Tarea 4

Maria Fernanda Nariño
Karol Rivera

25 de febrero de 2022

1. Lunar rocket

- Muestre que:

$$r_L(r,\theta,t) = \sqrt{r(t) + d^2 - 2r(t)dcos(\phi - \omega t)}$$

De la imagen se puede definir:

$$\vec{P}_{tierra} = (X, Y)$$
$$\vec{P}_{Luna} = (X_L, Y_L)$$

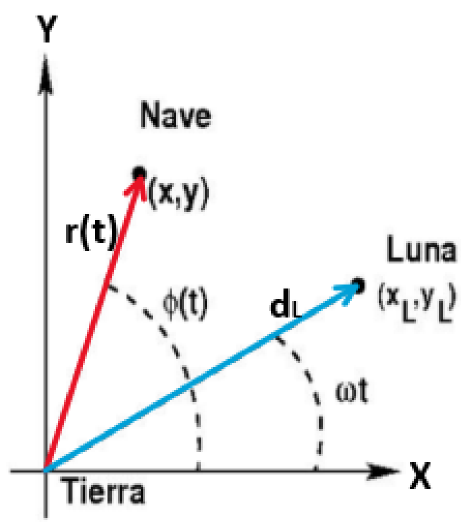

Figura 1: Diagrama de posiciones nave-luna.

Estas posiciones irán variando en el tiempo a medida, por lo que son funciones de la variables "t". Si se realiza un cambio a coordenadas polares se obtiene:

$$\vec{P}_{tierra} = (r(t)cos(\phi t), r(t)sin(\phi t))$$
$$\vec{P}_{Luna} = (d_L cos(\omega t), d_L sin(\omega t))$$

de manera que cada uno de los cuerpos puede describirse mediante la norma de su vector posición, y el ángulo que forma con el eje X, variables que nuevamente van a depender del tiempo.

$$Tierra \to r(t) = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad \phi$$
$$Luna \to d_L = \sqrt{X_L^2 + Y_L^2}; \quad \omega t$$

Considerando esta información de los vectores es posible usar la ley de cosenos para encontrar la distrancia nave-luna. Se define el siguiente triángulo:

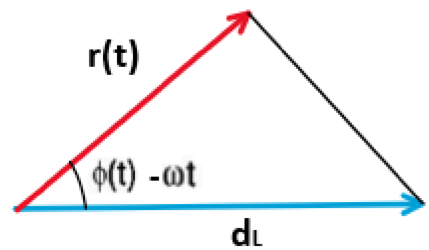

Figura 2: Triángulo para determinación de distancia nave-luna.

entonces el lado faltante en el triángulo, es decir, la distancia es:

$$r_L = \sqrt{r(t)^2 + d_L^2 - 2r(t)d_L cos(\phi(t) - \omega t)}$$

- Muestre que el Hamiltoniano de la nave está dado por:

$$H = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - \frac{Gmm_T}{r} - \frac{Gmm_L}{r_L}$$

La energía cinética se define como:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right].$$

Considerando la definición para las coordenadas X e Y se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{r}(t)cos(\phi t) - r(t)sin(\phi t)\dot{\phi}$$
$$\frac{dy}{dt} = \dot{r}(t)sin(\phi t) + r(t)cos(\phi t)\dot{\phi}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (\dot{r}(t)cos(\phi t) - r(t)sin(\phi t)\dot{\phi})^2 = \dot{r}(t)^2cos(\phi t)^2 + r(t)^2sin(\phi t)^2\dot{\phi}^2 - 2\dot{r}(t)cos(\phi t)r(t)sin(\phi t)\dot{\phi}$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (\dot{r}(t)sin(\phi t) + r(t)cos(\phi t)\dot{\phi})^2 = \dot{r}(t)^2sin(\phi t)^2 + r(t)^2cos(\phi t)^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{r}(t)cos(\phi t)r(t)sin(\phi t)\dot{\phi}$$

De manera que la energía cinética queda:

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}(t)^2cos(\phi t)^2 + r(t)^2sin(\phi t)^2\dot{\phi}^2 - 2\dot{r}(t)cos(\phi t)r(t)sin(\phi t)\dot{\phi} +$$
$$\dot{r}(t)^2sin(\phi t)^2 + r(t)^2cos(\phi t)^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{r}(t)cos(\phi t)r(t)sin(\phi t)\dot{\phi}]$$
$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}(t)^2cos(\phi t)^2 + r(t)^2sin(\phi t)^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}(t)^2sin(\phi t)^2 + r(t)^2cos(\phi t)^2\dot{\phi}^2]$$

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\phi}^2]$$

Por otra parte, la energía potencial que siente la nave sería causada por la interacción gravitatoria con la tierra y la luna:

$$V = -\frac{Gmm_T}{r} - \frac{Gmm_L}{r_L}$$

de manera que el lagrangiano del sistema es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[\dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\phi}^2] + \frac{Gmm_T}{r(t)} + \frac{Gmm_L}{r_L}$$

El hamiltoniano puede obtenerse a partir del lagrangiano de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$H = \sum_1^n p_i\dot{q}_i - L$$

donde p_i y q_i son los momentos y coordenadas generalizadas del sistema. Los momentos en este caso son:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}(t)$$
$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr(t)^2\dot{\phi}$$

el lagrangiano puede escribirse en términos de estos momentos al despejar:

$$\dot{r}(t) = \frac{p_r}{m}$$
$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr(t)^2}$$

$$L = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r(t)^2\left(\frac{p_\phi}{mr(t)^2}\right)^2\right] + \frac{Gmm_T}{r(t)} + \frac{Gmm_L}{r_L}$$
$$L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr(t)^2} + \frac{Gmm_T}{r(t)} + \frac{Gmm_L}{r_L}$$

de manera que el hamiltoniano queda:

$$H = p_r\dot{r}(t) + p_\phi\dot{\phi} - \frac{p_r^2}{2m} - \frac{p_\phi^2}{2mr(t)^2} - \frac{Gmm_T}{r(t)} - \frac{Gmm_L}{r_L}$$
$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\phi^2}{mr(t)^2} - \frac{p_r^2}{2m} - \frac{p_\phi^2}{2mr(t)^2} - \frac{Gmm_T}{r(t)} - \frac{Gmm_L}{r_L}$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr(t)^2} - \frac{Gmm_T}{r(t)} - \frac{Gmm_L}{r_L}$$

- Muestre que las ecuaciones de Hamilton están dadas por:

$$\dot{r}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr(t)^2}$$

$$\dot{p_r} = -\frac{\partial H}{\partial r(t)} = \frac{p_\phi^2}{mr(t)^3} - \frac{Gmm_T}{r(t)^2} - \frac{Gmm_L}{r_L^3}[r(t) - d_L cos(\phi - \omega t)]$$

$$\dot{p_\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{Gmm_L}{r_L^3} r(t) d_L sin(\phi - \omega t)$$

Partiendo del Hamiltoniano se realizan explicitamente las derivadas a continuación:

$$\dot{r}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right) + \cancel{\frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr(t)^2}\right)} - \cancel{\frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{Gmm_T}{r(t)} - \frac{Gmm_L}{r_L}\right)} = \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right)$$

$$\dot{r}(t) = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \cancel{\frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right)} + \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr(t)^2}\right) - \cancel{\frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{Gmm_T}{r(t)} - \frac{Gmm_L}{r_L}\right)} = \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr(t)^2}\right)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr(t)^2}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r(t)} = -\cancel{\frac{\partial}{\partial r(t)}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right)} - \frac{\partial}{\partial r(t)}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr(t)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial r(t)}\left(\frac{Gmm_T}{r(t)}\right) + \frac{\partial}{\partial r(t)}\left(\frac{Gmm_L}{r_L}\right)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr(t)^3} - \frac{Gmm_T}{r(t)^2} - \left(\frac{Gmm_L}{r_L^2}\right)\frac{\partial r_L}{\partial r(t)}$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr(t)^3} - \frac{Gmm_T}{r(t)^2} - \left(\frac{Gmm_L}{r_L^2}\right)\left(\frac{2r(t) - 2d_L cos(\phi(t) - \omega t)}{2r_L}\right)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr(t)^3} - \frac{Gmm_T}{r(t)^2} - \frac{Gmm_L}{r_L^3}[r(t) - d_L cos(\phi(t) - \omega t)]$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\cancel{\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right)} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr(t)^2}\right)} + \cancel{\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{Gmm_T}{r(t)}\right)} + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{Gmm_L}{r_L}\right)$$

$$\dot{p}_\phi = -\left(\frac{Gmm_L}{r_L^2}\right)\frac{\partial r_L}{\partial \phi} = -\frac{Gmm_L}{r_L^2}\left(\frac{2r(t) d_L sin(\phi(t) - \omega t)}{2r_L}\right)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{Gmm_L}{r_L^3}[r(t) d_L sin(\phi(t) - \omega t)]$$

- Demuestre que si se asignan nuevas variables normalizadas a la distancia lunar, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como:

$$\dot{\tilde{r}}(t) = \tilde{p}_r$$

$$\dot{\phi} = \frac{\tilde{p}_\phi}{\tilde{r}(t)^2}$$

$$\dot{\tilde{p}}_r = \frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}(t)^3} - \Delta\left(\frac{1}{\tilde{r}(t)^2} + \frac{\mu}{\tilde{r}'^3}[\tilde{r}(t) - cos(\phi - \omega t)]\right)$$

$$\dot{\tilde{p}}_\phi = -\frac{\Delta\mu}{\tilde{r}'^3}\tilde{r}(t)sin(\phi - \omega t)$$

Con $\Delta = Gm_T/d_L^3$, $\mu = m_L/m_T$ y $\tilde{r}' = \sqrt{1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}cos(\phi - \omega t)}$.

Se definen las variables reducidas como:

$$\tilde{r}(t) = \frac{r(t)}{d_L}$$
$$\tilde{p}_r = \frac{p_r}{md_L}$$
$$\tilde{p}_\phi = \frac{p_\phi}{md_L^2}$$

Al derivar con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{\tilde{r}}(t)d_L = \dot{r}$$
$$\dot{\tilde{p}}_r md_L = \dot{p_r}$$
$$\dot{\tilde{p}}_\phi md_L^2 = \dot{p_\phi}$$

En la primera ecuación de Hamilton se obtiene:

$$\dot{r}(t) = \dot{\tilde{r}}(t)d_L = \frac{p_r}{m}$$
$$\dot{\tilde{r}}(t)\cancel{d_L} = \frac{\tilde{p}_r\cancel{md_L}}{\cancel{m}}$$

$$\dot{\tilde{r}}(t) = \tilde{p}_r$$

En la segunda ecuación de Hamilton se obtiene:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr(t)^2} = \frac{\tilde{p}_\phi\cancel{m}d_L^2}{\cancel{m}(\tilde{r}(t)d_L)^2}$$
$$\dot{\phi} = \frac{\tilde{p}_\phi d_L}{\tilde{r}(t)^2 d_L^2}$$
$$\dot{\phi} = \frac{\tilde{p}_\phi \cancel{d_L}}{\tilde{r}(t)^2 \cancel{d_L^2}}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\tilde{p}_\phi}{\tilde{r}(t)^2}$$

En la tercera ecuación de Hamilton:

$$\dot{p}_r = \dot{\tilde{p}}_r m d_L = \frac{(\tilde{p}_\phi m d_L^2)^2}{m(\tilde{r}(t)d_L)^3} - \frac{Gmm_T}{(\tilde{r}(t)d_L)^2} - \frac{Gmm_L[\tilde{r}(t)d_L - d_L cos(\phi(t)-\omega t)]}{(\sqrt{(\tilde{r}(t)d_L)^2 + d_L^2 - 2\tilde{r}(t)d_L^2 cos(\phi(t)-\omega t)})^3}$$

$$\dot{\tilde{p}}_r = \frac{\tilde{p}_\phi^2 \cancel{m^2} \cancel{d_L^4}}{\cancel{m^2}\tilde{r}(t)^3 \cancel{d_L^4}} - \frac{G\cancel{m}m_T}{\cancel{m}\tilde{r}(t)^2 d_L^3} - \frac{G\cancel{m}m_L \cancel{d_L}[\tilde{r}(t) - cos(\phi(t)-\omega t)]}{\cancel{m}\cancel{d_L}(\sqrt{(\tilde{r}(t)d_L)^2 + d_L^2 - 2\tilde{r}(t)d_L^2 cos(\phi(t)-\omega t)})^3}$$

$$\dot{\tilde{p}}_r = \frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}(t)^3} - \frac{Gm_T}{\tilde{r}(t)^2 d_L^3} - \frac{Gm_L[\tilde{r}(t) - cos(\phi(t)-\omega t)]}{(d_L\sqrt{\tilde{r}(t)^2 + 1 - 2\tilde{r}(t)2cos(\phi(t)-\omega t)})^3}$$

$$\dot{\tilde{p}}_r = \frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}(t)^3} - \frac{Gm_T}{d_L^3}\left(\frac{1}{\tilde{r}(t)^2} + \frac{m_L/m_T}{\tilde{r}'^3}[\tilde{r}(t) - cos(\phi(t)-\omega t)]\right)$$

$$\dot{\tilde{p}}_r = \frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}(t)^3} - \Delta\left(\frac{1}{\tilde{r}(t)^2} + \frac{\mu}{\tilde{r}'^3}[\tilde{r}(t) - cos(\phi(t)-\omega t)]\right)$$

Finalmente, en la cuarta ecuación de Hamilton:

$$\dot{p_\phi} = \dot{\tilde{p}}_\phi \cancel{m d_L^2} = -\frac{G\cancel{m}m_L}{d_L^3 \tilde{r}'^3}\tilde{r}(t)\cancel{d_L^2} sin(\phi - \omega t)$$

$$\dot{\tilde{p}}_\phi = -\frac{Gm_L}{d_L^3 \tilde{r}'^3}\tilde{r}(t) sin(\phi - \omega t)$$

$$\dot{\tilde{p}}_\phi = -\frac{Gm_T}{d_L^3}\frac{m_L/m_T}{\tilde{r}'^3}\tilde{r}(t) sin(\phi - \omega t)$$

$$\dot{\tilde{p}}_\phi = -\Delta\frac{\mu}{\tilde{r}'^3}\tilde{r}(t) sin(\phi - \omega t)$$

- Mostrar lo siguiente para los momentos canónicos iniciales:

$$\tilde{p}_r^o = \frac{p_r}{md} = \frac{1}{d}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{d}\left(\frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{dt}\right) = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{rd}$$
$$= \tilde{v}_o cos(\theta - \phi)$$
$$\tilde{p}_\phi^o = \frac{p_\phi}{md^2} = \tilde{r}^2\frac{d}{dt}arctan(y/x) = \frac{\tilde{r}^2}{1 + y^2/x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$= \frac{\tilde{r}^2}{r^2}(\dot{y}x - y\dot{x}) = \tilde{r}_o\tilde{v}_o sin(\theta - \phi)$$

$\tilde{p}_r^o$ se puede definir como la variable normalizada a la distancia lunar, es decir:

$$\tilde{p}_r^o = \frac{p_r}{md}$$

Sabiendo que $mv = m\frac{dr}{dt}$:

$$\tilde{p}_r^o = \cancel{m}\frac{dr}{dt}\frac{1}{\cancel{m}d}$$
$$\tilde{p}_r^o = \frac{1}{d}\frac{dr}{dt}$$

Tomando $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y derivando con respecto al tiempo se obtiene:

$$\tilde{p}_r^o = \frac{1}{d}\left(\frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{dt}\right)$$
$$\tilde{p}_r^o = \frac{1}{d}\left(\frac{\cancel{2}x\dot{x}+\cancel{2}y\dot{y}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\tilde{p}_r^o = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{rd}$$

Con el siguiente diagrama se pueden definir los valores de x, $\dot{x}$, y y $\dot{y}$ para el instante inicial:

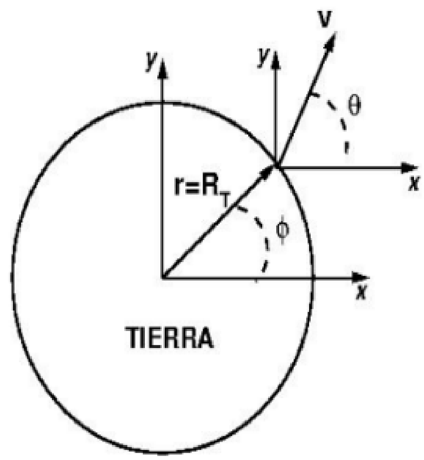

Figura 3: Diagrama de lanzamiento de la nave espacial desde la Tierra.

De esta forma se definen:

$$x = rcos\phi$$

$$y = rsin\phi$$

$$\dot{x} = v_o cos\theta$$

$$\dot{y} = v_o sin\theta$$

Reemplazando los valores obtenidos en la ecuación del momento canónico inicial se resuelve:

$$\tilde{p}_r^o = \frac{(\cancel{r}cos\phi)(v_o cos\theta)+(\cancel{r}sin\phi)(v_o sin\theta)}{\cancel{r}d}$$
$$\tilde{p}_r^o = \frac{v_o}{d}(cos\theta cos\phi + sin\theta sin\phi)$$

Por adición y sustracción de ángulos se toma $cos\theta cos\phi + sin\theta sin\phi = cos(\theta-\phi)$, entonces:

$$\tilde{p}_r^o = \frac{v_o}{d}cos(\theta-\phi)$$

Se define $\tilde{v}_o = \frac{v_o}{d}$ consiguiendo así:

$$\tilde{p}_r^o = \tilde{v}_o cos(\theta - \phi)$$

Para $\tilde{p}_\phi^o$ nuevamente se puede definir como la variable normalizada a la distancia lunar, es decir:

$$\tilde{p}_\phi^o = \frac{p_\phi}{md^2}$$

Recordanndo que el momento angular puede definirse en coordenadas polares como $L = mr^2\dot{\gamma}$, donde γ es el ángulo que define la dirección del vector posición r. El ángulo puede encontrarse, si se considera un triángulo rectángulo donde la hipotenusa sea justamente r, como $arctan(y/x)$. Así se obtiene:

$$\tilde{p}_\phi^o = \tilde{r}^2 \frac{d}{dt} arctan(y/x)$$

Derivando:

$$\tilde{p}_\phi^o = \frac{\tilde{r}^2}{1 + y^2/x^2} \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\tilde{p}_\phi^o = \frac{\tilde{r}^2}{1 + y^2/x^2}(\dot{y}x - y\dot{x})$$

Como $r^2 = q + y^2/x^2$:

$$\tilde{p}_\phi^o = \frac{\tilde{r}^2}{r^2}(\dot{y}x - y\dot{x})$$

Reemplazando los valores de x, $\dot{x}$, y y $\dot{y}$ para el instante inicial:

$$\tilde{p}_\phi^o = \frac{\tilde{r}^2}{r\cancel{^2}}(v_o sin\theta \cancel{r} cos\phi - \cancel{r} sin\phi v_o cos\theta)$$
$$\tilde{p}_\phi^o = \frac{\tilde{r}^2}{r} v_o (sin\theta cos\phi - cos\theta sin\phi)$$

Por adición y sustracción de ángulos se toma $sin\theta cos\phi - cos\theta sin\phi = sin(\theta - \phi)$, entonces:

$$\tilde{p}_\phi^o = \frac{\tilde{r}^2}{r} v_o sin(\theta - \phi) = \frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r} d^2} v_o sin(\theta - \phi) = \frac{r}{d}\frac{v_o}{d} sin(\theta - \phi)$$

$$\tilde{p}_\phi^o = \tilde{r}_o \tilde{v}_o sin(\theta - \phi)$$