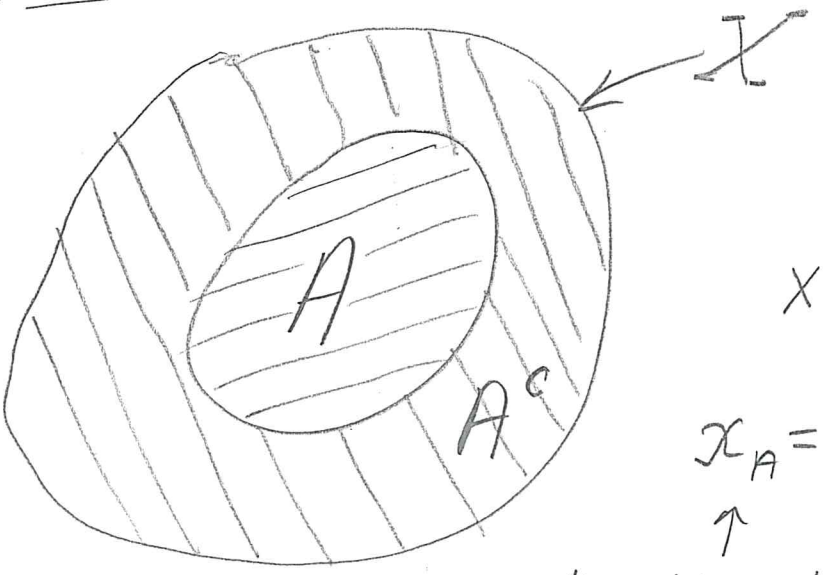
Fuzzy irányítások

Fuzzy halmazok:

Ötlet 1965 Zadeh aki a kaliforniai Berkeley-n tanít.

Hagyományos halmazok (Crisp halmazok)



univerzum

$x \in X$

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

Karakterisztikus függvény

$A \leftrightarrow (X, \chi_A)$

$\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$

Fuzzy halmazok

X - univerzum

A - fuzzy halmaz

$x \in X$

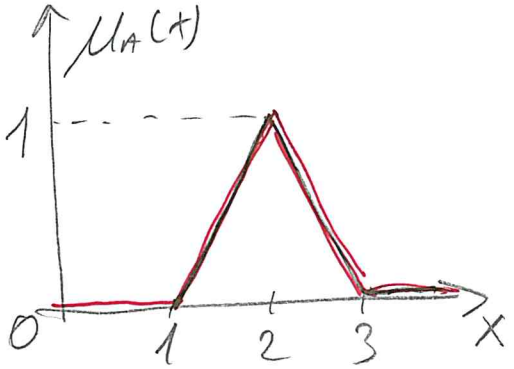
A halmazhoz való tartozást a karakterisztikus függvény általánosításával jelöljük, a hova-

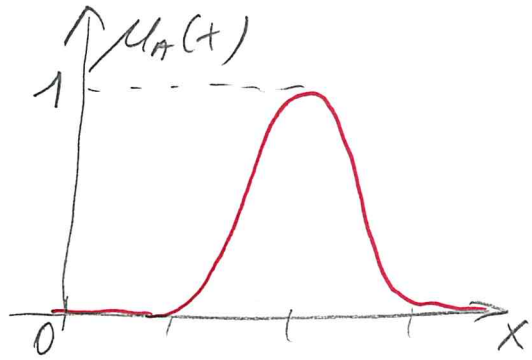
tartozást ebben az esetben [0,1] intervallumból vett érték jelöli.

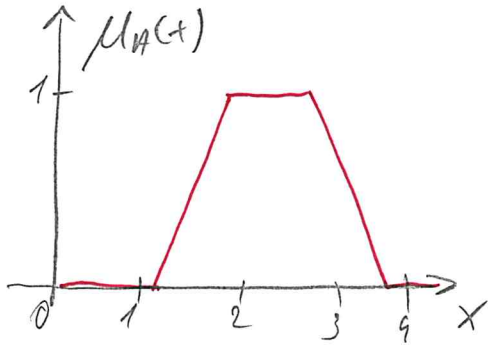
$\mu_A(x) \in [0,1]$ – tagsági függvény

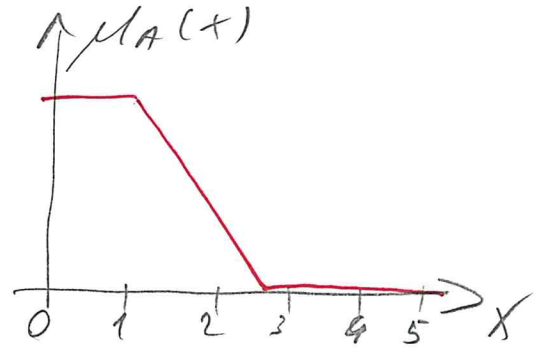
$$A \Leftrightarrow (X, \mu_A)$$

Néhány tipikus tagsági függvény:

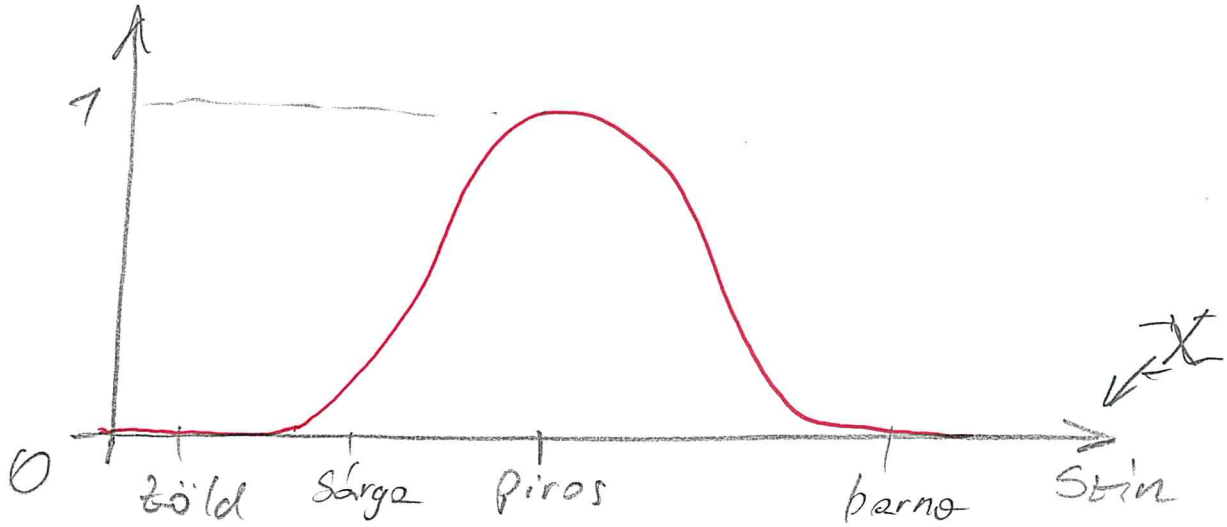




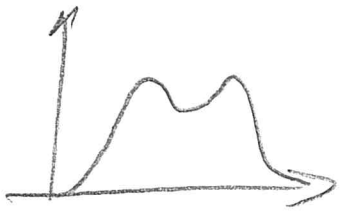




Példa: Mikor érett egy paradicsom?



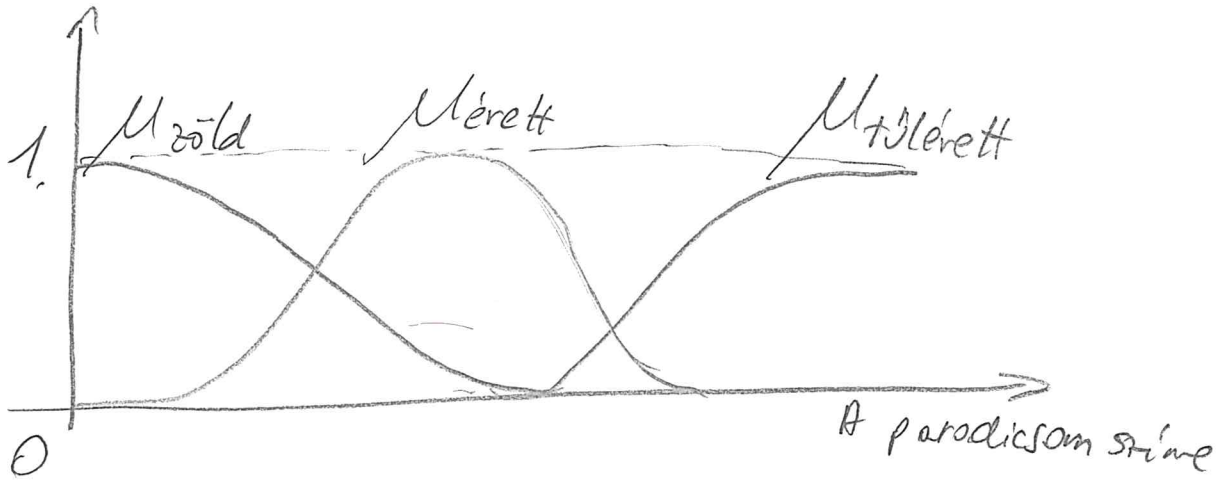
A fuzzy halmazokra jellemző, hogy fuzzy értelemben konvexek.
Például:



nem konvex fuzzy értelemben!

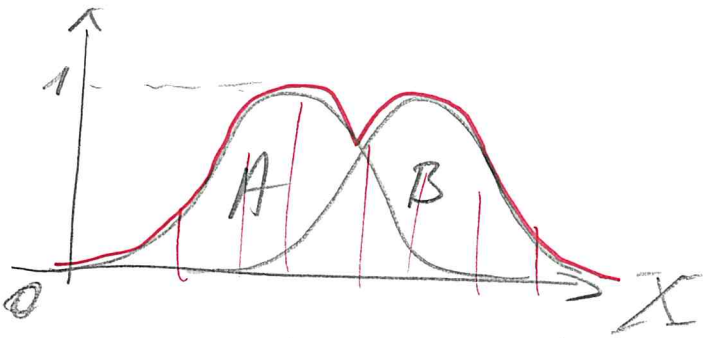
Ez a megközelítés közel áll az ember gondolkodás módjához.

Az univerzum lefedettsége:



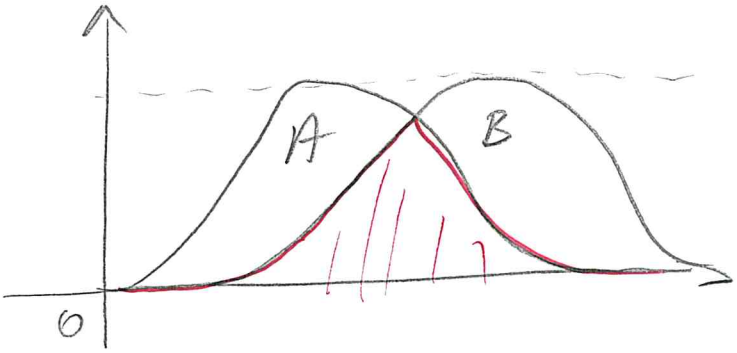
Műveletek fuzzy halmazokkal:

- Unió



$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

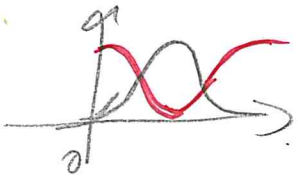
- metszet



$$\mu_{A\cap B} = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$

- komplemens

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Fuzzy logika

- konjunkció : (T- norma)

$$T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = T\left(\mu_A, \mu_B\right)$$

A T-normának több alakja ismeretes:

$$T(a,b) = \min(a,b)$$

$$T(a,b) = a \cdot b$$

$$T(a,b) = 1 - \left[(1-a)^p + (1-b)^p - (1-a)^p(1-b)^p\right]^{1/p}$$

$$T(a,b) = \frac{a \cdot b}{a + b - a \cdot b}$$

⋮

Dombi!

- diszjunkció: (S-norma)
  vagy (T-konorma)

$$S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)=S(\mu_A,\mu_B)$$

$$\begin{aligned} S(a,b) &= \max(a,b) \\ &= \min(1,a+b) \\ &= a+b-a\cdot b \end{aligned}$$

⋮ Dombi

- Negáció (C-norma) $C:[0,1]\to[0,1]$

$$C(0)=1$$
$$C(1)=0$$
$$C(\mu_A(x))=1-\mu_A(x)$$

A fuzzy logika a szélső értékben megegyezik a hagyományos logikával.

