# Tartalom





## *A szabályozások minőségi jellemzői*

Az irányítástechnika a dinamikus rendszerek önműködő irányításának vizsgálatával (analízisével), ill. tervezésével és megvalósításával (szintézisével) foglalkozik. Minden irányítási rendszer lényegében két részből áll: az irányítandó vagy irányított berendezésből ill. rendszerből és az irányító berendezésből ill. rendszerből. Az irányítási rendszerekben különböző irányítási láncok mentén információ-áramlatok cirkálnak. Ezek az információk az irányított rendszer elemeiből az irányító rendszerhez, mint tájékoztató információk, az irányító rendszertől az irányított rendszerhez pedig mint irányító információk érkeznek. Az irányítási rendszerek vizsgálatának és tervezésének az a célja, hogy az irányítórendszerben olyan információfeldolgozást és irányító információalkotást tudjunk megszervezni, amely az irányítási rendszert a céljainak megfelelő állapotok megtartására és az állapotváltozások véghezvitelének irányába vezeti.

Az irányítási rendszer vizsgálata és tervezése tehát minden gyakorlati esetben az irányítási cél meghatározásával kezdődik. Az irányítási cél meghatározása rendszerint nagy körültekintést igénylő, sokszor nem is elég egyértelműen meghatározható feladat.

Ha a kiválasztott jellemzőket megfelelő függvénykapcsolatok alkalmazásával egyetlen skalármennyiségbe sikerül tükrözni, akkor az irányítási cél meghatározása matematikailag kezelhető alakot vesz fel. Az így meghatározott függvénykapcsolat a célfüggvény.

A célfüggvénynek egyetlen skaláris mennyiségben kell kifejezni a rendszer értékelését. A célfüggvény tehát a rendszer jellemzőinek olyan, általában pénzdimenziójú skaláris függvénye, amelyik összefogja a rendszer üzemeltetőjének a rendszer működésével kapcsolatos valamennyi érdekét.

Az irányított rendszer állapotváltozásait az irányító hatás váltja ki. Ha egy rendszer már megkezdett egy állapotváltozást és időközben az irányító hatás megszűnik, vagyis a rendszer magára marad, akkor a rendszer további állapotváltozásai csupán a belsőleg tárolt energiák hatására játszódik le.

Ha a magárahagyott rendszer legalább egy állapotváltozója az idő növekedésével minden határon túl nő, akkor ezt a rendszert labilisnak nevezzük.

Ha magára hagyott rendszer állapotváltozásai az idő növekedésével elenyésznek, vagy nem növekednek egy előre megadott értéken túl, akkor a rendszert stabilisnak nevezzük.

Az irányítási stratégia meghatározásának első lépése az irányítandó rendszer elemzése megfigyelhetőség, irányíthatóság és stabilitás szempontjából.

Ha egy rendszer stabilis, megfigyelhető és irányítható, akkor az irányítás tervezésének további feladata a legmegfelelőbb optimális irányítási algoritmus megkeresése.

Ahhoz, hogy összehasonlíthassuk az irányított rendszer különböző jellegű állapotváltozásait és ki tudjuk választani közülük a legmegfelelőbbet, valamilyen, erre alkalmas mértékre van szükség, amely megmutatja, hogy mennyire hatásos az irányítás. Ez lesz a hatásosság mutatója (kritériuma).

Az irányítás minden egyes változatát a hatásossági kritériumának egy bizonyos értéke jellemzi. Az optimális irányítás tervezésének a feladata az, hogy megtaláljuk és megvalósítsuk az irányításnak azt a fajtáját, amely mellett a szóban forgó kritérium a legmegfelelőbb értéket veszi fel. Ennek során figyelembe kell venni, hogy az irányító hatások csak korlátozott mértékig változtathatók, vagy nem haladhatják túl a lehetséges (megengedett) hatások tartományait.

Optimális irányításnak nevezzük az irányító hatások olyan összességét, amelyek eleget tesznek a rendszerre megállapított korlátozásoknak és ugyanakkor biztosítják a hatékonyság kritériumának legmegfelelőbb értékét.

