

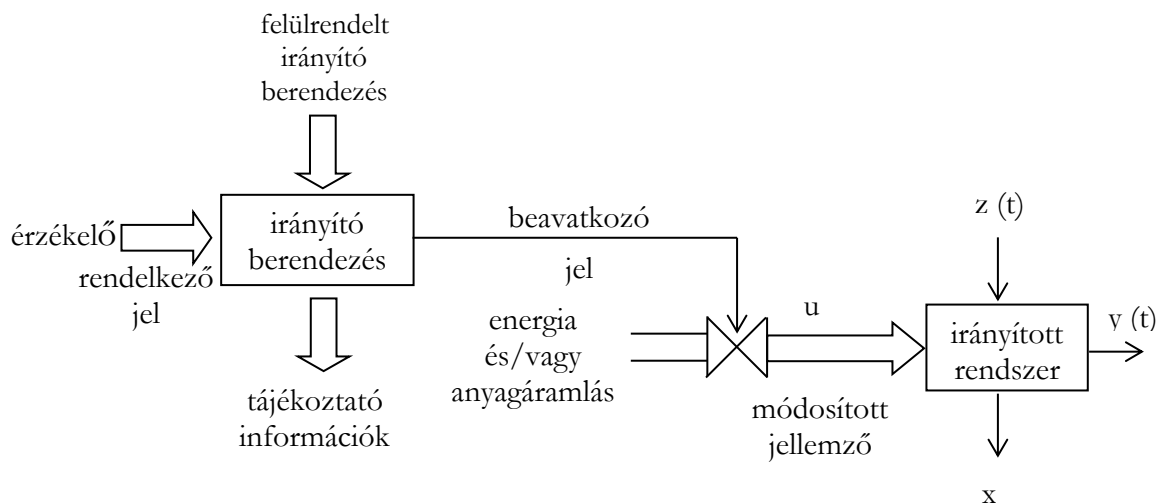
Az irányítás

Az **irányítástechnika** a műszaki tudományoknak azon ága, amely a különféle területeken az irányítási műveletek törvényszerűségeivel, e műveletek vizsgálati módszereivel és az irányítások megvalósításának feltételeivel foglalkozik.

Az **irányítás** olyan művelet, amely valamely folyamatba annak létrehozása (elindítása), fenntartása, tervszerű lefolyásának biztosítása, megváltoztatása vagy megszüntetése (megállítása) végett beavatkozik.

Az irányítás műveletére jellemző, hogy **nagyobb energiájú folyamatokat általában kisebb energiájú hatásokkal befolyásol**. A teljes irányítási rendszerben a folyamat önműködő lefolyását biztosító szervek (az irányító szervek) nem végeznek közvetlen munkát, hanem csak a folyamatokat irányítják.

Az irányítást kézi és önműködő irányításra oszthatjuk. Gyakran biztosított az önműködő irányításról átmenetileg kézi irányításra való áttérés, amit vagy biztonságtechnikai megfontolások indokolnak, vagy pedig az, hogy valamilyen rendszertechnikailag fontos kísérletet emberi felügyelet mellett, kézi irányítással akarnak elvégezni.



1. ábra Az irányító berendezés és irányított rendszer kölcsönhatása a beavatkozó szerven keresztül

Az irányítási folyamat a következő műveletekből áll:

érzékelés: értesülés (információ) szerzése az irányítandó folyamatról

ítéleltalkotás: döntés az értesülés feldolgozása alapján a rendelkezés szükségességéről

rendelkezés: utasítás a beavatkozásra

jelformálás: jelmódosítás, jelerősítés

beavatkozás: az irányított folyamat befolyásolása a rendelkezés alapján.

Az **irányítási rendszer** az irányított rendszert és az irányító rendszert foglalja magában. Az **irányított rendszer** az irányítástól egyébként függetlenül meglévő létesítmény (technológiai folyamat, gép, biológiai szerv, gazdasági egység, stb.), amely az irányítás tárgyát képezi. Az **irányító rendszer** mindazon szervek és készülékek összessége, amelyek együttműködésével az irányított rendszer irányítása megvalósul.

Az irányítás mindig céllal történik.

A **hatáslánc** az irányítási rendszer azon szerkezeti egységeinek sorozata, amelyek az irányítási hatást közvetítik. Az irányítási rendszer leírható szerkezeti vázlattal, működési vázlattal és hatásvázlattal.

Szerkezeti vázlat: Az irányítási rendszer vázlatos vagy jelképes szerkezeti ábrázolása, amely elsősorban a rendszer irányítási szempontból lényeges részeit tünteti fel. A szerkezeti vázlat legtöbbször annak a szakterületnek a szabványos jelöléseit használja, amely az irányított folyamathoz tartozik (pl. erőművi, kémiai ipari, stb.).

Működési vázlat: A hatáslánc szerkezeti részeinek ábrázolási módja, amely e részek irányítástechnikai értelemben funkcionális szerepének jelképi ábrázolásából áll. A szerkezeti egységek téglalapok, a jelek útját pedig hatásvonalak jellemzik. A téglalapokba legtöbbször a szerkezeti egység funkcióját jelölő nevét írjuk be (pl. szabályozó, beavatkozó szerv, érzékelő, szakasz stb.).

Hatásvázlat: A hatáslánc elvi elvonatkoztatott ábrázolási módja, amelyben a **tagokat** és a **jeleket** egyszerű geometriai alakzatok jelképezik. A tagot jelképező alakzatba (téglalapba vagy nemlineáris statikus tag esetén ötszögbe) beírt összefüggés (differenciálegyenlet, állapotegyenlet, átviteli függvény, átmeneti függvény képe, vagy a statikus jelleggörbe) a tag dinamikus viselkedését (jelformáló hatását) jellemzi.

A hatásvázlat részei: a tag, az irányított folyamat (szakasz), a hatásirány és a jelek.

Tag: az irányítási rendszer (hatáslánc) tetszős szerint kiválasztott része jelformáló tulajdonságainak jellemzése, amely a tag jelformáló tulajdonságait jellemző összefüggéssel (matematikai modellel, jelleggörbével) adható meg. **Irányított szakasz:** az irányított rendszer jelátviteli tulajdonságait leíró tag. **Hatásirány:** az az irány, amelyben a jelek a tagokon áthaladnak. A tagok a jeleket csak egy irányban engedik át (visszahatásmentesek).

Bemenő jel: a tagot működésre készítő külső jel.

Kimenő jel: a tag működése folyamán kialakuló jel, a bemenő jel hatása.

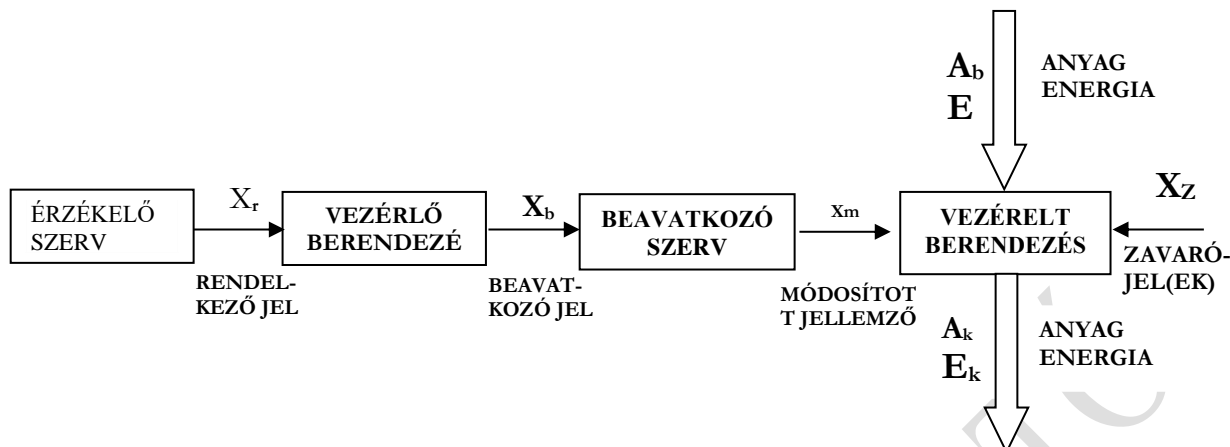
A hatásvázlat pl. blokkvázlattal (blokkémával) adható meg. A blokkvázlat jelzi:

- ◇ a hatáslánc jeleit (vonalak),
- ◇ a hatáslánc tagjait (téglalap, ötszög stb.),
- ◇ a hatásirányt (a vonalakra rajzolt nyilakkal),
- ◇ összegzési (különbségképzési) helyeket, ahol az összegzést vagy különbségképzést kör és a jel útjára rajzolt + vagy - jelzi.

Az irányítás vezérlésre és szabályozásra osztható.

Azokat az irányítási rendszereket, amelyekben az irányító hatások kialakításához nem használják fel az irányított rendszer állapotváltozásainak az irányítás folyamán felvett és

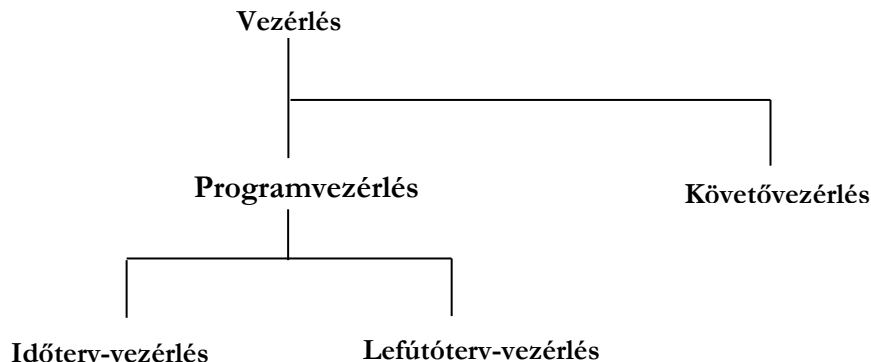
érzékelők által mért értékeire vonatkozó információt **vezérlésnek**, vagyis nyíltlancú irányításnak nevezzük.



2. ábra – A vezérlés működési vázlata

A vezérlés művelete során a bemenő jel, azaz a vezérlési parancsban megfogalmazott x_r rendelkező jel végigfut a hatásláncon, a vezérlő berendezés egyes szervein. A vezérlő berendezés kimenő jele az x_b beavatkozó jel, amely működteti a beavatkozó szervet, a beavatkozó szerv kimenete az x_m módosított jellemző, amely a vezérelt berendezésben lejárló folyamatot befolyásolja. A vezérelt berendezésre a módosított jellemzőn kívül zavaró jelek is hatnak.

A vezérléstechnika részletesebb felosztása:

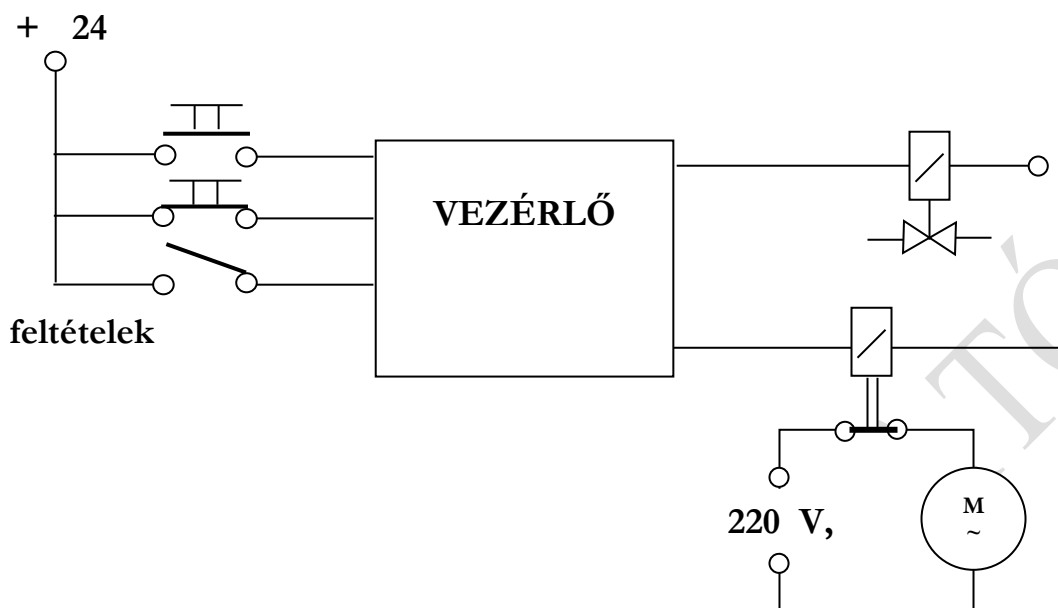


3. ábra A vezérlés felosztása

Időterv-vezérlés esetén a rendszerbe való beavatkozást az idő vagy az időtől függő program befolyásolja. Időterv-vezérlést alkalmazunk például az utcai világítás vezérlésénél. Az irányító, azaz a vezérlőberendezés minden nap egy adott időben bekapcsolja, és egy adott időben kikapcsolja az utcai világítást függetlenül attól, hogy már sötét, vagy világos van-e. Ahhoz, hogy a be – vagy kikapcsolás idejét megváltoztassuk, a vezérlési programban bizonyos beavatkozást kell elvégeznünk.

