Autor: Karolina Tatarczyk

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 5

Metoda kolejnych przybliżeń

Równanie Fredholma II rodzaju

Zadanie 1

Wyznaczyć metodą kolejnych przybliżeń rozwiązanie przybliżone y_n równania

$$y(x) = e^x - \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x\, e^t\, y(t)\right) dt$$

Argument : n

Sprawdzić, czy metodę można zastosować. Wyznaczyć rozwiązanie dla kilku wartości n. Na tej podstawie odgadnąć rozwiązanie dokładne i sprawdzić jego poprawność.

Rozwiązanie zad.1

In[41]:=
```
a = 0;
b = 1;
lambda = -1 / 4;
f[x_] := Exp[x]
```

W przedziale [0,1] |f(x)|=|Exp[x]|=Exp[x] <= e

In[38]:=
```
K[x_, t_] := x * Exp[x];
```

W przedziale [0,1] ograniczenie: |K(x,t)|=|x*Exp[x]|<=E

In[49]:=
```
m = E;
warunek = 1 / (m * (b - a));
```

Na końcu sprawdzamy czy spełniona jest nierówność, że moduł z lambdy jest mniejszy od 1/(M(b-a))

In[51]:=

```
Abs[lambda] < warunek
```

Out[51]=

```
True
```

Dostajemy wobec tego że metoda jest zbieżna.

In[14]:=

```
Przyblizenia1[number_] := Module[{n = number},
u[x_] = Exp[x]; (*warunek początkowy*)
For[i = 1, i ≤ n, i++,
Print[i - 1, ". ", u[x]];
u[x_] = Exp[x] - (1 / 4) * Integrate[x * Exp[t] * u[t], {t, 0, 1}];
];
Return[Print[n, ". ", u[x]]]
]
```

In[15]:=

```
Przyblizenia1[10]
```

0. e^x

1. $e^x - \frac{1}{8}\left(-1+e^2\right)x$

2. $e^x - \frac{3}{32}\left(-1+e^2\right)x$

3. $e^x - \frac{13}{128}\left(-1+e^2\right)x$

4. $e^x - \frac{51}{512}\left(-1+e^2\right)x$

5. $e^x - \frac{205\left(-1+e^2\right)x}{2048}$

6. $e^x - \frac{819\left(-1+e^2\right)x}{8192}$

7. $e^x - \frac{3277\left(-1+e^2\right)x}{32\,768}$

8. $e^x - \frac{13\,107\left(-1+e^2\right)x}{131\,072}$

9. $e^x - \frac{52\,429\left(-1+e^2\right)x}{524\,288}$

10. $e^x - \frac{209\,715\left(-1+e^2\right)x}{2\,097\,152}$

In[13]:=

Przewiduję że y(x)= Exp[x] - c*x, gdzie c - stała, którą w łatwy sposób można obliczyć ręcznie c=(e^2-1)/10

In[81]:=
```
u[x_] = Exp[x] - x * (E ^ 2 - 1) / 10
v[x_] = Exp[x] - (1 / 4) * Integrate[x * Exp[t] * u[t], {t, 0, 1}]
u[x] == v[x]
```

Out[81]=

$$e^x - \frac{1}{10}\left(-1 + e^2\right) x$$

Out[82]=

$$e^x - \frac{1}{10}\left(-1 + e^2\right) x$$

Out[83]=

```
True
```

Obliczenia potwierdziły moje przewidywania.

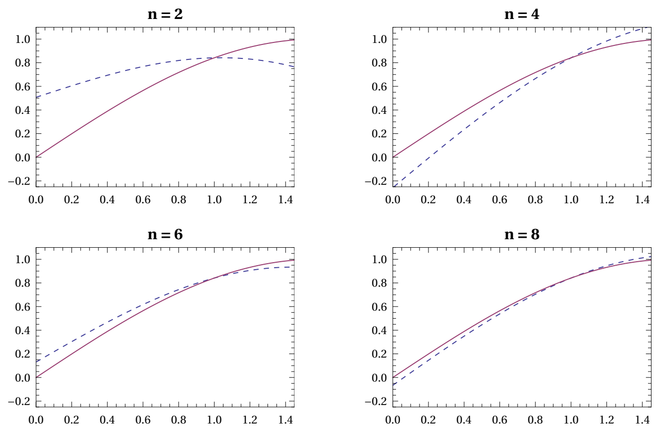
In[138]:=

Zadanie 2

Wyznaczyć rozwiązania przybliżone y_n dla n=2,4,6,8, równania:

$$y(x) = \sin x + \frac{x-1}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (t-x)\, y(t)\, dt.$$

Utworzyć wykresy porównujące rozwiązanie przybliżone z rozwiązaniem dokładnym, którym jest funkcja $y(x) = \sin x$, np. w postaci :



Rozwiązanie zad.2

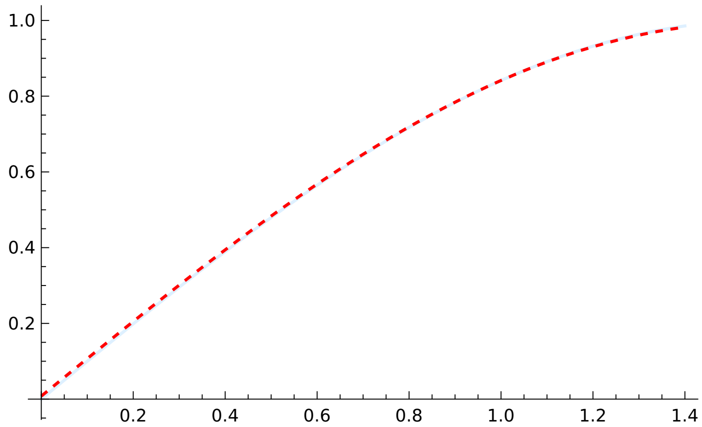
In[97]:=
```
Przyblizenia[number_] := Module[{n = number},
u[x_] = Sin[x] + (x - 1) / 4; (*warunek początkowy*)
For[i = 1, i ≤ n, i++,
u[x_] = Sin[x] + (x - 1) / 4 + (1 / 4) * Integrate[(t - x) * u[t], {t, 0, Pi / 2}]];
Return[u[x]]
]
```

