

Análisis de sistemas de infraestructura Taller 4

Karol Rivera
201815009

14 de noviembre de 2023

Punto 1

Considerando un sistema cuyo estado inicial es $v_o = 100$ para el cual la falla ocurre cuando $V \leq 20$, se puede implementar una función de deterioro progresivo de la siguiente forma: $D(t) = t^\alpha$. Esta función de deterioro permite calcular el tiempo a la falla al igualar la función al valor de corte. Es decir, para que el sistema falle, la condición sería $D(t) \geq 80$, que en el estado límite se transforma en: $D(t) = 80$, por lo que el tiempo a la falla se puede definir como:

$$\begin{aligned}D(t) &= t^\alpha = 80 \\t^{\alpha/\alpha} &= 80^{1/\alpha} \\t_{failure} &= 80^{1/\alpha}\end{aligned}$$

El parámetro α puede estar descrito por una distribución de probabilidad. En este caso se tiene interés en evaluar una distribución uniforme y una distribución normal de acuerdo con las siguientes características:

- Distribución uniforme variando en el rango $[0.5;q]$ con q variando en el rango $[1;5]$.
- Distribución normal variando el parámetro μ_α en el rango $[0.5;5]$ y el coeficiente de variación de 10 %.

La intención de variar la distribución que genera el parámetro α es para identificar el impacto que tiene la tasa de deterioro sobre el tiempo a la falla obtenido. En particular se quiere observar que a mayor α se va a tener un menor tiempo a la falla. Para evaluar este comportamiento se propone calcular el tiempo promedio a la falla (MTTF) en función de los parámetros que varían para cada una de las dos distribuciones. Para generar el MTTF se propone realizar simulaciones para obtener valores aleatorios de α que permitan calcular el tiempo a la falla $t_{failure}$. Como se trataría de muchos eventos aleatorios generados, el MTTF se puede calcular como sigue:

$$MTTF = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{failure}$$

Implementando este proceso en python para ambas distribuciones se obtienen los siguientes resultados:

En ambas gráficas se observa el comportamiento esperado, disminución de MTTF conforme α aumenta. Se dice que α aumenta ya que, en el caso de la distribución uniforme, al aumentar el rango se pueden obtener valores más grandes con la misma probabilidad que los pequeños, lo que va a aumentar la media del parámetro. En el caso de la distribución normal aumentar la media aumenta los valores que se van a obtener ya que se corre la distribución.

A pesar de que el comportamiento general de las dos gráficas es similar, se observan algunas diferencias. En primer lugar, la gráfica asociada con la distribución normal genera un valor mucho más alto que la distribución uniforme. Este resultado tiene sentido ya que, por la forma de la distribución,

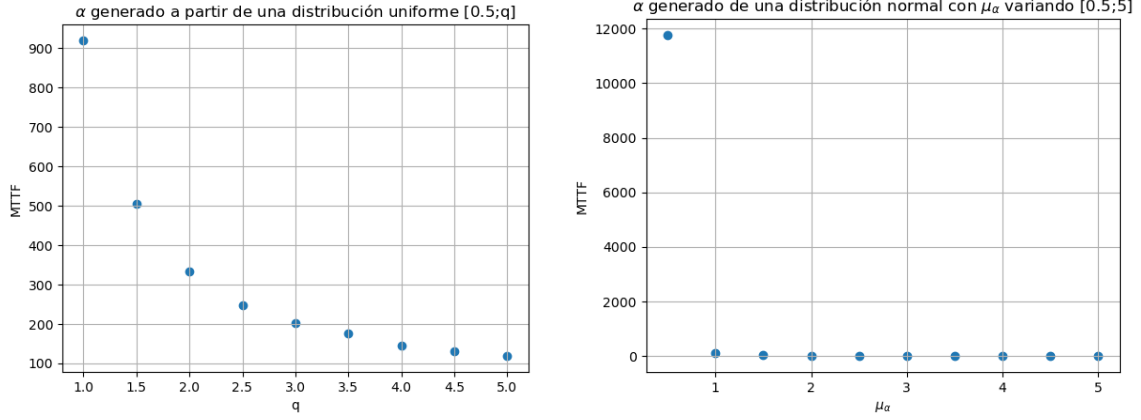


Figura 1: MFFT en función del parámetro que varía en la distribución uniforme (izquierda) y la distribución normal (derecha). Para la construcción de las gráficas se generaron $N=10000$ valores aleatorios de α provenientes de las distribuciones correspondientes para cada punto.

es más probable obtener valores pequeños cercanos a la media, lo que va a generar un α más pequeño que en el caso de la distribución uniforme, y por lo tanto, MTTF más grande. Otra diferencia entre ambas distribuciones es que la gráfica asociada a la distribución normal decrece más rápidamente que la gráfica asociada a la distribución uniforme. Esto tiene sentido porque la media de la distribución normal crece más rápidamente que la media de la distribución uniforme, lo que significa que se van a generar un MTTF más pequeño para la distribución normal.

El análisis de estos resultados muestra la relevancia que tiene la distribución seleccionada para el resultado del modelo de la función de deterioro.

Punto 2

Considerando un sistema cuyo estado inicial es $v_o = 100$ para el cual el estado límite de servicio ocurre para $k^* = 35$, se puede implementar un modelo de deterioro progresivo basado en shocks utilizando un proceso gamma. Se refiere a deterioro progresivo basado en shocks porque se van a generar saltos que siguen una distribución gamma cuya función de densidad de probabilidad está dada por la siguiente ecuación:

$$f_{\Delta_i}(\delta_i|\Delta v_i, u) = \frac{u^{\Delta v_i} \delta_i^{\Delta v_i - 1}}{\Gamma(\Delta v_i)} e^{-u\delta_i}$$

en la función de densidad de probabilidad δ_i representa el salto generado, el cual está condicionado a un delta del factor de forma Δv_i y a un factor de escala u . El factor de forma v controla la tendencia del deterioro generado por los saltos ya que va a controlar el tamaño de los saltos (inversamente), mientras que el factor de escala está más relacionado con la tasa de ocurrencia de los saltos. En este tipo de procesos se establece un horizonte temporal que se divide en intervalos de tiempo de tamaño fijo. Con los intervalos de tiempo se determina Δv y el tamaño del salto (en función de la función de deterioro D):

$$\begin{aligned}\Delta v_i &= v(t_i) - v(t_{i-1}) \\ \delta_i &= D(t_i) - D(t_{i-1})\end{aligned}$$

Para ejecutar este tipo de proceso en código se deben seguir los siguientes pasos:

1. Definir el horizonte temporal. En este caso el horizonte temporal se definirá como 120 años. En este caso se manejarán 50 intervalos por lo que el salto temporal será de $\Delta t = 2.4$.

2. Se calcula Δv dependiendo de la función v en específico definida para el factor de forma. En este caso se usarán dos funciones para el factor de forma:

$$v_1 = 0,0055t^2 \qquad v_2 = 5,5t^{0,5}$$

3. Se calcula δ_i generando una muestra aleatoria proveniente de la distribución gamma. En esta función ingresa Δv y $1/u$. En este caso el factor de escala es $u = 1,5$. En python la función usada es *gamma.rvs*.
4. Aplicación de los saltos sobre el estado inicial de acuerdo con la temporalidad en la que ocurre el salto.

La selección del uso de dos funciones para el factor de forma tiene como objetivo evidenciar la relevancia de esta función para el modelo de deterioro generado. Además, realizar dos iteraciones diferentes tiene como objetivo observar la aleatoriedad introducida por el uso de la distribución gamma para la generación de los saltos.

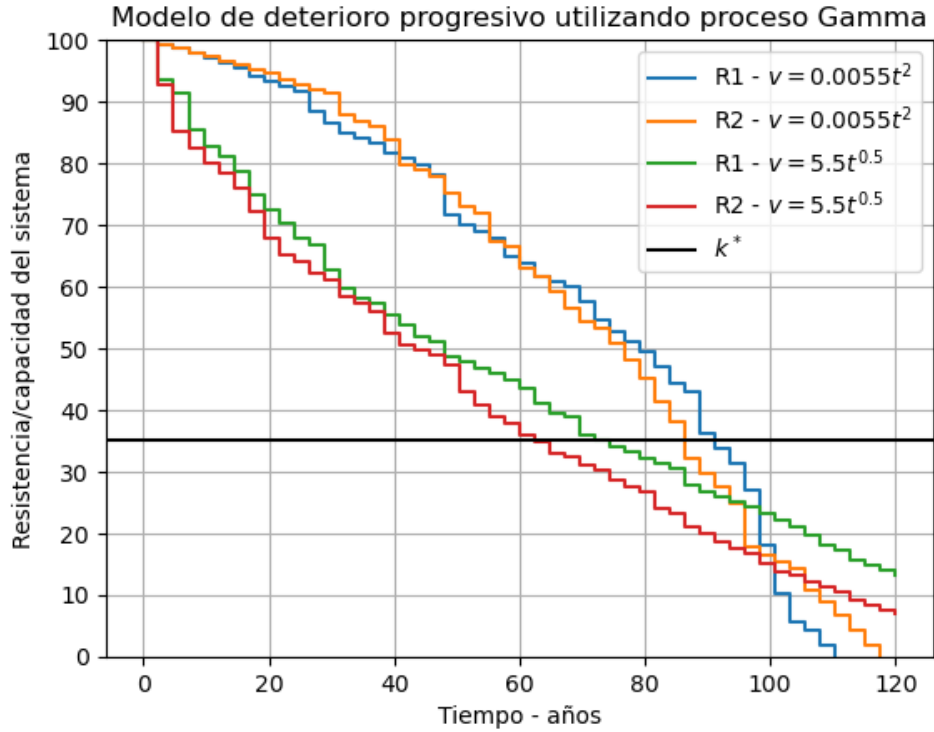


Figura 2: Distribución del tiempo a la falla considerando un modelo de deterioro progresivo basado en shocks utilizando el proceso gamma. Se utilizaron dos funciones diferentes para definir el factor de forma, mientras que el factor de escala se definió como 1.5. Para el proceso gamma se usó $\Delta t = 2,4$ años y un estado inicial igual a $v_o = 100$.

