

Autor: Karolina Tatarczyk

# Metody numeryczne (Matematyka)

## Projekt 4

### Metoda Jacobiego

Napisać procedurę realizującą algorytm metody Jacobiego (argumenty:  $a$ ,  $b$ ,  $x^0$ ,  $e$ ).

Zadanie 1.

Korzystając z metody Jacobiego wyznaczyć przybliżone rozwiązanie układu równań:

$$a x = b,$$

gdzie:

$$a = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Jako przybliżenie początkowe przyjąć wektor zerowy. Obliczenia wykonać dla dwóch dokładności  $10^{-2}$  i  $10^{-5}$ . Policzyc residuum dla otrzymanych wyników ( $\|a x^p - b\|$ , gdzie  $x^p$  jest wyznaczonym rozwiązaniem przybliżonym). Policzyc błąd uzyskanych przybliżeń. Do wyznaczenia rozwiązania dokładnego wykorzystać instrukcję LinearSolve.

Zadanie 2.

Zastosowanie praw Kirchoffa w pewnym układzie elektrycznym daje następujący układ równań liniowych, w którym niewiadomymi są natężenia prądów  $i_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ :

$$5 i_1 + 4 i_2 = 20,$$

$$i_3 - 3 i_4 - i_5 = 0,$$

$$2 i_4 - 3 i_5 = 0,$$

$$i_1 - i_2 - 3 i_3 = 0,$$

$$8 i_2 - 5 i_3 - 2 i_4 = 0.$$

Korzystając z metody Jacobiego wyznaczyć przybliżone rozwiązanie tego układu, przekształcając go najpierw do postaci zapewniającej zbieżność metody. Jako przybliżenie początkowe przyjąć wektor zerowy. Obliczenia wykonać dla dwóch dokładności  $10^{-3}$  i  $10^{-6}$ . Policzyc residuum dla otrzymanych wyników ( $\|a x^p - b\|$ ). Policzyc także błąd uzyskanych przybliżeń.

---

## Rozwiązanie

## Program

In[5]:=

In[223]:=

```

Clear[Jacob]
Jacob[a_, b_, x0_, e_] := Module[{n = Length[a], d = a, lu = a, m = a, w, xn = x0, xs},
  Do[If[i == j, d[[i, j]] = 1/a[[i, j]], d[[i, j]] = 0], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
  Do[If[i == j, lu[[i, j]] = 0, lu[[i, j]] = a[[i, j]]], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
  m = -d.lu;
  w = d.b;
  While[Norm[a.xn - b] > e,
    xs = xn;
    xn = m.xs + w;
  ];
  Return[xn]
]

```

## Przykład testowy

In[158]:=

```

Clear[ab, cd];
ab := {{2, 0, 1}, {2, 4, 1}, {1, 1, 4}};
cd := {-1, 2, 1};
xy := {1, 1, 1};
Print[MatrixForm[ab], MatrixForm[cd]]
Jacob[ab, cd, xy, 0.1] // N
(*
Clear[a,b,x0]
a:={{4,-1,0},{-1,4,-1},{0,-1,-4}};
b:={2,6,2};
Print[MatrixForm[a],MatrixForm[b]]
x0:={0,0,0};
Print["Wynik:"]
Jacob[a,b,x0,0.00000001]n *)

```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Out[163]=

```
{-0.599762, 0.760239, 0.222153}
```

## Zadanie 1.

```
In[22]:= Clear[a1, b1, v1]
a1 := {{4, -1, -1, 0}, {-1, 4, 0, -1}, {-1, 0, 4, -1}, {0, -1, -1, 4}};
b1 := {-4, 0, 4, -4};
v1 := {0, 0, 0, 0};
Print[MatrixForm[a1], MatrixForm[b1]]
Print["Wynik:"]
x1 = Jacob[a1, b1, v1, 10^(-2)]
Print["Residuum:"]
Norm[a1.x1 - b1]
Print["Wartość dokładna"]
xd = LinearSolve[a1, b1]
Print["Błąd:"]
Norm[x1 - xd]
```

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wynik:

Out[28]=

$$\left\{ -\frac{1023}{1024}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1023}{1024} \right\}$$

Residuum:

Out[30]=

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{0}}}{256}$$

Wartość dokładna

Out[32]=

$$\left\{ -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right\}$$

Błąd:

Out[34]=

$$\frac{1}{512 \sqrt{2}}$$

In[35]=

```
Print[MatrixForm[a1], MatrixForm[b1]]
Print["Wynik:"]
x2 = Jacob[a1, b1, v1, 10^(-5)]
Print["Residuum:"]
Norm[a1.x2 - b1]
Print["Wartość dokładna"]
xd = LinearSolve[a1, b1]
Print["Błąd:"]
Norm[x2 - xd]
```

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wynik:

Out[37]=

$$\left\{ -\frac{1\,048\,575}{1\,048\,576}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1\,048\,575}{1\,048\,576} \right\}$$

Residuum:

Out[39]=

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{0}}}{262\,144}$$

Wartość dokładna

Out[41]=

$$\left\{ -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right\}$$

Błąd:

Out[43]=

$$\frac{1}{524\,288 \sqrt{2}}$$

Out[317]=

$$\frac{1}{524\,288 \sqrt{2}}$$

## Zadanie 2.

In[53]=

```
Clear[k, t, v, w, u, q]
k := {{5, 4, 0, 0, 0}, {0, 8, -5, -2, 0},
      {1, -1, -3, 0, 0}, {0, 0, 1, -3, -1}, {0, 0, 0, 2, -3}};
t := {20, 0, 0, 0, 0};
v := {0, 0, 0, 0, 0};
```

```
In[57]:= Print[MatrixForm[k], MatrixForm[t]]
```

```
Print["Wynik:"]
```

```
w = Jacob[k, t, v, 10^(-3)] // N
```

```
Print["Residuum:"]
```

```
Norm[k.w - t]
```

```
Print["Wartość dokładna"]
```

```
u = LinearSolve[k, t] // N
```

```
Print["Błąd:"]
```

```
Norm[w - u]
```

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
Wynik:
```

```
Out[59]=
```

```
{3.47781, 0.652835, 0.941738, 0.256876, 0.17124}
```

```
Residuum:
```

```
Out[61]=
```

```
0.000533065
```

```
Wartość dokładna
```

```
Out[63]=
```

```
{3.4778, 0.652755, 0.94168, 0.256822, 0.171215}
```

```
Błąd:
```

```
Out[65]=
```

```
0.000115763
```

```
In[66]:= Print[MatrixForm[k], MatrixForm[t]]
```

```
Print["Wynik:"]
```

```
q = Jacob[k, t, v, 10^(-6)] // N
```

```
Print["Residuum:"]
```

```
Norm[k.q - t]
```

```
Print["Wartość dokładna"]
```

```
u = LinearSolve[k, t] // N
```

```
Print["Błąd:"]
```

```
Norm[q - u]
```

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wynik:

Out[68]=

{3.4778, 0.652755, 0.94168, 0.256822, 0.171215}

Residuum:

Out[70]=

$5.92829 \times 10^{-5}$

Wartość dokładna

Out[72]=

{3.4778, 0.652755, 0.94168, 0.256822, 0.171215}

Błąd:

Out[74]=

$1.18199 \times 10^{-5}$

In[1]=