2014. 02. 18

Rendszerelmélet

Dinamikus rendszerek

Struktúra

$$\Sigma = (\mathcal{T}, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, g)$$

$\mathcal{T}$ - időpontok halmaza, rendezett halmaz

folytonos $[a,b]$, R^1, $[0,\infty)$

intervallumok

diszkrét $\{\ldots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \ldots\}$

$\{\ldots, -T, 0, T, 2\cdot T, \ldots\}$

X - állapotok halmaza

U - a bemenet értékeinek halmaza

Ω - a megengedett bemenő jelek halmaza $\Omega \subset \{u : \mathcal{T} \to U\}$

Y - a kimenet értékeinek halmaza

Γ - a lehetséges kimenő jelek halmaza

$\Gamma \subset \{y : \mathcal{T} \to Y\}$

φ - az állapotátmenet függvény,

$\varphi : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times X \times \Omega \to X$

g - a kimeneti leképezés függvény,

$g : \mathcal{T} \times X \times U \to Y$

$\times$ - direkt szorzat

Ha a rendszer a τ pillanatban x állapotban van és a bemenő jel $u(\cdot)$, akkor az állapot és a kimenet értéke a t pillanatban

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) \quad \text{és} \quad y(t) = g(t, x(t), u(t))$$

módon adható meg.

<u>Elvárások:</u>

- $\mathcal{T}$ – rendezett halmaz

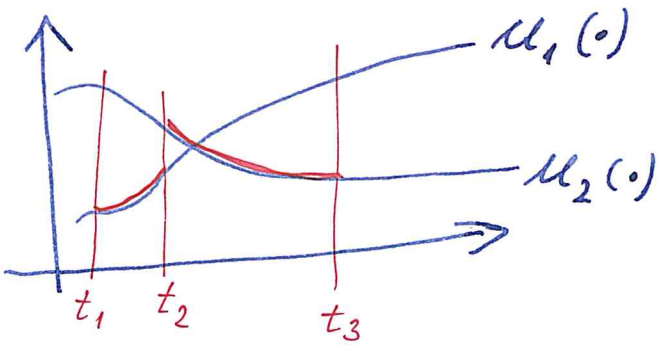
  $\mathcal{I} = (\underline{t}, \bar{t})$ időintervallum

  $\underline{t} < t < \bar{t}$ rendezett

  $t \in \mathbb{R}$ – folytonos

  $t \in \mathbb{Z}$ – diszkrét rendszerek.

- Ω – zárt a konkatenciára



ha ez megengedett, akkor $u_i(\cdot)$-nek is megengedettnek kell lennie!

φ - rendezett, konzisztens, kompozíciós tulajdonság, kauzális

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot))$$

futó idő

kezdeti időpont

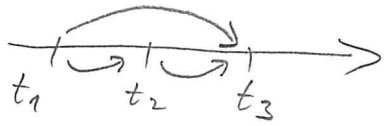
kezdeti állapot

bemenő jel

rendezett : definiált $t \geq \tau$

Konzisztens : ha $\tau = t$ akkor $x = \varphi(t, t, x, u(\cdot))$
t-pillanatban nem szólnak bele a bemenő jelek az állapotba.

Kompozíciós tulajdonság :



$$x(t_3) = \varphi(t_3, t_1, x, u(\cdot)) = \varphi(t_3, t_2, \varphi(t_2, t_1, x, u(\cdot)), u(\cdot))$$

Kauzalitás : A realisztikusságot tükrözi, amennyiben két jelet figyelünk

$u(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$ amik a $[\tau, t]$ intervallumon egyformák $u_{[\tau,t]} = \hat{u}_{[\tau,t]}$ akkor

$\varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = \varphi(t, \tau, x, \hat{u}(\cdot))$, tehát a $[\tau, t]$ intervallumon csak a bemenő jel arra eső része szól bele az állapot alakulásába.

Autonóm (vagy idő-invariáns) rendszer

$$\Sigma = (T, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, g)$$

- T zárt az eltolásra
- Ω zárt a jelek eltolására

$$u(\cdot) \in \Omega \; ; \; u(\cdot + \delta) \in \Omega$$

- $\varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = \varphi(t+\delta, \tau+\delta, x, u(\cdot+\delta))$

érzéketlen az eltolásra.

- g nem függ az időtől

$$g : X \times U \to Y$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Folytonos és diszkrét idejű rendszerek

T: $[0, \infty)$, $[a, b]$, stb

$\bar{T} = \{ \ldots, t_{-1}, t_0, t_1, \ldots \}$

$\hat{T} = \{ \ldots, -T, 0, T, \ldots \}$

T - mintavételezési idő

Véges dimenziós, Véges állapotú, véges rendszer

X - Lineáris vektortér dim X véges tipikusan R^n	X véges halmaz	autonóm, diszkrét idejű és X, U, Y véges halmazok
		Digitális elméletben ez a véges automata

Lineáris rendszer

a hozzá tartozó megszorítások:

- X, U, Y, Ω, Γ lineáris terek

  a vektortér lineáris ha definiált a vektor összeadás és szorzás

- Érvényes a szuperpozíció elve külön lehet választani a kezdeti állapot hatását és a bemenő jel hatását.

$\varphi(t,\tau,\cdot,\cdot): X \times \Omega \to X$ lineáris leképezés

$$x(t) = \varphi(t,\tau,x,u(\cdot)) = \phi(t,\tau)x + \Theta(t,\tau)u(\cdot)$$

- $g(t,\cdot,\cdot): X \times U \to Y$ lineáris leképezés

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Sima rendszer fogalma

- X, U, Y, Ω, Γ – topológikus terek

$\Omega = D[a,b]$ → szakaszonként folytonos (balról-jobbról határértékek vannak)

lehet normáról beszélni $\|u(\cdot)\|$

$$\|u(\cdot)\| = \underbrace{\sup\|u(t)\|}_{\text{magát a jelet figyeli}} + \underbrace{\sup_{t\in[a,b]}\|u(t_{+0}) - u(t_{-0})\|}_{\text{az egész intervallumra nézve az ugrásokat figyeli}}$$

sup – a legkisebb felső korlát

$D_1[a,b]$ szakaszosan folytonosan diff. fv. tere.

- $\tau, x, u(\cdot) \to x(\cdot) = \varphi(\cdot, \tau, u(\cdot))$ folytonos leképezés

Kis perturbáció hatására az új trajektória a régi közelében marad.

