UNIWERSYTET W BIAŁYMSTOKU
INSTYTUT INFORMATYKI

Karol WÓJCIK

Równania Rekurencyjne

PRACA LICENCJACKA

Promotor:
dr Karol PĄK

BIAŁYSTOK 2022

Spis treści

Wstęp

Równania rekurencyjne opisują zależności pomiędzy kolejnymi elementami ciągu lub sekwencji, gdzie każdy element jest wyrażany za pomocą kilku poprzednich elementów. Jest to podejście, które skupia się na rozwiązywaniu coraz mniejszych podproblemów w celu uzyskania ostatecznego wyniku.

Prostym przykładem jest równanie gdzie wyraz a_n jest zdefiniowany przez wykorzystanie wartości dwóch wcześniejszych wyrazów a_{n-1} i a_{n-2}, np. ciąg Fibonacciego $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Naturalnie należy zaznaczyć, że istnieją również bardziej skomplikowane równania, które umożliwiają korzystanie z kombinacji liniowej dowolnej ilości wcześniejszych wyrazów. Znanymi narzędziami umożliwiającymi wyznaczanie ogólnych zależności na a_n jest metoda przewidywań i szeregów formalnych. Metody te wykorzystują obliczenia symboliczne do przetwarzania symboli. Obliczenia symboliczne są dziedziną matematyki oraz informatyki, która zajmuje się manipulacją symbolicznymi wyrażeniami matematycznymi, w której wartości wyrażeń są traktowane jako symbole algebraiczne, a operacje matematyczne są wykonywane na tych symbolach.

Ideę odwoływania się do wcześniejszych etapów znalazła też zastosowanie w informatyce, gdzie funkcje powinny móc odwoływać się do siebie. Takie wywoływanie nazywane jest tez *rekurencyjne*.

> *Typowa droga rozumowania polega na znalezieniu najpierw związku rekurencyjnego, obliczenia dzięki niemu kilku początkowych wartości i, na tej podstawie, odgadnięciu ogólnego wzoru*(źródło [1]).

> Rekurencja *jest równaniem bądź nierównością opisującą funkcje złożoności w zależności od jej wartości dla danych wejściowych o mniejszych rozmiarach*(źródło [2]).

W przypadku wzorów rekurencyjnych, obliczenie wartości dla danego indeksu w ciągu wymaga obliczenia wartości dla poprzednich indeksów, zgodnie z zależnościami określonymi w wzorze rekurencyjnym. W przeciwnym przypadku, wzory

jawne pozwalają na bezpośrednie obliczenie wartości ciągu dla danego indeksu, bez konieczności obliczania wcześniejszych wartości. Wzory jawne są często bardziej zwięzłe i łatwiejsze do zrozumienia, ponieważ nie wymagają iteracyjnego obliczania wartości. Podstawowymi przykładami równań rekurencyjnych i jawnych są równanie takie jak:

1. Ciąg Fibonacciego(źródło [1]):

$$f_n = \begin{cases} 0 \text{ dla } n = 0, \\ 1 \text{ dla } n = 1, \\ 1 \cdot f_{n-1} + 1 \cdot f_{n-2} \text{ dla } n \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \tag{2}$$

2. Liczby Catalana(źródlło [3]):

$$c_n = \begin{cases} 1 \text{ dla } n = 0, \\ c_0 \cdot c_{n-1} + c_1 \cdot c_{n-2} + \ldots + c_{n-1} \cdot c_0 \text{ dla } n \geq 1. \end{cases} \tag{3}$$

$$c_n = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \text{ dla } n \geq 0 \tag{4}$$

3. Silnia(źródło [1]):

$$s_n = n \cdot s_{n-1} \tag{5}$$

$$n! = n \cdot (n-1)! \text{ dla } n > 0 \tag{6}$$

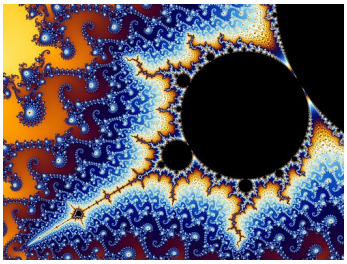
4. Wieża Hanoi(źródło [1]):

$$h_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, \\ 2 \cdot h_{n-1} + 1 & \text{dla } n > 1. \end{cases} \tag{7}$$

$$h_n = 2^n - 1. \tag{8}$$

Równania Rekurencyjne są jednym z najważniejszych zagadnień matematycznych. Znajdują one zastosowanie w wielu dziedzinach nauki, takich jak np.:

- Grafika komputerowa - wykorzystuje równania rekurencyjne do generowania fraktali. Fraktale są powtarzającymi się wzorami, które wykazują samo-podobieństwo na różnych skalach. Przykładowe równania rekurencyjne, takie jak wzory Mandelbrota i Julii, pozwalają na tworzenie wizualnie imponujących i skomplikowanych obrazów fraktalnych. Ich konstrukcja opiera się na iteracyjnym obliczaniu wartości punktów w płaszczyźnie zespolonej, co pozwala odkrywać fascynujące struktury matematyczne.



Rysunek 1: Ilustracja przedstawiająca złożony fraktal matematyczny o nazwie Mandelbrot.

- Sztuczna inteligencja - korzysta z algorytmu rekurencyjnych sieci neuronowych, które są inspirowane strukturą i działaniem ludzkiego mózgu. Te sieci składają się z połączonych ze sobą neuronów, które przekazują informacje między sobą w formie sygnałów elektrycznych. Rekurencyjne sieci neuronowe mają zdolność zapamiętywania i uwzględniania wcześniejszych informacji, co umożliwia im skomplikowane obliczenia i analizę danych. Dzięki nim sztuczna inteligencja może rozpoznawać wzorce, predykcje, czy też generować nowe treści.

- Algorytmy sortowania - takie jak *Quick Sort*, wykorzystują rekurencyjne techniki do uporządkowania zbiorów danych. Quick Sort to efektywny i popularny algorytm sortowania, który opiera się na strategii *dziel i zwyciężaj*. Polega na wybieraniu elementu podziału z listy, a następnie porównywaniu i przenoszeniu pozostałych elementów na odpowiednie strony tego elementu. Proces jest powtarzany rekurencyjnie dla każdej nowo utworzonej podlisty, aż do osiągnięcia pełnego uporządkowania zbioru danych.

- Rekurencja ogonowa - jest jednym z ważnych narzędzi wykorzystywanych w programowaniu funkcyjnym. Polega ona na tworzeniu funkcji, które same wywołują siebie w swoim ciele, bez tworzenia dodatkowych kontekstów. Jest to odmiana rekurencji, w której wywołania rekurencyjne są ostatnią operacją

w ciele funkcji. Funkcje ogonowe wykorzystują dodatkową zmienną nazywaną akumulatorem. Przechowuje ona w jednym miejscu w pamięci skumulowane podwyniki funkcji.

- Obliczenia Symboliczne - napisana aplikacja posługuje się obiektowością języka C++. Każda metoda w klasach pochodnych ma nadpisaną klasę bazową Term. Następnie dzięki rekurencji i obiektowości wywołujemy metody by przetwarzać różne symbole a następnie je oblicza i wyświetla.

- Przetwarzanie Języka - analiza tekstów polega na automatycznym przetwarzaniem i analizą języka naturalnego przez komputery. Rekurencja w tym przypadku analizuje strukturę a następnie tworzy model. Wykorzystuję się ją często w Analizach składniowych.

- Algorytmy grafowe - zajmują się analizą i manipulacją strukturą grafu, która składa się z wierzchołków (węzłów) i krawędzi (połączeń między wierzchołkami). Równania rekurencyjne w programowaniu dynamicznym są używane do konstrukcji algorytmów grafowych, które efektywnie rozwiązują różnorodne problemy, takie jak najkrótsza ścieżka, minimalne drzewo rozpinające, problem komiwojażera itp.

Cel pracy: Celem niniejszej pracy dyplomowej było stworzenie aplikacji, która umożliwia rozwiązanie dowolnego równania rekurencyjnego drugiego stopnia, wykorzystując *funkcję tworzącą* oraz *metodę przewidywań*. Implementacja w języku C++ generuje plik w formacie LaTeX, w którym obliczany jest wzór *ogólny* dla danego równania rekurencyjnego. Do obliczeń wymagane są cztery parametry. Dwa z nich to początkowe wyrazy ciągu, a kolejne dwa są parametrami dowolnie wybranego równania rekurencyjnego. Głównym celem pracy było przedstawienie dwóch metod rozwiązywania równań rekurencyjnych. Praca wprowadza w tematykę *równań rekurencyjnych* oraz *obliczeń symbolicznych*. Pierwszy rozdział zawiera podstawowe definicje i właściwości ciągów rekurencyjnych. Skupiono się szczególnie na dwóch trywialnych metodach matematycznych służących do wyznaczania wzoru *jawnego* dla równania rekurencyjnego. Opisano metodę *Przewidywań* oraz *Szeregu Formalnego*, reprezentowanego przez funkcję tworzącą. Dzięki koncepcji *Obliczeń Symbolicznych* udało się napisać program w języku C++, wykorzystujący cechy takie jak obiektowość, polimorfizm, dynamiczność, dziedziczenie. Zaimplementowane zostały klasy reprezentujące odpowiednie obliczenia symboliczno - matematyczne.

Rozdział 1

Technologie

1.1 Visual Studio vs Code::Blocks

1.2 Problem wyboru

Wybór odpowiedniego środowiska programistycznego stanowił jedno z trudniejszych zadań w procesie tworzenia aplikacji, z uwagi na wiele napotkanych problemów i przeszkód. W niniejszym rozdziale przedstawiono analizę dwóch różnych środowisk programistycznych: Visual Studio i Code::Blocks.

1.2.1 Visual Studio

Przeszukując literaturę, blogi i strony internetowe, znaleziono wiele pozytywnych opinii na temat środowiska programistycznego Visual Studio. Początkowo,
w ramach projektu, zdecydowano się korzystać z narzędzia Visual Studio w wersji 17.4.3, opartej na platformie Microsoft .NET Framework 4.8.04084. Była to wersja społecznościowa, która oferowała obsługę języka C# , C++ i wielu innych. Jednakże, napotkane problemy związane z ładowaniem konsoli oraz otwieraniem plików skłoniły do poszukiwania alternatywnego środowiska programistycznego. Z tego powodu podjęto decyzję o poszukiwaniu innych narzędzi, które mogą zapewnić bardziej stabilne i efektywne warunki pracy.

Rysunek 1.1: Logo środowiska programistycznego Visual Studio 2022.

1.2.2 Code::Blocks

W związku z wyżej wymienionymi problemami zdecydowałem się przetestować środowisko programistyczne o nazwie Code::Blocks w wersji 20.03, które jest zintegrowanym środowiskiem programistycznym. Po przejściu na tę platformę zauważono, że była ona znacznie łatwiejsza i przyjemniejsza w użyciu w porównaniu do Visual Studio. Interfejs użytkownika Code::Blocks jest prostszy i intuicyjny, co znacząco przyspiesza proces programowania mniejszych aplikacji desktopowych.

Rysunek 1.2: Logo środowiska programistycznego Code Blocks.

1.2.3 Podsumowanie

Podsumowując, przeprowadzone porównanie środowisk programistycznych Code::Blocks i Visual Studio wykazało, że Code::Blocks jest łatwiejszy w użyciu, bardziej przyjemny w obsłudze oraz prostszy w konfiguracji. Natomiast Visual Studio 2022 posiada bardziej rozszeżone narzędzia do debuggowania a także bardziej skomplikowaną strukture katalogów. Jednak Interfejs użytkownika Code::block-sa jest bardziej intuicyjny, a dostępne funkcje przyspieszają proces programowania.
Z tych powodów zdecydowałem się przenieść projekt z Visual Studio na Code::Blocks, co pozwoliło mi skoncentrować się na szybszym i dokładniejszym tworzeniu aplikacji.

1.3 C++

1.3.1 Opis

C++ jest obiektowym, wieloparadygmatowym językiem programowania ogólnego przeznaczenia, który został stworzony przez Bjarne Stroustrupa w latach 80. Język ten jest rozszerzeniem języka C, co oznacza, że zawiera większość cech języka C. C++ jest językiem kompilowanym, co oznacza, że kod źródłowy jest kompilowany na kod maszynowy przed jego wykonaniem. Wspiera wiele paradygmatów programowania, takich jak programowanie obiektowe, funkcyjne i wiele innych. Język ten jest powszechnie wykorzystywany do tworzenia aplikacji o wysokiej wydajności.
W przeszłości był często wykorzystywany do tworzenia gier komputerowych. Obecnie wypierany jest przez C♯, który jest często używany w połączeniu z środowiskiem Unity do tworzenia gier. C++ znajduje również zastosowanie w tworzeniu systemów operacyjnych, sterowników urządzeń, oprogramowania sieciowego, aplikacji biznesowych i wielu innych. Jest również wykorzystywany w dziedzinach takich jak robotyka, grafika komputerowa, nauki ścisłe i wiele innych. C++ posiada wiele zalet, takich jak szybkość, wydajność, wsparcie dla wielu platform i architektur, bogate biblioteki standardowe oraz prostotę i przyjemność z programowania. Dzięki wszechstronności platformy Visual Studio 2022, która jest głównie przeznaczona do języka C♯, możliwe było również wykorzystanie C++ do mojej aplikacji. Możliwe, że nawet nie zdajesz sobie sprawy, ile razy korzystałem z efektów pracy w C++.

