigma = 0.15$ przyjętemu w symulacjach.

2 Analiza cen akcji firmy Amazon

Weźmy teraz ceny wybranej akcji z zeszłego roku. Na potrzeby zadania wybrałam ceny akcji Amazon, a dane pobrałam za pomocą przeglądarki Yahoo, ze strony finance.yahoo.com. Są to ceny w okresie od 2022/03/28 do 2023/03/28, łącznie 252 rekordy. Za pomocą danych z pliku csv obliczyłam kolejne wartości i stworzyłam ich histogram prostą funkcją w R. Dzięki otrzymanym wartościom log returns możemy wyestymować parametr R i za jego pomocą wartość oczekiwaną oraz wariancję, z której korzystamy przy generowaniu wykresu rozkładu normalnego.

```
amazon <- read.table("C:/Users/karol/OneDrive/Pulpit/CS/amazon.csv",
                    header=TRUE, sep= ",")
```

```
logreturns <- function(){
  r_i_list<-c()

  for (i in 0:(nrow(amazon)-1)){
    logret <- log((amazon$Open[i+1])/(amazon$Open[i]))
    r_i_list <- c(r_i_list, logret)
  }
  return(r_i_list)
}
log_returns<-logreturns()
```

```
(R_est <- mean(log_returns))

## [1] -0.002070537

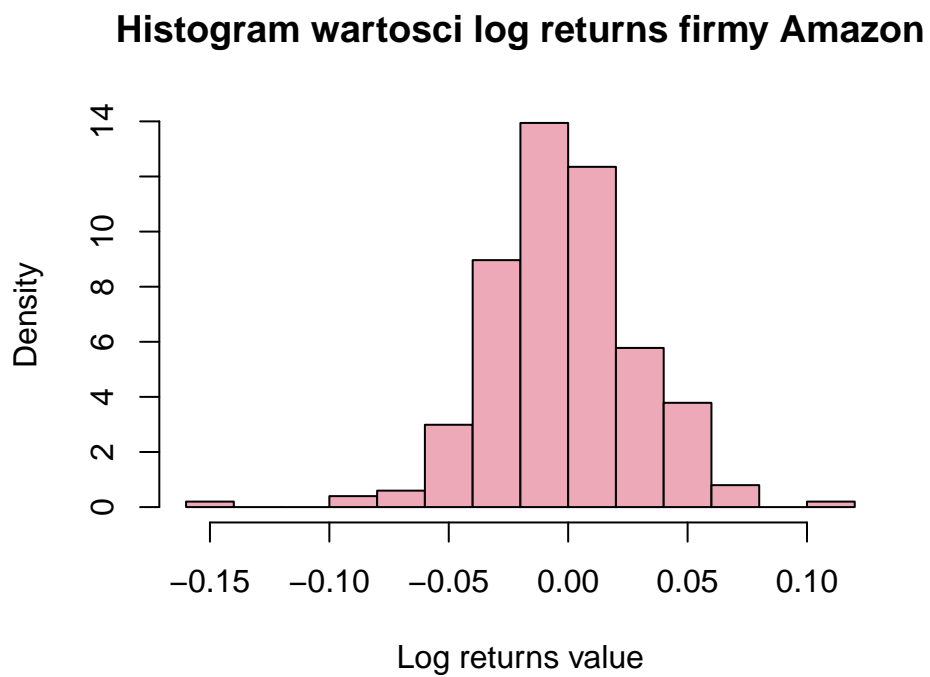
calculate_sigma_square <- function(r_i_list){
  suma<-c()
  n<-length(r_i_list)
  t<-1

  for (i in 0:n){
    suma <- c(suma,(r_i_list[i]-R_est)^2)
  }
  return( n*Reduce('+',suma)/(t*(n-1)) )
}
(sigma_square <-calculate_sigma_square(log_returns))

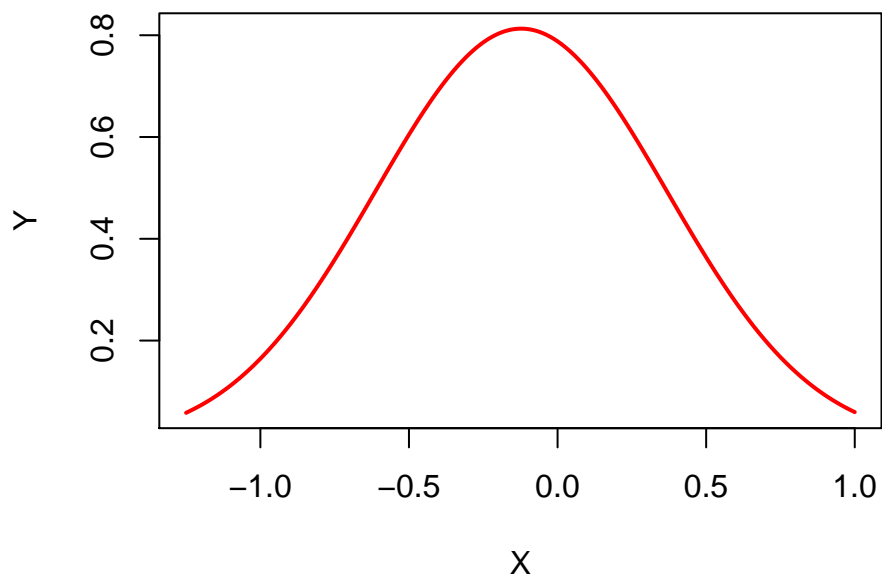
## [1] 0.2408086

(mi<-(R_est-sigma_square/2))

## [1] -0.1224748
```



Rysunek 2: Histogram wartości log returns firmy Amazon w ostatnim roku



Rysunek 3: Gęstość rozkładu normalnego dla wyestymowanych parametrów