Autor: Karolina Tatarczyk

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 10

Metoda odchyłek ważonych

Napisać procedurę realizującą metodę odchyłek ważonych dla równania:

$u''(x) - u'(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$

z warunkami brzegowymi:

$u(0) = 1,$
$u'(1) = 2.$

Funkcje kształtu nie muszą zapewniać spełnienia warunków brzegowych.

a) Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć rozwiązanie przybliżone przyjmując jako funkcje kształtu:

$\Phi_1(x) = 1,$
$\Phi_2(x) = x,$
$\Phi_3(x) = x^2,$

a jako funkcje wagowe:

$w_1(x) = 1,$
$w_2(x) = x,$
$w_3(x) = x^2.$

Jako funkcje wagowe na brzegu przyjąć funkcje w_i.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązanie przybliżone. Policzyć także normę (w L^2) różnicy pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym (wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego).

b) Wykonać te same obliczenia dla funkcji kształtu postaci:

$\Phi_1(x) = 1$,
$\Phi_2(x) = \exp x$.

Jako funkcje wagowe przyjąć pierwsze dwie funkcje wagowe z poprzedniego zadania.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązanie przybliżone. Policzyć także normę (w L^2) różnicy pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym.

Rozwiązanie

Procedura

In[483]:=

```
ClearAll["Global`*"]
mow[ϕ_, w_, m_, a_, b_, ua_, ub_] := Module[{},
p = {p1, p2, p3};
T[x_] = Sum[p[[i]] * ϕ[i][x], {i, 1, m}];
R0[x_] = D[T[x], {x, 2}] - D[T[x], {x, 1}];
R1[x_] = T[x] - ua;
R2[x_] = D[T[x], {x, 1}] - ub;
temp = Table[0, {i, 1, m}];
For[i = 1, i ≤ m, i++,
temp[[i]] = Integrate[w[i][x] * R0[x], {x, a, b}] + w[i][a] * R1[a] + w[i][b] * R2[b];
];

result = Solve[Table[temp[[i]] == 0, {i, 1, m}]];
t[x] := Sum[result[[1, i, 2]] * ϕ[i][x], {i, 1, m}];
Return[t[x]]
]
```

Rozwiązanie dokładne

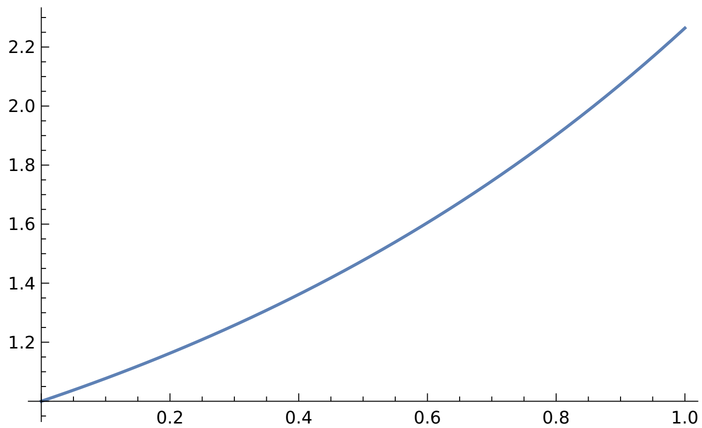
In[494]:=

```
acc = DSolve[{u''[x] - u'[x] == 0, u[0] == 1, u'[1] == 2}, u[x], x][[1, 1, 2]]
a = 0;
b = 1;
p0 = Plot[acc, {x, a, b}]
```

Out[494]=

$$\frac{-2 + e + 2 e^{x}}{e}$$

Out[497]=



Przykład a)

Rozwiązanie przybliżone

In[498]:=

```
ϕ[i_][x_] := Product[x, {k, 2, i}];
w[i_][x_] := Product[x, {k, 2, i}]
a = 0;
ua = 1;
b = 1;
ub = 2;
appa = mow[ϕ, w, 3, a, b, ua, ub]
pa = Plot[appa, {x, a, b}, PlotStyle → Red];
```

Out[504]=

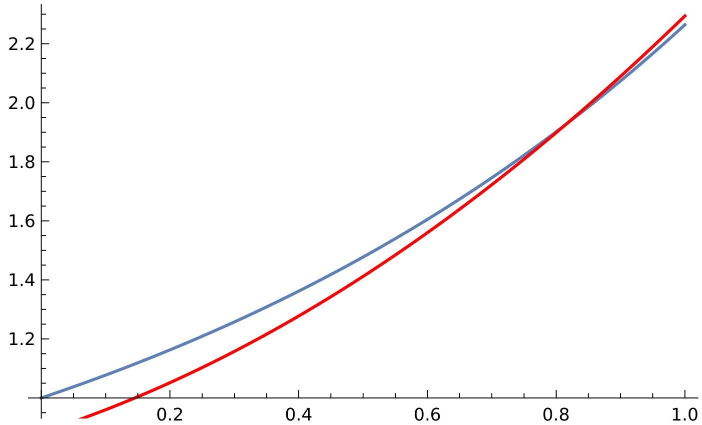
$$\frac{15}{17} + \frac{12 x}{17} + \frac{12 x^2}{17}$$

Wykres rozwiązania dokładnego i przybliżonego

In[506]:=

```
Show[p0, pa]
```

Out[506]=



Norma L2 różnicy między rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym

In[507]:=

```
N[Integrate[Abs[acc - appa]^2, {x, a, b}]]
```

Out[507]=

```
0.00576518
```

Przykład b)

Rozwiązanie przybliżone

In[508]:=

```
ϕ[i_][x_] := Exp[x]^(i - 1)
w[i_][x_] := Product[x, {k, 2, i}]
appb = mow[ϕ, w, 2, a, b, ua, ub]
pb = Plot[appb, {x, a, b}, PlotStyle → Red];
```

Out[510]=

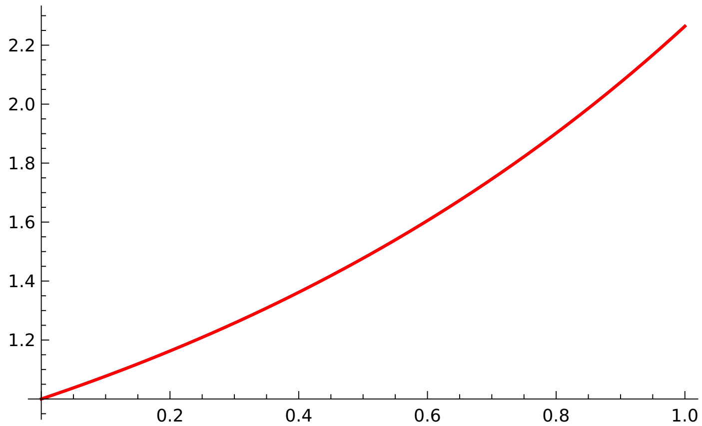
$$-\frac{2-e}{e}+2\,e^{-1+x}$$

Wykres rozwiązania dokładnego i przybliżonego

In[512]:=

```
Show[p0, pb]
```

Out[512]=



Norma L2 różnicy między rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym

In[513]:=

```
N[Integrate[Abs[acc - appb]^2, {x, a, b}]]
```

Out[513]=

```
0.
```