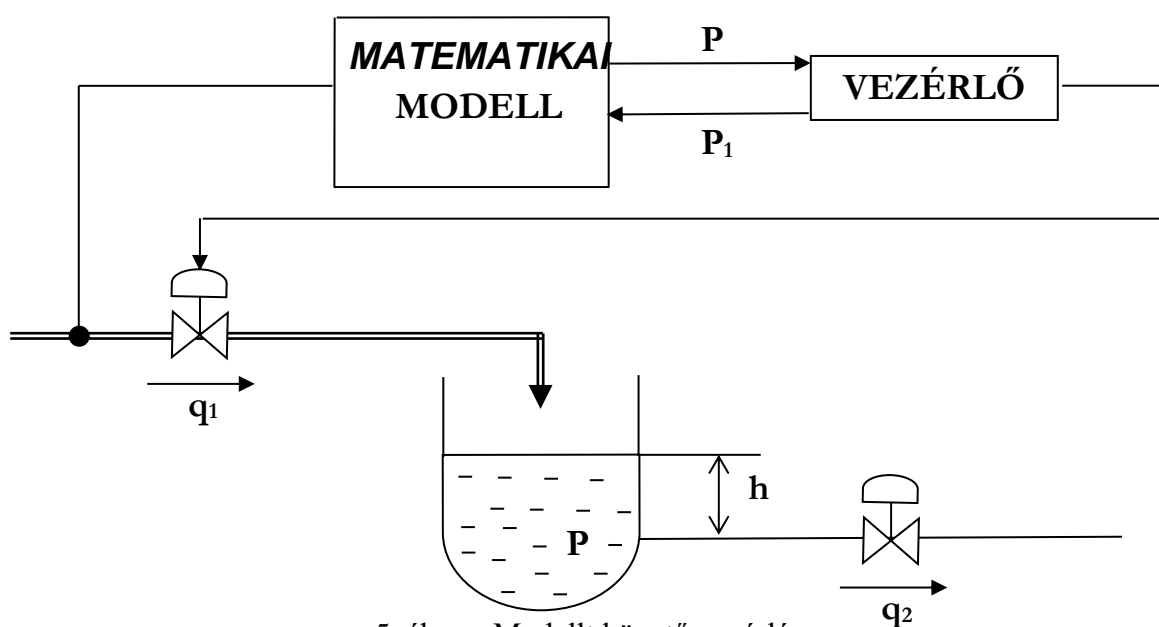
A lefutóvezérlésben az irányított rendszerben vezérlendő folyamat egyes szakaszai csak akkor kezdődhetnek meg, ha az előző szakaszok már lejátszódtak. Tehát a folyamattól függő egyes feltételek fennállása indítja meg a folyamat további szakaszát. Lefutóvezérlést alkalmazunk például a klasszikus mosógépekben. Az indítógomb

megnyomása után, feszültséget kap a vízbeeresztő elektromágneses szelep és megindul a víz a tárolóba. Ha a víz elérte a kívánt szintet, akkor bezárjuk a szelepet és megindítjuk a forgómotort stb. Egy lefutóvezérlés leegyszerűsített szerkezeti vázlata az alábbi ábrán látható:



4. ábra – Lefutóvezérlés

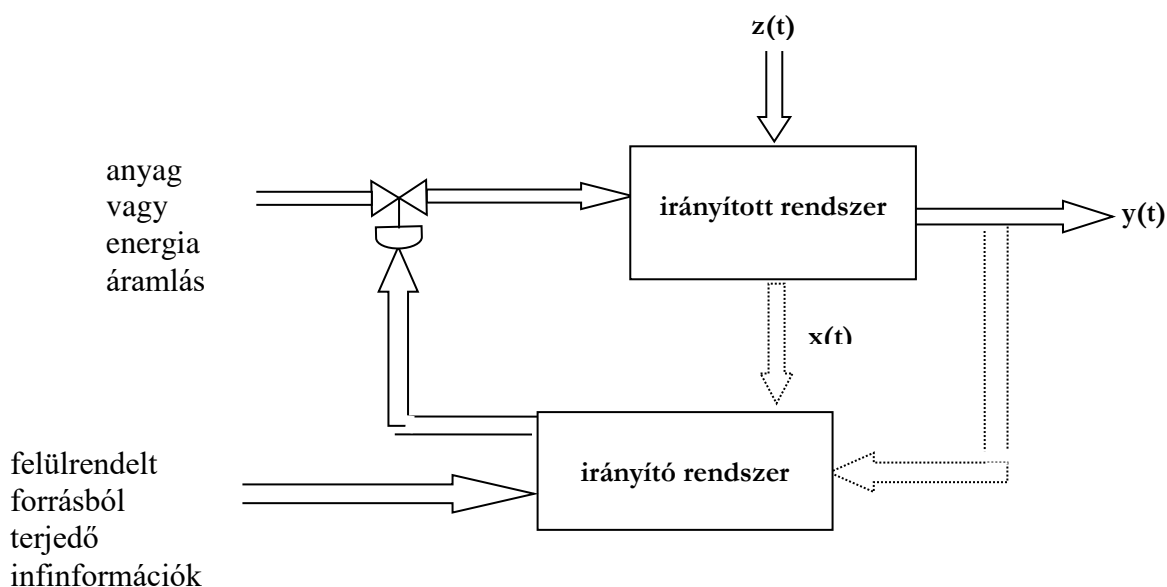
Követővezérlésben a beavatkozó szerv az irányító rendszertől előre megállapítható módon függő parancsot kap, és az irányított rendszert a kívánt irányban befolyásolja. A már említett utcai világítás esetében, az utca megvilágítását, mérjük. Ha ez egy érték alá vagy fölé esik, függetlenül attól, hogy hány óra van, a világítást bekapcsoljuk vagy kikapcsoljuk. Ebbe a kategóriába tartozik a sokkal bonyolultabb matematikai modellt követő ún. megelőző irányítás is. A 5. ábrán egy modellt követő vezérlő rendszer vázlata látható.



5. ábra – Modellt követő vezérlés

Bonyolult vezérlések gyakori megoldásaként a mérnökök PLC (Programmable Logic Controlier) berendezéseket alkalmaznak. A PLC alkalmas a rendszer indítására, leállítására, bonyolult szekvenciális beavatkozássorozatok elvégzésére.

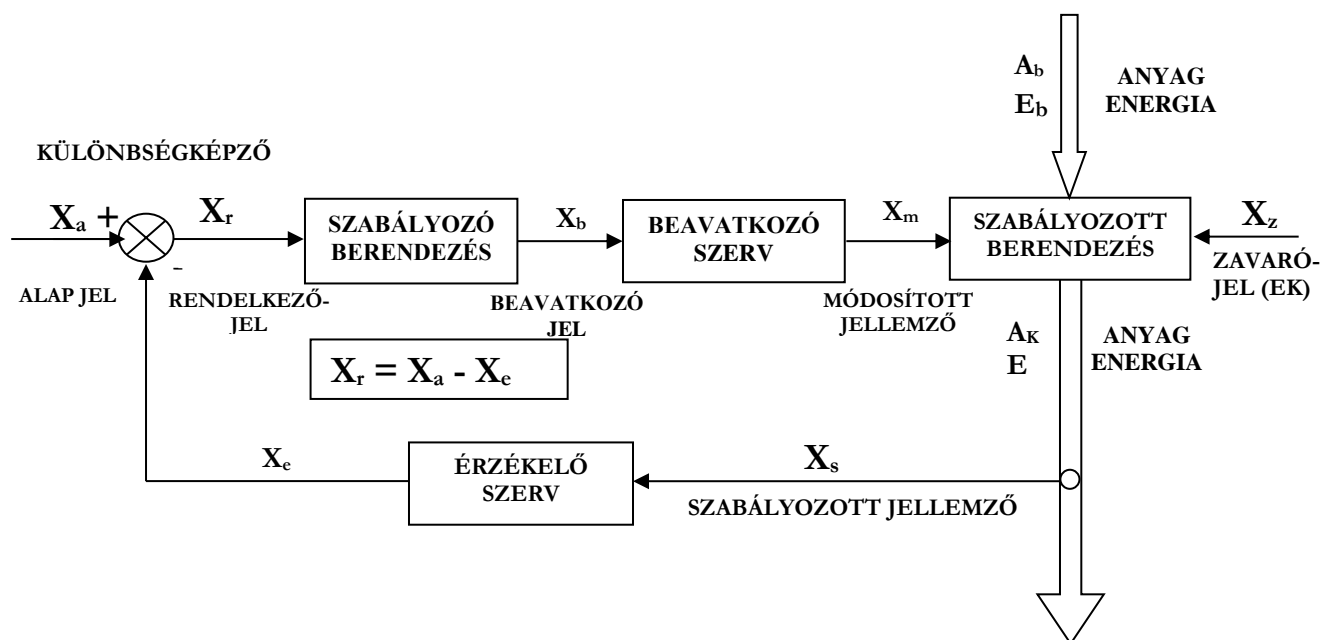
Azokat a rendszereket, amelyekben az irányító hatások kialakításához, felhasználjuk az irányított állapot jellemző értékeire vonatkozó információt, **zártláncú irányítási** rendszereknek nevezzük. Ez az információ lehet az irányított rendszer kimeneti vektorjának $y(t)$, vagy állapotvektorjának minden eleme, vagy ezek kombinációja. A 6. ábrán egy zárt láncú irányítási rendszer vázlata látható:



6. ábra – Zárt láncú irányítási rendszer

A zárt láncú irányítási rendszereket **szabályozások**nak is szokták nevezni. A szabályozás leggyakrabban alkalmazott válfaja a hibajelre alapozott szabályozás.

A hibajelre alapozott szabályozás a továbbiakban mindig zárt láncú irányítási feladat. A szabályozási rendszerekben az eddig használt irányítási meghatározásokat, szabályozási meghatározásokkal helyettesítjük. Így az irányított szakasz, szabályozott szakasz, az irányító berendezés, szabályozó stb. A 7. ábrán a szabályozás működési vázlata látható. Pozitív rendelkezőjel (hibajel) esetén a beavatkozó jel negatív, negatív rendelkező jel esetén pedig pozitív. A hatás előjelének megfordítása azt jelenti, hogy az emelkedő szabályozott jellemző esetében, a beavatkozást a szabályozó csökkenti, süllyedő szabályozott jellemző esetén pedig növeli.