Elvárjuk, hogy az állapot trajektória szakaszosan folytonos legyen $x(\cdot) \in D_1[a,b]$

Következmény: Ha a (Σ) rendszer sima akkor létezik olyan függvény ami T ből, X ből és U ből X be képez. $\exists f: T \times X \times U \to X$

Fontos, hogy $x(t)$ majdnem mindenütt kielégíti a következő kezdeti érték problémát:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(\tau) &= x_0 \end{aligned}}$$

← Ezek már nem lineáris diff. egyenlettel leírhatók!

Sima lineáris rendszer

$$\varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = \Phi(t,\tau)x + \Theta(t,\tau)u(\cdot)$$

A Σ ismeri a kompoziciós, kauzalitás, konzisztencia fogalmát

Megmutatható, hogy

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t, \tau, X, u(\cdot)) - \varphi(t, \tau, X, u(\cdot))}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(t+\Delta t, \tau) - \phi(t, \tau)}{\Delta t} X + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Theta(t+\Delta t, t) - \Theta(t, t)}{\Delta t} U_{[t, t+\Delta t]}$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(t+\Delta t, t) - \phi(t, t)}{\Delta t}}_{A} X(t) + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Theta(t+\Delta t, t) - \Theta(t, t)}{\Delta t}}_{B} \underbrace{U_{[t, t+\Delta t]}}_{u(t)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ x(\tau) &= X_0 \\ y(t) &= C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{aligned}}$$

<u>Az alapmátrix (state matrix)</u>, fundamentális mátrix

$$\phi(t, \tau)$$

tulajdonságai:

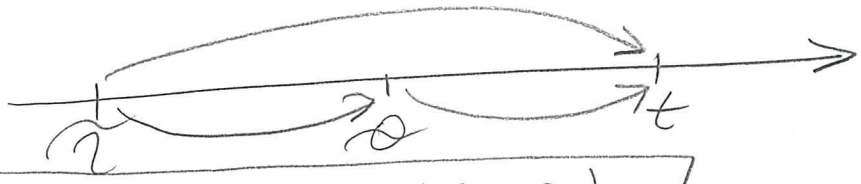
a.) Kielégíti a következő diff. egyenletet:

$$\boxed{\frac{d\phi(t,\tau)}{dt} = A(t) \cdot \phi(t, \tau)}$$

$$x(t) = \varphi(t, \tau, X, 0(\cdot)) = \phi(t, \tau) X$$

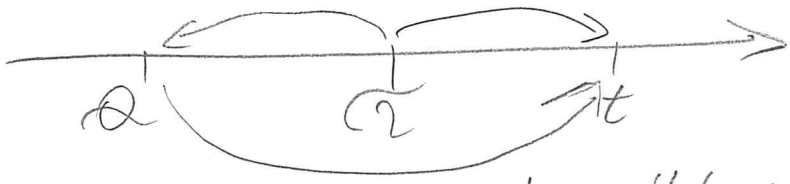
$$\boxed{\phi(\tau, \tau) = I}$$ a kezdeti időben egységmátrix

b.) ϕ rendelkezik a csoport tulajdonsággal.



$$\boxed{\phi(t,\tau) = \phi(t,\sigma)\cdot\phi(\sigma,\tau)}$$

Vagy:



- a differenciál egyenlet egy pont környékén jobb és bal irányban egyértelműen megoldható.

Speciálisan $\phi(t,t) = \phi(t,\tau)\cdot\phi(\tau,t) = I$

inverze $\boxed{\phi(t,\tau)^{-1} = \phi(\tau,t)}$

c.)
$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d\phi(t,\tau)}{dt} = -\phi(t,\tau)A(\tau) \\ &\phi(t,t) = I \end{aligned}}$$

$$\frac{d\phi(t,\tau)}{d\tau}\phi(\tau,t) + \phi(t,\tau)\frac{d\phi(\tau,t)}{d\tau} = 0 \leftarrow \text{nulla}$$

$A(\tau)\phi(\tau,t)$

$$\phi(t,\tau)\cdot\phi(\tau,t) = I$$

Sima lineáris rendszerek

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \quad ; \quad x(\tau) = x_0$$

$$y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$$

$$x \in R^n \; ; \; y \in R^m \; ; \; u \in R^r$$

$$A_{n\times n} \; ; \; B_{n\times r} \; ; \; C_{m\times n} \; ; \; D_{m\times r}$$

$$\boxed{x(t) = \phi(t,\tau)\,x_0 + \int_\tau^t \phi(t,\theta)\,B(\theta)\,u(\theta)\,d\theta}$$

Kielégíti – e a differenciál egyenletet!

Behelyettesítve:

azért mert a felső korlát is függ a t – től (Leibniz integrál)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \underbrace{\frac{d\phi(t,\tau)}{dt}}_{A(t)\phi(t,\tau)} x_0 + \int_\tau^t \underbrace{\frac{d\phi(t,\theta)}{dt}}_{A(t)\phi(t,\theta)} B(\theta)\,u(\theta)\,d\theta + \underbrace{\phi(t,t)}_{=I}\,B(t)\,u(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\underbrace{\left\{\phi(t,\tau)\,x_0 + \int_\tau^t \phi(t,\theta)\,B(\theta)\,u(\theta)\,d\theta\right\}}_{x(t)} + B(t)\cdot u(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$$

A bizonyítás sikeres!

Másik alak, ha a csoport tulajdonságot alkalmazzuk:

$$x(t)=\phi(t,\tau)\left\{x_0+\int_{\tau}^{t}\phi(\tau,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta\right\}$$

Tehát, amennyiben ismert az alapmátrix, akkor általánosan megoldható a trajektória.

Autonóm (időinvariáns) eset

Zárt az eltolásra, ami azt jelenti, hogy a rendszert leíró mátrixok konstansok.