$\wedge$/T	0	1
0	0	0
1	0	1

min

$\vee$/S	0	1
0	0	1
1	1	1

max

$$\bar{A}=1-A$$

$$\mu_{\bar{A}}(x)=1-\mu_A(x)$$

0	1
1	0

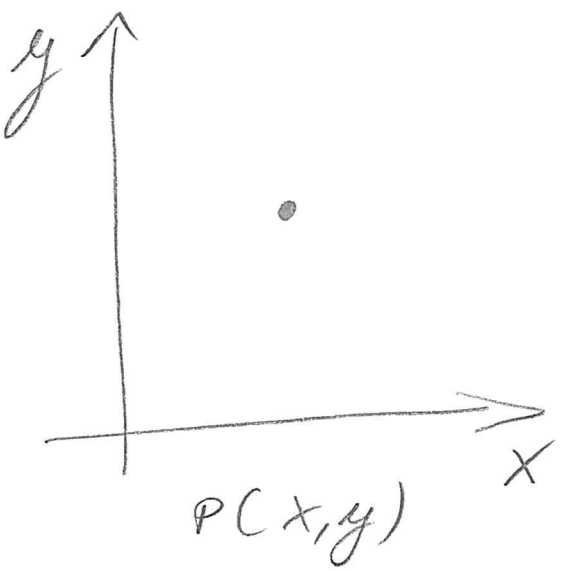
Modus Ponens

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ A \rightarrow B \end{array}}{B}$$

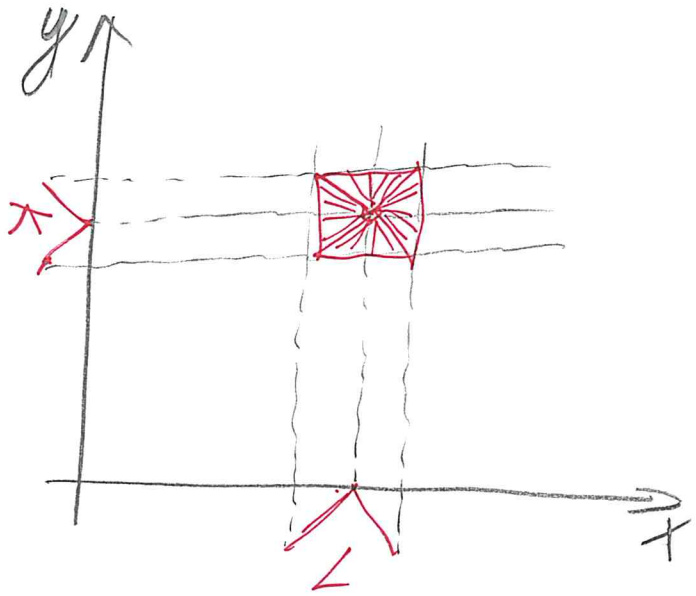
esemény
szabály
esemény

Fuzzy pont

Crisp



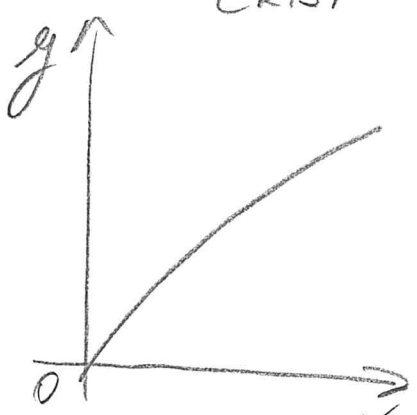
Fuzzy



if x is L then y is K

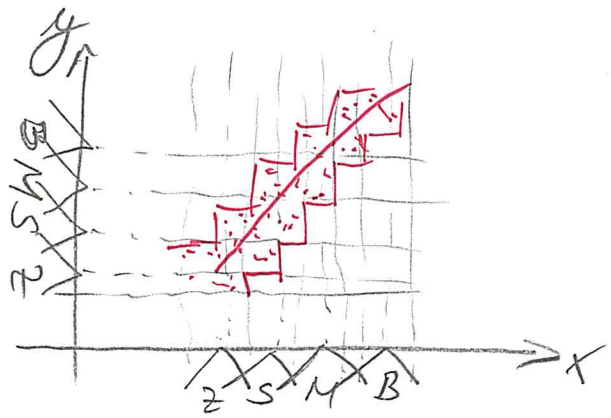
Függvény approximáció

CRISP



$y = f(x)$

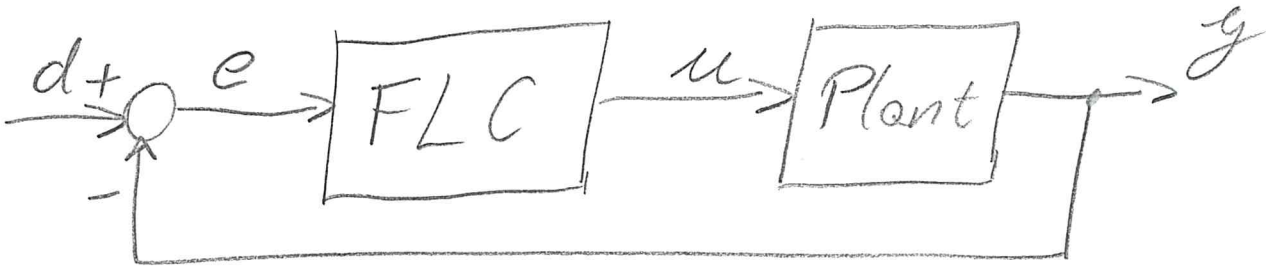
Fuzzy



if x is Z then y is Z
if x is S then y is S
if x is M then y is M
if x is B then y is B

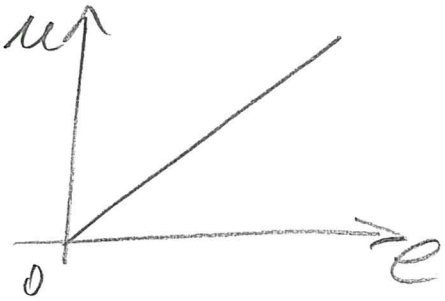
Fuzzy szabályozás

Általános struktúra



Hagyományos P szabályozó

$$u = K_p \cdot e$$



Fuzzy P szabályozó esetében egyenest közelítünk pl:

if e is S then u is M

A P típusú FLC belső struktúrája:

Ne – normálási tényező, általában [-1,1]re

F – a crisp érték fuzzy számmá alakítása

RB – szabálybázis

DF – defuzzifikációs modul

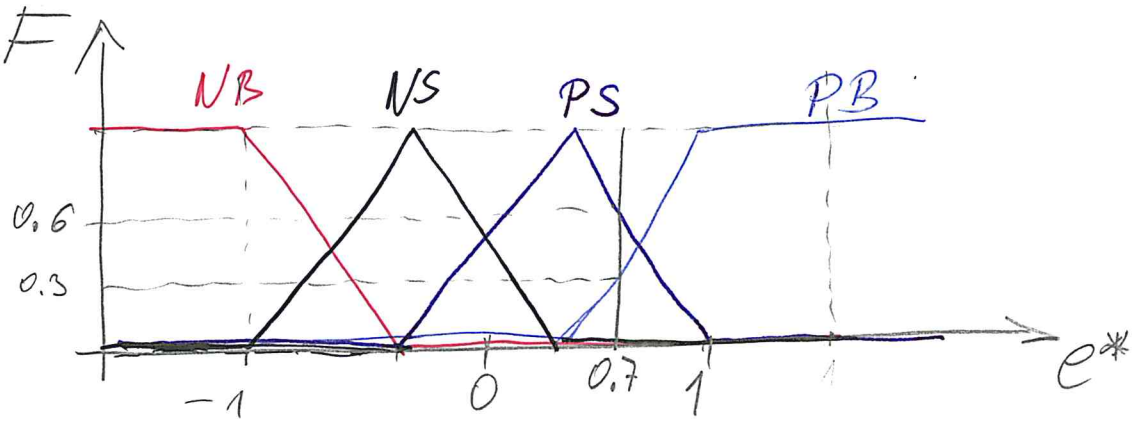
Nu – denormálási tényező [-1,1] ről a szükségesre.

Egy példán keresztül: (MAMDANI féle)

- Ne a hiba legnagyobb értéke $-10[dm]$ és $10[dm]$. Legyen $N_e = 0.1$

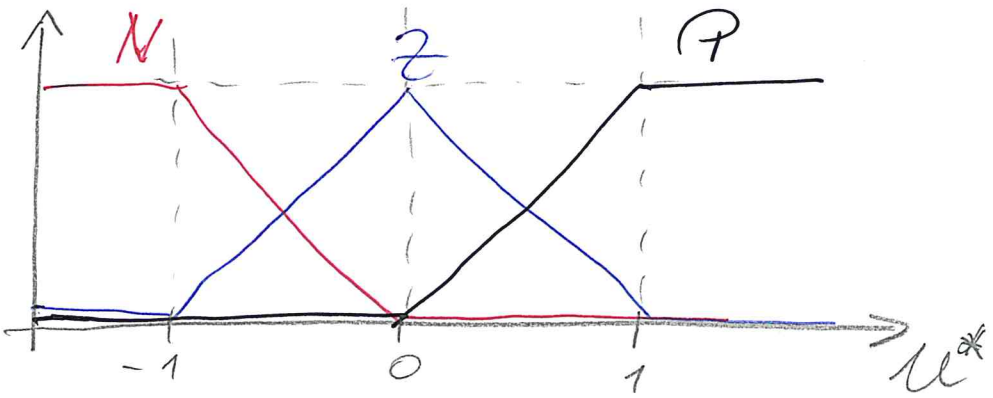
$$e^* = 0.1 \cdot e \quad , \quad e^* \in [-1, 1]$$

- F



$$e^* = 0.7 = (\underset{NB}{0}, \underset{NS}{0}, \underset{PS}{0.6}, \underset{PB}{0.3})$$

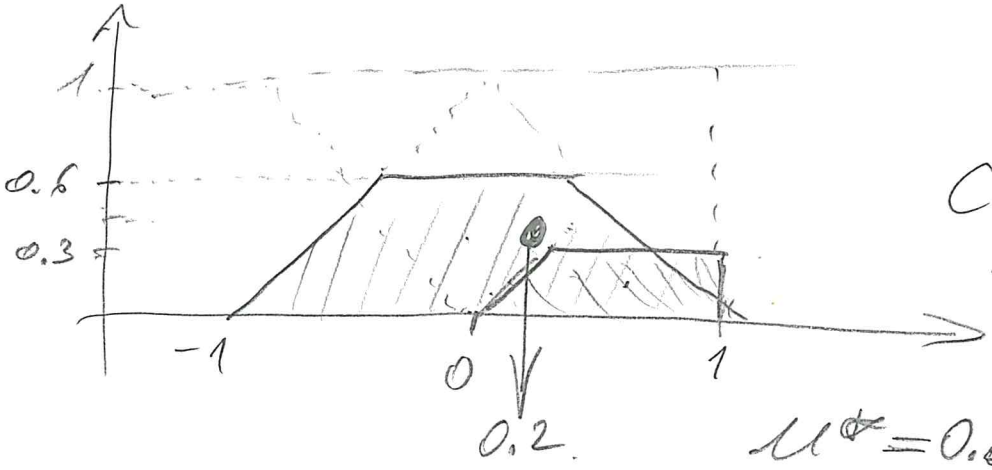
- RB



if	e^*	is	NB	then	u^*	is	P (0)
if	e^*	is	NS	then	u^*	is	P (0)
if	e^*	is	PS	then	u^*	is	Z (0.6)
if	e^*	is	PB	then	u^*	is	P (0.3)

$$u^* = (\underset{N}{0}, \underset{Z}{0.6}, \underset{P}{0.3})$$

• DF



COG módszer

$u^* = 0.2$

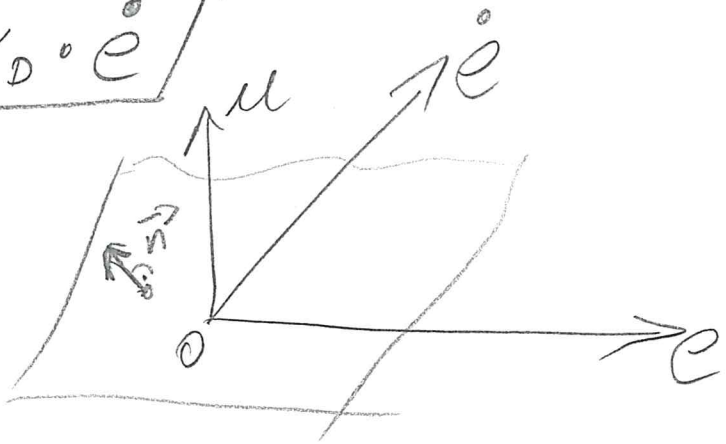
• N_u $[-1, 1] \cdot N_u = [-100, 100]$

$u = 100 \cdot 0.2 = 20$

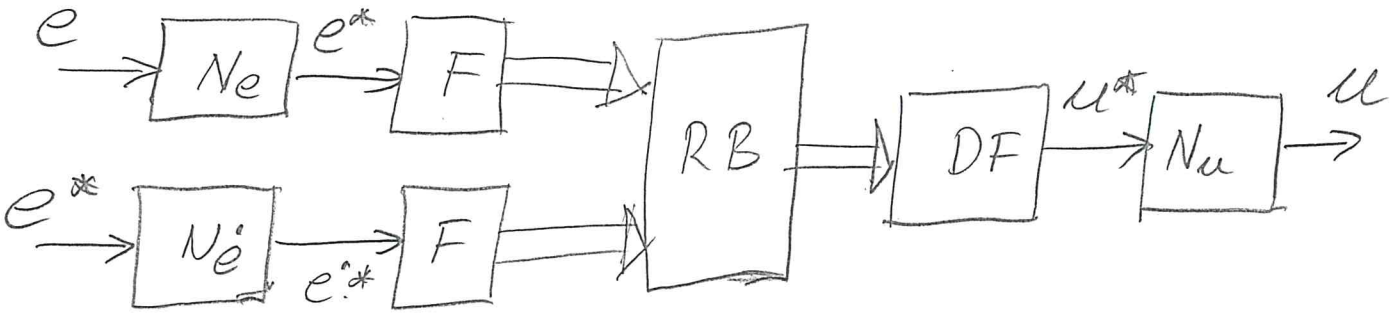
Hagyományos PD szabályozó

$$\boxed{u = K_P \cdot e + K_D \cdot \dot{e}}$$

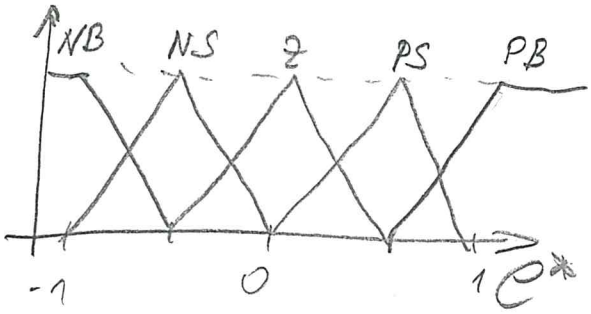
egy síkot határoz meg!

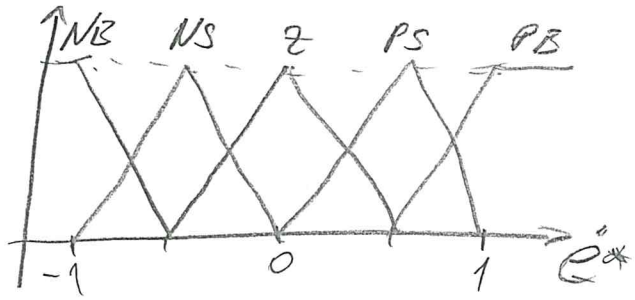


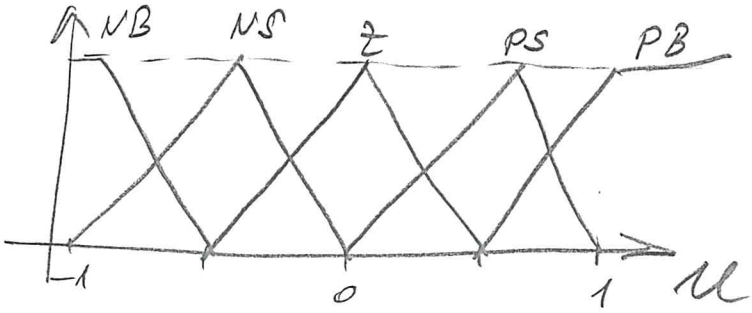
Fuzzy PD szabályozó belső struktúrája



Határozzuk meg az univerzumok ($e, \dot{e}, u$) lefedettségét tagsági függvényekkel.







- RB

if e^* is NB and $\dot{e}^*$ is PB then u is Z

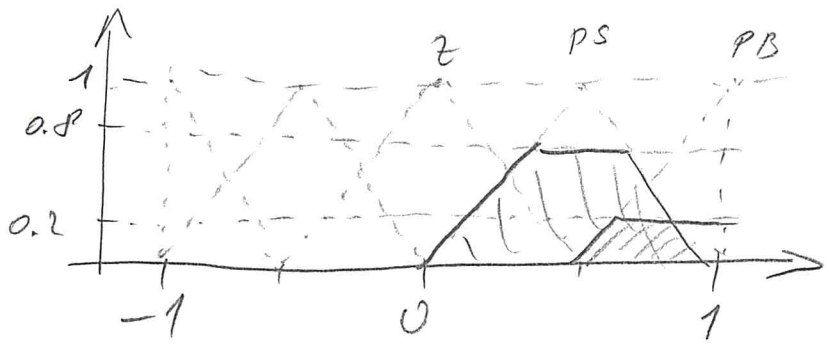
		$\dot{e}^*$				
		NB	NS	Z	PS	PB
e^*	NB	NB	NB	NB	NS	Z
	NS	NB	NB	NS	Z	PS
	Z	NS	NS	Z	PS	PB
	PS	NS	Z	PS	PB	PB
	PB	Z	PS	PS	PB	PB

$$e^* = 0.5 = (\underset{NB}{0}, \underset{NS}{0}, \underset{Z}{0}, \underset{PS}{1}, \underset{PB}{0})$$

$$\dot{e}^* = 0.2 = (\underset{NB}{0}, \underset{NS}{0}, \underset{Z}{0.8}, \underset{PS}{0.2}, \underset{PB}{0})$$

$$u^* = (\underset{NB}{0}, \underset{NS}{0}, \underset{Z}{0}, \underset{PS}{0.8}, \underset{PB}{0.2}) = 0.6$$