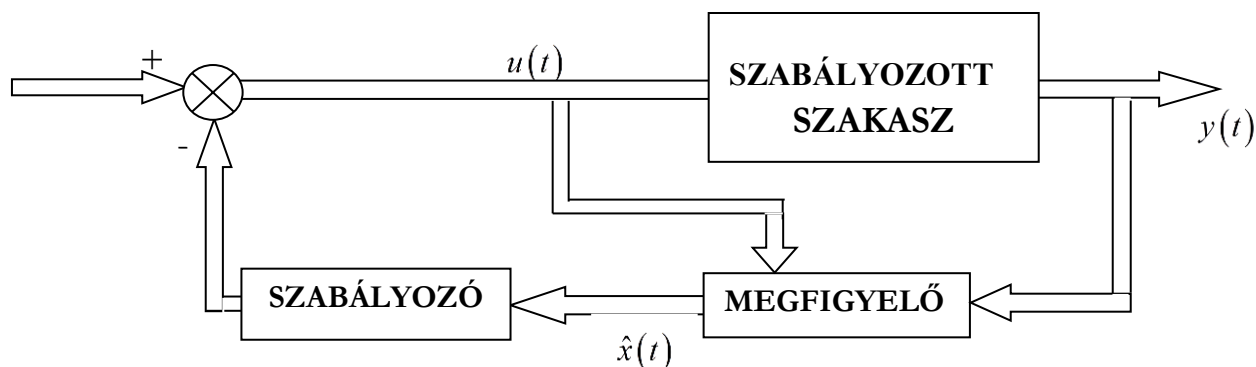


7. ábra A szabályozás működési vázlata

A szabályozás művelete során az x_r **rendelkező jel**, amely az előre megadott vagy folyamatosan mért x_a **alapjelnek** és a szabályozott jellemző pillanatnyi értékétől függő x_e **ellenőrző jelnek** a különbsége ($x_r = x_a - x_e$), végigfut a szabályozó berendezés egyes szervein. A szabályozó berendezés kimenő jele az x_b **beavatkozó jel**, a beavatkozó szerv kimenőjele az x_m **módosított jellemző**, amely a szabályozott berendezésben lezajló folyamatot befolyásolja. A szabályozott berendezésre a módosított jellemzőn kívül x_z zavaró jelek is hatnak. A szabályozott berendezésben lezajló folyamatnak a szabályozás szempontjából lényeges jellemzésére az x_s **szabályozottjellelemző** szolgál, amelyről az ellenőrző szerv mérés útján szolgáltat információt az x_e ellenőrző jel alakjában. Az ellenőrző jel és az alapjel azonos fizikai dimenziójúak. Mivel a szabályozott jellemző legtöbbször nemvillamos mennyiség, ezért mérésükre jelátalakítót alkalmaznak, amely valamilyen fizikai elvet felhasználva a szabályozott jellemző értékét villamos jellé alakítja át. Sok esetben a jelátalakítás zaj védettségének biztosítására távadókat is alkalmaznak, amelyek szabványos tartományú kimenőjeleket szolgáltathatnak az irányító rendszer számára (0-1V, 0-10V, 0-5 mA, 0-20 mA, 4-20mA).

Ha a szabályozási rendszer megvalósításához egy visszacsatolást és egy módosított jellemzőt alkalmazunk, akkor **egyhurkú szabályozásról** beszélünk. Abban az esetben, ha a visszacsatolások száma egytől nagyobb, akkor mért jellemzőként választhatjuk a kimenet vagy állapotvektor elemeit. Ha a mért jellemzők a kimeneti vektor elemei, akkor a szabályozás nem teljes, ha pedig mért jellemzőként az állapotvektor független elemeit használjuk, akkor teljes vagy állapotszabályozásról beszélünk. Ebben az esetben minden állapotváltozót mérni kell. Ha ez nem lehetséges akkor az egyes állapotváltozatokat egy

ún. megfigyelő (obszerver) alkalmazásával tudjuk becsülni. Az 8. ábrán egy többváltozós, teljes, megfigyelővel kiegészített szabályozás vázlata látható:

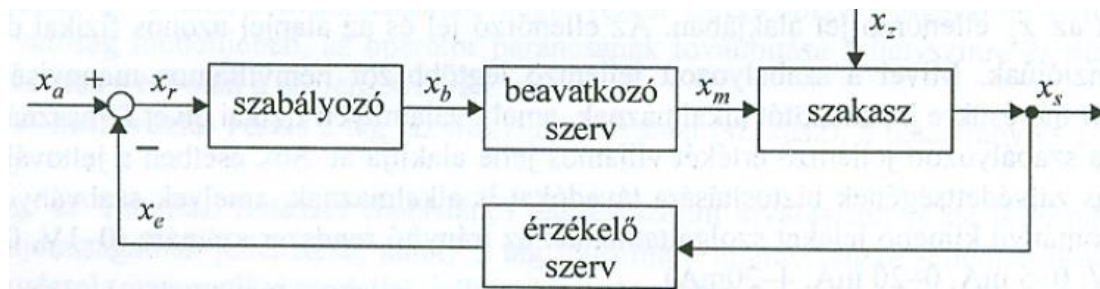


8. ábra – Többhurkos, teljes, megfigyelővel kiegészített szabályozás

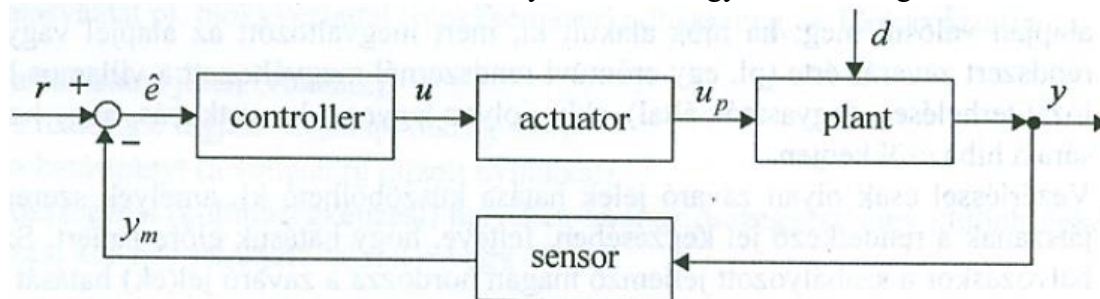
A szabályozás és a vezérlés összehasonlítása:

1. A vezérlés hatáslánca nyitott, a vezérlés eredményéről a vezérlő berendezés nem kap visszajelzést, működését kizárólag a rendelkező jel befolyásolja.
2. A szabályozási rendszer hatáslánca zárt, a szabályozó berendezést működtető rendelkező jel visszajelzést tartalmaz a megelőző beavatkozás eredményéről, az ellenőrző jel összetevő hatására. A szabályozási művelet a visszacsatolás elve alapján valósul meg: ha hiba alakult ki, mert megváltozott az alapjel vagy a rendszert zavarás érte, akkor olyan legyen a beavatkozás, hogy hatására a hiba csökkenjen.
3. Vezérléssel csak olyan zavaró jelek hatása küszöbölhető ki, amelyek szerepet játszanak a rendelkező jel képzésében, feltéve, hogy hatásuk előre ismert. Szabályozáskor a szabályozott jellemző magán hordozza a zavaró jel(ek) hatását is, ezért lehetőség van minden zavaró jel hatásának kiküszöbölésére akkor is, ha nem mérjük azokat.
4. Az irányítási szervek (különös tekintettel az irányított rendszer) jelátviteli tulajdonságait vezérlés esetén eléggé pontosan ismerni kell, mivel a beavatkozás hatásáról nincs visszajelzés (nincs ellenőrző szerv, amely a szabályozott jellemzőt méri). Szabályozás esetén a visszacsatolás csökkenti a szervek jelátviteli tulajdonságainak hatását.
5. A nyílt vezérlés (stabilis irányított folyamatot feltételezve) stabilisan működik, a zárt szabályozás ellenben a visszacsatolás hatására labilissá válhat.

A szabályozási kör felépítését az 9 és 10. ábra tartalmazza. Az első ábrában a szabványos magyar terminológiát alkalmaztuk a másodikban az angolszász és amerikai nyelvterületen használatosat.



9. ábra – szabályozási kör magyar terminológiával



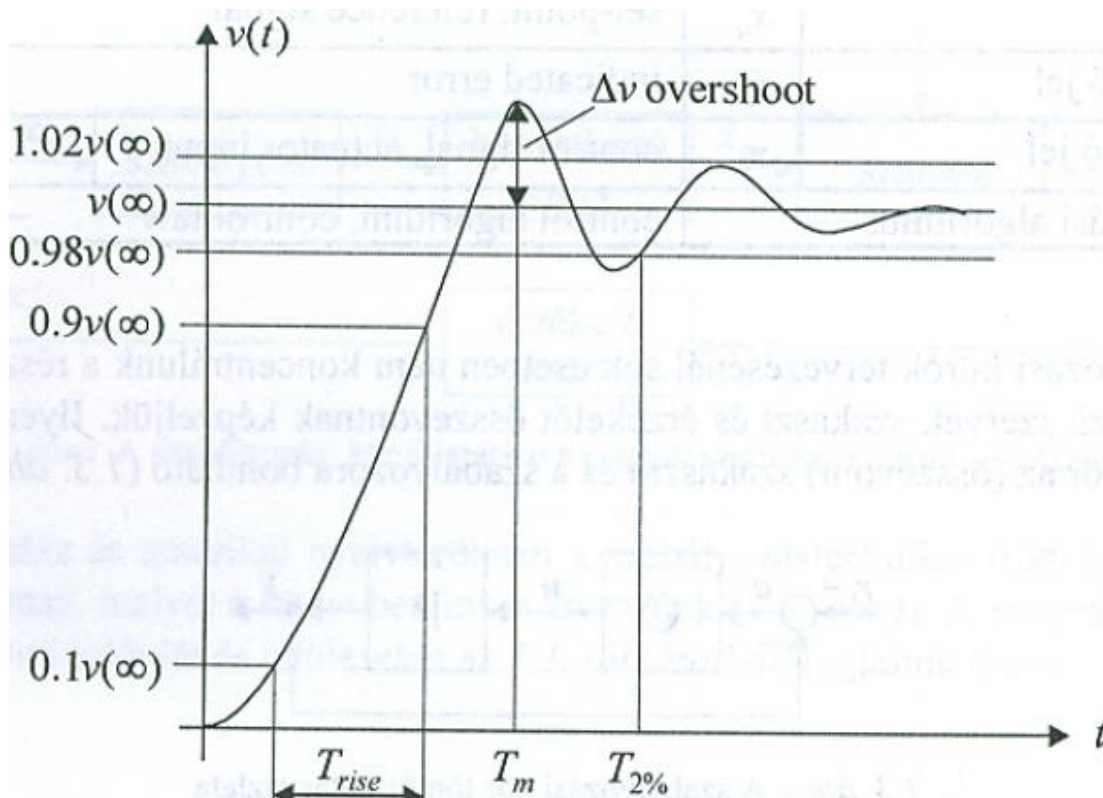
10. ábra – szabályozási kör angolszász terminológiával

A magyar és az angolszász terminológiát és jelöléseket összefoglaló táblázat:

magyar	angol
Irányítás	control
Szabályozás	feedback control, closed loop control
Vezérlés	open loop control
Szabályozott szakasz (folyamat)	plant, process
Beavatkozó szerv	actuator
Érzékelő	sensor
Szabályozó	controller
szabályozott jellemző	x_s plant output, controlled variable
módosított jellemző	x_m plant input, manipulated variable
zavaró jel	x_z disturbance, noise
ellenőrző jel	x_e measured output, sensor output
alapérték	$x_{s,a}$ desired plant output
alapjel	x_a set-point, reference signal
rendelkező jel	x_r indicated error
beavatkozó jel	x_b control signal, actuator input
szabályozási algoritmus	control algorithm, control law

Szabályozások minőségi jellemzői

Egy tipikus szabályozási kör tranziens:



Relatív egységek

A jelátviteli tagok átviteli tényezői dimenziós mennyiségek, például cm/(liter/perc), vagy egy motor esetében a kimenőjel fordulatszám, a bemenőjel feszültség, így az átviteli tényező dimenziója (rad/sec)/Volt. Ha mind a bemenőjeleknél, mind a kimenőjeleknél az aktuális értékeket egy reálisan megválasztott maximális értékhez viszonyítjuk, a jeleket 0 és 1 közé eső dimenzió nélküli relatív értékekkel adhatjuk meg. Szabályozási köröknél ügyelni kell arra, hogy az összegzési vagy különbségképzési pontoknál az Összehasonlítandó mennyiségekre azonos maximális értékeket vegyünk fel.

Az idő dimenziójú mennyiségeket is megadhatjuk relatív értékekkel, ha az időváltozóra is felveszünk egy maximális értéket.