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t)\ ;\ y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

Ilyen rendszereknél bevezetjük

$$e^{At}\overset{def}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!}$$

Megmutatjuk, hogy a $\boxed{\phi(t,\tau)=e^{A(t-\tau)}}$

Invariánság miatt $\tau=0$ választható. Ez a megoldás kielégíti: $\frac{d\phi(t,\tau)}{dt}=A(t)\phi(t,\tau)$

$$\frac{d\phi(t,\tau)}{dt} = \frac{d e^{A(t-\tau)}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n n (t-\tau)^{n-1}}{n!} =$$

mert $n=\phi$ konstans és a deriváltja ϕ

$$= A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} = A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i (t-\tau)^i}{i!} = A e^{A(t-\tau)}$$

Tehát bizonyított!

$$\boxed{x(t) = e^{A(t-\tau)} \cdot x_0 + \int_{\tau}^{t} e^{A(t-\theta)} B \cdot u(\theta)\, d\theta}$$

Tehát a megoldás konvolúciós típusú integrál.

$$\left| f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\, dt \right|$$

<u>Átviteli függvény</u> (mátrix) $W(s)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + B u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$|X(0)=0| \qquad (s \cdot I - A) X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B\, U(s)$$

$$Y(s) = \{ C (sI - A)^{-1} \cdot B + D \} \cdot U(s)$$

$$\boxed{W(s) = C (sI - A)^{-1} B + D}$$

Állítás $(SI-A)^{-1} = \mathcal{L}\{e^{At}\}$, igaz-e?

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{1}{s^{n+1}} = \frac{1}{s}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{s}\right)^n}_{\text{mértani sor}} =$$

$$= \frac{1}{s}\left(I - \frac{A}{s}\right)^{-1} = (SI-A)^{-1}$$

Az állítás IGAZ!

$$(SI-A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(SI-A)}{\det(SI-A)}$$

minden elemnél közös, ez a karakterisztikus polinóm!

Stabilitáskor szükséges:

- a kezdeti feltételek $\emptyset$ bemenet esetén lecsengjenek
- Korlátos bemenetre korlátos legyen a kimenet

A stabilitást $\det(SI-A)$ határozza meg

$\det(S\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = \varphi(S) = \emptyset$ $\quad Re\{S_i\} < \emptyset$

Áttekintés Lineáris Algebrából

- $A \Rightarrow S_i$ sajátértéke és X_i sajátvektora van

$$AX_i = S_i X_i \Rightarrow (S_i I - A)\cdot X_i = \emptyset$$ – homogén lineáris egyenlet

$$\varphi(s) = \det(SI-A) = 0 \Rightarrow S_i \text{ sajátérték}$$

- Cayley–Hamilton tétel: Minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét $\varphi(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{\emptyset}}$

Le Verrier – Faddeev algoritmus egy mátrix karakterisztikus polinómja együtthatóinak meghatározására.

$$\det(sI-A) = s^n - q_1 s^{n-1} - \dots - q_{n-1} s - q_n$$

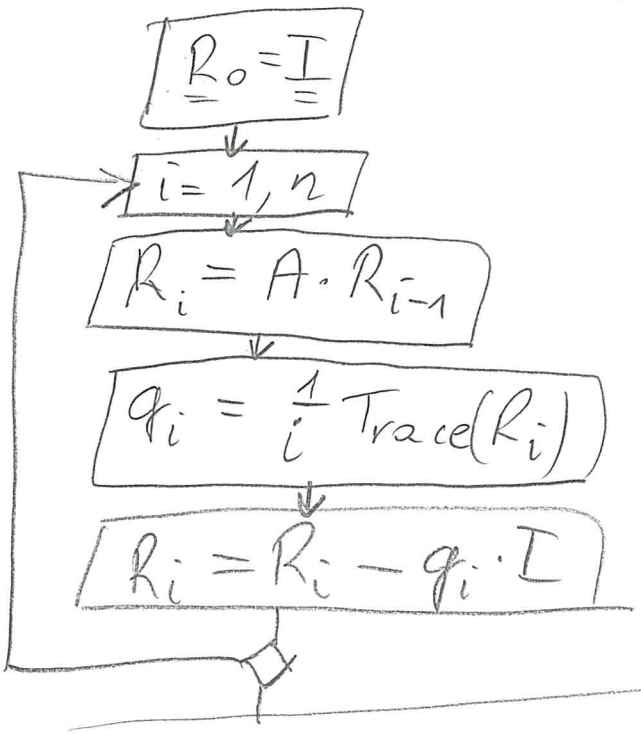
$$\operatorname{adj}(sI-A) = s^{n-1} I + s^{n-2} R_1 + \dots + s R_{n-2} + R_{n-1}$$

ahol R_i mátrix.

Algoritmus: $R_0 = I$; $R_i := A R_{i-1}$; $q_i = \frac{1}{i} \operatorname{Trace} R_i$

$\operatorname{Trace} R_i = \sum_{i=1}^{n} R_{i,i} \cdot \frac{1}{n}$; $R_i = R_i - q_i \cdot I$; $\underline{R}_n = \underline{0}$

ellenőrzés



A MIMO rendszer átviteli függvényének meghatározása:

$$\boxed{W(s) = \frac{s^{n-1} \cdot C \cdot B + s^{n-2} C \cdot R_1 \cdot B + \dots + C R_{n-1} B}{s^n - q_1 \cdot s^{n-1} - \dots - q_{n-1} s - q_n} + D}$$

Az átviteli függvény (mátrix) nevezői közösek, a nullák változnak valahogy. A pólusok nem változnak

- Pólusok, ahol $W(s) = \infty$, vagyis az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékei.
- Zérusok $Y(s) = \phi$, Elfojtja a kimenetet.

$$(sI - A)\, X(s) = B \cdot U(s)$$

$$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s)$$

$$\begin{array}{c} n\,\{ \\ m\,\{ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} (sI - A) & -B \\ C & D \end{bmatrix}}_{n \qquad r} \cdot \begin{bmatrix} X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

s_i zérus $\Longleftrightarrow$ rang $\begin{bmatrix} s_i - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} < \min(n+m, n+r)$

akkor triviálisan nulla a felső egyenlet (1) és az egy zérus hely.

Speciálisan ha $m = r$ $\quad \det \begin{bmatrix} s_i I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = 0$

Koordináta transzformáció hatása

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot u$$
$$y = C \cdot X + D \cdot u$$

Válasszunk egy $T_{n \times n}$ nem szinguláris állandó mátrixot.