Rysunek 1.3: Logo języka programowania C++.

Komputerowe efekty w filmach "Gwiezdne wojny", "Władca Pierścieni", "Spider-Man"i innych wykonane zostały przez programy napisane w C++. W C++ napisano najistotniejsze procedury sterowania samolotami F-16 czy F-35. Niemal całe oprogramowanie sterowania silnikami okrętowymi olbrzymich kontenerowców i tankowców firmy MAN B&W Diesel A/S

zostało napisane w C++. NASA – amerykańska agencja lotów kosmicznych – posługuje się językiem C++ w wielu swoich przedsięwzięciach. Zarówno w naziemnej kontroli lotów kosmicznych, jak i tam, w przestrzeni kosmicznej. Duża część programowania w Międzynarodowej Stacji Kosmicznej została napisana w C++(źródło [4]).

1.3.2 Informacje o wersji

Przedstawiono poniżej tabelę zawierającą informacje dotyczące wersji.

Wersja	Oznaczenie
C++14	201402L

Wykorzystanie wersji C++14 (oznaczenie 201402L) ma wiele zalet. Przede wszystkim, jest to wersja, która nie jest zbyt stara ani zbyt nowa, co sprawia, że jest odpowiednia do większości projektów związanych z programowaniem w języku C++. Przez lata została przetestowana i udoskonalona, co przekłada się na jej stabilność i niezawodność.

1.3.3 Zalety

1. Kompilowalność i szybkość: Język C++ cechuje się kompilowalnością, co umożliwia szybkie uruchamianie programów oraz wcześniejsze wykrywanie błędów w trakcie procesu kompilacji. Dodatkowo, C++ wyróżnia się wysoką szybkością działania, co ma kluczowe znaczenie szczególnie w przypadku aplikacji wymagających intensywnych obliczeń lub operacji na dużych zbiorach danych. Dzięki temu, programiści mogą tworzyć wydajne i efektywne aplikacje, które spełniają założenia czasowe i wydajnościowe.

2. Efektywność i wydajność : Język ten został zaprojektowany w taki sposób, aby zapewnić efektywność wykonywanych operacji, co przekłada się na optymalne wykorzystanie zasobów sprzętowych.

3. Dynamiczność: Język ten oferuje dynamiczne zarządzanie pamięcią, co może być przydatne w przypadku aplikacji wymagających elastycznego przydzielania i zwalniania zasobów.

4. Obsługa wielu bibliotek: Istnieje wiele bibliotek i narzędzi wspierających ten język, co ułatwia rozwój zaawansowanych aplikacji i integrację z istniejącymi rozwiązaniami.

5. Nauka dbania o zasoby i zarządzania pamięcią

6. Obiektowość: Język ten opiera się na paradygmacie programowania obiektowego, co umożliwia tworzenie modułowych i elastycznych struktur kodu.

1.3.4 Wady

1. Długi czas nauki: Ten język może być nieco bardziej złożony niż niektóre inne języki programowania, co może wymagać większego nakładu nauki i zrozumienia.

2. Konkurencja nowoczesnych języków: Może być wypierany z niektórych obszarów i zastosowań.

3. Brak automatycznego zarządzania pamięcią: Jedną z wad tego języka jest brak wbudowanego mechanizmu automatycznego zarządzania pamięcią, co może prowadzić do błędów związanych z alokacją i zwalnianiem pamięci.

Rozdział 2

Analiza metod otrzymywania wzoru ogólnego z równania rekurencyjnego

2.1 Metoda przewidywań dla równań drugiego stopnia

Metoda przewidywań dla równań drugiego stopnia polega na rozwiązaniu równania rekurencyjnego jednorodnego rzędu 2, która opiera się na pierwiastkach wielomianu charakterystycznego tego równania. Korzystając z tej metody, można przewidzieć dowolny wyraz ciągu rekurencyjnego bez potrzeby wyznaczania wcześniejszych wyrazów ciągu rekurencyjnie. W tej metodzie do wyznaczenia wzoru jawnego należy wybrać cztery parametry. Wyraz **zerowy** ciągu rekurencyjnego czyli a_0 oznaczany także jako **Z** oraz wyraz **pierwszy** ciągu rekurencyjnego a_1 oznaczany jako **J**. Dodatkowo, przy użyciu wzoru rekurencyjnego, należy określić wartości parametrów **A** i **B**, które decydują o wpływie poprzednich wyrazów ciągu na obecny wyraz. Parametr **A** określa wpływ wyrazu a_{n-1}, natomiast parametr **B** odpowiada za wpływ wyrazu a_{n-2}. Uwzględniając zaproponowaną notację wzór rekurencyjny zdefiniowany jest następująco:

$$a_n = \begin{cases} \mathbf{Z} \text{ dla } \text{ dla } n = 0, \\ \mathbf{J} \text{ dla } \text{ dla } n = 1, \\ \mathbf{A} \cdot a_{n-1} + \mathbf{B} \cdot a_{n-2}, \text{ dla } \text{ dla } n > 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2 Wielomian charakterystyczny

Wielomian charakterystyczny dla równania rekurencyjnego to wielomian, którego pierwiastki są rozwiązaniami równania rekurencyjnego. Równanie rekurencyjne ma ogólną postać:

$$a_n = \lambda_1 \cdot a_{n-1} + \lambda_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + \lambda_k \cdot a_{n-k} \tag{2.2}$$

gdzie a_n oznacza n-ty wyraz ciągu rekurencyjnego, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ to stałe, a a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_{n-k} to poprzednie wyrazy ciągu. Aby znaleźć wielomian charakterystyczny, zakładamy, że ciąg ma postać $a_n = x^n$, gdzie x jest nieznane. Podstawiając to do równania rekurencyjnego, otrzymujemy:

$$x^n = \lambda_1 \cdot x^{n-1} + \lambda_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + \lambda_k \cdot x^{n-k} \tag{2.3}$$

Następnie upraszczamy równanie i zapisujemy je w postaci wielomianowej.

W naszej pracy skupiamy się na przypadku k=2, gdzie przypomnijmy $\mathbf{A} = \lambda_1$, natomiast $\mathbf{B} = \lambda_2$, skąd uzyskujemy wielomian postaci:

$$x^2 - \mathbf{A} \cdot x - \mathbf{B} = 0 \tag{2.4}$$

Wielomian charakterystyczny dla tego równania rekurencyjnego to zatem:

$$w(x) = x^2 - \mathbf{A} \cdot x - \mathbf{B} \tag{2.5}$$

Wielomian ten ma pierwiastki, które są rozwiązaniami równania rekurencyjnego. Jeśli znamy pierwiastki tego wielomianu, możemy znaleźć ogólną postać wyrazów ciągu rekurencyjnego. W naszym przypadku skupiamy się na przypadku gdzie pierwiastki są różne. Oznaczmy je α, β.

Wówczas równanie rekurencyjne posiada rozwiązanie postaci:

$$x_n = C_1 \cdot \alpha^n + C_2 \cdot \beta^n \tag{2.6}$$

gdzie C_1, C_2 są pewnymi stałymi. Aby je obliczyć podstawiamy warunki początkowe uzyskując układ dwóch równań liniowych:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = C_1 \cdot (\alpha)^0 + C_2 \cdot (\beta)^0 \\ \mathbf{J} = C_1 \cdot (\alpha)^1 + C_2 \cdot (\beta)^1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Z czego uzyskujemy relatywnie prosty układ równań:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = 1 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 \\ \mathbf{J} = \alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

Aby rozwiązać układ stosujemy metodę *uzupełnień* dla macierzy:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \mathbf{Z} \\ \alpha & \beta & \mathbf{J} \end{array}\right] \tag{2.9}$$

Obliczamy wyznacznik C_1 i C_2 i tym łatwym sposobem dochodzimy do wzoru jawnego równanie rekurencyjnego, które ma rozwiązanie postaci:

$$a_n = C_1 \cdot \alpha^n + C_2 \cdot \beta^n \tag{2.10}$$

2.3 Metoda formalnego szeregu potęgowego reprezentowanego przez funkcje tworzącą dla równań drugiego stopnia.

Zarówno szereg formalny, jak i funkcja tworząca mają postać sumy wyrazów:

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i \cdot x^i \tag{2.11}$$

Jednak różnią się interpretacją tych wyrazów - w przypadku szeregu formalnego są to kolejne wyrazy sumy, a w przypadku funkcji tworzącej są to elementy sekwencji lub zbioru, więc wygląd szeregu formalnego i funkcji tworzącej może być przedstawiony w postaci szeregów potęgowych.

2.3.1 Szereg Formalna

Niech S będzie pierścieniem z elementem identycznym, a N oznacza nieujemne liczby całkowite. Formalny szereg potęgowy o k zmiennych nad S jest odwzorowaniem od N do S. Wartość formalnego szeregu potęgowego w k-krotce a jest zapisywana jako $f(a)$ i określana jako współczynnik f dla a. Współczynnik f dla k-krotki, w której wszystkie współrzędne są równe zeru, nazywany jest stałym wyrazem f. Formalny szereg potęgowy f, dla którego tylko skończona liczba wyrazów f jest niezerowa, jest równoważny wielomianowi (o k zmiennych). Jeśli f i g są dwoma formalnymi szeregami potęgowymi, to ich suma $f + g$ jest określana przez regułę:

$$(f + k)_\alpha = f_\alpha + g_\alpha \tag{2.12}$$

natomiast ich produkt wyjaśnia reguła(źródłó [5]):

$$(fg)\alpha = \sum_{\beta+\theta=\alpha} f_\beta \cdot g_\theta \tag{2.13}$$

2.3.2 Funkcja tworząca

Niech $\{a_i\}_{i\geq 0}$ będzie ciągiem liczb (w szczególności liczb całkowitych nieujemnych). Wtedy szereg

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i \tag{2.14}$$

nazywamy zwykłą funkcją tworzącą lub krótko *funkcją tworzącą.* Funkcje tworzącę mają zatem postac szeregów potęgowych(źródłó [1]).

2.4 Metoda wyznaczania wzoru jawnego za pamocą Szeregu Formalnego dla równań drugiego stopnia

Niech $f(x)$ będzie zwykłą funkcją tworzącą ciągu a_n. Wtedy posiądając równanie rekurencyjne:

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + B \cdot x_{n-2} \tag{2.15}$$

Możemy przekształcać szereg reprezentowany przez funkcję tworzącą w następujący sposób(źródło [6]):

$$f(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot x^n \tag{2.16}$$

Podstawiamy wyrazy naszego ciągu:

$$f(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{i=2}^{\infty} (A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2}) \cdot x^n \tag{2.17}$$

Wymnażamy x^n więc:

$$f(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} A \cdot a_{n-1} \cdot x^n + B \cdot a_{n-2}\ x^n \tag{2.18}$$

Następnie wyciągamy x z x^n oraz x^2 z x^n i otrzymujemy:

$$f(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} A \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} B \cdot a_{n-2} \cdot x^{n-2} \cdot x^2 \tag{2.19}$$

Wyciągamy odpowiednie parametry:

$$f(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + A \cdot x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \cdot x^{n-1} + B \cdot x^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot x^{n-2} \tag{2.20}$$

Ponieważ nasze sumy dążą do nieskonczoności, możemy podstawić parametry i, j:

$$f(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + A \cdot x \cdot \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot x^j + B \cdot x^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i \tag{2.21}$$

Następnie za szereg formalny podstawiamy odpowiednie wartości:

$$f(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + A \cdot x \cdot (f(x) - a_0 \cdot x^0) + B \cdot x^2 \cdot f(x) \tag{2.22}$$

Grupujemy wyrazy przenosząc $f(x)$ na lewą stronę:

$$f(x) - A \cdot x \cdot f(x) - B \cdot x^2 \cdot f(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + A \cdot x \cdot (-a_0) \tag{2.23}$$

Dzielimy by powstał ułamek:

$$f(x) = \frac{a_0 + (x \cdot (a_1 + (-(A) \cdot a_0 \cdot x^0)))}{1 - (A \cdot x) - (B \cdot x^2)} \tag{2.24}$$

Obliczamy równanie kwadratowe mianownika, czyli równania:

$$-B \cdot x^2 - A \cdot x + 1 = 0 \tag{2.25}$$

Mając rozwiązania równanie kwadratowego:

$$x_1, x_2 \tag{2.26}$$

Następnie stosujemy rozkład na ułamki proste, gdzie C_1, C_2 są stałymi. I mnożymy obustronne przez $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$:

$$\frac{a_0 + (x \cdot (a_1 + (-(A) \cdot a_0 \cdot x^0)))}{1 - (A \cdot x) - (B \cdot x^2)} = \frac{C_1}{x - x_1} + \frac{C_2}{x - x_2} \quad \Big| \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \tag{2.27}$$

Grupujemy wyrazy następująco:

$$a_0 + x \cdot (a_1 - A \cdot a_0) = x \cdot (B \cdot C_1 + B \cdot C_2) - B \cdot C_1 \cdot x_2 - B \cdot C_2 \cdot x_1 \tag{2.28}$$

Powstaje układ równań:

$$\begin{cases} a_1 - A \cdot a_0 = B \cdot C_1 \cdot x_2 + B \cdot C_2 \cdot x_1 \\ a_0 = -B \cdot C_1 - B \cdot C_2 \end{cases} \tag{2.29}$$

Podstawiamy do Macierzy:

$$\left[\begin{array}{cc|c} B \cdot x_2 & B \cdot x_1 & a_1 - A \cdot a_0 \\ -B & -B & a_0 \end{array}\right] \tag{2.30}$$

Rozwiązujemy układ metodą wyznaczników:

$$W = \left| \begin{bmatrix} B \cdot x_2 & B \cdot x_1 \\ -B & -B \end{bmatrix} \right| \tag{2.31}$$

$$W_{C_1} = \left| \begin{bmatrix} a_1 - A \cdot a_0 & B \cdot x_1 \\ a_0 & -B \end{bmatrix} \right| \tag{2.32}$$

$$W_{C_2} = \left| \begin{bmatrix} B \cdot x_2 & a_1 - A \cdot a_0 \\ -B & a_0 \end{bmatrix} \right| \tag{2.33}$$

Wyliczamy parametry C_1 i C_2:

$$C_1 = \frac{W}{W_{C_1}} \tag{2.34}$$

$$C_2 = \frac{W}{W_{C_2}} \tag{2.35}$$

Podstawiamy nasze wyliczone parametry do równania:

$$f(x) = \frac{C_1}{x - x_1} + \frac{C_2}{x - x_2} \tag{2.36}$$

Aby rozwinąć ułamki w szereg, sprowadzamy je do postaci $\frac{a}{1-b \cdot x}$. W tym celu dzielimy licznik i mianownik przez $-x_1$, $-x_2$ odpowiednio, stąd:

$$\frac{C_1}{-x_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{x_1})^n + \frac{C_2}{-x_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{x_2})^n \tag{2.37}$$

Grupujemy wyrażenia zawierające x^n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_1}{-x_1} \cdot \frac{x^n}{x_1^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_2}{-x_2} \cdot \frac{x^n}{x_2^n} \tag{2.38}$$

I tak otrzymuje wzór ogólny równania rekurencyjnego(źródło[1]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{C_1}{-x_1} \cdot \frac{1}{x_1^n} + \frac{C_2}{-x_2} \cdot \frac{1}{x_2^n}) \cdot x^n \tag{2.39}$$

Rozdział 3

Aplikacja

3.1 Uruchomienie

W celu uruchomienia aplikacji, należy wykonać następujące kroki:

1. Znajdź plik wykonywalny aplikacji, który będzie miał rozszerzenie związane z danym systemem operacyjnym (np. .exe dla systemu Windows). Dostępny jest na Github.

   `https://github.com/karolw881/KalulatorObliczenSymbolicznychRownanRekurencyjnych`

2. Po uruchomieniu pliku wykonywalnego aplikacji, pojawi się konsola lub terminal, w którym można wpisać parametry.

3. Wprowadź cztery parametry, zgodnie z wymaganiami aplikacji.

4. Naciśnij klawisz Enter, aby przekazać wprowadzone parametry do aplikacji. Aplikacja rozpocznie przetwarzanie danych na podstawie dostarczonych parametrów.

5. Aplikacja rozpocznie przetwarzanie danych na podstawie dostarczonych parametrów i wygeneruje plik LaTeX zawierający rozwiązanie równań rekurencyjnych drugiego stopnia.

Po zakończeniu działania aplikacji, zostanie wygenerowany plik LaTeX, który zawiera rozwiązanie równań rekurencyjnych drugiego stopnia na podstawie dostarczonych parametrów. Plik ten będzie zawierał szczegółowe informacje dotyczące rozwiązania, w tym kroki obliczeniowe i wyniki. Można otworzyć ten plik przy użyciu

odpowiedniego oprogramowania obsługującego format LaTeX w celu wyświetlenia i analizy rozwiązania równań.

Ważne jest, aby upewnić się, że wszystkie parametry zostały prawidłowo wprowadzone, aby otrzymać poprawne rozwiązanie równań rekurencyjnych drugiego stopnia.

3.2 Dzialanie

3.2.1 Opis klas

- Term (Wyrażenie): Reprezentuje bazowy termin w równaniach rekurencyjnych. Jest używana do określania podstawowych wyrazów ciągu w równaniach rekurencyjnych. Może być wykorzystywana do definiowania rekurencyjnych wzorów i generowania kolejnych wyrazów ciągu.

- RealNumber (Liczba rzeczywista): Reprezentuje liczbę rzeczywistą w kontekście obliczeń symbolicznych. Jest używana do manipulacji i wykonywania operacji matematycznych na liczbach rzeczywistych w formie symbolicznej.

- Add (Dodawanie): Reprezentuje ona dodawanie symboliczne. Jest przeznaczona do wykonywania symbolicznego dodawania gdzie sumowna jest dowolna skończona niepusta lista elementów.

- SubractU (Odejmowanie Unarne): Reprezentuje operację odejmowania w kontekście obliczeń symbolicznych. Służy do wykonania odejmowania na symbolach.

- Multiplication (Mnożenie): Służy do przeprowadzania operacji mnożenia na symbolach lub wyrażeniach matematycznych. Dzięki tej klasie, która dodaje do niepustego skończonego wektora symbole, możliwe jest dokonywanie obliczeń symbolicznych związanych z mnożeniem, a także manipulowanie i upraszczanie wyników.

- Division (Dzielenie): Umożliwia wykonanie operacji dzielenia na symbolach, zmiennych lub wyrażeniach matematycznych. Dzięki temu możliwe jest dokonywanie obliczeń symbolicznych związanych z dzieleniem, a także manipulowanie i upraszczanie wyników.

- Var (Zmienna): Reprezentuje zmienne znakowe. Dzięki tej właściowości program jest w stanie wyświetlać znaki reprezentowane przez string na ekranie. Klasa Var tworzy także klasę VarIndex, która wyświetla znak z dolnym indeksem.

- VarIndex (Zmienna z indeksem): Reprezentuje zmienne znakowe, które posiadają dolny indeks np. x_1. Jej pierwszym parametrem jest Term, który jest głównym znakiem, a drugim parametrem jest term, który definiuję indeks dolny.

- Determinant (Wyznacznik): Umożliwia obliczanie wyznaczników macierzy i manipulację nimi w obliczeniach symbolicznych. Wyznacza Wyznacznik pierwszej niewiadomej a także drugiej niewiadomej.

- Determinant2x2 (Wyznacznik2x2): Umożliwia obliczanie wyznaczników macierzy 2x2 i manipulację nimi w obliczeniach symbolicznych.

- Result (Wynik): Reprezentuje wynik obliczeń symbolicznych. Służy do przechowywania i przenoszenia wyników operacji na symbolach, zmiennych lub wyrażeniach matematycznych. Ta klasa umożliwia łatwe zarządzanie wynikami obliczeń symbolicznych i korzystanie z nich w dalszych obliczeniach. Reprezentowana jest przez parę gdzie jeden z parametrów stwierdza czy możliwe jest wykonanie obliczeń.

3.3 Implementacja parsera w języku C++

W tym rozdziale opisano implementację parsera w języku C++, który został wykorzystany w pracy dyplomowej do wczytywania symboli matematycznych. Parser ten pozwala na przetwarzanie i interpretację różnych symbolicznych wyrażeń, przyjmując cztery parametry wejściowe od użytkownika.

3.3.1 Działanie

- Kod sprawdza poprawność wyrażeń matematycznych, analizując i interpretując podane tokeny. Wykorzystuje różne warunki i pętle w celu przetwarzania tokenów i tworzenia odpowiednich termów.

- W przypadku wystąpienia błędów, kod wyświetla komunikaty informacyjne, wskazujące na miejsce i rodzaj błędu.

- Przy wczytywaniu symboli matematycznych, należy pamiętać, że wszystkie znaki powinny być wprowadzane bez spacji.

- Proces parsowania został podzielony na dwa etapy w celu uproszczenia implementacji. W pierwszym etapie parsowane wyrażenie jest dzielonę na liste tokenów `+`,`-` , `*`, `\` , `(` `)`, `sqrt`, `,` , *Number*, gdzie dodatkowo sprawdzamy czy wszystkie nawiasy zostały poprawnie domknięte. Na tak utworzonej liście wywoływane są rekurencyjnie następujące metody:

  1. Funkcję `Parse_Error`, ma za zadanie obsłużyć błędy podczas analizy składniowej i wyświetlić odpowiedni komunikat. Jej działanie polega na wypisaniu komunikatu błędu oraz wypisaniu błędnych symboli z wektora tokens od pozycji pos do przedostatniego elementu.

  2. Funkcja `get_first_term`, której zadaniem jest zwrócenie pierwszego poprawnie zbudowanego termu wraz z informacją dotyczącą ilości wykorzystanych tokenów. Ponadto, funkcja precyzuje pozycję ostatniego tokena wykorzystanego do konstrukcji zwracanego termu.

  3. `get_term_up_to_prior` pełni istotną rolę w procesie analizy składniowej parsera. Jej szczególny sposób budowania termów pozwala na zachowanie siły wiązania operacji, co ma kluczowe znaczenie dla poprawnego zrozumienia struktury wyrażeń. Głównym zastosowaniem tej funkcji jest konstrukcja największego lewego argumentu operacji dodawania (`+`) lub odejmowania (`-`), przy uwzględnieniu faktu, że operacje mnożenia (`*`) lub dzielenia (`/`) posiadają większą siłę wiązania.

  4. W przypadku innych symboli, które nie pasują do żadnego oczekiwanego wzorca, funkcja wywołuje funkcję `Parse_Error`, która obsługuje błędy podczas analizy składniowej i wyświetla odpowiednie komunikaty.

3.4 Przykłady poprawnego użycia

W celu demonstracji możliwości parsera, przedstawiono przykłady poprawnego użycia, które zostały zilustrowane w tabeli poniżej:

Tabela 3.1: Przykłady poprawnego użycia parsera

Przykład	**Wejście**
1	`2+3*4`
2	`17`
3	`(1+2)*3`
4	`sqrt(2,3)`
5	`7-sqrt(6,1)`
6	`sqrt(1,2)+(9+2)`
7	`-((-1)*2)/-2`
8	`11/-11`

3.5 Przykłady błędnego użycia

Tabela 3.2: Przykłady błędnego użycia parsera

Przykład	**Wejście**	**Komunikat błędu**
1	`2+3*`	nieoczekiwany koniec wyrażenia.
2	`sqrt(9`	niedomknięty nawias.
3	`2++3`	nieoczekiwany symbol operacji.
4	`2 + 3`	nieoczekiwany symbol operacji.

W przypadku błędnego użycia parsera, mogą wystąpić następujące problemy:

- Nieprawidłowe wyrażenie: Parser wykryje nieprawidłowe wyrażenie i poinformuje użytkownika o błędzie.
- Niedomknięte nawiasy: Parser sprawdza, czy nawiasy zostały poprawnie zamknięte. W przypadku niedomkniętych nawiasów, parser zgłosi błąd.
- Nieoczekiwane symbole: Parser oczekuje określonych symboli i operacji matematycznych. Jeśli napotka nieoczekiwane symbole, zgłosi błąd.

- Obsługa błędów: Parser został wyposażony w obsługę błędów, takich jak:

    1. Symbol operacji na końcu tekstu.
    2. Nieprawidłowe wyrażenia.
    3. Nieoczekiwane symbole.
    4. Niedomknięte nawiasy.
    5. Nieudane pobranie termu.
    6. Niedomknięte wyrażenie.
    7. Symbol **sqrt** na końcu tekstu.
    8. Nieznany napis.
    9. Nadmiar domknięć nawiasów.