Modellezés és szimuláció

Egy rendszert, teljes mértékben megismerni nem lehetséges. Nehéz elkülöníteni a rendszert és a rá ható zavarokat, általában a belső konstrukció is csak lényegét tekintve ismert, sorozatgyártás esetében nagyon nehéz (lehetetlen) két azonos paraméterekkel rendelkező rendszert legyártani, a paraméterek változnak az idő során (öregedés), így könnyen belátható, hogy a hatások elvben végtelen lánc következtében, a rendszert bizonyos mértékig mindig ismeretlennek kell tekintenünk.

A rendszer megismerésének legfőbb eszközei a modellezés, szimuláció és a mérések alapján végzett identifikáció. A modellezés alapgondolata a különböző tárgyak hasonló vonásain alapszik. A „tárgy” és a „hasonlóság” fogalmakat ebben az esetben igen tág értelemben használjuk. A hasonlóság lehet teljesen külsőleges, de vonatkozhat külsőleg egyáltalán nem hasonló tárgyak belső szerkezetére, vagy olyan tárgyak viselkedésének egyes vonásaira, amelyeknek sem formájában, sem felépítésében nincs semmi közös. Ha két tárgy között bármilyen, legalább egyetlen vonatkozásban megállapítható a hasonlóság, akkor fennáll köztük a modell és az eredeti viszonya.

A modellek felépítésének és felhasználásának problémái különböző szempontokból merülnek fel, és nyernek megoldást. Modellnek tekintjük a bonyolult valóságos rendszer egyszerűsített, áttekinthető, megvalósított mását vagyis a fizikai modellt, és az elképzelt, matematikailag leírható, idealizált, elvi másolatát, a matematikai modellt is.


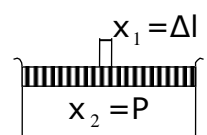
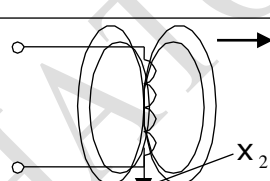
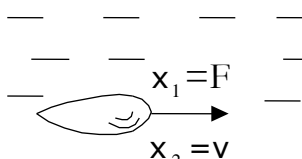
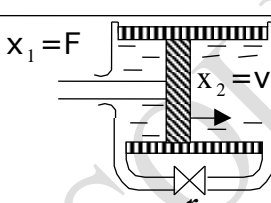
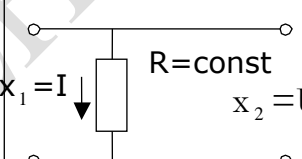
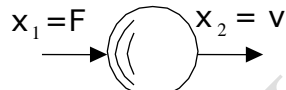



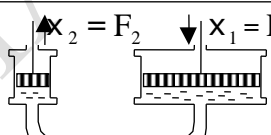
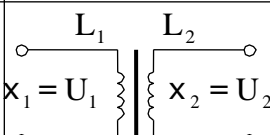
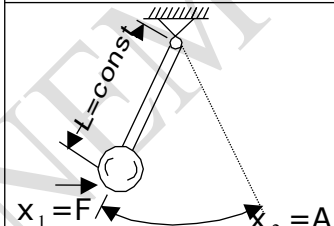

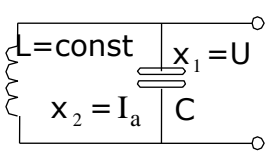
A matematikai modell a rendszer teljes vagy részletes viselkedésének matematikai leírása, a rendszer bemenő és kimenő jellemzőinek valamilyen matematikai összefüggéssel vagy összefüggésrendszerrel (relációval) leírt kapcsolata. A matematikai modellezés korlátai eleve világosak: minden matematikai leírás számos egyszerűsítést tartalmaz, a folyamat fizikai-kémiai összefüggéseit rendszerint lényegesen több tényező befolyásolja, mint amennyit számításba lehet venni. A matematikai modell jelentőségét különösen az a körülmény emeli ki, hogy valóságos viszonyok között fizikailag meg sem valósítható, vagy csak igen költségesen felépíthető rendszerek vizsgálatára alkalmas.

Azokat a különböző természetű, illetve felépítésű rendszereket, amelyek modelljeiben és azok viselkedéseiben formális hasonlóságok találhatók, analóg rendszereknek nevezzük. A 3.1 ábrán látható néhány analógia. Ezen analógiákat az irányítási rendszerek kialakításában és modellezésében is használjuk. A hasonlóságok vagyis analógiák felismerésében sokat segíthetnek a 3.2 ábrán táblázatba foglalt fizikai hasonlóságok.

A modell lehet statikus vagy dinamikus; tehát vagy időbeli összefüggéseket nem tartalmazó, csak állandósult állapotokra szorítkozó, vagy pedig a változó állapotokat is leíró időfüggvényt magába foglaló leírás. Nyilvánvaló, hogy a dinamikus modell a helyesebb, és az irányítás szempontjából legtöbbször alkalmazott.

A matematikai modell mindig csak megközelítőleg írhatja le a valódi rendszert, ezért a megközelítés szempontjából nagyon fontos a modell célja. A tervezési feladatokban statikus jellegű modellek készülnek, és azok is csak a fő tervezési technológiai jellemzőkre vonatkoznak. Másfajta modelleket készítünk a rendszer irányítási algoritmusának meghatározására.

Mivel a modell számunkra fontos ki- és bemenő jellemzők közötti kapcsolatot ír le, ezért a modellalkotásnál az első lépés a modellben szereplő változók meghatározása. Az egész rendszerre jellemző, végtelen sok közvetett és közvetlen módon mérhető, vagy becsülhető jellemzők közül azokat választjuk ki, amelyek a rendszer adott célú leírása és működtetése érdekében fontosak. Ezek közül szétválasztjuk az általunk befolyásolható módosító jellemzőket, a zavaró jellemzőket, azokat a jellemzőket, amelyek valamilyen módon jelzik a rendszer állapotát, és ezért meghatározott értéken, határok között tartandók, de a rendszer irányításában nem kapnak alapvető szerepet; továbbá az egész rendszer gazdasági hatékonysága, a termék minősége stb.

mechanikai analóg	pneumatikus és hidraulikus analóg	elektromos analóg
		
		
		
		
		

3.1. ábra. Különböző fizikai rendszerek analógiája

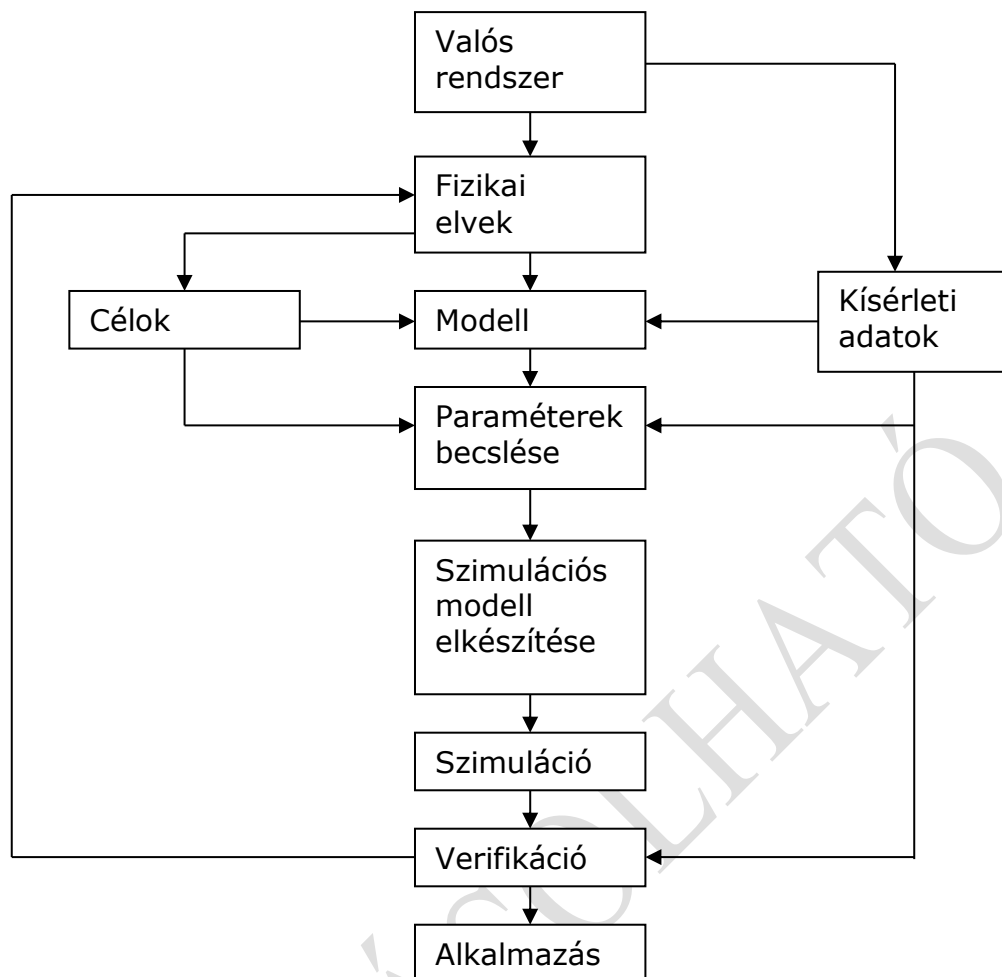
Soros villamos Kör	Párhuzamos villamos kör	Mechanikai haladó rendszer	Mechanikai forgó rendszer	Termikus rendszer	Hidraulikus rendszer	Pneumati- kus rendszer
feszültség	áram	Erő	Nyomaték	hőfok- különbség	Nyomás- különbség	Nyomás- különbség
Töltés	tekercs fluxus	elmozdulás	szög-elfordulás	hőmennyiség	folyadék- mennyiség	gázmennyi- ség
Áram	feszültség	Sebesség	szög sebesség	hőáram	Folyadék áram	Gázáram
induktivitás	Kapacitás	tömeg	Tehetetlen- ségi állandó	-	Hidraulikus tehetetlen- ségi állandó	-
ellenállás	Vezetés	viszkózus surlódási együttható	Viszkózus surlódási együttható	hőellenállás	Hidraulikus ellenállás	pneumati- kus ellenállás
kapacitás	Induktivitás	reciprok rugóállandó	Reciprok torziós rugóállandó	hőkapacitás	Hidraulikus kapacitás	pneumati- kus kapacitás

3.2. ábra. Különböző analóg rendszerek és fizikai hasonlóságok

Mivel a modell több vonatkozásban szükségszerűen eltér valós párjától, hasznossága nagymértékben függ az e szándékos vagy véletlen eltérés által létrehozott egyszerűsítés mértékétől. Meg kell jegyezni, hogy a modellek nem lehetnek pontosabbak, mint a bennük felhasznált fizikai és kémiai paraméterek pontossága. Minden modell közelítő, ezért a modellalkotásnál szükséges az átdolgozható fejlesztés és kísérleti igazolás. A 3.3. ábra. érzékelteti, mennyire iteratív, állandó finomítást is magába foglaló folyamat a modellalkotás.

A fizikai vagy matematikai modellen elvégzett kísérleteket szimulációnak nevezzük. A számítógépek elterjedésével a szimuláció a mérnöki munka igen hatásos segédeszközévé vált.

Ha a matematikai modellen és a valós rendszeren azonos jellegű kísérleteket végzünk el, akkor a kapott eredmények kiértékelése alapján a modell alkalmazhatóságát igazolni, vagyis verifikálni tudjuk. Ha az eltérések jelentősek, akkor a modell felépítésében bizonyos módosításokat kell alkalmazni.



3.3. ábra. Az alkalmazást megelőző modellfejlesztés ciklusos természete

A matematikai modell alkotásának általános eszközei:

- algebrai egyenletek,
- differenciálegyenletek - állapotegyenletek,
- transzformált egyenletek,
- logikai egyenletek,
- tapasztalatbeli - heurisztikus alapokon felállított relációk.

Az algebrai egyenletek a statikus modellt, a differenciálegyenletek, illetve az állapotegyenletek, az időbeli összefüggéseket, tehát a dinamikus modellt adják. A problémák jelentős részénél szemléletesen egyszerűbb formát adnak az időtartományból transzformált függvénytypusok.