Egy valós rendszer stabilitásának, megfigyelhetőségének, irányíthatóságának és optimális irányításának meghatározása bizonyos kiinduló ismeretek (matematikai modell, paraméterek stb.) alapján történik. A kiinduló ismereteket különböző elméleti megfontolások és mérések alapján határozzuk meg. Mivelhogy a valós fizikai és kémiai folyamatok matematikai leírása sohasem lehet tökéletes, így a számítások elvégzésére alkalmazott modellek hiányosságai miatt, az eredményeket mindig objektív bizonytalanságok kísérik. A paraméterek valós értékeit mérés alapján határozzuk meg. Közismert, hogy mérni csak adott pontossággal lehet. A továbbiakban a rendszer egyes elemei az idő múlásával megváltoztatják a kiinduló állapothoz viszonyított tulajdonságaikat. Ha ezzel a változások a működés alapfunkcióját korlátozzák, akkor meghibásodásról beszélünk.

A fent említett jelenségek miatt indokolttá válik az irányítási rendszer érzékenységének és tűrőképességének (robusztosságának) vizsgálata amit a paraméterek változása, a matematikai modell bizonytalansága és a rendszer meghibásodása okozhat.

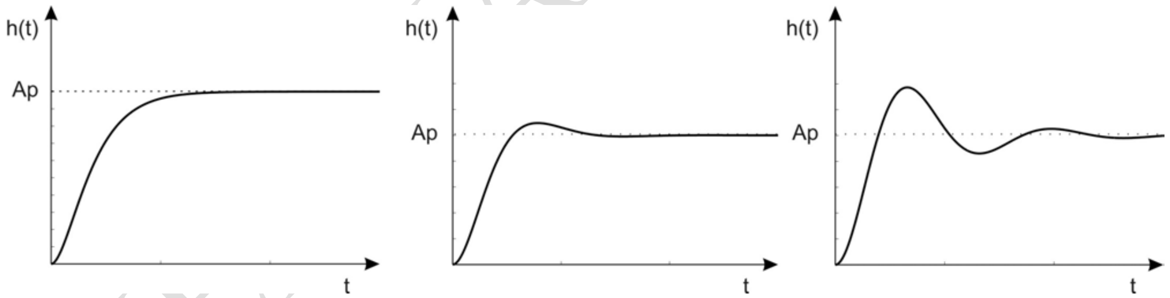
Egy irányítható és megfigyelhető rendszer eszményi optimális irányítási algoritmusa, olyan irányítási rendszert kell, hogy eredményezzen, amelynek érzékenysége elenyészően kicsi, a tűrőképessége pedig megfelelően nagy a kiinduló ismeretek és paraméterek mérési bizonytalanságával, és a rendszer egyes elemeinek meghibásodásaival szemben.

Követelmények a szabályozásokkal szemben:

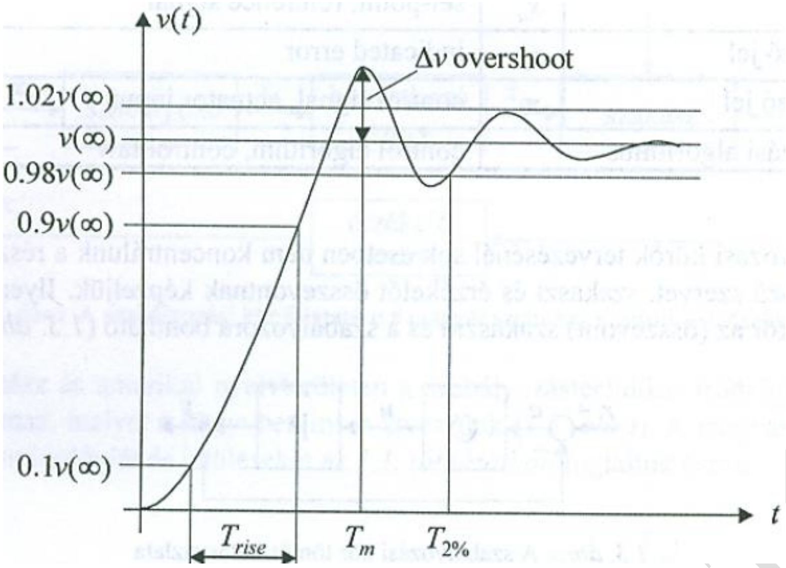
- ◊ stabilitás,
- ◊ megfelelő statikus pontosság,
- ◊ előírt célfüggvénynek való megfelelés.
- ◊ zavarelhárítás,
- ◊ a mérési zaj hatásának elnyomása,
- ◊ érzéketlenség a paraméterváltozásokra,
- ◊ robusztusság (tűrőképesség),
- ◊ előírt dinamikus (tranziens) viselkedés,
- ◊ a gyakorlati megvalósításból adódó korlátozások figyelembevétele.

