Autor: Karolina Tatarczyk

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 8

Metoda różnic skończonych

Nieustalony przepływ ciepła (schemat jawny)

Napisać procedurę realizującą schemat jawny metody różnic skończonych dla zagadnienia nieustalonego przepływu ciepła:

$$c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, t^*),$$

z warunkiem początkowym:

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

oraz warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju:

$$u(a, t) = u_a(t),$$
$$u(b, t) = u_b(t).$$

Jako argument procedury należy podać liczbę nx węzłów siatki oraz czas końca t^*, natomiast krok czasu dt należy wyznaczyć (w programie) tak aby zapewnić stabilność obliczeń.

a) Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć rozwiązanie przybliżone zagadnienia, w którym:

$$a = 1, \; b = 2, \; t^* = 1,$$
$$c = 1, \; \rho = 1, \; \lambda = 1,$$

$$u_0(x) = \frac{x^3}{6},$$

$u_a(t) = t + \frac{1}{6}$,

$u_b(t) = 2\,t + \frac{4}{3}$.

Przedział [a,b] podzielić na 10 części.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne, którym jest funkcja $u(x,\ t) = \frac{x^3}{6} + x\,t$, oraz uzyskane rozwiązania przybliżone w chwili końcowej. Wykreślić także błędy uzyskanego rozwiązania przybliżonego w chwili końcowej.

Rozwiązanie

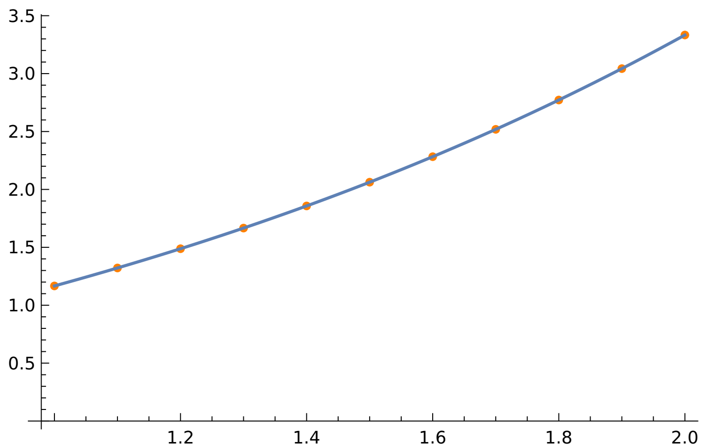
In[37]:=
```
MRS[A_, B_, TG_, Cons_, Ro_, Lambda_, U0_, UA_, UB_, U_, number_] :=
 Module[{a = A, b = B, tg = TG, c = Cons, ro = Ro,
   lambda = Lambda, u0 = U0, ua = UA, ub = UB, u = U , n = number},
h = (b - a) / n;
tau = c * ro * h * h / (2 * lambda);
m = Ceiling[tg / tau];
dt = tg / m;
TableX = Table[a + i * h, {i, 0, n}];
TableT = Table[k * dt, {k, 0, m}];
matrix = Table[Table[0, {i, 1, n + 1}], {j, 1, m + 1}];

For[k = 1, k ≤ m + 1, k++,
matrix[[k, 1]] = ua[TableT[[k]]];
matrix[[k, n + 1]] = ub[TableT[[k]]];
];
For[i = 1, i ≤ n + 1, i++, matrix[[1, i]] = u0[TableX[[i]]]];
For[k = 2, k ≤ m + 1, k++,
For[i = 2, i ≤ n, i++,
matrix[[k, i]] = matrix[[k - 1, i]] + lambda * dt / (c * ro * h * h) *
          (matrix[[k - 1, i - 1]] - 2 * matrix[[k - 1, i]] + matrix[[k - 1, i + 1]]);
];
];
result = Table[Table[{TableX[[i]], TableT[[j]], matrix[[j, i]]}, {i, 1, n + 1}], {j, 1, m + 1}];
end = Table[{TableX[[i]], matrix[[m + 1, i]]}, {i, 1, n + 1}];
Return[end]]
```

Wynik rozwiązania przybliżonego i rozwiązania dokładnego

In[115]:=

```
a = 1;
b = 2;
tg = 1;
c = 1;
ro = 1;
lambda = 1;
u0[x_] = x^3/6;
ua[t_] = t + 1/6;
ub[t_] = 2 * t + 4/3;
n = 10;
u[x_, t_] = x^3/6 + x * t;
solution = MRS[a, b, tg, c, ro, lambda, u0, ua, ub, u, n];
p1 = ListPlot[solution, PlotStyle → Orange];
p2 = Plot[u[x, 1], {x, 1, 2}];
Show[p1, p2]
```

Out[129]=

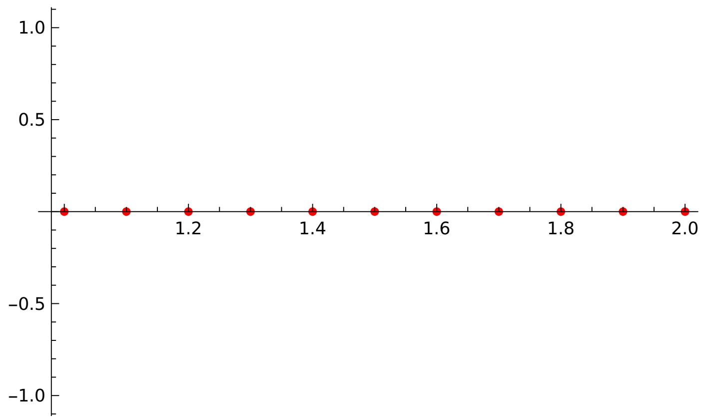


Uzyskany błąd rozwiązania

In[281]:=

```
X = Transpose[solution][[1]];
Y = Transpose[solution][[2]];
resultPoints = Table[u[x, 1] /. {x → X[[i]]}, {i, 1, Length[X]}];
dokladneKoncowe = Table[u[x, 1.], {x, 1, 2, 0.1}];
bladbezwzgledny = Abs[Y - resultPoints];
ListPlot[Transpose[{X, bladbezwzgledny}], PlotStyle → Red, PlotRange → All]
```

Out[286]=



In[289]:=

In[55]:=

Out[54]=

```
{1, 4, 9, 16}
```