Tarea 3

Maria Fernanda Nariño
Karol Rivera

15 de febrero de 2022

1. Colisiones 2D de duración finita

Un modelo de esfera dura (Landau-Lifshitz volumen 7) para entender clásicamente la interacción partícula a partícula es:

$$\vec{f}(\vec{r_1}, \vec{r_2}) = \begin{cases} K\,|\vec{r_1} - \vec{r_2}|\,\hat{n} \text{ si } |\vec{r_1} - \vec{r_2}| < R_1 + R_2 \\ 0 \text{ En otro caso.} \end{cases} \tag{1}$$

donde $R1, R2$ son los radios de las esferas y $\vec{n}$ es el vector normal al plano de contacto. Usar $K = 100N/m^3$.

- ¿Cuál es el significado físico de K?

  Analizando las dimensiones de la constante K se puede deducir que esta representa una fuerza por unidad de volumen. Esta relación describe una medida llamada peso específico, por lo cual la fuerza estará dada por la gravedad. Es decir, $\gamma = \frac{m \cdot g}{V}$. A partir de esto también se puede comparar con la densidad del material, ya que $\rho = \frac{m}{V}$, entonces, $\gamma = \rho g$. En el caso de las esferas rebotando e interactuando entre si, este valor puede representar la presión hidrostática o deformaciones que estas soportan.

- ¿Es conservativa la fuerza?

  La fuerza es conservativa ya que la energía mecánica debería conservarse en el sistema. La acción de la fuerza genera una variación del momento, entonces se produce un cambio en la energía potencial y un cambio en la energía cinética, que en conjunto deberían mantener la energía mecánica constante.

2. Termodinámica

Un cilindro cerrado está separado por un pistón móvil sin fricción. La sección (1) de la izquierda contiene un mol de gas ideal monoatómico a $400K$. La sección (2) de la derecha también contiene un mol de gas monoatómico a una temperatura desconocida. El pistón se encuentra en equilibrio cerca del lado derecho a una longitud de 1/3 de la longitud total. Un estudiante de Métodos 2 conecta el lado derecho y el izquierdo con un alambre de cobre de conductividad $k = 389{,}6$, sección transversal de $A = 0{,}01m^2$ y longitud total de $l = 0{,}30m$, permitiendo el flujo de calor entre ambas secciones.

- Encuentre la temperatura de equilibrio de la sección derecha antes de conectar el alambre de cobre ($T_0^2 = 200K$).

  A partir del enunciado se tienen los volúmenes de cada sección del cilindro, al igual que sus temperaturas iniciales:

$$V_o^1 = \frac{2}{3}L$$
$$V_o^2 = \frac{1}{3}L$$
$$T_o^1 = 400K$$
$$T_o^2 = 200K$$

Para que el sistema esté en equilibrio debe cumplir que $P_o^1 = P_o^2$ y al hacer uso de un gas ideal se puede definir la presión como:

$$P_f = \frac{nRT_f}{V_f} \Rightarrow \frac{RT_f^1}{V_f^1} = \frac{RT_f^2}{V_f^2}$$

Dado que se trata de un sistema aislado se debe cumplir que:

$$U_1^f + U_2^f = U_1^o + U_2^o$$

La energía interna de un gas ideal se define como:

$$\begin{aligned} U &= nC_vT \\ n = 1 \quad C_v = \frac{3}{2}R \quad U &= \frac{3}{2}RT \end{aligned}$$

entonces la ecuación para la energía genera:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}RT_1^f + \frac{3}{2}RT_2^f &= \frac{3}{2}RT_1^o + \frac{3}{2}RT_2^o \\ T_1^f + T_2^f &= T_1^o + T_2^o \end{aligned}$$

Para alcanzar el equilibrio termodinámico se tiene que tener un mínimo en la energía y un máximo en la entropía, de manera que se cumpla que los sistemas evolucionan para tener el mínimo valor de energía y que la entropía tiende a aumentar.