Ezen követelmények teljesítése függ a szabályozandó rendszertől a környezettől a célfüggvénytől.

Előírt dinamikus (tranziens) viselkedés




Monoton (a), aperiodikus (b) és lengő (c) stabil átmeneti függvények




a.) Szabályozási idő ($t_S$) az az idő, amely az irányított jellemző a végértéktől legfeljebb $\pm\Delta\%$ -kal tér el, azaz:

$$\Delta \le \frac{h(t)-h(\infty)}{h(\infty)} \quad , \text{ ha } t \ge t_s \tag{2.8}$$

b.) A szabályozás dinamikus ingadozása $(\Delta)$. Értéke $\pm 5\%$; vagy $\pm 2\%$; vagy $\pm 1\%$.

c.) Maximális túllendülés:

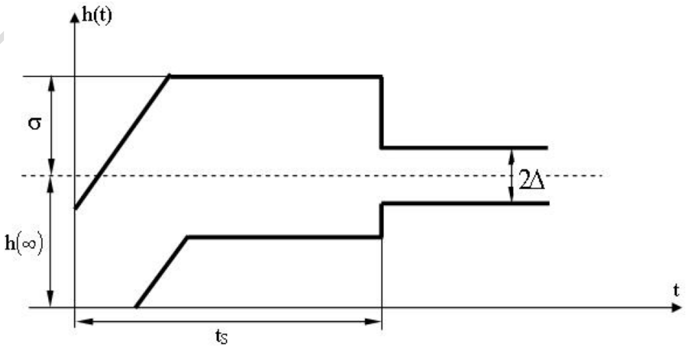
$$\sigma = \frac{h(t_C)-h(\infty)}{h(\infty)} 100[\%] \tag{2.9}$$

ahol $t_C$ az első túllendülésig eltelt idő (csúcsidő). A túllendülés értékét az irányítási folyamattal kapcsolatos igények határozzák meg. Rendszerint 10 és 30 % közötti értékű. Egyes szélsőséges esetekben 70% - os értékű is lehet.

d.) A lengések $\omega = 2\pi/T$ körfrekvenciája. T a lengések periódusa.

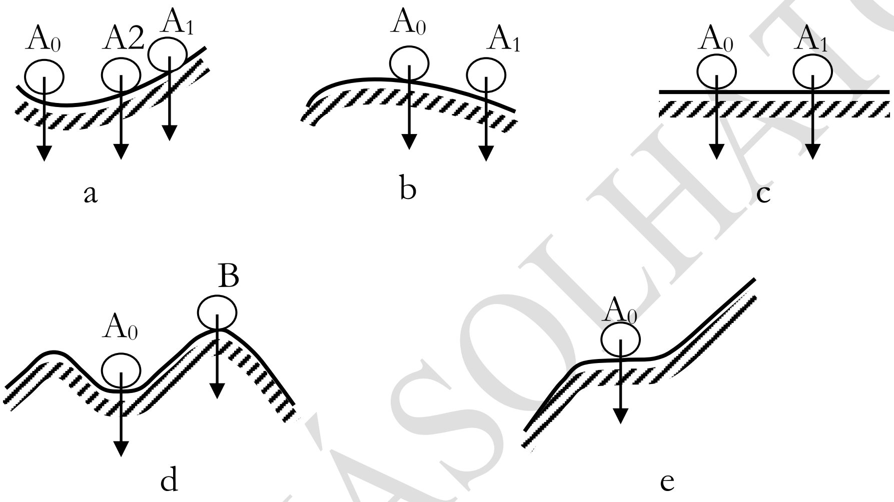
e.) Lengésszám ($N_L$) a szabályozási időn belül bekövetkező lengések száma. $N_L \approx t_S/T$. Rendszerint egy vagy két lengés engedélyezett. Szélsőséges esetekben elfogadható három vagy négy lengés is.

Ha ismertek a minőségi jellemzők mennyiségi meghatározói, akkor meghatározható az átmeneti függvény elhelyezkedésének megengedett tartománya.



## Stabilitás

Alapvető elvárás.
Instabil rendszer is stabillá tehető szabályozással.
A stabilis rendszernek az a tulajdonsága, hogy egyensúlyi állapotból kimozdítva újra egyensúlyba képes kerülni.
A lineáris rendszer stabilitása csak a rendszertől függ, struktúrától és paraméterektől.
Nemlineáris rendszer stabilitása a struktúrán és a paramétereken túl, függ a munkaponttól és a bemenőjeltől is.




