Autor: Karolina Tatarczyk

Metody numeryczne (Matematyka)

Projekt 7

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

Napisać procedurę realizującą algorytm aproksymacji średniokwadratowej dyskretnej. Działanie procedury przetestować na przykładzie z wykładu.

a) Aproksymować punkty $(x_i,\ \cos x_i)$ dla $x_i = -6, -5, \ldots, 5, 6$, wielomianem stopnia czwartego. Jako funkcję wagową raz przyjąć funkcję $w(x) = 1$, natomiast drugi raz funkcję

$$w(x) = \begin{cases} 10 & \text{dla } |x| \le 2, \\ 10^{-10} & \text{dla } |x| > 2. \end{cases}$$

Wykreślić na wspólnym rysunku otrzymane wielomiany oraz punkty aproksymacji.

b) Zmianę temperatury płynu w zbiorniku ilustruje następująca tabela:

t[s]	0	60	120	180	240	300
T[°C]	100	90	80	72	65	58

Aproksymować temperaturę funkcją postaci $T(t) = a \exp(b\ t)$. Jako funkcję wagową przyjąć $w(t) = 1$. Policzyć temperaturę płynu po 200 s od chwili początkowej.

Rozwiązanie

Program

In[1]:=
```
Clear[aproksymacja]
aproksymacja[x0_, y_, x_Symbol, φ_, w_] :=
 Module[{n = Length[x0], m = Length[φ], f = φ, fx},
K = Table[0, {i, m}, {i, m}];
For[i = 1, i ≤ m, i++,
For[j = 1, j ≤ m, j++,
    K[[i, j]] = Sum[w[x0[[k]]] (φ[[i]] /. x → x0[[k]]) (φ[[j]] /. x → x0[[k]]), {k, 1, n}];
]];
For[k = 1, k ≤ m, k++,
f[[k]] = Sum[w[x0[[j]]] × y[[j]] (φ[[k]] /. x → x0[[j]]), {j, 1, n}]];
a = f.Inverse[K];
fx = Sum[a[[j]] * φ[[j]], {j, 1, m}];
Return[fx]
]
```

Przykład testowy

In[3]:=
```
Clear[x0, y0, w0];
φ[i_][x_] := x^i;
x0 := {0, 1, 2, 3};
y0 := {1, -1, 2, 4};
w0[x_] := 1;
aproksymacja[x0, y0, x, {φ[0][x], φ[1][x], φ[2][x]}, w0]
```

Out[8]=
$$\frac{7}{10} - \frac{9x}{5} + x^2$$

Zadanie a)

In[23]:=
```
Clear[x1, y1, w1a, w1c, f1, f2];
φ[i_][x_] := x ^ i;

x1 := Table[i, {i, -6, 6}];
y1 := Table[Cos[i] // N, {i, -6, 6}];
w1a[x_] := 1;
Print["Wynik dla pierwszej funkcji wagowej:"]
f1 = aproksymacja[x1, y1, x, {φ[0][x], φ[1][x], φ[2][x], φ[3][x], φ[4][x]} , w1a]
w1c[x_] := 10 /; Abs[x] ≤ 2;
w1c[x_] := 10 ^ (-10);
Print["Wynik dla drugiej funkcji wagowej:"]
f2 = aproksymacja[x1, y1, x, {φ[0][x], φ[1][x], φ[2][x], φ[3][x], φ[4][x]}, w1c]

p = Plot[{f1, f2}, {x, -6, 6}];
pkt = ListPlot[Transpose[{x1, y1}], PlotStyle → Black];
Show[pkt, p]
```

Wynik dla pierwszej funkcji wagowej:

Out[29]=

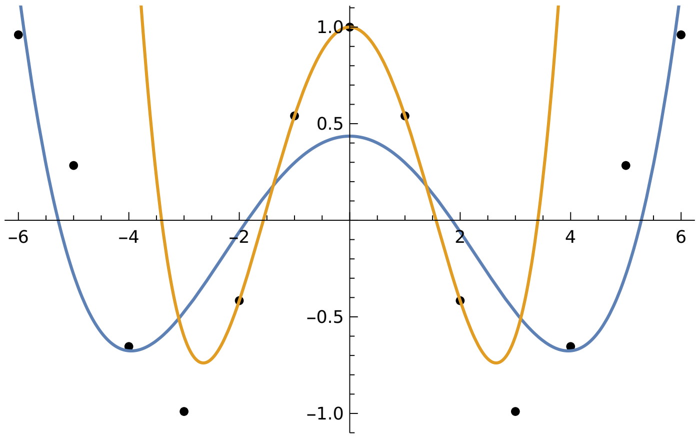
$0.43536 - 0.141988\, x^2 + 0.00453425\, x^4$

Wynik dla drugiej funkcji wagowej:

Out[33]=

$1. + 7.37622 \times 10^{-17}\, x - 0.494918\, x^2 - 2.08034 \times 10^{-17}\, x^3 + 0.0352202\, x^4$

Out[36]=



Zadanie b)