Hasznos linkek:

<http://lpsa.swarthmore.edu/Analog/ElectricalMechanicalAnalog.html>

http://www.dartmouth.edu/~sullivan/22files/System_analogy_all.pdf

<http://alexandria.tue.nl/repository/freearciles/604112.pdf>

http://multimechatronics.com/images/uploads/mech_n/Electrical_Mechanical_Analogy.pdf

Sima, nemlineáris rendszer linearizálása

A sima rendszer esetében az állapotátmenet függvény legalább egyszer differenciálható és így felírható a következő vektoregyenletekkel:

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

$$y = g(x, u, t).$$

általános esetben legyen a rendszer MIMO, és akkor a jelölésmódok:

$$x - \text{állapotvektor} \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

$$u - \text{bemeneti vektor} \quad u = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T,$$

$$y - \text{kimeneti vektor} \quad y = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$$

és t a független változó.

A kis Δu vektorral meghatározott változásokra, az u_0 és x_0 vektorokkal megadott munkapont bizonyos környezetében, az állapotvektor változásai sorfejtéssel meghatározhatók. A Taylor – sorfejtést végezzük el az első taggal bezárva:

$$\dot{x} + \Delta \dot{x} \approx f(x_0, u_0, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \cdot \Delta u,$$

ahol

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix},$$

$$y + \Delta y \approx g(x_0, u_0, t) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \cdot \Delta u.$$

Miután elvégeztük a következő helyettesítést:

$$z = \Delta x, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0}, \quad v = \Delta u,$$

$$w = \Delta y, \quad C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}, \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_0, u_0},$$

az új változókkal meghatározott állapotteres modellt kapjuk:

$$\dot{z} = A \cdot z + B \cdot v,$$

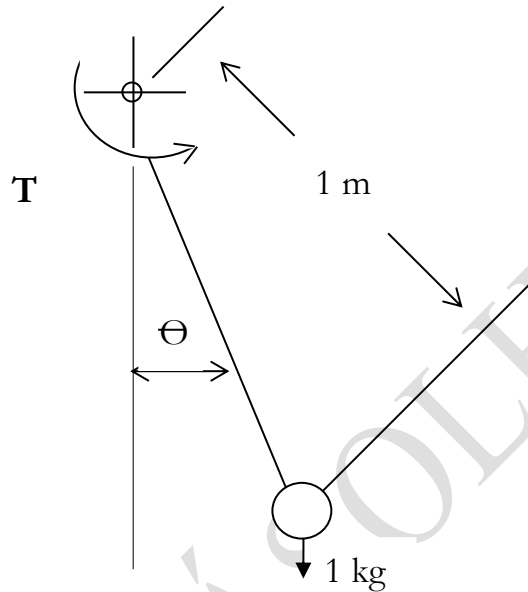
$$w = C \cdot z + D \cdot v.$$

1. Példa

A 1.15. ábrán vázolt inga tömege 1 kg, a zsineg hossza 1 m. A súrlódás elhanyagolásával és a T kimozdító nyomaték figyelembevételével az inga mozgása a következő egyenlettel írható le: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -9.81\sin(\theta) + T$.

írható le: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -9.81\sin(\theta) + T$.

1.15. ábra. A matematikai inga leegyszerűsített vázlata.



Végezzük el a modell linearizálását.

A megoldás menete:

Ha az inga állapotváltozói $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, a bemenet $u = T$ és a kimenet $y = \theta$, akkor az inga állapotegyenlete:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ f_2(x, u, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -9.81\sin(x_1) + u \end{bmatrix}; \quad y = g(x, u, t) = x_1,$$

egyensúlyi helyzet és $x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_d \\ 0 \end{bmatrix}$ munkapont határozza meg.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(-9.81\sin(x_1) + u)}{\partial x_1} & \frac{\partial(-9.81\sin(x_1) + u)}{\partial x_2} \end{array} \right]_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81\cos(x_{10}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{x_0, u_0} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial(-9.81 \sin x_1 + u)}{\partial \mathbf{u}} \end{array} \right]_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0,$$

A nemlineáris rendszer linearizált állapotegyenletei:

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 \cos x_{10} & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u,$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x.$$

NEM MÁSOLEHATÓ

Folyamatos jelű lineáris rendszerek vizsgálata

A lineáris, koncentrált paraméterű dinamikus rendszerek vizsgálata abban az esetben, ha a rendszer hatásláncában minden jel folytonos akkor differenciálegyenlet illetve differenciálegyenlet-rendszerek megoldására vezethető vissza.

Ha a hatáslánc legalább egy jele diszkrét, akkor differenciaegyenleteket és differenciaegyenlet-rendszereket alkalmazunk. Az irányítástechnikai gyakorlatban a differencia és differenciál egyenletek felírása gyakran az állapottér módszer alkalmazásával történik.

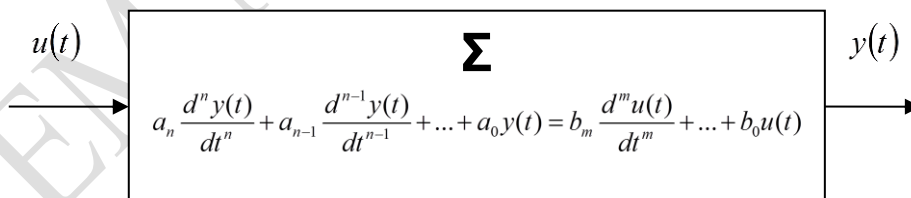
A dinamikus rendszerek tárgyalása közben független változónak mindig az időt tekintjük. A lineáris, folyamatos, koncentrált és állandó paraméterű rendszer vizsgálata differenciálegyenletek ill. egyenletrendszerek megoldására vezethető vissza. Az egyenleteket a fizika alaptörvényei alapján írjuk fel, például az elméleti mechanika Lagrange-féle és Hamilton-féle tételei és a leszámaztatott Newton és Kirchhoff szabályok szerint.

4.1 Az n -ed rendű állandó együtthatós differenciálegyenlet megoldása időtartományban

Egy $y(t)$ folytonos kimenetű és $u(t)$ folytonos bemenetű autonóm, állandó és koncentrált paraméterű rendszer kimenet-bemenet viszonya a következő n -ed rendű általános differenciálegyenlettel írható le :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t), \dots \dots \dots (4.1)$$

Vagyis a rendszer a következő:



4.1.ábra. A rendszer matematikai modellje

az a_i és b_i együtthatók rendszerállandók, és fizikai rendszerek esetében érvényes az $m \leq n$ összefüggés.

A (4.1) differenciálegyenlet felírható az alábbi

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \dots \dots \dots (4.2)$$

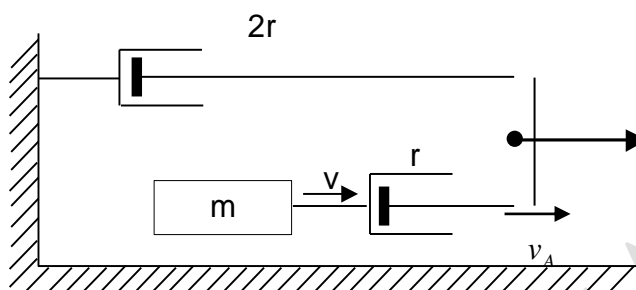
formában is.

A rendszerre jellemző differenciálegyenlet rendszámát alapvetően a rendszer energiatárolóinak száma szabja meg. A haladó mozgású rendszer energiatárolói: a tömeg és a rugó, a villamos hálózat energiatárolói: a kondenzátor és az induktivitás. A

kimenetre (y -ra) vonatkozó differenciálegyenletek rendszára általában megegyezik az energiatárolók számával, egyes esetekben annál kisebb is lehet.

Mielőtt rátérnénk a differenciálegyenlet megoldására, lássunk néhány példát a rendszer törvényszerűségeinek felírására.

A 4.2. ábrán. látható mechanikai lengő rendszer egyetlen energiatárolót tartalmaz. A bemenet legyen az F_G gerjesztő erő, a kimenet az m tömeg v sebessége. További jelölések: r -súrlódási együttható, v_A az A pont sebessége.



4.2. ábra. Mechanikai lengő rendszer vázlata

Az fenti ábrán látható rendszer egyenlete:

$$2r \cdot v_A + r(v_A - v) = F_G \dots\dots\dots (4.3)$$

$$m \frac{dv}{dt} - r(v_A - v) = 0 \dots\dots\dots (4.4)$$

(4.3) alapján:

$$v_A = \frac{1}{3r} F_G + \frac{1}{3} v \dots\dots\dots (4.5)$$

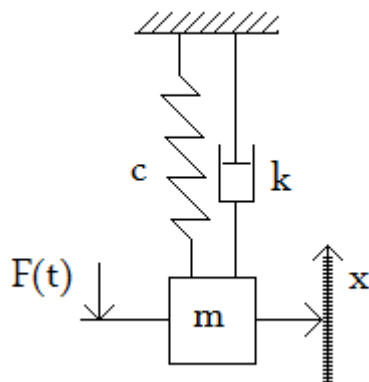
És végül a rendszer leíró elsőrendű differenciálegyenlet:

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{2}{3} r v = \frac{1}{3} F_G \dots\dots\dots (4.6)$$

$$\text{A (4.6) általános alakja: } a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \dots\dots\dots (4.7)$$

ahol: $a_1 = m$, $a_0 = \frac{2}{3} r$, $b_0 = \frac{1}{3}$ állandó együtthatók és $y = v$ kimenet valamint $u = F_G$ bemenet.

Példa egy másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletre:
Rugó és csillapítás



A rendszer matematikai modellje: $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t)$ differenciálegyenletet.

Az egyenletben szereplő állandók a következők: m (tömeg), k (csillapítás), c (merevség). Ezen m , k , c állandók állandó értékeket vesznek fel.

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

Első lépésként a karakterisztikus polinomot írjuk fel: $mr^2 + kr + c = 0$

Ezen polinom gyökei a következők:

$$r_{1,2} = \sigma \pm j\omega \quad (\text{tehát a valós és képzetes rész})$$

csillapítási tényező

saját körfrekvencia

$X(t) = X_H(t) + X_p(t)$, tehát a homogén illetve a partikuláris megoldás összegeként áll elő.

A homogén megoldás csakis kizárólag a kezdeti feltételektől és a rendszertől függ! (A gerjesztéstől nem!)