A stabilitást többféleképpen meghatározhatjuk:

### A magára hagyott rendszer stabilitása

Egy lineáris rendszer átviteli függvénye $G(s)$ súlyfüggvénye $g(t)$ aszimptotikus stabilitás esetén lecsengő,

$\lim\limits_{x\to\infty} g(t) = 0$ vagyis abszolút integrálható: $\int_0^\infty |g(t)|\,dt < \infty$.

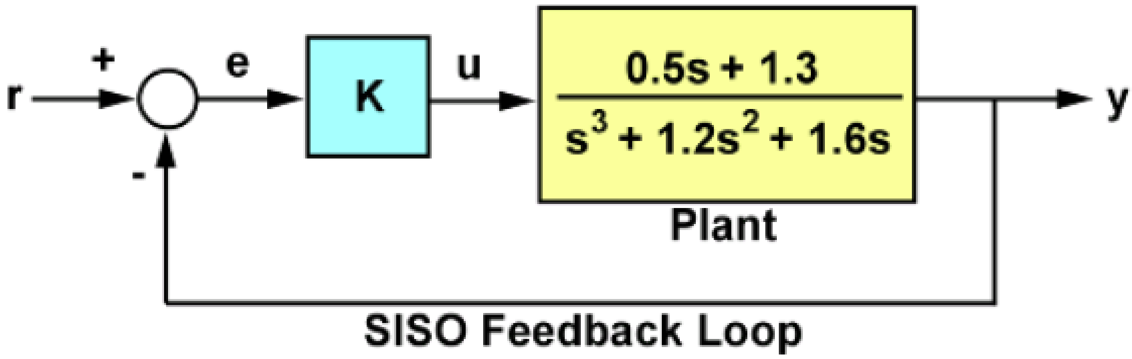
Egy holtidő nélküli LTI rendszer stabil ha átviteli függvényének összes pólusai a komplex sík második és harmadik negyedében helyezkednek el, vagyis a pólusok valós része negatív. $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\sigma_i < 0$ minden $i$ re.

### BIBO stabilitás.

BIBO stabil rendszer esetén korlátos bemenetre mindenkor korlátos kimenet a válasz.
Az LTI rendszerre igaz, hogyha a magára hagyott rendszer stabil, akkor az BIBO stabil is.

## Stabilitás gyökhelygörbe alapján

A gyökhelygörbe a karakterisztikus egyenlet gyökeit adja meg a komplex számsíkon, miközben a rendszer valamelyik paramétere nulla és végtelen között változik. Ez a paraméter gyakran a körerősítés.
A gyökhelygörbe nemcsak a rendszer stabilitásáról ad információt, belőle nagyvonalakban meghatározhatók a rendszer dinamikus viselkedési paraméterei is.
Az alábbiakban egy példán keresztül bemutatásra kerül a módszer.

