Autor: Karolina Tatarczyk

Metody numeryczne (Matematyka)

Projekt 8

Całkowanie numeryczne. Kwadratury Newtona-Cotesa

Napisać procedurę realizującą algorytm złożonej kwadratury Simpsona.

a) Policzyć całkę z funkcji $f(x) = \sin(\sin x)$ w przedziale $(0, \pi)$ z dokładnością 10^{-3}.

b) Policzyć pole obszaru pomiędzy krzywą $f(x) = \exp(-x^2)$ a osią OX w przedziale $(-5, 5)$ z dokładnością 10^{-5}.

Rozwiązanie

Program

In[3]:=
```
Clear[kwadratura]
kwadratura[f_, a_, b_, m_] := Module[{delta = (b - a) / m, s1 = 0, s2 = 0, s, w},
For[i = 1, i ≤ m - 1, i += 2,
s1 += f[a + i * delta] ];
For[i = 2, i ≤ m - 2, i += 2,
s2 += f[a + i * delta]];
s1 *= 4;
s2 *= 2;
s = s1 + s2 + f[a] + f[b];
w = (delta * s) / 3;
Return[w]
]
```

Przykład testowy

In[5]:=
```
f[x_] := x ^ 3 - x ^ 2;
Print["Liczę przybliżoną wartość całki na przedziale [-1,1] :∫" f[x]]

Print["Wynik:"]
kwadratura[f, -1, 1, 4]
```

Liczę przybliżoną wartość całki na przedziale [-1,1] : $\int(-x^2+x^3)$

Wynik:

Out[8]= $-\frac{2}{3}$

Zadanie a)

```
In[9]:= Clear[g, a1, b1, g4, mm, m, M, prawa, R, a, b]
g[x_] := Sin[Sin[x]];
a1 := 0;
b1 := Pi;
d1 := 10^(-3);
Print[
 "By obliczyć potrzebną ilość podprzedziałów liczę 4 pochodną funkcji  " g[x]]
g4 = D[g[x], {x, 4}]
Print["Na wykresie przedstawiony został wykres
   wartości bezwzględnej pochodnej oraz funkcji podcałkowej"]
Plot[{Abs[g4], g[x]}, {x, a1, b1}, PlotTheme → "Detailed"]
Print["Wyszukuję wartość maksymalną:"]
mm1 = NMaximize[{Abs[g4], a1 ≤ x && x ≤ b1}, x]
Print["Wyłuskuję samą wartość maksymalną"]
M1 = mm1[[1]]
Print["Wyliczam wartość 'm' z wzoru na oszacowanie błędu:"]
prawa = (((b1 - a1)^5 * M1 * d1^(-1)) / 180)^(1 / 4)
Print["Ponieważ m musi być całkowitą
   liczbą parzystą, nakładam na nią kolejną funkcję"]

m1 = Ceiling[prawa] + 1
Print["Mając już ilość podprzedziałów mogę oszacować wartość całki ∫" g[x]]

kwadratura[g, a1, b1, m1] // N
```

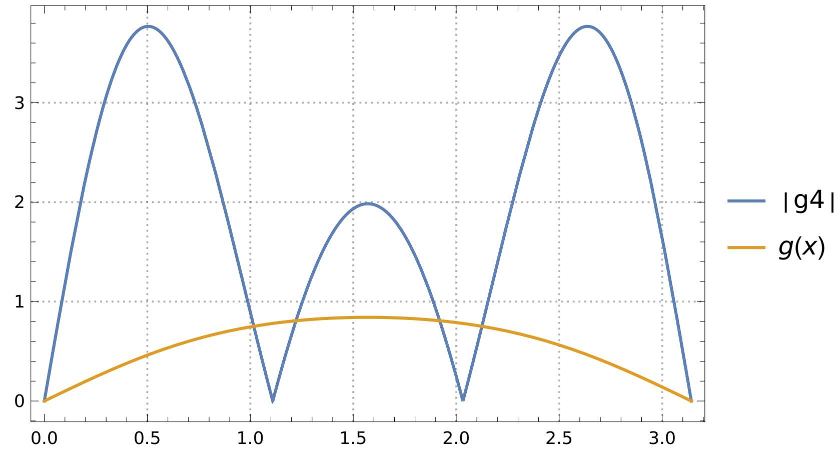
By obliczyć potrzebną ilość podprzedziałów liczę 4 pochodną funkcji Sin[Sin[x]]

Out[15]=

Cos[Sin[x]] × Sin[x] + 6 Cos[x]^2 Cos[Sin[x]] × Sin[x] +
 4 Cos[x]^2 Sin[Sin[x]] + Cos[x]^4 Sin[Sin[x]] - 3 Sin[x]^2 Sin[Sin[x]]

Na wykresie przedstawiony został wykres
  wartości bezwzględnej pochodnej oraz funkcji podcałkowej

Out[17]=



Wyszukuję wartość maksymalną:

Out[19]=

{3.76783, {x → 2.63719}}

Wyłuskuję samą wartość maksymalną

Out[21]=

3.76783

Wyliczam wartość 'm' z wzoru na oszacowanie błędu:

Out[23]=

8.94627

Ponieważ m musi być całkowitą liczbą parzystą, nakładam na nią kolejną funkcję

Out[25]=

10

Mając już ilość podprzedziałów mogę oszacować wartość całki ∫Sin[Sin[x]]

Out[27]=

1.78672

Zadanie b)

In[28]:=
```
h[x_] := Exp[-x^2];
a2 := -5;
b2 := 5;
d2 := 10^(-5);
Print[
 "By obliczyć potrzebną ilość podprzedziałów liczę 4 pochodną funkcji  " h[x]]
h4 = D[h[x], {x, 4}]
Print["Na wykresie przedstawiony został wykres
   wartości bezwzględnej pochodnej oraz funkcji podcałkowej"]
Plot[{Abs[h4], h[x]}, {x, a2, b2}, PlotTheme → "Detailed", PlotRange → All]
Print["Wyszukuję wartość maksymalną:"]
mm2 = NMaximize[{Abs[h4], a2 ≤ x && x ≤ b2}, x]
Print["Wyłuskuję samą wartość maksymalną"]
M2 = mm2[[1]]
Print["Wyliczam wartość 'm' z wzoru na oszacowanie błędu:"]
prawa2 =  (((b2 - a2)^5 * M2 * d2^(-1)) / 180)^(1/4)
Print["Ponieważ m musi być całkowitą
   liczbą parzystą, nakładam na nią kolejną funkcję"]
m2 = Ceiling[prawa2] + 1
Print["Mając już ilość podprzedziałów mogę oszacować wartość całki ∫" h[x]]
kwadratura[h, a2, b2, m2] // N
```

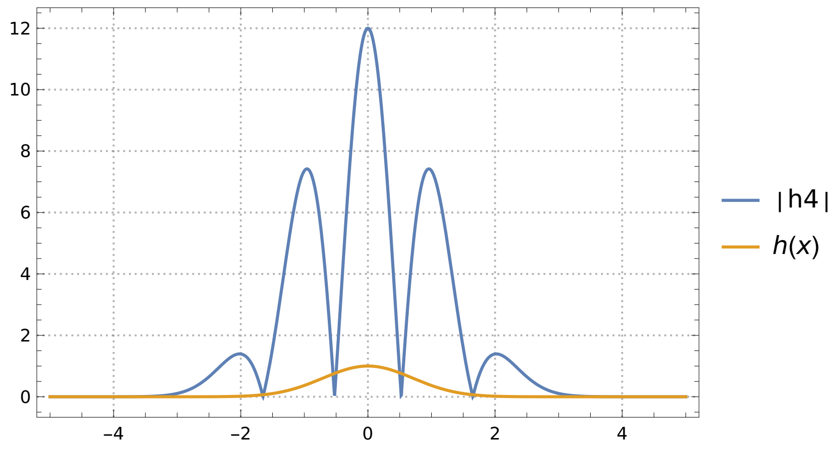
By obliczyć potrzebną ilość podprzedziałów liczę 4 pochodną funkcji e^{-x^2}

Out[33]=

$$12\, e^{-x^2} - 48\, e^{-x^2}\, x^2 + 16\, e^{-x^2}\, x^4$$

Na wykresie przedstawiony został wykres
  wartości bezwzględnej pochodnej oraz funkcji podcałkowej

Out[35]=



Wyszukuję wartość maksymalną:

Out[37]=

$\{12., \{x \to -7.94626 \times 10^{-11}\}\}$

Wyłuskuję samą wartość maksymalną

Out[39]=

12.

Wyliczam wartość 'm' z wzoru na oszacowanie błędu:

Out[41]=

160.686

Ponieważ m musi być całkowitą liczbą parzystą, nakładam na nią kolejną funkcję

Out[43]=

162

Mając już ilość podprzedziałów mogę oszacować wartość całki $\int e^{-x^2}$

Out[45]=

1.77245