Az új állapotváltozó: $\boxed{\mathcal{Y} = T \cdot X}$

$$\frac{d\eta}{dt} = T \cdot \frac{dx}{dt} = T \cdot (A \cdot x + B \cdot u)$$

$$/x = T^{-1}\eta/ \quad \frac{d\eta}{dt} = T \cdot A \cdot T^{-1}\eta + T \cdot B \cdot u$$

$$y = C \cdot T^{-1}\eta + D \cdot u$$

$$\tilde{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} \; ; \; \tilde{B} = T \cdot B \; ; \; \tilde{C} = C \cdot T^{-1} \; ; \; \tilde{D} = D$$

$$\dot{\eta} = \tilde{A}\eta + \tilde{B}u \; ; \; y = \tilde{C}\eta + \tilde{D} \cdot u$$

$$\det(sI - \tilde{A}) = \det(sI - T \cdot A \cdot T^{-1}) = \emptyset$$

$$/I = T \cdot T^{-1}/ \quad \det\{T(sI - A) \cdot T^{-1}\} = \emptyset$$

/ kvadratikus mátrixok esetén a mátrixok szorzatának determinánsa egyenlő az egyes determinánsok szorzatával /

$$\det\{T\} \cdot \det\{sI - A\} \det\{T^{-1}\} = \det(sI - A)$$

$$= 1$$

Ami érdekes, hogy $\underline{\underline{W}}(s)$ invariáns a koordináta transzformációra.

- pólusok, zérusok invariánsak a koordináta transzformációra.

$$Y(s) = [\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \cdot \tilde{B} + \tilde{D}]U(s) = [C(sI - A)^{-1} \cdot B + D]U(s)$$

Mátrix függvények, Sylvester képlet.

$\underline{\underline{A}}_{n\times n}$

$\underline{\underline{A}}$ spektruma = A sajátértékei

$$\varphi(s) = (s-s_1)^{m_1}\cdot(s-s_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(s-s_r)^{m_r}$$

m_i - multiplicitás

- Olyan függvények, általában polinom vagy sorok, ahol az argumentum egy mátrix.
- A Sylvester képlet mátrixfüggvények megoldását, kifejtését adja meg a mátrix sajátértékeinek segítségével.

Amennyiben a sajátértékek egyszeresek, akkor fel tudjuk írni

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\cdot\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{A-s_jI}{s_i-s_j}$$

fontos még, hogy $f(s)$ konvergens legyen az $\underline{\underline{A}}$ mátrix spektrumán.

Speciálisan: $f(s)=e^{st}$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{s_i t}\prod_{i\neq j}\frac{A-s_jI}{s_i-s_j}$$

Diszkrét idejű rendszerek

$$T = \{ \dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots \}$$

$$t_k \geq t_i \; ; \quad x(t_k) = \varphi(t_k, t_i, x(t_i), u_{[t_i, t_k]})$$

speciálison $k = i+1$

$$x(t_{i+1}) = \varphi(t_{i+1}, t_i, x(t_i), u(t_i))$$

Lineáris, időben változó rendszer:

$$x(t_{i+1}) = \phi(t_{i+1}, t_i) x(t_i) + \Theta(t_{i+1}, t_i) u(t_i)$$

$$y(t_i) = C(t_i) x(t_i) + D(t_i) u(t_i)$$

$$x(t_{i+2}) = \phi(t_{i+2}, t_{i+1}) \{ \phi(t_{i+1}, t_i) x(t_i) + \Theta(t_{i+1}, t_i) u(t_i) \} + \\ + \Theta(t_{i+2}, t_{i+1}) u(t_{i+1})$$

Érvényes a következő szabály:

$$\phi(t_k, t_k) = I$$

$$\phi(t_k, t_i) = \phi(t_k, t_{k-1}) \cdot \dots \cdot \phi(t_{i+1}, t_i)$$

$$\boxed{x(t_k) = \phi(t_k, t_i) x(t_i) + \sum_{j=i}^{k-1} \left(\phi(t_k, t_{j+1}) \Theta(t_{j+1}, t_j) u(t_j) \right)}$$

$$t_k \geq t_i$$

Mi a helyzet ha $t_k < t_i$, speciálison $t_k = t_{i-1}$

$$x(t_i) = \phi(t_i, t_{i-1}) x(t_{i-1}) + \Theta(t_i, t_{i-1}) u(t_{i-1}) \Rightarrow$$

$$x(t_{i-1}) = \phi(t_i, t_{i-1})^{-1} x(t_i) + \dots$$

Célszerű bevezetni egy fogalmat:

<u>Reverzibilis</u> rendszer az a rendszer

ahol létezik ϕ^{-1} $\quad \exists \phi^{-1}$

$$t_k < t_i \Rightarrow \phi^{-1}(t_i, t_k) = \phi(t_k, t_i)$$

ilyenkor teljesül: $\phi(t_i, t_k)\phi(t_k, t_j) = \phi(t_i, t_j); \forall t_i, t_k, t_j$

<u>Mintavétel, szinkron, autonóm lin. rendszer</u>

Érzéketlen az eltolásra, nem függ a megfigyelés időpontjától a rendszer megoldása.

$$\mathcal{T} = \{\dots, -T, 0, T, 2T, \dots\}$$

$$X(t_{i+1}) = A\,X(t_i) + B \cdot u(t_i)$$

$$y(t_i) = C \cdot X(t_i) + D\,u(t_i)$$

$$\phi(t_k, t_i) = A^{k-i}$$; reverzibilis a rendszer ha $\exists A^{-1}$

trajektória:

$$X(kT) = A^{k-i} X(iT) + \sum_{j=i}^{k-1} A^{k-(j+1)} \cdot B \cdot u(jT)$$

Átviteli függvény: $\quad \mathcal{Z}\{f_{n+1}\} = z\,F(z) - z \cdot f_0$

$$X(0) = 0$$

$$z\,X(z) = A \cdot X(z) + B\,U(z) \Rightarrow (z \cdot I - A)\,X(z) = B\,U(z)$$

$$X(z) = (z \cdot I - A)^{-1} B\,U(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{\{C\,(z \cdot I - A)^{-1} \cdot A + D\}}_{W(z)} U(z)$$