In[147]:=
```
sin = Plot[Sin[x], {x, 0, 1.4}, PlotStyle → LightBlue];
y2[x_] = Przyblizenia[2]
p2 = Plot[y2[x], {x, 0, 1.4}, PlotStyle → {Dashed, Red}];
Show[sin, p2]
```

Out[148]=

$$\frac{1}{4}(-1+x)-\frac{(3072+\pi^4)(-1+x)}{12\,288}+\mathrm{Sin}[x]$$

Out[150]=



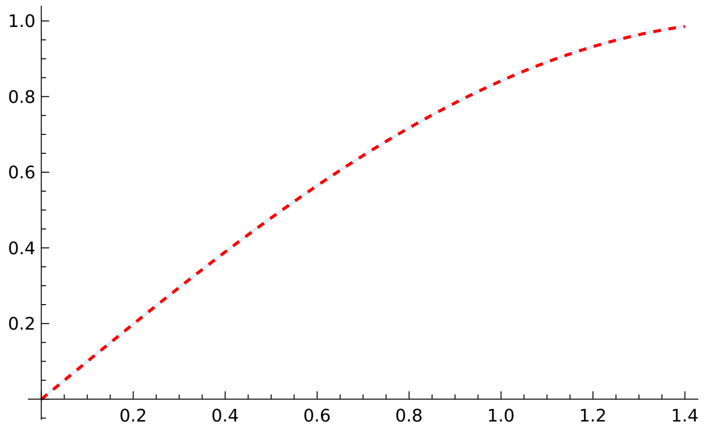
In[144]:=

```
y4[x_] = Przyblizenia[4]
p4 = Plot[y4[x], {x, 0, 1.4}, PlotStyle → {Dashed, Red}];
Show[sin, p4]
```

Out[144]=

$$\frac{1}{4}(-1+x)+\frac{\left(-9\,437\,184+\pi^8\right)(-1+x)}{37\,748\,736}+\mathrm{Sin}[x]$$

Out[146]=



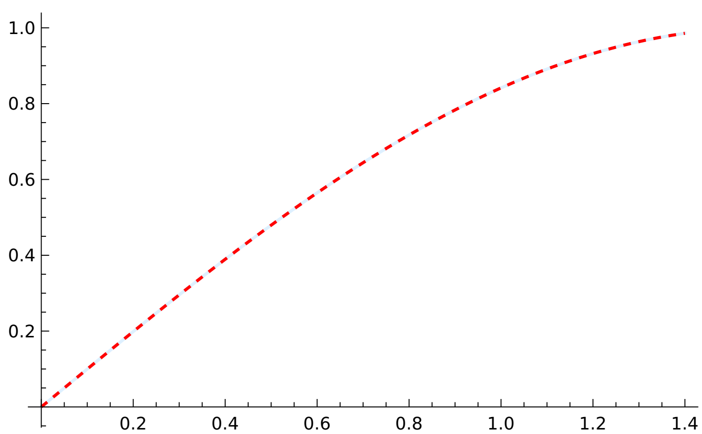
In[152]:=

```
y6[x_] = Przyblizenia[6]
p6 = Plot[y6[x], {x, 0, 1.4}, PlotStyle → {Dashed, Red}];
Show[sin, p6]
```

Out[152]=

$$\frac{1}{4}(-1+x)-\frac{\left(28\,991\,029\,248+\pi^{12}\right)(-1+x)}{115\,964\,116\,992}+\mathrm{Sin}[x]$$

Out[154]=



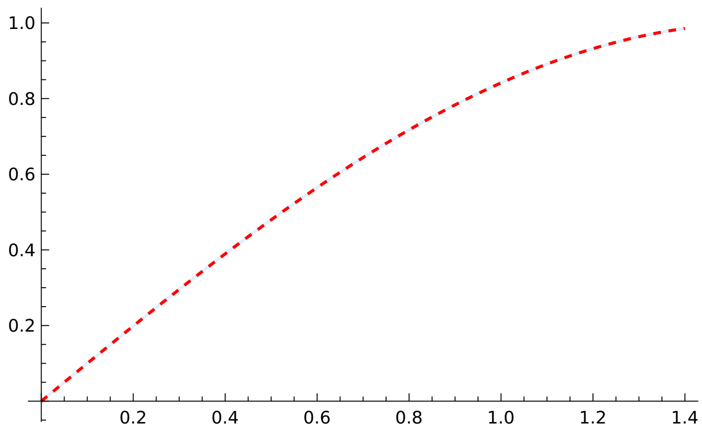
In[156]:=

```
y8[x_] = Przyblizenia[8]
p8 = Plot[y8[x], {x, 0, 1.4}, PlotStyle → {Dashed, Red}];
Show[sin, p8]
```

Out[156]=

$$\frac{1}{4}(-1+x)+\frac{\left(-89\,060\,441\,849\,856+\pi^{16}\right)(-1+x)}{356\,241\,767\,399\,424}+\mathrm{Sin}[x]$$

Out[158]=



In[151]:=

In[155]:=