

Autor: Karolina Tatarczyk

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 1

Metody Rungego-Kutty

Napisać procedury realizujące algorytmy metod Rungego-Kutty rzędu trzeciego i rzędu czwartego (argumenty: f , x_0 , y_0 , h , n).

Korzystając z napisanych procedur wyznaczyć rozwiązanie przybliżone zagadnienia początkowego:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{xy(x) - y^2(x)}{x^2}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Obliczenia wykonać dla 20 kroków o długości 0.1.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązania przybliżone. Wykreślić także, na jednym rysunku, błędy uzyskanych rozwiązań przybliżonych.

Rozwiązanie

Tworzenie procedur

```
In[17]:= RungeKutty3[function_, X0_, Y0_, H_, number_] :=  
  Module[{f = function, x0 = X0, y0 = Y0, h = H, n = number, x, y},  
    x = {x0};  
    y = {y0};  
    For[i = 1, i ≤ n, i++,  
      AppendTo[x, x[[i]] + h];  
      k1 = f[x[[i]], y[[i]]];  
      k2 = f[x[[i]] + h/2, y[[i]] + h * k1/2];  
      k3 = f[x[[i + 1]], y[[i]] - h * k1 + 2 * h * k2];  
      AppendTo[y, y[[i]] + h * (k1 + 4 * k2 + k3)/6];  
    ];  
    Return[Transpose[{x, y}]]  
  ]
```

```
In[9]:= RungeKutty4[function_, X0_, Y0_, H_, number_] :=  
  Module[{f = function, x0 = X0, y0 = Y0, h = H, n = number, x, y},  
    x = {x0};  
    y = {y0};  
    For[i = 1, i ≤ n, i++,  
      AppendTo[x, x[[i]] + h];  
      k1 = f[x[[i]], y[[i]]];  
      k2 = f[x[[i]] + h/2, y[[i]] + h * k1/2];  
      k3 = f[x[[i]] + h/2, y[[i]] + h * k2/2];  
      k4 = f[x[[i + 1]], y[[i]] + h * k3];  
      AppendTo[y, y[[i]] + h * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6];  
    ];  
    Return[Transpose[{x, y}]]  
  ]
```

Obliczenie funkcji wyznaczonymi metodami

In[135]:=

```
f[x_, y_] := (x * y - y^2) / x^2;
x0 = 1;
y0 = 2;
h = 0.1;
n = 20;
rk3 = RungeKutty3[f, x0, y0, h, n]
rk4 = RungeKutty4[f, x0, y0, h, n]
```

Out[140]=

```
{{1, 2}, {1.1, 1.84781}, {1.2, 1.75876}, {1.3, 1.70529}, {1.4, 1.67376}, {1.5, 1.65667},
{1.6, 1.64954}, {1.7, 1.64954}, {1.8, 1.6548}, {1.9, 1.66402}, {2., 1.6763},
{2.1, 1.69096}, {2.2, 1.70752}, {2.3, 1.7256}, {2.4, 1.74491}, {2.5, 1.76523},
{2.6, 1.78637}, {2.7, 1.80819}, {2.8, 1.83057}, {2.9, 1.85343}, {3., 1.87668}}
```

Out[141]=

```
{{1, 2}, {1.1, 1.84777}, {1.2, 1.75869}, {1.3, 1.70521}, {1.4, 1.67369}, {1.5, 1.6566},
{1.6, 1.64947}, {1.7, 1.64947}, {1.8, 1.65473}, {1.9, 1.66395}, {2., 1.67623},
{2.1, 1.6909}, {2.2, 1.70746}, {2.3, 1.72554}, {2.4, 1.74485}, {2.5, 1.76517},
{2.6, 1.78631}, {2.7, 1.80813}, {2.8, 1.83052}, {2.9, 1.85337}, {3., 1.87662}}
```

Wykresy przedstawiające wyniki działania procedur oraz rozwiązanie dokładne

In[150]:=

```
plot1 = ListPlot[rk3, PlotStyle -> {Red}];
plot2 = ListPlot[rk4];
```

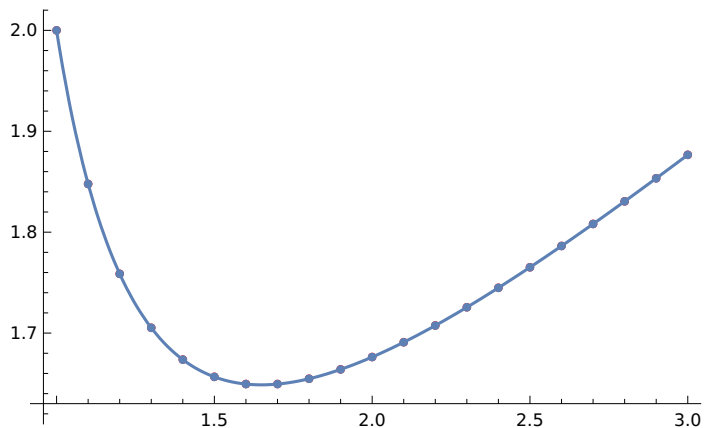
In[152]:=

```
result = DSolve[{y'[x] == (x * y[x] - y[x]^2) / x^2, y[1] == 2}, y[x], x][[1, 1, 2]];
plot3 = Plot[result, {x, 1, 3}];
```