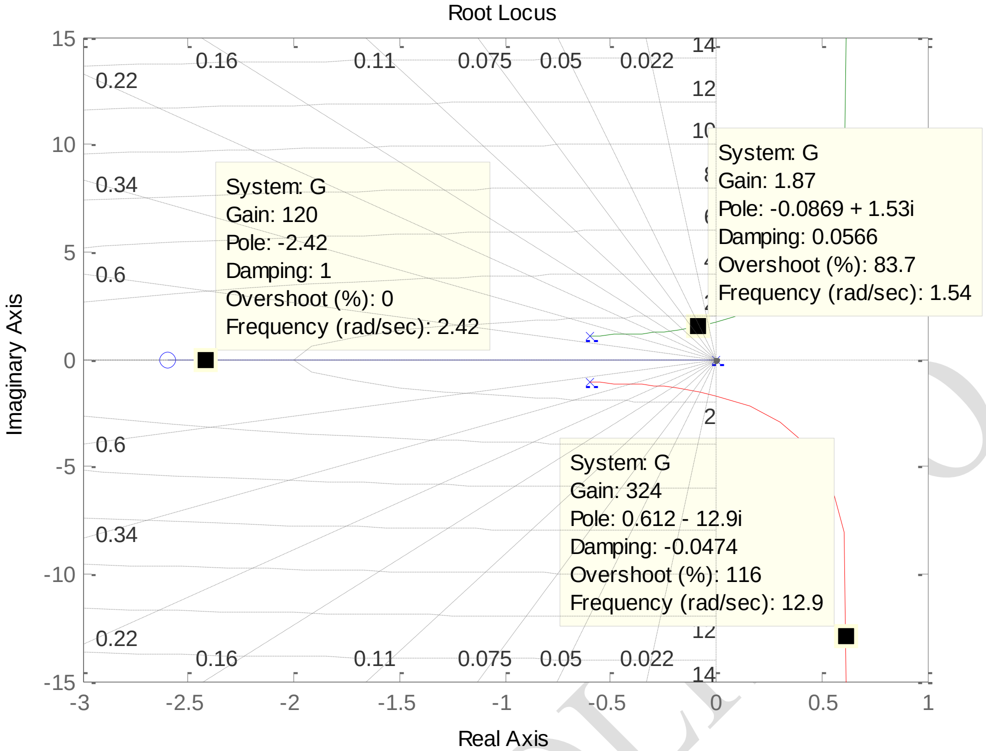



Matlab kód:

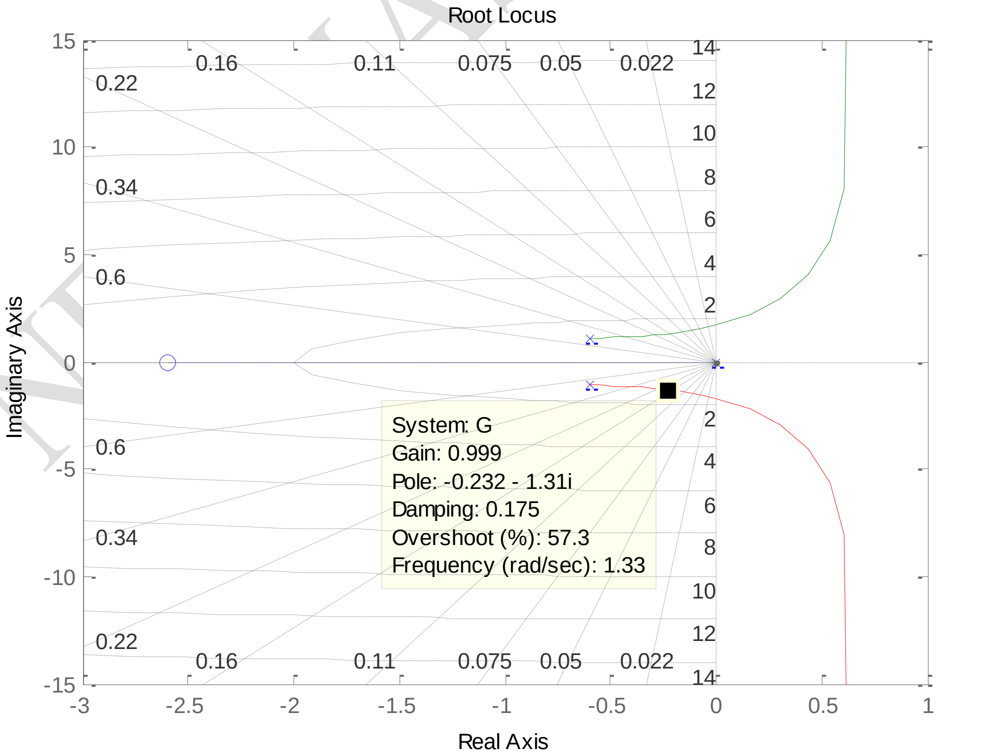
```
G = tf([.5 1.3],[1 1.2  1.6 0]);
T = feedback(G,1);
pole(T)
  -0.2305 + 1.3062i
  -0.2305 - 1.3062i
  -0.7389
```