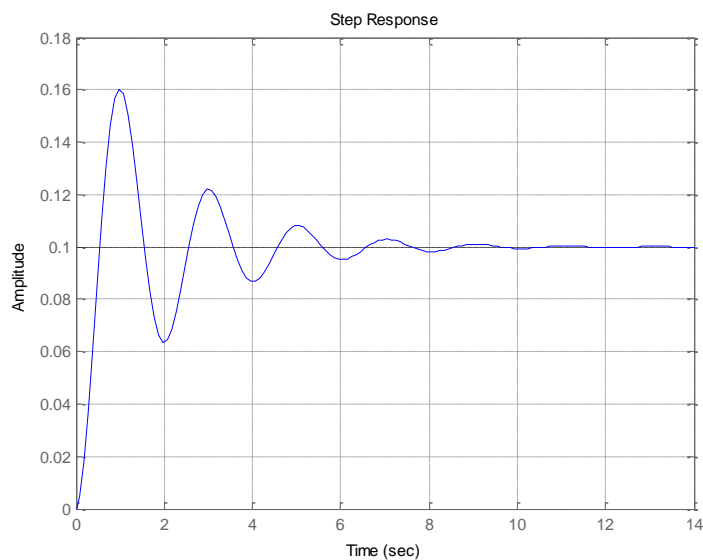
Általános megoldás: $X_H(t) = e^{\sigma t} (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$ azaz 2 harmonikus függvény összegeként áll elő! $A, B \rightarrow$ határozatlan állandók.

$$m = 100[\text{kg}], \quad k = 100 \left[N \frac{s}{m} \right], \quad c = 1000 \left[\frac{N}{m} \right]$$

A karakterisztikus egyenlet: $100r^2 + 100r + 1000 = 0$. Vagyis $r^2 + r + 10 = 0$

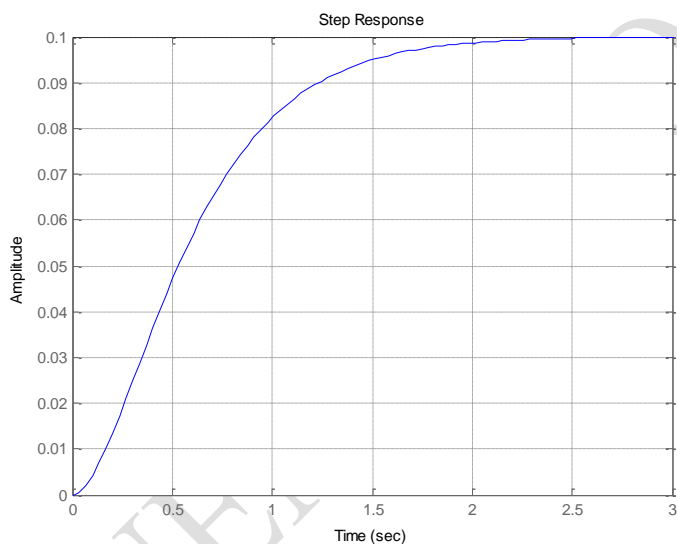
$r^2 + 2\delta r + \omega^2 = 0$, $2\delta = 1$, $\omega^2 = 10$, $\delta < \omega$ tehát periodikus viselkedésről van szó.

$$\text{Gyökei: } r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-40}}{2}; \quad r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{39}}{2}; \quad r_{1,2} = -0.5 \pm j3.1225.$$

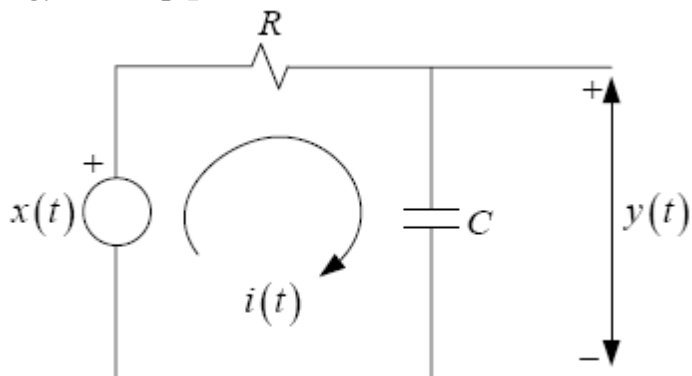


Aperiodikus viselkedés: $\delta > \omega$

$r^2 + 6.3246r + 10 = 0$, a karakterisztikus polinomnak csak valós gyökei vannak. Ebben az esetben: $r_1 = -3.1623$, $r_2 = -3.1623$.



Egy másik példa:



$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = x(t), \quad y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$$

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$\tau = RC$$

$$a = 1/\tau$$

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy_H(t)}{dt} + ay_H(t) = 0$$

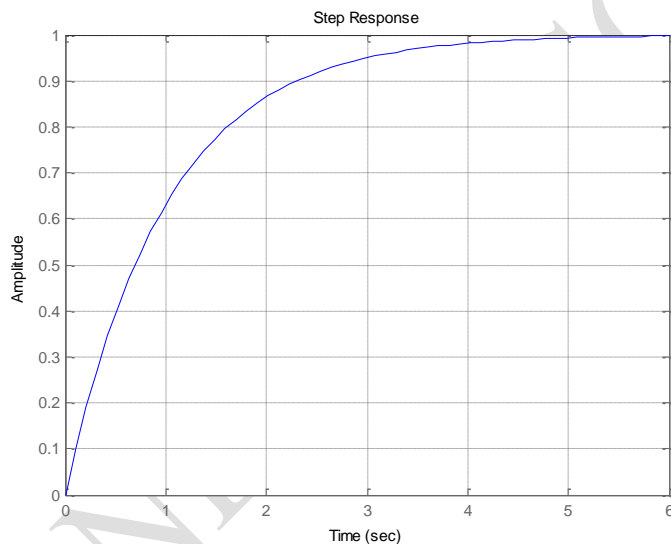
$$\frac{dy_H}{y} = -adt, \quad \ln(y_H) + \ln C = -at, \quad e^{\ln(y_H C)} = e^{-at}, \quad Cy_H = e^{-at}$$

$$x(t) = u(t), \quad y(t) = y_H(t) + y_P(t),$$

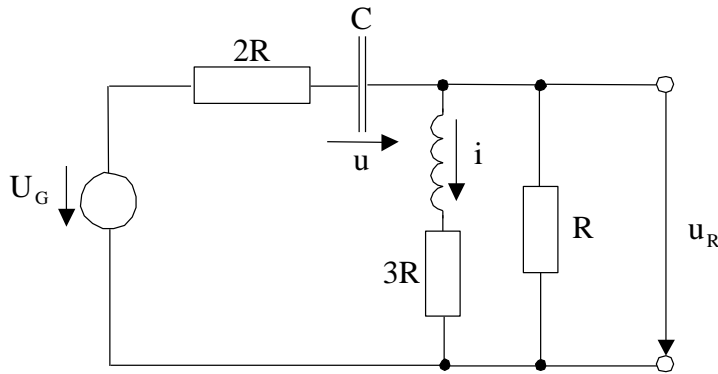
$$y(t) = k_1 e^{-at} + A, \quad y(0) = 0, \quad A = 1, \quad k_1 = -1$$

$$y(t) = (1 - e^{-at})1(t) = (1 - e^{-t/\tau})1(t)$$

a rendszer impulzusválasza $\tau = 1[s]$ esetén.



A következő példa legyen a 4.3. ábrán látható villamos hálózat. A rendszer két energiatárolót tartalmaz (L -induktivitás, C -kapacitás). A bemenet az U_G feszültség, a kimenet pedig az R ellenálláson ható U_R feszültség.



4.3 ábra Kondenzátort és induktivitást tartalmazó villamos hálózat

A rendszerhez tartozó egyenletek:

$$u_R = L \frac{di}{dt} + 3Ri \dots\dots\dots (4.8)$$

$$2RC \frac{du}{dt} + u + L \frac{di}{dt} + 3Ri = u_G \dots\dots\dots (4.9)$$

$$-C \frac{du}{dt} + i + \frac{1}{R} \left(L \frac{di}{dt} + 3i \right) = 0 \dots\dots\dots (4.10)$$

Deriválva és rendezve:

$$\frac{du}{dt} = \frac{L}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{4}{C} i \dots\dots\dots (4.11)$$

$$2RC \left(\frac{L}{RC} \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{4}{C} \frac{di}{dt} \right) + \left(\frac{L}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{4}{C} i \right) + L \frac{d^2i}{dt^2} + 3R \frac{di}{dt} = \frac{du_G}{dt} \dots\dots\dots (4.12)$$

Rendezve

$$3L \frac{d^2i}{dt^2} + \left(R + \frac{L}{RC} \right) \frac{di}{dt} + \frac{4}{C} i = \frac{du_G}{dt} \dots\dots\dots (4.13)$$

$$\left(2R + \frac{L}{RC} \right) \frac{di}{dt} + \frac{4}{C} i = \frac{du_G}{dt} - 3 \frac{du_R}{dt} \dots\dots\dots (4.14)$$

$$\frac{L - 6R^2C}{LC} i = \frac{du_G}{dt} - 3 \frac{du_R}{dt} - \frac{2R^2C + L}{LRC} u_R \dots\dots\dots (4.15)$$

És végül rendszer kimenet-bemenet viszonyát leíró differenciálegyenletet kapjuk:

$$3LC \frac{d^2u_R}{dt^2} + \left(R + \frac{L}{R} \right) \frac{du_R}{dt} + 4u_R = LC \frac{d^2u_G}{dt^2} + 3RC \frac{du_G}{dt} \dots\dots\dots (4.16)$$

A (4.16) általános alakja:

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_2 \frac{d^2u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \dots\dots\dots (4.17)$$

ahol: $a_1 = 3LC$, $a_1 = \left(R + \frac{L}{R} \right)$, $a_0 = 4$, $b_2 = LC$, $b_0 = 3RC$, $b_0 = 0$ állandó együtthatók és $y = u_R$ kimenet valamint $u = u_G$ bemenet.

A példából látható, hogy összetettebb (több energiatárolót tartalmazó rendszereknél) egyre hosszadalmasabb a rendszer differenciálegyenletének meghatározása.

A differenciálegyenletnek általánosságban végtelen sok megoldása van. Ezek közül egyetlen megoldás akkor választható ki, ha $y(t)$ -re és differenciálhányadosaira n számú olyan feltételt lehet előírni, amelyet a megoldásnak ki kell elégítenie. Feltételként megadható $y(t)$ -nek a különböző időpontbeli értéke, vagy $y(t)$ -nek és deriváltjainak azonos időpontbeli értékei, de bármilyen egyéb kombináció is. Ha a feltételek a vizsgált időtartomány kezdő és végpontjára vonatkoznak, akkor elnevezésük határfeltétel (több változós esetben peremfeltétel). A fizikai interpretáció szemszögéből legtermészetesebb, ha valamennyi feltétel a vizsgálat kezdő pontjára ($t=0$) vonatkozik. Ekkor elnevezésük kezdeti feltétel.

Matematikából tudjuk, hogy az n -edrendű állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet alakja a következő:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{(n-1)} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_0 y(t) = u(t), \quad a_n \neq 0 \quad (4.18)$$

A (4.18) teljes $y(t)$ megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának $y_H(t)$ és az inhomogén egyenlet egy partikuláris $y_P(t)$ megoldásának szuperpozíciójaként állítható elő:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

A homogén egyenlet:

$$a_n \frac{d^n y_H(t)}{dt^n} + a_{(n-1)} \frac{d^{(n-1)} y_H(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_0 y_H(t) = 0, \quad a_n \neq 0 \quad (4.19)$$

esetén a gerjesztést nem vesszük figyelembe. A rendszer belső energiáinak felhasználásával mozog és eredményezi $y_H(t)$ függvényt. A homogén egyenletbe $y_H(t) = e^{\lambda t}$ helyettesítéssel kapjuk a

$$P_n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{(n-1)} \lambda^{(n-1)} + \dots + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \quad (4.20)$$

karakterisztikus egyenletet. A $P_n(\lambda)$ felírható gyökeivel is:

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_v)^{k_v} (\lambda - (\sigma_1 \pm j\omega_1))^{l_1} \dots (\lambda - (\sigma_\mu \pm j\omega_\mu))^{l_\mu}, \quad (4.21)$$

ahol $\sum_{i=1}^v k_i + 2 \sum_{i=1}^{\mu} l_i = n$.

Itt az λ_i értékek különböző, k_i multiplicitású gyökök, $(\sigma_i \pm j\omega_i)$ pedig különböző, l_i multiplicitású komplex gyökpárok.

A $P_n(\lambda)$ egyes tényezőinek a következő függvényeket feleltetjük meg: a $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ tényezőknek az

$$\alpha_i(t) = (A_i^1 + A_i^2 t + \dots + A_i^{k_i} t^{(k_i-1)}) e^{\lambda_i t} \quad (4.22)$$

függvényt, a $(\lambda - (\sigma_i \pm j\omega_i))^{l_i}$ tényezőknek az

$$\beta_i(t) = (B_i^1 + B_i^2 t + \dots + B_i^{l_i} t^{(l_i-1)}) e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) + (C_i^1 + C_i^2 t + \dots + C_i^{l_i} t^{(l_i-1)}) e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t) \quad (4.23)$$

függvényt. A szabad együtthatók A_i^j , B_i^j , C_i^j száma pontosan n . Az n számú ismert peremfeltétel segítségével meghatározhatóak a szabad együtthatók. A rendszer homogén részének általános megoldása felírható az alábbi alakban.

$$y_H(t) = \sum_{i=1}^v \alpha_i(t) + \sum_{i=1}^{\mu} \beta_i(t).$$

A rendszer partikuláris részének megoldása a gerjesztéstől, vagyis a bemenettől függ. A bemeneti függvény alakja meghatározza milyen formában keressük azt.