In[37]:=
```
t2 := Table[i, {i, 0, 300, 60}];
T2 := {100, 90, 80, 72, 65, 58};
w3[t_] := 1;

Print["Funkcję T=ae^(bt) przekształcam
   logarytmując obustronnie i otrzymuję  lnT=ln(a)+ bt"]
Print["Teraz podstawiam y=lnT, c=ln(a), t=x, dostając przy
   tym zależność liniową:y=c+bx    ===>        (x,y)=(t,lnT)      "]
LnT2 = Table[Log[T2[[i]]] // N, {i, Length[T2]}];
Print["Dane podane w zadaniu oraz zaprezentowane na wykresie:"]
dane = Transpose[{t2, T2}]
 p1 =
  ListPlot[dane, PlotStyle → { Red, PointSize[0.015]}, PlotTheme → "Detailed"]
 Print["Współrzędne punktów potrzebne do aproksymacji:"]
 dane2 = Transpose[{t2, LnT2}]
Print["Wynik aproksymacji:"]
 f3 = aproksymacja[t2, LnT2, t, {φ[0][t], φ[1][t]}, w3]
 Print["Wyłuskujemy wartości 'c' oraz 'b':"]
 c = f3[[1]]
 b = f3[[2, 1]]
 Print["Wyliczam teraz 'a' wiedząc, że c=ln(a)"]
a = Exp[c]
Print["Buduję szukaną aproksymację
   danych wejściowych, którą przedstawia dany wykres:"]
fN[t_] := a * Exp[b * t];
p2 = Plot[fN[t], {t, 0, 300}, PlotTheme → "Detailed"]
Print["Połączone wykresy:"]
Show[p1, p2]
Print["Teraz liczę  temperaturę płynu po 200 s od chwili początkowej."]
fN[200]
```

Funkcję T=ae^(bt) przekształcam logarytmując obustronnie i otrzymuję lnT=ln(a)+ bt

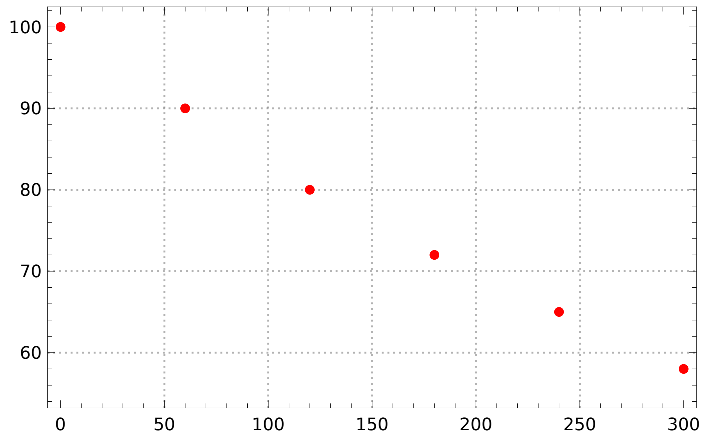
Teraz podstawiam y=lnT, c=ln(a), t=x, dostając przy
  tym zależność liniową:y=c+bx   ===>   (x,y)=(t,lnT)

Dane podane w zadaniu oraz zaprezentowane na wykresie:

Out[44]=

{{0, 100}, {60, 90}, {120, 80}, {180, 72}, {240, 65}, {300, 58}}

Out[45]=



Współrzędne punktów potrzebne do aproksymacji:

Out[47]=

{{0, 4.60517}, {60, 4.49981}, {120, 4.38203},
{180, 4.27667}, {240, 4.17439}, {300, 4.06044}}

Wynik aproksymacji:

Out[49]=

4.60489 – 0.00181203 t

Wyłuskujemy wartości 'c' oraz 'b':

Out[51]=

4.60489

Out[52]=

-0.00181203

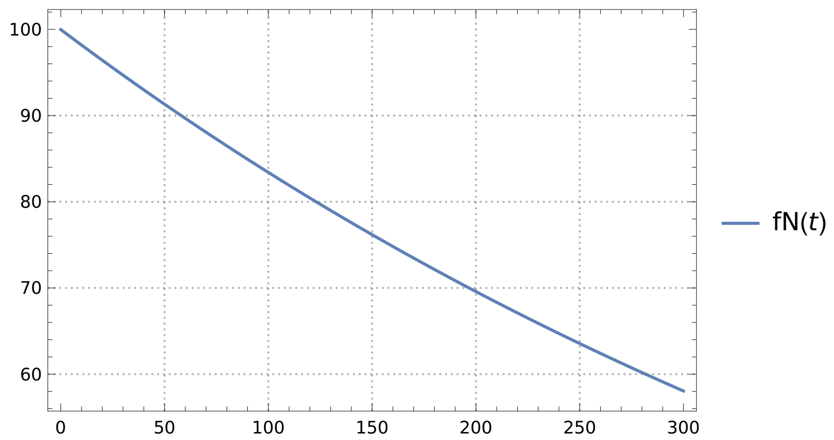
Wyliczam teraz 'a' wiedząc, że c=ln(a)

Out[54]=

99.9718

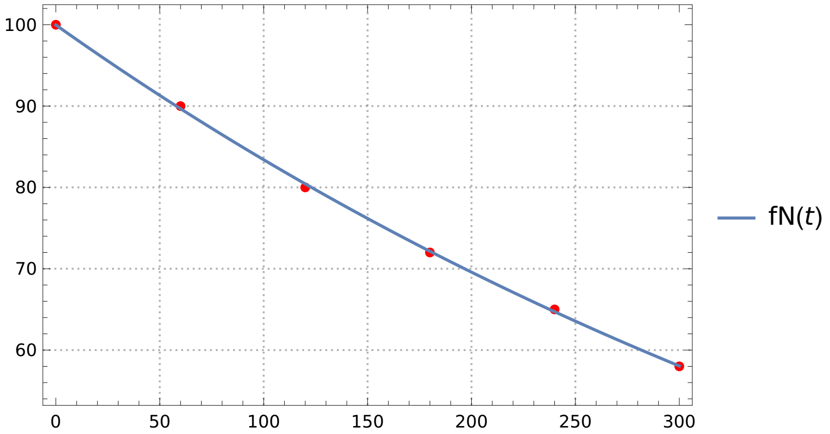
Buduję szukaną aproksymację danych wejściowych, którą przedstawia dany wykres:

Out[57]=



Połączone wykresy:

Out[59]=



Teraz liczę temperaturę płynu po 200 s od chwili początkowej.

Out[61]=

69.5804