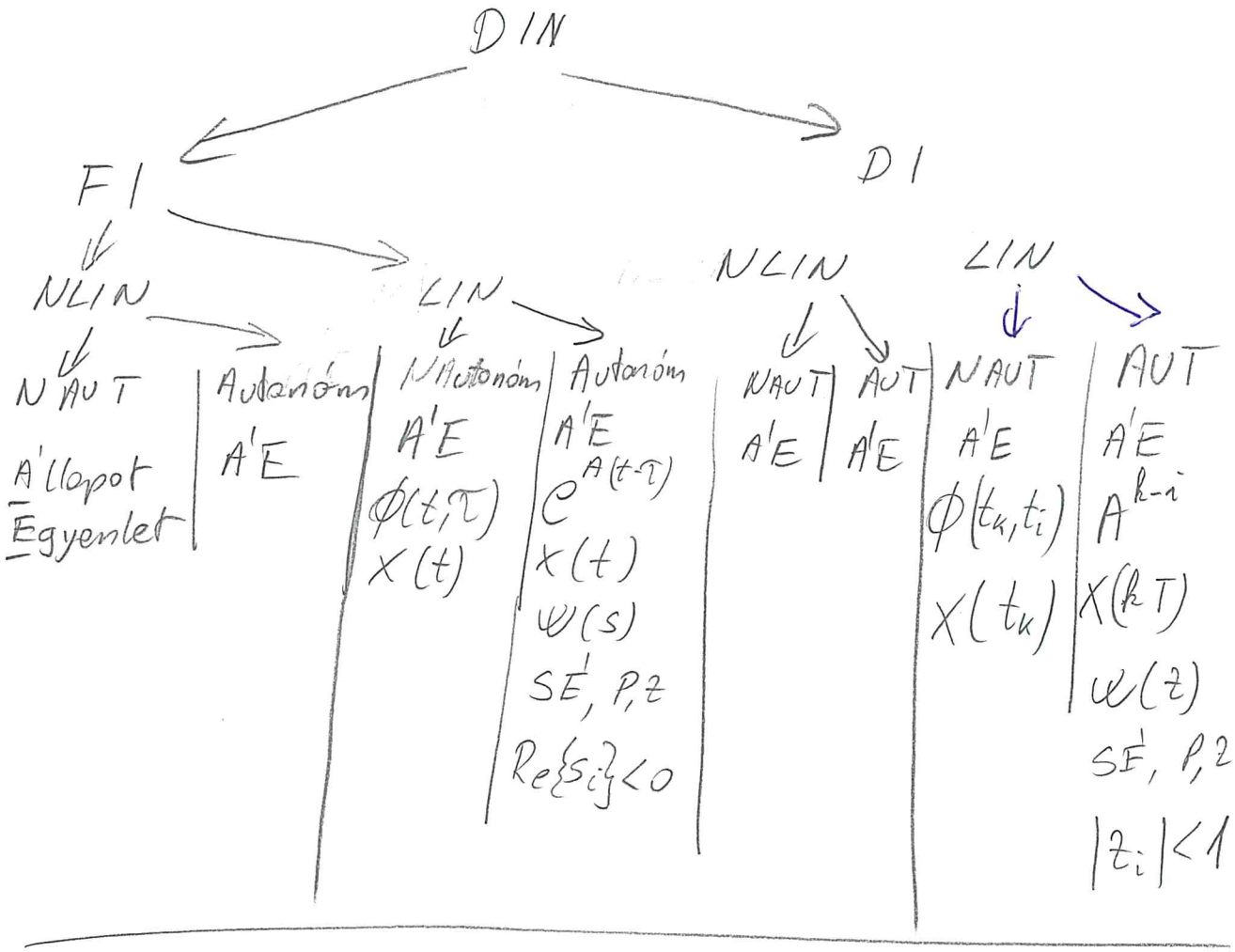
Algebrai hasonlóság van a folytonos idejű rendszerek leírásával.

$$(zI-A)^{-1} = \frac{adj(zI-A)}{\det(zI-A)}$$

A saját értékei $W(z)$ pólusai!

<u>stabilitás</u> $|z_i| < 1$ ← stabil rendszer.

Ekkor BIBO stabil a rendszer.



Stabilitás

Nemlineáris rendszerek
- tranziens számítás
- egyensúlyi helyzet, perturbáció, linearizálás
- stabilitás (Ljapunov I, II és La Salle tételek)

NLN sima

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= g(t, x, u) \end{aligned}\right\} \Sigma$$

Linearizálás, perturbáció

$x_0(t), u_0(t), y_0(t)$ – nominális megoldás

A gyakorlatban y iránt van elvárásunk, keressük, hogy milyen u-ra kapom ezt.

Hogyan viselkedik a rendszer ha a pályát egy picit megváltoztatjuk?

Perturbált rendszer:

$$\Delta x: \quad x = x_0 + \Delta x; \; u = u_0 + \Delta u; \; y = y_0 + \Delta y$$

$$\dot{x}_0 = f(t, x_0, u_0) \qquad \dot{x} = \dot{x}_0 + \Delta\dot{x} = f(t, x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u)$$

$$y_0 = g(t, x_0, u_0) \qquad y = y_0 + \Delta y = g(t, x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u)$$

$$\Delta\dot{x} = f(t, x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) - f(t, x_0, u_0)$$

$$\Delta y = g(t, x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) - g(t, x_0, u_0)$$

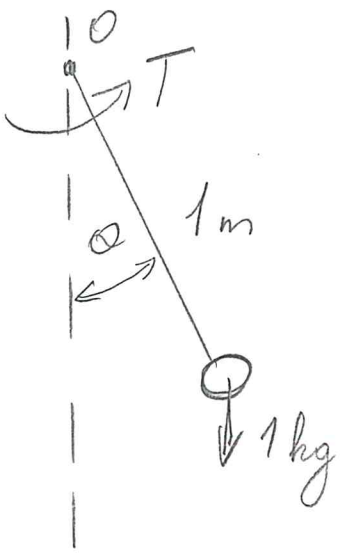
időben állandó rendszer időben változó lett!
De a változások kicsik.

$\delta\Sigma$: $\delta x, \delta u, \delta y$ kicsik.

$$\left.\begin{aligned} \delta\dot{x} &= f_x(t, x_0, u_0)\,\delta x + f_u(t, x_0, u_0)\,\delta u \\ \delta y &= g_x(t, x_0, u_0)\,\delta x + g_u(t, x_0, u_0)\,\delta u \end{aligned}\right\} \text{LIN rendszer}$$

Amennyiben a Σ nem függött t-től és x_0, y_0, u_0 -nem függött t-től, akkor $\delta\Sigma$ autonóm lesz.