Legyenek a karakterisztikus polinom gyökei általános esetben konjugált komplex párok.

$$r_{i,i+1} = \sigma_i \pm j\omega_i.$$

$$y_h(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} + \dots + k_N e^{r_N t}$$

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

$$e^{r_i t} = e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + j\sin(\omega_i t))$$

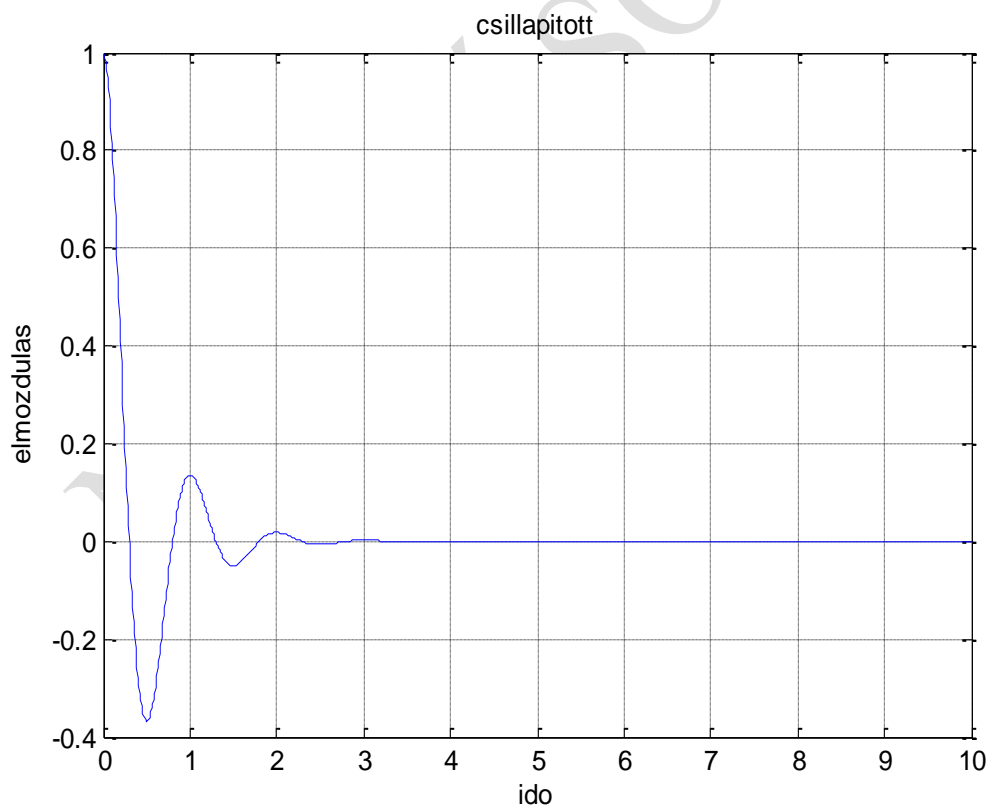
Ezen értékek jellemzik a rendszert. Az egyes gyökökhöz tartozó homogén megoldásrész körvonala függ a σ_i előjelétől (értékétől), lengésének körfrekvenciája pedig ω_i . Itt számíthatunk frekvenciát $f_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ és $T_i = \frac{1}{f_i}$ periódusidőt.

Többszörös gyök esetén:

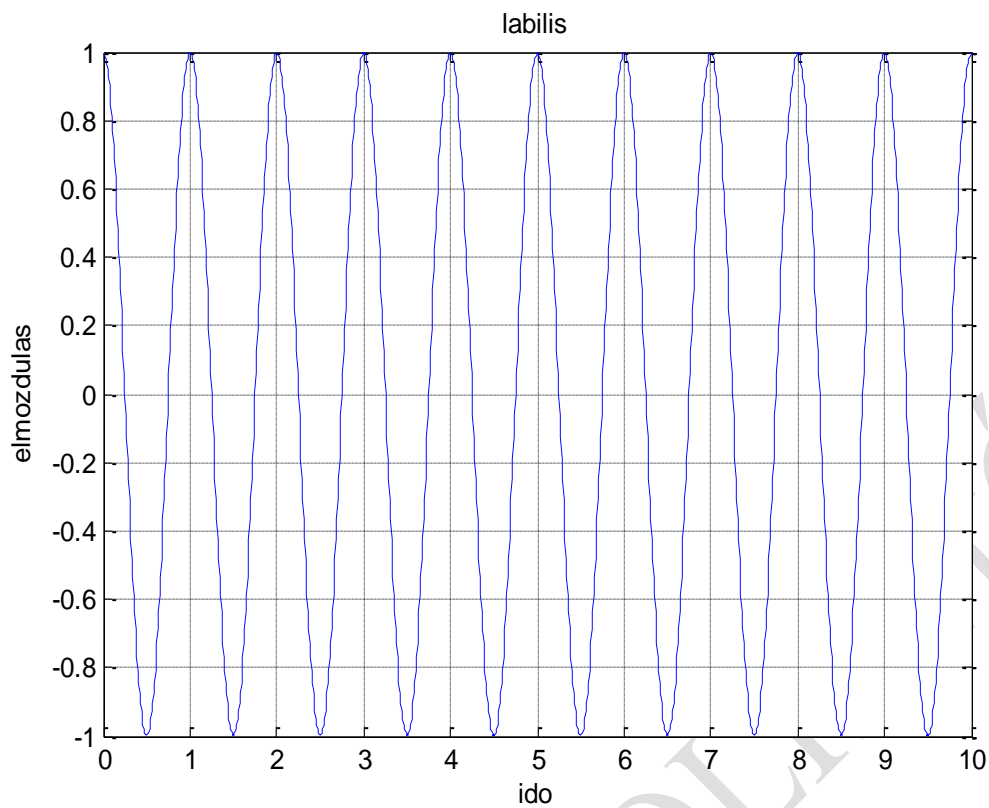
$$y_h(t) = (k_1 + k_2 t + k_3 t^2) e^{r_{1,2,3} t} + k_4 e^{r_4 t} + \dots + k_N e^{r_N t}$$

k_1, k_2, \dots, k_N meghatározása a kezdeti feltételekből: $y(0); \dot{y}(0); \ddot{y}(0); \dots; y^{(N-1)}(0)$

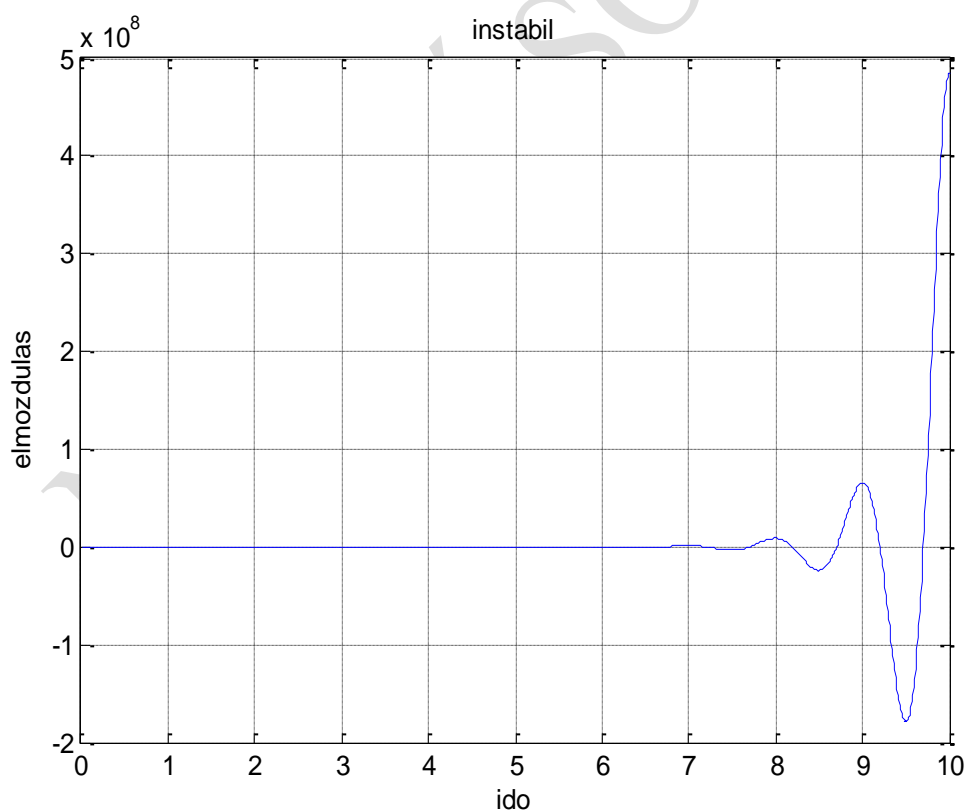
A partikuláris megoldás a gerjesztés alakjában keresendő.



Amennyiben $\sigma < 0$ stabilis pólusról beszélünk



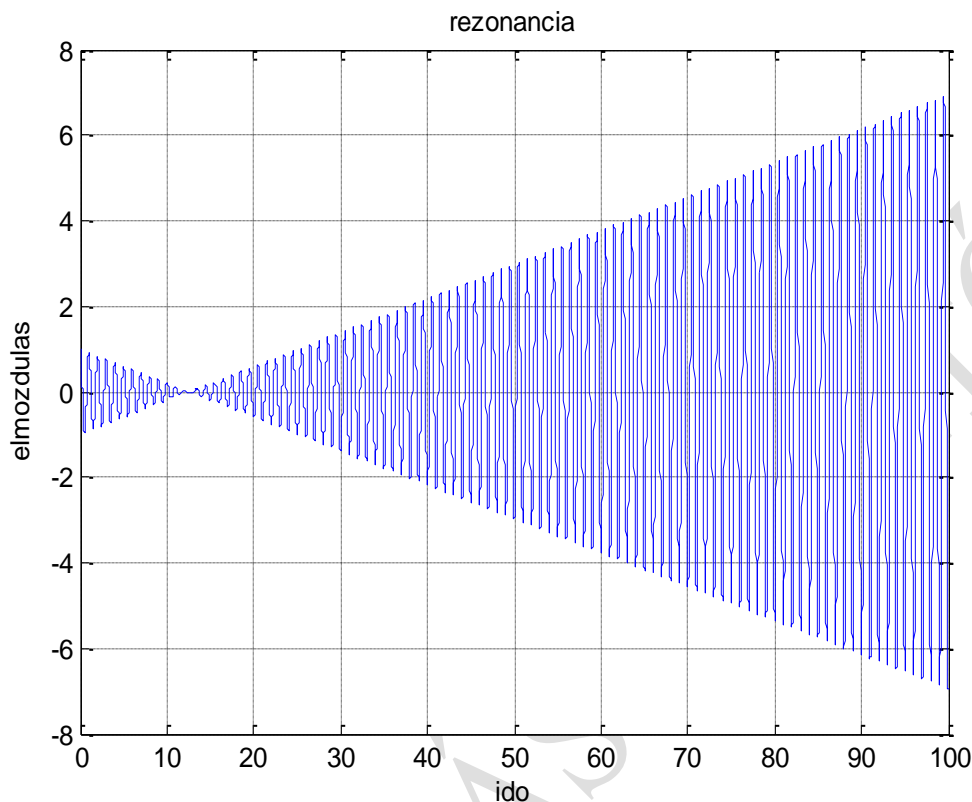
Amennyiben $\sigma = 0$ a stabilitás határáról beszélünk



Amennyiben $\sigma > 0$ instabil pólusról beszélünk

A partikuláris megoldás függ a gerjesztéstől.

Egy speciális esetben azonban különös kölcsönhatás mutatkozik a rendszerre jellemző karakterisztikus polinom gyökök és a gerjesztés között. Ez az az eset amikor is a gerjesztés valamely körfrekvenciája Ω_j megegyezik egy karakterisztikus gyökhöz tartozó ω_i körfrekvenciával $\Omega_j = \omega_i$, például $x(t) = A \cos(\Omega t)$. Ezt rezonanciának hívjuk.



A homogén megoldás lecsengése és a partikuláris megoldás növekedése $\Omega = \omega$ eset.

Példa : Keressük az alábbi

$$2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + y = 4 \frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

másodrendű differenciálegyenlet homogén megoldását $y(0)=0$; $\frac{dy(0)}{dt}=1$ kezdeti feltételekkel.

Az adott differenciálegyenlet homogén megfelelője : $2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + y = 0$

A karakterisztikus egyenlet: $2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$

Ennek gyökei: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -0,5$.

A homogén egyenlet megoldása: $y(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-0,5t}$

A megoldás deriváltja: $\frac{dy}{dt} = -k_1 e^{-t} - 0,5k_2 e^{-0,5t}$

A kezdeti feltételeket behelyettesítve, a következő egyenletrendszert kapjuk :

$$\begin{aligned} 0 &= k_1 + k_2 \\ 1 &= -k_1 - 0,5k_2 \end{aligned}$$

Az állandók értéke: $k_1 = -2$; $k_2 = 2$.

A homogén megoldás pedig a következő: $y(t) = -2e^{-t} + 2e^{-0,5t}$.

Időállandó és sajátfrekvencia.

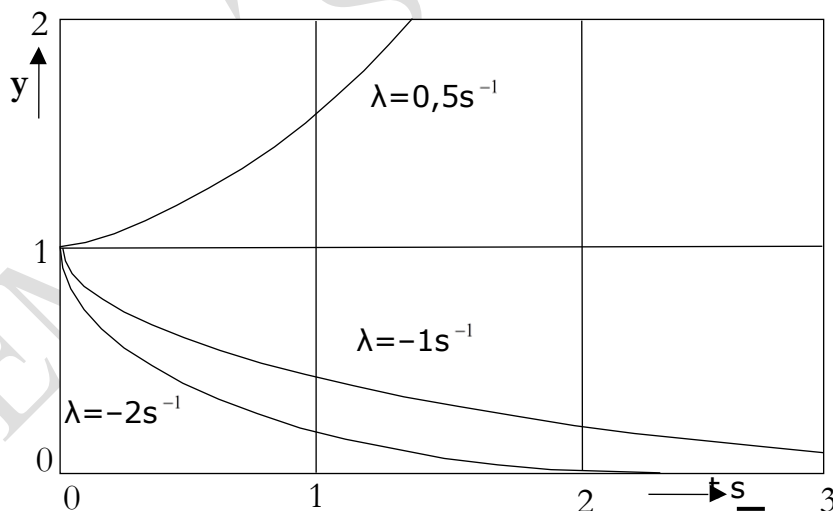
A homogén egyenlet megoldása nem tartalmazza a bemenet hatását, de jelentősége miatt szükséges részletesebben foglalkozni vele. A hangsúly, a karakterisztikus egyenlet gyökein, vagyis a rendszer sajátértékein van. A λ_i sajátértékek vagy valósak, vagy konjugált komplex párokat alkotnak. Gyakorlati szempontból érdemes külön vizsgálni azt az esetet, amikor a sajátérték (illetve annak valós része) negatív, ill. amikor pozitív. Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor a sajátérték valós.

$$\text{Legyen } \lambda = -\sigma = -\frac{1}{T} \dots \dots \dots (5.1)$$

A sajátérték valós részének (σ) elnevezése csillapítási tényező, reciprokának (T) pedig időállandó. λ és σ dimenziója reciproknak, vagyis frekvencia, és a mértékegysége Hz (Herc), míg a T idő-dimenziójú.

$$\text{A megfelelő megoldáskomponens : } y(t) = ke^{\lambda t} = ke^{-\sigma t} = ke^{-\frac{t}{T}} \dots \dots \dots (5.2)$$

A 5.1. ábrán három különböző sajátértékhez tartozó $e^{\lambda t}$ függvény látható.

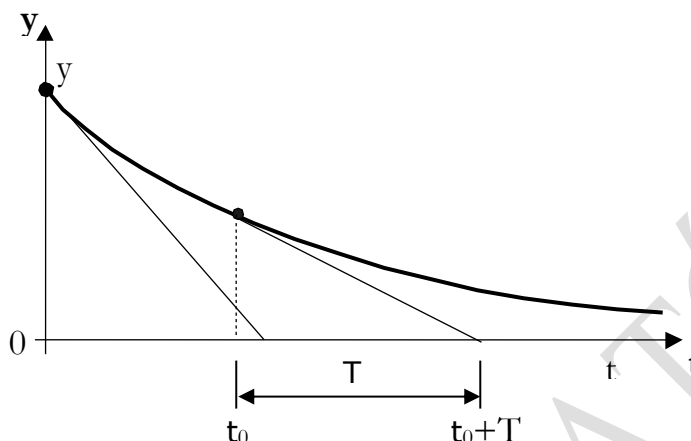


5.1. ábra. Különböző sajátértékhez tartozó $e^{\lambda t}$ függvény

Az ábra is igazolja, hogy a negatív λ (σ és T pozitív) értéke azt jelenti, hogy a megoldás nullához tart, mégpedig annál gyorsabban, minél kisebb T (vagy minél nagyobb σ).

A továbbiakban megadásra kerül egy módszer amely segítségével egy egytárolós rendszer időállandója grafikusan is meghatározható. A módszer illusztrációjára az 5.2. ábra. szolgál. A T időállandó meghatározásához a görbéhez t_0 időpontban szerkesztünk érintőt.

Határozzuk meg az érintő és az $y=0$ egyenes metszéspontját. A metszéspont akkor $t_0 + T$ helyen lesz. A szerkesztés negatív T esetén is alkalmazható.



5.2 ábra. Valós időállandó meghatározása grafikus úton

Az időállandó a jel lecsengésének a meghatározója. Egytárolós rendszer esetében egy időállandó alatt a kezdeti eltérés az induló állapot és az állandósult állapot között 63,71%-kal csökken, három időállandó alatt 95,02%-kal, öt időállandó alatt 99,33%-kal csökken, vagyis az állandósult érték körüli egy százalékos eltérési tartományba esik.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a két sajátérték (a karakterisztikus egyenlet gyökei) komplex párt alkotnak.

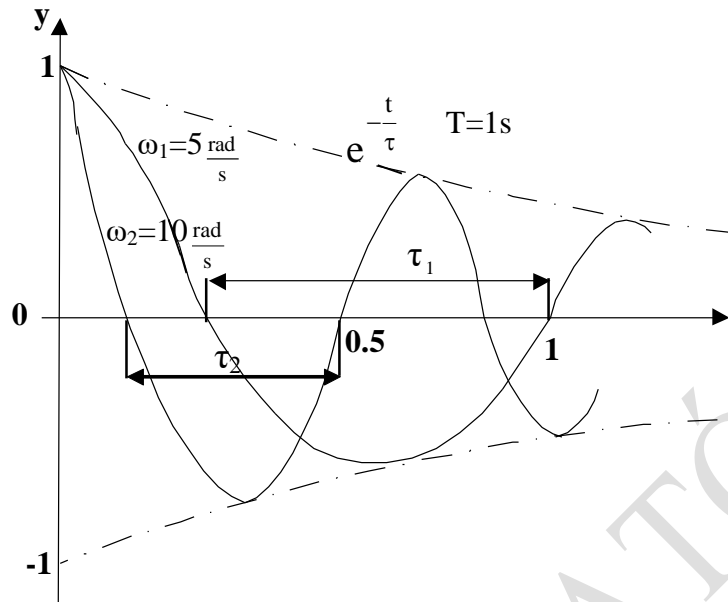
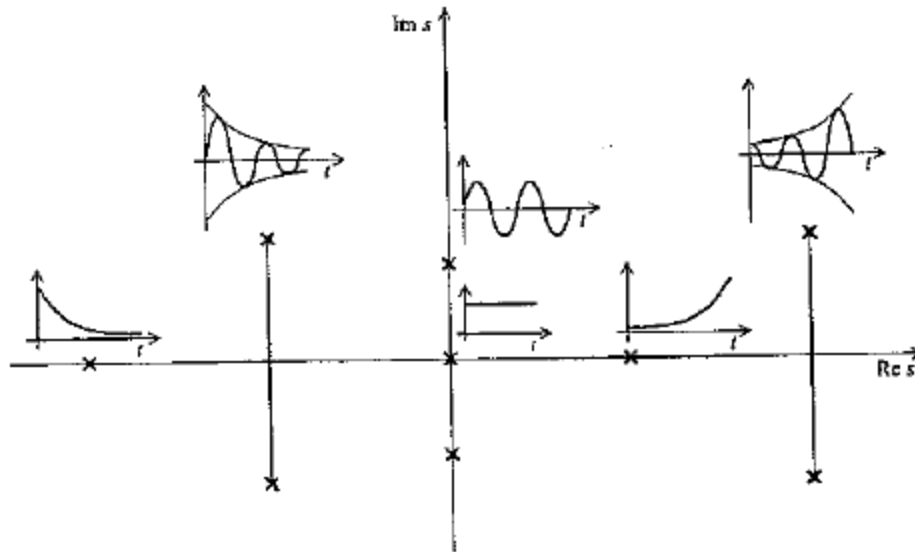
$$\text{Legyen } \lambda = -\sigma \pm j\omega = -\frac{1}{T} \pm j\omega \dots\dots\dots (5.3)$$

ahol σ a csillapítási tényező, T az időállandó és ω a saját körfrekvencia. (Az utóbbit rövidebben sajátfrekvenciának szokás nevezni, noha ezen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ értendő). A

homogén rész megoldása ebben az esetben a (4.23) alapján adható meg.

$$y(t) = e^{-\sigma t} (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) = C e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \beta); A, B \text{ és } C \text{ állandók, } \beta \text{ pedig fázisszög.}$$

Az összevont két komponens tehát csillapodó rezgést jelent. A burkológörbe ugyanolyan jellegű, mint valós λ esetén, így a burkológörbéből a $T = 1/\sigma$ időállandó ugyanúgy meghatározható, ahogyan azt a valós gyök esetén megtettük. Nagyon fontos megjegyezni, hogy ebben az esetben is σ előjelétől függően az $y(t)$ megoldásra exponenciálisan növekvő vagy csökkenő amplitúdót kapunk. A rezgés periódusa T is meghatározható grafikusan, és pedig két egymás utáni nullahely között eltelt idő.


 5.3. ábra. A komplex λ sajátérték-párhoz tartozó megoldás két különböző sajátfrekvenciára


Differenciaegyenletek és alkalmazásuk

A differenciaegyenletek szerepe diszkrét rendszerek esetében megegyezik a differenciálegyenletek szerepével folytonos rendszerek esetében.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Az általános megoldás:

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n]$$

Egy példa:

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

A homogén megoldás:

$$y_h[n] - ay_h[n-1] = 0$$

A megoldást keressük a következő alakban:

$$y_h[n] = Kc^n$$

$$Kc^n - aKc^{n-1} = 0 \Rightarrow Kc - aK = 0 \Rightarrow c = a$$

A megoldás:

$$y_h[n] = Ka^n$$

A rendszerre ható gerjesztés legyen:

$$x[n] = b^n u[n]$$

Keressük a partikuláris megoldást a következő szerint:

$$y_p[n] = Ab^n$$

Behelyettesítve:

$$Ab^n - aAb^{n-1} = b^n \text{ ebből:}$$

$$Ab - Aa = b \Rightarrow A = \frac{b}{b-a}$$

A partikuláris megoldás így:

A teljes megoldás:

$$y[n] = \frac{b^{n+1}}{b-a} + Ka^n ; n \geq 0$$

K meghatározása a kezdeti feltételekből:

$$y[-1] = Y_i$$

$$y[0] - ay[-1] = 1 \Rightarrow y[0] = aY_i + 1 = \frac{b}{b-a} + K$$

$$K = aY_i - \frac{a}{b-a} ; n \geq 0$$

A végső megoldás:

$$y[n] = Y_i a^{n+1} + \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} , n \geq 0$$

Amennyiben $n < 0$, akkor nincs gerjesztés, tehát csak homogén egyenletünk van.

$$y[n] = y_h[n] = Ka^n, \quad n < 0$$

$$y[-1] = Y_i$$

$$Ka^{-1} = Y_i \Rightarrow K = Y_i a; \quad n < 0$$

Végül:

$$y[n] = Y_i a^{n+1}; \quad n < 0$$

NEM MÁSZOLHATÓ