In[154]:=

```
Show[plot1, plot2, plot3]
```

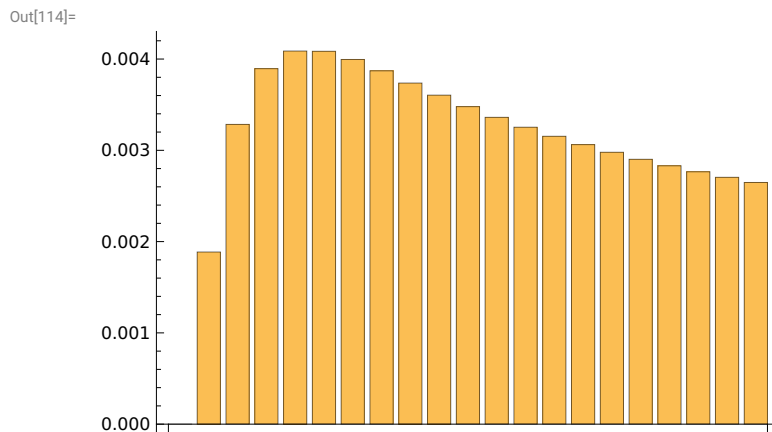
Out[154]=



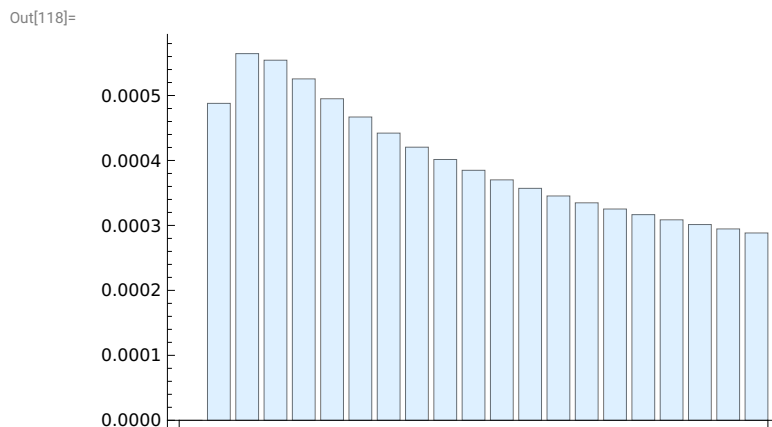
Obliczenie i przedstawienie błędów uzyskanych rozwiązań

```
In[58]:= ListX = Transpose[rk3][[1]];
ListY3 = Transpose[rk3][[2]];
ListY4 = Transpose[rk4][[2]];
```

```
In[111]:= resultPoints = Table[result /. {x → ListX[[i]]}, {i, 1, Length[ListX]}];
bladbezwzględny = Abs[ListY3 - resultPoints];
bladwzględny = 100 * bladbezwzględny / Abs[resultPoints];
bar3 = BarChart[bladwzględny]
```



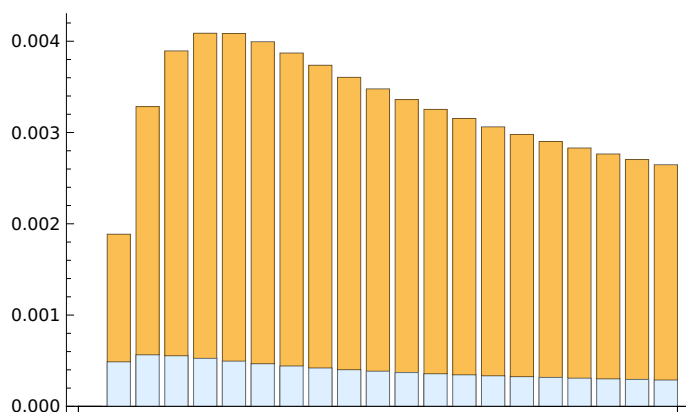
```
In[115]:= resultPoints = Table[result /. {x → ListX[[i]]}, {i, 1, Length[ListX]}];
bladbezwzględny = Abs[ListY4 - resultPoints];
bladwzględny = 100 * bladbezwzględny / Abs[resultPoints];
bar4 = BarChart[bladwzględny, ChartStyle → LightBlue]
```



In[155]:=

`Show[{bar3, bar4}, PlotLegends → {"bar1", "bar2"}]`

Out[155]=



(*pomarańczowy - błędy podczas działania procedury Rungego-Kuttego rzędu 3,
niebieski - błędy podczas działania procedury Rungego-Kuttego rzędu 4*)