Równanie Rekurencyjne

Metoda: Szereg Formalny

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{dla } n = 0 \\ 4, & \text{dla } n = 1 \\ 1 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}, & \text{dla } n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Skupiamy sie na równaniu:

$$x_n = 1 \cdot x_{n-1} + 2 \cdot x_{n-2} \tag{2}$$

Dokonujemy obliczeń symbolicznych na szeregu wykorzystując tylko zależność rekurencyjną:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot x^n \\ &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{i=2}^{\infty} (1 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}) \cdot x^n \\ &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (1 \cdot a_{n-1}) \cdot x^n + (2 \cdot a_{n-2}) \cdot x^n \\ &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (1 \cdot (a_{n-1} \cdot x^{n-1})) \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} (2 \cdot (a_{n-2} \cdot x^{n-2})) \cdot x^2 \\ &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + (1 \cdot x) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot x^j + (2 \cdot x^2) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i \\ &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + 1 \cdot x \cdot ((f(x) - (a_0))) + 2 \cdot x^2 \cdot f(x) \end{aligned} \tag{3}$$

Stąd uzyskujemy równość:

$$f(x) - (1 \cdot x \cdot f(x)) - (2 \cdot x^2 \cdot f(x)) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + 1 \cdot x \cdot (-(a_0)) \tag{4}$$

Wyodrębniamy $f(x)$:

$$f(x) \cdot ((1 - (1 \cdot x) - (2 \cdot x^2))) = a_0 + x \cdot ((a_1 + (-(1)) \cdot a_0 \cdot x^0)) \tag{5}$$

Skąd ostatecznie $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0 + x \cdot ((a_1 + (-(1)) \cdot a_0 \cdot x^0))}{1 - (1 \cdot x) - (2 \cdot x^2)} \tag{6}$$

W kolejnym etapie rozkładamy ułamek na ułamki proste. W tym celu odnajdujemy parametry pierwiastków x_1, x_2 dla których:

$$1 - (1 \cdot x) - (2 \cdot x^2) = -2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \tag{7}$$

Obliczamy delte: $\delta = (-1)^2 + (-(4)) \cdot (-(2)) \cdot 1 = 1 + (-(4)) \cdot (-(2)) \cdot 1 = 1 + -4 \cdot (-(2)) \cdot 1 = 1 + -4 \cdot -2 \cdot 1 = 1 + 8 = 9 = 9$ Stąd wyznaczamy pierwiastki x_1, x_2:

$$\begin{aligned}
x_1 =& \frac{-(-(1)) + \sqrt[2]{9}}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{-(-1) + \sqrt[2]{9}}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{1 + \sqrt[2]{9}}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{1 + 3 \cdot \sqrt[2]{1}}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{1 + 3 \cdot 1}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{1 + 3}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{4}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{4}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{4}{2 \cdot -2} \\
&= \frac{4}{-4} \\
&= \frac{-(1)}{1} \\
&= \frac{-1}{1} \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 =& \frac{-(-(1)) - (\sqrt[2]{9})}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{-(-1) - (\sqrt[2]{9})}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{1 - (\sqrt[2]{9})}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{1 - (3 \cdot \sqrt[2]{1})}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{1 - (3 \cdot 1)}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{1 - (3)}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{1 + -3}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{-2}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{-2}{2 \cdot (-(2))} \\
&= \frac{-2}{2 \cdot -2} \\
&= \frac{-2}{-4} \\
&= \frac{-(-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Z twierdzenia o rozkładzie ułamka wymiernego na ułamki proste, istnieją C_1, C_2 dla których:

$$\frac{3 + x \cdot (4 + (-(1)) \cdot 3 \cdot x^0)}{1 - (1 \cdot x) - (2 \cdot x^2)} = \frac{C_1}{x - x_1} + \frac{C_2}{x - x_2} \tag{8}$$

$$3+x\cdot(4-(1\cdot3)) = x\cdot((-(2))\cdot C_1+(-(2))\cdot C_2)+-((-(2))\cdot C_1\cdot x_2)-((-(2))\cdot C_2\cdot x_1) \tag{9}$$

Wykorzystujac fakt, ze wielomiany są równe jeśli mają identyczne współczyniki uzyskujemy:

$$\begin{cases} 3 = (-(2)) \cdot C_1 \cdot x_2 + (-(2)) \cdot C_2 \cdot x_1 \\ 4 - (1 \cdot 3) = (-(2)) \cdot C_1 + (-(2)) \cdot C_2 \end{cases} \tag{10}$$

Podstawiamy wartości x_1, x_2 i robimy obliczenia pomocnicze:
$-2 \cdot x_2 = (-(2)) \cdot \frac{1}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -(2 \cdot \frac{1}{2}) = -(\frac{2}{2}) = -(1) = -(1) = -1$
$-2 \cdot x_1 = -1 = -2 \cdot -1 = 2$
$4 - (1 \cdot 3) = 4 - (3) = 4 + -3 = 1 = 1$
$-(2) = -2$
Stąd nasz układ ma postać

$$\begin{cases} 3 = -1 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 \\ 1 = -2 \cdot C_1 + -2 \cdot C_2 \end{cases} \tag{11}$$

Rozwiązujemy układ metodą wyznaczników:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \tag{12}$$