3.5.1 Podsumowanie

Parser w języku C++ jest używany w pracy licencjackiej do analizy składniowej matematycznych wyrażeń. Dzięki zastosowaniu różnych metod i struktur danych, parser umożliwia poprawne przetwarzanie i interpretację matematycznych wyrażeń, przyjmując cztery parametry od użytkownika. Dodatkowo, parser jest wyposażony w obsługę błędów, które mogą wystąpić podczas analizy składniowej.

3.6 Rekurencyjne skracanie Termów za pomocą drzewa

W tej sekcji przedstawiono metodę rekurencyjnego skracania wyrażeń symbolicznych, zwanych Termami, za pomocą funkcji skracających. Wyrażenia te mogą być zobrazowane za pomocą drzewa, gdzie każdy wierzchołek reprezentuje operację lub wartość, a krawędzie reprezentują zależności między nimi.

- Funkcja `get_term(int nr)` jest wykorzystywana do pobierania podtermu o określonym numerze nr. Jeśli nr jest mniejsze niż zero lub większe niż rozmiar podtermów, funkcja wyświetla komunikat o nieprawidłowym poszukiwaniu i kończy program z kodem błędu -10. W przeciwnym razie zwraca podterm.

- Metoda `term_tree_size()` oblicza rozmiar drzewa Termu. Iteruje ona po podtermach i sumuje ich rozmiary rekurencyjnie. Jeśli suma wynosi zero, zwraca wartość 1, aby uwzględnić wierzchołek główny Termu.

- Metoda `term_to_node(std::ostream& plik)` generuje reprezentację drzewa Termu w postaci węzłów w języku TikZ, która może być wykorzystana do tworzenia diagramów drzewa. Dla każdego podtermu generuje węzeł i rekurencyjnie wywołuje `term_to_node()` na tym podtermie. Dodatkowo, jeśli Term ma więcej niż jeden podterm, oblicza odległość między rodzeństwem na podstawie rozmiaru Termu i przekazuje ją do generowanych węzłów.

- Metoda `term_tree(std::ostream& plik)` generuje pełne drzewo Termu w języku TikZ. Tworzy środowisko tikzpicture i dodaje węzeł główny Termu. Następnie wywołuje `term_to_node()` na głównym Termie, przekazując strumień pliku, aby zapisywać generowany kod TikZ. Dodaje odpowiednie formatowanie i zamyka środowisko tikzpicture.

W celu zobrazowania procesu skracania Termów za pomocą drzewa, przedstawiono przykładowe wyrażenie: `-((-1)*2)/-2+sqrt(2,2+2*7)/2.` Konwencje dla poszczególnych operacji matematycznych w oparciu o drzewo parsowania są następujące:

Etap 1

- Pierwsza część to ułamek, w którym mianownik wynosi -2. Licznik tego ułamka składa się z dwóch czynników: negatywu (minus) liczby 1 i iloczynu negatywu liczby 2. Możemy to zapisać jako:

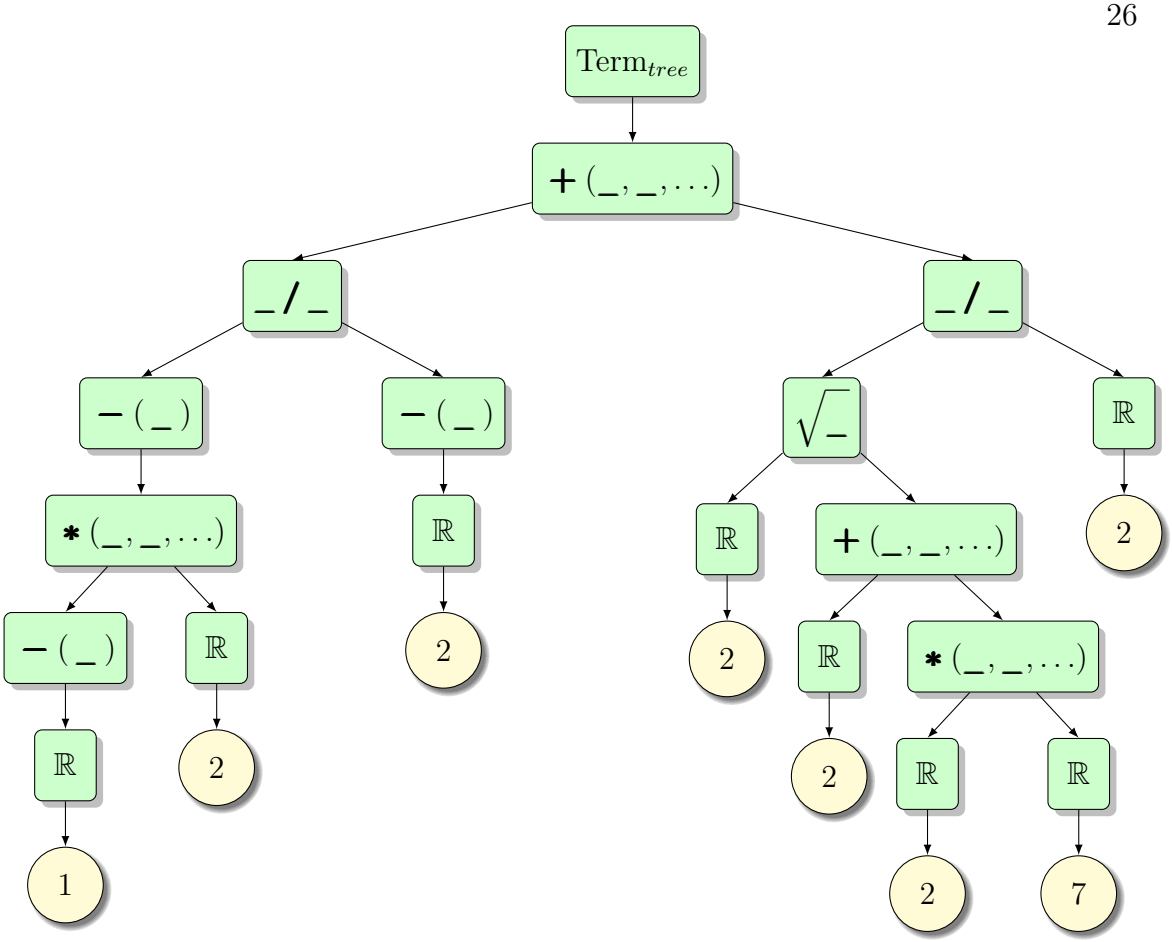
$$\frac{-((-1)\cdot 2)}{-2}$$

- Druga część to ułamek, w którym mianownik wynosi 2. Licznik tego ułamka to pierwiastek drugiego stopnia z sumy liczby 2 i iloczynu liczby 2 i liczby 7. Zapiszemy to jako:

$$\frac{\sqrt[2]{2+(2)\cdot(7)}}{2}$$

- Całość wygląda następująco:

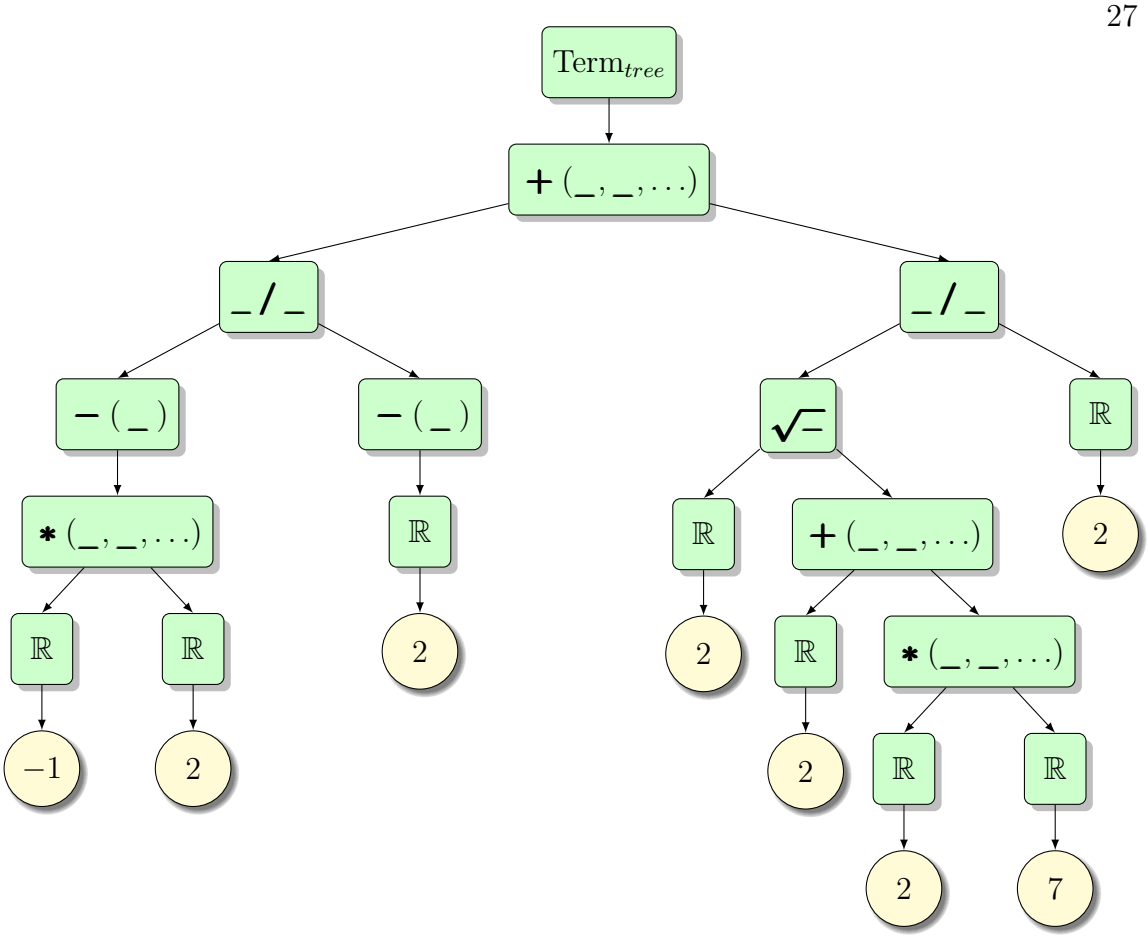
$$\frac{-((-1)\cdot 2)}{-2}+\frac{\sqrt[2]{2+(2)\cdot(7)}}{2}$$



Etap 2

- Pierwsze i drugie równanie pozostają bez zmian, natomiast drzewo skraca unarne odejmowanie jedynki do liczby rzeczywistej minus jeden. W związku z tym całe równanie pozostaje bez zmian.

$$\frac{-(-1 \cdot (2))}{-(2)} + \frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$



Etap 3

- Drzewo wymnaża liczbę rzeczywistą minus jeden przez dwójkę, dlatego w liczniku powstaje:

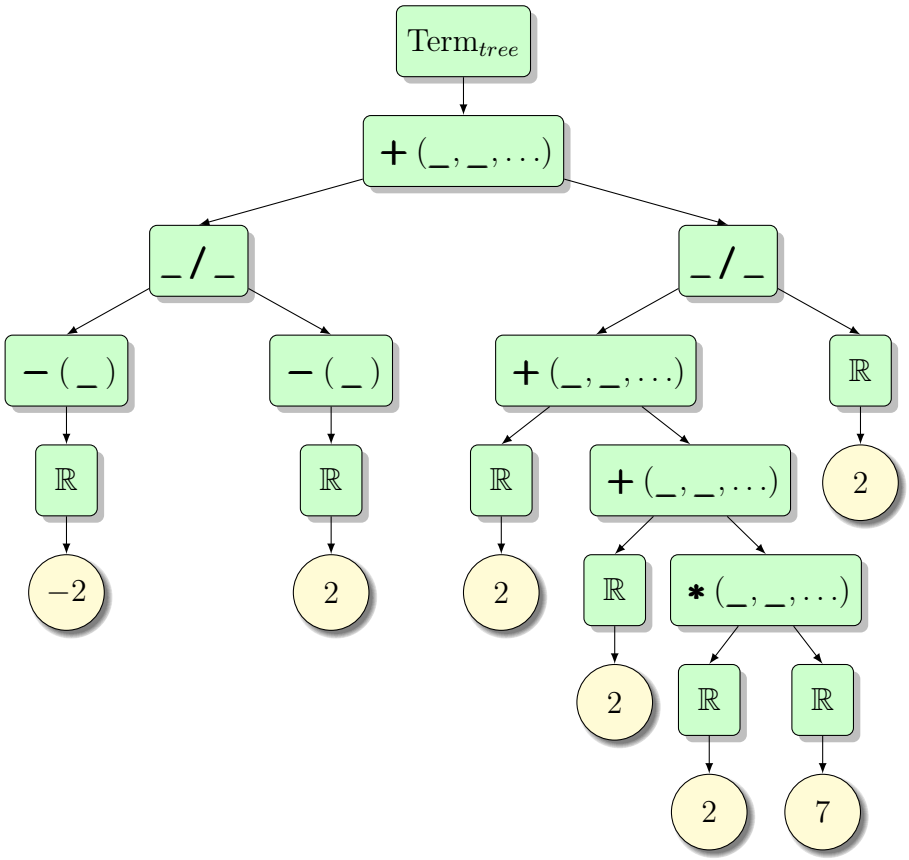
$$\frac{-(-2)}{-2}$$

- Druga część pozostaje bez zmian:

$$\frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$

- Łącząc obie części, otrzymujemy pełne wyrażenie:

$$\frac{-(-2)}{-(2)} + \frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$



Etap 4

- Etap czwarty przedstawia skrócenie licznika w, którym jest unarne odejmowanie z liczbą rzeczywistą minus dwa na dwójkę:

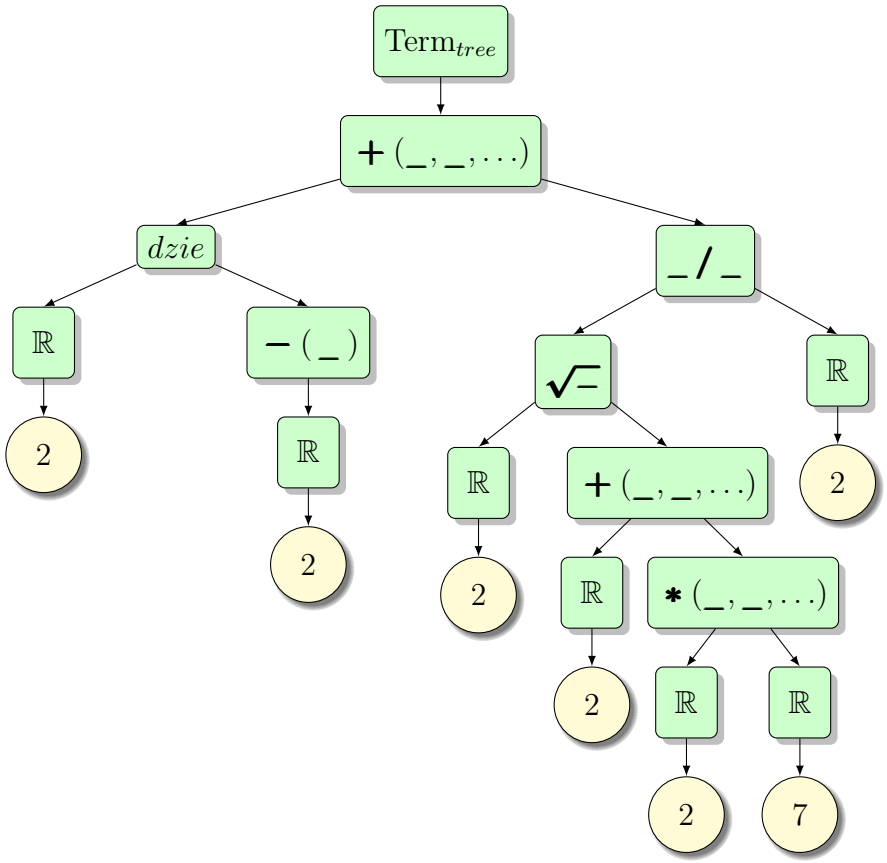
$$\frac{2}{(-2)}$$

- Druga część pozostaje bez zmian:

$$\frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$

- Łącząc obie części, otrzymujemy pełne wyrażenie:

$$\frac{2}{-(2)} + \frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$



Etap 5

- Etap piąty przedstawia zamiane mianownika w którym jest unarne odejmowanie w liczbę rzeczywistą minus 2. Dzięki tej operacji możemy pozbyć się niepotrzebnego nawiasu przy (-2), więc powstaje:

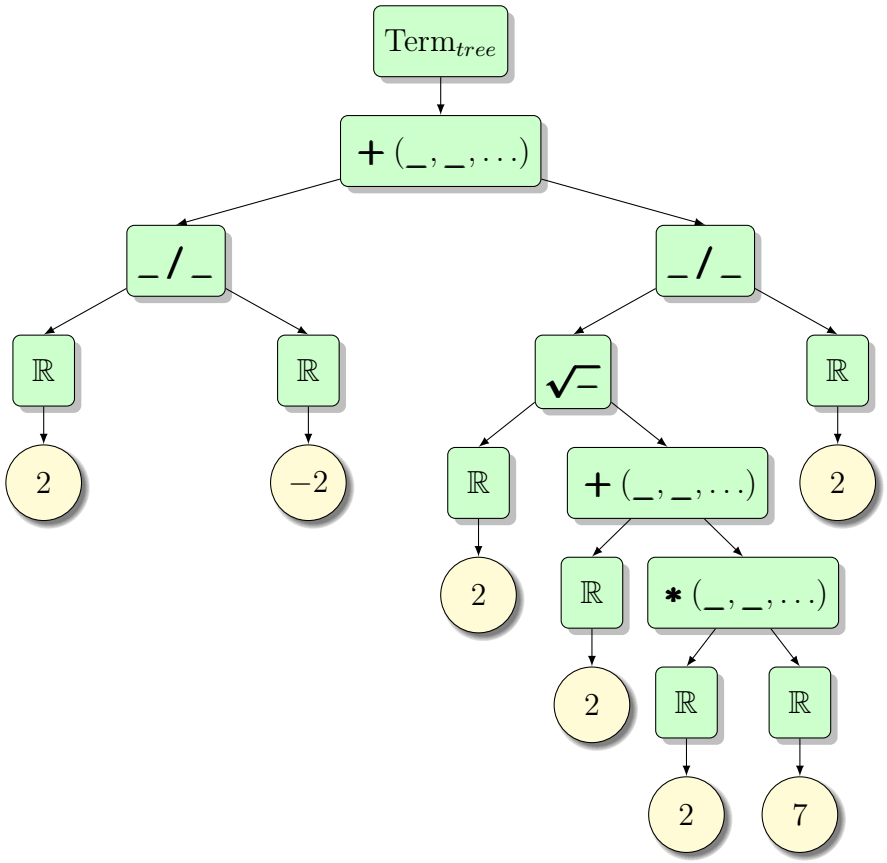
$$\frac{2}{-2}$$

- Druga część pozostaje bez zmian:

$$\frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$

- Dzięki czemu całe wyrażenie jest postaci:

$$\frac{2}{-2} + \frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$



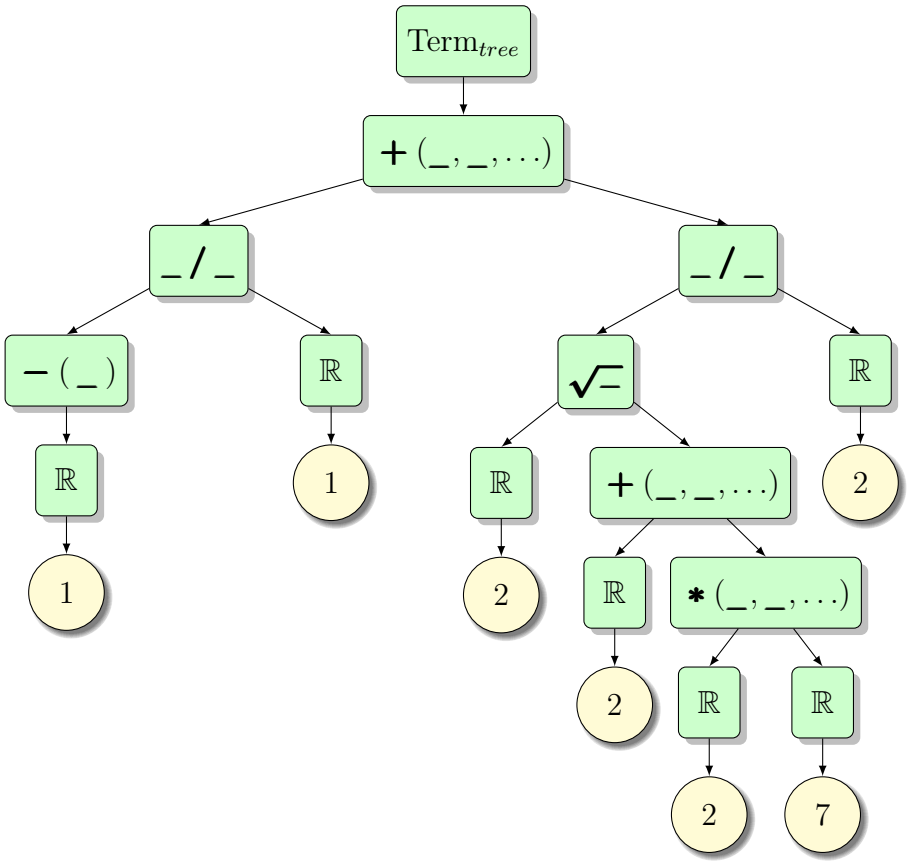
Etap 6

- Etap szósty przedstawia skracanie dzielenia i przeniesienie minusa do licznika: $\frac{2}{-2}$ na $\frac{-1}{1}$
- Druga część pozostaje bez zmian:

$$\frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$

- W rezultacie otrzymujemy:

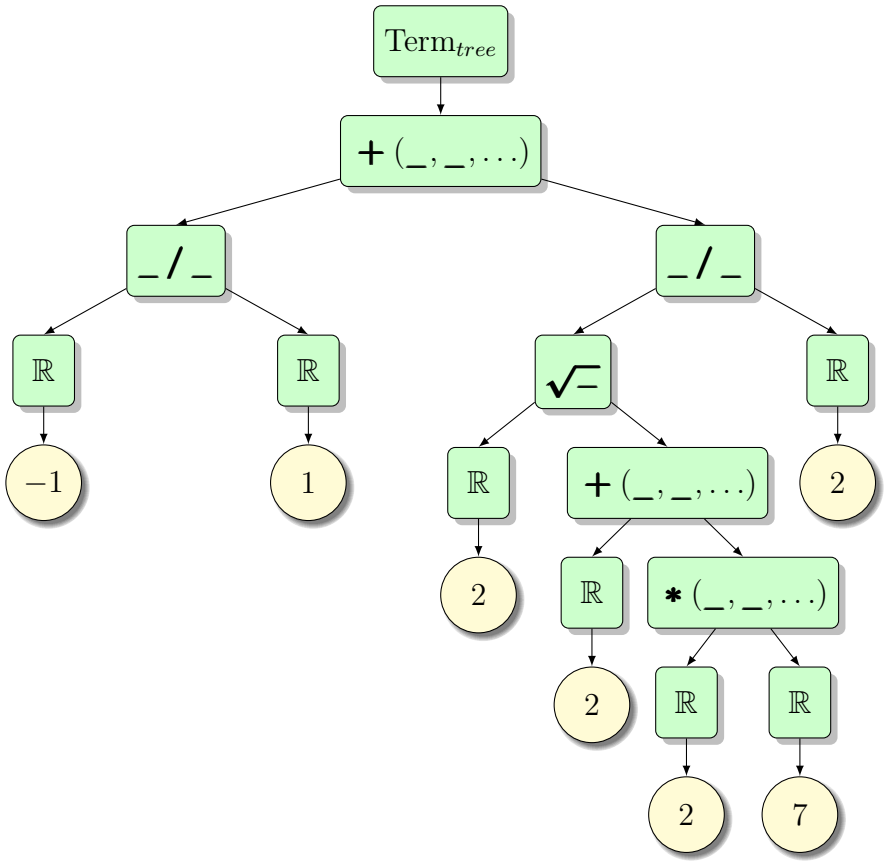
$$\frac{-1}{1} + \frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$



Etap 7

Ten etap polega na zamianie unarnego odejmowania liczby rzeczywistej jeden na liczbę rzeczywistą minus jeden. W związku z tym równanie pozostaje bez zmian:

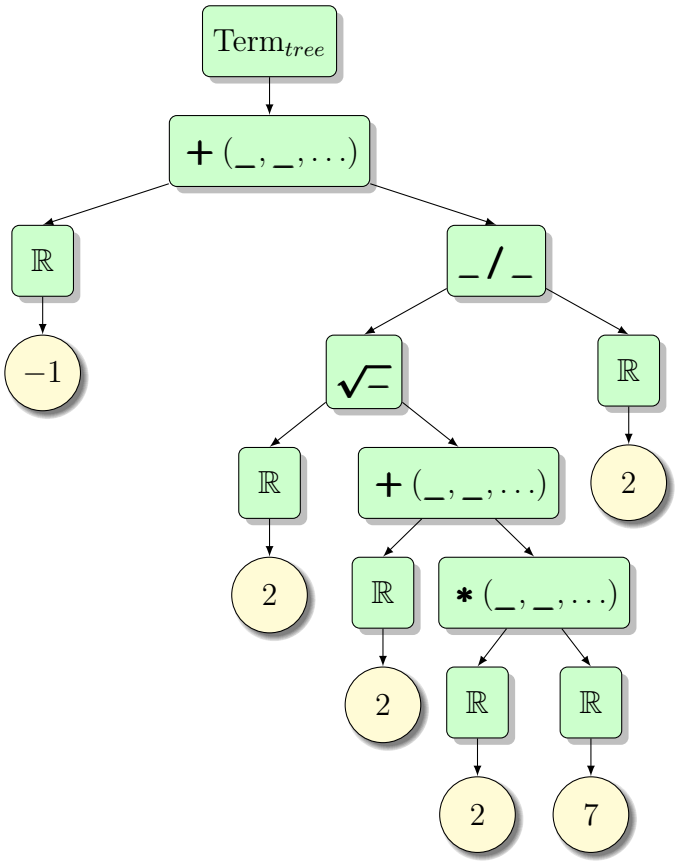
$$\frac{-1}{1} + \frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$



Etap 8

W etapie ósmym skracamy liczbę rzeczywistą minus jeden z jedynką. W rezultacie otrzymujemy samą liczbę -1. Całość wyrażenia wygląda następująco:

$$-1 + \frac{\sqrt[2]{2 + (2) \cdot (7)}}{2}$$



Etap 9

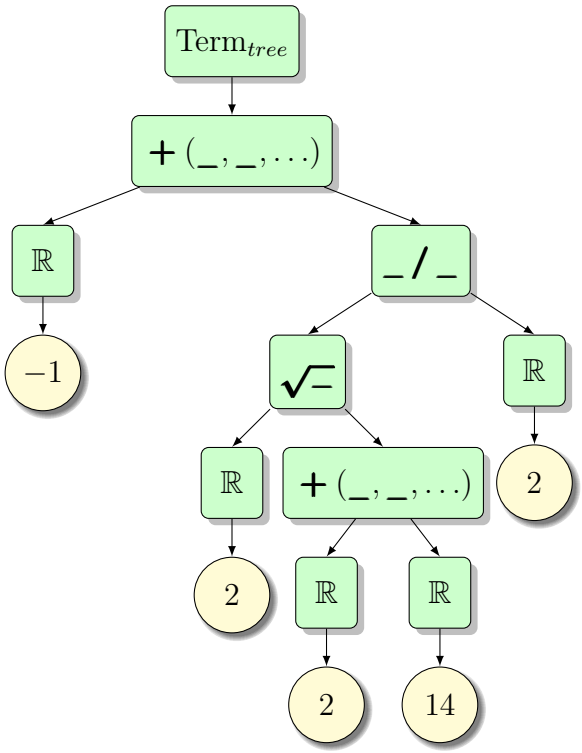
- Pierwsza część pozostaje bez zmian.
- Natomiast w drugiej części wymnażamy pod pierwiastkiem dwójkę z siódemką, aby powstało:

$$\frac{\sqrt[2]{2+14}}{2}$$

.

- Całe równanie wygląda następująco:

$$-1+\frac{\sqrt[2]{2+14}}{2}$$



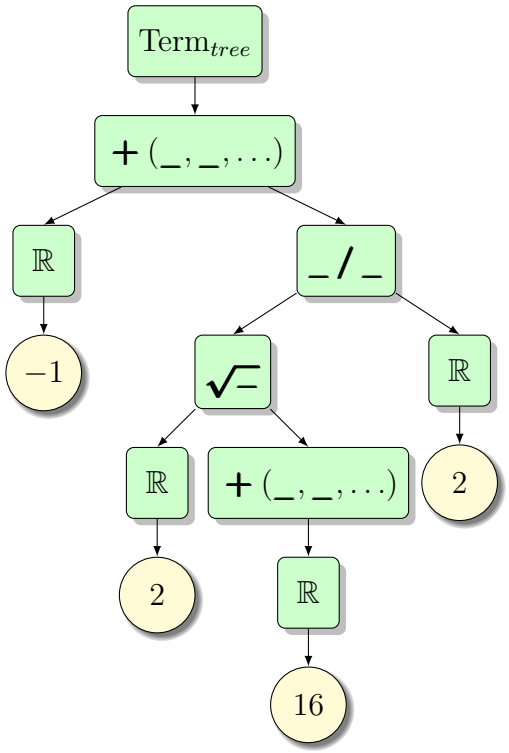
Etap 10

- Pierwsza część pozostaje bez zmian.
- Etap dziesiąty polega na dodaniu pod pierwiastkiem liczby 2 i 14, co prowadzi do:

$$\frac{\sqrt[2]{16}}{2}$$

- Całe równanie wygląda następująco:

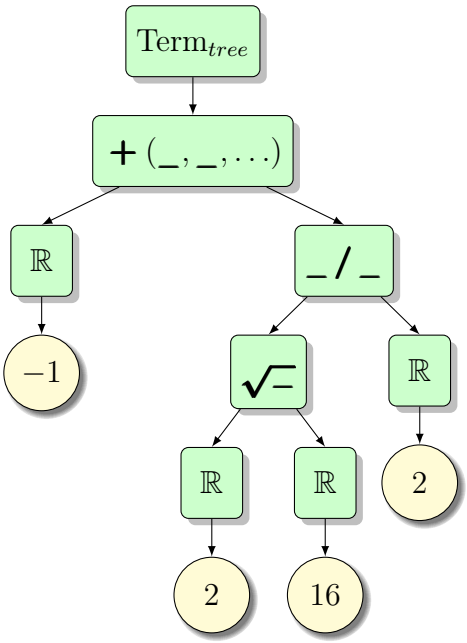
$$-1 + \frac{\sqrt[2]{16}}{2}$$



Etap 11

- Pierwsza część pozostaje bez zmian.
- Etap 11 rozpoznaje, że nie ma więcej dodawania pod pierwiastkiem, więc równanie pozostaje bez zmian. Jednak drzewo usuwa liść, w którym jest dodawanie:

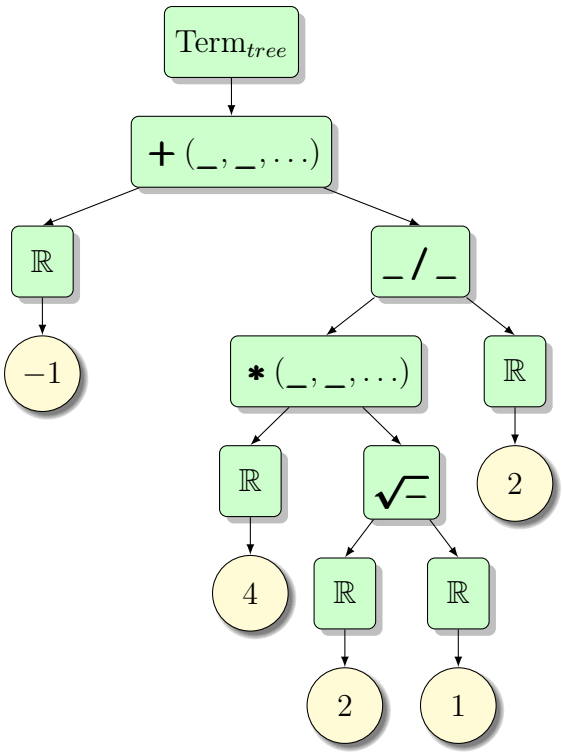
$$-1 + \frac{\sqrt[2]{16}}{2}$$



Etap 12

- Pierwsza część pozostaje bez zmian.
- Dwunasty etap skraca pierwiastek z 16, otrzymując 4, ale wciąż pozostawiamy pierwiastek z jedynki:

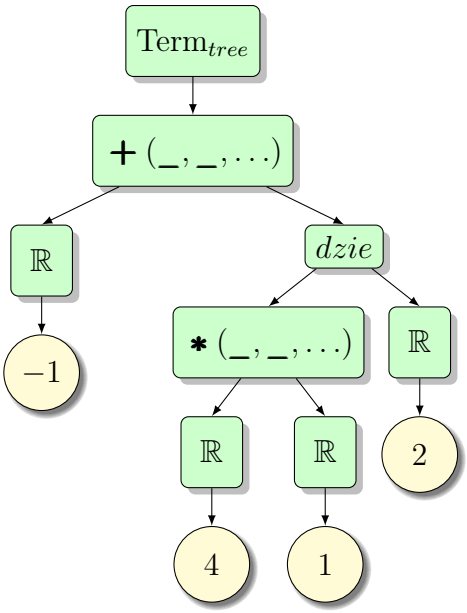
$$-1 + \frac{4 \cdot \sqrt[2]{1}}{2}$$



Etap 13

- Pierwsza część pozostaje bez zmian.
- W tym etapie drzewo rozpoznaje, że pierwiastek z jedynki to jeden:

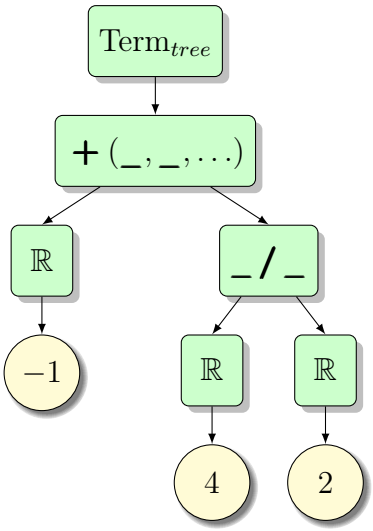
$$-1 + \frac{4 \cdot 1}{2}$$



Etap 14

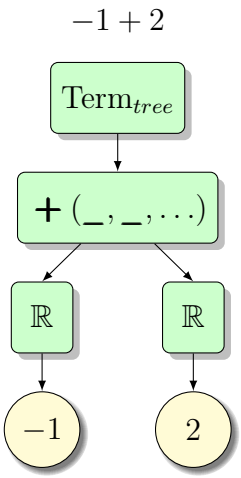
- Pierwsza część pozostaje bez zmian.
- Ten etap polega na wymnożeniu 4 z 1 by powstała sama 4 w liczniku:

$$-1 + \frac{4}{2}$$



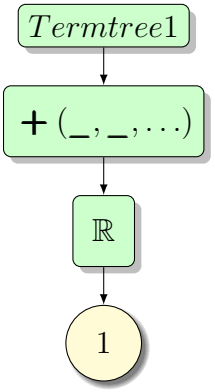
Etap 15

- Pierwsza część pozostaje bez zmian.
- Etap 15 polega na skróceniu wyrażenia, $\frac{4}{2}$, które wynosi 2.
- W rezultacie otrzymujemy:



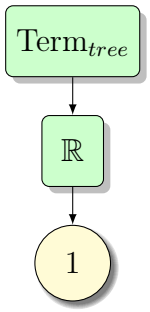
Etap 16

Ten etap polega na dodaniu -1 z 2 więc powstaje 1.



Etap 17

Finalnie drzewo rozpoznaje, że jest dodawanie więc skraca do samej jedynki.



3.7 Tabela skracania

W tabeli przedstawione są przykłady skracania, które można zastosować w procesie uproszczenia obliczeń symbolicznych. Każde skrócenie posiada unikalny numer identyfikacyjny, opis oraz przykład.

- Numer skrócenia: identyfikator przyporządkowany danej operacji skracania.
- Opis skrócenia: przedstawia w sposób szczegółowy sposób, w jaki można zredukować dany symbol. Opisuje reguły i zasady.
- Przykład skrócenia: ilustruje zastosowanie danej operacji skracania na konkretnym przykładzie matematycznym. Przykład jest prezentowany w postaci symbolicznej, aby pokazać konkretny efekt skracania.

Poniżej przedstawiono tabelę skracania:

Tabela 3.3: Skrócenia od 1 do 5.

Numer skrócenia	**Opis**	**Przykład**
1	Mnożenie dwóch liczb.	$3 \cdot 4 = 12$
2	Usunięcie jedynki z iloczynu.	$1 \cdot 5 = 5$
3	Zamiana mnożenia przez zero na zero.	$6 \cdot 0 = 0$
4	Usunięcie mnożenia lub dodawania z jednym składnikiem.	$2 \cdot 1 = 2\ 3 + 0 = 3$
5	Dodawanie dwóch liczb.	$2 + 3 = 5$

Tabela 3.4: Skrócenia od 6 do 12.