De los modelos de deterioro anteriormente contruidos se pueden sacar algunas conclusiones. Una primera es que en el largo plazo el factor de forma cuya función es cuadrática tiene una tasa de decrecimiento más grande que el factor de forma cuya función es de raíz cuadrática. Esto se puede concluir principalmente porque el proceso de deterioro parece comportarse aproximadamente como la función de forma, y una función parabólica crece más rápido que una función de raíz cuadrada a partir de cierto punto. Esto significa que uno de los modelos va a generar un tiempo a la falla menor que el otro dependiendo de si ya se pasó el punto en el que la cuadrática crece más rápido que la raíz. En este caso en específico el estado límite es 35 y se alcanza antes del punto en el que los factores de forma se cruzan, lo que significa que el factor de forma de raíz cuadrática va a generar un menor tiempo a la falla que el factor de forma cuadrático.

Otra observación que se puede realizar es con respecto a los dos modelos de deterioro generados para cada uno de los factores de forma. Se observa que las repeticiones son diferentes a la primera versión, lo que es esperable porque los saltos se están generando considerando una distribución de probabilidad de tipo gamma, por lo que los saltos van a ser diferentes entre sí.

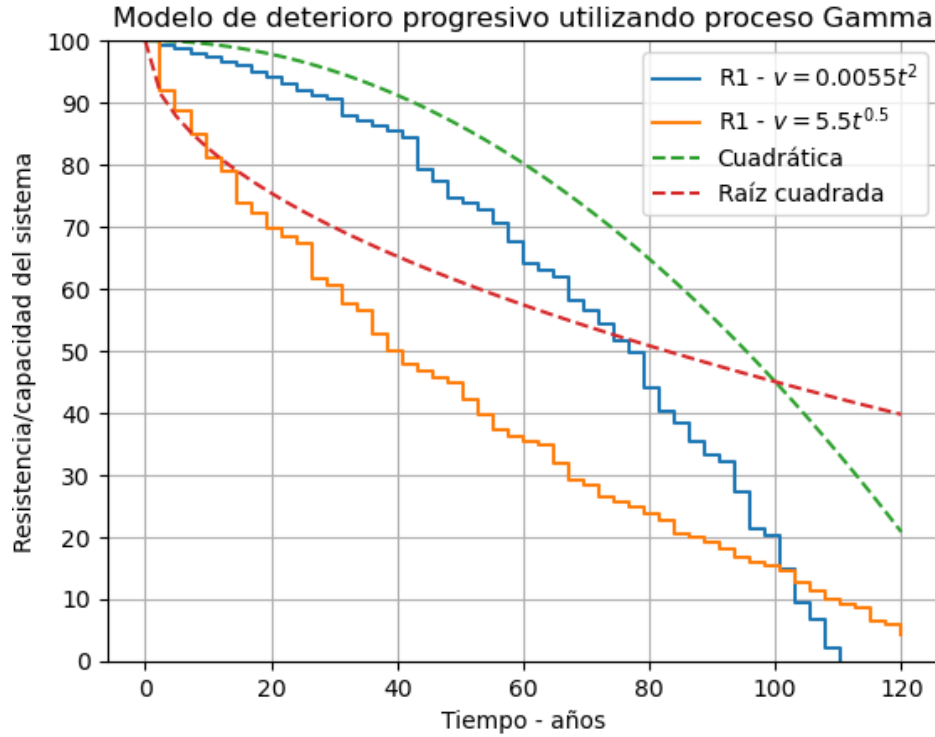


Figura 3: Modelos de deterioro utilizando procesos gamma graficados junto con la función de forma.

Si se grafican los modelos de deterioro directamente con las funciones de forma se puede ver que a medida de que se generan los saltos utilizando la distribución gamma, el comportamiento del modelo de deterioro se va alejando más de la función de forma. Sin embargo, se ve que la tendencia generalizada del modelo de deterioro es similar a la función de forma, además de que se observa que el cruce entre la función cuadrática y la función raíz cuadrada ocurre más o menos al tiempo que el cruce entre los modelos. Otra observación que se puede realizar es que el tiempo a la falla obtenido con los modelos de deterioro es menor al obtenido usando directamente la función de forma.

Considerando cómo se alejan los modelos de deterioro de las funciones de forma, valdría la pena evaluar el tiempo a la falla que se obtiene en cada uno de los casos. El tiempo medio a la falla se puede calcular utilizando simulación al generar diferentes saltos y acumularlos hasta obtener un deterioro que permita alcanzar el estado límite. En este caso los saltos deben sumar al menos 65. Por otra parte, el tiempo a la falla usando la función de forma se obtiene directamente de igualar la expresión al deterioro que se debe producir para alcanzar el estado límite, en este caso 65. La siguiente tabla resume los resultados de la simulación para el tiempo medio a la falla y el tiempo a la falla con el factor de forma:

Factor	Simulación	Despeje
v_1 - Cuadrático	85.38	108.71
v_2 - Raíz cuadrada	68.94	139.67

Cuadro 1: Tiempo medio a la falla usando simulación de proceso gamma y despejando directamente de la función de forma.

Inicialmente se observa que el tiempo medio a la falla utilizando simulación es menor al obtenido

mediante el despeje, lo que tiene sentido ya que en la figura 3 se observaba este comportamiento. Otra observación que se puede realizar es que utilizando la función de forma se alcanza el estado límite pasando el cruce de las funciones, lo que implica que la función curadrática generará un tiempo menor que la función raíz cuadrática. Mientras que en el caso de la simulación la relación entre los tiempos medios a la falla es que el modelo que usa el factor de forma de raíz cuadrada genera un tiempo menor, lo que coincide con el primer resultado presentado en la figura 2.

Punto 3

Considerando un sistema cuyo estado inicial está dado por $v_o = 100$ y cuyo estado límite es $k^* = 25$, se puede generar un modelo de deterioro discreto basado en multiples shocks. En este tipo de modelo no se conoce el intervalo de tiempo entre los shocks, no se conoce el tamaño del shock y tampoco se conoce cuantos shocks son necesarios para llegar al estado límite. Esto implica que se tiene una distribución de probabilidad para el tamaño de los shocks y una distribución para el tiempo transcurrido entre cada shock. Para el modelado de este tipo de procesos se debe realizar el siguiente procedimiento:

1. Como se quieren obtener los resultados mediante simulación se define inicialmente un for que va desde cero hasta la cantidad de iteraciones deseadas.
2. A continuación se definen los parámetros iniciales del sistema. Se debe definir el estado inicial, el deterioro y el tiempo. En este caso:
 - $v_o = 100$ - Dado por enunciado.
 - Deterioro = 0 - No ha ocurrido ningún shock.
 - Tiempo = 0 - Es el tiempo cero.
3. Dado que se trata de un modelo de deterioro, la condición durante la cual se deben generar valores es mientras el estado del sistema esté por encima del estado límite. Esto significa que se debe establecer una condición. Esto se puede hacer mediante la creación de un while que verifique si el estado del sistema está por encima del estado límite.
4. Al interior del while se debe generar inicialmente el shock proveniente de una distribución en específico. Adicionalmente, se debe actualizar el deterioro sumando el shock generado.
5. Se debe actualizar el sistema restándole al estado inicial el deterioro acumulado.
6. Se debe generar el tiempo entre el shock actual y el siguiente utilizando una función de distribución definida, y sumarlo al tiempo total.
7. El while va a ir actualizando el estado del sistema generando shocks e intervalos de tiempo entre shocks hasta que se cumpla la condición.
8. Fuera del while se puede almacenar el tiempo total como el tiempo a la falla. Luego el for volverá al paso 2.

El resultado de este procedimiento es un arreglo de datos que contiene el tiempo a la falla para la cantidad de iteraciones definidas. A partir de esto se pueden generar varios productos: el tiempo medio a la falla, la distribución del tiempo a la falla y la función de confiabilidad.

Para el sistema descrito anteriormente ($v_o = 100$ y $k^* = 25$) se propone generar cuatro modelos de deterioro discreto basado en multiples shocks, al variar la distribución que genera el tamaño de los shocks y la distribución que genera los intervalos entre shocks. En la tabla 2 se presentan las distribuciones propuestas. Una de las distribuciones propuestas en el enunciado era la distribución lognormal con parámetros $\mu = 10$ y $\sigma = 2$. Sin embargo, estos parámetros se modificaron en función de los dados para generar valores más distribuidos en el tiempo, se modificaron de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$\mu = \ln(10) - 0,5\ln(1 + 2^2) \quad \sigma = \sqrt{\ln(1 + 2^2)}$$

Modelo	Distribución de tamaño	Distribución de intervalos
1	Lognormal(1.498,1.269)	Exponencial(1/0.1)
2	Lognormal(1.498,1.269)	Exponencial(1/0.05)
3	Exponencial(10)	Exponencial(1/0.1)
4	Exponencial(10)	Exponencial(1/0.05)

Cuadro 2: Distribuciones para los modelos de deterioro.

Las distribuciones seleccionadas para los modelos no son al azar: la distribución exponencial es seleccionada porque es la apropiada para modelar los intervalos de tiempos entre eventos de poisson, es decir, el intervalo de tiempo entre eventos independientes. Por otra parte, la distribución lognormal es útil donde los valores a generar deben ser solamente positivos (por ejemplo, en el caso de los shocks).

Implementando el proceso anteriormente descrito para las parejas de distribuciones se calcula el tiempo medio a la falla como el valor medio del vector de tiempos a la falla. Los resultados son los siguientes:

Modelo	Tiempo a la falla
1	97.69
2	192.45
3	85.85
4	170.07

Cuadro 3: Tiempo medio a la falla para los cuatro modelos generados.

Inicialmente se puede observar que el mayor tiempo a la falla se obtiene usando una distribución lognormal para los shocks y una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0,05$ para los intervalos entre shocks; mientras que el menor tiempo a la falla se obtiene usando una distribución exponencial tanto para los shocks como los intervalos. Comparando los dos pares de modelos que difieren solo en el parámetro de la distribución exponencial (1 con 2 y 3 con 4), se observa que un mayor λ genera un menor tiempo a la falla. Esto tiene sentido ya que el parámetro *lambda* representa la la tasa de fallos, si se tiene una tasa de fallos más grande el intervalo entre los fallos va a ser menor. Comparando ahora entre las dos distribuciones para los shocks, se observa que la distribución lognormal genera tiempos medios a la falla más grandes que la distribución exponencial. Lo anterior seguramente guarde relación con los parámetros de cada una de las distribuciones.

Para continuar, es posible construir los histogramas de los datos recolectados para el tiempo a la falla, así como realizar un ajuste para obtener la distribución. Las gráficas construidas se presentan en la figura 4. En este caso se intentó ajustar una distribución normal a los histogramas teniendo en cuenta que se tienen 1000 datos (cantidad de iteraciones usadas) y por teorema de límite central cuando la cantidad de registros es superior a 20 tiende a presentar una distribución normal. Las distribuciones parecen no ajustarse perfectamente, lo que seguramente tiene que ver con el hecho de que los datos están sesgados a solo valores positivos por lo que podría intentarse con otro tipo de distribución.

En lo que respecta a la comparación entre los histogramas y los parámetros de las distribuciones el análisis se centrará en la desviación estándar y en la dispersión de los datos ya que anteriormente se analizó el tiempo medio a la falla. Se observa que el modelo 2 es el que presenta la mayor desviación y también la mayor dispersión de los datos; mientras que el modelo 3 es el que presenta la menor desviación y también la menor dispersión. Evidentemente una mayor dispersión se asocia a una mayor desviación estándar. Sin embargo, el hecho de que el modelo que usa la distribución lognormal para los shocks sea el que presenta la mayor desviación, indica que esta distribución genera una mayor dispersión en el tiempo a la falla. Esto tiene sentido ya que la distribución lognormal es menos concentrada al rededor de la media que la distribución exponencial, lo que da un mayor rango de variabilidad a los shocks y, por lo tanto, al tiempo a la falla ya que afecta la cantidad de shocks requeridos. Esto también explica por qué el modelo que usa dos distribuciones exponenciales es el que presenta la menor dispersión. Comparando los dos modelos que usan distribuciones lognormales para los shocks, se observa que el parámetro λ aumenta la dispersión conforme disminuye.

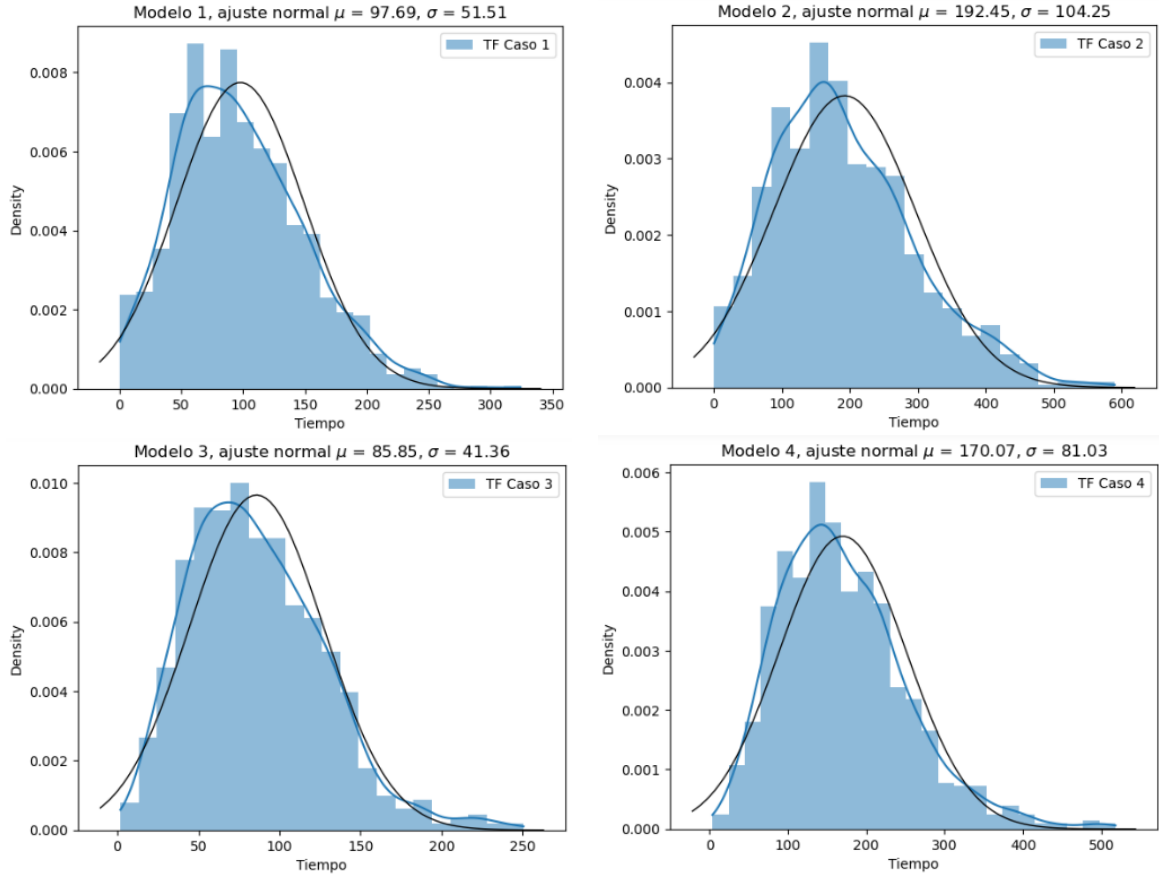


Figura 4: Histogramas del tiempo a la falla y distribuciones normales ajustadas. Los parámetros de las distribuciones ajustadas se presentan en el título de cada figura.

En cuanto a los valores de la distribución, el modelo 3 es el que presenta los valores más altos ya que es el que tiene el menor rango de variación para el tiempo a la falla por lo que los valores acumulados en el histograma serán más altos; mientras que los menores valores los presenta el modelo 2 que presenta la mayor dispersión. Algo a resaltar es que los parámetros de las distribuciones son más similares entre modelos con la misma distribución exponencial para el intervalo entre shocks, lo que indica que es más relevante la distribución para los intervalos de tiempo que la distribución para el tamaño de los shocks.

Para finalizar la comparación entre los cuatro modelos, se construyen las funciones de confiabilidad al calcular la función de supervivencia a partir de la distribución del tiempo a la falla. El resultado de calcular estas funciones se presenta en la figura 5. Dado que se trató de ajustar distribuciones normales a las distribuciones del tiempo a la falla, y que el ajuste no es perfecto, se encuentra que la función de confiabilidad toma algunos valores negativos. Sin embargo se trató de ajustar una distribución log-normal pero no se consiguió un mejor ajuste por lo que se decide continuar con la distribución normal y las funciones de confiabilidad respectivas.

La primera observación que se puede realizar es que las funciones de confiabilidad son más similares entre sí cuando tienen la misma distribución para los intervalos de tiempo (modelos 1 y 3, y 2 y 4). También se puede concluir que a un menor parámetro λ en la distribución exponencial, la función de confiabilidad obtenida va a decrecer más despacio. Esto tiene sentido ya que al tener una menor frecuencia de eventos de Poisson, se va a tener, en promedio, un mayor tiempo a la falla. En lo que respecta a la comparación entre distribuciones para los shocks, se observa que cuando se usa la distribución lognormal la función de confiabilidad decrece más lentamente. Esto evidentemente

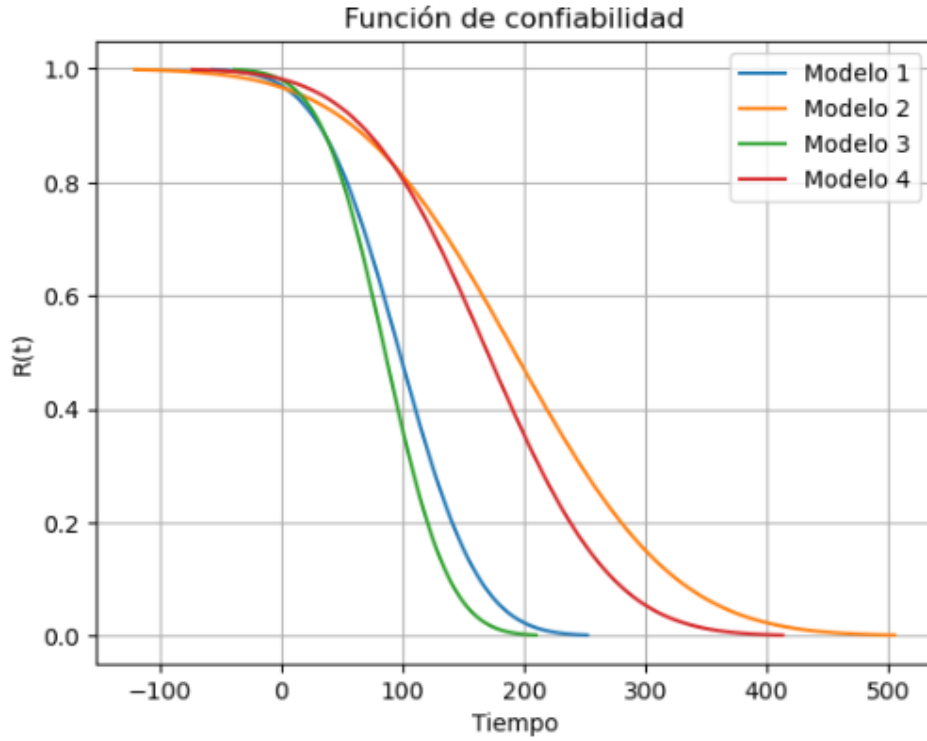


Figura 5: Funciones de confiabilidad construidas utilizando el ajuste de la distribución normal.

está relacionado con el hecho de que esta distribución presenta más dispersión por lo que la función de confiabilidad decrecerá más lentamente para cubrir un rango más amplio de tiempos a la falla.

En lo que respecta a la interpretación de la función de confiabilidad, esta representa la probabilidad de que el tiempo a la falla sea mayor o igual al valor t . En este orden de ideas, se puede interpretar que la probabilidad de que el tiempo a la falla del modelo 3 sea menor a t , es menor que la probabilidad de que el tiempo a la falla del modelo 2 sea menor a un mismo t . En otras palabras, el modelo 3 presenta las menores probabilidades de que el tiempo a la falla exceda el tiempo t para casi todo el rango de ese modelo, lo que significa que el tiempo a la falla tiende a ser menor que en los otros modelos. Los modelos 1 y 4 resultan ser intermedios entre los modelos 2 y 3.

De los análisis anteriores se podría considerar que el modelo 3 resulta ser el más crítico para la evaluación de este sistema ya que genera la función de confiabilidad más crítica en el sentido de que genera el menor rango de tiempo a la falla y la caída en la probabilidad de excedencia de un valor t más pronunciada. Cabe resaltar que este modelo es el que considera distribuciones exponenciales tanto para los shocks como para los intervalos entre shocks, además de que maneja el parámetro λ más alto. Otra conclusión es que el uso de la distribución lognormal genera mayor dispersión en la distribución del tiempo a la falla, además de que genera, en promedio, tiempos a la falla más largos.

Punto 4

El modelo de deterioro discreto basado en múltiples shocks puede ser complementado aplicando un modelo de deterioro progresivo con una tasa de deterioro constante de 0.25/año. Para el modelado la única modificación que se debería realizar es que al deterioro total se le debe sumar el shock generado y la multiplicación entre 0.25 (la tasa de deterioro) y el tiempo total en años. Evidentemente como se está generando un deterioro constante a medida que avanza el tiempo va a disminuir el tiempo a la falla con respecto a todos los modelos generados previamente. En este punto se encontrará la distribución de tiempo a la falla para el modelo 3 incluyendo el deterioro progresivo, y se comparará con este mismo modelo ya que es el que genera la función de confiabilidad más crítica.

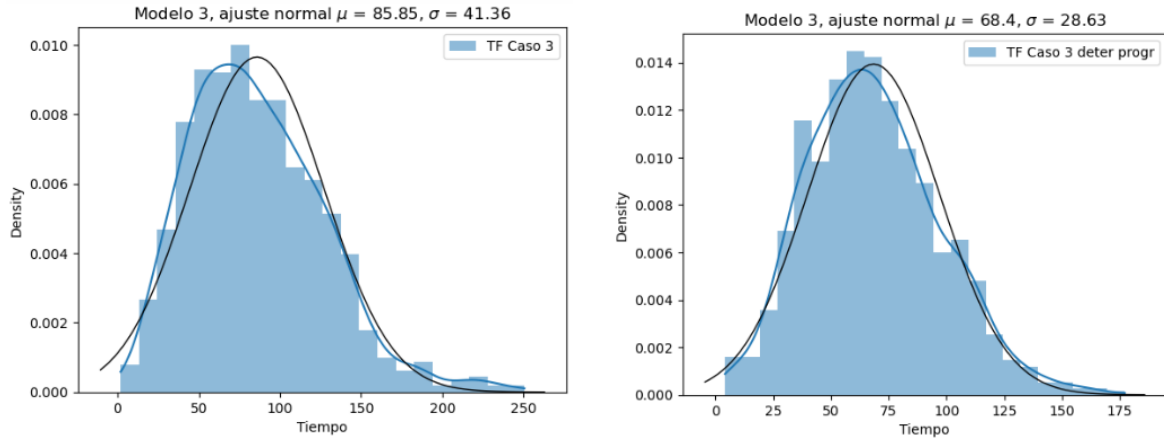


Figura 6: Distribución del tiempo a la falla considerando únicamente deterioro causado por múltiples shocks (izquierda), y considerando deterioro causado por múltiples shocks y deterioro a una tasa constante (derecha).

De la comparación de los dos modelos se puede observar inicialmente que el tiempo medio a la falla disminuye cuando se considera deterioro progresivo ya que el sistema evidentemente se deteriora más rápido que solo el efecto de los shocks. Además, se observa una disminución en la dispersión de los datos, lo que tiene sentido teniendo en cuenta que, al tener una tasa de deterioro constante, se da una menor variabilidad al tiempo a la falla. Otra comparación que se puede realizar es con respecto a qué tan bien se ajusta la distribución normal. Cuando se considera el modelo de deterioro progresivo a una tasa constante parece que la distribución se ajusta mejor, lo que seguramente está relacionado con que se tiene una menor dispersión por lo que el sesgo ocasionado por solo tener valores positivos es menor. Para complementar el análisis también se comparan las funciones de confiabilidad.

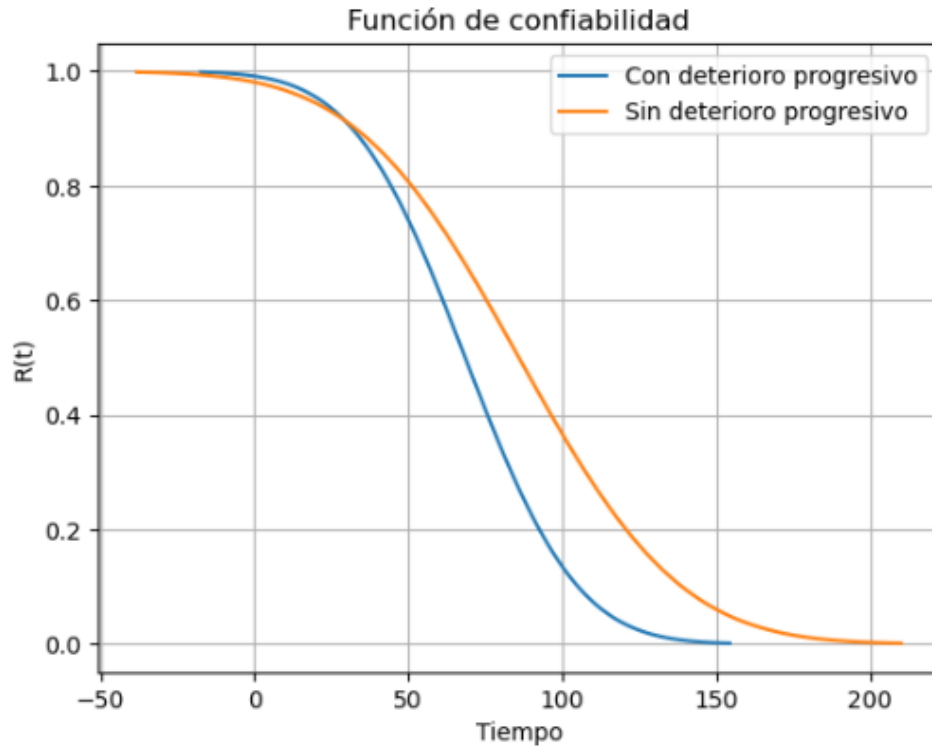


Figura 7: Función de confiabilidad considerando deterioro progresivo y sin considerar deterioro progresivo.

En este caso se puede observar que la función de confiabilidad decrece más rápidamente cuando se considera deterioro progresivo. Evidentemente esto se debe a que se tiene una tasa de deterioro constante a travez del tiempo y no únicamente el modelo de múltiples shocks. Adicionalmente se observa que en el modelo considerando deterioro progresivo, los valores negativos de tiempo en la función de deterioro son menores gracias a que la función se ajusta mejor y se tiene una menor dispersión. El caso de deterioro progresivo con múltiples shocks genera probabilidades de que el tiempo a la falla exceda un valor t menores a las generadas por el modelo solo con múltiples shocks, por lo que se puede considerar una situación más crítica. Además, considerar en el modelo un deterioro de tasa constante además del modelo de múltiples shocks es algo más cercano a la realidad en dónde los sistemas, al menos en ingeniería civil, sufren desgaste simplemente por el paso del tiempo.

Punto 5

Considerando un sistema que cuenta con cinco estados caracterizables como $S = 1, 2, 3, 4, 5$ donde $S=1$ es la falla total y $S=5$ es el funcionamiento óptimo, se propone generar un modelo utilizando cadenas de Markov. En este tipo de modelo se considera que la probabilidad de que el sistema se mueva a un estado futuro depende únicamente del estado actual y no de la historia previa. Además de que el modelo generdo considera que hay un grupo finito de posibles estados y que existen pasos temporales fijos. En las cadenas de Markov se tiene una notación especial para definir los estados del sistema en el tiempo: $X_n = i$. Para dar un ejemplo, si se considera $X_5 = 2$ en este sistema significa que en el tiempo $t = 5$ el sistema se encuentra en el estado 2 (malo).

Las cadenas de Markov pueden ser caracterizadas mediante la matriz de transición, que en este caso estará definida por:

$$P(x_{n+1} = j | x_n = i) = P_{i,j} = \frac{0,2 + (i - j)^2}{1 + \sum_{k=1}^5 (i - k)^2}$$

Implementando la fórmula se obtienen los siguientes resultados:

	1	2	3	4	5
1	0.006452	0.038710	0.135484	0.296774	0.522581
2	0.075000	0.012500	0.075000	0.262500	0.575000
3	0.381818	0.109091	0.018182	0.109091	0.381818
4	0.575000	0.262500	0.075000	0.012500	0.075000
5	0.522581	0.296774	0.135484	0.038710	0.006452

Figura 8: Matriz de transición para el sistema modelado utilizando cadenas de Markov. Este modelo admite la recuperación en el sentido de que se puede pasar de cualquier estado inferior a cualquier estado superior.

Para explicar cómo se interpreta la matriz de transición se pueden analizar algunas de las probabilidades obtenidas, aunque vale la pena aclarar que estas probabilidades son para pasar de un estado a otro en un solo paso temporal. Por ejemplo:

- $P_{2,4}$ Representa la probabilidad de que estando en el estado 2 se pase al estado 4. En este caso el valor obtenido es 0.2625 lo que significa que la probabilidad de pasar del estado 2 al 4 es 26.25 %. En términos del estado del sistema, significa que hay una probabilidad del 26.25 % de pasar de un estado malo (2), a un estado bueno (4). Esto tiene sentido si el sistema está siendo sometido a un proceso de recuperación, sin embargo la probabilidad es algo alta ya que es calculada para un solo paso temporal.
- $P_{3,3}$ Representa la probabilidad de que estando en el estado 3, el sistema se mantenga en el mismo estado. En este caso el valor obtenido es 0.01818 lo que significa que la probabilidad de permanecer

en el estado 3 es 1.818 %. En términos del estado del sistema significa que hay una probabilidad de 1.818 % de permanecer en un estado regular. Esta probabilidad puede considerarse un poco baja teniendo en cuenta que se trata de la probabilidad de permanecer en el mismo estado en un solo paso temporal.

- $P_{5,2}$ Representa la probabilidad de que estando en el estado 5 se pase al estado 2. En este caso el valor obtenido es 0.2968 lo que significa que la probabilidad de pasar del estado 5 al 2 es 29.68 %. En términos del estado del sistema significa pasar del mejor estado posible (5) a un estado malo (2). Nuevamente esta probabilidad podría considerarse un poco alta ya que se trata de un solo paso temporal, a menos de que el sistema en ese paso temporal esté sujeto a un evento externo.

La matriz obtenida previamente indica que el modelo generado admite la recuperación al caer en estados malos, es decir, se admite la transición de cualquier estado a cualquier otro estado. Sin embargo, también se pueden generar modelos dónde la transición desde estados malos a estados buenos esté restringida, tratando de emular un comportamiento más realista dónde los mantenimientos solo se realizan cuando el sistema ha alcanzado cierto nivel de deterioro. Adicionalmente, también es posible calcular la matriz de transición considerando más de un paso temporal, al multiplicar sucesivamente la matriz de transición de un solo paso (teniendo en cuenta que los eventos se consideran independientes).

Para este sistema en específico se puede formular una nueva versión de la matriz de transición dónde no se permita la recuperación al modificar la fórmula para las probabilidades de la siguiente forma (n es la cantidad de estados disponibles en la siguiente transición):

$$P_{i,j} = \begin{cases} \frac{\frac{0,2+(i-j)^2}{1+\sum_{k=1}^5(i-k)^2}}{\sum_{h=1}^n \frac{0,2+(i-h)^2}{1+\sum_{k=1}^5(i-k)^2}} & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

Implementando la formulación se obtiene la siguiente matriz de transición a un paso observable en la figura 9. Se observa que es una matriz diagonal inferior ya que no están permitidas las transiciones desde estados inferiores a estados superiores. Inicialmente se pueden analizar las probabilidades en la diagonal. Se observa que entre mayor sea el estado, menor es la probabilidad de mantenerse en dicho estado, lo que tiene sentido teniendo en cuenta que la tendencia de los sistemas es al deterioro. Adicionalmente se observa que al llegar al estado de falla (1), la probabilidad de mantenerse en el estado sube al 100 %, lo que indica que no hay posibilidad de ninguna transición a otro estado.

	1	2	3	4	5
1	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.857143	0.142857	0.000000	0.000000	0.000000
3	0.750000	0.214286	0.035714	0.000000	0.000000
4	0.621622	0.283784	0.081081	0.013514	0.000000
5	0.522581	0.296774	0.135484	0.038710	0.006452

Figura 9: Matriz de transición en el caso en que no es posible la recuperación. Se calcula para un solo paso temporal.

Para terminar, también se observa que las probabilidades parecen ser más altas cuando se tiende a pasar de un estado superior a uno muy inferior. En otras palabras, la probabilidad de pasar del estado 5 al estado 1 es mucho más grande que la probabilidad de pasar del estado 5 al 4. Esto podría explicarse por los parámetros seleccionados para el modelo. Sin embargo, se considera que este no es el comportamiento más realista en caso de que se trate de un modelo de deterioro convencional ya que la matriz indica que en un solo paso temporal es más probable pasar del estado muy bueno al estado de falla que pasar del estado muy bueno al estado bueno. Mientras que si se trata de un modelo en el que el sistema está sujeto a un evento externo (por ejemplo un edificio sometido a un sismo muy

grante), el comportamiento de la matriz tiene más sentido. Esto resalta la relevancia de implementar modelos adecuados a la situación que se quiere analizar.

Un sistema que solamente se deteriora no representa un caso muy común, generalmente los sistemas pueden recuperarse al alcanzar cierto nivel de deterioro. Por lo tanto, valdría la pena considerar el caso en el que se admite recuperación solamente al alcanzar el estado de falla (1), y que dicha recuperación le permite al sistema pasar nuevamente al estado ideal (5). Esta matriz se puede construir a partir de la matriz de transición considerando únicamente deterioro. El procedimiento para generar la nueva matriz a partir de la anterior es el siguiente:

1. Tomar la matriz diagonal inferior de la matriz de transición considerando solo deterioro. Se hace mediante la función `linalg.tril`.
2. Ajustar la probabilidad de transición de 1 a 5 usando la probabilidad de transición de 5 a 1.
3. Calcular la suma de cada fila de la matriz. Usa la función `.sum`.
4. Normalizar cada una de las filas usando la suma para que la suma de las probabilidades de 1.

La matriz de transición obtenida se presenta en la figura 10 junto con la matriz de transición para dos pasos temporales. En lo que respecta a la matriz de transición de un paso temporal, se obtiene un resultado muy similar al caso que solo admite deterioro, a excepción de que la probabilidad de pasar del estado 1 al estado 5 que deja de ser cero y pasa a tener una probabilidad $P_{1,5} = 98,78\%$. Evidentemente esto implica un ajuste en la probabilidad de toda la primera fila de la matriz, por lo que la probabilidad de permanecer en el estado 1 pasa de ser 100% a 1,22%. Esto significa que en la mayoría de las veces en que el sistema llegue a este estado, se va a dar un proceso de recuperación.

	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1	0.012195	0.000000	0.000000	0.000000	0.987805	1	0.516356	0.293155	0.133832	0.038238	0.018419
2	0.857143	0.142857	0.000000	0.000000	0.000000	2	0.132902	0.020408	0.000000	0.000000	0.846690
3	0.750000	0.214286	0.035714	0.000000	0.000000	3	0.219606	0.038265	0.001276	0.000000	0.740854
4	0.621622	0.283784	0.081081	0.013514	0.000000	4	0.320035	0.061750	0.003991	0.000183	0.614041
5	0.522581	0.296774	0.135484	0.038710	0.006452	5	0.389798	0.084328	0.008851	0.000773	0.516249

Figura 10: Matriz de transición para un paso temporal (izquierda) y para dos pasos temporales (derecha).

En lo que respecta a la matriz de transición para dos pasos temporales se pueden realizar algunas observaciones. Por ejemplo, a pesar de que en un solo paso temporal no hay forma de llegar del estado 1 a otro estado diferente al estado 5, en dos pasos temporales se puede pasar del estado 1 a cualquier otro estado. Esto tiene sentido porque en el primer paso se llegará directamente al estado 5 y luego este puede caer a cualquiera de los otros estados. Otra observación es que, a pesar de tener dos pasos temporales, no hay forma de llegar del estado 2 al estado 3 y 4, ni del estado 3 al estado 4. También se observa que las probabilidades se encuentran mucho más distribuidas en las filas, sin embargo se sigue manteniendo una concentración de probabilidades altas en transiciones desde cualquier estado al menor estado (1). Aunque la mayor concentración de probabilidades está en la transición desde cualquier estado al estado 5, lo que seguramente implica que muchos estados caen al estado 1 en el primer paso, y se recuperan al estado 5 en el segundo paso.

Para seguir explorando el comportamiento de la matriz de transición cuando existen restricciones con respecto a la recuperación se podría formular la opción de que al llegar al estado 1 se recupere al estado 5 y al llegar al estado 2 se recupere al estado 4. Para realizar esto se sigue el mismo procedimiento descrito para considerar solamente la recuperación en el estado 1. La matriz obtenida junto con la matriz luego de tres pasos temporales se presentan a continuación:

La matriz de transición a un paso tiene un cambio con respecto a la matriz considerando recuperación solo del estado 1 al estado 5, aparece una probabilidad de transición del estado 2 al estado 4. Esta

	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1	0.012195	0.000000	0.000000	0.000000	0.987805	1	0.202885	0.055466	0.010376	0.221096	0.510178
2	0.214286	0.035714	0.000000	0.750000	0.000000	2	0.230867	0.093974	0.033844	0.169278	0.472037
3	0.750000	0.214286	0.035714	0.000000	0.000000	3	0.492294	0.266294	0.113450	0.042330	0.085632
4	0.621622	0.283784	0.081081	0.013514	0.000000	4	0.464692	0.244658	0.100607	0.050156	0.139886
5	0.522581	0.296774	0.135484	0.038710	0.006452	5	0.428946	0.220366	0.088369	0.062401	0.199918

Figura 11: Matriz de transición considerando un paso temporal (izquierda) y tres pasos temporales (derecha).

probabilidad de transición indica que en un tercio de las veces en las que el sistema esté en el estado 2, se recuperará al estado 4. La matriz de transición a tres pasos temporales muestra que con tres pasos temporales se puede pasar de cualquier estado a cualquier otro estado. Es de destacar nuevamente que pasar de estados altos (3, 4 y 5) a estados bajos (1 y 2) son las zonas con las probabilidades más altas. Aunque también se observa que las transiciones de los estados 1 y 2 a los estados 5 y 4 respectivamente también presentan probabilidades altas. Este comportamiento tiene sentido ya que las probabilidades de caer en estados bajos son altas y las probabilidades de recuperación de los dos estados más bajos a los dos estados más altos también son altas. De hecho, la tendencia en la matriz de transición con tres pasos temporales es que los estados 1 y 2 concentren la probabilidad en la transición al estado 5, mientras que los estados 3, 4 y 5 concentren la probabilidad en la transición al estado 1.

Para utilizar las matrices de transición para evaluar el sistema se debe definir el estado inicial utilizando un vector cuyas componentes van a ser ceros en los estados en los que no se encuentra el sistema y 1 en el estado en el que se encuentra el sistema. En este caso se quiere suponer que el sistema inicialmente se encuentra en el estado óptimo.

$$P^0 = \{0, 0, 0, 0, 1\}$$

A continuación, el vector de estado inicial se multiplica por la matriz de transición asociada a la cantidad de pasos temporales que se quieran evaluar. El resultado es un vector que indica la probabilidad de que el sistema, luego de los pasos temporales, esté en un estado en específico. En este caso se quieren evaluar los 4 modelos generados anteriormente. Además de que se quieren evaluar 6 temporalidades (1 año, 5 años, 10 años, 15 años, 20 años y 50 años). Se detallarán los resultados de cada uno de ellos a continuación:

- Permite la recuperación o degradación desde cualquier estado hasta cualquier otro estado:

	1	2	3	4	5
1 year later	0.522581	0.296774	0.135484	0.038710	0.006452
5 years later	0.384114	0.196850	0.104793	0.107943	0.206300
10 years later	0.271772	0.140648	0.104762	0.164114	0.318704
15 years later	0.301432	0.155478	0.104762	0.149284	0.289044
20 years later	0.293603	0.151564	0.104762	0.153198	0.296873
50 years later	0.295238	0.152381	0.104762	0.152381	0.295239

Figura 12: Probabilidad de estar en un estado dependiendo de la temporalidad evaluada considerando como estado inicial el estado óptimo. El modelo usado permite degradación y recuperación de cualquier estado a cualquier otro estado.

Si se evalúa el estado del sistema pasado un año lo más probable es que el sistema se encuentre en un estado malo o en la falla ($\geq 80\%$ de la probabilidad), teniendo la falla la mayor probabilidad. Si se analiza en 5 años la probabilidad sigue estando concentrada en los peores estados (60 % de

la probabilidad), sin embargo, existe un 20 % de la probabilidad de estar en el estado óptimo. Al analizar a los 10 años la probabilidad está mucho más distribuida, de modo que los estados con mayor probabilidad son el estado 1 (27 %) y el estado 5 (32 %), aunque los estados más altos (4 y 5) acumulan la mayor probabilidad. Al analizar los 15 años hay alguna variabilidad en si el estado 1 o el estado 5 acumulan la mayor probabilidad, sin embargo siguen siendo valores muy similares, y en este caso no se puede concluir que los estados buenos o los estados malos acumulen más probabilidad. De aquí en adelante el comportamiento es el mismo hasta que en un tiempo de 50 años pareciera que el estado 1 y el estado 5 tienen la misma probabilidad (29.54 %), el estado 2 y 4 tienen la misma probabilidad (15.24 %), además de que los estados buenos y los malos suman aproximadamente la misma probabilidad (44.7 %); mientras que el estado 3 cuenta con una probabilidad estable desde los 10 años de análisis (10.47 %).

La progresión en el tiempo del estado inicial parece no indicar una tendencia a un estado clara ya que la probabilidad se encuentra muy distribuida en todos los estados de análisis. Lo que si se puede afirmar es que la probabilidad de estar en un estado u otro se estabiliza conforme avanza el tiempo.

- Solo permite degradación: En este caso al analizar un año la mayor probabilidad la acumula el estado 1 ($\geq 50\%$). Conforme se avanza en el tiempo se observa que la totalidad de la probabilidad se va directamente al estado 1 (falla). Esto tiene sentido ya que solamente se puede tener deterioro, por lo tanto con la progresión del tiempo el sistema solamente puede estar en el peor estado posible. Además de que nuevamente se observa una tendencia a estabilizarse el valor de las probabilidades de que el sistema se encuentre en un estado determinado.

	1	2	3	4	5
1 year later	0.522581	2.967742e-01	1.354839e-01	3.870968e-02	6.451613e-03
5 years later	0.999695	3.047695e-04	5.408314e-07	2.408972e-09	1.117742e-11
10 years later	1.000000	1.819828e-08	3.193802e-14	1.112535e-18	1.249347e-22
15 years later	1.000000	1.082783e-12	1.855978e-21	5.016670e-28	1.396447e-33
20 years later	1.000000	6.442455e-17	1.078408e-28	2.260806e-37	1.560867e-44
50 years later	1.000000	2.858316e-42	4.149942e-72	1.893703e-93	3.043793e-110

Figura 13: Probabilidad de estar en un estado dependiendo de la temporalidad evaluada considerando como estado inicial el estado óptimo. El modelo usado permite solamente degradación.

- Permite recuperación del estado 1 al estado 5:

	1	2	3	4	5
1 year later	0.522581	0.296774	0.135484	0.038710	0.006452
5 years later	0.378231	0.143850	0.050975	0.013837	0.413106
10 years later	0.389054	0.152573	0.055432	0.015120	0.387822
15 years later	0.389244	0.152920	0.055642	0.015183	0.387010
20 years later	0.389242	0.152931	0.055650	0.015185	0.386992
50 years later	0.389242	0.152931	0.055650	0.015186	0.386992

Figura 14: Probabilidad de estar en un estado dependiendo de la temporalidad evaluada considerando como estado inicial el estado óptimo. El modelo usado permite la recuperación del estado 1 al estado 5.

En el caso al analizar a un año las probabilidades se concentran en los estados 1 y 2, conforme se avanza en el tiempo las probabilidades se distribuyen hacia los estados 1 y 5 y parecen estabilizarse en ciertos valores. Algo a destacar es que en esta situación hay más probabilidad acumulada hacia los estados 1 y 2 ($\geq 50\%$) que hacia los estados 4 y 5. De hecho, el estado con menor probabilidad

es el estado 4 que podría entenderse como un estado bueno más no perfecto), seguido por el estado 3. Esto seguramente tiene relación con el hecho de que hay menos formas de llegar a estos dos estados porque las probabilidades de transición se acumulan hacia el estado 5 o hacia los estados bajos en la matriz de transición. Lo que si se puede decir con respecto a este sistema es que hay una mayor tendencia a tener el sistema en mal estado que a tenerlo en buen estado.

- Permite recuperación del estado 1 al estado 5 y del estado 2 al estado 4: En este caso se observa que las probabilidades tienden a estabilizarse. A tiempos cortos pareciera que la tendencia es a estar en un mal estado. Sin embargo conforme se avanza en el tiempo analizándose observa que las probabilidades se distribuyen hacia los estados extremos. Al final el estado 1 y el estado 5 tienen una probabilidad muy similar (33%), mientras que el estado 2 (15.21 %) tienen un poco más de probabilidad del estado 4 (12.8 %). Esta distribución de la probabilidad no permite concluir claramente sobre la tendencia del sistema.

	1	2	3	4	5
1 year later	0.522581	0.296774	0.135484	0.038710	0.006452
5 years later	0.382096	0.186741	0.072938	0.096685	0.261539
10 years later	0.322604	0.145651	0.054227	0.134622	0.342897
15 years later	0.333738	0.153360	0.057744	0.127499	0.327659
20 years later	0.331653	0.151916	0.057086	0.128833	0.330513
50 years later	0.331982	0.152144	0.057189	0.128622	0.330063

Figura 15: Probabilidad de estar en un estado dependiendo de la temporalidad evaluada considerando como estado inicial el estado óptimo. El modelo usado permite la recuperación del estado 1 al estado 5 y del estado 2 al estado 4.

Con respecto al análisis en diferentes temporalidades y considerando diferentes modelos se pueden generar algunas conclusiones: La primera conclusión es que el estado 3 es el que menor probabilidad presenta en 3 de los cuatro modelos, por lo que es el estado más improbable en general para el sistema. Por otra parte, se observa similitud entre el modelo que permite recuperación de cualquier estado a cualquier estado y el modelo que permite recuperación del estado 1 al 5 y del 2 al 4. Esto tiene que ver seguramente con el hecho de que conforme avanza el tiempo permitir dos tipos de recuperación da más rango de variabilidad a los estados resultantes para el sistema. Finalmente se observa que el modelo considerando solo deterioro genera los resultados esperados y que el sistema que permite solo un tipo de recuperación inclina el sistema a estar en mal estado a largo plazo.

Para dar mayor solidez al análisis se puede graficar la probabilidad de falla del sistema a través del tiempo. Esto se hace al sumar la probabilidad obtenida multiplicando el estado inicial por la matriz de transición para el tiempo especificado. Este proceso se realizará para el modelo que permite degradación o recuperación entre cualquier par de estados.

La figura 16 muestra el comportamiento de la probabilidad de falla. Se puede observar que tiende a estabilizarse conforme avanza el tiempo, lo que se podía concluir del análisis anterior. Además, se observa que inicialmente se da un proceso oscilatorio al rededor de un valor. La estabilización ocurre en una probabilidad relativamente alta, sin embargo previamente se vio que este valor es muy similar a la probabilidad de estar en un estado bueno u óptimo.

Complementario a este análisis se pueden estudiar otros dos estados iniciales:

$$P^0 = \{0,5; 0,3; 0,1; 0,05; 0,05\} \quad P^0 = \{0,05; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5\}$$

El objetivo de estudiar estos otros estados es comparar si los resultados a largo plazo dependen de las condiciones iniciales. De modo que se plantea el análisis para 5, 10, 15, 20 y 50 años, el cual se aplicará a los cuatro modelos.

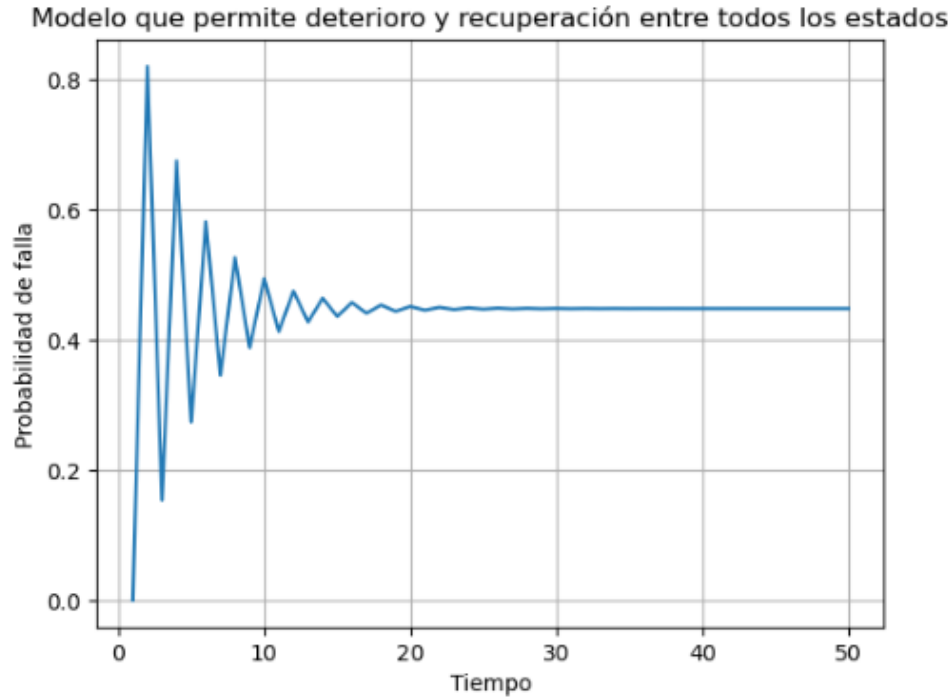


Figura 16: Probabilidad de falla en función del tiempo para el modelo que permite recuperación y deterioro entre cualquier par de estados.

- Permite la recuperación o degradación desde cualquier estado hasta cualquier otro estado:

	1	2	3	4	5
5 years later	0.384114	0.196850	0.104793	0.107943	0.206300
10 years later	0.271772	0.140648	0.104762	0.164114	0.318704
15 years later	0.301432	0.155478	0.104762	0.149284	0.289044
20 years later	0.293603	0.151564	0.104762	0.153198	0.296873
50 years later	0.295238	0.152381	0.104762	0.152381	0.295239

	1	2	3	4	5
5 years later	0.233700	0.121610	0.104760	0.183150	0.356781
10 years later	0.311481	0.160503	0.104762	0.144259	0.278995
15 years later	0.290951	0.150237	0.104762	0.154525	0.299525
20 years later	0.296370	0.152947	0.104762	0.151815	0.294107
50 years later	0.295238	0.152381	0.104762	0.152381	0.295238

	1	2	3	4	5
5 years later	0.356781	0.183150	0.104760	0.121610	0.233700
10 years later	0.278995	0.144259	0.104762	0.160503	0.311481
15 years later	0.299525	0.154525	0.104762	0.150237	0.290951
20 years later	0.294107	0.151815	0.104762	0.152947	0.296370
50 years later	0.295238	0.152381	0.104762	0.152381	0.295238

Figura 17: Probabilidad de caer en un estado de acuerdo con las condiciones iniciales para diferentes temporalidades. Los estados iniciales analizados son $P^0 = \{0; 0; 0; 0; 1\}$ - Izquierda, $P^0 = \{0,5; 0,3; 0,1; 0,05; 0,05\}$ - Derecha, $P^0 = \{0,05; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5\}$ - Inferior. Modelo 1.

De las tablas se puede observar que para tiempos cortos (5, 10 años) si se presenta una variación en las probabilidades de cada estado, sin embargo a largo plazo las probabilidades tienden a ser las mismas independientemente de las condiciones iniciales. Esto tiene sentido ya que a largo plazo las matrices de transición alcanzan un estado estacionario dónde las probabilidades ya no cambian. Este comportamiento se venía observando en los análisis anteriores. Pero al evaluar otros estados iniciales se puede corroborar este comportamiento.

Para observar con mayor claridad este comportamiento se puede graficar la probabilidad de cada uno de los estados en función del tiempo para los tres estados iniciales evaluados. Se grafican todas las tendencias en una misma gráfica de modo que se observe que todas se estabilizan en el

mismo valor de probabilidad para cada estado. En la figura 18 se observa que en el tiempo cero las probabilidades parten de puntos diferentes y se estabilizan en valores específicos.

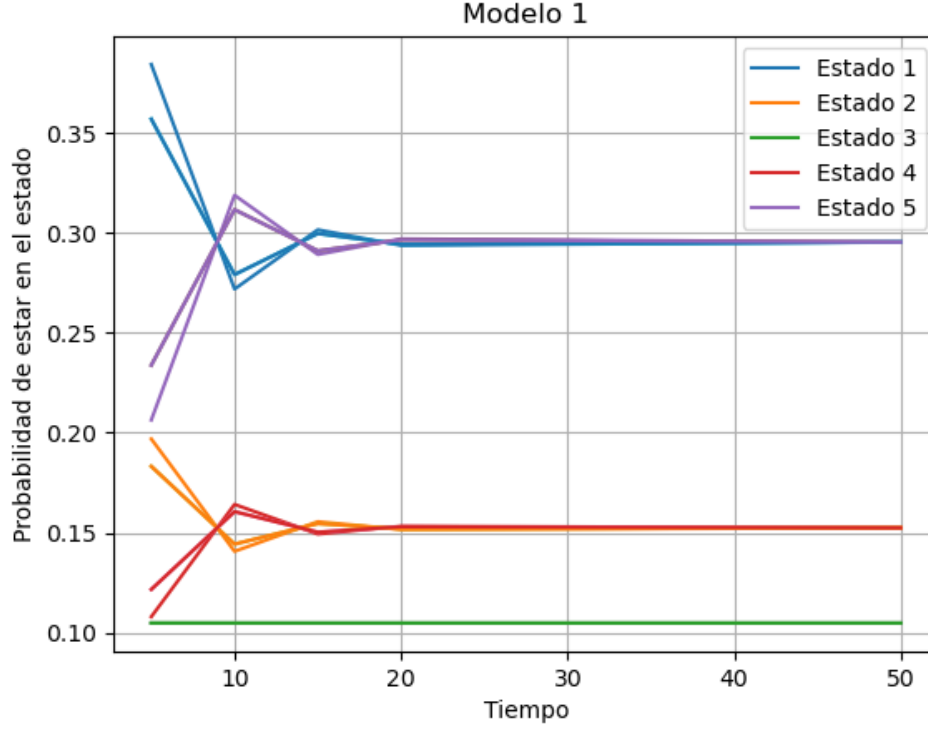


Figura 18: Probabilidad de estar en un estado en función del tiempo para el modelo 1.

■ Solo permite degradación:

	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
5 years later	0.999695	3.047695e-04	5.408314e-07	2.408972e-09	1.117742e-11	5 years later	0.999945	5.521215e-05	4.338012e-08	1.429812e-10	5.588709e-13
10 years later	1.000000	1.819828e-08	3.193802e-14	1.112535e-18	1.249347e-22	10 years later	1.000000	3.290255e-09	2.550989e-15	6.578109e-20	6.246734e-24
15 years later	1.000000	1.082783e-12	1.855978e-21	5.016670e-28	1.396447e-33	15 years later	1.000000	1.957673e-13	1.482378e-22	2.965944e-29	6.982236e-35
20 years later	1.000000	6.442455e-17	1.078408e-28	2.260806e-37	1.560867e-44	20 years later	1.000000	1.164796e-17	8.613292e-30	1.336626e-38	7.804337e-46
50 years later	1.000000	2.858316e-42	4.149942e-72	1.893703e-93	3.043793e-110	50 years later	1.000000	5.167835e-43	3.314578e-73	1.119588e-94	1.521896e-111

	1	2	3	4	5
5 years later	0.999771	2.286626e-04	3.393947e-07	1.339682e-09	5.588709e-12
10 years later	1.000000	1.364582e-08	2.000547e-14	6.171935e-19	6.246734e-23
15 years later	1.000000	8.119155e-13	1.162538e-21	2.782900e-28	6.982236e-34
20 years later	1.000000	4.830818e-17	6.754877e-29	1.254137e-37	7.804337e-45
50 years later	1.000000	2.143283e-42	2.599420e-72	1.050494e-93	1.521896e-110

Figura 19: Probabilidad de caer en un estado de acuerdo con las condiciones iniciales para diferentes temporalidades. Los estados iniciales analizados son $P^0 = \{0; 0; 0; 0; 1\}$ - Izquierda, $P^0 = \{0,5; 0,3; 0,1; 0,05; 0,05\}$ - Derecha, $P^0 = \{0,05; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5\}$ - Inferior. Modelo 2.

En este caso nuevamente se observa la tendencia a que los valores de probabilidad se estabilicen conforme se avanza en el tiempo. Esto implica que el modelo alcanza un estado estable en el que ya no hay más variación en las probabilidades de los estados. Como se explicó previamente, este caso es particular ya que evidentemente si no se tiene ninguna clase de recuperación el estado esperable a largo plazo es el estado de falla (1).

Nuevamente se grafican las probabilidades de cada estado en función del tiempo de modo que se pueda observar gráficamente cómo estás se estabilizan. En este caso el proceso de estabilización ocurre mucho más rápido que para el modelo 1, lo que indica que el tiempo requerido para alcanzar un estado estable varía de acuerdo con cómo se defina la cadena de Markov.

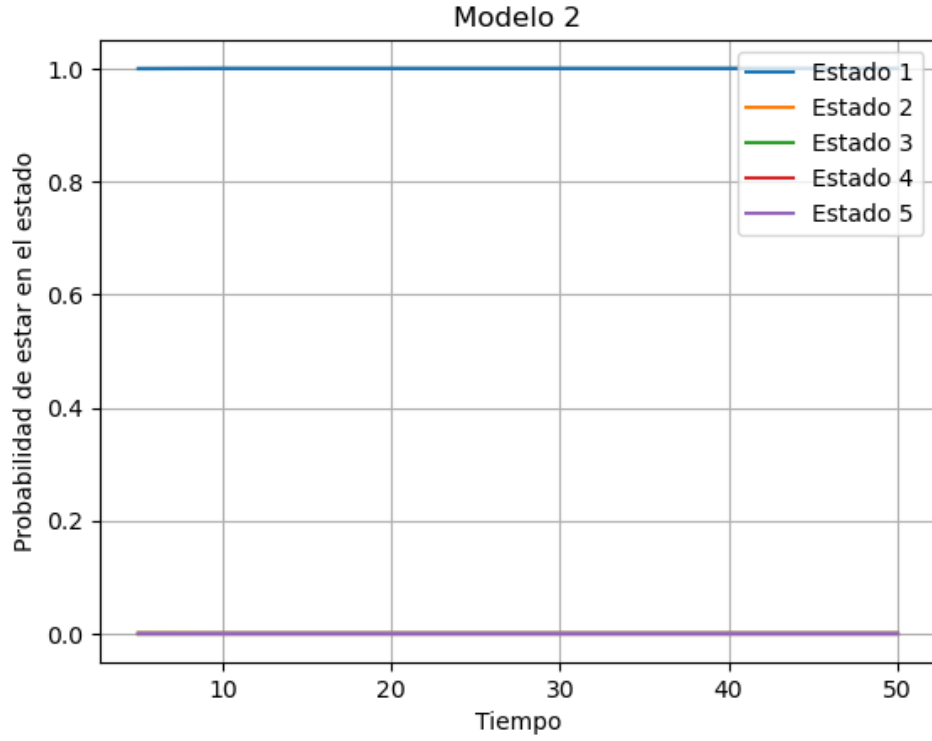


Figura 20: Probabilidad de estar en un estado en función del tiempo para el modelo 2.