Tehát a rendszer stabil.
Mennyire stabil?

```
rlocus(G)
```



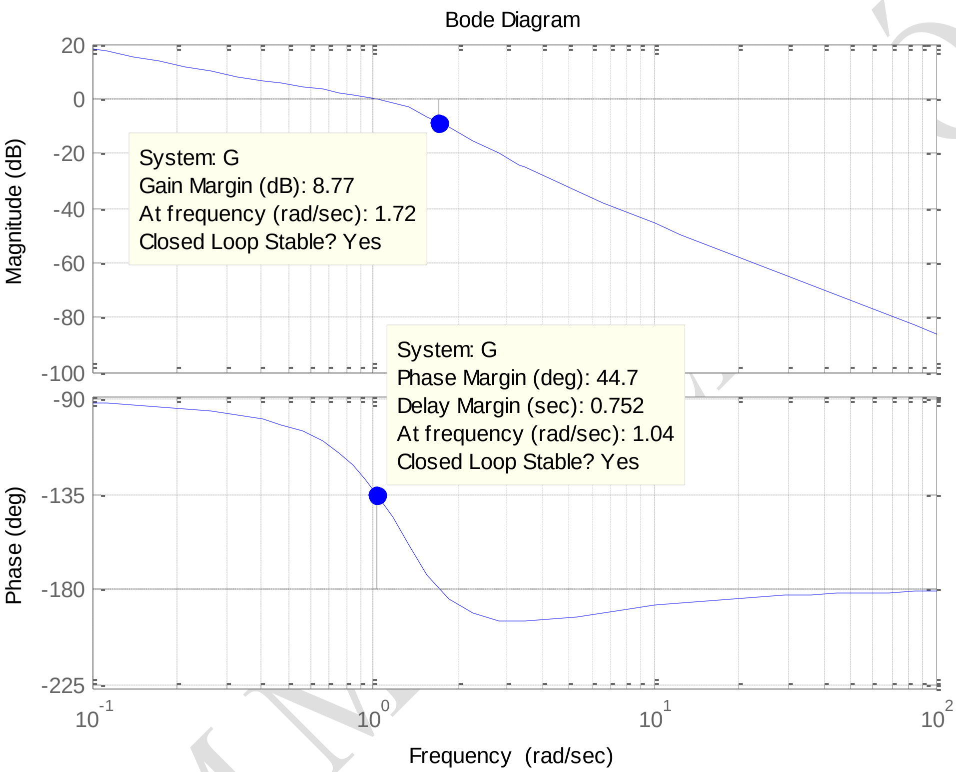

A stabilitás feltétele, hogy $0 < k < 2.7$.
Tehát a $k = 1$ választás $270\%$ -kal megnövelhető, míg a rendszer instabillá válik.



## Stabilitás és robusztusság vizsgálható frekvenciatartományban is

A felnyitott szabályozási rendszer Bode diagramjából a teljes rendszerről stabilitási és robusztussági következtetéseket vonhatunk le.
Tehát:

```
bode(G), grid
```




Első lépésbe határozzuk meg $\omega_c : |G(j\omega_c)| = 1$ **vágási körfrekvenciát**, melynél az amplitúdó karakterisztika értéke egy, vagyis $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$ felhasználásával a vágási körfrekvenciánál:

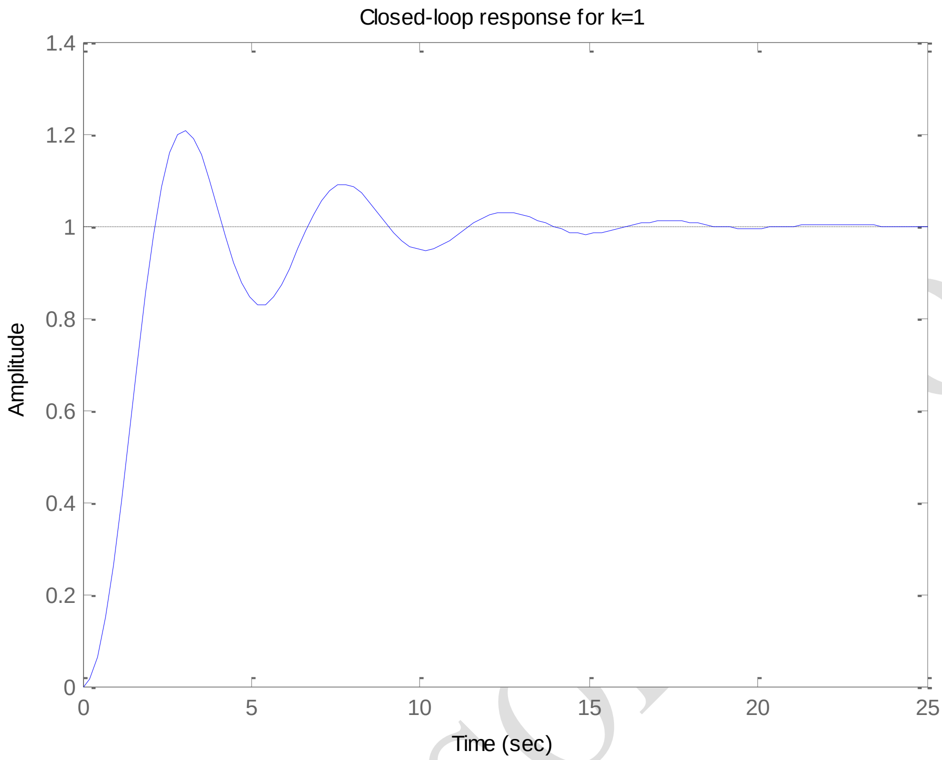
$\omega_c : |G(j\omega_c)|_{dB} = 0dB$.