• DF



Height -módszer

$$u^* = \frac{0\cdot(-1)+0\cdot(-0.5)+0\cdot(0)+0.8\cdot(0{,}5)+0.2\cdot(1)}{0+0+0+0.8+0.2} = 0.6$$

Hagyományos PI szabályozó

$$u = K_P \cdot e + K_I \cdot \int e\,dt$$

Visszavezetve /deriválva/ PD re:

$$\dot{u} = K_P \cdot \dot{e} + K_I \cdot e$$

Fuzzy PI

if e is <simbol> and
ė is <simbol> then Δu is <simbol>

Hagyományos PID szabályozó

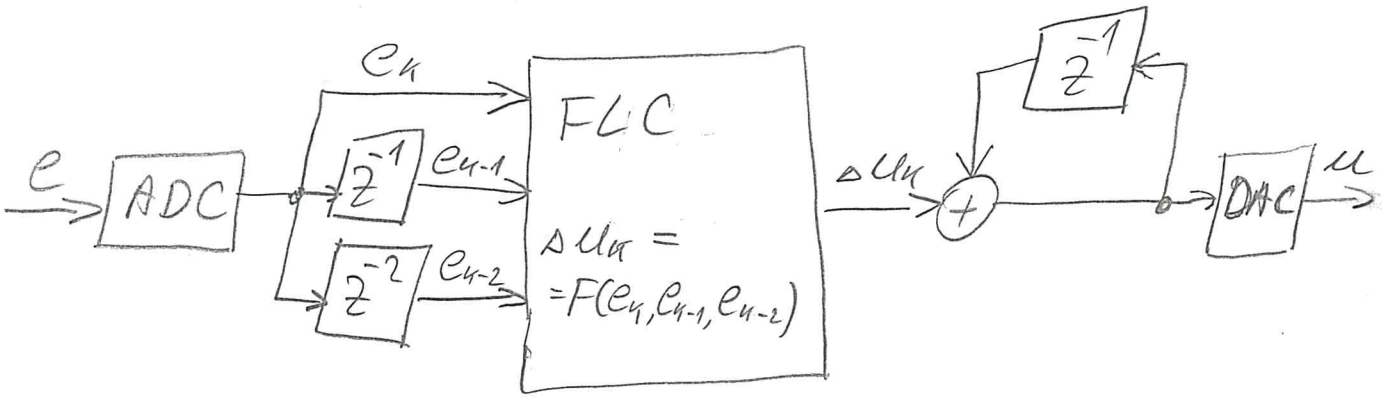
$$u = K_P \cdot e + K_D \cdot \dot{e} + K_I \int e\,dt$$

Fuzzy PID

$$e_\Sigma(k) = \sum_{i=1}^{k-1} e(i)$$

if e is <symbol> and
Δe is <symbol> and
e_Σ is <symbol> then u is <symbol>

Egy másik megvalósítás:



$e = y_d - y$; $\quad u = K_P \cdot e + K_I \cdot \int e\,dt + K_D \cdot \frac{de}{dt}$

T – mintavételi periódus idő

$k_P = K_P$; $k_I = K_I \cdot T$; $k_D = K_D / T$

$$u_k = k_P \cdot e_k + k_I \cdot \Sigma e_k + k_D \cdot \Delta e_k$$

$$u_{k-1} = k_P e_{k-1} + k_I \Sigma e_{k-1} + k_D \cdot \Delta e_{k-1}$$

$$\Sigma e_k - \Sigma e_{k-1} = e_k \; ; \quad \Delta e_k - \Delta e_{k-1} = e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2}$$

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$$

$$\Delta u_k = k_P(e_k - e_{k-1}) + k_I e_k + k_D(e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2}) =$$

$$= (k_P + k_I + k_D)e_k + (-k_P - 2k_D)e_{k-1} + k_D \cdot e_{k-2}$$

$$\Delta u_k = k_0 e_k + k_1 e_{k-1} + k_2 \cdot e_{k-2}$$

A Fuzzy szabályozó nemlineáris felülettel közeliti a fenti összefüggést.

$$\Delta u_k = F(e_k, e_{k-1}, e_{k-2})$$

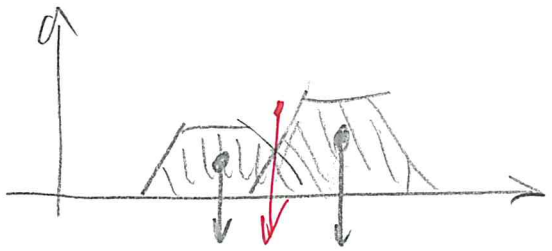
$$\boxed{u_k = u_{k-1} + \Delta u_k}$$

Más szabályozót is lehet fuzzy-val approximálni. Gyakori a csúszó szabályozás algoritmusának fuzzy megvalósítása. Sikerrel alkalmazható egyensúlyi állapot fentartására.

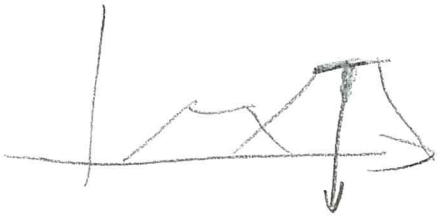
Defuzzifikációs módszerek (néhány)

- Súlyponti módszer COG (center of gravity)

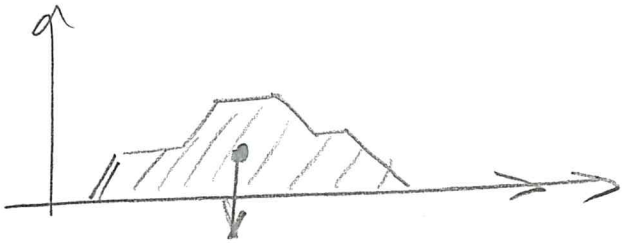
$$u^* = \frac{\sum (y_i \cdot w_i)}{\sum w_i}$$



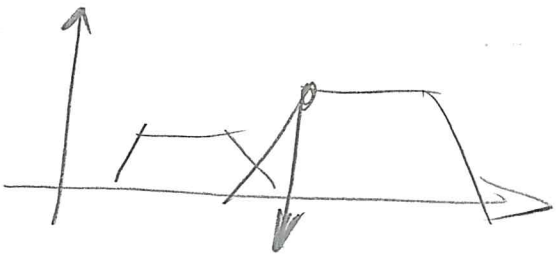
- MOM (Middle of Maxima)



- COM (center of mass)



- First Maximum



A defuzzifikációs módszerek közül előnyös az egyszerűt és a gyorsat választani. Az egyes módszerek eredményei közötti eltérés 10% közeli.

Takagi – Sugeno féle szabályozó

A rendszer bemenetét fuzzy munkapontok körül határozzuk meg.

R_i : if x_1 is X_1^i and ... and x_N is X_N^i then $u = f_i(x_1, .. x_N)$

Elvileg f_i bármilyen alakú lehet, de gyakori a lineáris:

$$f_i = a_1^i x_1 + \dots + a_N^i \cdot x_N + a_0^i$$

Az így eredményül kapott értékek "singleton" halmazok

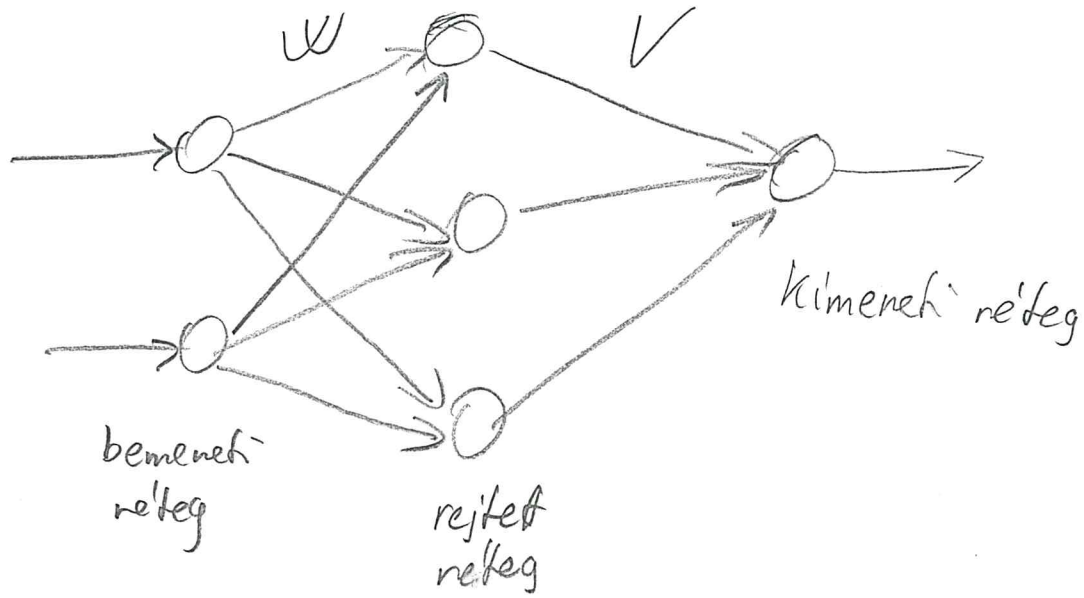
$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

Súlyozott átlag defuzzifikációs módszer:

$$y(\underline{x}) = \frac{\sum_{l=1}^{M} w^l f_l}{\sum_{l=1}^{M} w^l}$$

$$w^l = \prod_{i=1}^{n} \mu_{X_i^l}(x_i)$$

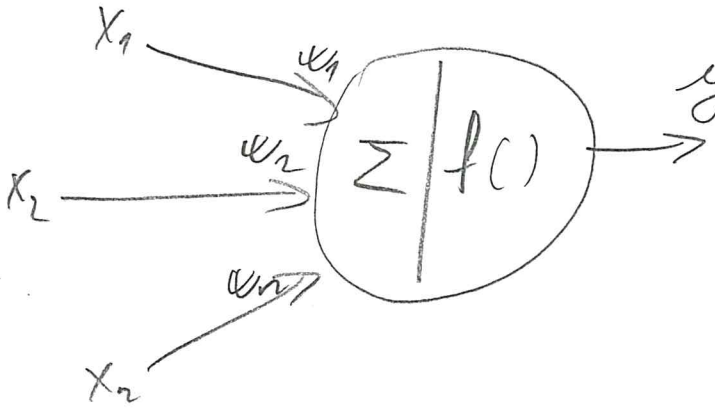
FF neurális hálózatok



Kolmogorov tétel a többváltozós nemlineáris függvények approximálásáról

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=0}^{2n} g\left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \varphi_p(x_p)\right)$$

Tanítható struktúra pl. a hiba visszaterjesztés módszerével.
A neuronok száma a rejtett rétegben és az "f" függvény nem meghatározott!



$$y = f\left(\sum_{i=1}^{n} (w_i \cdot x_i)\right)$$

Egy neuron.

ANFIS
(Adaptive Neuro Fuzzy Inference System)

A Takagi-Sugeno típusú fuzzy szabályozót Li Xin Wang javasolta neurális hálózatként kezelni. Egyesítette a fuzzy struktúrát és a neurális hálózat taníthatóságát.