Példa:



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -9.81 \cdot \sin\theta + T$$

$x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $u = T$, $y = t$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ f_2(x, u, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -9.81 \sin(x_1) + u \end{bmatrix}$$

$$y = g(x, u, t) = x_1$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, u_0} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(-9.81 \cdot \sin(x_1) + u)}{\partial x_1} & \frac{\partial(-9.81 \cdot \sin(x_1) + u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x_0, u_0} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 \cos(x_{10}) & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0, u_0} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial(-9.81 \sin(x_1) + u)}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{B}}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{x_0, u_0} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1 \; ; \; \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{x_0, u_0} = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0 \; ;$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_0, u_0} = \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0$$

$$\Delta\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81\cos(X_{10}) & 0 \end{bmatrix} \Delta X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta X$$

Nemlineáris rendszerek stabilitása

Feltevés: $u(t)$ nulla vagy lerögzitett $u_0(t)$

Nem lehet elméletet adni a stabilitásról úgy, hogy előbb valamilyen feltételt (feltételeket) ne támasztunk!

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$f(0) = 0$ --> az origó egyensúlyi állapot.

$f(t,x) \in C^{0,1}_{t,x}$ $\quad ([a,\infty) \times D)$

$C^{0,1}_{t,x}$ ← t-től folytonos legyen; ← x-től dif. legyen

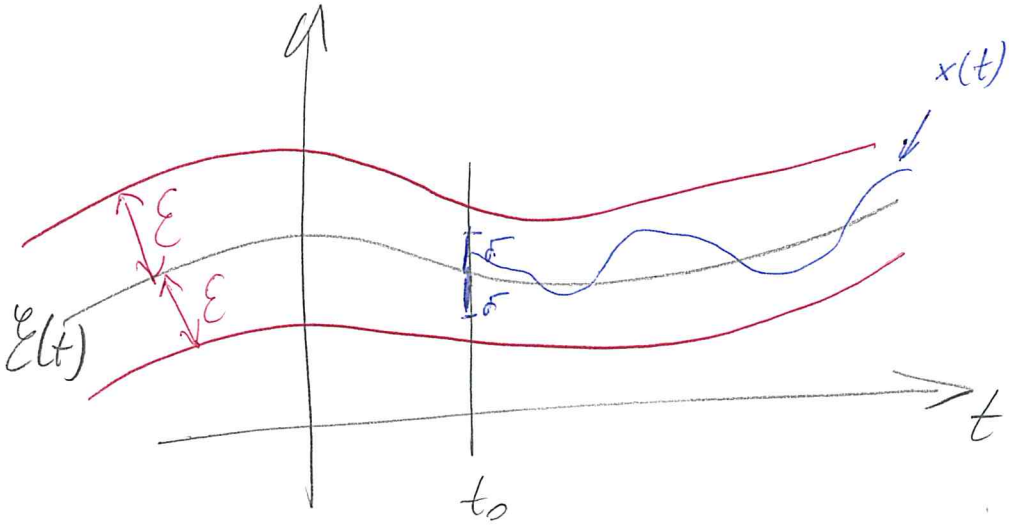
$f(t,0) \equiv 0$

D_x ← nyílt halmaz pl. R^n

Lyapunov stabilitás

Egy $\xi : t \in R \to \xi(t) \in R^n$ függvényről azt mondjuk, hogy megoldása $\dot{x} = f(t,x)$-nek ha

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = f(t, \xi(t))$$



ε - sugarú gömböt állítok a trajektória köré

δ - is elég kicsi kezdeti eltérés

Minden t_0 esetén és minden ε am >0

$$\boxed{\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0,\ \forall t_0 \in [0,\infty) \\ \exists\, \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \\ \|x(t_0) - \xi(t_0)\| < \delta \Rightarrow \forall t: \|x(t) - \xi(t)\| < \varepsilon\end{gathered}}$$

Lyapunov stabilitás

Tehát ha a kezdeti érték δ sugárban választom akkor a megoldás ε - sugarú marad.

- Egyenletes stabilitás $\delta = \delta(\varepsilon)$ tehát δ független t-től.

- asztimptotikus Lyapunov stabilitás

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \xi(t)\| = \emptyset$$

Speciálisan: $\xi(t) \equiv 0,\ t \in [a, \infty)$

$$\tilde{x} = x - \xi \Rightarrow x = \tilde{x} + \xi$$

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt} = f(t, \tilde{x} + \xi) - f(t, \xi) = \tilde{f}(t, \tilde{x})$$

$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(t, \tilde{x})$; $\tilde{\xi}(t) \equiv \emptyset$ egyensúlyi pont.

$\emptyset \equiv \tilde{f}(t, \emptyset)$ teljesülni kell minden téren.

Definitség

$V(t, x)$ pozitív definit ha $\exists W(x)$ ami skalár értékű és teljesíti, hogy

$\|x\| \neq \emptyset \Rightarrow V(t, x) \geq W(x) > \emptyset$ és

$V(t, \emptyset) = W(\emptyset) = \emptyset$ és $W(\cdot, x) \to \infty$ ahogy $\|x\| \to \infty$

pozitív szemi definit ha:

$V(t, x) \geq W(x) \geq \emptyset$

Negatív definit ha $-V(t, x)$ pozitív definit.

Lyapunov direkt, I módszere

Rendszer: $\dot{x} = f(t,x)$; $f(t,0)=0$

Nullából indulva nullában marad, a derivált értéke minden t-re $\emptyset$, nem mozdul ki az állapotból.