A vágási körfrekvenciához tartozó fázisszögnek a $-180^\circ$ tól való eltérése adja meg a fázistöbbletet :

$\Phi_t = 180^\circ + \arg\{G(j\omega_c)\}$.

Az erősítési tartalék meghatározásához keressük meg azt a körfrekvenciát, ahol a fáziskarakterisztika értéke $-180^o$, tehát $\omega_\pi : \arg\{G(j\omega_\pi)\} = -\pi$. Az erősítési tartalék definíciója $g_t = \dfrac{1}{|G(j\omega_\pi)|}$, $g_t|_{dB} = -|G(j\omega_\pi)|_{dB}$ .

```
step(T), title('Closed-loop response for k=1')
```




```
[Gm,Pm] = margin(2*G);
GmdB = 20*log10(Gm)   % gain margin in dB
Pm  % phase margin in degrees
GmdB =    2.7471
Pm =    8.6328
```



## Előírt célfüggvénynek való megfelelés.

$I_Q = \int_0^{\infty} e^2(t)\,dt$ négyzetes hibaterület. Parseval-tétel segítségével kiértékelhető frekvenciatartományban is.

$I_A = \int_0^{\infty} \left|e(t)\right| dt$ abszolutérték hibaterület.

$I_{TA} = \int_0^{\infty} t\left|e(t)\right| dt$ idővel súlyozott abszolutérték hibaterület.

## A megfigyelhetőség és az irányíthatóság

A cél elérésének alapvető követelménye a megfigyelhetőség és az irányíthatóság. Az irányíthatósági és megfigyelhetőségi fogalom arra vonatkozik, hogy egy rendszer egy adott kezdőállapotból elirányítható-e a kívánt végállapotba, illetőleg ez alatt a változás alatt a rendszer állapota megfigyelhető-e.
A megfigyelhetőség és az irányíthatóság kérdése a rendszer matematikai modelljének ismeretében egyértelműen eldönthető. A gyakorlatban ez a probléma a rendszer megfigyelhetőségének és irányíthatóságának adott gyakorlati határaira, és mértékeinek meghatározására vezetődik vissza.
A megfigyelhetőség és az irányíthatóság R.E. Kalman (Rudolf Emil Kálmán, (Budapest, 1930. május 19.) amerikai magyar villamosmérnök, matematikus) által bevezetett és szigorúan meghatározott fogalomköre fontos szerepet játszik az irányítási rendszerek kivizsgálásában és tervezésében. Egy irányítási rendszer átviteli függvénye, vagy átviteli mátrixa csak akkor adja meg teljesen és helyesen a rendszer viselkedését, ha, és csak ha a rendszer irányítható és megfigyelhető.
A megfigyelhetőség és irányíthatóság fogalma legegyszerűbben az állapotteres ábrázolásmódon keresztül tárgyalható. Egy lineáris, állandó paraméterű, dinamikus rendszer állapotteres alakja:

$\dot{x} = Ax + Bu$, $\quad x \in \Re^n$, $u \in \Re^r$, $y \in \Re^m$
$y = Cx + Du$, $\quad$ A, B, C, D rendre $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$, $m \times r$ méretű mátrixok.

### Az irányíthatóság (controllability)

A rendszer állapotirányítható, ha az állapotvektor az $u$ irányítás hatására tetszőleges $x(t_0)$ kezdeti állapotból véges $(t_v - t_0)$ idő alatt a tetszőleges előírt $x(t_v)$ állapotba vihető. Ha a definíció csak a kimenőjelre teljesül, kimeneti irányíthatóságról beszélünk.
Az állandó paraméterű rendszer irányíthatóságának szükséges és elégséges feltétele,hogy a
$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ irányíthatósági mátrix rangja $n$ legyen.