- Considerando que no se realiza trabajo y que el proceso es lo suficientemente lento, use la primera ley de la termodinámica y la ley de transferencia de Fourier para encontrar:

$$\begin{aligned} nc_v\frac{dT_1}{dt} &= \frac{-kA}{l}(T_1 - T_2) \\ nc_v\frac{dT_2}{dt} &= \frac{kA}{l}(T_1 - T_2) \end{aligned}$$

Por primera ley de la termodinámica se tiene que:

$$dU = dQ - dW$$

Debido a que se están utilizando gases ideales este diferencial de energía también está dado por:

$$dU = nc_vdT$$

Sabiendo que no se realiza trabajo durante este proceso la relación se reduce a:

$$\begin{aligned} dU &= dQ \\ \Rightarrow dQ &= nc_vdT \end{aligned}$$

Por otro lado, la ley de transferencia de Fourier por conducción está definida como:

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= \frac{kA}{l}(T_1 - T_2) \\
nc_v\frac{dT}{dt} &= \frac{kA}{l}(T_1 - T_2)
\end{aligned}
$$

Como la sección (1) pierde calor su transferencia de calor será negativa. De esta forma se obtienen el par de ecuaciones definiéndolas para cada sección del cilindro:

$$
\begin{aligned}
nc_v\frac{dT_1}{dt} &= -\frac{kA}{l}(T_1 - T_2) \\
nc_v\frac{dT_2}{dt} &= \frac{kA}{l}(T_1 - T_2)
\end{aligned}
$$

- Encontrar la solución analítica del sistema de ecuaciones:

  Se resuelve utilizando el método de operadores y determinante Escribiendo las ecuaciones en términos de operadores:

$$
\begin{aligned}
DT_1 &= -C(T_1 - T_2) \\
DT_2 &= C(T_1 - T_2)
\end{aligned}
$$

donde D es el operador derivada con respecto al tiempo $\frac{d}{dt}$.

Reescribiendo las ecuaciones se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(D + C)T_1 - CT_2 &= 0 \\
-CT_1 + (D + C)T_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Ese sistema tiene el siguiente determinante asociado:

$$
\begin{vmatrix}
D + C & -C \\
-C & D + C
\end{vmatrix}
$$

el cual nos va a dar el operador diferencial aplicable a las variables T_1 y T_2, y que desacopla el sistema, generando dos ecuaciones diferenciales de segundo orden.

$$
\begin{aligned}
D^2 + 2DC + C^2 - C^2 &= 0 \\
D^2 + 2DC &= 0
\end{aligned}
$$

El nuevo sistema es entonces:

$$
\begin{aligned}
D^2T_1 + 2CDT_1 &= 0 \\
D^2T_2 + 2CDT_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones se resuelven mediante polinomio característico. La solución para una será válida para ambas, considerando constantes distintas, porque tienen la misma ecuación diferencial pero variable diferente.

$$\lambda^2 + 2C\lambda = 0$$
$$\lambda = -2C$$

Entonces las soluciones son:

$$T_1 = A_1 e^{-2Ct} + D_1$$
$$T_2 = A_2 e^{-2Ct} + D_2$$

Para determinar las constantes hay que notar que se tienen 2 condiciones iniciales para el sistema, pero 4 constantes. Dado que las soluciones vienen de un sistema acoplado, para solucionar las constantes hay que tener en cuenta que existirá una relación entre constantes. Dicha relación se obtiene usando una de las ecuacione diferenciales iniales:

$$DT_1 = -C(T_1 - T_2)$$
$$-2CA_1 e^{-2Ct} = -CA_1 e^{-2Ct} - CD_1 + CA_2 e^{-2Ct} + CD_2$$

de donde se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$A_2 = -A_1$$
$$D_1 = D_2$$

Al reemplazar estas condiciones en las soluciones encontradas se obtiene finalmente:

$$T_1 = A_1 e^{-2Ct} + D_1$$
$$T_2 = -A_1 e^{-2Ct} + D_1$$

Se toman las condiciones iniciales de acuerdo con la información del problema $T_1(0) = 400K$ y $T_2(0) = 200K$:

$$400 = A_1 + D_1$$
$$200 = -A_1 + D_1$$

De donde se obtienen las constantes:

$$A_1 = 100$$
$$D_1 = 300$$

Y las ecuaciones son entonces:

$$T_1 = 100e^{-2Ct} + 300$$
$$T_2 = -100e^{-2Ct} + 300$$

- ¿Cual es el límite termodináico de ambas variables?

  En el límite termodinámico ambas temperaturas tienden a ser la misma, de manera que el sistema ha alcanzado equilibrio térmico y ya no hay flujo de energía de un gas a otro.

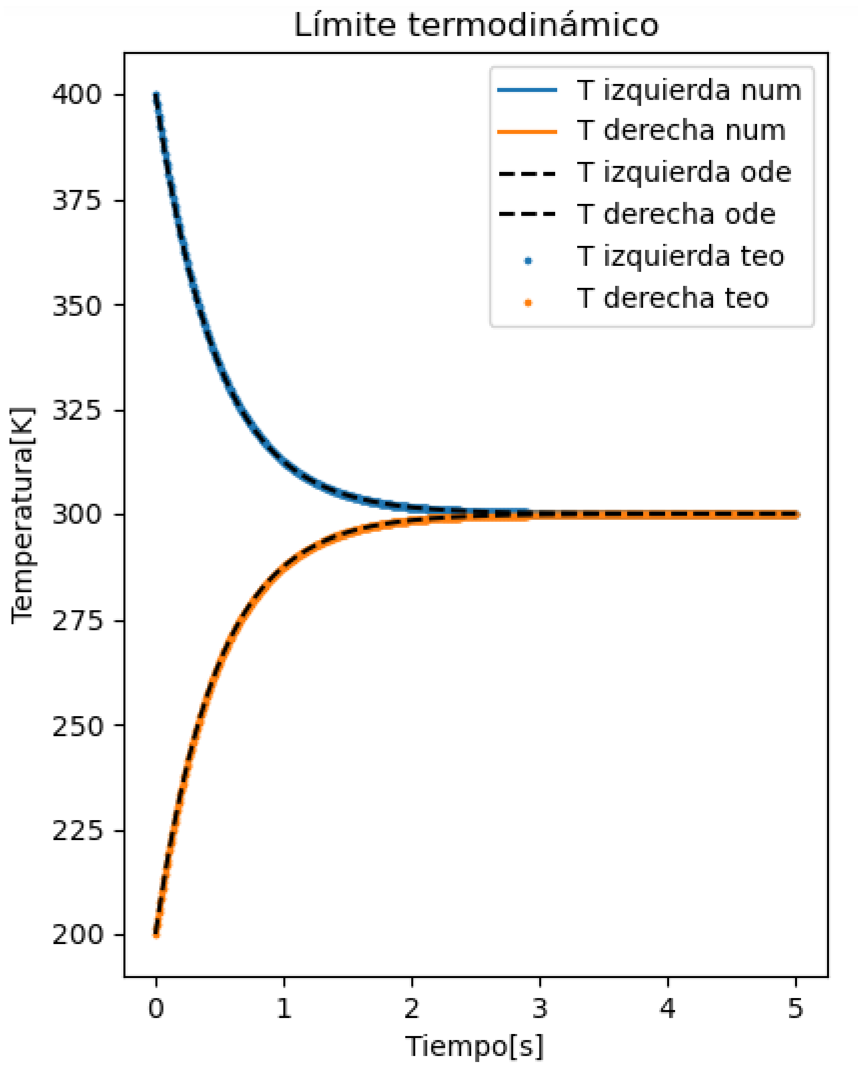

Figura 1: Límite termodinámico para T_1 y T_2. Las condiciones iniciales se tomaron como $T_1(0) = 400K$ y $T_2(0) = 200K$.