(1) Ha $V(t,x)$ pozitív definit.

$$V(t,x) \in C^{1,1}_{t,x}$$

$\forall\, x(t)$ megoldásra $\dot{V}(t,x) = \frac{dV(t,x(t))}{dt} \leq \emptyset$

tehát minden $x(t)$ megoldásra $\dot{V}(t,x)$ negatív definit.

akkor $\xi(t) \equiv 0$ megoldás Lyapunov stabil.

$$\dot{V} = \frac{dV(t,x(t))}{dt} = V_x \dot{x} + V_t = V_x \cdot f + V_t =$$

$$\dot{V} = \langle V_x, f \rangle + V_t$$

$$V_x = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$$

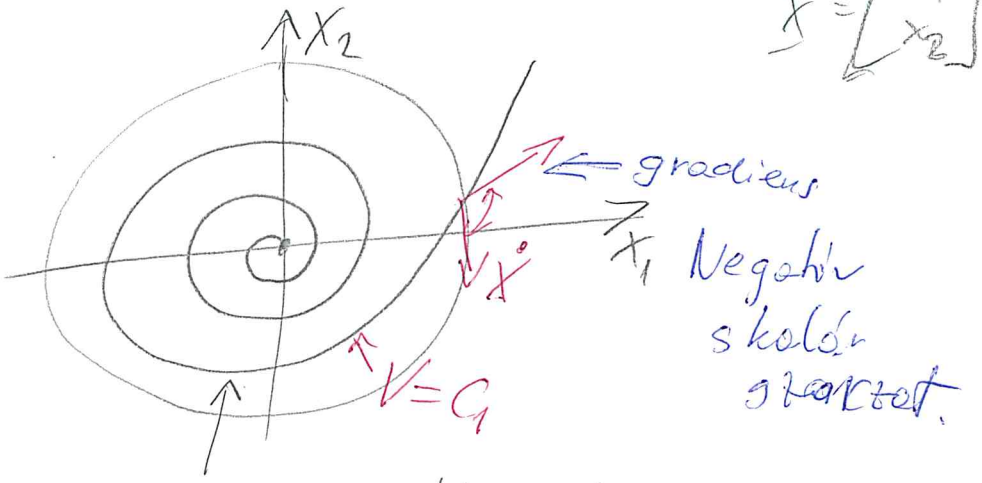
skalár szorzat

Tegyük fel, hogy $\dot{x}=f(x)$ és $f(0)=0$

így feltételezzük, hogy $V(x)$

$V(x)=C$

$\underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



$-V=C_2>C_1$

a rendszer útvonala

Végül bejutunk a trajektória felület belsejébe.

<u>Példa</u> a stabilitásra:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t,\underline{x}) = -x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= f_2(t,\underline{x}) = x_1 - x_2^3 \end{aligned}\right\} \text{Autonóm (időinvariáns)}$$

$\underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Ha $\underline{\phi}$-ból indul akkor $\underline{\phi}$-ban marad

$\underline{f}(\underline{0})=\underline{0}=\underline{0}$ $\rightarrow$ egyensúlyi pont.

Válasszunk egy Ljapunov függvényt

$$V(\underline{x})=\|\underline{x}\|^2=x_1^2+x_2^2$$

– Ez egy energia függvény.

$$\dot{V}(x)=\langle V_x,\underline{f}\rangle+V_t=\langle V_x,\dot{\underline{x}}\rangle=\langle \operatorname{grad} V,\underline{f}\rangle$$

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V}{\partial x_1}f_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}f_2=2x_1(-x_2-x_1^3)+2x_2(x_1-x_2^3)=$$

$$\dot{V}(x) = -2x_1x_2 - 2x_1^4 + 2x_1x_2 - 2x_2^4 = -2(x_1^4 + x_2^4) < \emptyset$$

Mivel $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ ha $\underline{x} \neq \underline{\emptyset}$ és $\dot{V}(\underline{x}) = 0$ ha $\underline{x} = 0$

így a rendszer $\underline{x} = \underline{\emptyset}$ megoldása aszimptótikusan Ljapunov stabil.

Mivel a tétel feltételei a teljes állapottérben teljesülnek, azt mondhatjuk, hogy az azonosan nulla megoldás globálisan aszimptótikusan stabil

Mi a helyzet ha linearizálom ezt a rendszert?

$$\delta \dot{\underline{x}} = \underline{f}_x \Big|_{\underline{x}=0} \qquad \underline{f}_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \Bigg|_{\underline{x}=0} \Rightarrow \underline{f}_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}$$

$$\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j$$

A valós rész nem határozottan negatív, a rendszer a stabilitás határán van (eszerint)

Nem lehet a linearizált rendszer stabilitásából következtetni a nemlineáris rendszer stabilitására.

Ez megoldás szerint a fenti rendszer egy körön

mozog, mert a megoldások sin és cos.

Lyapunov második tétele ad választ arra, hogy minek kell teljesülnie, hogy a linearizált rendszer stabilitásából tudjunk következtetni a nemlineáris rendszer stabilitására.

Lyapunov indirekt módszere

Rendszer $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x})$; $\underline{f}(t, \underline{x}) \in C^{0,1}_{t,x}$

- $\underline{f}(t, \underline{x}) = \underline{\emptyset}$

$$\underline{\underline{A}}(t) \overset{def}{=} \underline{f}_x(t, \underline{x})\Big|_{\underline{x}=\emptyset}$$

$$\underline{f}_1(t, \underline{x}) \overset{def}{=} \underline{f}(t, \underline{x}) - \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{x}$$

Feltételek:

① $$\lim_{\underline{x} \to \underline{0}} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f_1(t, \underline{x})\|}{\|x\|} = \emptyset$$

② $\underline{\underline{A}}(\cdot)$ korlátos leképezés

③ a $\dot{\underline{z}} = \underline{\underline{A}}(t)\, \underline{z}$ linearizált rendszer egyenletesen asztimptotikusan stabil.

Amennyiben ① ② ③ feltételek teljesülnek akkor a nemlineáris rendszer $\xi(t) \equiv \phi$, $t \in [a, \infty)$ megoldása egyenletesen és aszimptótikusan stabil.

<u>Példa</u> szemléltetésre:

Linearizált rendszer $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{x} \rightarrow \phi(t, \tau)$

$$\phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$$

Határozzunk meg egy szimmetrikus operátort

$$P(t) = \int_t^\infty \phi^T(\tau, t)\, \phi(\tau, t)\, d\tau$$

, ami alapján konstruálunk egy Lyapunov függvényt a linearizált rendszerhez:

$$\langle P(t) \cdot x(t), x(t) \rangle = \int_t^\infty \langle \phi^T(\tau, t)\, \phi(\tau, t) \cdot x(t), x(t) \rangle d\tau$$

| A mátrixokat a skalár szorzatban lehet mozgatni ha közben transzponáljuk. |

$$= \int_t^\infty \langle \phi(\tau, t) x, \phi(\tau, t) x \rangle d\tau = \int_t^\infty \| \phi(\tau, t) \cdot x \|^2 d\tau > 0$$

