# Tarea 2

Maria Fernanda Nariño
Karol Rivera

8 de febrero de 2022

## 1. Series de Fourier

- Si $f(t)$ es continua cuando $-T/2 \leq t \leq T/2$ con $f(-T/2) = f(T/2)$, y si la derivada $f'(t)$ es continua por tramos y diferenciable; entonces la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(n\omega_o t) + b_n sin(n\omega_o t))$$

se puede diferenciar término por término para obtener:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_o(-a_n sin(n\omega_o t) + b_n cos(n\omega_o t))$$

Demostración:

Partiendo de la expresión de la serie de Fourier, y mediante diferenciación directa tenemos que:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a_o + \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(n\omega_o t) + b_n sin(n\omega_o t))$$

recordando las expresiones para los coeficientes se tiene:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt\right) + \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t)$$
$$+\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)$$

Concentrandonos en el término sumatorio:

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t) + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)\right) =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t)\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)\right]\right)$$

El primer término de la sumatoria, el que va con coseno, se deriva como:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t)\right] = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{df(t)}{dt}cos(n\omega_o) + f(t)(-n\omega_o)sin(n\omega_o t)\right)dt$$
$$cos(n\omega_o t) + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * (-n\omega_o sin(n\omega_o t))$$

expresión que puede ser simplificada a:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t)\right] = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t)$$
$$-n\omega_o\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t) - n\omega_o\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)$$

Similarmente, el segundo término de la sumatoria, el que va con seno, se deriva como:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)\right] = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{df(t)}{dt}sin(n\omega_o) + f(t)(n\omega_o)cos(n\omega_o t)\right)dt$$
$$sin(n\omega_o t) + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * (n\omega_o cos(n\omega_o t))$$

expresión que puede ser simplificada a:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t)\right] = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)$$
$$+n\omega_o\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t) + n\omega_o\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t)$$

En la suma se tendría entonces:

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t) + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t))\right) =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t) - n\omega_o\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t) -$$
$$n\omega_o\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t) + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)$$
$$+n\omega_o\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t) + n\omega_o\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t)$$

de donde se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t) + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t))\right) =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t) + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)\right)$$

sustituyendo en la expresión inicial:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t)$$

$$+\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)dt\right) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t) + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)\right)$$

Observando el primer término se tendría:

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)dt = \frac{2}{T}[f(t) + A]_{T/2}^{T/2} = \frac{2}{T}\left[f\left(\frac{T}{2}\right) - f\left(\frac{-T}{2}\right)\right]$$

pero $f(T/2) = f(-T/2)$, entonces:

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)dt = 0$$

de manera que se obtiene:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)cos(n\omega_o t)dt * cos(n\omega_o t) + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)\right)$$

Ahora, si se mira la integral en el primer término, el que va con coseno, se obtendría:

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)cos(n\omega_o t)dt = \frac{2}{T}\left[(f(t)cos(n\omega_o t) + C)_{-T/2}^{T/2} + n\omega_o\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt\right]$$

El primer término se va a anular dado que $f(T/2) = f(-T/2)$ y $cos(x) = cos(-x)$, entonces usando la definición de los coeficientes de fourier se tiene:

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)cos(n\omega_o t)dt = \frac{2}{T}n\omega_o\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_o t)dt = n\omega_o b_n$$

La expresión inicial se reduce a:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\omega_o b_n cos(n\omega_o t) + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)sin(n\omega_o t)dt * sin(n\omega_o t)\right)$$

finalmente, el segundo término de la sumatoria es:

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)sin(n\omega_o t)dt = \frac{2}{T}\left[(f(t)sin(n\omega_o t) + C)_{-T/2}^{T/2} - n\omega_o\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_o t)dt\right]$$
$$= \frac{4}{T}f\left(\frac{T}{2}\right)sin\left(n\omega_o\frac{T}{2}\right) - n\omega_o a_n$$

entonces la expresión inicial queda:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\omega_o b_n cos(n\omega_o t) + (\frac{4}{T}f\left(\frac{T}{2}\right) sin\left(n\omega_o \frac{T}{2}\right) - n\omega_o a_n) sin(n\omega_o t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\omega_o b_n cos(n\omega_o t) + \frac{4}{T}f\left(\frac{T}{2}\right) sin\left(n\omega_o \frac{T}{2}\right) sin(n\omega_o t) - n\omega_o a_n sin(n\omega_o t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\omega_o b_n cos(n\omega_o t) + \frac{4}{T}f\left(\frac{T}{2}\right) sin\left(n\pi\right) sin(n\omega_o t) - n\omega_o a_n sin(n\omega_o t)\right)$$

con lo que queda demostrado:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(n\omega_o b_n cos(n\omega_o t) - n\omega_o a_n sin(n\omega_o t))$$

- Sea f(t) continua por tramos en el intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$ y sea $f(t+T) = f(t)$. Demostrar que la serie de Fourier se puede integrar término por término para obtener:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \frac{1}{2}a_o(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_o}[-b_n(cos(n\omega_o t_2) - cos(n\omega_o t_1)) + a_n(sin(n\omega_o t_2) - sin(n\omega_o t_1))]$$

Tomando $F(t+T) = F(t)$ y $f(t)$ continua por tramos se define $F(t)$ continua y periódica con periodo $T$ como:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau - \frac{1}{2}a_0 t$$

Con $F'(t)$ también continua:

$$F'(t) = f(t) - \frac{1}{2}a_0$$

De manera que para su expansión en serie de Fourier se tiene:

$$F(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n cos(n\omega_0 t) + \beta_n sin(n\omega_0 t))$$

Por consiguiente, se puede obtener $\alpha_n$ para $n \geq 1$ integrando por partes y utilizando la definición de los coeficientes de Fourier.

$$\alpha_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)cos(n\omega_0 t)dt$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega_0}F(t)sin(n\omega_0 t)\right]_{-T/2}^{T/2} - \frac{1}{n\omega_0}\int_{-T/2}^{T/2} F'(t)sin(n\omega_0 t)dt\right)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T}\left(\frac{1}{n\omega_0}sin\left(n\omega_0\left(\frac{T}{2}\right)\right)\left[F\left(\frac{T}{2}\right) - F\left(-\frac{T}{2}\right)\right] - \frac{1}{n\omega_0}\int_{-T/2}^{T/2} F'(t)sin(n\omega_0 t)dt\right)$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{n\omega_0}\cdot\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F'(t)sin(n\omega_0 t)dt$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{n\omega_0}\cdot\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[f(t) - \frac{1}{2}a_0\right]sin(n\omega_0 t)dt$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{n\omega_0}\cdot\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt + \frac{1}{n\omega_0}\cdot\frac{1}{T}a_0\int_{-T/2}^{T/2} sin(n\omega_0 t)dt$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{n\omega_0}\cdot\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt + \frac{1}{n\omega_0 T}a_0\left[-\frac{1}{n\omega_0}cos(n\omega_0 t + C)\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{n\omega_0}\cdot\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt + \frac{1}{n\omega_0 T}a_0\left[-\frac{1}{n\omega_0}cos\left(n\omega_0\left(\frac{T}{2}\right)\right) + \frac{1}{n\omega_0}cos\left(n\omega_0\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right]$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{n\omega_0}\cdot\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{n\omega_0}b_n$$

el coeficiente $\beta_n$ se puede calcular también integrando por partes y usando la definición de los coeficientes de Fourier:

$$\beta_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)sin(n\omega_o t)dt = \frac{2}{T}\left[\frac{-1}{n\omega_o}F(t)cos(n\omega_o t) + C\right]_{-T/2}^{T/2}$$
$$-\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F'(t)\frac{-1}{n\omega_o}sin(n\omega_o t)dt$$

teniendo en cuentra que $cos(x) = cos(-x)$, y utilizando la definición del coeficiente de Fourier:

$$\beta_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F'(t)\frac{1}{n\omega_o}sin(n\omega_o t)dt = \frac{1}{n\omega_o}a_n$$

reemplazando en la expresión para $F(t)$:

$$F(t) = \frac{1}{2}\alpha_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-b_n}{n\omega_o}cos(n\omega_o t) + \frac{a_n}{n\omega_o}sin(n\omega_o t)\right)$$