- Permite recuperación del estado 1 al estado 5:

	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
5 years later	0.378231	0.143850	0.050975	0.013837	0.413106	5 years later	0.390098	0.157392	0.058570	0.016078	0.377862
10 years later	0.389054	0.152573	0.055432	0.015120	0.387822	10 years later	0.389158	0.153040	0.055736	0.015213	0.386854
15 years later	0.389244	0.152920	0.055642	0.015183	0.387010	15 years later	0.389236	0.152932	0.055652	0.015186	0.386995
20 years later	0.389242	0.152931	0.055650	0.015185	0.386992	20 years later	0.389242	0.152931	0.055650	0.015186	0.386992
50 years later	0.389242	0.152931	0.055650	0.015186	0.386992	50 years later	0.389242	0.152931	0.055650	0.015186	0.386992

	1	2	3	4	5
5 years later	0.376415	0.147319	0.053586	0.014656	0.408024
10 years later	0.388892	0.152621	0.055487	0.015138	0.387862
15 years later	0.389236	0.152919	0.055643	0.015183	0.387019
20 years later	0.389242	0.152930	0.055650	0.015185	0.386992
50 years later	0.389242	0.152931	0.055650	0.015186	0.386992

Figura 21: Probabilidad de caer en un estado de acuerdo con las condiciones iniciales para diferentes temporalidades. Los estados iniciales analizados son $P^0 = \{0; 0; 0; 0; 1\}$ - Izquierda, $P^0 = \{0,5; 0,3; 0,1; 0,05; 0,05\}$ - Derecha, $P^0 = \{0,05; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5\}$ - Inferior. Modelo 3.

Este modelo sigue con la misma tendencia a estabilizar las probabilidades de estar en cada estado conforme se analiza durante más tiempo. Además se observa nuevamente que los valores estables de probabilidad son independientes de las condiciones iniciales.

También se genera la gráfica de las probabilidades de alcanzar un estado en función del tiempo. Se observa que el tiempo requerido para estabilizar la probabilidad es menor al requerido para el modelo 1 y mayor al modelo 2. Esto puede indicar que permitir la recuperación del sistema introduce variabilidad y alarga el tiempo requerido para la estabilización de las probabilidades. Además, se pueden observar cuatro valores al rededor de los cuales se estabilizan las probabilidades, mismo comportamiento que el descrito haciendo uso de la tabla del primer modelo.

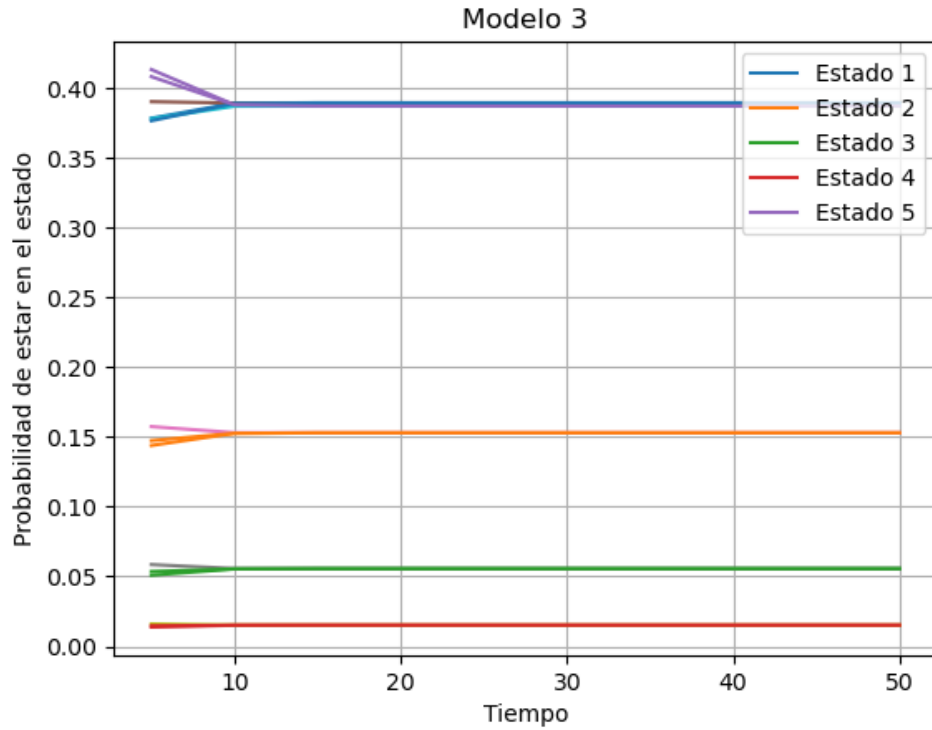


Figura 22: Probabilidad de estar en un estado en función del tiempo para el modelo 3.

- Permite recuperación del estado 1 al estado 5 y del estado 2 al estado 4:

	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
5 years later	0.382096	0.186741	0.072938	0.096685	0.261539	5 years later	0.297598	0.128328	0.046315	0.150611	0.377148
10 years later	0.322604	0.145651	0.054227	0.134622	0.342897	10 years later	0.338423	0.156603	0.059224	0.124502	0.321248
15 years later	0.333738	0.153360	0.057744	0.127499	0.327659	15 years later	0.330775	0.151308	0.056808	0.129394	0.331714
20 years later	0.331653	0.151916	0.057086	0.128833	0.330513	20 years later	0.332208	0.152300	0.057261	0.128478	0.329753
50 years later	0.331982	0.152144	0.057189	0.128622	0.330063	50 years later	0.331982	0.152144	0.057189	0.128622	0.330063

	1	2	3	4	5
5 years later	0.379620	0.185165	0.072247	0.097903	0.265065
10 years later	0.323050	0.145960	0.054368	0.134336	0.342286
15 years later	0.333655	0.153302	0.057718	0.127552	0.327773
20 years later	0.331668	0.151927	0.057090	0.128823	0.330492
50 years later	0.331982	0.152144	0.057189	0.128622	0.330063

Figura 23: Probabilidad de caer en un estado de acuerdo con las condiciones iniciales para diferentes temporalidades. Los estados iniciales analizados son $P^0 = \{0; 0; 0; 0; 1\}$ - Izquierda, $P^0 = \{0,5; 0,3; 0,1; 0,05; 0,05\}$ - Derecha, $P^0 = \{0,05; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5\}$ - Inferior. Modelo 4.

Nuevamente se observa que en tiempos cortos hay variación entre las probabilidades de encontrarse en un estado debido a que se parten de estados iniciales diferentes. Además se observa nuevamente que se estabilizan las probabilidades en el largo plazo.

En cuanto a la gráfica de probabilidades en función del tiempo se observa que con este modelo se requiere aproximadamente el mismo tiempo para estabilizar el valor de las probabilidades que el requerido en el modelo 1. Esto muestra que efectivamente el tiempo para estabilizarse depende de la capacidad de recuperación que tenga el sistema.

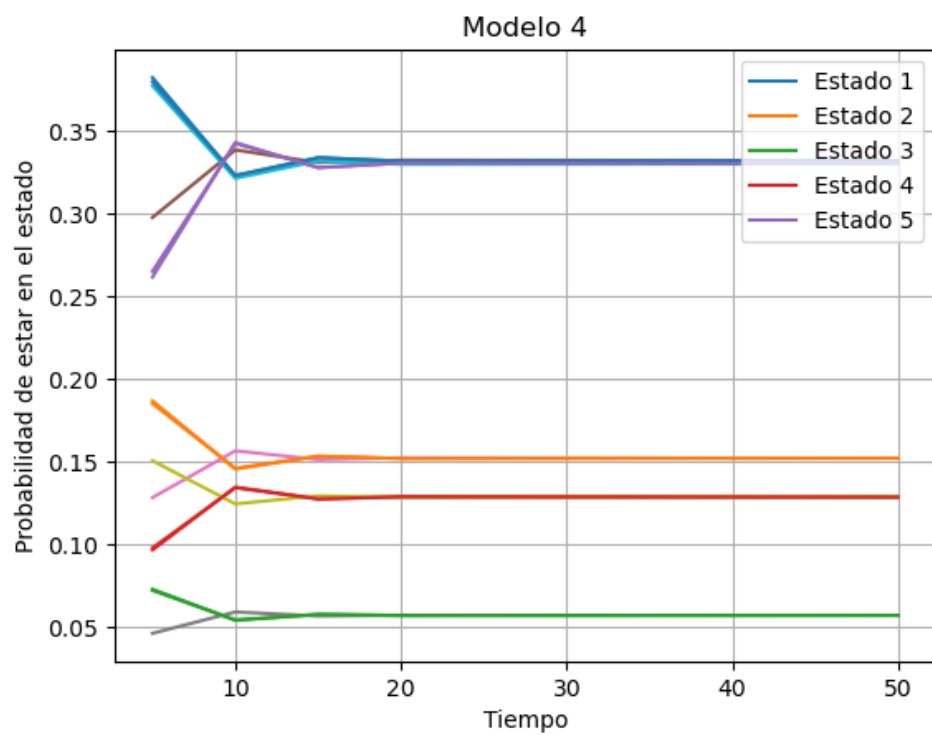


Figura 24: Probabilidad de estar en un estado en función del tiempo para el modelo 4.