Numer skrócenia	**Opis**	**Przykład**
6	Usunięcie z dodawania zera.	$4 + 0 = 4$
7	Zamiana liczby ujemnej na jej przeciwną.	$-5 = -1 \cdot 5$
8	Usunięcie podwójnego minusa.	$-(-3) = 3$
9	Skracanie ułamka, jeśli w mianowniku jest liczba z NWD różnym od 1 z liczbą w liczniku.	$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
9.1	Skracanie ułamka: dzielenie przez 1 lub liczba przez liczbę.	$\frac{5}{1} = 5$
10	Potęgowanie liczby do kwadratu.	$2^2 = 4$
11	Zamiana dzielenia liczby przez liczbę ujemną na dzielenie liczby przeciwnej przez liczbę dodatnią.	$\frac{10}{-2} = \frac{-10}{2}$
12	Skrócenie polega na zastąpieniu sumy wyrażeń postaci $-(a + b + c + \ldots)$ przez wyrażenie $-a - b - c - \ldots$. Oznacza to, że każde z wyrażeń w sumie jest zmieniane na przeciwne, czyli jest poprzedzane znakiem minus.	$-(1 + 2 + 3) = -1 - 2 - 3$

Tabela 3.5: Skrócenia od 13 do 17.

Numer skrócenia	**Opis**	**Przykład**
13	Skrócenie polega na zamianie iloczynu wyrażeń postaci. ...$\cdot(-x)\cdot$ ... Na przeciwność iloczynu wyrażeń postaci $-(\ldots \cdot x \cdot \ldots)$. Oznacza to, że cały iloczyn jest zamieniany na jego przeciwność.	$2 \cdot -3 \cdot 4 = -(2 \cdot 3 \cdot 4)$
14	Skrócenie polega na przeniesieniu minusa z przed nawiasu do licznika ułamka $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$	$-\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-3}{4}$
15	Skrócenie dotyczy wyrażenia postaci $\frac{A}{\left(\frac{r}{s}\right)}$. W wyniku tego skrócenia wyrażenie jest przekształcane na $\frac{A \cdot s}{r}$.	$\frac{10}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{10 \cdot 3}{2}$.
16	Skrócenie dotyczy wyrażenia postaci $x \cdot \left(\frac{y}{z}\right)$. W wyniku tego skrócenia wyrażenie jest przekształcane na $\frac{x \cdot y}{z}$.	$3 \cdot \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{3 \cdot 4}{2}$
17	Skrócenie dotyczy wyrażeń postaci $\ldots + x + \left(\frac{y}{z}\right) + \ldots$. W wyniku tego skrócenia wyrażenie jest przekształcane na $\ldots + \left(\frac{xz+y}{z}\right) + \ldots$...	$2 + \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2 \cdot 4 + 3}{4}\right)$

Tabela 3.6: Skrócenia od 18 do 22.

Numer skrócenia	**Opis**	**Przykład**
18	Skrócenie dotyczy wyrażeń postaci $\ldots + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \ldots$. W wyniku tego skrócenia wyrażenie jest przekształcane na $\ldots + \frac{x+y}{z} + \ldots$.	$\frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2+3}{3}$
19	Skrócenie dotyczy pierwiastków kwadratowych. W wyniku tego skrócenia zachodzą następujące równości: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = A$ oraz $-\sqrt{A} \cdot -\sqrt{A} = A$.	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 4$ oraz $-\sqrt{4} \cdot -\sqrt{4} = 4$.
20	Skrócenie dotyczy równości postaci $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{a \cdot a \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{1} = 1$ oraz $\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt{2}$
21	Skrócenie dotyczy niewymierności postaci $\frac{A}{(\ldots\sqrt{B}\ldots)}$. W wyniku tego skrócenia wyrażenie jest przekształcane na $\frac{A}{(\ldots\sqrt{B}\ldots)} = \frac{A \cdot \sqrt{B}}{(\ldots B \ldots)}$	$\frac{6}{(\sqrt{5})} = \frac{6 \cdot \sqrt{5}}{(5)}$
22	Skrócenie dotyczy wyrażeń postaci $\frac{A}{(C \pm \sqrt{D})}$. W wyniku tego skrócenia wyrażenie jest przekształcane na $\frac{A \cdot (C \pm \sqrt{D})}{(C^2 - D)}$	$\frac{8}{(2+\sqrt{3})} = \frac{8(2-\sqrt{3})}{(2^2-3)}$

3.8 Test

Algorytm rozwiązuje tylko równania, które posiadają dwa rozwiązania równania kwadratowego np. Fibonacii. Praca Licencjacka skupiona została głównie na rozpatrywaniu pokrycia przypadku $\delta > 0$. Poniżej przedstawia się efekt działania aplikacji, dla ciągu Fibonacciego:

Równanie Rekurencyjne

Metoda: Szereg Formalny

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = 0 \\ 1, & \text{dla } n = 1 \\ 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2}, & \text{dla } n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Skupiamy sie na równaniu:

$$x_n = 1 \cdot x_{n-1} + 1 \cdot x_{n-2} \tag{2}$$

Dokonujemy obliczeń symbolicznych na szeregu wykorzystując tylko zależność rekurencyjną:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot x^n \\ &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{i=2}^{\infty} (1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2}) \cdot x^n \\ &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (1 \cdot a_{n-1}) \cdot x^n + (1 \cdot a_{n-2}) \cdot x^n \\ &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (1 \cdot (a_{n-1} \cdot x^{n-1})) \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} (1 \cdot (a_{n-2} \cdot x^{n-2})) \cdot x^2 \\ &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + (1 \cdot x) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot x^j + (1 \cdot x^2) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i \\ &= a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + 1 \cdot x \cdot ((f(x) - (a_0))) + 1 \cdot x^2 \cdot f(x) \end{aligned} \tag{3}$$

Stąd uzyskujemy równość:

$$f(x) - (1 \cdot x \cdot f(x)) - (1 \cdot x^2 \cdot f(x)) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + 1 \cdot x \cdot (-(a_0)) \tag{4}$$

Wyodrębniamy $f(x)$:

$$f(x) \cdot ((1 - (1 \cdot x) - (1 \cdot x^2))) = a_0 + x \cdot ((a_1 + (-(1)) \cdot a_0 \cdot x^0)) \tag{5}$$

Skąd ostatecznie $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0 + x \cdot ((a_1 + (-(1)) \cdot a_0 \cdot x^0))}{1 - (1 \cdot x) - (1 \cdot x^2)} \tag{6}$$

W kolejnym etapie rozkładamy ułamek na ułamki proste. W tym celu odnajdujemy parametry pierwiastków x_1, x_2 dla których:

$$1 - (1 \cdot x) - (1 \cdot x^2) = -1 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \tag{7}$$

Obliczamy delte: $\delta = (-1)^2 + (-(4)) \cdot (-(1)) \cdot 1 = 1 + (-(4)) \cdot (-(1)) \cdot 1 = 1 + -4 \cdot (-(1)) \cdot 1 = 1 + -4 \cdot -1 \cdot 1 = 1 + 4 = 5 = 5$ Stąd wyznaczamy pierwiastki x_1, x_2:

$$\begin{aligned} x_1 =& \frac{-(-(1)) + \sqrt[2]{5}}{2 \cdot (-(1))} \\ =& \frac{-(-1) + \sqrt[2]{5}}{2 \cdot (-(1))} \\ =& \frac{1 + \sqrt[2]{5}}{2 \cdot (-(1))} \\ =& \frac{1 + \sqrt[2]{5}}{2 \cdot -1} \\ =& \frac{1 + \sqrt[2]{5}}{-2} \\ =& \frac{-(1 + \sqrt[2]{5})}{2} \\ =& \frac{-(1) - (\sqrt[2]{5})}{2} \\ =& \frac{-1 - (\sqrt[2]{5})}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 =& \frac{-(-(1)) - (\sqrt[2]{5})}{2 \cdot (-(1))} \\ =& \frac{-(-1) - (\sqrt[2]{5})}{2 \cdot (-(1))} \\ =& \frac{1 - (\sqrt[2]{5})}{2 \cdot (-(1))} \\ =& \frac{1 - (\sqrt[2]{5})}{2 \cdot -1} \\ =& \frac{1 - (\sqrt[2]{5})}{-2} \\ =& \frac{-(1 - (\sqrt[2]{5}))}{2} \\ =& \frac{-(1) - (-(\sqrt[2]{5}))}{2} \\ =& \frac{-1 - (-(\sqrt[2]{5}))}{2} \\ =& \frac{-1 + \sqrt[2]{5}}{2} \end{aligned}$$

Z twierdzenia o rozkładzie ułamka wymiernego na ułamki proste, istnieją C_1, C_2 dla których:

$$\frac{0 + x \cdot (1 + (-(1)) \cdot 0 \cdot x^0)}{1 - (1 \cdot x) - (1 \cdot x^2)} = \frac{C_1}{x - x_1} + \frac{C_2}{x - x_2} \tag{8}$$

$$0 + x \cdot (1 - (1 \cdot 0)) = x \cdot ((-(1)) \cdot C_1 + (-(1)) \cdot C_2) + -((-(1)) \cdot C_1 \cdot x_2) - ((-(1)) \cdot C_2 \cdot x_1) \tag{9}$$

Wykorzystujac fakt, ze wielomiany są równe jeśli mają identyczne współczyniki uzyskujemy:

$$\begin{cases} 0 = (-(1)) \cdot C_1 \cdot x_2 + (-(1)) \cdot C_2 \cdot x_1 \\ 1 - (1 \cdot 0) = (-(1)) \cdot C_1 + (-(1)) \cdot C_2 \end{cases} \tag{10}$$

Podstawiamy wartości x_1, x_2 i robimy obliczenia pomocnicze:
$-1 \cdot x_2 = (-(1)) \cdot \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} = -1 \cdot \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} = -(1 \cdot \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}) = -(\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}) = \frac{-(-1+\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{-(-1)-(\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}$
$-1 \cdot x_1 = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} = -1 \cdot \frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} = -(1 \cdot \frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}) = -(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}) = \frac{-(-1-(\sqrt[2]{5}))}{2} = \frac{-(-1)-(-(\sqrt[2]{5}))}{2} = \frac{1-(-(\sqrt[2]{5}))}{2} = \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}$
$1 - (1 \cdot 0) = 1 - (0) = 1 + -0 = 1 = 1$
$-(1) = -1$
Stąd nasz układ ma postać

$$\begin{cases} 0 = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot C_1 + \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \cdot C_2 \\ 1 = \quad -1 \cdot C_1 + \quad -1 \cdot C_2 \end{cases} \tag{11}$$

Rozwiązujemy układ metodą wyznaczników:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} & \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \tag{12}$$

$W = \left|\begin{bmatrix} \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} & \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot -1 - (\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \cdot -1) = -(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot 1) - (\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \cdot -1) = -(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}) - (\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \cdot -1) = \frac{-(1-(\sqrt[2]{5}))}{2} - (\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \cdot -1) = \frac{-1-(-(\sqrt[2]{5}))}{2} - (\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \cdot -1) = \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} - (\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \cdot -1) = \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} - (-(\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \cdot 1)) = \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} - (-(\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2})) = \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} - (\frac{-(1+\sqrt[2]{5})}{2}) = \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} - (\frac{-(1)-(\sqrt[2]{5})}{2}) = \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} - (\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}) = \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} + \frac{-(-1-(\sqrt[2]{5}))}{2} = \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} + \frac{-(-1)-(-(\sqrt[2]{5}))}{2} = \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} + \frac{1-(-(\sqrt[2]{5}))}{2} = \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2} + \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt[2]{5}+1+\sqrt[2]{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt[2]{5}+1+\sqrt[2]{5}}{2} = \frac{(1+1)\cdot\sqrt[2]{5}}{2} = \frac{(2)\cdot\sqrt[2]{5}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt[2]{5}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt[2]{5}}{2} = \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5}$
$W_{C_1} = \left|\begin{bmatrix} 0 & \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right| = 0 \cdot -1 - (\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \cdot 1) = 0 - (\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} \cdot 1) = 0 - (\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}) = 0 + \frac{-(1+\sqrt[2]{5})}{2} = 0 + \frac{-(1)-(\sqrt[2]{5})}{2} = 0 + \frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}$

$W_{C_2} = \left|\begin{bmatrix} \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot 1 - (0 \cdot -1) = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} - (0 \cdot -1) = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} - (0) = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} + -0 = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}$

Wyliczamy parametry C_1 i C_2:

$$C_1 = \frac{W_{c1}}{W} = \frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}}{\sqrt[2]{5}} = \frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}$$

$C_2 = \frac{W_{c2}}{W} = \frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}}{\sqrt[2]{5}} = \frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}$

Stad:

$$f(x) = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{x - \frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}} + \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{x - \frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}$$

