Autor: Karolina Tatarczyk

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 9

Metoda odchyłek ważonych

Napisać procedurę realizującą metodę odchyłek ważonych dla równania:

$u''(x) - 3u'(x) = 4x, \quad x \in (2, 3),$

z warunkami brzegowymi:

$u(2) = 0,$
$u(3) = 0.$

Przyjąć, że funkcje kształtu będą spełniały zadane warunki brzegowe.

a) Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć metodą Galerkina rozwiązanie przybliżone przyjmując jako funkcje kształtu:

$\Phi_1(x) = (x-2)(x-3),$
$\Phi_2(x) = x(x-2)(x-3).$

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązanie przybliżone. Policzyć także normę (w L^2) różnicy pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym (wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego).

b) Wykonać te same obliczenia dla trzech funkcji kształtu:

$\Phi_1(x) = (x-2)(x-3),$
$\Phi_2(x) = x(x-2)(x-3),$
$\Phi_3(x) = x^2(x-2)(x-3).$

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązanie przybliżone. Policzyć także normę (w L^2) różnicy pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym (wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego).

Rozwiązanie

Procedura

In[1]:=
```
mow[ϕ_, m_, a_, b_, ua_, ub_] := Module[{p1, p2, p3, result},
p = {p1, p2, p3};
T[x] := Sum[p[[i]] * ϕ[i][x], {i, 1, m}];
R0[x] = D[T[x], {x, 2}] - 3 * D[T[x], {x, 1}] - 4 x;
temp = Table[0, {i, 1, m}];
For[i = 1, i ≤ m, i++,
temp[[i]] = Integrate[ϕ[i][x] * R0[x], {x, a, b}];
];
result = Solve[Table[temp[[i]] == 0, {i, 1, m}]];
t[x] := Sum[result[[1, i, 2]] * ϕ[i][x], {i, 1, m}];
Return[Simplify[t[x]]]
]
```

Rozwiązanie dokładne

In[20]:=
```
result = DSolve[{u''[x] - 3 u'[x] == 4 x, u[2] == 0, u[3] == 0}, u[x], x][[1, 1, 2]]
a = 2;
b = 3;
p0 = Plot[result, {x, 2, 3}];
```

Out[20]=

$$-\frac{2\left(33\,e^{6}-16\,e^{9}-17\,e^{3x}-2\,e^{6}\,x+2\,e^{9}\,x-3\,e^{6}\,x^{2}+3\,e^{9}\,x^{2}\right)}{9\,e^{6}\left(-1+e^{3}\right)}$$

Przykład a)

Rozwiązanie przybliżone

In[11]:=
```
ϕ[i_][x_] := x^(i-1) (x - 2) (x - 3)
a = 2;
ua = 0;
b = 3;
ub = 0;
mow1 = mow[ϕ, 2, a, b, ua, ub]
pa = Plot[mow1, {x, a, b}, PlotStyle → Red];
```

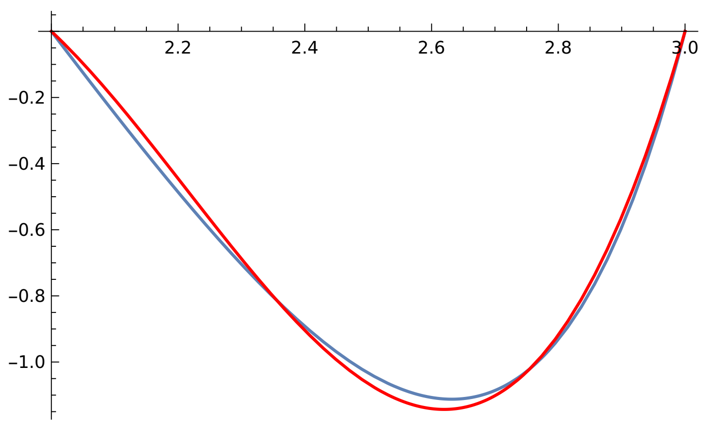
Out[16]=

$$\frac{4}{69}\left(-834+1205\,x-564\,x^2+85\,x^3\right)$$

Wykres rozwiązania dokładnego i przybliżonego

In[18]:=
```
Show[p0, pa]
```

Out[18]=



Norma L2 różnicy między rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym

In[19]:=
```
N[Integrate[Abs[result - mow1]^2, {x, a, b}]]
```

Out[19]=

```
0.000761936
```

Przykład b)

Rozwiązanie przybliżone

In[453]:=

```
mowb = mow[ϕ, 3, a, b, ua, ub]
pb = Plot[mowb, {x, a, b}, PlotStyle → Orange];
```

Out[453]=

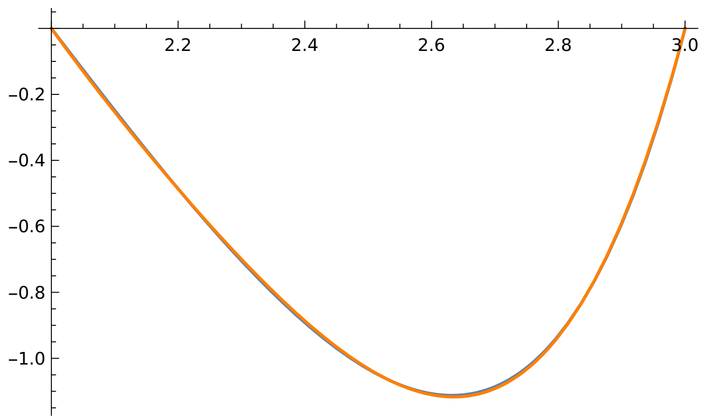
$$\frac{1}{6}\left(516 - 892\,x + 597\,x^2 - 182\,x^3 + 21\,x^4\right)$$

Wykres rozwiązania dokładnego i przybliżonego

In[455]:=

```
Show[p0, pb]
```

Out[455]=



Norma L2 różnicy między rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym

In[456]:=

```
N[Integrate[Abs[result - mowb]^2, {x, a, b}]]
```

Out[456]=

```
0.0000148247
```