$W = \left|\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\right| = -1\cdot-2-(2\cdot-2) = 2-(2\cdot-2) = 2-(-4) = 2+4 = 6 = 6$
$W_{C_1} = \left|\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right| = 3 \cdot -2 - (2 \cdot 1) = -6 - (2 \cdot 1) = -6 - (2) = -6 + -2 = -8 = -8$
$W_{C_2} = \left|\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right| = -1 \cdot 1 - (3 \cdot -2) = -1 - (3 \cdot -2) = -1 - (-6) = -1 + 6 = 5 = 5$
Wyliczamy parametry C_1 i C_2:

$C_1 = \frac{W_{c_1}}{W} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$
$C_2 = \frac{W_{c_2}}{W} = \frac{5}{6}$
Stad:

$$f(x) = \frac{\frac{-4}{3}}{x - -1} + \frac{\frac{5}{6}}{x - \frac{1}{2}}$$

Aby rozwinąć ułamki w szereg, sprowadzamy je do postaci $\frac{a}{1-b\cdot x}$. W tym celu dzielimy licznik i mianownik przez $-x_1$, $-x_2$ odpowiednio.

$\frac{C_1}{-x_1} = \frac{\frac{-4}{3}}{-(-1)} = \frac{\frac{-4}{3}}{1} = \frac{-4}{3}$
$\frac{C_2}{-x_2} = \frac{\frac{5}{6}}{-(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{-(1)}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{-1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}\cdot 2}{-1} = \frac{\frac{10}{6}}{-1} = \frac{\frac{5}{3}}{-1} = \frac{\frac{5}{3}}{-1} = \frac{-(\frac{5}{3})}{1} = \frac{\frac{-(5)}{3}}{1} = \frac{\frac{-5}{3}}{1} = \frac{-5}{3}$
Stąd:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\frac{-4}{3}}{1 - \frac{x}{-1}} + \frac{\frac{-5}{3}}{1 - \frac{x}{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{-4}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{-1}\right)^n + \frac{-5}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{3} \cdot \left(\frac{1}{-1}\right)^n + \frac{-5}{3} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^n\right) \cdot x^n \end{aligned} \tag{13}$$

$a_n = \frac{-4}{3} \cdot \left(\frac{-(1)}{1}\right)^n + \frac{-5}{3} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^n = \frac{-4}{3} \cdot \left(\frac{-1}{1}\right)^n + \frac{-5}{3} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^n = \frac{-4}{3} \cdot (-1)^n + \frac{-5}{3} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^n = \frac{-4}{3} \cdot (-1)^n + \frac{-5}{3} \cdot \left(\frac{1\cdot 2}{1}\right)^n = \frac{-4}{3} \cdot (-1)^n + \frac{-5}{3} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^n = \frac{-4}{3} \cdot (-1)^n + \frac{-5}{3} \cdot 2^n$
4

Metoda : Przewidywań

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{dla } n = 0 \\ 4, & \text{dla } n = 1 \\ 1 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}, & \text{dla } n > 1 \end{cases} \tag{14}$$

Skupiamy się na równaniu:

$$x_n = 1 \cdot x_{n-1} + 2 \cdot x_{n-2} \tag{15}$$

$$x^2 = 1 \cdot x + 2 \tag{16}$$

Rozwiązujemu równanie kwadratowe:

$$x^2 - (1 \cdot x) - (2) = 0 \tag{17}$$

Obliczamy delte:
$\Delta = (-(1))^2 - (4 \cdot 1 \cdot (-(2))) = (-1)^2 - (4 \cdot 1 \cdot (-(2))) = 1 - (4 \cdot 1 \cdot (-(2))) = 1 - (4 \cdot 1 \cdot -2) = 1 - (-(4 \cdot 2)) = 1 - (-(8)) = 1 - (-8) = 1 + 8 = 9 = 9$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt[2]{9} = 3$$

Wyznaczamy pierwiastki równania kwadratowego:

$$x1 ==$$

1- (3$\cdot \sqrt[2]{1})_{\overline{2}}$ $= \frac{1-(3\cdot 1)}{2} = \frac{1-(3)}{2} = \frac{1+-3}{2} = \frac{-2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ -1

$$x2 ==$$

1 + 3$\cdot \sqrt[2]{1}_{\overline{2}}$ $= \frac{1+3\cdot 1}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2$ 2

$Podstawiamypierwiastkirwnaniakwadratowegodojawnegowzorunan-tywyraz:$

$$a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 2^n \tag{18}$$

Podstawiamy pierwiastki równania kwadratowego do jawnego wzoru na zerowy wyraz:

$$a_0 = C_1 \cdot (-1)^0 + C_2 \cdot 2^0 \tag{19}$$

Podstawiamy pierwiastki równania kwadratowego do jawnego wzoru na pierwszy wyraz:

$$a_1 = C_1 \cdot (-1)^1 + C_2 \cdot 2^1 \tag{20}$$

Podstawiamy parametry do macierzy:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \tag{21}$$

Wyliczamy wyznaczniki stąd:

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right| \tag{22}$$

$W = 1 \cdot 2 - (1 \cdot -1) = 2 - (1 \cdot -1) = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 = 3$

Stąd:

$$\left|\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right| \tag{23}$$

$W_{c_1} = 3 \cdot 2 - (1 \cdot 4) = 6 - (1 \cdot 4) = 6 - (4) = 6 + -4 = 2 = 2$

Stąd:

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right| \tag{24}$$

$W_{c_2} = 1 \cdot 4 - (3 \cdot -1) = 4 - (3 \cdot -1) = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7 = 7$

Wyliczamy wartości parametrów: C_1 i C_2

$$C_1 = \frac{2}{3}$$

$$C_2 = \frac{7}{3}$$

I tak otrzymujemy wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot (-1)^n + \frac{7}{3} \cdot 2^n \tag{25}$$