Aby rozwinąć ułamki w szereg, sprowadzamy je do postaci $\frac{a}{1-b \cdot x}$. W tym celu dzielimy licznik i mianownik przez $-x_1$, $-x_2$ odpowiednio.

$$\frac{C_1}{-x_1} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2})} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{\frac{-(-1-(\sqrt[2]{5}))}{2}} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{\frac{-(-1)-(-(\sqrt[2]{5}))}{2}} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{\frac{1-(-(\sqrt[2]{5}))}{2}} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}} =$$

$$\frac{(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2) \cdot (1+(-(1)) \cdot \sqrt[2]{5})}{1 \cdot 1-((1 \cdot 1) \cdot 5)} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1+(-(1)) \cdot \sqrt[2]{5})}{1 \cdot 1-(1 \cdot 1 \cdot 5)} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1+-1 \cdot \sqrt[2]{5})}{1 \cdot 1-(1 \cdot 1 \cdot 5)} =$$

$$\frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1-(1 \cdot \sqrt[2]{5}))}{1 \cdot 1-(1 \cdot 1 \cdot 5)} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1-(\sqrt[2]{5}))}{1 \cdot 1-(1 \cdot 1 \cdot 5)} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1-(\sqrt[2]{5}))}{1-(1 \cdot 1 \cdot 5)} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1-(\sqrt[2]{5}))}{1-(5)} =$$

$$\frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1-(\sqrt[2]{5}))}{1+-5} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1-(\sqrt[2]{5}))}{-4} = \frac{\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1-(\sqrt[2]{5}))}{-4} = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 1 \cdot (1-(\sqrt[2]{5})))}{2} =$$

$$\frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot (1-(\sqrt[2]{5})))}{2}$$

$$\frac{C_2}{-x_2} = \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{-(\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2})} = \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{\frac{-(-1+\sqrt[2]{5})}{2}} = \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{\frac{-(-1)-(\sqrt[2]{5})}{2}} = \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5}}{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}} = \frac{(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2) \cdot (1+(-(-1)) \cdot \sqrt[2]{5})}{1 \cdot 1-((-1 \cdot -1) \cdot 5)} =$$

$$\frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1+(-(-1)) \cdot \sqrt[2]{5})}{1 \cdot 1-(-1 \cdot -1 \cdot 5)} = \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1+1 \cdot \sqrt[2]{5})}{1 \cdot 1-(-1 \cdot -1 \cdot 5)} = \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1+\sqrt[2]{5})}{1 \cdot 1-(-1 \cdot -1 \cdot 5)} = \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1+\sqrt[2]{5})}{1-(-1 \cdot -1 \cdot 5)} =$$

$$\frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1+\sqrt[2]{5})}{1-(5)} = \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1+\sqrt[2]{5})}{1+-5} = \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1+\sqrt[2]{5})}{-4} = \frac{\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 2 \cdot (1+\sqrt[2]{5})}{-4} =$$

$$\frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot 1 \cdot (1+\sqrt[2]{5}))}{2} = \frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \cdot \sqrt[2]{5}}{5} \cdot (1+\sqrt[2]{5}))}{2}$$

Stąd:

$$f(x) = \frac{\frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}}{1-\frac{x}{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}}} + \frac{\frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}}{1-\frac{x}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}}$$

$$= \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n\right)\cdot x^n \tag{13}$$

$$a_n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{(1\cdot2)\cdot(-1+(-(-1))\cdot\sqrt[2]{5})}{-1\cdot-1-((-1\cdot-1)\cdot5)}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1\cdot2\cdot(-1+(-(-1))\cdot\sqrt[2]{5})}{-1\cdot-1-(-1\cdot-1\cdot5)}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1\cdot2\cdot(-1+1\cdot\sqrt[2]{5})}{-1\cdot-1-(-1\cdot-1\cdot5)}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1\cdot2\cdot(-1+\sqrt[2]{5})}{-1\cdot-1-(-1\cdot-1\cdot5)}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-1+\sqrt[2]{5})}{-1\cdot-1-(-1\cdot-1\cdot5)}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-1+\sqrt[2]{5})}{1-(-1\cdot-1\cdot5)}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n =$$

$$\frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-1+\sqrt[2]{5})}{1-(5)}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{2\cdot(-1+\sqrt[2]{5})}{1+-5}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-1+\sqrt[2]{5})}{-4}\right)^n +$$

$$\frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-1+\sqrt[2]{5})}{-4}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{-(1\cdot(-1+\sqrt[2]{5}))}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{-(-1+\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n =$$

$$\frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{-(-1)-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt[2]{5}}{2}}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n +$$

$$\frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{(1\cdot 2)\cdot(-1+(-(1))\cdot\sqrt[2]{5})}{-1\cdot-1-((1\cdot 1)\cdot 5)}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n +$$

$$\frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1\cdot 2\cdot(-1+(-(1))\cdot\sqrt[2]{5})}{-1\cdot-1-(1\cdot 1\cdot 5)}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n +$$

$$\frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1\cdot 2\cdot(-1+-1\cdot\sqrt[2]{5})}{-1\cdot-1-(1\cdot 1\cdot 5)}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n +$$

$$\frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1\cdot 2\cdot(-1-(1\cdot\sqrt[2]{5}))}{-1\cdot-1-(1\cdot 1\cdot 5)}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n +$$

$$\frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1\cdot 2\cdot(-1-(\sqrt[2]{5}))}{-1\cdot-1-(1\cdot 1\cdot 5)}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n +$$

$$\frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-1-(\sqrt[2]{5}))}{-1\cdot-1-(1\cdot 1\cdot 5)}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n +$$

$$\frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-1-(\sqrt[2]{5}))}{1-(1\cdot 1\cdot 5)}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{2\cdot(-1-(\sqrt[2]{5}))}{1-(5)}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-1-(\sqrt[2]{5}))}{1+-5}\right)^n =$$

$$\frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-1-(\sqrt[2]{5}))}{-4}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-1-(\sqrt[2]{5}))}{-4}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n +$$

$$\frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{-(1\cdot(-1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n +$$

$$\frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{-(-1-(\sqrt[2]{5}))}{2}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{-(-1)-(-(\sqrt[2]{5}))}{2}\right)^n = \frac{-(\frac{\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot$$

$$\left(\frac{1-(-(\sqrt[2]{5}))}{2}\right)^n = \frac{-(\frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1-(\sqrt[2]{5})))}{2}\cdot\left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + \frac{-(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\cdot\frac{\sqrt[2]{5}}{5}\cdot(1+\sqrt[2]{5}))}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}\right)^n$$

1

1

Metoda : Przewidywań

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = 0 \\ 1, & \text{dla } n = 1 \\ 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2}, & \text{dla } n > 1 \end{cases} \tag{14}$$

skupiamy się na równaniu

$$x_n = 1 \cdot x_{n-1} + 1 \cdot x_{n-2}$$

$$x^2 = 1 \cdot x + 1$$

Rozwiązujemu równanie kwadratowe

$$x^2 - (1 \cdot x) - (1) = 0$$

Obliczamy delte

$\Delta = (-(1))^2 - (4 \cdot 1 \cdot (-(1))) = (-1)^2 - (4 \cdot 1 \cdot (-(1))) = 1 - (4 \cdot 1 \cdot (-(1))) = 1 - (4 \cdot 1 \cdot -1) = 1 - (-(4 \cdot 1)) = 1 - (-(4)) = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5 = 5$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt[2]{5} = 2.23607$$

Wyznaczamy pierwiastki równania kwadratowego

$$x1 = \frac{1 - (\sqrt[2]{5})}{2}$$

$$x2 = \frac{1 + \sqrt[2]{5}}{2}$$

$$f_n = C_1 \cdot \left(\frac{1 - (\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt[2]{5}}{2}\right)^n$$

7

$$a_0 = C_1 \cdot \left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^0 + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}\right)^0$$

$$a_1 = C_1 \cdot \left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^1 + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}\right)^1$$

Podstawiamy parametry do macierzy

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} & \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} & 1 \end{array}\right] \tag{15}$$

Wyliczamy wyznaczniki

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} & \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \end{bmatrix}\right|$$

$W = 1 \cdot \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} - (1 \cdot \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}) = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} - (1 \cdot \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}) = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} - (\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}) = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} + \frac{-(1+\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} + \frac{-(1)-(\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} + \frac{-1-(\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{1-(\sqrt[2]{5})+-1-(\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{1-(\sqrt[2]{5})+-1-(\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{(-1+-1)\cdot\sqrt[2]{5}}{2} = \frac{(-2)\cdot\sqrt[2]{5}}{2} = \frac{-2\cdot\sqrt[2]{5}}{2} = \frac{-(2\cdot\sqrt[2]{5})}{2} = \frac{-(2\cdot\sqrt[2]{5})}{2} = -(\sqrt[2]{5}) = -(\sqrt[2]{5}) = -(\sqrt[2]{5})$

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} \end{bmatrix}\right|$$

$W_{c_1} = 0 \cdot \frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2} - (1 \cdot 1) = 0 - (1 \cdot 1) = 0 - (1) = 0 + -1 = -1 = -1$

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$W_{c_2} = 1 \cdot 1 - (0 \cdot \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}) = 1 - (0 \cdot \frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}) = 1 - (0) = 1 + -0 = 1 = 1$

Wyliczamy wartości parametrów C_1 i C_2

$$C_1 = \frac{-1}{-(\sqrt[2]{5})} = \frac{(-(-1)) \cdot \sqrt[2]{5}}{5} = \frac{1 \cdot \sqrt[2]{5}}{5} = \frac{\sqrt[2]{5}}{5}$$

$$C_2 = \frac{1}{-(\sqrt[2]{5})} = \frac{(-(1)) \cdot \sqrt[2]{5}}{5} = \frac{-1 \cdot \sqrt[2]{5}}{5} = \frac{-(1 \cdot \sqrt[2]{5})}{5} = \frac{-(\sqrt[2]{5})}{5}$$

$$a_n = \frac{\sqrt[2]{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}\right)^n + \frac{-(\sqrt[2]{5})}{5} \cdot \left(\frac{1-(\sqrt[2]{5})}{2}\right)^n$$

3.9 Spis użytkowania

Aby rozpocząć, należy wprowadzić 4 parametry: **Z**, **J**, **A** oraz **B**. Parametry te mogą przyjmować różne wartości, takie jak liczby, pierwiastki reprezentujące pierwszy i drugi wyraz równania rekurencyjnego, oraz ogólne parametry związane z równaniem rekurencyjnym. Zaleca się wprowadzanie wartości dodatnich. Można również używać innych parametrów, na przykład $2 * 3$, $sqrt(2, 2)$, 7 lub $5 + (3 - 12)$. Algorytm rozwiązuje tylko równania, dla których istnieją dwa pierwiastki, na przykład równania z serii Fibonacciego.

Aby wprowadzić wartości parametrów, proszę postępować zgodnie z poniższymi krokami:

1. Dla każdego parametru, program będzie prosił o wprowadzenie wartości, dopóki nie zostanie podana poprawna wartość.

2. Jeśli wprowadzona wartość nie jest poprawna, program wyświetli komunikat o błędzie i ponownie poprosi o wprowadzenie wartości dla danego parametru. item Należy pamiętać, że powyższy proces będzie się powtarzał dopóki użytkownik wprowadza poprawne wartości dla wszystkich 4 parametrów.

Podsumowanie

Praca licencjacka dotyczyła analizy i implementacji równań rekurencyjnych oraz obliczeń symbolicznych w języku C++. Program zapisuje do pliku LaTeXsymbole matematyczne wygenerowane za pomocą klas i metod w programie. W pierwszym rozdziale opisano wybór technologi i środowiska. Ostateczny wybór padł na Code::Blocks. Następnie opisano wzory wyznaczania równań rekurencyjnych drugiego stopnia. Dokładnie opisano metody przewidywań i szeregu formalnego. Później opisano klasy C++, aplikacje i przykładowe wykorzystanie obliczeń symbolicznych.

Bibliografia

[1] Z. Palka A. Ruciński. Wykłady z kombinatoryki. Przeliczanie. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne Warszawa, 2004.

[2] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein. Wprowadzenie do algorytmów. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004.

[3] P. R. Stanleya. Catalan Numbers. Cambridge University Press, 2015.

[4] J. Grębosz. Opus Magnum C++ 11 Programowanie w języku C++ Wydanie 2 poprawione. Helion, 2020.

[5] C. D. Godsvl. Algebraic Combinatorics. New York, London, 1993.

[6] H. S. Wilf. generatingfunctionology. Department of Mathematics University of Pennsylvania Philadelphia, Pennsylvania, 1994.

Spis rysunków

Spis tabel