- A javasolt szabálybázis:

R_i: if x_1 is A_1^i and ... and x_n is A_n^i then y is
$$c_{i1} \cdot x_1 + \dots + c_{in} \cdot x_n + c_{i0}$$
$$i = 1, \dots, m$$

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$

- a javasolt tagsági függvények haranggörbe alakúak:

$$\mu_{A_j^i}(x_j) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_j - \bar{x}_j^i}{b_j^i}\right)^2}$$

- A javasolt T-norma a szorzat

$$w_i = \mu_{A_1^i}(x_1) \cdot \dots \cdot \mu_{A_n^i}(x_n)$$

- $$\hat{y}^i(x) = c_{i1} \cdot x_1 + \dots + c_{in} \cdot x_n + c_{i0}$$

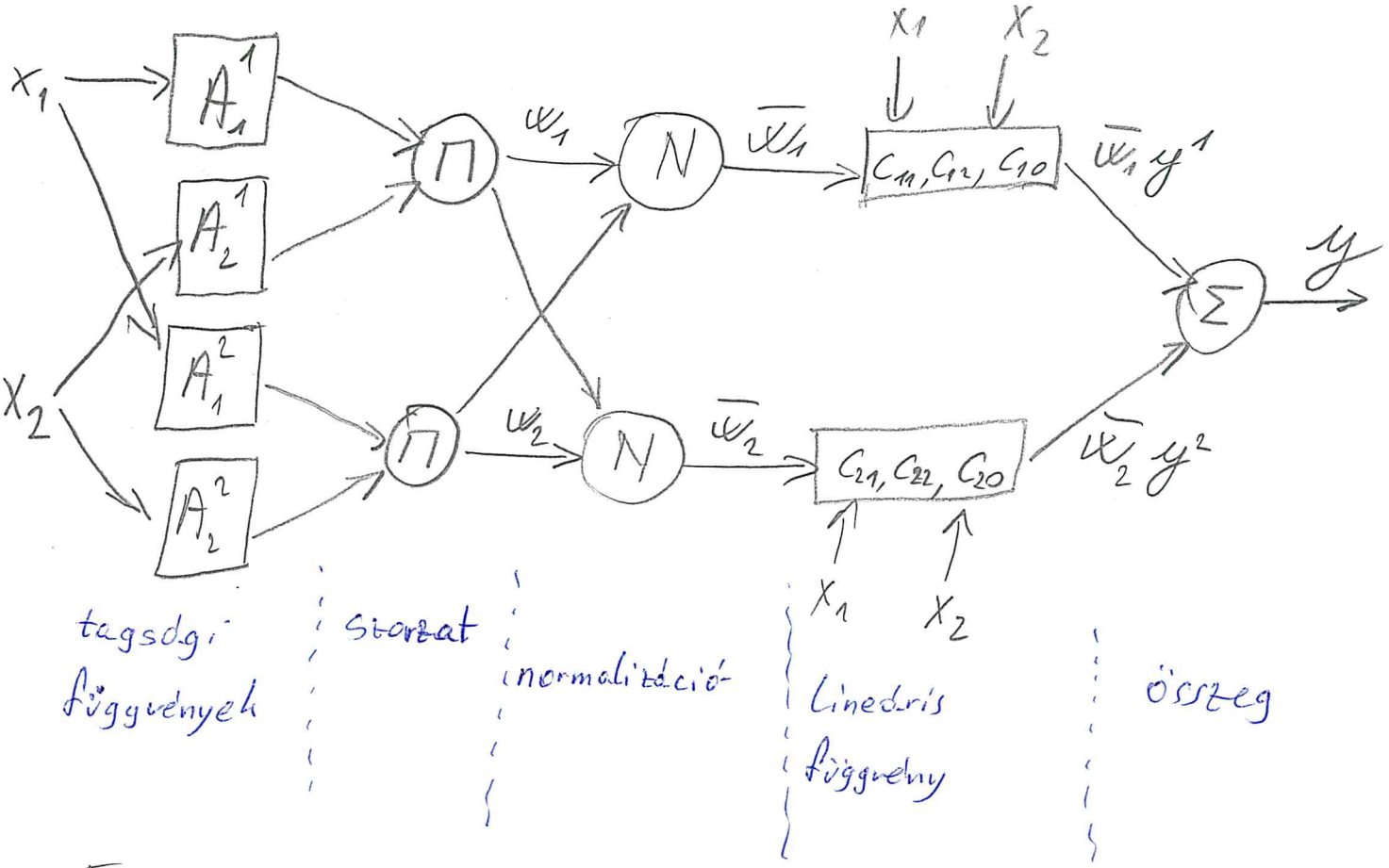
- DF

$$\hat{y} = \hat{f}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i \hat{y}^i(x)}{\sum_{i=1}^{m} w_i} = \sum_{i=1}^{m} \overline{w_i} \hat{y}^i(x).$$

- A paraméterek:

$$\bar{x}_j^i, b_j^i, c_{i1}, \dots, c_{in}, c_{i0}; \; j = 1, \dots, n; \; i = 1, \dots, m$$

Egy két bemenetű és egy kimenetű ANFIS példája:



Tanítási algoritmus:

(x, y) - az előírt

$\hat{y}(x)$ - approximált kimenet

$e = y - \hat{y}$ - hiba

$$E(k) = \frac{1}{2}\left[y(k) - \hat{y}(x(k))\right]^2$$

$$E_{total} = \sum_k E(k)$$

$$\frac{\partial E(k)}{\partial p} = -\left[y(k) - \hat{y}(x(k))\right] \frac{\partial \hat{y}(x(k))}{\partial p}$$

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial p} = \sum_k \frac{\partial E(k)}{\partial p}$$

Az egyes paraméterek szerint:

$$\frac{\partial \hat{y}(x)}{\partial c_{ij}} = \begin{cases} x_j \cdot \bar{w}_i, & \text{ha } j = 1, \dots, n \\ \bar{w}_i, & \text{ha } j = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \hat{y}(x)}{\partial \bar{x}_j^i} = [\hat{y}^i(x) - \hat{y}(x)]\bar{w}_i \frac{x_j - \bar{x}_j^i}{(\sigma_j^i)^2}$$

$$\frac{\partial \hat{y}(x)}{\partial \sigma_j^i} = [\hat{y}^i(x) - \hat{y}(x)]\bar{w}_i \frac{(x_j - x_j^i)^2}{(\sigma_j^i)^3}$$

A két bemenetű példára vonatkoztatva

$$\hat{y}(x) = \varphi^T(x)\,\Theta = [\bar{w}_1(x^T\ 1)\ \ \bar{w}_2(x^T\ 1)] \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \end{bmatrix} =$$

$$= [\bar{w}_1 x_1\ \ \bar{w}_1 x_2\ \ w_1\ \ \bar{w}_2 x_1\ \ \bar{w}_2 x_2\ \ w_2] \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{10} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{20} \end{bmatrix}$$