En la expresión inicial se definió la integral de 0 a t, esta se puede re definir en un intervalo de $t_1$ a $t_2$, lo que resulta en:

$$F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)d\tau - \frac{1}{2}a_o(t_2 - t_1)$$

de donde se obtiene:

$$F(t_2) - F(t_1) + \frac{1}{2}a_o(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)d\tau$$

al reemplazar en la expresión previa la expansión en serie de Fourier de la función F(t) se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\tau)d\tau = \frac{1}{2}a_o(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-b_n}{n\omega_o}cos(n\omega_o t_2) + \frac{a_n}{n\omega_o}sin(n\omega_o t_2)\right) -$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-b_n}{n\omega_o}cos(n\omega_o t_1) + \frac{a_n}{n\omega_o}sin(n\omega_o t_1)\right) = \frac{1}{2}a_o(t_2 - t_1) +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_o}\left(-b_n cos(n\omega_o t_2) + a_n sin(n\omega_o t_2) + b_n cos(n\omega_o t_1) - a_n sin(n\omega_o t_1)\right)$$

y luego de cambiar $\tau$ por $t$ se obtiene finalmente:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \frac{1}{2}a_o(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_o}\left(b_n[-cos(n\omega_o t_2) + b_n cos(n\omega_o t_1)] + a_n[sin(n\omega_o t_2) - sin(n\omega_o t_1)]\right)$$

con lo que queda demostrada la expresión inicial.

## 2. Presentación de funciones

Encontrar (analíticamente) la serie de Fourier de la función $f(t) = t$ para el intervalo $(-\pi, \pi)$ y $f(t + 2\pi) + f(t)$. Animar los primeros 50 armónicos usando el paquete *Camera*.

$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}sin(nt)$$

La serie de Fourier de la función f(t)=t se puede obtener de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(n\pi t/L) + b_n sin(n\pi t/L))$$

donde los coeficientes se calculan con las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt,$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)cos(n\pi t/L)dt,$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)sin(n\pi t/L)dt.$$

El importante mencionar que el periodo de la función se toma como $T = 2\pi$, de manera que se cumple que $f(t + 2\pi) = f(t)$ y por lo tanto, en las ecuaciones anteriores, $L = \pi$. El primer coeficiente queda:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tdt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2}\right) = 0.$$

El segundo coeficiente queda:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tcos(n\pi t/\pi)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tcos(nt)dt,$$

integrando por partes se obtiene:

$$u = t \qquad dv = cos(nt)dt$$
$$du = 1 \qquad v = \frac{1}{n}sin(nt)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}tsin(nt)|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} sin(nt)dt\right).$$

Para resolver esta expresión se utilizan algunas propiedades de las funciones seno y coseno:

- $sin(n\pi) = 0$
- $cos(-x) = cos(x)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\pi sin(n\pi) - \frac{1}{n}\pi sin(n\pi) + \frac{1}{n^2}cos(nt)|_{-\pi}^{\pi}\right)$$
$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}\left(cos(n\pi) - cos(-n\pi)\right) = 0.$$

El tercer coeficiente queda:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(n\pi t/\pi)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(nt)dt,$$

integrando por partes:

$$u = t \qquad dv = sin(nt)dt$$
$$du = 1 \qquad v = -\frac{1}{n}cos(nt)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}tcos(nt)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nt)dt\right).$$

Para resolver esta expresión se utilizan algunas propiedades de las funciones seno y coseno:

- $sin(n\pi) = 0$
- $cos(n\pi) = (-1)^n$
- $cos(-x) = cos(x)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi cos(n\pi) - \frac{1}{n}\pi cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}sin(nt)|_{-\pi}^{\pi}\right)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}sin(n\pi) - \frac{1}{n^2}sin(-n\pi)\right)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}cos(n\pi)\right)$$
$$b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$$
$$b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

Entonces la serie de Fourier resultante es:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n-1}sin(nt)$$

## 3. Función $\zeta$ de Riemann

- Integrar (analítcamente) la serie de Fourier de $f(t) = t^2$ en el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$ y $f(t+2\pi) = f(t)$.

  La serie de Fourier de la función $f(t) = t^2$ se puede obtener de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(n\pi t/L) + b_n sin(n\pi t/L))$$

  donde los coeficientes se calculan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt, \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)cos(n\pi t/L)dt, \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)sin(n\pi t/L)dt. \end{aligned}$$

  El importante mencionar que el periodo de la función se toma como $T = 2\pi$, de manera que se cumple que $f(t+2\pi) = f(t)$ y por lo tanto, en las ecuaciones anteriores, $L = \pi$. El primer coeficiente queda:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}.$$

  El segundo coeficiente queda:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 cos(n\pi t/\pi)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 cos(nt)dt,$$

  integrando por partes se obtiene:

$$\begin{aligned} u &= t^2 & dv &= cos(nt)dt \\ du &= 2t & v &= \frac{1}{n}sin(nt) \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}t^2 sin(nt)|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(nt)dt\right).$$

  integrando nuevamente por partes la integral de la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= sin(nt)dt \\ du &= 1 & v &= -\frac{1}{n}cos(nt) \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}t^2 sin(nt)|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\left(-\frac{1}{n}tcos(nt)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nt)dt\right)\right).$$

  Para resolver esta expresión se utilizan algunas propiedades de las funciones seno y coseno:

  - $sin(n\pi) = 0$

- $cos(n\pi) = (-1)^n$
- $cos(-x) = cos(x)$

$$
\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}t^2 sin(nt)|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\left(-\frac{1}{n}tcos(nt)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nt)dt\right)\right) \\
a_n = -\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{1}{n}tcos(nt)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nt)dt\right) \\
a_n = -\frac{2}{n^2\pi}\left(-2\pi cos(n\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} cos(nt)dt\right) \\
a_n = -\frac{2}{n^2\pi}\left(-2\pi(-1)^n + \frac{1}{n}sin(nt)|_{-\pi}^{\pi}\right) \\
a_n = -\frac{2}{n^2\pi}\left(-2\pi(-1)^n\right) \\
a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n
\end{aligned}
$$

El tercer coeficiente queda:

$$
b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 sin(n\pi t/\pi)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 sin(nt)dt,
$$

integrando por partes:

$$
\begin{aligned}
u = t^2 \qquad dv = sin(nt)dt \\
du = 2t \qquad v = -\frac{1}{n}cos(nt)
\end{aligned}
$$

$$
b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}t^2 cos(nt)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} tcos(nt)dt\right).
$$

integrando nuevamente por partes:

$$
\begin{aligned}
u = t \qquad dv = cos(nt)dt \\
du = 1 \qquad v = \frac{1}{n}sin(nt)
\end{aligned}
$$

$$
b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}t^2 cos(nt)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}tsin(nt)|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} sin(nt)dt\right)\right).
$$

Para resolver esta expresión se utilizan algunas propiedades de las funciones seno y coseno:

- $sin(n\pi) = 0$
- $cos(n\pi) = (-1)^n$
- $cos(-x) = cos(x)$

$$
\begin{aligned}
b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}t^2 cos(nt)|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} sin(nt)dt\right) \\
b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}t^2 cos(nt)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n^3}cos(nt)|_{-\pi}^{\pi}\right) \\
b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(\pi)^2 cos(n\pi) + -\frac{1}{n}(\pi)^2 cos(n\pi) + \frac{2}{n^3}cos(n\pi) - \frac{2}{n^3}cos(n\pi)\right) = 0
\end{aligned}
$$

Entonces la serie de Fourier resultante es:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cos(nt).$$

Gracias a la demostración del primer punto, se puede realizar la integración directa de la serie de Fourier, de manera que se obtiene:

$$\int t^2 dt = \int \frac{\pi^2}{3} dt + \int 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cos(nt) dt$$
$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} t + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} sin(nt).$$

- Usando dicha integral y la identidad de Parseval, pensar en un programa para estimar numéricamente la función $\zeta(6)$ de Riemman:

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

El resultado de la integral de la función del punto anterior puede expresarse también como:

$$\frac{t^3}{3} - \frac{\pi^2 t}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} sin(nt).$$

De la expresión anterior se puede definir una función con su respectiva serie de Fourier:

$$\begin{array}{rr} Función & \dfrac{t^3}{12} - \dfrac{\pi^2 t}{12} \\ Serie \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} sin(nt) & b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3} \end{array}$$

Es evidente que la nueva función es impar, y por lo tanto solo tendrá coeficientes asociados a funciones seno.

La identidad de Parseval se define como:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)^2 = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Reemplazando la información de la nueva función se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{t^3}{12}-\frac{\pi^2 t}{12}\right)^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^3}\right)^2$$

$$\frac{1}{2\pi(12)^2}\int_{-\pi}^{\pi}(t^6-2\pi^2 t^4+\pi^4 t^2)dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\frac{1}{2\pi(12)^2}\left(\frac{t^7}{7}-2\pi^2\frac{t^5}{5}+\pi^4\frac{t^3}{3}\right)|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\left(\frac{t^7}{2016\pi}-\frac{\pi t^5}{720}+\frac{\pi^3}{t}^3 864\right)|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\frac{\pi^6}{1890} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

# 4. Derivada espectral

Estime la derivada espectral en 100 puntos equi-espaciados del intervalo $(-2\pi, 2\pi)$ de la función:

$$f(x) = e^{-0{,}1x}sin(x)$$

donde el paso de derivación es $\Delta x = 100/(4\pi)$.
Haga la comparación grafica entre la derivada exacta, la derivada derecha y la derivada espectral.
La derivada teórica es:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-0{,}1x}sin(x)\right) = e^{-0{,}1x}cos(x) - 0{,}1e^{-0{,}1x}sin(x)$$

Por otra parte, la derivada espectral es un método basado en la transformada de Fourier de una función:

$$\frac{df(x)}{dx} = F^{-1}[-i\omega F[f(x)]]$$

# 5. Manchas solares

Descargue los datos de las manchas solares desde 1600. https://github.com/asegura4488/DataBase/blob/main/MetodosComputacionales/ManchasSolares.dat. La columna 1 es el año, la segunda es el mes y la tercera es el número de manchas. Para encontrar el periodo de manchas solares desde 1900, sugiero el siguiente enfoque:

1. Filtrar los datos a partir del año 1900.
2. Quitar el valor medio de los datos para que la frecuencia este centrada en cero.
3. Calcular la transformada rápida de Fourier (np.fft.fft) y las frecuencias (np.fft.fftfreq).
4. Encontrar la frecuencia dominante por año, es decir, solo dejar la frecuencia fundamental en el espectro de frecuencias.
5. Usar este valor para encontrar el periodo por año.
6. Reproducir la Figura [1].

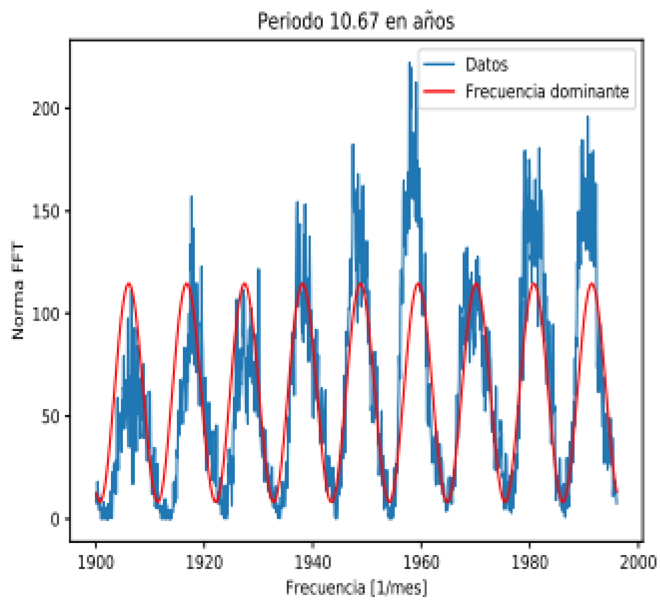


Figura 1: Frecuencia de manchas solares despu´es de 1900.