--------------

Tétel. (Hautus-féle rangfeltétel). Legyen $A \in R^{n\times n}$; $A \in R^{n\times m}$
Ekkor az alábbi két feltétel ekvivalens:
(i) $rang[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$;
(ii) $rang[A - \lambda I, B] = n$ A mátrix minden λ sajátértékére.

-----------------

Kimeneti irányíthatóság esetén a feltétel az alábbi:
$m_c^T = \begin{bmatrix} C^T B & C^T AB & \cdots & C^T A^{n-1}B \end{bmatrix}$ mátrix rangjának vizsgálatával dönthető el.
Példa:
$\dot{x}_1 = -x_1 + u$
$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det M_c = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$, a rendszer nem irányítható.

## A megfigyelhetőség (observability)

Az irányítás lényeges kérdése, hogy a kimenőjel érzékelésével valamennyi állapotváltozó megfigyelhető-e.
Egy ismeretlen állapotú rendszer kimenő- és bemenőjelének bizonyos ideig tartó mérése után rekonstruálható-e a mérés kezdetekor fennálló állapot. Tehát $t_0 < t < t_v$ intervallumban $y(t)$ és $u(t)$ jelekből $x(t_0)$ meghatározható.
A megfigyelhetőség szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$M_o = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \\ \vdots \\ C^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Mátrix rangja $n$ legyen.
A megfigyelhetőség kérdése bizonyos megfontolások mellett általánosítható az identifikálhatóság fogalmával. Nyilván minden megfigyelhető folyamat identifikálható.
Példa:

$$\dot{\mathrm{x}}_1 = -2\mathrm{x}_1 + \mathrm{u}$$

$$\dot{\mathrm{x}}_2 = -2\mathrm{x}_2 + \mathrm{u}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = -2 + 2 = 0$ tehát a rendszer nem megfigyelhető.

## A Kálmán féle dekompozíció

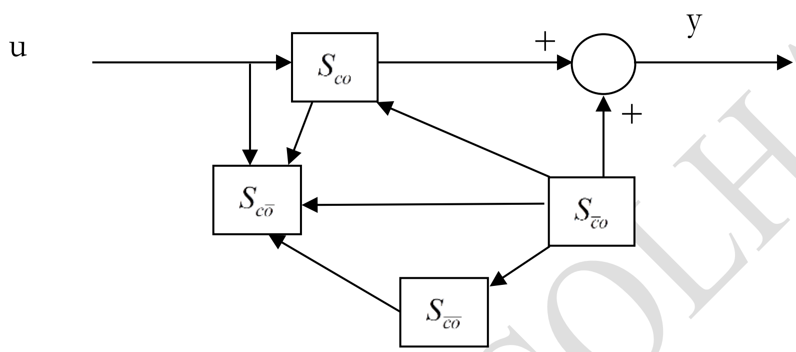
$x_c$ irányítható állapotok, $x_{\bar{c}}$ nem irányítható állapotok

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$x_o$ megfigyelhető állapotok, $x_{\bar{o}}$ nem megfigyelhető állapotok

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1^T & 0^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$




9. Példa

Adott egy irányítási rendszer matematikai modellje:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x + u$$

Határozzuk meg az a, b ,c paramétert úgy, hogy a rendszer teljes mértékben irányítható, majd teljes mértékben megfigyelhető legyen.

Megoldás:

Az irányíthatóság mátrixa:

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & ac \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

Ha az alábbi feltételek teljesülnek, a rendszer teljes mértékben irányítható:

$$\det Q_C = bc^2 \neq 0$$

$$b \neq 0 \wedge c \neq 0; \forall a \in R \qquad \Rightarrow \qquad rang Q_C = 2$$

A megfigyelhetőség mátrixa:

$$Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$$
$$\det Q_O = 1 \neq 0$$
$$rang Q_O = 2$$

Amennyiben az alábbi feltételek beteljesülnek, a rendszer teljes mértékben megfigyelhető:

$$\det Q_O = 1 - a - b \neq 0$$
$$a + b \neq 1; \forall c \in R \Rightarrow rang Q_O = 2$$

10. Példa

Adott egy irányítási rendszer matematikai modellje:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Vizsgáljuk ki az adott rendszer irányíthatóságát és megfigyelhetőségét.

Megoldás:

Irányíthatóság: $$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & AB^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det Q_C = -4 \neq 0$$

A rendszer teljes mértékben irányítható.

Megfigyelhetőség: $$Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det Q_O = 1 \neq 0$$

A rendszer teljes mértékben megfigyelhető.