

Autor: Karolina Tatarczyk

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 7

Metoda różnic skończonych

Napisać procedurę realizującą metodę różnic skończonych dla zagadnienia brzegowego liniowego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego. Działanie procedury przetestować na przykładzie podanym na wykładzie. Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć rozwiązanie przybliżone zagadnienia brzegowego:

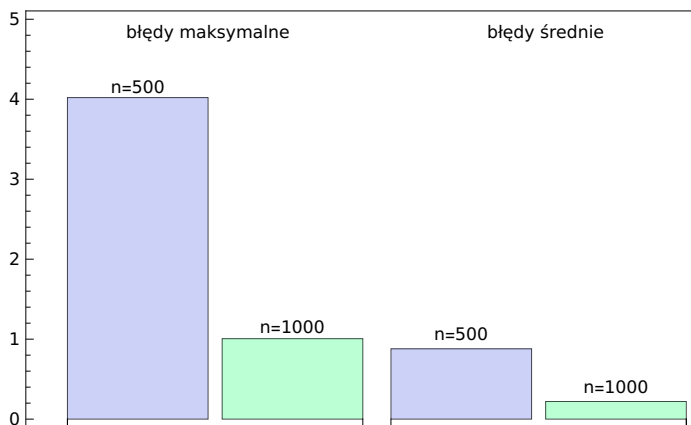
$$\begin{cases} m y''(x) + k y'(x) + s y(x) = 0, & x \in [0, 10], \\ y(0) = 1, y(10) = 1, \end{cases}$$

Obliczenia wykonać dla dwóch zestawów danych:

- a) $m = 1, k = 3, s = 2$;
- b) $m = 5, k = 2, s = 10$.

Za każdym razem obliczenia wykonać dla 500 i 1000 kroków.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązania przybliżone. Wykreślić także, na jednym rysunku, błędy uzyskanych rozwiązań przybliżonych. Policzyc ponadto błędy maksymalne oraz średnie dla obu siatek oraz zestawić je na wykresie słupkowym, np. postaci:



Rozwiązanie

In[411]:=

```
ClearAll["Global`*"]
FDM[alpha1_, alpha2_, beta1_, beta2_, A_, B_, Ta_, Tb_, M_, K_, S_, Dv_, number_] :=
  Module[{m = M, k = K, s = S, a1 = alpha1, a2 = alpha2, b1 = beta1,
    b2 = beta2, a = A, b = B, ta = Ta, tb = Tb, n = number, d = Dv, bresult},
    h = (b - a) / n;
    X = Table[a + i * h, {i, 0, n}];
    vectorA = Table[m[X[[i]]], {i, 1, n}];
    vectorB = Table[k[X[[i]]], {i, 1, n}];
    vectorC = Table[s[X[[i]]], {i, 1, n}];
    vectorD = Table[d[X[[i]]], {i, 1, n}];
    (*Uy=bresult*)
    bresult = {2 * h * ta};
    For[i = 2, i <= n, i++, AppendTo[bresult, 2 * h * h * vectorD[[i]]];
    AppendTo[bresult, 2 * h * tb];
    Umatrix = Table[Table[0, {i, 1, n + 1}], {i, 1, n + 1}];
    Umatrix[[1, 1]] = 2 * h * a1 - 3 * a2;
    Umatrix[[1, 2]] = 4 * a2;
    Umatrix[[1, 3]] = -a2;
    Umatrix[[n + 1, n - 1]] = b2;
    Umatrix[[n + 1, n]] = -4 * b2;
    Umatrix[[n + 1, n + 1]] = 2 * h * b1 + 3 * b2;
    For[i = 2, i <= n, i++,
    Umatrix[[i, i - 1]] = 2 * vectorA[[i]] - h * vectorB[[i]];
    Umatrix[[i, i]] = 2 * h * h * vectorC[[i]] - 4 * vectorA[[i]];
    Umatrix[[i, i + 1]] = 2 * vectorA[[i]] + h * vectorB[[i]];
    ];
    result = LinearSolve[Umatrix, bresult];

    Return[Transpose[{X, result}]]
  ]
```

Example - wykład

In[603]:=

```
alpha1 = 1;  
alpha2 = 1;  
beta1 = 1;  
beta2 = 1;  
A = 0;  
B = 4;  
Ta = 1;  
Tb = 25;  
M[x_] = x * x;  
K[x_] = -3 * x;  
S[x_] = 5;  
Dv[x_] = x * x + 5;  
number = 4;  
r = FDM[alpha1, alpha2, beta1, beta2, A, B, Ta, Tb, M, K, S, Dv, number]
```

Out[616]:=

```
{{0, 1}, {1, 2}, {2, 5}, {3, 10}, {4, 17}}
```

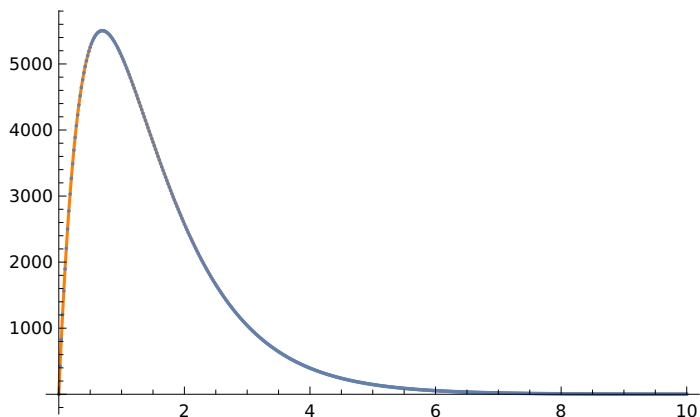
Example a)

n=500

In[668]:=

```
alpha1 = 1;
alpha2 = 0;
beta1 = 1;
beta2 = 0;
A = 0;
B = 10;
Ta = 1;
Tb = 1;
M[x_] = 1;
K[x_] = 3;
S[x_] = 2;
Dv[x_] = 0;
a500 = FDM[alpha1, alpha2, beta1, beta2, A, B, Ta, Tb, M, K, S, Dv, 500];
p500 = ListPlot[a500];
fa[x_] = DSolve[{y'[x] + 3*y'[x] + 2*y[x] == 0, y[0] == 1, y[10] == 1}, y[x], x][[1, 1, 2]];
asolution = Plot[fa[x], {x, 0, 10}, PlotStyle -> Orange];
Show[asolution, p500]
```

Out[684]=



In[685]:=

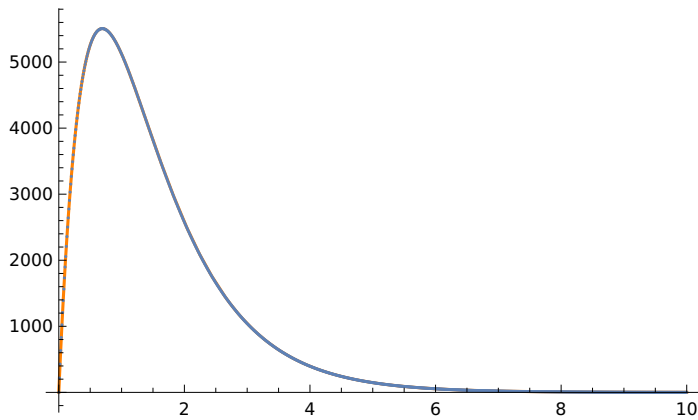
```
ListX500 = Transpose[a500][[1]];
aListY500 = Transpose[a500][[2]];
aresultPoints500 = Table[fa[x] /. {x -> ListX500[[i]]}, {i, 1, Length[ListX500]}];
abladbezwzglyedny500 = Abs[aListY500 - aresultPoints500];
abar500 = ListPlot[Transpose[{ListX500, abladbezwzglyedny500}],
  PlotStyle -> Orange, Filling -> Axis];
```

n=1000

In[690]:=

```
a1000 = FDM[alpha1, alpha2, beta1, beta2, A, B, Ta, Tb, M, K, S, Dv, 1000];
Show[asolution, ListPlot[a1000]]
```

Out[691]=



Błędy rozwiązań

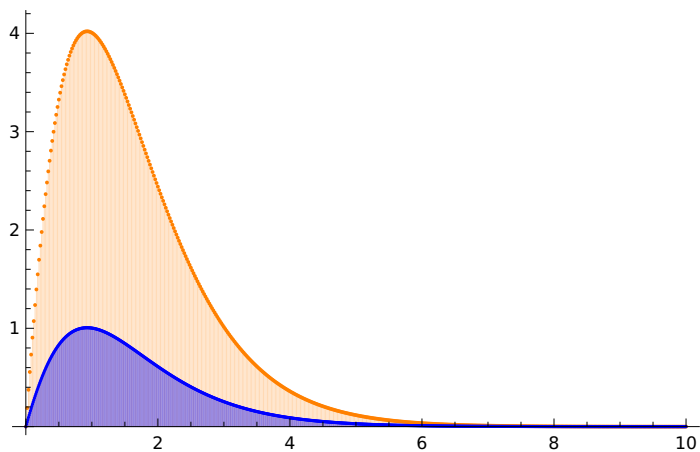
In[585]:=

```
ListX1000 = Transpose[a1000][[1]];
aListY1000 = Transpose[a1000][[2]];
aresultPoints1000 = Table[fa[x] /. {x → ListX1000[[i]]}, {i, 1, Length[ListX1000]}];
abladbezwzględny1000 = Abs[aListY1000 - aresultPoints1000];
abar1000 = ListPlot[
  Transpose[{ListX1000, abladbezwzględny1000}], PlotStyle → Blue, Filling → Axis];
```

In[693]:=

Show[abar500, abar1000]

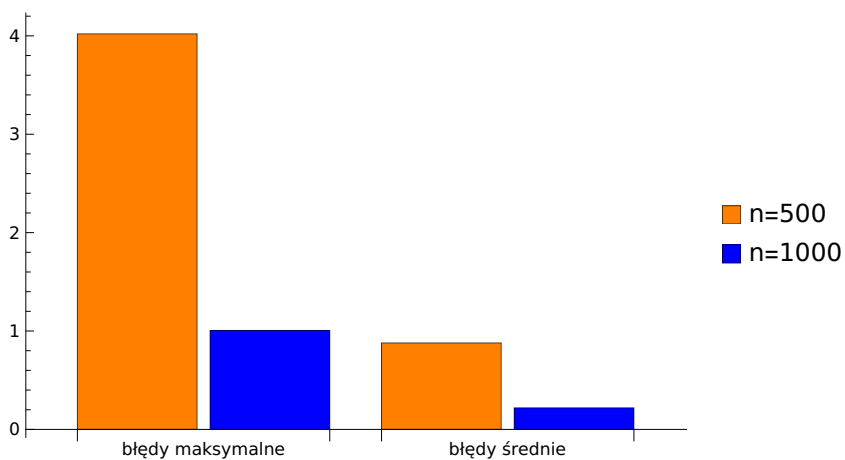
Out[693]=



In[695]:=

```
BarChart[{{N[Max[abladbezwzględny500]], N[Max[abladbezwzględny1000]]},  
          {N[Mean[abladbezwzględny500]], N[Mean[abladbezwzględny1000]]}},  
ChartLabels → {"błędy maksymalne", "błędy średnie"}, None},  
ChartStyle → {Orange, Blue}, ChartLegends → {"n=500", "n=1000"}]
```

Out[695]=



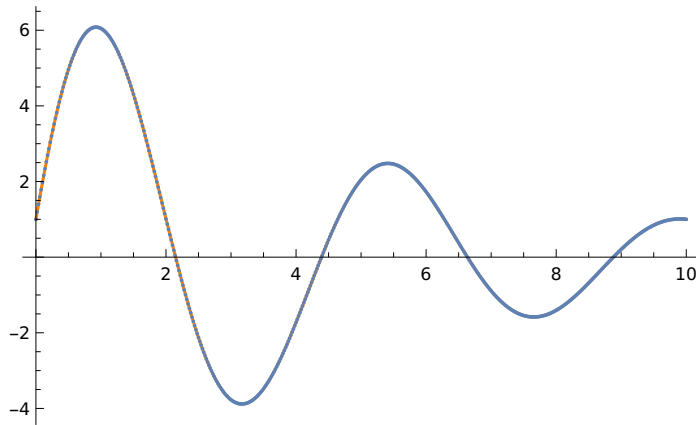
Example b)

n=500

In[446]:=

```
M[x_] = 5;
K[x_] = 2;
S[x_] = 10;
fb[x_] = DSolve[{5 * y''[x] + 2 * y'[x] + 10 * y[x] == 0, y[0] == 1, y[10] == 1}, y[x], x][[1, 1, 2]];
bsolution = Plot[fb[x], {x, 0, 10}, PlotStyle -> Orange];
b500 = FDM[alpha1, alpha2, beta1, beta2, A, B, Ta, Tb, M, K, S, Dv, 500];
Show[bsolution, ListPlot[b500]]
```

Out[452]=



In[595]:=

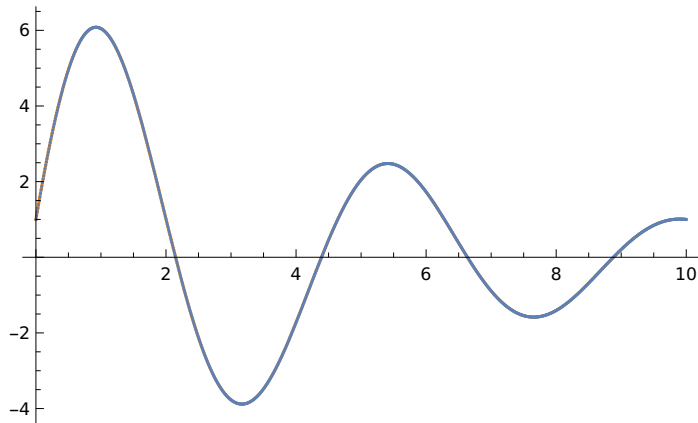
```
bListY500 = Transpose[b500][[2]];
bresultPoints500 = Table[fb[x] /. {x -> ListX500[[i]}], {i, 1, Length[ListX500]}];
bbladbezwzglyedny500 = Abs[bListY500 - bresultPoints500];
bbar500 = ListPlot[Transpose[{ListX500, bbladbezwzglyedny500}],
  PlotStyle -> Orange, Filling -> Axis];
```

n=1000

In[453]:=

```
b1000 = FDM[alpha1, alpha2, beta1, beta2, A, B, Ta, Tb, M, K, S, Dv, 1000];  
Show[bsolution, ListPlot[b1000]]
```

Out[454]=



In[599]:=

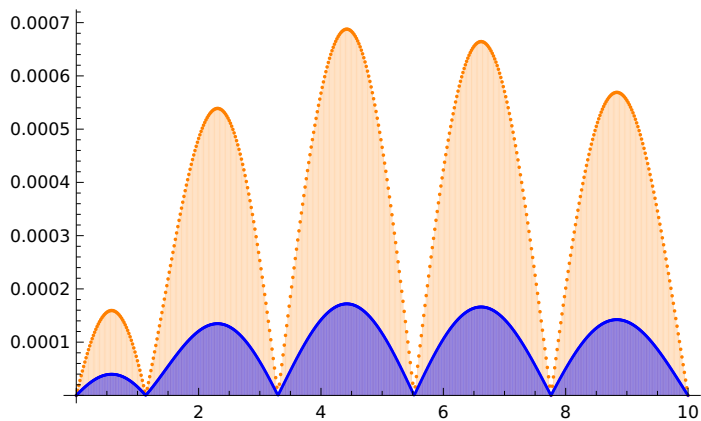
```
bListY1000 = Transpose[b1000][[2]];  
bresultPoints1000 = Table[fb[x] /. {x → ListX1000[[i]]}, {i, 1, Length[ListX1000]}];  
bbladbezwzglyedny1000 = Abs[bListY1000 - bresultPoints1000];  
bbar1000 = ListPlot[  
    Transpose[{ListX1000, bbladbezwzglyedny1000}], PlotStyle → Blue, Filling → Axis];
```


Błędy rozwiązań

In[579]:=

Show[bbar500, bbar1000]

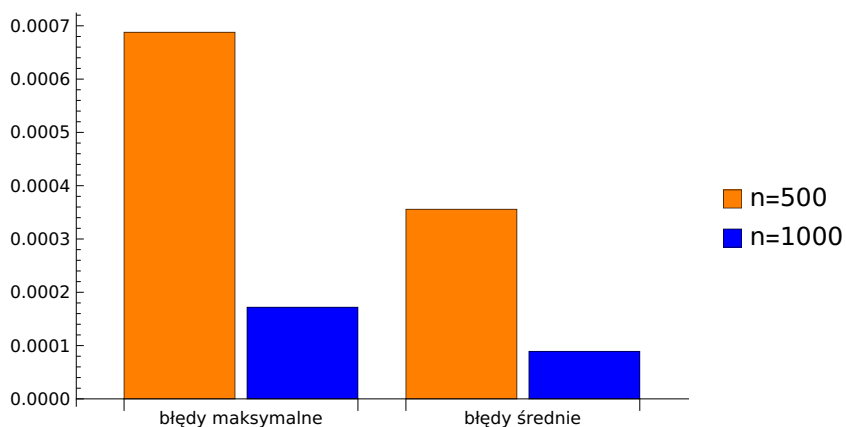
Out[579]=



In[694]:=

```
BarChart[{{N[Max[bbladbezwzglydny500]], N[Max[bbladbezwzglydny1000]]},
  {N[Mean[bbladbezwzglydny500]], N[Mean[bbladbezwzglydny1000]]}},
  ChartLabels -> {"błędy maksymalne", "błędy średnie"}, None},
  ChartStyle -> {Orange, Blue}, ChartLegends -> {"n=500", "n=1000"}]
```

Out[694]=



In[166]:=

In[165]:=