Pozitív definit, teljesíti az I-es feltételeit.
Lehet Ljapunov függvénynek választani.

$$\dot{P} = \frac{dP}{dt} = \int_t^{\infty} \left\{ \dot{\phi}^T(\tau,t)\phi(\tau,t) + \phi^T(\tau,t)\dot{\phi}(\tau,t) \right\} d\tau -$$

$$- \phi^T(t,t)\phi(t,t)$$

$$\dot{\phi}(\tau,t) = -\phi(\tau,t)A(t);$$

$$\dot{\phi}^T(\tau,t) = -A^T(t)\phi^T(\tau,t)$$

$$\phi(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$$

$$\dot{P} = -A^T(t)\cdot P - P\cdot A(t) - I \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{P} + A^T\cdot P + P\cdot A = -I}$$

<u>Alkalmazás</u>:

$$V(t,x) = \langle P(t)\cdot x(t), x(t) \rangle$$

① $V(t,x)$ pozitív definit ugyanis

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \forall t, x : \alpha \|x\|^2 \leq V(t,x) \leq \beta \|x\|^2$$

Tehát korlátai becsülhetők pozitív definit függvényekkel.

② $$\dot{V}(t,x) = \frac{dV(t,x)}{dt} = \langle \dot{P}x, x\rangle + \langle P\cdot\dot{x}, x\rangle + \langle Px, \dot{x}\rangle$$

$-A^TP - PA - I$

$A(t)x + f_2(t,x)$

Lineáris közelítés és a maradék

$A(t)\cdot x + f_1$

$$\langle PAx, x\rangle + \langle Pf_1, x\rangle$$

$$\langle P\cdot x, A\cdot x\rangle + \langle P\cdot x, f_1\rangle$$

$$\langle A^TP\cdot x, x\rangle + \langle Px, f_1\rangle$$

$$\langle A^TPx, x\rangle + \langle x, Pf_1\rangle$$

Amennyiben helyettesítem ezeket akkor az egyes tagok kiejtik egymást és:

$$\dot{V}(t,x) = -\|x\|^2 + 2\langle P\cdot f_1, x\rangle < \emptyset$$

Egyenletesen eléggé kicsivé tehető.

Némileg egysterűsödik a dolog ha a rendszer autonóm. $\dot{x} = A\cdot x$

$P > 0$ is konstans, nem függ t-től, $\dot{P} = \emptyset$

$V(x) = \langle Px, x\rangle > \emptyset$ poz. def. Lehet Ljapunov fg.

$$\dot{V}(x) = \langle P\cdot \underset{A\cdot x}{\dot{x}}, x\rangle + \langle P\cdot x, \underset{A\cdot x}{\dot{x}}\rangle = \langle (P\cdot A + A^T\cdot P)x, x\rangle < \emptyset$$

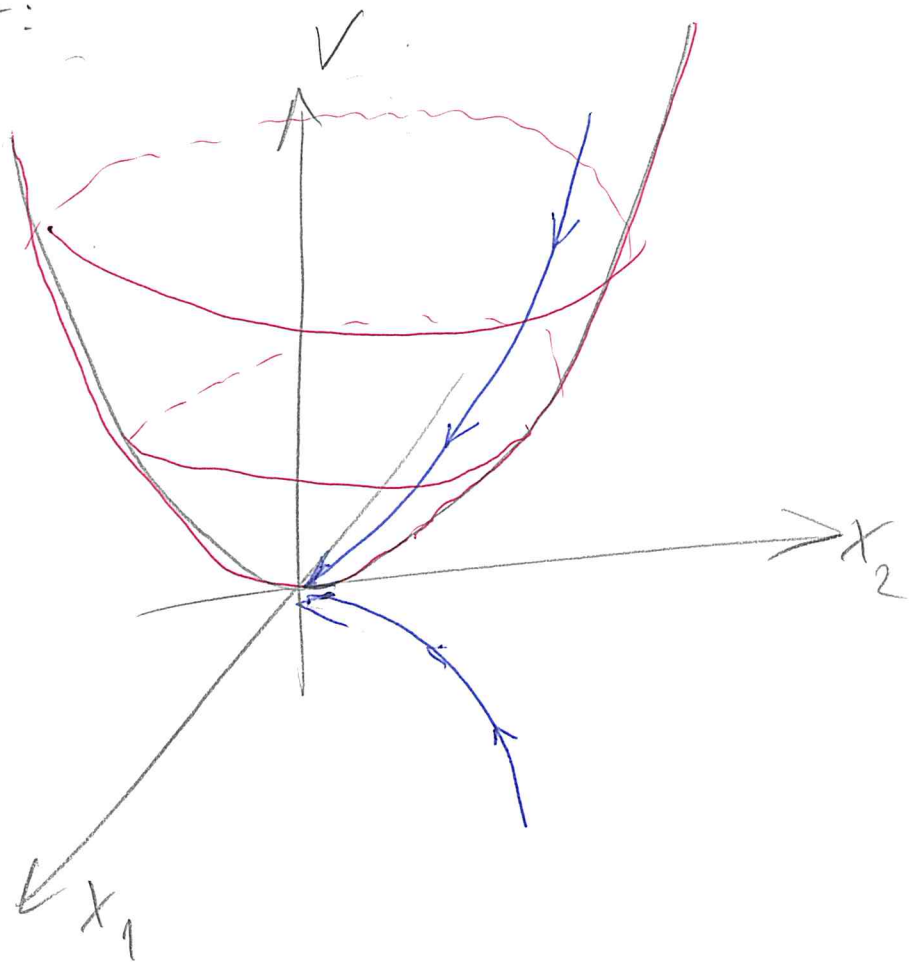
$\exists\, Q > 0$ hogy $\boxed{PA + A^TP = -Q}$

Ekvivalens tételek (feltételek) az aszimptotikus stabilitásról:

① $\underline{\underline{A}}$ minden s_i sajátértéke $\mathrm{Re}\{s_i\} < \emptyset$

② $\exists Q > \emptyset$, hogy $\exists P > \emptyset$ megoldása a Ljapunov egyenletnek

③ $\exists Q > \emptyset$ esetén a Ljapunov egyenletnek létezik $\exists P > \emptyset$ megoldása

$$P = \int^{\infty} e^{A^T \cdot t} Q e^{A \cdot t} dt > \emptyset$$

Illusztráció: