

SZABADKAI MŰSZAKI FŐISKOLA

DR. FIRSZTNER SZTEVÁN

SZILÁRDSÁGTAN

MANUSCRIPT

SZABADKA, 2000

ELŐSZÓ

A szilárdságtanról nagy számú kiváló könyv íródott (az irodalomjegyzékben, közülük csak néhányat említettek meg). Sajnos a megemlített könyvek a hallgatók számára anyanyelvükön nem mindég elérhetőek.

E könyvet elsősorban a gépészeti főiskola magyar ajkú hallgatóinak ajánlom, mivel a könyv tartalma megegyezik az iskolán alkalmazott tanterv által előlátott tananyaggal.

Arra törekedtem, hogy az igényelt matematikai alapok ne haladják meg a főiskolai szintet. Kivételesen, használtam a mátrix illetve tenzor számítást, ha az egyszerűsítésként szolgált.

Az előadott tananyag sorrendjét (a fejezetek tartalmát) úgy állítottam fel, hogy az a tananyag folyamatos elsajátítását tegye lehetővé:

A BEVEZETÉS rövid történeti áttekintést, a szilárdságtan tárgyát, a szilárdságtan hipotéziseit, valamint a szilárdságtan fő feladatait tartalmazza.

AZ 1. FEJEZET a síkidomokra jellemző elméletet tárgyalja.

A 2. 3. és 4. FEJEZETEK a feszültségi állapotokat, az alakváltozásokat, valamint a feszültségek és az alakváltozások közötti kapcsolatokkal foglalkozik.

A 5. FEJEZET a rudak igénybevételével, és azzal kapcsolatos feszültségi állapotokat tárgyalja.

A 6. FEJEZET a rudak alakváltozását tárgyalja, és pedig úgy, hogy elsőként a munkatételek vannak feldolgozva, ezt követően pedig a rugalmas vonal elmélete kerül bemutatásra.

A 7. FEJEZET a rudak kihajlásával foglalkozik.

A 8. FEJEZET a statikailag meghatározatlan eseteket tárgyalja.

A 9. FEJEZET a méretezéssel foglalkozó, illetve a törés elméletet tartalmazza.

A feldolgozott tananyag csak a statikai állapotban lévő szerkezetekkel foglalkozik, és a síkgörbe, síkegyenes és tört tengelyű rudak elemzését tartalmazza.

Egy-egy fejezethez numerikus példa van mellékelve, az elmélet jobb értelmezése céljából.

Ez alkalommal köszönetemet fejezem ki Dipl.ing. Fürstner Igornak a hasznos észrevételekért, valamint a numerikus feladatok ellenőrzésékor tanúsított közreműködésért.

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ	1
JELÖLÉSEK	9
BEVEZETŐ	13
- Történeti áttekintés	14
- A szilárdságtan tárgya	18
- Az ideális rugalmas test fogalma (hipotézisek)	20
- A szilárdságtan fő feladatai	21
1. A SÍKIDOMOK MÉRTANI JELLEMZŐI	22
1.1. Az általános síkidom jellemző	22
1.1.1. Felület	23
1.1.2. Statikus elsőrendű nyomaték	23
1.1.3. Súlypont és a súlyponti koordinátarendszer	24
1.1.4. Axiális másodrendű nyomaték	25
1.1.5. Centrifugális másodrendű nyomaték	25
1.1.6. Poláris másodrendű nyomaték	26
1.1.7. Keresztmetszeti tényezők	26
1.1.8. Az összetett felületek mértani jellemző	26

1.2. A síkidom mértani jellemzők átszámítása párhuzamosan elmozdított koordinátarendszere (Steiner – féle tétel)	27
1.3. A másodrendű nyomatékok értékváltozása a koordinátarendszer elfordulása miatt	29
1.3.1. A fő másodrendű nyomatékok és a főtengelyek	31
1.3.2. A másodrendű nyomatékok invariációja	33
1.4. A másodrendű nyomatékok mértani ábrázolása	34
 2. FESZÜLTSEGI ÁLLAPOTOK	45
2.1. A feszültség fogalma	45
2.1.1. A főfeszültség fogalma	47
2.1.2. A tangenciális feszültség dualitása	48
2.2. Térbeli általános feszültségi állapot	49
2.2.1. A normálfeszültség kiszámítása	51
2.2.2. A tangenciális feszültség kiszámítása	52
2.2.3. A főfeszültségek kiszámítása	52
2.2.4. A metszősíkban működő feszültségek kiszámítása a főfeszültségek függvényében.	54
2.3. Síkbeli feszültségi állapot	55
2.4. Lineáris feszültségi állapot	59
2.5. A feszültségek ábrázolása	62
2.5.1. MOHR – féle körök	62
2.5.1.1. A főfeszültségek értékei pozitívak	63
2.5.1.2. A főfeszültségek egyik értéke nulla	63
2.5.1.3. A főfeszültségek értékei jelben különböznek	64
2.5.2. A CULMAN – féle ellipszoid	66

3. AZ ALAKVÁLTOZÁSOK	73
3.1. Az alakváltozás fogalma	73
3.1.1. Alakváltozási vektor	76
3.1.2. Fajlagos hosszváltozás	76
3.1.3. Szögelfordulás	76
3.2. Térbeli alakváltozások	77
3.2.1. Térbeli alakváltozási tényezők	80
3.2.2. Síkbeli alakváltozási tényezők	81
3.2.3. Lineáris alakváltozási tényezők	82
3.2. Fajlagos térfogatváltozás	83
 4. A FESZÜLTSÉGEK ÉS AZ ALAKVÁLTOZÁSOK KÖZÖTTI KAPCSOLATOK	85
4.1. POISSON – féle tényező	85
4.2. Az általános HOOKE törvény	87
4.3. Az (E) rugalmassági és a (G) nyíró rugalmassági tényező közötti kapcsolat	88
 5. A RÚD IGÉNYBEVÉTELEI	92
- Általános igénybevétel	93
- Saint – Venant féle eljárás	95
5.1. Egyenes tengelyű rudak igénybevétele	97
5.1.1. Húzó és nyomó igénybevétel	97

5.1.1.1. Feszültség összpontosulás	101
5.1.1.2. Érintkezési (HERTZ – féle) feszültség	102
5.1.1.3. Csövek és tartályok	108
- Vastagfalú csövek	109
- Vékonyfalú csövek	114
- Tartályok	114
5.1.2. Nyíró igénybevétel	117
5.1.3. Csavaró igénybevétel	121
5.1.3.1. Kör keresztmetszetű rudak csavarása	121
- Vékonyfalú csövek csavarása	128
5.1.3.2. Nem kör keresztmetszetű rudak csavarása	129
- Téglalakú keresztmetszet csavarása	130
- Vékony téglalakú keresztmetszet csavarása	131
- "L" – alakú keresztmetszet csavarása	131
- "U" és "I" – alakú keresztmetszet csavarása	132
5.1.4. Hajlító igénybevétel	134
5.1.4.1. A normálfeszültség meghatározása	137
5.1.4.2. A tangenciális feszültség meghatározása	140
5.1.4.3. A főfeszültség meghatározása	142
5.1.5. Aszimmetrikus (ferde) hajlítás	149
5.1.5.1. A normálfeszültség eloszlása	149
5.1.5.2. A tangenciális feszültség eloszlása	153
5.1.6. Síklemez hajlítás	157
5.2. Síkgörbe rudak hajlító igénybevétele	160
5.2.1. A normálfeszültség meghatározása	161
5.2.2. A semleges sík elmozdulása	164
5.3. Összetett igénybevétel	168

5.3.1. Külponos húzó - nyomó igénybevétel	168
5.3.1.1. A mag meghatározása	174
6. A SZERKEZETEK ALAKVÁLTOZÁSA.....	178
6.1. A szilárdságtan munkatételei	178
6.1.1. A munka meghatározása	179
6.1.1.1. Az alakváltozási energia meghatározása (húzó – nyomó) igénybevételnél	181
6.1.1.2. Az alakváltozási energia meghatározása (nyíró – csavaró) igénybevételnél	183
6.1.1.3. Az alakváltozási energia meghatározása hajlító igénybevételnél	186
6.1.1.4. Térbeli alakváltozási energia általános feszültségi állapot esetében.....	187
- Fajlagos térbeli alakváltozási energia	187
- A volumen változására igényelt fajlagos energia	188
- Az alaktorzításra igényelt fajlagos energia	190
6.1.2. BETTI és MAXWEL felcserélhetési tétel.....	191
6.1.3. CASTIGLIANO tétel	193
6.1.3.1. Az alakváltozások rugalmas támaszok esetében.....	195
6.1.3.2. Az alakváltozások meghatározása fiktív megterheléssel	196
6.2. A rugalmas vonal egyenlete	200
6.2.1. A jelölésekre vonatkozó konvenciók	200
6.2.2. A rugalmas vonal általános differenciál egyenlete	201
- Rövid rudak	204
- Hosszú Rudak	204

6.2.3. A rugalmas vonal megközelítő differenciál egyenlete	204
- Szögelfordulás meghatározása	205
- Merőleges elmozdulás meghatározása	205
6.2.4. A rugalmas vonal egyenleteinek meghatározása összetett igénybevétel esetén (CLEBSCH – féle módszer)	212
6.2.4.1. Az összetett terhelési rendszer nyomatéki egyenleteinek formái	215
6.2.5. Állandó és változó normálmetszetű rudak alakváltozása	220
6.2.5.1. Állandó normálmetszetű rudak	220
6.2.5.2. Változó normálmetszetű rudak.....	221
6.2.6. Tört tengelyű rudak (keretszerkezetek) alakváltozása	224
6.2.7. Síkgörbe rudak alakváltozása	231
 7. A RUDAK KIHAJLÁSA.....	236
7.1. A nyomott rudak stabilitása	236
7.1.1. A karcsúsági tényező	236
7.2. EULER – féle eljárás	237
7.2.1. A kritikus erő meghatározása	237
7.2.2. A kritikus feszültség meghatározása	240
7.3. TETMAJER – féle eljárás	240
7.4. (w) – eljárás	241
7.5. Méretezés és ellenőrzés	242
 8. STATIKAILAG MEGHATÁROZATLAN FELADATOK...	250
8.1. A pótegyenletek meghatározása.....	250

8.1.1. CLAPEYRON – féle módszer	251
8.1.2. Közvetlen táblázati módszer	258
8.1.3. Az alakváltozási energia munkaminimumának elve	261
9. MÉRETEZÉS (TÖRÉS HIPOTÉZISEK)...	268
9.1. A törés hipotézisek	168
9.1.1. (I) – a legnagyobb főfeszültségi hipotézis	270
9.1.2. (II) - a legnagyobb fajlagos hosszváltozási hipotézis	271
9.1.3. (III) - a legnagyobb tangenciális feszültségi hipotézis	272
9.1.4. (IV) - - a legnagyobb alaktorzító fajlagos munka hipotézise	272
ÍRODALOMJEGYZÉK...	277

JELÖLÉSEK

$(\xi\eta)$	- általános koordináta-rendszer
(jk)	- a $(\xi\eta)$ tengelyekkel párhuzamos koordináta-rendszer
(uv)	- az (xy) súlyponti koordináta-rendszerhez képest elfordított koordináta-rendszer
(xy)	- súlyponti koordináta-rendszer
$(1,2,3)$	- fő koordináta-rendszer
$(\xi_c, \eta_c); (x_c, y_c)$	- a (C) súlypont $(\xi\eta)$ és (xy) koordináta-rendszerekben való helyzetkoordinátái
$y_{(z)}$	- a rugalmas vonal egyenlete, merőleges elmozdulás
$y'_{(z)}$	- a rúd szögelfordulási egyenlete
$S_\xi, S_\eta, S_j, S_k,$ S_x, S_y	- a $(\xi\eta, jk, xy)$ tengelyekre számított statikai elsőrendű nyomatékok
I_r	- redukált axiális másodrendű nyomaték
I_ξ, I_η	- a $(\xi\eta)$ tengelyekre számított axiális másodrendű nyomatékok
I_j, I_k	- a $(\xi\eta)$ tengelyekkel párhuzamos (jk) tengelyekre számított axiális másodrendű nyomatékok
I_u, I_v	- a $(\xi\eta)$ tengelyekhez képest elfordított (uv) tengelyekre számított axiális másodrendű nyomatékok

I_0, I_P	- poláris (pontra számított) másodrendű nyomatékok
I_1, I_2	- fő axiális másodrendű nyomatékok
$I_{xy}, I_{\xi\eta}, I_{uv}, I_{1,2}$	- $(xy, \xi\eta, uv, 1,2)$. tengelyekre számított centrifugális másodrendű nyomatékok
W_x, W_y, W_0	- (xy) tengelyekre, illetve (0) pontra számított keresztmetszet tényezők
a, b, \dots, l, \dots	- hossz értékek jelölése
e	- semleges sík elmozdulás
f	- elmozdulás
i	- inerciasugár
g	- relatív mérettényező
k	- az egyensúlyi egyenletek száma
l_r	- redukált rúd hossz
n	- kötésreakciók száma, fordulatszám
u	- fajlagos alakváltozási energia
w	- a terhelőrendszer fajlagos munkája, külön kihajlási tényező
u_v, u_f	- volumen, és alaktorztási fajlagos energia
A	- sík felület, alakváltozási tenzor
A, B, C, \dots	- pontmegjelölések
C	- súlypont
$C_1, C_2, \dots, D_1, D_2, \dots$	- integrációs állandók
D	- alakváltozási tenzor
E	- rugalmassági modulus
F	- erő
F_N, F_T	- normál erő, tangenciális erő

G	- nyíró rugalmassági modulus
G, g	- főgörbületek
H	- rugalmassági tenzor
J	- általános síkidom mértani jellemző
K	- feszültség összpontosulási tényező
M	- nyomaték
M_f, M_t	- hajlító és csavaró nyomaték
P	- teljesítmény
R, δ	- görbületi sugarak
S	- határozatlansági tényező
U	- alakváltozási energia
W	- külső terhelőrendszer munkája
T	- feszültségi tenzor, transzverzális erő
X, Y, Z	- (xyz) tengelyirányú erők
σ	- normálfeszültség
σ_M, σ_D	- szakító és megengedett normálfeszültség
$\sigma_a, \sigma_t, \sigma_r$	- axiális, tangenciális és radiális normálfeszültség
$\sigma_{1,2}$	- főfeszültségek
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	- a normálfeszültség (xyz) tengelyirányú összetevői
τ	- tangenciális feszültség
τ_M, τ_D	- szakító és megengedett tangenciális feszültség
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	- az (xyz) .tengelyekre merőleges síkokban működő (yzx) irányú tangenciális feszültségek
$\alpha, \beta, \varphi, \psi, \gamma, \dots$	- szögelfordulások

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ - az (xy, yz, zx) síkokban létrejött szögtorzulások

ε - fajlagos hosszváltozás

$\varepsilon_{1,2,3}$ - fő fajlagos hosszváltozások

$\varepsilon_{x,y,z}$ - (xyz) irányú fajlagos hosszváltozások

λ - karcsúsági tényező

μ - POISSON féle tényező

ν - biztonsági tényező

q - folyamatos terhelés

\vec{n} - a felület normálvektora

\vec{p} - feszültségvektor

\vec{t} - elemi elmozdulási vektor

\vec{f} - alakváltozási vektor

$\{K_j\}$ - külső terhelőrendszer

$\{K\}$ - ekvivalens terhelőrendszer

$\{R_s\}$ - (S) számú kiválasztott kötésreakció

$\{R\}$ - ekvivalens kötésreakciók

$(\vec{})$ - vektorjelölések $(\vec{\sigma}, \vec{\tau}, \vec{p}, \dots)$

$()_{x,y,z}$ - (xyz) tengelyirányú vektorok jelölése $(\sigma_x, \tau_y, p_z, \dots)$

BEVEZETÉS

Ha több ezer évre tekintünk vissza, őszinte tisztelettel megcsodálhatjuk mindazokat a csodálatraméltó létesítményeket, melyek a mindennapi életfenntartást biztosították (öntözési rendszerek, harcászati eszközök, anyagmegmunkáló szerszámok, stb.), egyes vallások fenntartását és azok terjedését szolgálták (egyiptomi piramisok, chichenitzai szenthelyek, katedrálisok és más középületek stb.), vagy a lakóhelyek társadalmi működését, és az életminőség tartalmát kialakító eszközöket biztosították (kastélyok, védőerődítmények, fegyverek, hangszerek, stb.).

A mai műszaki tudások birtokában, (a szilárdságtan szemszögéből) tudva, hogy a római korig nem léteztek írásba foglalt érdemes elméleti és gyakorlati adatok (kivéve az itt - ott felbukkanó leírások), nem lehet kitérni néhány kérdés elől:

- Milyen elméleti tudással és milyen eszközökkel rendelkeztek az ókori tervezők és kivitelezők?
- Léteztek e, (és ha igen, milyen szinten) rendezett ismeretek a használt anyagok tulajdonságairól?
- A meglévő és az új tudások hogyan halmozódtak, és hogyan lettek továbbítva az utókor számára?

Ha egy-egy kérdésre nem is lehet minden esetben kielégítő magyarázatot kapni, mégis biztosak lehetünk, hogy (igaz nem a ma használt formában) az ókori tervezők és kivitelezők rendelkeztek kellő tudással, a sokszor csodálatra méltó létesítmények megvalósítására. Mindazokat a mérnöki problémákat melyek egyes kivitelezésnél megjelentek, ugyanúgy meg kellett oldani kétezer éve ezelőtt is mint ma, (csak más eszközökkel). A ránk maradt (megőrzött) műszaki megoldások alapján(építmények, utak, hajózási eszközök, fegyverek, hangszerek, stb.), következtetni lehet arra, hogy biztosan rendelkezésre álltak bizonyos anyagismeretek (teherbírás, tartósság, elasztikusság, megmunkálási tulajdonságok), léteztek méretezési eljárások, rendelkezésre álltak számtani és mértani arányok és ezeknek a használati módszerei ismerete. Léteztek alapismeretek az erőforrásokról (a szél és a vízfolyamok kihasználása). A tervezésben nagy helyet kapott a hagyomány a történelem ismeret és a politikai viszonyok igénybevétele.

Könnyen lehet arra következtetni, hogy a meglévő tudásokat, az írott anyag hiányában az egyik nemzedék a másiknak, részben szóbelileg adta át, részben pedig minden új nemzedék a sikeres és meglévő megoldások alapján folytatta tevékenységét. Mivel kellő elmélet általában nem létezett, a sikeres megoldások csak több százéves tapasztalatok (sikerek és kudarcok) alapján jöhettek létre. Ilyen tudásátadási forma ahhoz is vezetett, hogy egyes sikeres

megoldások hagyománnyá váltak, sőt bizonyos időszakok jellemzői is váltak (Görög építészet egyes időszakai, hajógyártási formák, gótikus katedrálisok, a geocentrikus világnézet, stb.).

A fejlődő társadalmak, többek között, arra is ösztönözve voltak, hogy a felhalmozott tudást rendszerezzék, írásos formában lehetővé tegyék a használatát az új nemzedékek számára. Egyidejűleg az újabb és újabb, mind összetettebb követelmények (nagyobb méretek, nagyobb mennyiségek, jobb kihasználási tényezők, nagyobb teljesítmények) gyorsabb eljárásokhoz vezettek az újítások terén.

Habár az úgynevezett modern műszaki és tudományosnak nevezhető irodalom kezdete a római korban ismert, a fejlődésnek igazi felvirágzása a reneszánsz időszakhoz kötődik. Ekkor kezdődnek a matematika, az experimentális fizika, a szerkezet elemzés, a mértan, és általában a szabad eszmék gyorsult kibontakozása. Nagy lépésekkel fejlődnek a tudományos és a gyakorlati módszerek (kísérleti módszer, analízis-szintézis, indukció-dedukció). A középkorban kifejezetten gátló társadalmi légkör, mely gátolta az új eszmék kibontakozását, , most (különösen Angliában) változik, és igen kedvezően lehet minősíteni. Ilyen pozitív irányzat gyümölcöző hatással volt valamennyi tudományos és műszaki ágazatra. Ez a megállapítás a fizikára is vonatkozik, és azon belül a mechanikára is. A XIX. sz. végéig azok az elméleti és gyakorlati tudások, melyek ma a szilárdságtan tárgyát képezik, kiváltak és mint külön ágazat (meghatározott tanulmányi tárggyal) léteznek.

TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS

A szilárdságtan tárgya szempontjából, a modern történeti áttekintést tartalmilag két nagy egyéniség jellemzi, és pedig VITRUVIUS (i.sz.I. sz.) és MAXWELL(1831-1869). Ezen az időhatáron belül megszületett egy elméleti tartalomhalmaz, mely a mai elméleti továbbfejlesztés és a gyakorlat alapját képezi. Az elmélet és a gyakorlat kifejlesztésében kiemelt helyet foglaltak el a következő egyének:

VITRUVIUS Pollio Marcus (i.sz.I.sz.)

Kiváló római építész volt. Tíz kötetes művéről lett ismert ("DE ARCHITECTURA"). A műszaki részletek mellett, betájolta a mérnöki tudnivalók tartalmát (széles szakmai tudás, kulturális ismeretek, helyes politikai értelmezés). Könyvei tartalma nagy hatást gyakoroltak a XIV. sz. reneszánsz tudomány alapozásában.

PAPPOSZ Alexandriai (i.sz. IV. század)

Kiemelkedő görög matematikusa volt. Ma is a Papposz-Guldin tételről ismert. Matematikailag feldolgozta az emelőt, a lejtőt, az éket, a csavart, a fogaskereket és a fogas kapcsolásokat.

ALBERTI Leon Battista (1404-1472)

Firenzei matematikus, építész, humánfilozófus. Fő műszaki művei ("DELLA PITTURA" és "LUDI MATHEMATICA"). Leírta a perspektíva törvényeit. A sztereo látás tudományos megalapozása, és az ábrázoló mértan alapjainak leírása az ő nevéhez kötődnek. A ("DE REAEDIFICATORIA") című könyvében utal a hidak méretezésére (tapasztalaton alapozott adatok).

LEONARDO da Vinci (1452-1519)

A reneszánsz kiemelt alakja. Kitűnt mint festő, szobrász, természettudós, építész, gépész. Tanulmányaiban használta az előzetes elemzést. Sok írott és rajzban foglalt anyagot hagyott az utókorra. Megemlíti érdemelt munkásságának az a része, mely a kísérletezéshez fűződik, amit az ő idejében még forradalmi eszmének lehetett minősíteni. Műszaki érdeklődése kiterjedt a kinematikára, az elasztikus rendszerekre, a hullámtechnikára, a virtuális elmozdulások elvi felépítésére, a tartók teherbírásának elemzésére, a haditechnikára. Elméletileg feldolgozta a csavart, az emelőt, a csörlőt.

GALILEI Galileo (1564-1642)

Olasz fizikus matematikus és csillagász. Kopernikusz híve (emiat megforlásoknak volt kitéve). Eredményeit a ("DISCORSI E DIMONSTRATIONI MATEMATICHE INTORNO A DUE NUOVE SCIENCE") című munkájában foglalta össze. Foglalkozott a hajlított tartók teherbírásával, a felületek (síkidomok) elemzésével. Elsőként alapította meg, hogy a teherbírás függ a tartó alapja és a magassága arányától ($bh^2/2$). Később a pontos ($bh^2/6$) arányt PARENT (1666-1716) alapította meg.

HOOKE Robert (1635-1703)

Angol fizikus volt. Sokat foglalkozott a testek rugalmasságával. Nevéhez kötődik az u.n. HOOKE - törvény, mely kimondja ,hogy "az erő arányos az elmozdulással, illetve a feszültség arányos a fajlagos méretváltozással (dilatációval). Erre vonatkozó eredményeit feldolgozta a ("LECTURES de POTENTIA RESTITUTIVA OROF SPRING") című művében. Az ő eredményei alapján (kísérletek alapján) YOUNG (1773-1827) meghatározta az u.n. (**E**) RUGALMASSÁGI MODULUST, melyet YOUNG-féle modulusnak neveznek.

BERNOULLI Jacob (1654-1705)

Svájci matematikus. Bevezette a rugalmas (elasztikus) vonal elméletét, és ezzel új fejezet nyílt a szilárdságtan tanulmányozásában. Mindezt az idejének új matematikai módszerek használatával érte el (differenciál és integrál számítan)

BERNOULLI Johann (1667-1748)

Kora legkiválóbb matematikusaként tisztelték. Megalapozta a virtuális elmozdulások elméletét, és ezzel nagy lendületet adott a mechanika és a szilárdságtan fejlődésének.

EULER Leonhárd (1707-1783)

Legismertebb művei az elméleti mechanikához fűződnek (variációs elv, a másodrendű nyomaték fogalma). A szilárdságtanban kiváló eredményeket ért el a rudak általános elemzése terén. Megalapozta a kihajlott rudak elméletét.

NAVIER (1785-1836)

Elméleti és gyakorlati mechanikával foglalkozott. Rendszerezte a statikának az elméletét a mai ismert formájában. Külön ki kell emelni a hajlított rudak terhelés és alakváltozás közötti összefüggések elméletének formáját, mely szintén az ő alkotása.

POISSON Simeon Denis (1781-1840)

A szilárdságtan terén az ő nevéhez fűződik az anyag feszültségi állapota és a megfelelő alak és méret változások leírása.

CAUCHY Augustin Louis (1789-1857)

Felalította az általános feszültségi állapot elméletét (az elemi tetraéder egyensúlyi állapotát elemezve). Meghatározta a nyírófeszültség dualitásáról szóló tételt. Bevezette a főfeszültség fogalmát és a feszültségek grafikus ábrázolását.

SAINT - VENANT Athemár Jean Claude Barre (1797-1886)

Nvééhez fűződik a rudak igénybevételeének eljárása. Kiváló eredményeket ért el a rugalmas testek tanulmányozása terén.

STEINER Jacub (1798-1863)

A szilárdságtanban nevét viseli a párhuzamosan elmozdított tengelyekre számított másodrendű nyomatékok átszámítására használt tételek.

CLAPEYRON Benoit Paul Emil (1799-1864)

Francia fizikus és mérnök volt. Kiváló eredményeket ért el a többtámaszú tartók statikája tanulmányozása terén.

CULMAN Karl (1821-1881)

Mint a zürichi egyetem tanára, ismerté vált a grafostatika módszerei kidolgozásában, valamint a módszerek mérnöki alkalmazásában.

CLEBSCH Alfréd (1833-1872)

Ismerté vált a rugalmas testek tanulmányozásában. Mérnöki szempontból legkiválóbb eredménye az összetett terhelőrendszerű rudak általános megoldásához fűződik (rugalmas vonal univerzális egyenlete).

RITTER Wilhelm (1847-1906)

Culmannal együtt a sztatikában használt grafikus módszerek alapítója.

MOHR Otto (1835-1918)

A drezdai egyetem tanára volt. Nevéhez fűződik a feszültségek grafikai ábrázolása (Mohr - féle körök). Kiváló munkát végzett a törélmélet terén is.

BETTI(1823-1892), **MAXWELL** James Clerk(1831-1879)

A szilárdságtan terén a két tudós nevéhez fűződnek a felcserélhetőségi tétel, és annak speciális esete.

CASTIGLIANO Alberto (1847-1884)

Kidolgozta a rudak alakváltozásaira vonatkozó elméletet, a külsőerők munka igénybevételével. Ezzel, a klasszikusnak számított (elasztikus vonalak elmélete) módszerhez viszonyítva lényegesen megegyesíttette az eljárást.

TETMAYER Johann Ludwig von (1850-1905)

Nevéhez kötődik (empirikus Tetmayer - egyenlet) a képlékeny tartományban használt kihajlás számítási eljárás.

A felsorolt egyének közvetlenül a szilárdságtan fejlesztésén munkálkodtak, de előttük, vagy velük egyidejűleg, sok tudós és a gyakorlatban működő mérnök segítettek (eszmékkel, matematikai alapokkal, világnézettel, új műszaki megoldásokkal) a szilárdságtan fejlődésében. Munkájukkal, új és új kihívásokat és megoldásra váró problémákat vetettek fel, illetve utaltak a fejlődés irányára:

ARKHIMÉDÉSZ (i.sz.e.287-217)

EUKLEIDÉSZ (i.sz.e.330-..)

NEWTON Isaac (1642-1727)

LEIBNIZ Wilhelm (1646-1716)

COULOMB C.A. (1736-1806)

WATT James (1736-1819)

OSTROGRADSKI M.V. (1801 - 1861)

HERTZ Heinrich Rudolf (1857 -1894)

.....

.....

A szilárdságtan terén, az új technikai eszközök (számítógép, informatika, mérés technika, új anyagok,...), és a kor új kihívásai (űrkutatások, piackihívások,...) még eddig megoldatlan feladatokat tárnak a jelen és a jövő tudósai és kivitelezői elé.

A SZILÁRDSÁGTAN TÁRGYA

A szilárdságtan, a szilárd testek (rendszerek) terhelésrendszere, a belső feszültségek és a méret illetve alakváltozások közötti viszonyokat tanulmányozza. A felsorolt összefüggések alapján, a következő eseteket lehet megkülönböztetni:

MEREV TESTEK

A statikában feldolgozott erőrendszerek (külső, belső és kötőerők) hatása, eloszlása, a kötések és a belső erők meghatározása, feltételezte, hogy a rendszer és annak valamennyi eleme nem végez relatív mozgást a merev aljathoz viszonyítva. Ugyanakkor feltételezve volt, hogy a külső erőrendszer hatására a megterhelt rendszerben nem jön létre alak és méretváltozás. Ilyen absztrahált rendszereket *merev rendszerek* - nek, az összetevő testeket pedig *merev testek* - nek nevezzük.

SZILÁRD TESTEK

A valóságban, a külső erők hatására, a testek alak és méretváltozásokat szenvednek, a molekuláris távolságok megváltoznak, és emiatt belső feszültségek keletkeznek. Az ilyen (nem absztrahált-természetes tulajdonságokkal rendelkező) testeket *szilárd testek* - nek nevezzük. A mechanikának a része mely ilyen testeket, illetve rendszereket tanulmányoz *szilárdságtan* -nak nevezzük.

A gyakorlatban használt anyagok (testek) két (elméletileg) szélsőséges tulajdonság között találhatók:

RUGALMAS TESTEK

Így nevezzük azokat a (feltételezett) testeket, melyek a terhelésrendszer megszűnése után visszanyerik eredeti alakjukat és méreteiket. Azt a részét a mechanikának mely ilyen testekkel és rendszerekkel foglalkozik *rugalmasságtan* - nak nevezzük.

KÉPLÉKENY TESTEK

Így nevezzük azokat a (feltételezett) testeket, melyek a terhelésrendszer megszűnése után nem nyerik vissza eredeti alakjukat és méreteit. A mechanikának a része mely ilyen testeket, illetve rendszereket tanulmányoz *képlékenytan* - nak nevezzük.

RUGALMAS - KÉPLÉKENY TESTEK

A beépített anyagok a gyakorlatban bizonyos feszültségig úgy viselkednek mint ha rugalmas testek lennének, e feszültség meghaladása után pedig mint ha képlékenyek lennének (acél, alumínium,...). Ezt az általánosan használt anyag tulajdonságát szem előtt tartani a rendszerek méretezésénél. A tény fontossága miatt, az alapanyagok gyártói minden szállítmányhoz kell hogy mellékeljék a megfelelő ($\sigma = E \cdot \varepsilon$) függvényt, táblázati vagy diagram formájában) HOOKE-féle diagram).

REÁLIS RENDSZEREK

A megvalósított szerkezetek (rendszerek) bizonyos tűrések belül rugalmas rendszerekként kell hogy működjenek. Mivel a szerkezetek *rugalmas - képlékeny* anyagokból készülnek, arra lehet következtetni, hogy *a reális rendszerek rugalmas - képlékenyek*. Itt meg kell említeni, hogy a legfigyelmesebb méretezés mellett is a terhelés megszűnése után a rendszerbe tartós alak és méretváltozások jönnek létre. Ezek a tartós elváltozások az anyag fáradása, a megterhelés frekvenciája, és más külső hatások következménye. Mérnöki szempontból a méretezést úgy kell elvégezni, hogy a visszamaradt alak és méret változások maradjanak a műszakilag megengedett tűréseken belül (használati szempontból a rendszerek rugalmasak legyenek). Az ily módon kiépített (méretezett) rendszereket elméletileg a rugalmasságtan módszereivel is lehet tanulmányozni, bizonyos absztrakciók igénybevételével.

AZ IDEÁLIS RUGALMAS TEST FOGALMA (A HIPOTÉZISEK)

A reális rendszerek viselkedése, a terhelésen kívül még sok más tényezőtől is függ. Ide sorolhatjuk a megterhelés frekvenciáját, a terhelések időtartalmát, az anyag tulajdonságai időben való változását, a hőmérséklet változást, és más különleges tényezőket, melyek az adott szerkezet, és az adott körülmények függvényei. Egy elmélet, mely magába foglalná valamennyi tényező hatását bonyolult matematikai apparátust igényelne. Azzal a céllal, hogy megfelelő (a gyakorlati szempontból nézve arányosan egyszerű, de megfelelően megbízható és használati szempontból kielégítően pontos) elméletet lehessen felállítani, be kell vezetni bizonyos feltételezéseket (u.n. *hipotéziseket*), éspedig:

FOLYAMATOSSÁG

A rugalmas test kontinuuális, nem tartalmaz repedéseket

IZOTRÓPIA

A rugalmas test valamennyi tulajdonsága minden irányban megegyezik

HOMOGENITÁS

A rugalmas test valamennyi tulajdonsága bármely, a testben lévő pontban egymás közt megegyezik

KIS ELMOZDULÁSOK

Az erőrendszer által bekövetkezett alak és méretváltozások nem hatnak ki lényegesen a rugalmas test geometriájára. Ebből arra lehet következtetni, hogy a terhelési rendszer és az alakváltozás között az összefüggéseket lineáris homogén egyenletekkel lehet kifejezni, és a különböző terhelésekből eredő hatások összegezhethetők (*egymásra halmozás - szuperpozíciós elv*).

ELASZTIKUS ALAKVÁLTOZÁSOK

Feltételezzük, hogy az alakváltozások rugalmasak. Ezt követően a számításokban a *HOOKE- törvény alkalmazandó*.

SÍK IDOMOK

A tanulmányozott keresztmetszetek a terhelések során egy síkban maradnak.

FOKOZATOS TERHELÉS

Feltételezzük, hogy az terhelésrendszert fokozatosan adjuk át a rugalmas testnek (rendszernek), úgy, hogy azok nyugvó és egyensúlyi állapotban maradjanak. Ily módon, az erőrendszerek és a feszültségek elemzésénél, fel tudjuk használni a statikából származó eljárásokat.

ERŐRENDSZEREK FELCSERÉLHETŐSÉGE

Az erőket melyek viszonylag kis felületen hatnak, felcserélve mint összpontosított (egy helyben ható erőket) vesszük igénybe.

A SZILÁRDSÁGTAN FŐ FELADATAI

A szilárdságtan tárgyából kimenőleg két alap feladatot különböztetünk meg:

A SZERKEZETEK MÉRETEZÉSE

A szilárdságtannak fontos feladata, hogy megbízható eljárásokat fejlesszen ki, melyek segítségével el lehet érni, hogy az erőrendszerek hatása révén az új szerkezetek tervezett szilárdsággal, merevséggel, és stabilitással rendelkezzenek. Egyidejűleg a forma tervezés szempontjából eleget kell tenni az elvárásoknak, a kivitelezést pedig gazdaságossá kell tenni.

A SZERKEZETEK ELLENŐRZÉSE

A szilárdságtanban kifejlesztett eljárásokkal lehetővé kell tenni a meglévő szerkezetek tulajdonságainak (teherbírás, alakváltozások) ellenőrzését, hasonló szempontok alapján, mint a méretezésnél. Mérnöki szempontból ez a feladat ugymondva mindnapinak tekinthető, és a számítási módszerek mellett bizonyos anyagvizsgálati ismeretek birtoklását is igényli.

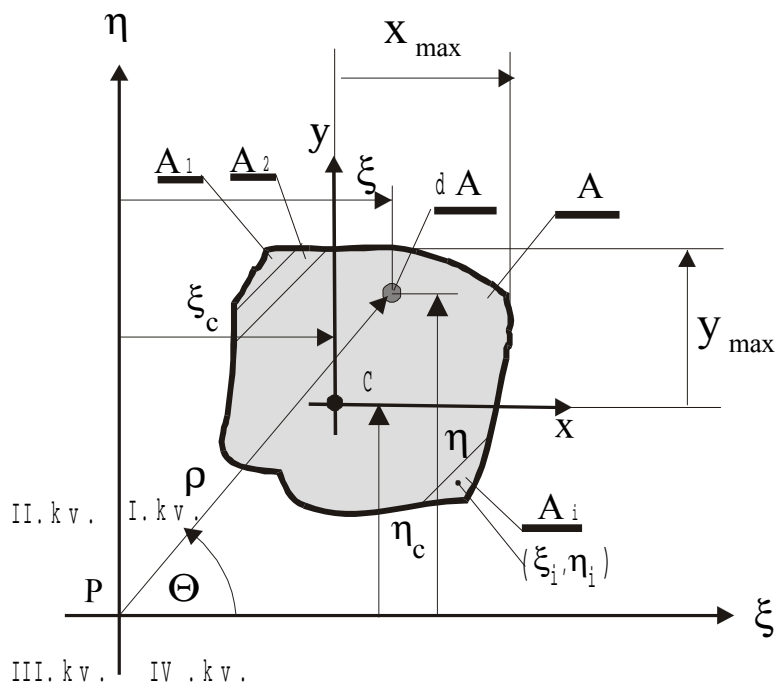
1. A SÍKIDOMOK MÉRTANI JELLEMZŐI

A tartók teherbírása egy meghatározott keresztmetszetben a következő tényezőktől függ:

- Az anyag igénybevett mechanikai tulajdonságaitól.
- A fellépő feszültségek eloszlásától.
- A megterhelő rendszer jellegétől.
- A metszet síkidomának felületi (a megterhelő rendszerhez viszonyított) eloszlásától.

1.1. AZ ÁLTALÁNOS SÍKIDOM MÉRTANI JELLEMZŐ

Egy általános (A) felületű síkidomot, egy tetszőlegesen kiválasztott ($\xi\eta$) koordináta rendszerbe helyezzünk el (1.01. ábra). E felületen belül megjelölünk egy differenciálisan kis (dA) felületet, melynek a súlyponti koordinátái ($\xi\eta$), a koordinátarendszer kiindulópontjától való távolsága pedig (ρ).



1.01. ábra

Vezessük be a következő függvényt, mint az **ÁLTALÁNOS SÍKIDOM MÉRTANI JELLEMZŐ**-jét:

$$\boxed{J = \int_A \xi^m \cdot \eta^n \cdot dA} \quad (1.01)$$

A (1.01). függvényben feltüntetett (m, n) paraméterek a következő értékeket vehetik fel:

$$m = 0, 1, 2 \quad ; \quad n = 0, 1, 2 \quad (1.02)$$

A differenciálisan kis (dA) felület a (ξ, P, η) derékszögű koordinátarendszerben:

$$dA = d\xi \cdot d\eta \quad (1.03)$$

Ha a (dA) értéket a (1.03). egyenletből be helyettesítjük a (1.01). egyenletbe, akkor az (J) általános síkidom mértani jellemzőt, kétszeres integrálként határozzuk meg:

$$\boxed{J = \iint \xi^m \eta^n d\xi d\eta = \int_{\xi} \xi^m \left(\int_{\eta=f(\xi)} \eta^n d\eta \right) d\xi = \int_{\eta} \eta^n \left(\int_{\xi=f(\eta)} \xi^m d\xi \right) d\eta} \quad (1.04)$$

Esetenként, számtani megfontolásból, célszerű a (ξ, P, η) derékszögű koordinátarendszer helyét, a (dA) felület és a $(\xi\eta)$ helyzet meghatározásánál (ρ, P, θ) poláris koordinátarendszert alkalmazni.

Mivel az (m, n) paraméterek a (1.02). értékeket vehetik fel, a (1.04). egyenlettel megfogalmazott (J) általános síkidom mértani jellemző a következő (déffinícióként) használt formákat veheti fel:

1.1.1. FELÜLET

$(m=0 ; n=0)$

$$J = \int_A \xi^0 \eta^0 \cdot dA = A$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A = \int_A dA [l^2] \quad ; \quad A > 0} \quad (1.05)$$

1.1.2. STATIKUS ELSŐRENDŰ NYOMATÉKOK

$(m=0 ; n=1)$, vagy $(m=1 ; n=0)$

$$J = \int_A \xi^0 \cdot \eta^1 \cdot dA = S_\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_\xi = \int_A \eta \cdot dA [l^3]} \quad (1.06)$$

$$I., II. kv. : S_\xi \geq 0$$

$$III., IV. kv. : S_\xi \leq 0$$

$$J = \int_A \xi^1 \cdot \eta^0 \cdot dA = S_\eta$$

$$\boxed{S_\eta = \int_A \xi \cdot dA [l^3]} \quad (1.07)$$

$$I., IV. kv. : S_\eta \geq 0$$

$$II., III. kv. : S_\eta \leq 0$$

1.1.3. SÚLYPONT, ÉS A SÚLYPONTI KOORDINÁTARENDszer

Valamennyi (A) felületi síkidomnak megfelel (meghatározható) egy (x, C, y) derékszögű koordináta-rendszer halmaza, melyekre a statikai (S_x, S_y) elsőrendű nyomatékok megegyeznek nullával. Az (x, C, y) koordináta-rendszer szögbeli elhelyezése az általános (ξ, P, η) koordináta-rendszerhez viszonyítva tetszőleges.

$$\boxed{\begin{aligned} S_{(x)} &= \int_A y \cdot dA = 0 \\ S_{(y)} &= \int_A x \cdot dA = 0 \end{aligned}} \quad (1.08)$$

A tetszőlegesen kiválasztott (ξ, P, η) koordináta-rendszerre számítva, a statikában alkalmazott kapcsolatok érvényesek (1.01. ábra):

$$\begin{aligned}
 \xi_c &= \frac{\int_A \xi \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{S_\eta}{A} = \frac{\sum_i \xi_i \cdot A_i}{\sum_i A_i} \\
 \eta_c &= \frac{\int_A \eta \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{S_\xi}{A} = \frac{\sum_i \eta_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}
 \end{aligned}
 \tag{1.09}$$

Az ily módon meghatározott (C) pontot **SÚLYPONT** - nak nevezzük, a megfelelő (x, C, y) koordinátarendszer elnevezése pedig **SÚLYPONTI KOORDINÁTARENDSZER**.

1.1.4. AXIÁLIS (EKVATORIÁLIS) MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK

(m = 0 ; n = 2), vagy (m = 2 ; n = 0)

$$J = \int_A \xi^0 \cdot \eta^2 \cdot dA = I_\xi$$

$$\Downarrow$$

$$I_\xi = \int_A \eta^2 \cdot dA [l^4] \rangle 0 \tag{1.10}$$

$$J = \int_A \xi^2 \cdot \eta^0 \cdot dA = I_\eta$$

$$\Downarrow$$

$$I_\eta = \int_A \xi^2 \cdot dA [l^4] \rangle 0 \tag{1.11}$$

1.1.5. CENTRIFUGÁLIS MÁSODRENDŰ NYOMATÉK

(m = 1 ; n = 1)

$$J = \int_A \xi^1 \cdot \eta^1 \cdot dA = I_{\xi\eta}$$

$$\Downarrow$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi \cdot \eta \cdot dA [l^4] \tag{1.12}$$

$$I., III. kv.: I_{\xi\eta} \geq 0$$

$$II., IV. kv.: I_{\xi\eta} \leq 0$$

(A centrifugális másodrendű nyomaték értéke egyenlő nullával abban az esetben, ha a koordináta rendszer egyik, vagy mindkét tengelye egyben szimmetria tengely is)

1.1.6. POLÁRIS MÁSODRENDŰ NYOMATÉK

$$(\xi^2 + \eta^2 = \rho^2)$$

$$J = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (\xi^2 + \eta^2) \cdot dA = I_p$$

↓

$$\boxed{I_p = I_\xi + I_\eta} > 0 \quad (1.13)$$

1.1.7. KERESZTMETSZETI TÉNYEZŐK

A keresztmetszeti tényező (definíció szerint) a másodrendű nyomaték és a megfelelő maximális tengelytávolság közötti hányadot képezi (1.01. ábra):

$$\boxed{W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|} \quad ; \quad W_y = \frac{I_y}{|x_{\max}|} \quad ; \quad W_o = \frac{I_o}{\rho_o}} \quad (1.14)$$

1.1.8. AZ ÖSSZETETT FELÜLETEK MÉRTANI JELLEMZŐI

Az integrálszámítás tulajdonságai alapján ismert, hogy egy meghatározott felületnek az értékét az összetevő felületek összegének értékéből határozzuk meg:

$$\int_A dA = \int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA + \dots + \int_{A_i} dA \quad (1.15)$$

A (1.15). egyenlettel összhangban, az általános síkidom mértani jellemző a következőképpen írható le:

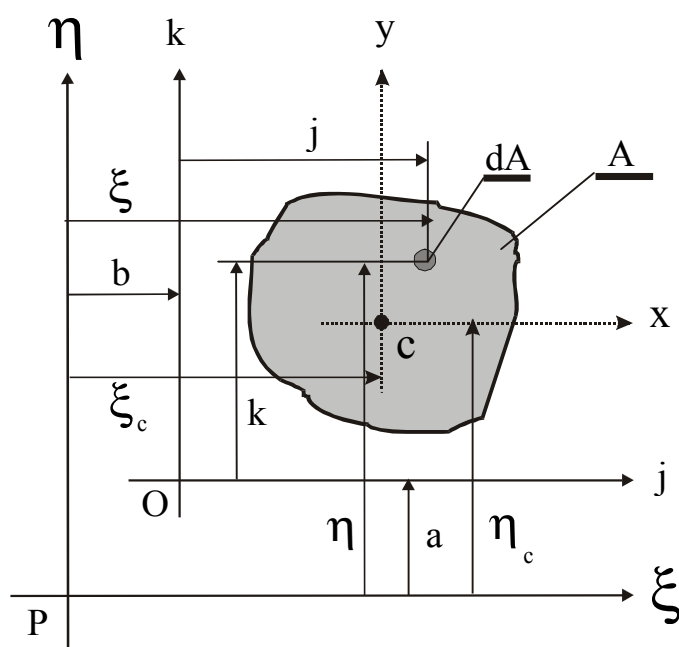
$$\begin{aligned} J &= \int_A \xi^m \cdot \eta^n \cdot dA = \\ &= \int_{A_1} \xi^m \cdot \eta^n \cdot dA + \int_{A_2} \xi^m \cdot \eta^n \cdot dA + \dots + \int_{A_i} \xi^m \cdot \eta^n \cdot dA \end{aligned} \quad (1.16)$$

A (1.05, 1.06, 1.07, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13). jellemzők megfelelő összetett értékei a következők:

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_i A_i \\
 S_\xi &= \sum_i S_{\xi_i} \quad ; S_\eta = \sum_i S_{\eta_i} \\
 I_\xi &= \sum_i I_{\xi_i} \quad ; I_\eta = \sum_i I_{\eta_i} \\
 I_{\xi\eta} &= \sum_i I_{(\xi\eta)_i} \\
 I_p &= \sum_i I_{p_i}
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

1.2. A SÍKIDOM MÉRTANI JELLEMZŐK ÁTSZÁMÍTÁSA PÁRHUZAMOSAN ELMOZDÍTOTT KOORDINÁTARENDSZERRE / *STEINER-FÉLE TÉTEL* /

Az általános (ξ, P, η) derékszögű koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamosan iktassunk be egy (j, O, k) koordinátarendszert. Tételezzük fel, hogy az (x, C, y) súlyponti koordinátarendszer szintén párhuzamos az általános (ξ, P, η) koordinátarendszerrel (1.02. ábra)



1.02. ábra

Határozzuk meg a differenciálisan kis (dA) felület ($\xi\eta$) helyzetkoordináták és az (a, b) tengelytávolságok kapcsolatát:

$$\begin{aligned}\xi &= j + b \\ \eta &= k + a\end{aligned}\quad (1.18)$$

A (1.05, 1.06, 1.07, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13). egyenletekkel összhangban meghatározzuk a síkidom ($\xi\eta$) tengelyekre számított mértani jellemzőit, használva a (1.18). kapcsolatokat:

ELŐZŐ ÉRTÉKEK: $S_j, S_k, I_j, I_k, I_{jk}$

ELMOZDULÁSOK: (a, b) (1.19)

ÚJ ÉRTÉKEK: $S_\xi, S_\eta, I_\xi, I_\eta, I_{\xi\eta}$

Definíció szerint az új másodrendű nyomatékok értékei a következők lesznek:

$$\begin{aligned}S_\xi &= \int_A \eta \cdot dA = \int_A (k + a) dA = \int_A k \cdot dA + \int_A a \cdot dA = S_j + a \cdot A \\ S_\eta &= \int_A \xi \cdot dA = \int_A (j + b) dA = \int_A j \cdot dA + \int_A b \cdot dA = S_k + b \cdot A \\ I_\xi &= \int_A \eta^2 \cdot dA = \int_A (k^2 + 2k \cdot a + a^2) dA = I_j + 2 \cdot a \cdot S_j + a^2 \cdot A \\ I_\eta &= \int_A \xi^2 \cdot dA = \int_A (j^2 + 2j \cdot b + b^2) dA = I_k + 2 \cdot b \cdot S_k + b^2 \cdot A \\ I_{\xi\eta} &= \int_A \xi \cdot \eta \cdot dA = \int_A (j + b)(k + a) \cdot dA = I_{jk} + b \cdot S_k + a \cdot S_j + a \cdot b \cdot A\end{aligned}\quad (1.20)$$

Ha a ($j, 0, k$) koordinátarendszer megegyezik az (x, C, y) súlyponti koordinátarendszerrel, akkor definíció szerint a sztatikai elsőrendű nyomatékok értékei nullák, a párhuzamos elmozdulások pedig megegyeznek súlyponti koordinátákkal:

$$\begin{aligned}S_{(j=x)} &= 0 \quad ; \quad S_{(k=y)} = 0 \quad ; \\ a &= \eta_c \quad , \quad b = \xi_c\end{aligned}$$

és a (1.20). egyenletek a következő formákat kapják:

$$\begin{aligned}S_\xi &= \eta_c \cdot A \\ S_\eta &= \xi_c \cdot A \\ I_\xi &= I_x + \eta_c^2 \cdot A \\ I_\eta &= I_y + \xi_c^2 \cdot A \\ I_{\xi\eta} &= I_{xy} + \eta_c \cdot \xi_c \cdot A\end{aligned}$$

(1.21)

Az utóbbi kapcsolatokat STEINER-féle tételeknek hívjuk.

A rendelkezésünkre álló műszaki táblázatokban az (I_x, I_y, I_{xy}) súlyponti tengelyekre meghatározott másodrendű nyomatékok és a megfelelő mértani jellemzők értékei találhatók. Emiatt a (1.21). egyenletek igen fontosak, mivel általuk meg lehet határozni a $(I_\xi, I_\eta, I_{\xi\eta})$ másodrendű nyomatékok értékeit bármely (ξ, η) párhuzamosan elmozdított koordinátarendszerre.

1.3. A MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK ÉRTÉKVÁLTOZÁSA A SÚLYPONTI KOORDINÁTARENDSZER ELFORDULÁSA MIATT

Ha a (1.03.a). ábrával összhangban kiválasztunk egy új (uv) koordinátarendszert, mely (φ)

fokot képez (elfordul) a súlyponti koordinátarendszerhez képest, akkor a másodrendű nyomatékok új értékeket vesznek fel:

ELŐZŐ ÉRTÉKEK:

$$I_x, I_y, I_{xy}$$

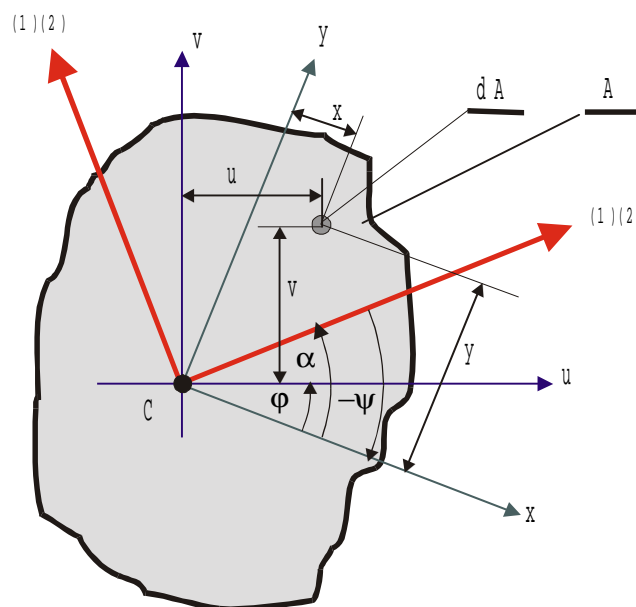
ELMOZDULÁS :

$$\varphi$$

$$(1.22)$$

ÚJ ÉRTÉKEK :

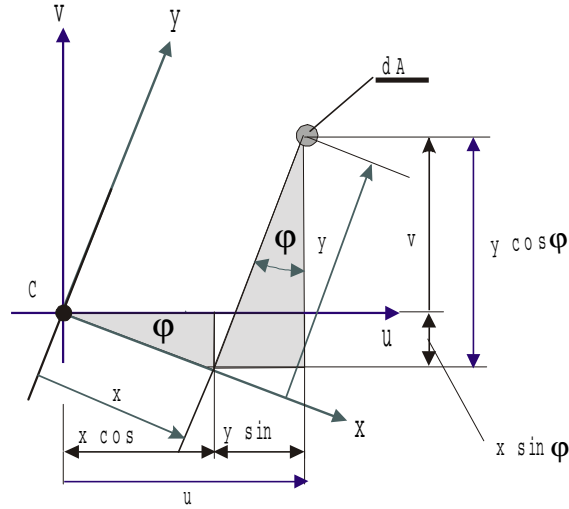
$$I_u, I_v, I_{uv}$$



1.03.a. ábra

A differenciálisan kis (dA) felületnek az új koordinátarendszerben meghatározott helyzetkoordinátái a következők (1.03.b. ábra):

$$\begin{aligned} u &= y \cdot \sin \varphi + x \cdot \cos \varphi \\ v &= y \cdot \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.23)$$



1.03.b. ábra

Az (1.10, 1.11, 1.12). egyenletek alapján az új (uv) tengelyekre számított másodrendű nyomatékok értékei a következők:

$$\begin{aligned} I_u &= \int_A v^2 \cdot dA = \int_A (y \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi)^2 \cdot dA = \\ &= \int_A (y^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2x \cdot y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + x^2 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot dA \\ &\Downarrow \\ \boxed{I_u = I_x \cdot \cos^2 \varphi + I_y \cdot \sin^2 \varphi - I_{xy} \cdot \sin 2\varphi} \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} I_v &= \int_A u^2 \cdot dA = \int_A (y \sin \varphi + x \cdot \cos \varphi)^2 \cdot dA \\ &\Downarrow \\ \boxed{I_v = I_x \cdot \sin^2 \varphi + I_y \cdot \cos^2 \varphi + I_{xy} \cdot \sin 2\varphi} \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$I_{uv} = \int_A u \cdot v \cdot dA = \int_A (y \sin \varphi + x \cdot \cos \varphi) \cdot (y \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cdot \sin 2\varphi + I_{xy} \cdot \cos 2\varphi \quad (1.26)$$

A (I_{uv}) centrifugális másodrendű nyomaték jele változó (+, -), vagyis a (1.26). egyenletnek vannak nulla értékei

$$I_{uv} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cdot \sin 2\varphi + I_{xy} \cdot \cos 2\varphi = 0 \quad (1.27)$$

A (1.27). egyenlet ($\varphi = \varphi_0$) szerinti megoldásával határozzuk meg a ($I_{uv} = 0$) nulla értéknek megfelelő helyzetet:

$$\varphi = \varphi_0 = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) + k \frac{\pi}{2} \quad ; \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (1.28)$$

1.3.1. A FŐ MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK ÉS A FŐTENGELYEK

A (1.24 és 1.25). egyenletek trigonometrikus függvények. Ezeknek az extrémális értékeit meg lehet határozni. A két függvény csak ($\frac{\pi}{2}$) fázisban különbözik, ezért elegendő csak az egyiket elemezni. Elemzésként a (1.24). egyenletet fogjuk megvizsgálni.

Ha meghatározzuk azt a ($\varphi = \alpha$) szögelfordulást, melynél a ($I_u = f(\varphi)$) másodrendű nyomatékok értékei extrémálisak, akkor azokat (I_1, I_2) **FŐ MÁSODRENDŰ NYOMATÉK** - oknak nevezzük. A megfelelő helyzetet meghatározó koordinátarendszert **FŐ SÚLYPONTI KOORDINÁTA RENDSZER** - nek hívjuk. A megfelelő főtengelyeket 1/(1), 2/(2) -vel jelöljük.

$$I_1 = I_{\max} \quad ; \quad I_2 = I_{\min} \quad (1.29)$$

Mivel előre nem lehet meghatározni, hogy melyik főtengelynek felel meg a fő másodrendű nyomatéknak maximális, illetve minimális értéke, ennek meghatározását a matematikában ismert módon végezzük el (az $-I_u$ - másodrendű nyomaték 1.24. függvényének második derivációja alapján).

A főtengelyek helyzetének és minősítésének meghatározását, és a fő másodrendű nyomatékok értékeinek kiszámítását a következőképpen végezzük el.

A (1.24). függvény első derivációja nullával való kiegyenlítéséből a fő másodrendű nyomatékok ($\varphi = \alpha$) helyzetét határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
\frac{dI_u}{d\varphi} &= -2I_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + 2I_y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - 2I_{xy} \cdot \cos 2\varphi = 0 \\
&\Downarrow \\
2\varphi = 2\alpha &= \arctg \left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) + k \cdot \pi \quad ; \quad [k = 0,1] \\
&\Downarrow \\
\boxed{\varphi = \alpha = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad ; \quad [k = 0,1]} &\quad (1.30)
\end{aligned}$$

Ha a

$$\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \quad ; \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$$

trigonometrikus transzformációkat használjuk, és ha a (1.30). egyenletből kapott extrémumokat meghatározó ($\varphi = \alpha$) értékeket be helyettesítjük a (1.24). egyenletbe, megkapjuk a másodrendű axiális nyomatékok extrémális értékeit:

$$\boxed{
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \\
I_2 &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}
\end{aligned}
} \quad (1.31)$$

Az (1.28). egyenletben meghatároztuk a (I_{uv}) centrifugális másodrendű nyomaték nulla értékének helyzetét. Ez az érték-helyzet megegyezik az (I_1) fő másodrendű nyomaték helyzetével. Ebből arra következtetünk, hogy az ($I_{1,2}$) *centrifugális másodrendű nyomaték egyenlő nullával ha az axiális másodrendű nyomatékok extrémális értékeket vesznek fel.*

$$\boxed{I_{1,2} = 0} \quad (1.32)$$

Az $/ (1), (2) /$ fő tengelyek jellemét a (1.24). egyenlet második deriváció értékeinek jeléből határozzuk meg:

Az (1.24). egyenlet második derivációja:

$$\left(\frac{d^2 I_u}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\alpha} = -(I_x - I_y) \cdot \cos 2\alpha + 2I_{xy} \cdot \sin 2\alpha \quad (1.33)$$

A (1.33). egyenlet szerint két eset lehető:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 I_u}{d\varphi^2} < 0 &\Rightarrow I_{u(\varphi=\alpha)} = I_{(1)} \quad ; \quad I_{u(\varphi=\alpha+\frac{\pi}{2})} = I_2 \\
\frac{d^2 I_u}{d\varphi^2} > 0 &\Rightarrow I_{u(\varphi=\alpha)} = I_{(2)} \quad ; \quad I_{u(\varphi=\alpha+\frac{\pi}{2})} = I_{(1)}
\end{aligned}
\tag{1.34}$$

Ha az (x, C, y) súlyponti koordinátarendszert úgy választjuk meg, hogy az megegyezzen a fő koordinátarendszerrel $(x=(1), y=(2))$, akkor:

$$\begin{aligned}
I_x &= I_1 \\
I_y &= I_2 \\
I_{xy} &= I_{1,2} = 0
\end{aligned}
\tag{1.35}$$

Ha a (1.24, 1.25, 1.26). egyenletekbe be helyettesítjük a (1.35). kapcsolatokat, a (1) - x / közötti szögelfordulást (ψ) - el jelöljük, valamint a

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \quad ; \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$$

trigonometriai transzformációkat alkalmazzuk, a következő axiális másodrendű nyomatéki egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}
I_u &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cdot \cos 2\psi = I_1 \cdot \cos^2 \psi + I_2 \cdot \sin^2 \psi \\
I_v &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2) - \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cdot \cos 2\psi = I_1 \cdot \sin^2 \psi + I_2 \cdot \cos^2 \psi \\
I_{uv} &= \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cdot \sin 2\psi
\end{aligned}
\tag{1.36}$$

A fenti összefüggések igen fontosak, mivel a szakirodalomban (táblázatok) egyes szabványos szelvények esetében a FŐ másodrendű nyomatékok vannak feltüntetve, és ezek által kell kiszámítani a többi adatot (például tetszőleges -u,v- koordinátarendszerre a másodrendű nyomatékokat).

1.3.2. A MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK INVARIÁCIÓJA

Így nevezzük a következő összefüggéseket, melyek nem függenek (invariánsak) a súlyponti koordinátarendszer elhelyezésétől:

Az első invariáns:

$$I_u + I_v = I_1 + I_2 = I_x + I_y = \text{const} \tag{1.37}$$

A második invariáns:

$$\boxed{I_u \cdot I_v - I_{uv}^2 = I_1 \cdot I_2 - 0 = I_x \cdot I_y - I_{xy}^2 = \text{const}} \quad (1.38)$$

1.4. A MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK MÉRTANI ÁBRÁZOLÁSA

Határozzunk meg egy olyan koordinátarendszert (1.04. ábra), melynek tengelyei irányban megegyeznek a főtengelyekkel [(1) = a; (2) = b)]: Ismerve az INERCIASUGÁR fogalmát:

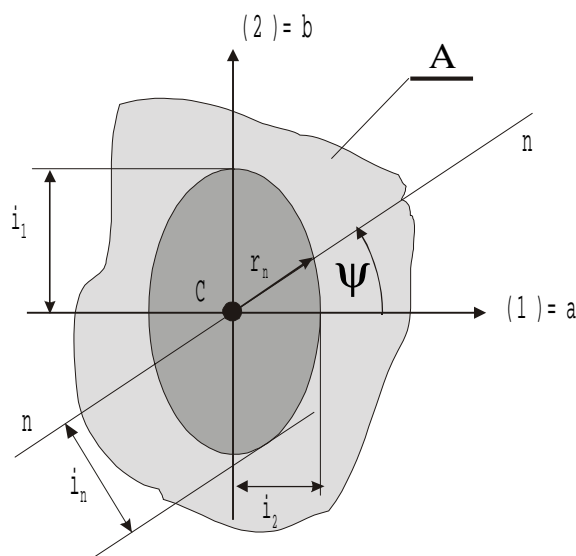
$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \quad ; \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} \quad ; \quad i_n = \sqrt{\frac{I_n}{A}} \quad (1.39)$$

feltüntetünk egy (N) ponthalmazt, melynek rádiuszvektorai egy ellipszisnek felelnek meg:

$$\vec{r}_n = \frac{i_1 \cdot i_2}{i_n} \quad (1.40)$$

Ennek a vektornak az (a,b) tengelyirányú összetevőinek a skaláris értékei a következők:

$$\begin{aligned} a = r_n \cdot \cos \psi &\Rightarrow \cos \psi = \frac{i_n \cdot a}{i_1 \cdot i_2} \\ b = r_n \cdot \sin \psi &\Rightarrow \sin \psi = \frac{i_n \cdot b}{i_1 \cdot i_2} \end{aligned} \quad (1.41)$$



1.04. ábra

Alkalmazzuk a (1.36). egyenletetek közül az elsőt, használva az (n=u) jelzés cserét, és az

egyenletet osszuk végig (A) -val:

$$I_n = (I_1 \cdot \cos^2 \psi + I_2 \cdot \sin^2 \psi) : A$$

$$\Downarrow$$

$$i_n^2 = i_1^2 \cdot \cos^2 \psi + i_2^2 \cdot \sin^2 \psi \quad (1.42)$$

Ha a (1.41). függvényből a szögfüggvényeket be helyettesítjük az (1.42). egyenletbe, a következő központi ellipszis egyenletét kapjuk

$$\boxed{\frac{a^2}{i_2^2} + \frac{b^2}{i_1^2} = 1} \quad (1.43)$$

A már megrajzolt ellipszis segítségével meg lehet határozni az axiális másodrendű nyomaték értékét egy tetszőlegesen kiválasztott (ψ) szöget záró metszetben, használva az (1.39). kapcsolatot.

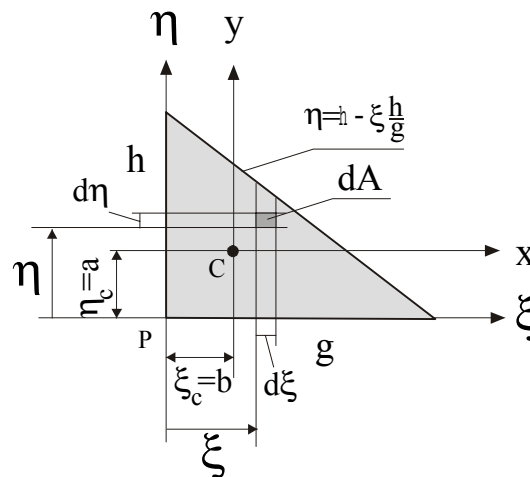
$$i_n = \sqrt{\frac{I_n}{A}}$$

$$\Downarrow$$

$$I_n = i_n^2 A \quad (1.44)$$

1.1. PÉLDA

Meghatározni egy derékszögű háromszög síkidom mértani jellemzőit a (1.1. ábra) szerint.



1.1. ábra

A (ξ, P, η) tetszőleges koordináta rendszer tengelyei megegyeznek a (g, h) befogókkal, az (a, b) tengelyközi távolságok pedig a (ξ_C, η_C) súlyponti koordinátákkal egyeznek meg.

$$\xi_C = b \quad ; \quad \eta_C = a \quad (P.1.01)$$

Az átfogó egyenlete:

$$\eta = h - \xi \frac{h}{g} \quad (\text{P.1.02})$$

A síkidom mértani jellemzőit (számtani megfontolásból) célszerű a (1.04). egyenlet alapján határozni meg. Ennek megfelelően a (dA) differenciális felületet a (1.03). kapcsolat szerint határozzuk meg.

A (ξ, η) TENGELYEKRE SZÁMÍTOTT ÉRTÉKEK MEGHATÁROZÁSA

A FELÜLET

A meghatározást a (1.04, 1.05, P.1.02). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$A = \int_0^g \xi^0 \left(\int_0^{\eta=h-\xi \frac{h}{g}} \eta^0 \cdot d\eta \right) \cdot d\xi = \int_0^g \left(h - \xi \frac{h}{g} \right) \cdot d\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} gh} \quad (\text{P.1.03})$$

A STATIKAI ELSŐRENDŰ NYOMATÉKOK

A meghatározást a (1.04, 1.06, 1.07, P.1.02). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$S_\xi = \int_0^g \xi^0 \left(\int_0^{\eta=h-\xi \frac{h}{g}} \eta^1 \cdot d\eta \right) \cdot d\xi = \int_0^g \frac{1}{2} \left(h - \xi \frac{h}{g} \right)^2 \cdot d\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_\xi = \frac{1}{6} gh^2} \quad (\text{P.1.04})$$

Azonos eljárással meghatározzuk az (η) tengelyre vonatkozó értéket is:

$$\boxed{S_\eta = \frac{1}{6} g^2 h} \quad (\text{P.1.05})$$

A SÚLYPONT KOORDINÁTÁK

A meghatározást a (1.09, P.1.03, P.1.04, P.1.05). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$\xi_C = \frac{S_\xi}{A} = \frac{\frac{1}{6}gh^2}{\frac{1}{2}gh}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\xi_C = \frac{1}{3}h}$$

(P.1.06)

$$\eta_C = \frac{S_\eta}{A} = \frac{\frac{1}{6}g^2h}{\frac{1}{2}gh}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\eta_C = \frac{1}{3}g}$$

(P.1.07)

AZ AXIÁLIS MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK

A meghatározást a (1.04, 1.10, 1.11, P.1.02). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$I_\xi = \int_0^g \xi^0 \left(\int_0^{\eta=h-\xi\frac{h}{g}} \eta^2 \cdot d\eta \right) \cdot d\xi = \int_0^g \frac{1}{3} \left(h - \xi \frac{h}{g} \right)^3 \cdot d\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_\xi = \frac{1}{12}gh^3}$$

(P.1.08)

Azonos eljárással meghatározzuk az (η) tengelyre vonatkozó értéket is:

$$\boxed{I_\eta = \frac{1}{12}g^3h}$$

(P.1.09)

A CENTRIFUGÁLIS MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK

A meghatározást a (1.04, 1.12, P.1.02). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$I_{\xi\eta} = \int_0^g \xi^1 \left(\int_0^{\eta=h-\xi\frac{h}{g}} \eta^1 \cdot d\eta \right) \cdot d\xi = \int_0^g \xi \frac{1}{2} \left(h - \xi \frac{h}{g} \right)^2 \cdot d\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_{\xi\eta} = \frac{1}{24} g^2 h^2} \quad (\text{P.1.10})$$

A POLÁRIS MÁSODRENDŰ NYOMATÉK

A meghatározást a (1.13, P.1.08, P.1.09). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$I_P = I_\xi + I_\eta = \frac{1}{12} g h^3 + \frac{1}{12} h g^3$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_P = \frac{1}{12} g h (g^2 + h^2)} \quad (\text{P.1.11})$$

A (x, y) SÚLYPONTI TENGELYEKRE SZÁMÍTOTT ÉRTÉKEK MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (1.08, 1.21, P.1.01). kapcsolatok alapján végezzük el.

A STATIKAI ELSŐRENDŰ NYOMATÉKOK

$$\boxed{S_x = 0 \quad ; \quad S_y = 0} \quad (\text{P.1.12})$$

AZ AXIÁLIS MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK

$$I_x = I_\xi - A \cdot \eta_C^2 = \frac{1}{12} g h^3 - \frac{1}{2} g h \left(\frac{1}{3} h \right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_x = \frac{1}{36} g h^3} \quad (\text{P.1.13})$$

$$I_y = I_\eta - A \cdot \xi_C^2 = \frac{1}{12} h g^3 - \frac{1}{2} g h \left(\frac{1}{3} g \right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_y = \frac{1}{36} h g^3} \quad (\text{P.1.14})$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} - \eta_c \xi_c A = \frac{1}{24} g^2 h^2 - \frac{1}{3} g \cdot \frac{1}{3} h \left(\frac{1}{2} gh \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_{xy} = -\frac{1}{72} g^2 h^2} \quad (\text{P.1.15})$$

KERESZTMETSZETI TÉNYEZŐK

A meghatározást a (1.14, P.1.13, P.1.14.). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{gh^3}{36}}{\frac{2h}{3}}$$

$$\Downarrow$$

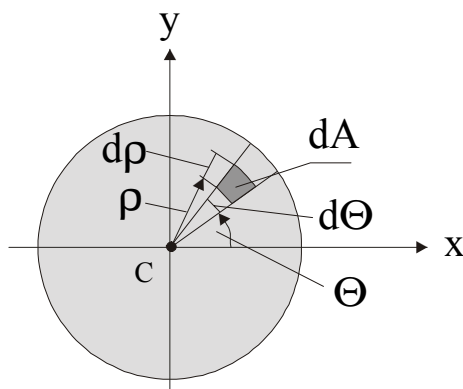
$$\boxed{W_x = \frac{1}{24} gh^2} \quad (\text{P.1.16})$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{\frac{hg^3}{36}}{\frac{2g}{3}}$$

$$\boxed{W_y = \frac{1}{24} hg^2} \quad (\text{P.1.17})$$

1.2. PÉLDA

Határozzuk meg a kör keresztmetszet (xy) súlyponti tengelyekre számított másodrendű nyomatékokat (1.2. ábra)



1.2. ábra

A feladatot úgy célszerű megoldani, hogy első lépésként az (1.13). kapcsolat alapján az (I_P) poláris másodrendű nyomatékot határozzuk meg

A differenciális (dA) felületet a poláris koordináták segítségével határozzuk meg:

$$dA = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho \quad (\text{P.1.18})$$

A (1.13). egyenlet alapján, használva a (P.1.18). kapcsolatot, meghatározzuk az (I_P) poláris másodrendű nyomatékot:

$$\begin{aligned} I_P &= \int_A \rho^2 dA = \int_{\rho} \int_{\theta} \rho^2 \cdot \rho \cdot d\theta \cdot d\rho = \\ &= \int_0^r \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho = \int_0^r \rho^3 2\pi \cdot d\rho = \dots \\ &\quad \Downarrow \\ &\boxed{I_P = \frac{\pi}{2} r^4} \quad (\text{P.1.19}) \end{aligned}$$

Az (1.13). egyenlet alapján:

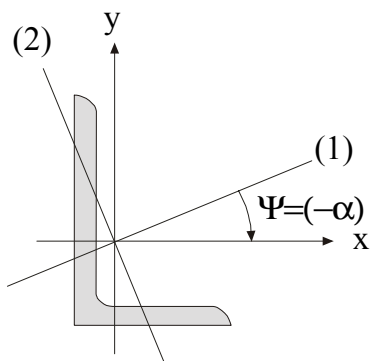
$$I_P = I_x + I_y$$

Mivel a kör keresztmetszet (xy) súlyponti tengelyek egyben szimmetriatengelyek is, az axiális másodrendű nyomatékok értékei:

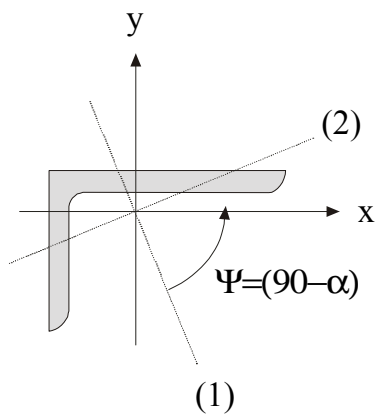
$$\begin{aligned} I_x = I_y &\Rightarrow I_P = 2I_x = 2I_y \\ &\quad \Downarrow \\ &\boxed{I_x = I_y = \frac{\pi}{4} r^4} \quad (\text{P.1.20}) \end{aligned}$$

1.3. PÉLDA

Határozzuk meg egy (JUS C.B.111). szabványos, (65 x 100 x 9). alpméretű szelvény (xy) tengelyeire számított másodrendű nyomatékait. A beépítési helyzetek és az (xy) súlyponti tengelyek irányzatai az (1.3.a és 1.3.b). ábrákon láthatók:



1.3.a. ábra



1.3.b. ábra

A példában használt szelvényre vonatkozó mértani jellemzők a következők:

$$\begin{aligned}\psi &= \arctg(0.415) \Rightarrow \psi = 22.5^0 \\ I_1 &= 160 \text{ cm}^4 \\ I_2 &= 27.2 \text{ cm}^4\end{aligned}\quad (\text{P.1.21})$$

A **(1.07.a)**. beépítési helyzetre, az (xy) súlyponti tengelyekre számított másodrendű nyomatékok a (1.36). egyenletek alapján határozzuk meg (a ψ szög az irányra tekintve negatív).

$$\begin{aligned}I_x &= I_1 \cdot \cos^2 \psi + I_2 \cdot \sin^2 \psi = 160 \cdot \cos^2(-22.5^0) + 27.2 \cdot \sin^2(-22.5^0) \\ I_y &= I_1 \cdot \sin^2 \psi + I_2 \cdot \cos^2 \psi = 160 \cdot \sin^2(-22.5^0) + 27.2 \cdot \cos^2(-22.5^0) \\ I_{xy} &= \frac{1}{2}(I_1 - I_2)\sin 2\psi = \frac{1}{2}(160 - 27.2)\sin(2 \cdot 22.5) \\ &\Downarrow\end{aligned}$$

$\begin{aligned}I_x &= 151.12 \text{ cm}^4 \\ I_y &= 46.20 \text{ cm}^4 \\ I_{xy} &= -46.95 \text{ cm}^4\end{aligned}$	(P.1.22)
--	----------

A **(1.07.b)**. ábrán bemutatott beépítési helyzetre, a **(1.07.a)**. beépítési helyzethez viszonyítva, jellemzők a tengelyek felcserélése és a (ψ) szög pozitív értéke, miszerint az axiális másodrendű nyomatékok értékei:

$\begin{aligned}I_x &= 46.20 \text{ cm}^4 \\ I_y &= 151.12 \text{ cm}^4 \\ I_{xy} &= 46.95 \text{ cm}^4\end{aligned}$	(P.1.23)
---	----------

1.4. PÉLDA

Két szabványos szelvény beépítési formáját a **(1.4)**. ábra szemlélteti. Az ábrán fel vannak tüntetve az $(x_1, y_1 ; x_2, y_2)$ súlyponti tengelyek, valamint a műszaki táblázatok alapján meghatározott mértani jellemzők.

A számítások során meg kell határozni az összetett szelvény mértani jellemzőit, és megszerkeszteni az inerciaellipszist.

(Ha a centrifugális másodrendű nyomaték a táblázatban nem található, abban az esetben a meghatározását a (1.36). egyenletek alapján végezzük el.)

A feladat megoldásának a sorrendje a következő:

TÁBLÁZATI ADATOK

	1. SZELVÉNY	2. SZELVÉNY	
SZABVÁNYOK.....	JUS C.B3.11(60·90·11)	JUS C.B3.101(60·60·8)	
FELÜELÜLETEK[cm ²].....	A ₁ = 11.4 (e _x = 2.97e _y = 1.43)	A ₂ = 9.03 (e _x = e _y = 1.77)	
AXIÁLIS MÁSODRENDŰ			
MÁSOD.NYOMATÉKOK[cm ⁴].....	I _{x1} = 92.5	I _{x2} = 29.1	(P.1.24)
	I _{y1} = 33.0	I _{y2} = 29.1	
FŐ MÁSODRENDŰ			
NYOMATÉKOK[cm ⁴].....	I ₁₁ = 107	I ₁₂ = 46.1	
	I ₂₁ = 19.0	I ₂₂ = 12.1	
CENTRIFUGÉLIS			
MÁSOD.NYOMATÉKOK[cm ⁴].....	I _{x1,y1} = -32.12	I _{x2,y2} = -17.0	

AZ ÖSSZETETT SZELVÉNY (C) SÚLYPONTJÁNAK MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (1.09). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$\xi_C = \frac{\sum_i \xi_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{1.49 \cdot 11.4 + 4.23 \cdot 9.03}{11.4 + 9.03}$$

$$\eta_C = \frac{\sum_i \eta_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{8.97 \cdot 11.4 + 4.23 \cdot 9.03}{11.4 + 9.03}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \xi_C &= 2.70 \text{ cm} \\ \eta_C &= 6.87 \text{ cm} \end{aligned}$$

(P.1.25)

AZ ÖSSZETETT SZELVÉNY SÚLYPONTI AXIÁLIS MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK

MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (1.16 és 1.21). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2.1 \text{ cm} & a_2 &= -2.64 \text{ cm} \\ b_1 &= -1.21 \text{ cm} & b_2 &= 1.53 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x1} + A_1 \cdot a_1^2 + I_{x2} + A_2 \cdot a_2^2 = 92.5 + 11.4(2.1)^2 + 29.1 + 9.03(-2.64)^2 \\ I_y &= I_{y1} + A_1 \cdot b_1^2 + I_{y2} + A_2 \cdot b_2^2 = 33 + 11.4(-1.21)^2 + 29.1 + 9.03(1.53)^2 \\ I_{xy} &= I_{x1,y1} + A_1 \cdot a_1 \cdot b_1 + I_{x2,y2} + A_2 \cdot a_2 \cdot b_2 = -32.12 + 11.4(2.1 \cdot -1.21) - 17 + 9.03(-2.64 \cdot 1.53) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} I_x &= 234.48 \text{ cm}^4 \\ I_y &= 99.93 \text{ cm}^4 \\ I_{xy} &= -114.55 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (\text{P.1.26})$$

AZ ÖSSZETETT SZELVÉNY FŐ MÁSODRENDŰ NYOMATÉKAINAK MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (P.1.26 és 1.31). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(234.8 + 99.93) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(234.8 - 99.93)^2 + 4 \cdot 114.55^2} \\ &\quad \Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= 300.28 \text{ cm}^4 \\ I_2 &= 34.44 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (\text{P.1.27})$$

AZ ÖSSZETETT SZELVÉNY FŐTENGELYEI HELYZETEINEK MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (1.30). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{2 \cdot (-114.55)}{234.8 - 99.93} \right) \\ &\quad \Downarrow \\ \alpha &= 29.75^\circ + \frac{1}{2} \cdot k\pi \quad : \quad (k = 01) \end{aligned} \quad (\text{P.1.28})$$

AZ ÖSSZETETT SZELVÉNY FŐTENGELYEINEK JELLEMEI MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (1.33 és 1.34). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} &-(I_x - I_y) \cos 2\alpha + 2I_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= -(234.8 - 99.93) \cos 59.5^\circ + 2(-114.55) \sin 59.5^\circ < 0 \end{aligned}$$

A (1.34). kritériumok szerint, a főtengek elhelyezései a következők:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 29.75^\circ \\ \alpha_2 &= 119.75^\circ \end{aligned} \quad (\text{P.1.29})$$

AZ ÖSSZETETT SZELVÉNY INERCIASUGARAINAK MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (1.39). kapcsolat alapján végezzük el.

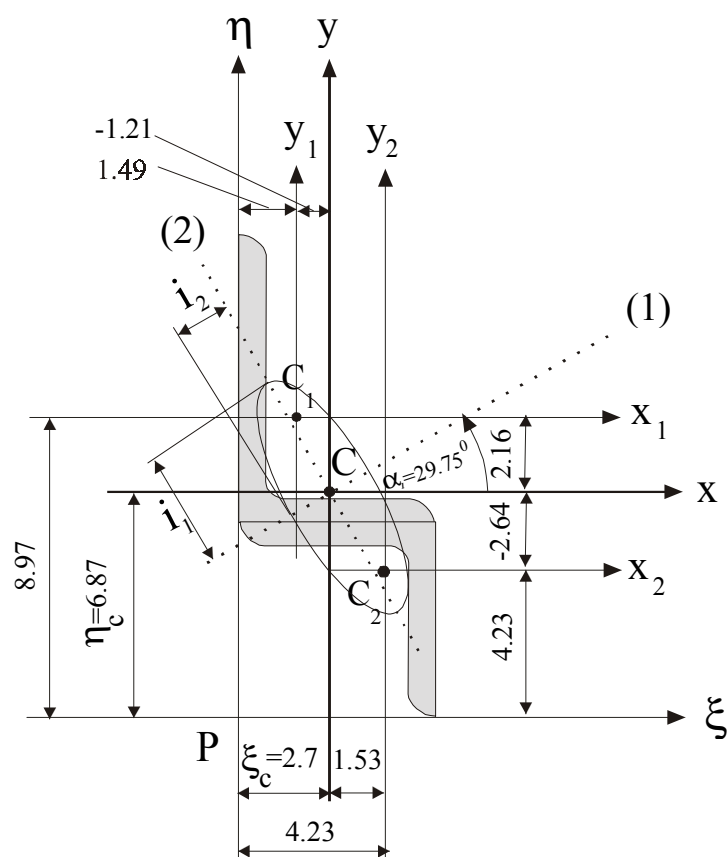
$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{300.28}{20.43}}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{34.44}{20.43}}$$

↓

$i_1 = 3.83 \text{ cm}$
 $i_2 = 1.29 \text{ cm}$

(P.1.30)

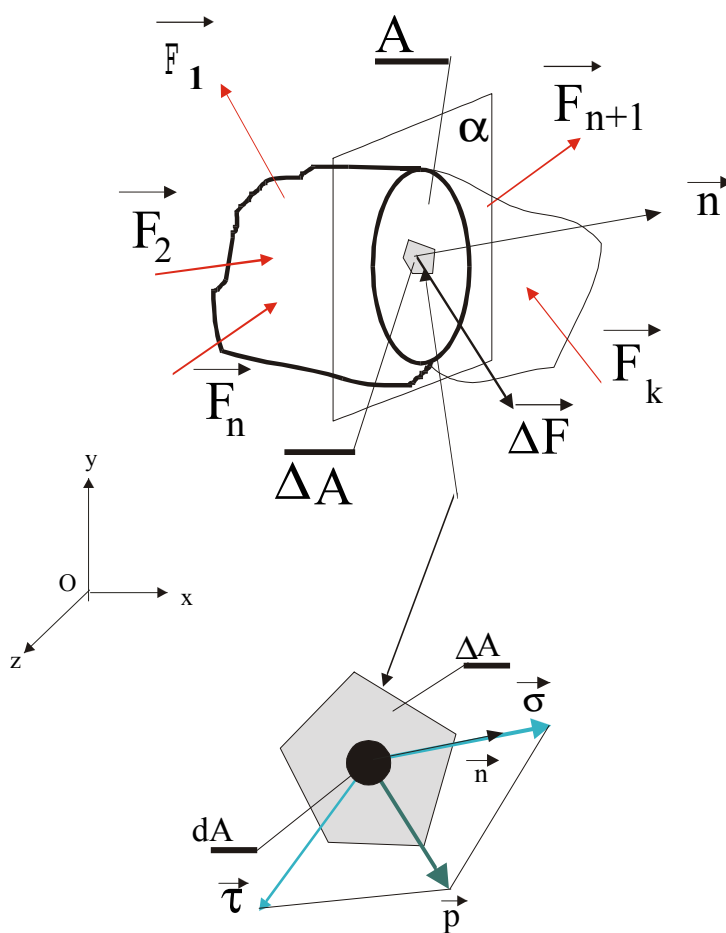


1.4. ábra

2. FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOTOK

2.1. A FESZÜLTSÉG FOGALMA

A külső erők (beleértve a támaszokat is) hatására a szilárd testben rugalmas erők keletkeznek.



2.01. ábra

Vizsgáljunk meg egy tetszés szerint kiválasztott testet (2.01. ábra), melyet egy (xyz) derékszögű koordinátarendszerhez kötünk. Feltételezzük, hogy a testre egy

$$[\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n, \vec{F}_{n+1}, \dots, \vec{F}_k] \quad (2.01)$$

erőrendszer hat, és a testet egyensúlyi állapotban tartja. A testet (gondolatban) ketté vágjuk

egy (α) síkkal, és a jobb oldalon lévő részt a rá ható

$$[\vec{F}_{n+1}, \dots, \vec{F}_k] \quad (2.02)$$

erőrendszerrel eltávolítjuk. A megtartott bal oldali rész tovább is egyensúlyi állapotban lesz, ha az (α) metszősíkban kapott felületen egy erőrendszer (belső erők) alakul ki, mely a jobb oldal hatását helyettesíti.

Az (α) síkban lévő metszetnek egy tetszőlegesen kiválasztott (N) pont környékében meghatározunk egy (ΔA) elemi felületet, melyet egy (\vec{n}) normálvektorral jellemezzük. A (ΔA) felület súlypontjára redukálható a (ΔA) felületen ható belső erők eredője (egy $\Delta \vec{F}$ - fő belső erő és egy $\Delta \vec{M}$ - fő belső nyomaték). Az elemi felület és a megfelelő redukált fő erő és fő nyomatékok alapján a következő konvenciókat vezetjük be:

$$\lim \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta A} = 0 \quad (2.03)$$

$$\boxed{\lim \left(\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \right)_{\Delta A \rightarrow 0} = \frac{d\vec{F}}{dA} = \vec{p}} \quad (2.04)$$

az utóbbinak a határértékét **FESZÜLTSGVEKTOR**-nak nevezzük.

A feszültségvektor mértékegysége:

$$[\vec{p}] = \frac{[d\vec{F}]_N}{[dA]_m^2} = Pa \text{ [Paszkál]} \quad (2.05)$$

Az (α) metszet valamennyi (ΔA) elemi felületén ható belső $(\Delta \vec{F})$ erők összege meg kell hogy egyezzen a bal oldalon ható erőrendszerrel

$$[\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n] \quad (2.06)$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \sum_A \Delta \vec{F} = \int_A \vec{p} \cdot dA \quad (2.07)$$

Bontjuk fel a (\vec{p}) feszültségvektort összetevőire úgy, hogy az egyik összetevő legyen merőleges a (ΔA) felületre, a másik pedig a (ΔA) felületen helyezkedjen.

A (\vec{p}) feszültségvektor összetevőit az (\vec{n}) normálvektor irányában (merőleges-normál irányú az elemi felületre) **NORMÁLFESZÜLTSG** - nek nevezzük és $(\vec{\sigma})$ - val jelöljük. A $(\vec{\sigma})$ normálvektor intenzitását a (2.08). egyenletben feltüntetett (\vec{p}) és a (\vec{n}) vektorok skaláris szorzatából kapjuk. A $(\vec{\sigma})$ összetevői értékeit az (xyz) tengelyirányokba pedig az (\vec{n}) vektor és a (σ) normálfeszültség skaláris értéke közötti egyszerű szorzatból határozzuk meg.

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma &= \vec{p} \cdot \vec{n} \\ \vec{\sigma} &= \sigma \cdot \vec{n}\end{aligned}} \quad (2.08)$$

A (\vec{p}) feszültségvektor összetevőit, mely az (\vec{n}) normálvektorra merőleges (párhuzamos - az elemi (ΔA) felülettel), **TANGENCIÁLIS FESZÜLTSEÉG** - nek nevezzük és $(\vec{\tau})$ - val jelöljük. A $(\vec{\tau})$ tangenciális feszültség összetevői értékeit az (xyz) irányokban a (2.09). egyenletben feltüntetett (\vec{p}) és a (\vec{n}) vektorok vektorszorzatából kapjuk.

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{n} \times (\vec{p} \times \vec{n})} \quad (2.09)$$

Mivel egy (N) pontban végtelen nagy számú metszetet lehet kialakítani, arra lehet következtetni, hogy a (\vec{p}) feszültségvektorok száma szintén végtelenül nagy. Ezek halmazát az (N) pont **FESZÜLTSEGI ÁLLAPOT** - ának nevezzük.

A koordinátarendszertől függően, a (\vec{p}) feszültségvektort többféleképpen lehet felbontani összetevőire:

$$\boxed{\vec{p} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z} \quad (2.10)$$

A (\vec{p}) feszültségvektornak a skaláris értéke a következő:

$$\boxed{p = \pm \sqrt{|\sigma|^2 + |\tau|^2} = \pm \sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2}} \quad (2.11)$$

2.1.1. A FŐFESZÜLTSEÉG

Ha az (α) metszősíkot úgy választjuk ki, hogy annak az (\vec{n}) normálvektor iránya megegyezzen a (\vec{p}) feszültségvektor irányával, akkor a $(\vec{\sigma})$ normálfeszültség értéke maximális lesz, a $(\vec{\tau})$ tangenciális feszültség értéke pedig nullának felel meg.

Az ilyen feszültségi állapotot **FŐFESZÜLTSEGI ÁLLAPOT** -nak, a megfelelő normálfeszültséget pedig **FŐFESZÜLTSEÉG** -nek hívjuk.

$$\boxed{\vec{p} = \vec{\sigma}_{\max} = \sigma_{(g)} = \vec{\sigma}_{(1,2,3)} \quad ; \quad \vec{\tau} = 0} \quad (2.12)$$

A $(g=1, 2, 3)$. jelöléssel arra utalunk, hogy a főfeszültségnek több értéke is van (a további eljárás során ez bizonyítva is lesz)..

A megfelelő mértani jellemzők elnevezései a következők:

FŐFESZÜLTSEGI SÍKOK

(olyan metszősíkok melyekben főfeszültségi állapot jön létre)

FŐIRÁNYOK

(a főfeszültségi síkoknak megfelelő (\vec{n}) normálvektorok irányai)

FŐ KOORDINÁTARENDSZER

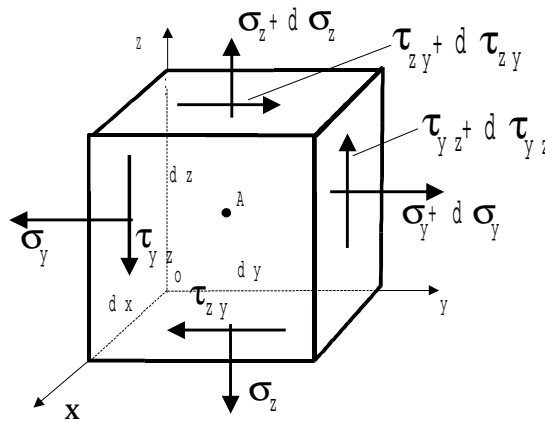
(koordinátarendszer melynek a tengelyei irányai megegyeznek a főfeszültségek irányával)

FŐTENGELYEK

(a fő koordinátarendszer tengelyei)

2.1.2. A TANGENCIÁLIS FESZÜLTSG DUALITÁSA

Vágjunk ki az egyensúlyban lévő szilárd testből egy elemi hasábot, melynek az oldalélei párhuzamosak az (xyz) koordináta rendszerrel. A hasáb oldalhosszai (dx, dy, dz) Feltételezzük, hogy az (yz) síkban a feszültségvektor értéke nulla (2.02. ábra).



2.02. ábra

A hasáb oldalain fel vannak tüntetve a (\vec{p}) feszültségvektor normál és tangenciális összetevői. A párhuzamos oldalakon a (dy, dz) differenciálisan kis távolságok miatt a feszültségek csak differenciálisan kis $(d\vec{\sigma}, d\vec{\tau})$ értékekben különböznek egymástól.

Mivel az elemi hasáb egyensúlyi helyzetben van, rá a statikai egyensúlyi egyenletek érvényesek. Az (A) pontra, melyet a hasáb keresztátlói metszéspontjába helyezünk el, a következő egyensúlyi egyenlet írható le:

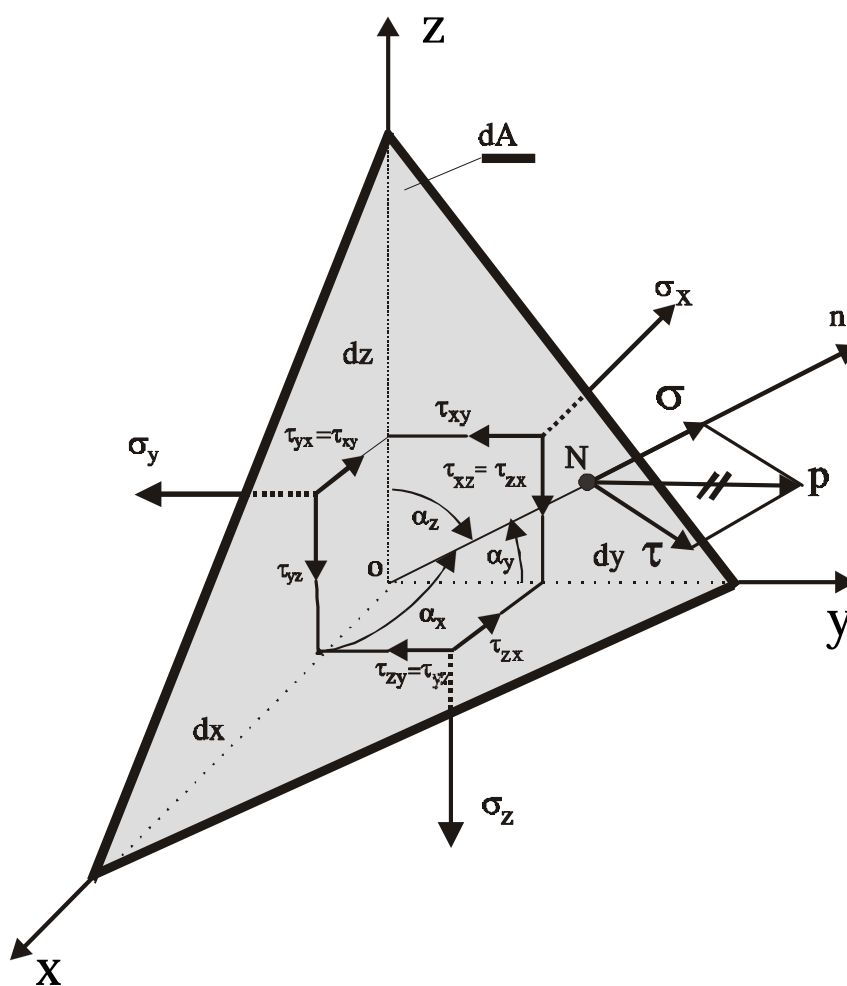
$$\begin{aligned} \sum M_A = & -\tau_{yz} \cdot (dx \cdot dz) \cdot \frac{1}{2} \cdot dy - (\tau_{yz} + d\tau_{yz}) \cdot (dx \cdot dz) \cdot \frac{1}{2} \cdot dy + \\ & + \tau_{zy} \cdot (dy \cdot dx) \cdot \frac{1}{2} \cdot dz + (\tau_{zy} + d\tau_{zy}) \cdot (dy \cdot dx) \cdot \frac{1}{2} \cdot dz \\ & \Downarrow \\ & \boxed{\tau_{zy} = \tau_{yz}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

A (2.13). egyenletből kapott függvény a **TANGENCIÁLIS FESZÜLTSG DUALITÁS** elvét képezi, melyet a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

AZ EGYMÁSRA MERŐLEGES SIKPÁRBAN HATÓ NYÍRÓ FESZÜLTSÉGEK, A SÍKOK METSZŐVONALA FELÉ, VAGY A METSZŐVONÁLTÓL ELLENTKEZŐ ÍRÁNYBAN HATNAK, NAGYSÁGUK PEDIG EGYENLŐ.

2.2. TÉRBELI ÁLTALÁNOS FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT

Egy egyensúlyban lévő test tetszőlegesen kiválasztott (N) pont környékéből vágjunk ki egy elemi tetraédert. A tetraéder merőleges oldal élei egybe essenek egybe az (xyz) derékszögű koordináta rendszer tengelyeivel. Az (N) pontot tartalmazó síkot egy (\vec{n}) normálvektor jellemzi. Az (\vec{n}) normálvektor átmenő pontja egyezzen meg az (N) ponttal (2.03. ábra).



2.03. ábra

Az elemi hasáb valamennyi oldalának megfelel egy-egy feszültségvektor, illetve azok normál és tangenciális összetevői. Mivel az elemi hasáb egyensúlyi állapotban van, az oldalakon létrejött erők, mint a feszültségek és a felületek következményei, egyensúlyi erőrendszert alkotnak.

A (dA) metszőfelületnek megfelel az (\vec{n}) normálvektor, mely az (xyz) tengelyekkel a következő $(\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z)$ szögeket alkotja:

$$\cos \alpha_x = l \quad ; \cos \alpha_y = m \quad ; \cos \alpha_z = n \quad (2.14)$$

E szögeket oszlopvektorként tüntetjük fel:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \alpha_y \\ \cos \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Tüntetjük fel a metsző (dA) felületen működő (\vec{p}) feszültségvektor összetevőit az (xyz) tengelyek irányában, valamint a normál és a tangenciális feszültségek összegeként.

$$\vec{p} = \vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z = \vec{\sigma} + \vec{\tau} \quad (2.16)$$

A (\vec{p}) feszültségvektor megfelelő skaláris értéke:

$$p = \pm \sqrt{|\sigma|^2 + |\tau|^2} = \pm \sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2} \quad (2.17)$$

A oldalsíkjaiban működő feszültségek szorzatai a megfelelő felületekkel, erőrendszert képeznek, mely egyensúlyban tartja a tetraédert. Az egyensúlyi állapotot skaláris formában a következő statikai egyensúlyi egyenletekkel írhatjuk le:

$$\begin{aligned} \Sigma X_i &= p_x \cdot dA - \sigma_x \cdot dA \cdot \cos \alpha_x - \tau_{yx} \cdot dA \cdot \cos \alpha_y - \tau_{zx} \cdot dA \cdot \cos \alpha_z = 0 \\ \Sigma Y_i &= p_y \cdot dA - \sigma_y \cdot dA \cdot \cos \alpha_y - \tau_{xy} \cdot dA \cdot \cos \alpha_x - \tau_{zy} \cdot dA \cdot \cos \alpha_z = 0 \\ \Sigma Z_i &= p_z \cdot dA - \sigma_z \cdot dA \cdot \cos \alpha_z - \tau_{yz} \cdot dA \cdot \cos \alpha_y - \tau_{xz} \cdot dA \cdot \cos \alpha_x = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

a (2.18). rendszert végig osztjuk (dA) -val , majd a következőképen rendezzük:

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cdot \cos \alpha_x + \tau_{yx} \cdot \cos \alpha_y + \tau_{zx} \cdot \cos \alpha_z \\ p_y &= \tau_{xy} \cdot \cos \alpha_x + \sigma_y \cdot \cos \alpha_y + \tau_{zy} \cdot \cos \alpha_z \\ p_z &= \tau_{xz} \cdot \cos \alpha_x + \tau_{yz} \cdot \cos \alpha_y + \sigma_z \cdot \cos \alpha_z \end{aligned} \quad (2.19)$$

Az (2.19). egyenleteket CAUCHY -féle egyenleteknek nevezzük, és egyszerűbben mátrix formával jelöljük őket:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \alpha_y \\ \cos \alpha_z \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

vagyis:

$$\boxed{\vec{p} = T \cdot \vec{n}} \quad (2.21)$$

A (T) tenzort **FESZÜLTSEG TENZOR** - nak nevezzük.

A tangenciális feszültségek dualitás elve alapján a következő tangenciális vektorok egyenlők:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.22)$$

Az utóbbi egyeségekből arra lehet következtetni, hogy a (T) tenzor szimmetrikus, és $(6 - hat)$ feszültségi értéket tartalmaz.

A (2.20). mátrixegyenlet arra utal, hogy egy test valamennyi (N) pontjában és azok (\vec{n}) normálvektorral jellemezett (dA) metszősíkjaiban, a (\vec{p}) feszültségvektor értékeit meg lehet határozni, az (xy, yz, zx) síkokban működő (a T - feszültségtenzorban tartalmazott) normál- és tangenciális feszültségek függvényeiként.

A továbbiakban feltételezzük, hogy ismerjük a (T) feszültség tenzort, vagyis az (xy, yz, zx) síkokban működő normál-és tangenciális feszültségeket. A feladat az, hogy az ismert $(T$ - feszültségtenzor tartalmazta) normál és tangenciális feszültségek függvényében, valamint az (\vec{n}) normálvektor ismeretével, határozzuk meg a (dA) metszősíkban működő (\vec{p}) feszültségvektor $(\vec{\sigma}, \vec{\tau})$ összetevőit.

2.2.1. A NORMÁLFESZÜLTSEG KISZÁMÍTÁSA

A (\vec{p}) feszültségvektor vetületét az (\vec{n}) normálvektor irányában a (2.08). skaláris szorzat alapján kapjuk:

$$\sigma = \vec{p} \cdot \vec{n} = \begin{vmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \alpha_y \\ \cos \alpha_z \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

A (2.23). egyenletet, a (2.19). egyenletek segítségével írjuk le skaláris formában:

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_x \cdot \cos \alpha_x + \tau_{yx} \cdot \cos \alpha_y + \tau_{zx} \cdot \cos \alpha_z) \cdot \cos \alpha_x + \\ &+ (\tau_{xy} \cdot \cos \alpha_x + \sigma_y \cdot \cos \alpha_y + \tau_{zy} \cdot \cos \alpha_z) \cdot \cos \alpha_y + \\ &+ (\tau_{xz} \cdot \cos \alpha_x + \tau_{yz} \cdot \cos \alpha_y + \sigma_z \cdot \cos \alpha_z) \cdot \cos \alpha_z + \end{aligned} \quad (2.24)$$

A tangenciális feszültségek dualitása elvéből származó (2.22). egyenlőségek alapján, a továbbiakban a $(\tau_{xy}; \tau_{yz}; \tau_{zx})$ értékeket használjuk. Ilymódom a normálfeszültség általános skaláris formáját kapjuk:

$$\boxed{\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha_x + \sigma_y \cdot \cos^2 \alpha_y + \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha_z + 2(\tau_{xy} \cdot \cos \alpha_x \cdot \cos \alpha_y + \tau_{yz} \cdot \cos \alpha_y \cdot \cos \alpha_z + \tau_{zx} \cdot \cos \alpha_z \cdot \cos \alpha_x)} \quad (2.25)$$

2.2.2. A TANGENCIÁLIS FESZÜLTÉG KISZÁMÍTÁSA

A $(\vec{\tau})$ tangenciális feszültség kiszámítása a (2.09). tétel szerint történik, a skaláris értékét pedig a (2.11). tételből kapjuk, miszerint:

$$p = \pm \sqrt{|\sigma|^2 + |\tau|^2} = \pm \sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2}$$

Az utóbbi egyenlet alapján a tangenciális feszültség általános skaláris formáját kapjuk.

$$\tau = \pm \sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2 - |\sigma|^2} \quad (2.26)$$

Valamennyi esetben, a konkrét értékek meghatározását célszerű úgy végezni el, hogy első lépésként kiszámítjuk az (2.19). egyenletek segítségével a (p_x, p_y, p_z) értékeket, majd a (2.25). egyenlet segítségével a (σ) normál feszültség értékét, és ezek alapján a (2.26). kapcsolat segítségével kiszámítjuk a (τ) tangenciális feszültség értékét

2.2.3. A FŐFESZÜLTSÉGEK KISZÁMÍTÁSA

A főfeszültségi állapotban, ahogy az a (2.12). kapcsolatokkal van feltüntetve, a (\vec{p}) feszültségvektor és a $(\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_{(g)})$ normál feszültségvektor (FŐFESZÜLTÉG) megegyeznek, a $(\vec{\tau})$ tangenciális feszültség értéke pedig nulla.

$$\vec{p} = \vec{\sigma}_{\max} = \vec{\sigma}_{(g)} \quad ; \quad \vec{\tau} = 0 \quad (2.27)$$

Ennek az állapotnak egy meghatározandó normálvektor felel meg:

$$\vec{n} = \vec{n}_{(g)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{(g)x} \\ \cos \alpha_{(g)y} \\ \cos \alpha_{(g)z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_g \\ m_g \\ n_g \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

A $(\sigma_{(g)})$ főfeszültségi vektor (xyz) tengelyirányi vetületeit leírhatjuk mátrix formában:

$$\vec{\sigma}_{(g)} = \begin{pmatrix} \sigma_{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(g)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_g \\ m_g \\ n_g \end{pmatrix} = \sigma \cdot \vec{n}_{(g)} \quad (2.29)$$

A főfeszültségi állapotnak (helyzetnek) megfelelő (\vec{p}) feszültségi vektor értéke a (2.21). kapcsolat alapján:

$$\vec{p} = T \cdot \vec{n}_{(g)} \quad (2.30)$$

A (2.27). egyenlőségek alapján, használva a (2.29 és 2.30). kapcsolatokat:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{\sigma}_{(g)} \\ \Downarrow \\ T \cdot \vec{n}_{(g)} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_{(g)}\end{aligned}\quad (2.31)$$

A (2.31). egyenlőségéből arra lehet következtetni, hogy a (\vec{p}) és a $(\vec{\sigma}_{(g)})$ vektorok vetületei az (xyz) tengelyek irányaira megegyeznek. Írjuk le a (2.31). mátrixegyenletet három skaláris egyenlet formájában:

$$\begin{aligned}\sigma_x \cdot \cos \alpha_{(g)_x} + \tau_{yx} \cdot \cos \alpha_{(g)_y} + \tau_{zx} \cdot \cos \alpha_{(g)_z} &= \sigma_{(g)} \cos \alpha_{(g)_x} \\ \tau_{xy} \cdot \cos \alpha_{(g)_x} + \sigma_y \cdot \cos \alpha_{(g)_y} + \tau_{zy} \cdot \cos \alpha_{(g)_z} &= \sigma_{(g)} \cos \alpha_{(g)_y} \\ \tau_{xz} \cdot \cos \alpha_{(g)_x} + \tau_{yz} \cdot \cos \alpha_{(g)_y} + \sigma_z \cdot \cos \alpha_{(g)_z} &= \sigma_{(g)} \cos \alpha_{(g)_z}\end{aligned}\quad (2.32)$$

Az utóbbi egyenletet a következőképpen rendezzük:

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma_{(g)})l_g + \tau_{yx} \cdot m_g + \tau_{zx} \cdot n_g &= 0 \\ \tau_{xy} \cdot l_g + (\sigma_y - \sigma_{(g)}) \cdot m_g + \tau_{zy} \cdot n_g &= 0 \\ \tau_{xz} \cdot l_g + \tau_{yz} \cdot m_g + (\sigma_z - \sigma_{(g)}) \cdot n_g &= 0\end{aligned}\quad (2.33)$$

A (2.33). rendszer három egyenletet és négy ismeretlent $(\sigma_{(g)}, l_g, m_g, n_g)$ tartalmaz. Ha a $(\sigma_{(g)})$ mint paramétert kezeljük, akkor a rendszernek abban az esetben vannak reális megoldásai, ha a **RENDSZERDETERMINÁNS** egyenlő nullával:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_{(g)}) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_{(g)}) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_{(g)}) \end{vmatrix} = 0\quad (2.34)$$

A (2.34). determinánst még **FESZÜLTSGDETERMINÁNS** -nak is nevezzük.

A feszültségdetermináns kifejtése egy harmadfokú egyenletet eredményez, melyet a feszültségtenzor **KARAKTERISZTIKUSEGYENLET** -ének hívjuk:

$$\begin{aligned}\sigma_g^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \sigma_g^2 + [(\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) - \\ - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \cdot \sigma_g - (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2\tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \\ - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2) = 0\end{aligned}\quad (2.35)$$

Az egyenlet egyszerűbb alakja:

$$\sigma_g^3 - T_1 \cdot \sigma_g^2 + T_2 \cdot \sigma_g - T_3 = 0\quad (2.36)$$

A (T_1, T_2, T_3) értékeket a **FESZÜLTSEGTENZOR INVARIÁNS** -ainak nevezzük. Látható, hogy ezek nem függnének (invariánsok) a metszősík helyzetétől.

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ T_2 &= \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\ T_3 &= \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2\tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \\ &\quad - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

A (2.35). karakterisztikus egyenlet megoldása után három valós gyököt (megoldást) kapunk, $(g=1,2,3)$ vagyis az általános feszültségi állapotnak három főfeszültség felel meg:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (2.38)$$

Ha a $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ értékek kiszámítása megtörtént, ezeket egyenként visszahelyettesítjük a (2.33). egyenletbe. Ily módon három egyenlet rendszert kapunk. Közülük valamennyi megfelel egy-egy főfeszültségi állapotnak, és három $(l_{(g)}, m_{(g)}, n_{(g)})$ ismeretlent tartalmaz. Az egyenletek megoldásával a főfeszültségek helyzetei (főirányok) lesznek meghatározva.

$$\vec{n}_{(1)} = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{n}_{(2)} = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} ; \quad \vec{n}_{(3)} = \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Be lehet bizonyítani, hogy a három normálvektor merőleges egymásra.

2.2.4. A METSZŐSÍKBAN MŰKÖDŐ FESZÜLTSEGEK KISZÁMÍTÁSA A FŐFESZÜLTSEGEK FÜGGVÉNYÉBEN

A koordinátarendszert úgy választjuk ki, hogy a tengelyek egyezzenek meg a főfeszültségek irányával

$$[x \equiv (1); y \equiv (2); z \equiv (3)] \quad (2.40)$$

Ilyen esetben, mivel a tangenciális vektorok értéke nulla, a (T) - feszültségtenzor a következő:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

A normál feszültség értékét az (2.25). általános helyzetre szóló egyenletből kapjuk,

igénybevéve a (2.40). (T) – feszültségtenzorban szereplő értékeket. Megkülönböztetésként az (\vec{n}) normálvektor helyzetét $(\psi_{1,2,3})$ szögekkel jelöljük.

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \cos^2 \psi_{(1)} + \sigma_2 \cdot \cos^2 \psi_{(2)} + \sigma_3 \cdot \cos^2 \psi_{(3)} \quad (2.42)$$

A megfelelő (τ) tangenciális feszültséget skaláris értékét a (2.26). egyenletből határozzuk meg, úgy, hogy a (2.26). egyenletbe behelyettesítjük a (2.19, 2.25). értékeket, és ezután igénybe vesszük a (2.40). egyességeket, valamint a (2.41). tenzorban foglalt értékeket. Rendezés után a következő formát kapjuk:

$$\tau = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cdot \cos^2 \psi_{(1)} \cdot \cos^2 \psi_{(2)} + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \cdot \cos^2 \psi_{(2)} \cdot \cos^2 \psi_{(3)} + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \cdot \cos^2 \psi_{(3)} \cdot \cos^2 \psi_{(1)}} \quad (2.43)$$

Egy különleges helyzetben, ha az (\vec{n}) normálvektor és a tengelyek közötti szögek megegyeznek, akkor:

$$\psi_{(1)} = \psi_{(2)} = \psi_{(3)} \Rightarrow \cos^2 \psi_{(1)} + \cos^2 \psi_{(2)} + \cos^2 \psi_{(3)} = 1 \quad (2.44)$$

Ilyen helyzetben a megfelelő normál és tangenciális feszültségek értékei a következők:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.45)$$

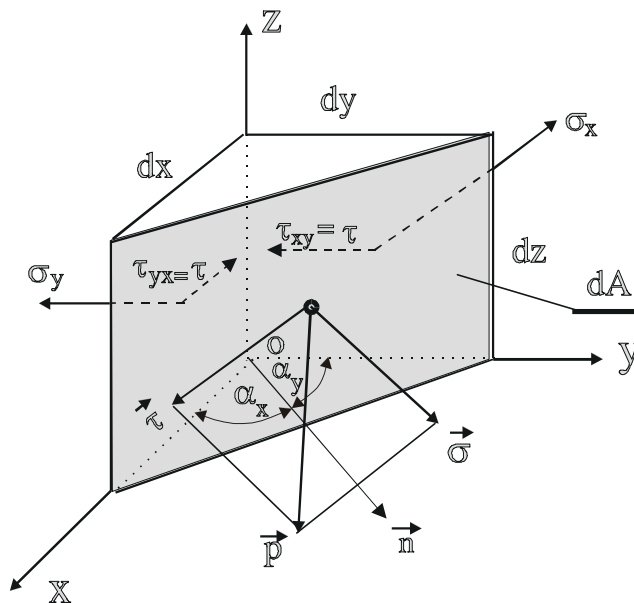
$$\tau = \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.46)$$

2.3. SÍKBELI FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT

Síkbeli feszültségi állapot, az általános feszültségi állapotnak olyan esete, amikor a főfeszültségek között az egyiknek az értéke nulla. Ilyen esetben valamennyi feszültségvektor egy síkban működik - (2.04.a és 2.04.b).- ábrák.

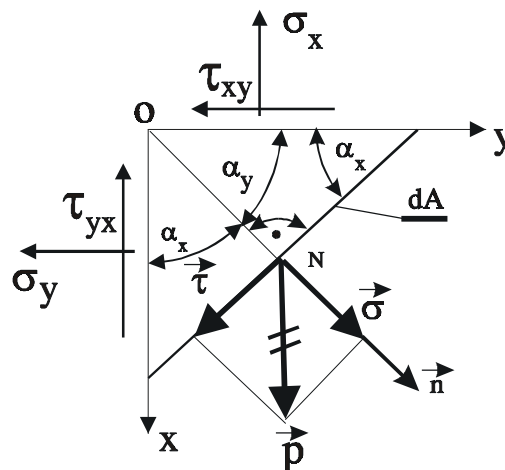
Ezt az állapotot a következő értékek jellemzik:

$$\begin{aligned} \sigma_x \neq 0 \quad ; \sigma_y \neq 0 \quad ; \sigma_z &= 0 \\ \tau_{yz} = 0 \quad ; \tau_{zx} = 0 \quad ; \tau_{yx} &\neq 0 \\ \alpha_x \neq 0 \quad ; \alpha_y \neq 0 \quad ; \alpha_z &= 90^\circ \end{aligned} \quad (2.47)$$



2.04. ábra

A következő (2.05). ábra az (xy) síkot mutatja be:



2.05. ábra

A (2.05).ábráról a következő összefüggések észlelhetők:

$$\begin{aligned}\alpha_x &= 90^\circ - \alpha_y \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}\end{aligned}\tag{2.48}$$

A síkbeli feszültségi állapot esetében a normál és a tangenciális feszültségek, a főfeszültségek

és azok helyzetének kiszámítását az általános feszültségi állapotra jellemző módszer szerint végezzük el, igénynevével a (2.47 és 2.48). jellemzőket

A FESZÜLTSEGTENZOR

A meghatározást a (2.20, 2.21). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

A FESZÜLTSEGDETERMINÁNS

A meghatározást a (2.34). kapcsolatok alapján végezzük el.

:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_g) & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_g) & 0 \\ 0 & 0 & (-\sigma_g) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.50)$$

A KARAKTERISZTIKUS EGYENLET

A meghatározást a (2.35). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\sigma_g^2 - \sigma_g \cdot (\sigma_x + \sigma_y) + (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0 \quad (2.51)$$

Az utóbbi egyenlet másodfokú, két megoldása van, vagyis a síkbeli feszültségi állapotnak két főfeszültségi állapot felel meg.

A NORMÁLFESZÜLTSÉG

A meghatározást a (2.25). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\boxed{\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha_x + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha_x - \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha_x} \quad (2.52)$$

A TANGENCIÁLIS FESZÜLTSÉG

A meghatározást a (2.19, 2.25, 2.26,) . kapcsolatokat alapján végezzük el.

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_x + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha_x \quad (2.53)$$

A FŐFESZÜLTSÉG

A meghatározást a (2.51). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (2.54)$$

A FŐFESZÜLTSÉG HELYZETE

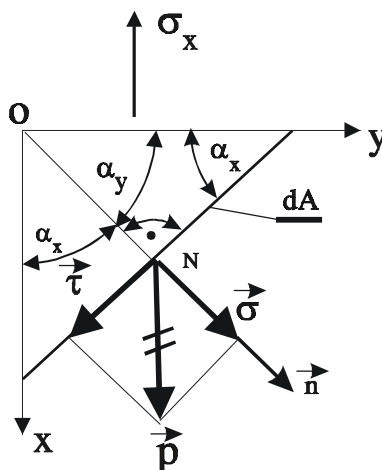
A főfeszültségi helyzetet a (2.52). egyenlet első derivációjából, és a deriváció nullával való kiegyenlítéséből határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\alpha_x} = 0 &\Rightarrow \alpha_{(g)} \Rightarrow \alpha_{(1,2)} \quad ; \quad \alpha_x = \alpha_{(g)} \\ \frac{d\sigma}{d\alpha_x} &= -2 \cdot \sigma_x \cdot \sin \alpha_x \cdot \cos \alpha_x + 2 \cdot \sigma_y \cdot \sin \alpha_x \cdot \cos \alpha_x - 2\tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha_x = 0 \quad (2.55) \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) + \frac{1}{2} k \cdot \pi \quad ; \quad k = 0,1 \quad (2.56)$$

2.4. LINEÁRIS FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT

A lineáris feszültségi állapot, az általános feszültségi állapotnak olyan esete, amikor a főfeszültségek között kettőnek az értéke nulla. Ilyen esetben egy külső feszültség vektor hat, (2.06. ábra).



2.06. ábra

Ezt az állapotot a következő értékek jellemzik:

$$\begin{aligned}\sigma_x &\neq 0 \quad ; \sigma_y = 0 \quad ; \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0 \\ \alpha_x &\neq 0 \quad ; \alpha_y \neq 0 \quad ; \alpha_z = 0\end{aligned}\tag{2.57}$$

A megfelelő mértani jellemző a következő:

$$\alpha_x = 90^\circ - \alpha_y\tag{2.58}$$

A lineáris feszültségi állapot esetében a normál és a tangenciális feszültség, a főfeszültség és annak helyzetének meghatározását az általános feszültségi állapotra jellemző módszer szerint végezzük el, használva a (2.57 és 2.58). összefüggéseket:

A FESZÜLTSGTENZOR

A meghatározást a (2.20, 2.21). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.59)$$

A FESZÜLTSGDETERMINÁNS

A meghatározást a (2.34). kapcsolat alapján végezzük el.

:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_g) & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_g & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_g \end{vmatrix} = 0 \quad (2.60)$$

A KARAKTERISZTIKUS EGYENLET

A meghatározást a (2.35). kapcsolat alapján végezzük el.

$$(\sigma_x - \sigma_g) \cdot \sigma_g^2 = 0 \quad (2.61)$$

Az utóbbi egyenlet lineáris, egy megoldása van, vagyis a lineáris feszültségi állapotnak egy főfeszültségi állapot felel meg.

A NORMÁL FESZÜLTSG

A meghatározást a (2.25). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\boxed{\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha_x} \quad (2.62)$$

A TANGENCIÁLIS FESZÜLTSG

A meghatározást a (2.19, 2.25, 2.26). kapcsolatokat alapján végezzük el.

$$\boxed{\tau = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \sin 2\alpha_x} \quad (2.63)$$

A FŐFESZÜLTSÉG

A meghatározást a (2.61). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\boxed{\sigma_1 = \sigma_x} \quad (2.64)$$

A FŐFESZÜLTSÉG HELYZETE

A normálfeszültségnek megfelelő ($\alpha_{1,2}$) helyzetét a (2.62). egyenlet első derivációjából és a deriváció nullával való kiegyenlítéséből határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\alpha} = 0 &\Rightarrow \alpha_{(g)} \Rightarrow \alpha_{(1,)} \quad ; \quad \alpha_x = \alpha_g \\ \frac{d\sigma}{d\alpha_x} &= -2 \cdot \sigma_x \cdot \sin \alpha_x \cdot \cos \alpha_x = 0 \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\boxed{\alpha_1 = 0} \quad (2.65)$$

A(2.63). egyenlet alapján meg lehet határozni a lineáris feszültségi állapotra jellemző tangenciális feszültség maximális értékét, és annak helyzetét:

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\sigma_x}{2} \\ \alpha &= \pm \frac{\pi}{4} = \pm 45^\circ \end{aligned}} \quad (2.66)$$

2.5. A FESZÜLTSEGEK ÁBRÁZOLÁSA

2.5.1. MOHR - FÉLE KÖRÖK

E célból kiválasztunk egy (σ, τ) sík derékszögű koordinátarendszert. A (σ_1, σ_2) főfeszültségeket a (σ) tengelyen tüntetjük fel. Az (I) . főirány és az (\vec{n}) normálvektor közötti szöget (ψ_1) - el jelöljük.

Vegyük igénybe a (2.52 és 2.53). egyenleteket, azzal, hogy a kiinduló koordinátarendszer tengelyei megegyezzenek a főirányokkal $[x \equiv (1) ; y \equiv (2)]$. Ügyelünk, hogy a fő centrifugális nyomaték értéke nulla.

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 \cdot \cos^2 \psi_1 + \sigma_2 \cdot \sin^2 \psi_1 \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\psi_1\end{aligned}$$

az első egyenletet a következő trigonometrikus egyenletek használatával transzformáljuk

$$\sin^2 \psi_1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\psi_1) \quad ; \quad \cos^2 \psi_1 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\psi_1)$$

A behelyettesítést követően a normál és a tangenciális feszültségek értékei:

$$\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\psi_1 \quad (2.67)$$

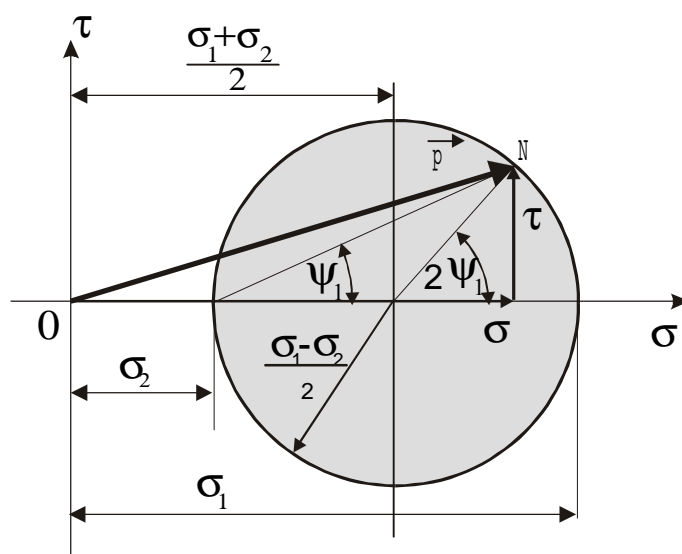
$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\psi_1 \quad (2.68)$$

A két utóbbi egyenletet négyzetre emeljük, és ezután összeadjuk őket:

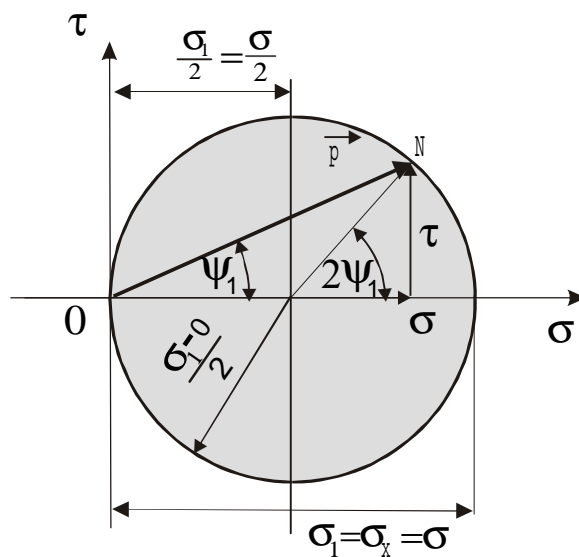
$$\boxed{\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2} \quad (2.69)$$

A (2.69). egyenlet formája azonos egy $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ / kör egyenlet összetételével. Ebből arra lehet következtetni, hogy, egy (N) pontban működő $(\sigma, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \psi_1)$ feszültségeket és azok helyzetét, grafikai módszerrel, egy (σ, τ) . koordinátarendszerben lehet ábrázolni

Vizsgáljuk meg a (σ_1, σ_2) értékek függvényében a következő eseteket:

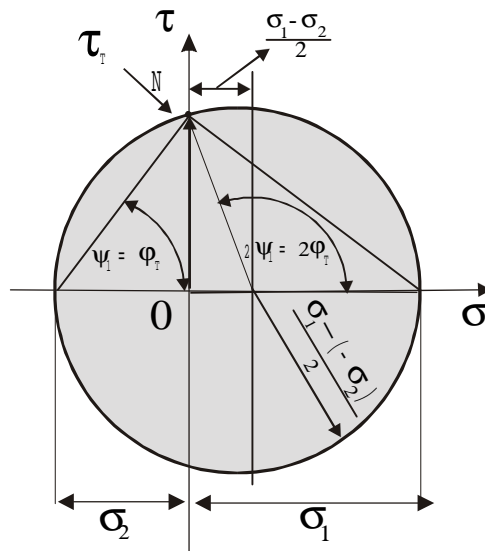
2.5.1.1. A FŐFESZÜLTSÉGEK ÉRTÉKEI POZITÍVAK ($\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 > 0$)


2.07. ábra

2.5.1.2. A FŐFESZÜLTSÉGEK EGYIK ÉRTÉKE NULLA ($\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 = 0$) (LINEÁRIS FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT)


2.08. ábra

2.5.1.3. A FŐFESZÜLTSÉGEK ÉRTÉKEI JELBEN KÜLÖNBÖZNEK
 $(\sigma_1 > 0 ; \sigma_2 < 0) \dots (\sigma_1 < 0 ; \sigma_2 > 0)$



2.09. ábra

Az utóbbi esetben (2.09. ábra) látható, hogy meghatározható egy olyan $(\psi_1 = \varphi_T)$ metszet, melyben a normálfeszültség értéke egyenlő nullával, vagyis csak tangenciális feszültség létezik. Ilyen feszültségi állapotot **TISZTA TANGENCIÁLIS FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT**-nak nevezzük.

Az (2.09). ábrán látjuk, hogy a normál és a tangenciális feszültségek értékei, mely megfelelnek a $(\psi_1 = \varphi_T)$ helyzetnek a következők:

$$\boxed{\sigma_{(\psi_1 = \varphi_T)} = 0} \quad (2.70)$$

$$\boxed{\tau_{(\psi_1 = \varphi_T)} = \pm \sqrt{-\sigma_1 \sigma_2}} \quad (2.71)$$

Ez a helyzet a következő $(\psi_1 = \varphi_T)$ szöggel van meghatározva:

$$\boxed{\varphi_T = \pm \arctg \frac{\sqrt{-\sigma_1 \cdot \sigma_2}}{\sigma_2}} \quad (2.72)$$

A nyírófeszültség maximális értéke szintén az (2.09). ábra szerint

$$\boxed{\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (2.73)$$

Ha az utóbbi egyenletbe a főfeszültségeket be helyettesítjük a megfelelő külső normál és tangenciális feszültség által (2.54.-es függvény), akkor a (2.73). egyenlet másik használt formáját kapjuk:

$$\tau_{\max} = \frac{+1}{-2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}} \quad (2.74)$$

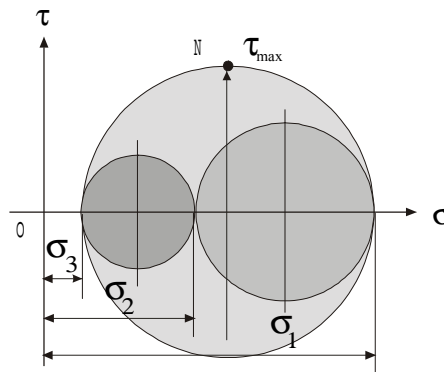
A bemutatott módszert az (xy) síkra vonatkozt. Természetesen az eljárás azonos az (yz) és az (zx) síkokra is:

$$: \quad \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (2.75)$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (2.76)$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \quad (2.77)$$

A (2.75, 2.76, 2.77). egyenleteket a (2.10). ábra egyesíti:



2.10. ábra

A (2.10). ábrán látható, hogy a tangenciális feszültség maximális értéke a következő:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2.78)$$

2.5.2. A CULMAN - FÉLE ELLIPSZOID

Vegyünk igénybe egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a tengelyek egyezzenek meg a $[(1), (2), (3)]$ főfeszültségek irányaival (2.11. ábra). Az igénybevett koordináta-rendszerhez tartozó valamennyi (N) pont metszősíkjának (\vec{n}) normálvektorát a következő vektoroszlop jellemzi:

$$n = \begin{bmatrix} \cos\psi_1 \\ \cos\psi_2 \\ \cos\psi_3 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Ebben az esetben a metszősíknak megfelelő feszültségvektor értéke:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi_1 \\ \cos\psi_2 \\ \cos\psi_3 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Írjuk le a (2.80). egyenletet három kaláris egyenlet fejmálába:

$$\begin{aligned} \cos\psi_1 &= \frac{p_x}{\sigma_1} \\ \cos\psi_2 &= \frac{p_y}{\sigma_2} \\ \cos\psi_3 &= \frac{p_z}{\sigma_3} \end{aligned} \quad (2.81)$$

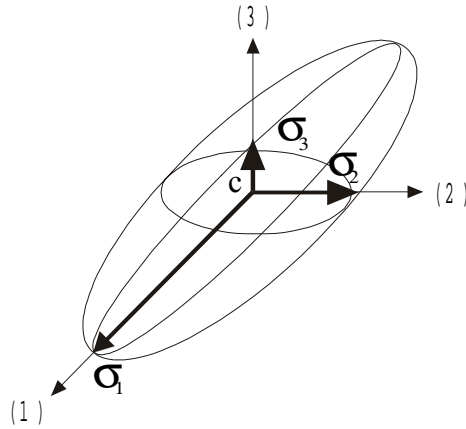
Tudva, hogy

$$\cos^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_2 + \cos^2 \psi_3 = 1$$

A (2.81). egyenleteket emeljük négyzetre és adjuk őket össze:

$$\boxed{\left(\frac{p_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{\sigma_3}\right)^2 = 1} \quad (2.82)$$

Az utóbbi egyenletet **CULMAN - féle FESZÜLTSÉGI ELLIPSZOID** - nak hívjuk.



2.11. ábra

Síkbeli feszültségi állapotokra a (2.82). Culman ellipszoid alapján három ellipszis egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{\sigma_2}\right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{p_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{\sigma_3}\right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{p_z}{\sigma_3}\right)^2 + \left(\frac{p_x}{\sigma_1}\right)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Ezek közül vizsgáljuk meg az első ellipszist.

Az (N) pontnak megfelelő (\vec{p}) feszültségvektor összetevőit a (2.81). egyenletek közül az első kettő képezi:

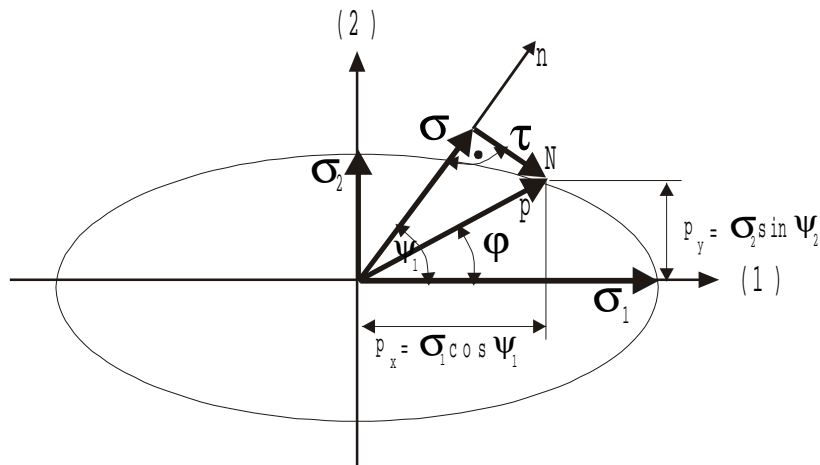
A (2.12). ábrán a vizsgált ellipszis van feltüntetve. A (p_x, p_y) összetevők (φ) szöget alkotnak:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\sigma_2 \cos \psi_2}{\sigma_1 \cos \psi_1}$$

Sík feszültségi állapotra jellemző, hogy $[\psi_2 = 90 - \psi_1]$, vagyis

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \operatorname{tg} \psi_1 \quad (2.84)$$

Az (N) pontban működő (\vec{p}) feszültségvektort a következő összetevőkre bonthatjuk fel (2.12. ábra).



2.12. ábra

E szerint a CULMAN - féle ellipszoid (ellipszisek) használatával meg lehet határozni a (σ) normálfeszültség és a (τ) tangenciális feszültség értékeit egy tetszőlegesen kiválasztott (N) pontban, a (σ_1, σ_2) főfeszültségek és a (ψ_1) szög, (melyet az \vec{n} normálvektor és az 1. főtengely képeznek) függvényeként.

2.1. PÉLDA

Az (N) pontban működő feszültségeket a következő (T) feszültségtenzor jellemzi:

$$T = \begin{bmatrix} 100 & 20 & 0 \\ 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{P.2.01})$$

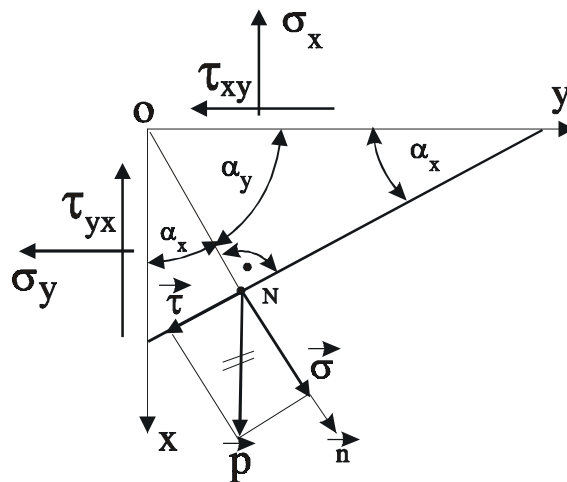
Az (N) pontot tartalmazó metszősík (\vec{n}) normálvektor oszlopvektor formája:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ \\ \cos 60^\circ \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{P.2.02})$$

illetve

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 100 \text{ MPa} \\
 \sigma_y &= 20 \text{ MPa} \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 20 \text{ MPa} \\
 \alpha_x &= 30^\circ \quad ; \quad \alpha_y = 60^\circ
 \end{aligned}
 \tag{P.2.03}$$

A feszültségi állapot a (2.1). ábrán van bemutatva



2.1. ábra

Ki kell számolni a metszősíkban működő (σ) normál- és (τ) tangenciális feszültségeket, valamint a (σ_1, σ_2) főfeszültségek értékeit és a megfelelő fősíket (α_1). elhelyezését. A feszültségi állapotot MOHR -féle körrel kell ábrázolni.

A (P.2.01). tenzor a síkbeli feszültségi állapotnak felel meg.

A NORMÁLFESZÜLTÉS MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (2.52). egyenlet alapján végezzük el.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha_x + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha_x - \tau \cdot \sin 2\alpha_x = \\
 &= 100 \cdot \cos^2 30^\circ + 20 \cdot \sin^2 30^\circ - 20 \cdot \sin 2 \cdot 30^\circ
 \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\boxed{\sigma = 62.68 \text{ MPa}}$$

(P.2.04)

A TANGENCIÁLIS FESZÜLTÉG MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (2.53). egyenlet alapján végezzük el.

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2 \cdot \alpha_x + \tau_{xy} \cos 2 \cdot \alpha_x = \\ &= \frac{100 - 20}{2} \sin 60^\circ + 20 \cdot \cos 60^\circ\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\tau = 44.6 \text{ MPa}}$$

(P.2.05)

A FŐFESZÜLTÉG MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (2.54). egyenlet alapján végezzük el.

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{100 + 20}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(100 - 20)^2 + 4 \cdot 20^2}\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_1 &= 104.72 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 15.30 \text{ MPa}\end{aligned}}$$

s

(P.2.06)

A FŐSÍK HELYZETÉNEK MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást a (2.56). egyenlet alapján végezzük el.

$$\begin{aligned}\alpha_{1,2} &= \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) + \frac{1}{2} k\pi = \\ &= \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \cdot 20}{100 - 20} \right) + \frac{1}{2} k\pi = \dots \quad k = 0\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

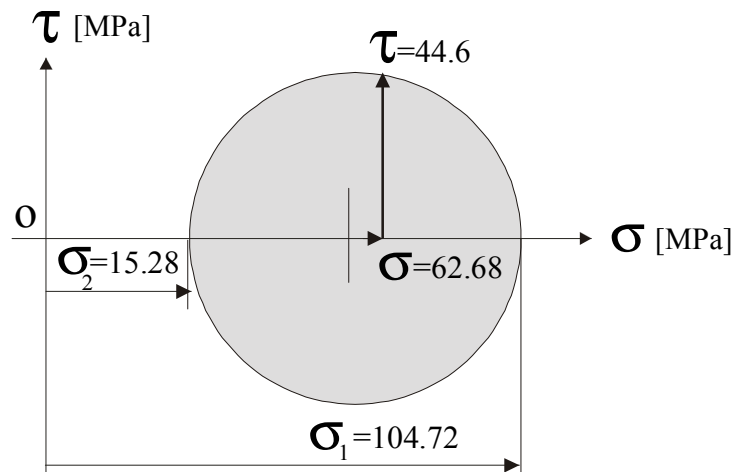
$$\boxed{\alpha_1 = -13.2^\circ}$$

(P.2.07)

A MOHR - KÖR ÁBRÁZOLÁSA

A (2.07). ábra szerint végezzük el.

A kiszámított értékeket a (2.2.). ábra tartalmazza.



2.2. ábra

2.2. PÉLDA

Használva a (2.1). példára jellemző adatokat, a CULMAN - féle ellipszis segítségével meg kell határozni a (σ) normál - és a (τ) tangenciális feszültségeket egy metszősíkban, mely (\vec{n}) normálvektora az (x) tengellyel ($\alpha_x = 45^\circ$) fokot képez.

A (2.1). példában meghatároztuk a (σ_1, σ_2) főfeszültségi értékeket.

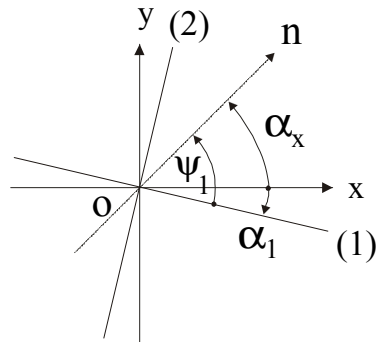
$$\sigma_1 = 104.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 15.30 \text{ MPa}$$

valamint a főfeszültség szögbeli helyzetét

$$\alpha_1 = -13.2^\circ$$

A (2.3). ábra segítségével tüntetjük fel a tengelyek közötti szögeket.



2.3. ábra

$$\psi_1 = \alpha_1 + \alpha_x = 58.2^\circ \quad (\text{P.2.08})$$

A (\vec{p}) feszültségvektor (p_x) összetevője az (2.81). egyenlet szerint:

$$p_x = \sigma_1 \cos \psi_1 = 104.72 \cdot \cos 58.2^\circ$$

$$\Downarrow$$

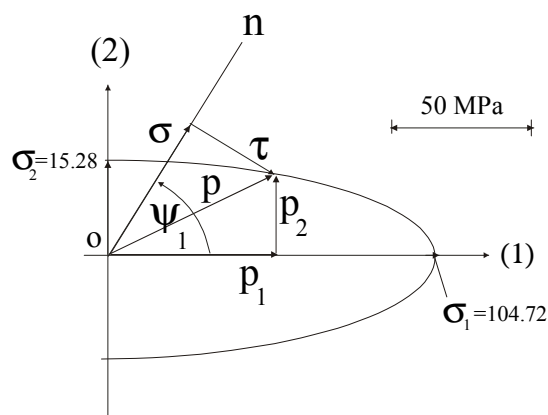
$$p_x = 55.14 \text{ MPa} \quad (\text{P.2.09})$$

A meghatározott (σ_1, σ_2) adatok segítségével megrajzoljuk az ellipszist, majd a (P.2.09). értékek alapján meghatározzuk a (\vec{p}) feszültségvektor értékét. A további eljárás során igénybe vesszük a (ψ_1) szög értéket, majd a (\vec{p}) feszültségvektort felbontjuk a (σ, τ) összetevőkre.

A (2.4). ábrán használt rajzolási arány alapján a keresett feszültségek értékei (leolvasott értékek) a következők:

$\sigma \approx 49 \text{ MPa}$
$\tau \approx 29 \text{ MPa}$

$$(\text{P.2.10})$$

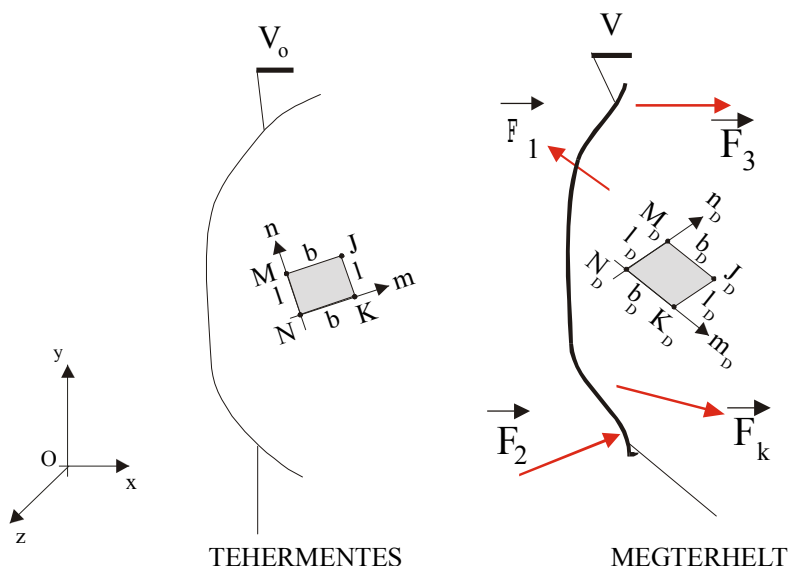


2.4. ábra

3. AZ ALAKVÁLTOZÁSOK

3.1. AZ ALAKVÁLTOZÁS FOGALMA

Vizsgáljunk meg egy tetszőlegesen kiválasztott (V_o) térfogatú szilárd testet (3.01. ábra), melyet egy (xyz) derékszögű koordináta-rendszerhez kötünk. A testen belül választunk ki egy (N) pontot, mely koordinátái (xyz) . Az (N) pont környékén határolunk meg egy elemi ($NMJK$) négyszöget, melynek méretei (l, b) . Az elemi felület oldalaira helyezünk el egy (nm) derékszögű koordináta-rendszert.



3.01. ábra

Ha a testet megterheljük egy

$$[\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k] \quad (3.01)$$

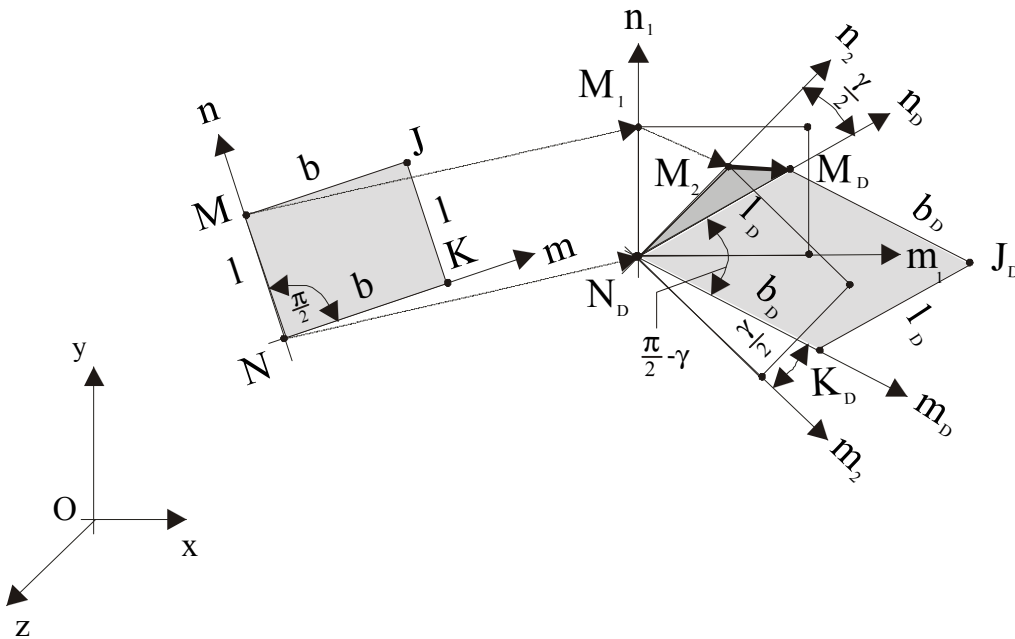
erőrendszerrel, a megterhelés következményeként a szilárd test alakváltozásokat szenved. Ahogy az a (3.01). ábrán fel van tüntetve, az (N) pont egy új (N_D) pontba kerül, az elemi ($NMJK$) felület pedig elfordul és felveszi az (N_D, M_D, J_D, K_D) alakot. Ezt a helyzet és alakváltozást (3.02.-ábra) a szuperpozíciós elv szerint, felbontjuk a következő elemekre (lépésekre).

1. Lépcső: Az (n, m) koordináta-rendszer párhuzamosan elmozdul az (n_l, m_l) helyzetbe, az

elemi felület az alakját pedig nem változtatja.

2. Lépés: Az (n_1, m_1) . koordináta-rendszer elfordul az (n_2, m_2) helyzetbe, az elemi felület pedig az alakját nem változtatja.
3. Lépés: Az (n_2, m_2) koordináta-rendszer derékszöge megváltozik és felveszi az (n_D, m_D) és felveszi a $(90^\circ - \gamma)$ szögértéket.
4. Lépés: Az (n_D, m_D) tengelyek irányába az elemi felület oldalhosszai megváltoznak $(l \rightarrow l_D, b \rightarrow b_D)$.

Az első két lépés az (N) pont és az elemi $(MNJK)$ felület térbeli abszolút elmozdulásra utal, az utóbbi két lépés pedig az $(NMJK)$ felület alakváltozását tartalmazza.



3.02. ábra

A tangenciális feszültségek dualitása szerint, az $(MNJK)$ felület oldalain a tangenciális feszültségek intenzitásai megegyeznek, amiből arra lehet következtetni, hogy a megfelelő $(\frac{1}{2}\gamma)$ szögelfordulások is egyformák lesznek:

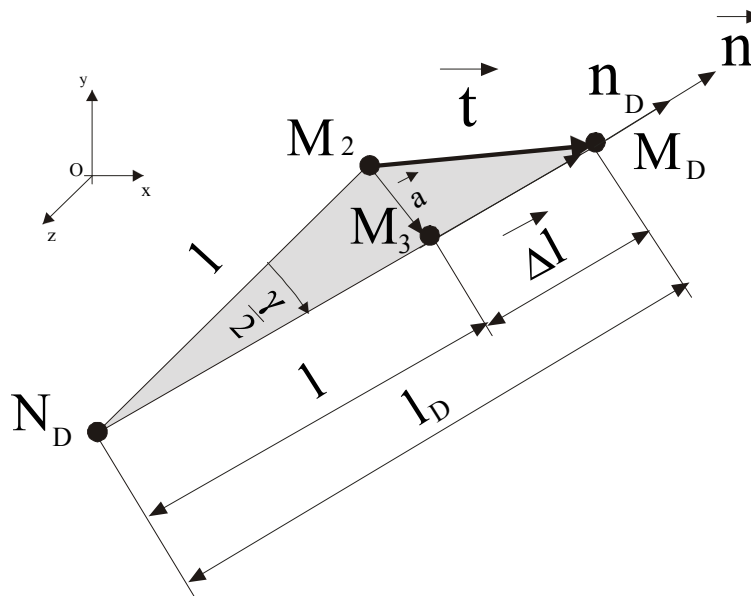
$$\alpha[n_2 \rightarrow n_D] = \alpha[m_2 \rightarrow m_D] = \frac{1}{2}\gamma \quad (3.02)$$

Az összegezett szögelfordulás pedig:

$$\gamma = \alpha(n_2 \rightarrow n_D) + \alpha(m_2 \rightarrow m_D) = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \frac{\pi}{2} - (n_D \rightarrow m_D) \quad (3.03)$$

Vizsgáljunk meg az (N_D, M_D, M_2) és az (M_2, M_3, M_D) háromszögeket (3.03. ábra).

A háromszög oldalait vektorokként kezeljük.



3.03. ábra

Az (xyz) derékszögű koordináta-rendszerben, az elemi felület alakváltozását egy (\vec{t}) vektorral jelöljük, melynek intenzitása megfelel a $(\overline{M_2 M_D})$ elmozdulásnak.

A (\vec{t}) vektort **ELLEMI ELMOZDULÁSI VEKTOR** - nak hívjuk.

A (\vec{t}) vektort két összetevőre bontjuk fel, az (n_D) tengellyel párhuzamos irányába és az (n_D) tengellyel merőleges irányra:

$$\vec{t} = \vec{a} + \overline{\Delta l} \quad (3.04)$$

A (3.04). egyenletet végig elosztjuk (l) -el és kiszámítjuk a határértékeket:

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{\vec{t}}{l} = \frac{\vec{a}}{l} + \frac{\overline{\Delta l}}{l} \right)_{l \rightarrow 0} \\ \Downarrow \\ \lim \left(\frac{\vec{t}}{l} \right)_{l \rightarrow 0} = \lim \left(\frac{\vec{a}}{l} \right)_{l \rightarrow 0} + \lim \left(\frac{\overline{\Delta l}}{l} \right)_{l \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (3.05)$$

A (3.05). határértékek alapján bevezetjük a következő fogalmakat:

3.1.1. ALAKVÁLTOZÁSI VEKTOR

$$\boxed{\lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{t}}{l} \right) = \frac{d\vec{t}}{dl} = \vec{f}} \quad (3.06)$$

A (3.06). egyenlet határértékéből kapott (\vec{f}) vektort *ALAKVÁLTOZÁSI VEKTOR* -nak hívjuk.

Az (\vec{f}) alakváltozási vektor az (N) ponthoz van kötve. Mivel egy ponttól végtelenül nagy számú (nm) koordinátarendszert lehet kialakítani, arra lehet következtetni, hogy az (\vec{f}) alakváltozási vektorok száma szintén végtelenül nagy. E vektorok halmazát az (N) pont **ALAKVÁLTOZÁSI ÁLLAPOT** -nak nevezzük.

Az (\vec{f}) alakváltozási vektor mértékegysége mértéknélküli mennyiség.

3.1.2. FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS

$$\boxed{\lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{\Delta l}}{l} \right) = \frac{\Delta \vec{dl}}{dl} = \vec{\varepsilon}} \quad (3.07)$$

A (3.07). egyenlet határértékét *FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS* -nak hívjuk.

Ha az (n) tengelynek megfelel egy (\vec{n}) normálvektor, akkor az $(\vec{\varepsilon})$ fajlagos hosszváltozás intenzitását az (\vec{f}) alakváltozási vektor és az (\vec{n}) normálvektor skaláris szorzatából kapjuk

$$\varepsilon = \vec{f} \bullet \vec{n} \quad (3.08)$$

3.1.3. SZÖGELFORDULÁS

$$\boxed{\lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{a}}{l} \right) = \frac{\vec{\gamma}}{2}} \quad (3.09)$$

A (3.09). egyenlet határértékét *SZÖGEÉLFORDULÁS* -nak hívjuk.

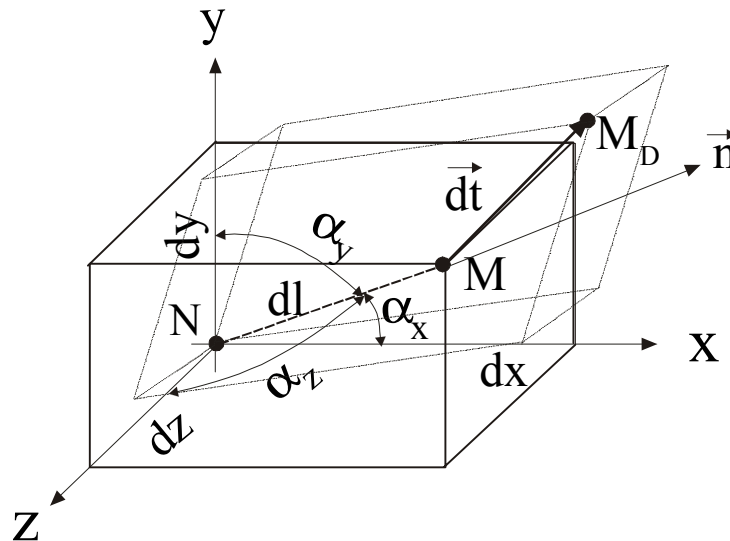
Továbbiakban az $(\vec{\varepsilon})$ és a $(\vec{\gamma})$ értékeket mint *ALAKVÁLTOZÁSI TÉNYEZŐK* -nek nevezzük.

3.2. TÉRBELI ALAKVÁLTOZÁSOK

Vágjunk ki az (N) pont környékéből egy differenciálisan kis derékszögű hasábot (**3.04.-**ábra), melynek oldalai (dx , dy , dz), keresztátlója hossza pedig (dl). A hasáb élei megegyeznek az (xyz) derékszögű koordináta rendszerrel. A keresztirányú átló irányában felvesszünk egy (\vec{n}) normálvektort, mely az (xyz) tengelyekkel alkotó szögei megegyeznek a feszültségi állapotoknál használt értékkel (2.15. függvény).

$$\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \alpha_y \\ \cos \alpha_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l \\ m \\ n \end{vmatrix} \quad (3.10)$$



3.04. ábra

Az elemi hasábot megterheljük. A megterhelés hatására térbeli alakváltozások jönnek létre, melyeket összegezve, a (dl) keresztátló (\vec{dt}) elemi elmozdulási vektorral jellemezzük.

A (dl) átló és a hasáb oldalai közötti kapcsolatok a következők

$$\begin{aligned} dx &= dl \cdot l \\ dy &= dl \cdot m \\ dz &= dl \cdot n \end{aligned} \quad (3.11)$$

Határozzuk meg a (\vec{dt}) elemi elmozdulási vektor (x) irányba eső összetevőjét

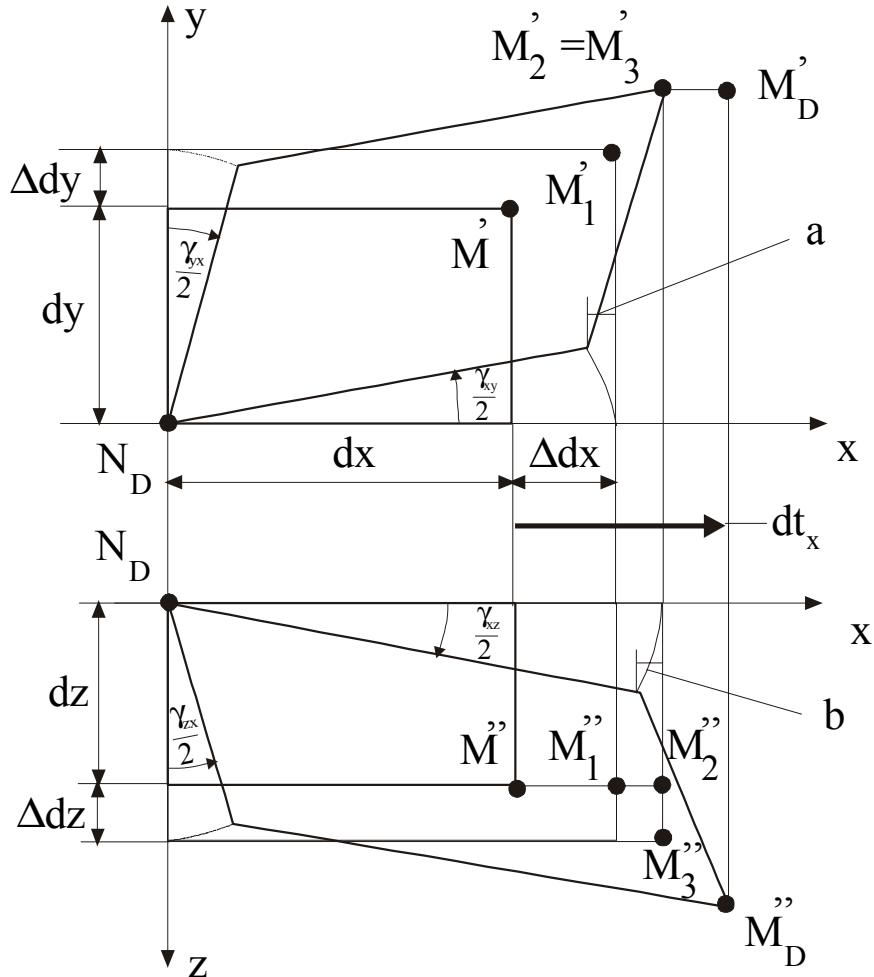
$$\left(\vec{dt}\right)_x = dt_x \quad (3.12)$$

Az (x) tengely irányába eső alakváltozások az (xy) és a (zx) síkokba eső oldalak alakváltozásaiból származnak. A szuperpozíciós elv szerint, az eredményező alakváltozást felbontjuk az összetevő elmozdulásokra (3.05. ábra):

1. LÉPÉS: elmozdulások a (xy) síkban az (xy) tengelyek irányába- (M, M_I)
2. LÉPÉS: szögelfordulás az (xy) síkban- (M_I, M_2) .
3. LÉPÉS: hosszváltozás a (zx) síkban- (M_2, M_3)
4. LÉPÉS: szögelfordulás a (zx) síkban- (M_3, M_D)

Összegezve:

$$dt_x = (dt_x)_1 + (dt_x)_2 + (dt_x)_3 + (dt_x)_4 \quad (3.13)$$



3.05. ábra

A (3.13). egyenlet összetevői a következők:

$$\begin{aligned}
(dt_x)_1 &= \Delta dx = \varepsilon_x dx \\
(dt_x)_2 &= \frac{1}{2} \gamma_{yx} (dy + \Delta dy) - a \\
a &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} (dx + \Delta dx) \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cong 0 \\
(dt_x)_3 &= 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
(dt_x)_4 &= \frac{1}{2} \gamma_{zx} (dz + \Delta dz) - b \\
b &= \frac{1}{2} \gamma_{zx} [(dk_x)_1 + (dk_x)_2] \frac{1}{2} \gamma_{zy} \cong 0
\end{aligned}$$

A (3.14). egyenleteket behelyettesítjük a (3.13). egyenletbe, figyelembe véve a másodrendű differenciálok nulla értékeit

$$dt_x = \varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \gamma_{yx} dy + \frac{1}{2} \gamma_{zx} dz \tag{3.15}$$

Ha az előző egyenletet elosztjuk (dl) -el, az alakváltozási vektor (x) tengelyirányba eső összetevőjét kapjuk:

$$f_x = \varepsilon_x l + \frac{1}{2} \gamma_{yx} m + \frac{1}{2} \gamma_{zx} n \tag{3.16}$$

Ugyan így meghatározhatjuk az (y) és a (z) tengelyirányba eső alakváltozási vektor összetevőit. Eredményként egy három skaláris egyenletű rendszert kapunk:

$$\begin{aligned}
f_x &= \varepsilon_x l + \frac{1}{2} \gamma_{yx} m + \frac{1}{2} \gamma_{zx} n \\
f_y &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} l + \varepsilon_y m + \frac{1}{2} \gamma_{zy} n \\
f_z &= \frac{1}{2} \gamma_{xz} l + \frac{1}{2} \gamma_{yz} m + \varepsilon_z n
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Tüntetjük fel az előző rendszert mátrix egyenlet formában:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

vagy egyszerűbben

$$\boxed{\vec{f} = D \cdot \vec{n}} \tag{3.19}$$

A (3.19). egyenletben az (D) tenzort **ALAKVÁLTOZÁSI TENZOR** -nak nevezzük.

A feszültségi állapotok tanulmányozása során, a (2.20). egyenlet a (\vec{p}) feszültségvektort képezi, mely a feszültségi állapotra jellemző adatokat tartalmazza.

Az (\vec{f}) alakváltozási vektor matematikai összetétele egészében **MEGFELEL** a (\vec{p}) feszültségvektor összetételének.

$$\boxed{\vec{p} \equiv \vec{f}} \quad (3.20)$$

Ez a tény lehetővé teszi, hogy egy meghatározott (N) pontban, egy kiválasztott (\vec{n}) normálvektorral összhangban, meglehessen határozni az (ε, γ) alakváltozási tényezőket, azonos eljárásokkal, melyeket a feszültségi állapotok (σ, τ) jellemzői meghatározásánál vetünk igénybe.

Így a (3.20). megfeleltetés alapján:

$$\begin{aligned} T\vec{n} &\equiv D\vec{n} \\ \Downarrow \\ \left\| \begin{matrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{matrix} \right\| &\equiv \left\| \begin{matrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{matrix} \right\| \end{aligned} \quad (3.21)$$

továbbá:

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \varepsilon \\ \sigma_{1,2,3} &\equiv \varepsilon_{1,2,3} \\ \tau &\equiv \frac{1}{2}\gamma \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.2.1. TÉRBELI ALAKVÁLTOZÁSI TÉNYEZŐK

3.1.1.1. FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS

A meghatározásnál a (2.25 és 3.22). kapcsolatokat használjuk:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + (\gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl)} \quad (3.23)$$

3.2.1.2. SZÖGELFORDULÁS

A meghatározásnál a (2.26 és 3.22). kapcsolatokat használjuk:

$$\gamma = \pm 2 \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 - \varepsilon^2} \quad (3.24)$$

3.2.1.3. FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS A FŐ FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS FÜGVÉNYÉBEN

A meghatározásnál a (2.42 és 3.22). kapcsolatokat használjuk:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2 \quad (3.25)$$

3.2.1.4. SZÖGELFORDULÁS A FŐ FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS FÜGVÉNYÉBEN

A meghatározásnál a (2.43 és 3.22). kapcsolatokat használjuk:

$$\gamma = 2 \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 l^2 m^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 m^2 n^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 n^2 l^2} \quad (3.26)$$

3.2.2. SIKBELI ALAKVÁLTOZÁSOK

3.2.2.1. FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS

A meghatározásnál a (2.52 és 3.22). kapcsolatokat használjuk:

$$\varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} lm \quad (3.27)$$

3.2.2.2. SZÖGELFORDULÁS

A meghatározásnál a (2.53 és 3.22). kapcsolatokat használjuk:

$$\gamma = 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)lm + \gamma_{xy}(l^2 - m^2) \quad (3.28)$$

3.2.2.3. FŐ FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS

A meghatározásnál a (2.54, 2.56 és 3.22). kapcsolatokat használjuk:

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \alpha_{1,2} &= \frac{1}{2} \arctg\left(-\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right) + \frac{1}{2} k\pi\end{aligned}} \quad (3.29)$$

3.2.3. LINEÁRIS ALAKVÁLTOZÁSOK

3.2.3.1. FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS

A meghatározásnál a (2.62 és 3.22). kapcsolatokat használjuk:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_x l^2} \quad (3.30)$$

3.2.3.2. SZOGELFORDULÁS

A meghatározásnál a (2.63 és 3.22). kapcsolatokat használjuk:

$$\boxed{\gamma = 2\varepsilon_x lm} \quad (3.31)$$

3.2.3.3. FŐ FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS

A meghatározásnál a (2.64 és 3.22). kapcsolatokat használjuk:

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_x \\ \alpha_1 &= 0\end{aligned}} \quad (3.32)$$

Az alakváltozási tényezőket ugyanazzal a grafikai módszerekkel lehet ábrázolni mint a megfelelő feszültségi állapotok tényezőit (Moohr-féle körök, Culman - féle ellipszoid).

3.3. FAJLAGOS TÉRFOGATVÁLTOZÁS

A (3.04). ábra alapján, terhelés előtt az elemi hasáb térfogata a következő:

$$dV_0 = dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.33)$$

Megterhelés után a hossz mértékek megváltoznak, és emiatt megváltozik a térfogat is:

$$dV = (dx + \Delta dx) \cdot (dy + \Delta dy) \cdot (dz + \Delta dz) \quad (3.34)$$

A (3.07). egyenlet alapján leírhatjuk az $(\vec{\varepsilon})$ fajlagos hosszváltozás (xzy) irányokba eső összetevőit.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d_x}{d_x}; \varepsilon_y = \frac{\Delta d_y}{d_y}; \varepsilon_z = \frac{\Delta d_z}{d_z} \quad (3.35)$$

miszerint a (3.34). egyenlet formája a következő:

$$dV = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dx dy dz \quad (3.36)$$

A fajlagos térfogatváltozás pedig:

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \quad (3.37)$$

Ha a (3.37). egyenletbe be helyettesítjük a (3.33). és a (3.36). értékeket, akkor

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) \cdot dV_0}{dV_0} - 1 \\ &\Downarrow \\ \varepsilon_V &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ha a másodrendű differenciális értékeket nem vesszük figyelembe, akkor a *térbeli fajlagos térváltozás* megközelítő formáját kapjuk:

$$\boxed{\varepsilon_V \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z} \quad (3.39)$$

3.1. PÉLDA

Egy (N) pontnak az (f) alakváltozási tenzorát mérésekkel állapítottuk meg. Az értékek a (P.3.01). tenzorral vannak bemutatva:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-4} & 10^{-4} & 0 \\ 10^{-4} & -4 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{P.3.01})$$

Meg kell határozni az (ε_1) fő fajlagos hosszváltozást és az (α_1) fő hosszváltozási sík helyzetét.

A (P.3.01).alakváltozási tenzorból látható, hogy síkbeli alakváltozásról van szó.

A FŐ FAJLAGOS HOSZVÁLTOZÁS

A meghatározást a (3.29). egyenlet alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = \\ &= \frac{5 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-4}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(5 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4})^2 + 10^{-4}} \\ &\quad \Downarrow \\ \boxed{\varepsilon_1 = 9,55 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}} \end{aligned} \quad (\text{P.3.02})$$

A FŐ HOSZVÁLTOZÁSI SÍK HELYZETE

A meghatározást a (3.29). egyenlet alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right) + \frac{1}{2} k\pi = \\ &= \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4}} \right) + \frac{1}{2} 0 \cdot \pi \\ &\quad \Downarrow \\ \boxed{\alpha_1 = 3,17^\circ} \end{aligned} \quad (\text{P.3.03})$$

4. A FESZÜLTSÉGEK ÉS AZ ALAKVÁLTOZÁSOK KÖZÖTTI KAPCSOLATOK

A kapcsolatok kialakítása alapját a HOOKE - törvény képezi:

$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \tau = G \cdot \gamma \end{cases} \quad (4.01)$$

Ahol a

$\sigma [Pa]$ normál feszültség

$\tau [Pa]$ tangenciális feszültség

$E [Pa]$ YOUNG-féle rugalmassági modulus

$G [Pa]$ nyíró rugalmassági modulus

$\varepsilon [/]$ fajlagos hosszváltozás (dilatáció)

$\gamma [rad]$ szögelfordulás (szögtorzulás)

A (4.01). kapcsolatokat, HOOKE és YOUNG, kísérletek alapján határozták meg. Ezek alapul szolgálnak a rugalmas testek tanulmányozásában.

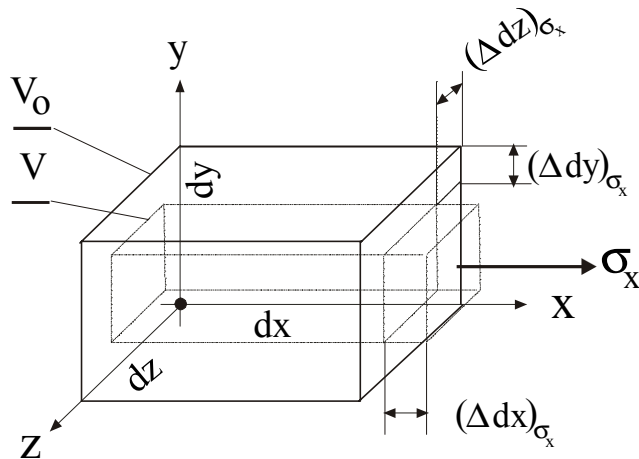
4.1. POISSON-FÉLE TÉNYEZŐ

Kísérletek alapján POISSON bebizonyította, hogy egy elemi hasáb esetében, mely oldalai hosszban megegyeznek ($dx=dy=dz$), a feszültség irányában létrejött fajlagos hosszváltozás következményeként a keresztirányokban is létrejönnek fajlagos hosszváltozások. A fajlagos hosszváltozások között lineáris összefüggés van.

Vegyünk figyelembe egy olyan esetet, amikor csak egy (x) tengelyirányban működik normál feszültség (4.01. ábra). Ekkor az elemi hasáb az (x) tengely irányba megnyúlik. A megfelelő fajlagos hosszváltozás a következő lesz:

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\Delta dx}{dx} \right)_{\sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} \quad (4.02)$$

E (x) tengelyirányú hosszváltozás miatt megváltoznak (zsugorodnak) az (y) és a (z) tengelyek irányában a hosszak. Ezeket megfelelő fajlagos hosszváltozásokkal jelöljük:



4.01. ábra

$$\begin{aligned} (\varepsilon_y)_{\sigma_x} &= \left(\frac{\Delta dy}{dy} \right)_{\sigma_x} = -\varepsilon_q \\ (\varepsilon_z)_{\sigma_x} &= \left(\frac{\Delta dz}{dz} \right)_{\sigma_x} = -\varepsilon_q \end{aligned} \quad (4.03)$$

A két utóbbi fajlagos hosszváltozás megegyezik

$$(\varepsilon_y)_{\sigma_x} = (\varepsilon_z)_{\sigma_x} = -\varepsilon_q \quad (4.04)$$

Poisson a (4.02 és 4.03). értékek között a következő kapcsolatot állapította meg:

$$\boxed{\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_x} \quad (4.05)$$

A (μ) tényezőt **POISSON** - féle **TÉNYEZŐ** -nek nevezzük (az értéke 0,2 és 0,5 között található)

4.2. AZ ÁLTALÁNOS HOOKE TÖRVÉNY

A (4.01). HOOKE – törvény, és a (4.05). POISSON - féle függvények alapján, egy tetszőlegesen kiválasztott (xyz) derékszögű koordinátarendszerben lévő (N) pontban, a következőképpen lehet meghatározni az (ε, γ) alakváltozási tényezőket a (σ, τ) feszültségi tényezők alapján:

Például az (x) tengely irányában a fajlagos hosszváltozást a következő összetevőktől függ:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \quad (4.06)$$

Hasonló módon az (y, z) tengelyek irányában is meghatározhatók a fajlagos hosszváltozások. A meghatározott értékekhez hozzácsatoljuk az (xy, yz, zx) síkokban történő szögelfordulások értékeit. Így egy lineáris egyenlet rendszert kapunk:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_x}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (4.07)$$

Ezt a rendszert mátrix egyenlet formában tüntetjük fel:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\mu \frac{1}{E} & -\mu \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\mu \frac{1}{E} & \frac{1}{E} & -\mu \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\mu \frac{1}{E} & -\mu \frac{1}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = H \cdot \vec{\sigma}} \quad (4.08)$$

A (4.08). egyenletben a (H) ténzort **HOOKE** - féle **RUGALMASÁGI TÉNZOR** -nak hívjuk.

Ha olyan igényre teszünk szert, hogy a megállapított (pl. mérések során kapott értékek használata) fajlagos hosszváltozások és a szögelfordulások alapján határozzuk meg a szilárd testben létrejött normál és tangenciális feszültségeket, akkor invertálni kell a (4.08). mátrix egyenletet:

$$\vec{\sigma} = H^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\mu) \cdot K & \mu \cdot K & \mu \cdot K & 0 & 0 & 0 \\ \mu \cdot K & (1-\mu) \cdot K & \mu \cdot K & 0 & 0 & 0 \\ \mu \cdot K & \mu \cdot K & (1-\mu) \cdot K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

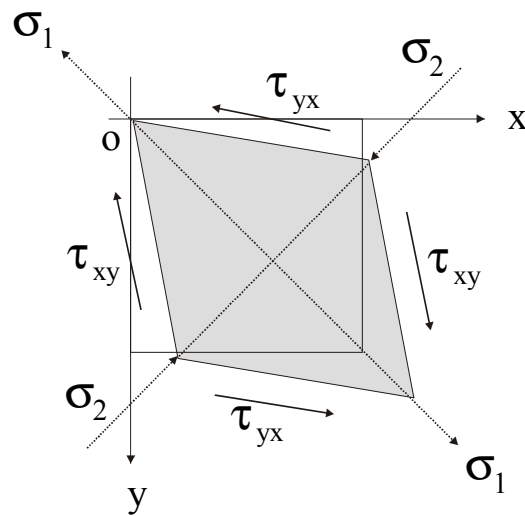
$$(4.09)$$

$$K = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

4.3. AZ (E) RUGALMASÁGI MODULUS ÉS A (G) NYÍRÓ RUGALMASÁGI MODULUS KÖZÖTTI KAPCSOLAT

Vizsgáljunk meg egy (dx, dy, dz) oldalhosszú elemi hasábot, mely síkbeli feszültségi állapotban van. Az elemi hasáb oldalain csak tangenciális feszültségek működnek (tisztá

tangenciális feszültségi állapot - 4.02. ábra).



4.02. ábra

Ennek a feszültségi állapotnak a következő (T) feszültségi tenzor felel meg:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Az állapotnak a következő ($\varepsilon_{1,2}$) fő fajlagos hosszváltozás és a ($\sigma_{1,2}$) fő feszültségek felelnek meg a (2.54 és 3.29). egyenletek alapján:

$$\varepsilon_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \pm \frac{1}{2} \gamma_{yx} = \pm \frac{1}{2} \gamma \quad (4.11)$$

Innen:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \gamma \quad (4.12)$$

A fő feszültségek értékei:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \pm \tau_{xy} = \pm \tau_{yx} = \pm \tau \\ \sigma_1 &= \tau \quad ; \quad \sigma_2 = -\tau \\ &\Downarrow \\ \sigma_1 &= -\sigma_2 = \tau \end{aligned} \quad (4.13)$$

A (4.06). egyenlet alapján, ha a kiinduló koordináta-rendszerként a fő koordináta-rendszert használjuk:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \quad (4.14)$$

Használva a (4.12 és 4.13). kapcsolatokat:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} (1 + \mu) \\ \frac{1}{2} \gamma &= \frac{\tau}{E} (1 + \mu) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Az előző egyenletbe alakmazzuk a (4.01). HOOKE törvényt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma &= \frac{G \cdot \gamma}{E} (1 + \mu) \\ &\Downarrow \\ \boxed{G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

A (4.16). egyenlet a (G) nyíró rugalmassági modulus és az (E) YOUNG rugalmassági modulus közötti kapcsolatot képezi.

4.1. PÉLDA

Egy gumi betétű mélyhúzó présszerszám (4.1. ábra) dugattyújának átmérője ($D=50 \text{ mm}$). A használt gumibetét POISSON – féle tényezője ($\mu = 0,45$). A dugattyúra gyakorlott erő ($F=4500 \text{ N}$).

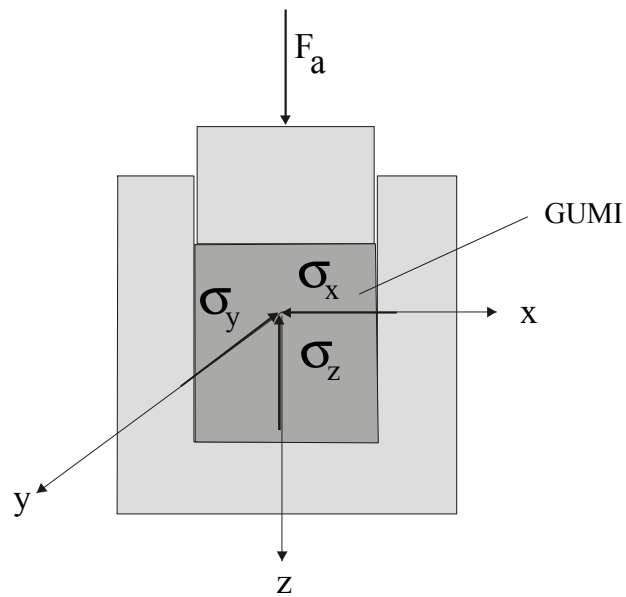
Meg kell határozni a fém persely és a gumi közötti radiális irányú (p) nyomás értékét, feltételezve, hogy a feszültség eloszlása egyenletes a radiális irányokban, a fém és a gumi között fellépő súrlódási erők nem számottevők. A perselyt merevnek tekintjük.

A (z) TENGELYÍRÁNYÚ FESZÜLTSG:

$$\sigma_z = \frac{F_a}{A} = \frac{4F_a}{D^2\pi} = \frac{4 \cdot 4500}{50^2\pi} = 2,29 \text{ MPa} \quad (\text{P.4.01})$$

Az (xy) irányokba működő feszültségek a szerszám szimmetrikus felépítése révén megegyeznek:

$$\sigma_x = \sigma_y = p_r \quad (\text{P.4.02})$$



4.1. ábra

Axiális irányba az elmozdulások nullák ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$).

RADIÁLIS NYOMÁS

A (4.08). egyenletek alapján (első egyenlet) meghatározzuk a radiális nyomás értékét.

$$0 = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} = p_r (1 - \mu) - \mu \sigma_z$$

$$\Downarrow$$

$$p_r = \frac{\mu \sigma_z}{1 - \mu} = \frac{0.45 \cdot 2.29}{1 - 0.45}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p_r = 1,87 \text{ MPa}}$$

(P.4.03)

5. A RÚD IGÉNYBEVÉTELEI

A szerkezetek elemei zöme úgy van kiépítve, hogy a méretek egyike (hossza) lényegesen nagyobb a keresztmetszet méreteitől (szélesség, magasság). Ilyen prizmatikus elemeket **RÚD**-aknak nevezzük.

A rudakhoz kötődnek a következő mértani jellemzők:

- NORMÁLMETSZET

Így nevezzük a hossztengetyre merőleges valamennyi keresztmetszetet.

- GEOMETRIAI TENGELY

A normálmetszet súlypontjait összekötő vonal képezi a geometriai tengelyt alakját. A geometriai tengely alakja és térbeli elhelyezése függvényében a rudakat a következő csoportokra lehet felosztani:

- *egyenes tengelyű rudak*
- *síkgörbe rudak*
- *tört tengelyű rudak*
- *térgörbe rudak*

- IGÉNYBEVÉTEL

A rúd egy tetszőlegesen kiválasztott normálmetszetén ható külső erők eredőjét hívjuk igénybevételnek. Az eljárás során a külsőerőket a normálmetszet súlypontjára redukáljuk mint egy vektorpárt (főerő, főnyomaték).

- TERHELÉSI SÍKOK

A külső terhelő erőrendszert redukálni lehet két egymásra merőleges síkra, melyek metszővonala megegyezik a geometriai tengellyel. A terhelési síkokat célszerű úgy választani, hogy az egyik, a normálmetszetben fekvő síkidom szimmetriasíkja legyen. Így a terhelési síkok és a normálmetszet metszővonalai a *fő súlyponti tengelyeket* képezik.

- SEMLEGES SÍK

A geometriai tengelyt tartalmazó síkhalmaz egyike, mely a terhelési rendszer következményeként nem szenved alakváltozást.

- SEMLEGES TENGELY

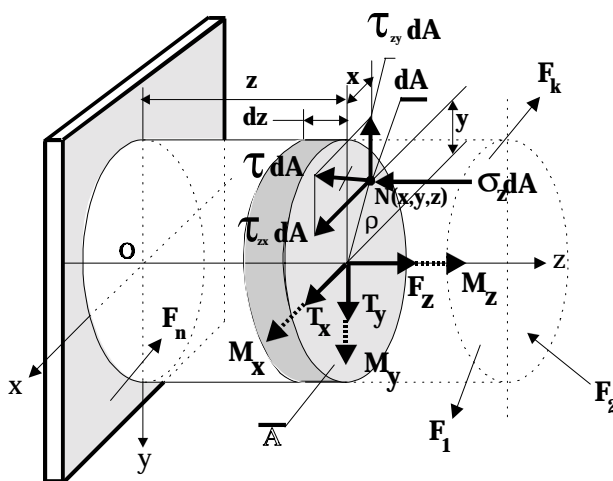
A semleges síkban fekvő vonalak halmazának egyike. A továbbiakban be lesz bizonyítva, hogy kivéve a síkgörbe rudak esetében, a semleges tengely megegyezik a geometriai tengellyel.

- ÁLTALÁNOS IGÉNYBEVÉTEL

Válaszunk ki egy rudat (5.01. ábra), mely az egyik végén befogott (tartó - konzol).

A rudat megterheljük egy általános erőrendszerrel:

$$[\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n, \vec{F}_{n+1}, \dots, \vec{F}_k] \quad (5.01)$$



5.01. ábra

A kötésreakciók és az (5.01). erőrendszer, egyensúlyi erőrendszert képez.

Felveszünk egy (xyz) derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy annak a (z) tengelye megegyezzen a rúd geometriai tengelyével. Az (y) tengelyt úgy választjuk ki, hogy az egyben a normálmetszet síkidomának főtengele legyen. Mivel a (z) tengely megegyezik a geometriai tengellyel (a síkidom súlypontján halad át), úgy az (xy) *síkidom koordináta rendszere fő súlyponti koordinátarendszer*.

Gondolatban (z) távolságon a befogástól létrehozunk egy normálmetszetet mely egy (A) síkidomot képez. Az (A) metszettől jobbra fekvő rúdrészt eltávolítjuk, a ráeső

$$[\vec{F}_{n+1}, \dots, \vec{F}_k] \quad (5.02)$$

terhelő erőrendszer részével együtt, és annak hatását a síkidom súlypontjára redukáljuk, mint egy vektorpárt (főerő, főnyomaték):

$$\sum_{i=n+1}^k \vec{F}_i = \vec{F}_R + \vec{M}_R \quad (5.03)$$

A (5.03). vektorokat felbontjuk az (xyz) tengelyek irányába fekvő összetevőkre:

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \vec{T}_x + \vec{T}_y + \vec{T}_z \\ \vec{M}_R &= \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z \end{aligned} \quad (5.04)$$

A normálmetszet síkidomának valamennyi (N) pontjának (dA) elemi felületén létrejön egy feszültségi vektor, mely összetevői az (xyz) tengelyek irányában a következők:

$$\vec{p} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \vec{\sigma}_z + \vec{\tau}_{zx} + \vec{\tau}_{zy} \quad (5.05)$$

A (5.05). összetevők a (dA) elemi felületen elemi erőket hoznak létre:

$$d\vec{F} = \vec{\sigma}_z dA + \vec{\tau}_{zx} dA + \vec{\tau}_{zy} dA \quad (5.06)$$

A (5.01). ábrán csak (5.04, 5.05, 5.06). összetevők vannak feltüntetve. Mivel ezek egyensúlyi rendszert képeznek, le lehet írni a következő általános egyensúlyi egyenleteket:

$$\sum X_i = 0 = T_x + \int_A \tau_{zx} \cdot dA \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 = T_y - \int_A \tau_{zy} \cdot dA \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0 = F_z - \int_A \sigma_z \cdot dA \quad (3) \quad (5.07)$$

$$\sum M_{xi} = 0 = M_x + \int_A y \cdot \sigma_z \cdot dA \quad (4)$$

$$\sum M_{xi} = 0 = M_x - \int_A y \cdot \sigma_z \cdot dA \quad (5)$$

$$\sum M_{zi} = 0 = M_z + \int_A \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \tau \cdot dA \quad (6)$$

A szilárdságtan feladatja, ahogy az a bevezető részben fel volt tüntetve, a méretezés és az ellenőrzés. Ez annyit jelent, hogy meg kell vizsgálni a főfeszültség, a fő fajlagos méretváltozás, a terhelő erőrendszer, és a síkidom jellemzői közötti kapcsolatokat:

$$f[\sigma_1, \varepsilon_1, F_{\{(n+1)-k\}}, J] = 0 \quad (5.08)$$

E kapcsolatok alapján meg lehet határozni az elmozdulásokat, és az anyag minősége függvényében a síkidom méreteit.

- SAINT- VENANT FÉLE ELJÁRÁS

A (5.08). kapcsolatok meghatározását egy olyan elméleti eljárás sorozattal kell megoldani, melyek a gyakorlatban elfogathatóan egyszerűek. Az egyszerűsítés, kisebb-nagyobb mértékű absztrakcióval jár. Az absztrakciókkal lehetővé kell tenni az eljárások hasznavehetőségét és egyidejűleg azok megbízhatóságát.

A feszültségi állapotok, és az alakváltozások tanulmányozása alkalmával, a CAUCHY és a HOOKE- féle elméleti eljárások alapján (2.20. 3.18. 4.09.-egyenletek) meghatároztuk egy (N) pontban lévő külső és belső feszültségek, az alakváltozások és az elmozdulások közötti kapcsolatokat. E kapcsolatokat egy (\vec{n}) normálvektor esetében kilenc differenciál egyenlettel leírhatók le.

E rendszernek az explicit megoldása matematikailag igen bonyolult lehet. E tény miatt ki vannak fejlesztve bizonyos módszerek, melyek némi absztrakciók mellett, kísérletekkel is bebizonyított, megbízható eredményeket nyújtanak a gyakorlat számára.

A megoldások egyik módszerét SAINT-VENANT javasolta. A módszer alapul szolgál a rudak igénybevételének tanulmányozásában, és mint **SAIN-VENANT** –féle (szemiszimmetrikus) **MÓDSZER** -nek nevezzük. Az eljárás használatosságát kísérletek igazolják.

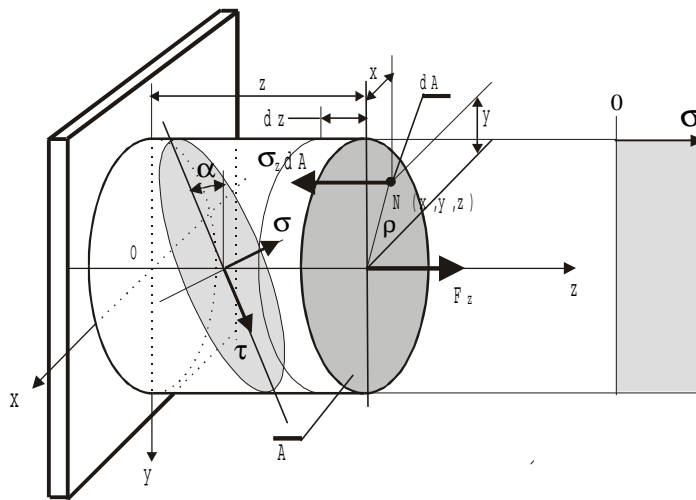
A módszer igénybe veszi a következő absztrakciókat:

- a. Feltételezi, hogy egy vagy több feszültség értéke nulla (így a CAUCHY – féle differenciál egyenletek megoldásakor igényelt határértékek könnyen meghatározhatók). Ezzel bevezetődnek az alap igénybevételek (húzás - nyomás, nyírás, hajlítás, csavarás), és az összetett igénybevételek (nyomás - hajlítás, hajlítás - csavarás,...).
- b. Alkalmazza a JACOB BERNOULLI - féle tartómodellt, mely feltételezi, hogy a differenciálisan közellévő normálmetszetek egy olyan rúdelemet alkotnak, mely az alakváltozások során csak a terhelés irányába szenved alakváltozásokat. Ez az absztrakció igen fontos, mivel ütközik a POISSON - féle elmélettel.
- c. Feltételezi, hogy egy összpontosított külsőerőből eredő belsőfeszültség eloszlása, egy normálmetszetben egyenletes. Ez az egyenletesség jó megegyezik a valósággal, ha az erő hatáspontja és a normálmetszet közötti távolság viszonylag nagy.

5.1. EGYENES TENGELYŰ RUDAK IGÉNYBEVÉTELE

5.1.1. HÚZÓ ÉS NYOMÓ IGÉNYBEVÉTEL

Így nevezzük azt az általános igénybevételi esetet, amikor az (5.04). összetevők közül csak az (\vec{F}_z) hat (5.02. ábra).



5.02. ábra

Az egyensúlyi állapot az (5.07-3). egyenletnek felel meg:

$$\sum Z_i = 0 = -F_z + \int_A \sigma_z \cdot dA \quad (5.09)$$

Feltételezzük, hogy az aktív erő elég távol hat az (A) normálmetszettben lévő síkidom súlypontjától. Ekkor az erőtér és a megfelelő feszültségi tér homogén, vagyis a feszültség eloszlása a síkidomon egyenletes.

$$\sigma_z \neq f(z) = \frac{F_z}{A} = \text{const.} \quad (5.10)$$

Ez az állapot megfelel a lineáris feszültségi állapotnak, illetve a lineáris alakváltozási állapotnak, azzal hogy a (z) irányt vesszük igénybe (5.02. ábra).

A feszültségvektor formája:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \alpha_z \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Az alakváltozási vektor formája:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \alpha_z \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

A számításoknál mérvadó főfeszültségek és a fő fajlagos hosszváltozások a következők:

A főfeszültség értékét a (2.64 és 5.10). egyenletek alapján határozzuk meg:

$$\sigma_1 = \sigma_z = \frac{F_z}{A} \quad (5.13)$$

Az (5.13). egyenlet a síkidom felület és a belső feszültség közötti kapcsolatot képezi.

Lineáris feszültségi állapot révén a fő fajlagos hosszváltozás értékét a (3.32). egyenlet alapján határozzuk meg. A számítás során ($z \equiv x$):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_z \quad (5.14)$$

Az alakváltozási vektor a (z) tengely irányában, a (5.12). egyenlet alapján:

$$f_z = \varepsilon_z \cdot \cos \alpha_z \quad (5.15)$$

Lineáris feszültségi állapot révén, a (2.65, 3.32). kapcsolatok szerint, a főfeszültségi és a fő hosszváltozási síkok egybeesnek, a megfelelő normálvektor iránya pedig egyben a főtengely iránya is:

$$\alpha_1 = 0 \quad (5.16)$$

ez esetben a (5.15). egyenlet formája:

$$f_z = \varepsilon_z \quad (5.17)$$

A (3.07). egyenlet alapján, ($l=z$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\Delta dz}{dz} \\ \Downarrow \\ \Delta dz &= \varepsilon_z \cdot dz \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ha elvégezzük a megfelelő integrációkat:

$$\int_0^z \Delta dz = \int_0^z \varepsilon_z \cdot dz$$

a (z) irányú hosszváltozást kapjuk:

$$\boxed{\Delta z = \varepsilon_z \cdot z} \quad (5.19)$$

A HOOKE törvény szerint:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z \quad (5.20)$$

Az (5.13, 5.19). egyenletek jobb oldalait be helyettesítjük az (5.20). egyenletbe:

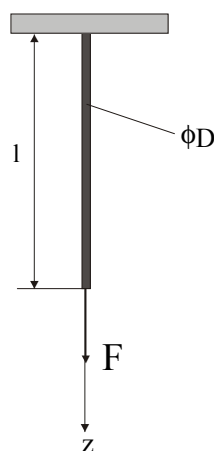
$$\frac{F_z}{A} = E \frac{\Delta z}{z}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta z = \frac{F_z \cdot z}{E \cdot A}} \quad (5.21)$$

Az (5.21). egyenlet a (F_z) terhelőrendszer, a (A) síkidom tényező, a (z) rúd hossza, az (E) rugalmassági modulus, és a (Δz) megfelelő hosszváltozás közötti kapcsolatot ábrázolja.

5.1. PÉLDA



5.1.1.1. ábra

Az (5.1.1.1.) ábrán vázolt rúd hossza ($l=4000 \text{ mm}$), a rúd átmérője ($D=20 \text{ mm}$). Az axiális megterhelés ($F=500 \text{ kN}$). A használt anyag ($\alpha=0,245$), melynek megfelel a ($\sigma_s = 400 \text{ MPa}$) szakítószilárdság, ($E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$) YOUNG féle modulus, és a ($\mu = 0,3$) POISSON féle tényező.

Meg kell határozni a:

- σ_1 - működő főfeszültséget
- Δz - hosszváltozást
- Δq - keresztirányú hosszváltozást

A FŐFESZÜLTSEG

A meghatározást az (5.13). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\sigma_1 = \sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{F \cdot 4}{D^2 \cdot \pi} = \frac{500.000 \cdot 4}{20^2 \cdot \pi}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma_1 = 159,23 \text{ MPa}}$$

(P.5.01)

A FAJLAGOS HOSSZVÁLTOZÁS

A meghatározást az (5.20). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{159,23}{2 \cdot 10^5}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_z = 7,96 \cdot 10^{-4}}$$

(P.5.02)

A FAJLAGOS KERESZTIRÁNYÚ HOSSZVÁLTOZÁS

A meghatározást az (4.05). kapcsolat alapján végezzük el. A számítás során ($q \equiv D$).

$$\varepsilon_D = -\mu \cdot \varepsilon_z = -0,3 \cdot 7,96 \cdot 10^{-4}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_D = -2,39 \cdot 10^{-4}}$$

(P.5.03)

ÖSSZ HOSSZVÁLTOZÁS

A meghatározást az (5.19). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\Delta z = \varepsilon_z \cdot z = 7,96 \cdot 10^{-4} \cdot 4000$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta z = 3,18 \text{ mm}}$$

(P.5.04)

ÖSSZ KERESZTIRÁNYÚ HOSSZVÁLTOZÁS

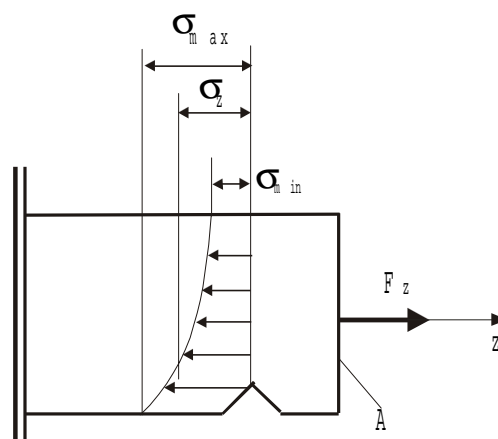
A meghatározást az (5.19). kapcsolat alapján végezzük el. A számítás során ($q \equiv D$, $z \equiv D$).

$$\Delta D = \varepsilon_{Dq} \cdot D = -2,39 \cdot 10^{-4} \cdot 20$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta D = -47,8 \cdot 10^{-4} \text{ mm}}$$

(P.5.05)

5.1.1.1. FESZÜLTSÉG ÖSSZPONTOSULÁS

5.03. ábra

Abban az esetben, ha a külső (F_z) erő hatáspontja közel áll a normálmetszet síkidomának a súlypontjához, vagy ha a rúd normálmetszete törésszerűen megváltozik (pl. Széger - féle gyűrű ágyazásánál, keresztfűrésznél,...), az erőtér és a feszültségtér *NEM HOMOGÉN*. Ilyen esetben a feszültség intenzitás meghatározása két extrémális érték között mozog (**5.03.** ábra):

$$\sigma_{z \min} \leq \sigma_z \leq \sigma_{z \max} \quad (5.22)$$

Gyakorlati szempontból, csak a maximális érték fontos:

$$\boxed{\sigma_{z \max} = K \cdot \sigma_z} \quad (5.23)$$

A (K)- **FESZÜLTSEGI ÖSSZPONTOSULÁSI TÉNYEZŐ** értéke kísérletek alapján van meghatározva. Az esetenkénti értékek megfelelő műszaki táblázatokban találhatók.

5.1.1.2. ÉRINTKEZÉSI (HERTZ-FÉLE) FESZÜLTség

Ha két görbe felületű szilárd testet külső (F) erővel összeszorítunk, azok az (N) érintkezőpont környékén alakváltozásokat hoznak létre.

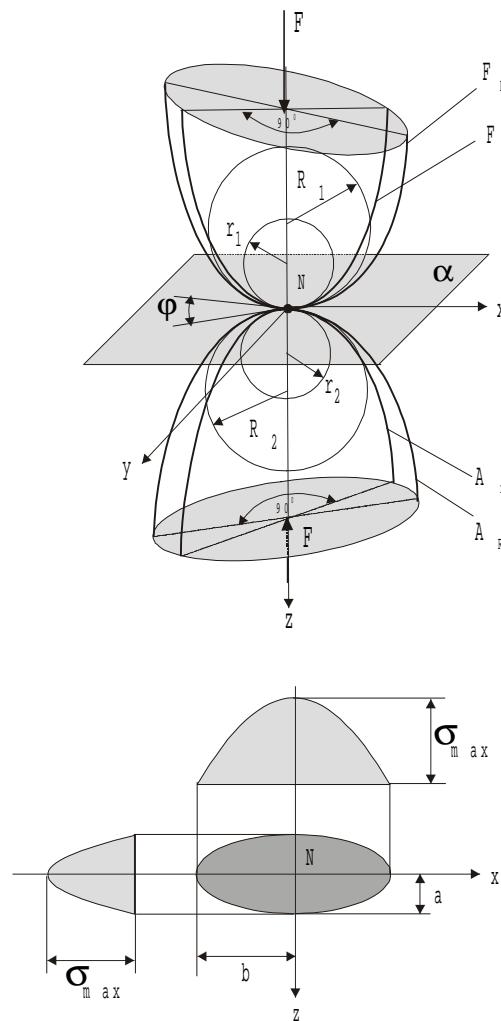
Mivel az alakváltozást (kisméretű érintkezési felület) a szilárd testek méreteihez képest eleminek tekinthetjük, a létrejött feszültségek aránylag nagyok, eloszlásuk pedig nem egyenletes. A feszültség maximális értékét **HERTZ - féle FESZÜLTség** -nek nevezzük.

Az (**5.04.** ábrán egy általános érintkezési állapot látható. A két érintkező test anyagainak tulajdonságait az (E_1, E_2, μ_1, μ_2) tényezők képezik. A felső (F) test az (N) pontban érintkezik a (A) alsó testtel, és (F) erővel vannak összeszorítva. A két testet külön-külön átmetszünk két metszősíkkal, melyeknek közös metszővonalukat az (xyz) derékszögű koordináta-rendszer (z) tengelye képezi.

Meghatározzuk az (F_R, F_r, A_R, A_r) **főmetszeteket**, melyeknek az a tulajdonságuk, hogy az (N) érintkező pontban lévő sugarai (R_1, R_2) maximális, illetve (r_1, r_2) minimális értékeket vesznek fel. A főmetszetek egymás között merőlegesek. A testek megfelelő főmetszetei (φ) szöget képeznek.

A görbületi sugarak (R_1, R_2, r_1, r_2) görbületeit **főgörbületek** -nek nevezzük:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{R_1} \quad ; \quad g_1 = \frac{1}{r_1} \\ G_2 &= \frac{1}{R_2} \quad ; \quad g_2 = \frac{1}{r_2} \end{aligned} \quad (5.24)$$



5.04. ábra

Az érintkezési felület megközelítőleg egy (a, b) féltengelyű ellipszisnek felel meg.

HERTZ szerint, a maximális érintkezési feszültség értéke:

$$\sigma_{\max} = 1.5 \frac{F}{a \cdot b \cdot \pi} \quad (5.25)$$

Az ellipszis féltengelyei:

$$\begin{aligned} a &= n_a \sqrt[3]{1.5 \frac{\eta}{\sum g}} \\ b &= n_b \sqrt[3]{1.5 \frac{\eta}{\sum g}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

ahol az:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \\ \sum g &= (G_1 + g_1) + (G_2 + g_2) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Az (n_a, n_b) paramétereket a további eljárás során táblázatból fogjuk meghatározni, a (μ_1, μ_2) értékek pedig a Poisson féle tényezők.

Helyettesítjük be az (5.26). értékeket a (5.25). egyenletbe:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{n_a n_b} \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{1.5 F \left(\frac{\sum g}{\eta} \right)^2} \quad (5.28)$$

A HERTZ - féle FESZÜLTSEGI egyenlet használati formában a következő:

$$\sigma_{\max} = \frac{B}{n_a n_b} \quad ; \quad B = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{1.5 F \left(\frac{\sum g}{\eta} \right)^2} \quad (5.29)$$

Az alakváltozás révén létrejött elmozdulás a (z) tengely irányában (***a testek közeledése***) a következő érték:

$$\varepsilon = n_e \cdot C \quad ; \quad C = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(1.5 F \cdot \eta)^2 \sum g} \quad (5.30)$$

Az (n_a, n_b, n_e) tényezők műszaki táblázatokban találhatók, mint a (ψ) paraméter függvénye:

$$\psi = \frac{1}{\sum g} \sqrt{(G_1 - g_1)^2 + (G_2 - g_2)^2 + 2(G_1 - g_1)(G_2 - g_2)\cos 2\varphi} \quad (5.31)$$

Az (5.29, 5.30). egyenletek egyszerűbbek lesznek, ha az érintkező testek megszokott kivitelezési formákat vesznek fel:

- GÖMB + GÖMB

$$\begin{aligned} R_1 = r_1 &\Rightarrow G_1 = g_1 \\ R_2 = r_2 &\Rightarrow G_2 = g_2 \end{aligned} \quad (5.32)$$

- GÖMB + SÍK

$$\begin{aligned} R_1 = r_1 &\Rightarrow G_1 = g_1 \\ R_2 = \infty ; r_2 = \infty &\Rightarrow G_2 = g_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

- HENGER + HENGER

$$\begin{aligned} r_1 = \infty &\Rightarrow g_1 = 0 \\ r_2 = \infty &\Rightarrow g_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

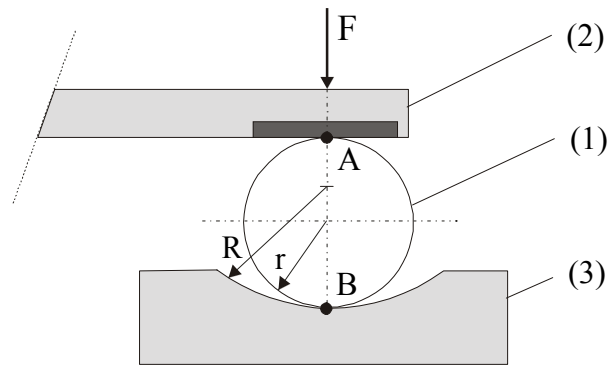
- HENGER + SÍK

$$\begin{aligned} r_1 = \infty &\Rightarrow g_1 = 0 \\ R_2 = \infty ; r_2 = \infty &\Rightarrow G_2 = 0 ; g_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

5.2. PÉLDA

Az (5.1.1.2.). ábrán egy gördülő támasz keresztmetszete látható. A feltüntetett rádiuszok értékei ($R=100 \text{ mm}$, $r=50 \text{ mm}$). A támaszt ($F=10 \text{ kN}$) erő terheli. A golyó, valamint a támasz többi részeire az ($E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$) anyagminőségi értékek jellemzők.

Meg kell határozni az (A, B) pontokban keletkező HERTZ – féle feszültségeket, valamint a megfelelő alakváltozásokat.



5.1.1.2. ábra

A FŐGÖRBÜLETI SUGARAK ÉS FŐGÖRBÜLETEK

A meghatározást az (5.24). kapcsolat alapján végezzük el.

- A golyóra számított értékek:

$$R_1 = r_1 = 50 \text{ mm} \Rightarrow G_1 = g_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{50} = 0,02 \frac{1}{\text{mm}} \quad (\text{P.5.06})$$

- A felső támaszra számított értékek:

$$R_2 = r_2 = \infty \text{ mm} \Rightarrow G_2 = g_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\infty} = 0,0 \frac{1}{\text{mm}} \quad (\text{P.5.07})$$

- A alsó támaszra számított értékek:

$$R_3 = r_3 = -100 \text{ mm} \Rightarrow G_3 = g_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{-100} = -0,01 \frac{1}{\text{mm}} \quad (\text{P.5.08})$$

A GÖRBÜLETEK ÖSSZEGE

A meghatározást az (5.27). kapcsolat alapján végezzük el.

- Az (A) pontra számítva:

$$\sum_{(1)(2)} g = G_1 + g_1 + G_2 + g_2 = 0,02 + 0,02 + 0 + 0 = 0,04 \frac{1}{\text{mm}} \quad (\text{P.5.09})$$

- A (**B**) pontra számítva:

$$\sum_{(1)(3)} g = G_1 + g_1 + G_3 + g_3 = 0,02 + 0,02 - 0,01 - 0,01 = 0,02 \frac{1}{mm} \quad (P.5.10)$$

A (ψ) PARAMÉTEREK

A meghatározást az (5.31). kapcsolat alapján végezzük el.

- Az (**A**) pontra számítva:

$$\psi_{(A)} = \frac{1}{\sum_{(1)(2)} g} \sqrt{(G_1 - g_1)^2 + (G_2 - g_2)^2} = \frac{1}{0,04} \sqrt{(0,02 - 0,02)^2 + (0 - 0)^2} = 0 \quad (P.5.11)$$

- A (**B**) pontra számítva:

$$\psi_{(B)} = \frac{1}{\sum_{(1)(3)} g} \sqrt{(G_1 - g_1)^2 + (G_3 - g_3)^2} = \frac{1}{0,04} \sqrt{(0,02 - 0,02)^2 + (-0,01 + 0,01)^2} = 0 \quad (P.5.12)$$

A (n_a, n_b) PARAMÉTEREK

A meghatározást műszaki táblázatokból határozzuk meg ($\psi = 0 \Rightarrow n_a = n_b = 1$; $n_e = 1$):

Eszerint:

$$\frac{1}{n_a \cdot n_b} = 1$$

A (η) PARAMÉTER

A meghatározást az (5.27). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\eta = \frac{1 - \eta_1^2}{E_1} + \frac{1 - \eta_2^2}{E_2} = 2 \frac{1 - 0,3^2}{2,1 \cdot 10^5} = 8,6 \cdot 10^{-6} \frac{1}{MPa} \quad (P.5.13)$$

A HERTZ – FÉLE FESZÜLTSÉGEK

A meghatározást az (5.29). kapcsolat alapján végezzük el.

- Az (A) pontra számítva:

$$\sigma_{A \max} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{1,5 \cdot F \left(\frac{\sum g_{(1)(2)}}{\eta} \right)^2} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{1,5 \cdot 10000 \left(\frac{0,04}{8,6 \cdot 10^{-6}} \right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma_{A \max} = 2188 \text{ MPa}} \quad (\text{P.5.14})$$

- A (B) pontra számítva:

$$\sigma_{B \max} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{1,5 \cdot F \left(\frac{\sum g_{(1)(3)}}{\eta} \right)^2} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{1,5 \cdot 10000 \left(\frac{0,02}{8,6 \cdot 10^{-6}} \right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma_{B \max} = 1378 \text{ MPa}} \quad (\text{P.5.15})$$

A TÁMASZOK KÖZELEDÉSE

A meghatározást az (5.30). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon &= \varepsilon_{(1)(2)} + \varepsilon_{(1)(3)} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(1,5 \cdot F \cdot \eta)^2 \sum g_{(1)(2)}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{(1,5 \cdot F \cdot \eta)^2 \sum g_{(1)(3)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{(1,5 \cdot 10000 \cdot 8,6 \cdot 10^{-6})^2 \sum 0,04} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{(1,5 \cdot 10000 \cdot 8,6 \cdot 10^{-6})^2 \sum 0,02} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

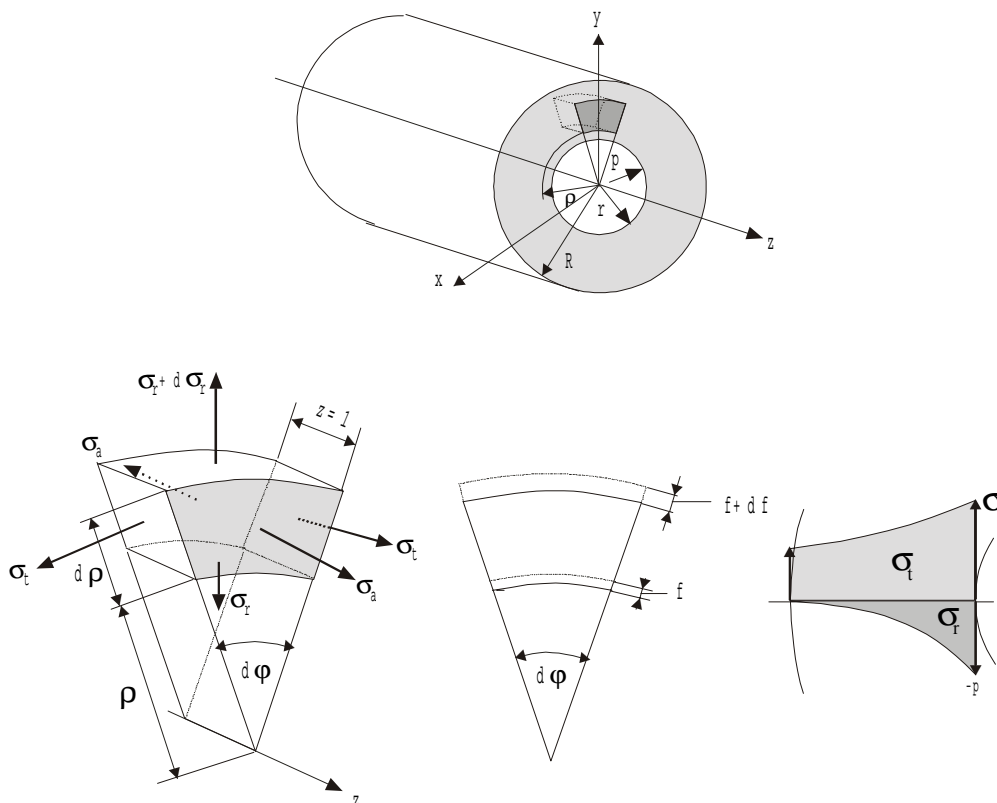
$$\boxed{\sum \varepsilon = 0,15 \text{ mm}} \quad (\text{P.5.16})$$

5.1.1.3. CSÖVEK ÉS TARTÁLYOK

A csöveket és a tartályokat a rudak különlegesen kiépített változatának tekintjük. Ezek az általános (5.04). igénybevétel mellett, belső nyomásból eredő megterhelésekre is kivannak téve, melyek az anyagban térbeli feszültségeket hoznak létre. Ezek a (egy ρ - központi távolságban lévő) feszültségek, az edény (S) vastagságától, valamint az edény (r) belső, és (R) külső rádiuszaitól függenek.

Ha az edény belső és külső falán fellépő főfeszültségek különbsége meghaladja a ($g = 5\%$) – ot, **VASTAG FALÚ EDÉNYEK** -ről van szó (leginkább csövek) Ha az említett különbség kisebb, akkor az így kiépített edényeket **VÉKONY FALÚ EDÉNYEK** -nek nevezzük (csövek és tartályok zöme).

- VASTAG FALÚ CSÖVEK



5.05. ábra

Vágjunk ki a cső falából (5.05. ábra) egy elemi hasábot, melyet egy ($d\phi$) központi szög határol, a központtól (ρ) távolságban helyezkedik el, vastagsága pedig ($d\rho$). A hossza tetszőleges, de célszerű egységre választani ($z=1$). A csőhöz egy (xyz) derékszögű koordinátarendszer kötődik, az elemi hasáb pedig radiálisan szimmetrikus.

A cső belsejében (p) nyomás, vagy vákuum hat, melynek következményeként az elemi hasáb oldallapjain az ábrán megjelölt feszültségek jönnek létre. Az iránytól függően, ezek a következők:

- σ_t - érintőirányú normálfeszültség
- σ_a - axiális (tengelyirányú) normálfeszültség.
- σ_r - radiális (sugárirányú) normálfeszültség

A (ρ) sugártávolságnak megfelel a (σ_r) normálfeszültség, a $(\rho + d\rho)$ sugártávolságnak pedig a $(\sigma_r + d\sigma_r)$ normálfeszültség jellemző.

Differenciális szögértékek révén, a következő kapcsolatok érvényesek:

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} \quad ; \quad \sin d\varphi \approx d\varphi \quad (5.36)$$

Mivel az elemi hasáb egyensúlyi állapotban van, felírhatjuk az egyensúlyi egyenleteket a radiális irányra.

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(\rho + d\rho)d\varphi \cdot z - \sigma_r \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot z - \sigma_t \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot z = 0 \quad (5.37)$$

Az (5.37). egyenletet végig elosztjuk $(d\rho \cdot d\varphi \cdot z)$ -el:

$$\frac{(\sigma_r + d\sigma_r)(\rho + d\rho) - \sigma_t}{d\rho} - \sigma_t = 0 \quad (5.38)$$

vagyis,

$$\frac{d}{d\rho}(\sigma_r \cdot \rho) - \sigma_t = 0 \quad (5.39)$$

Az (5.39). forma a **VASTAG FALÚ CSŐ DIFFERENCIÁLEGYENLET** -e.

Ez a differenciálegyenlet két ismeretlent (σ_r, σ_t) tartalmaz, és ilyen formában nem lehet egyértelműen megoldani. A megoldás lehető, ha felalítunk egy pótegyenletet az ismert alakváltozásokból kiindulva.

Ha feltételezzük, hogy a sugárirányú elmozdulások $(f, f + df)$, akkor a fajlagos alakváltozások a sugárirányban és az érintő irányában:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{(f + df) - f}{d\rho} = \frac{df}{d\rho} \\ \varepsilon_t &= \frac{2(\rho + f)\pi - 2\rho\pi}{2\rho\pi} = \frac{f}{\rho} \end{aligned} \quad (5.40)$$

A POISSON féle elmélet szerint, a sugárirányú és az érintő irányú fajlagos hosszváltozások között a következő kapcsolatot lehet meghatározni (4.06. egyenlet alapján)

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_t}{E} \\ \varepsilon_t &= \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E}\end{aligned}\tag{5.41}$$

Az (5.40, 5.41). egyenletek megfelelő oldalai egyenlők, így:

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\rho} &= \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_t}{E} \\ \frac{f}{\rho} &= \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E}\end{aligned}\tag{5.42}$$

Az utóbbi rendszerből kifejezzük a feszültségeket:

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{f}{\rho} + \eta \frac{df}{d\rho} \right) \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{df}{d\rho} + \eta \frac{f}{\rho} \right)\end{aligned}\tag{5.43}$$

A feszültségeket be helyettesítjük a (5.39). vastag falú cső differenciálegyenletébe, és a következőképpen rendezzük el:

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{df}{d\rho} - \frac{f}{\rho^2} = 0\tag{5.44}$$

Az utóbbi differenciálegyenletnek általános megoldása :

$$f = C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \Rightarrow \frac{df}{d\rho} = C_1 - \frac{C_2}{\rho^2}\tag{5.45}$$

Az (5.45). egyenleteket be helyettesítjük a (5.43). egyenletekbe:

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1+\mu) + \frac{C_2}{\rho^2} (1-\mu) \right] \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1+\mu) - \frac{C_2}{\rho^2} (1-\mu) \right]\end{aligned}\tag{5.46}$$

A (C_1, C_2) . integrációs állandókat a következő peremfeltételekből határozzuk meg:

$$\begin{aligned}\rho = r &\Rightarrow \sigma_r = -p \\ \rho = R &\Rightarrow \sigma_r = 0\end{aligned}\tag{5.47}$$

Az (5.47). határértékek alapján, az (5.46). egyenletekből meghatározzuk a (C_1 , C_2). értékeit:

$$\begin{aligned} C_1 &= p \frac{1-\mu}{E} \frac{r^2}{R^2-r^2} \\ C_2 &= p \frac{1+\mu}{E} \frac{R^2 r^2}{R^2-r^2} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Az (5.48). értékeket használva az (5.47). egyenletből a feszültségek a következők:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= p \frac{r^2}{R^2-r^2} \frac{\rho^2+R^2}{\rho^2} \\ \sigma_r &= p \frac{r^2}{R^2-r^2} \frac{\rho^2-R^2}{\rho^2} \end{aligned} \quad (5.49)$$

A cső belső falának a következő értékek felelnek meg:

$$\rho = r \Rightarrow \sigma_t = p \frac{R^2+r^2}{R^2-r^2} \quad ; \quad \sigma_r = -p \quad (5.50)$$

A cső külső falának pedig a következő értékek jellemzők:

$$\rho = R \Rightarrow \sigma_t = p \frac{2r^2}{R^2-r^2} \quad ; \quad \sigma_r = 0 \quad (5.51)$$

Az axiális feszültséget a húzó-igénybevételből kapjuk (5.13. kapcsolat). A számítások során ($z \equiv a$):

$$\sigma_a = \frac{p \cdot r^2 \cdot \pi}{(R^2-r^2) \cdot \pi} = p \cdot \frac{r^2}{R^2-r^2} \quad (5.52)$$

A feszültségek nagyobbak a cső belső falán. Ezeket nagyságrendben állítjuk fel (a kiszámított feszültségek egyben főfeszültségek is) úgy, hogy a cső átmérőit használjuk ($d=2r$, $D=2R$):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_t = p \frac{D^2+d^2}{D^2-d^2} \\ \sigma_2 &= \sigma_a = p \frac{d^2}{D^2-d^2} \\ \sigma_3 &= -p \end{aligned} \quad (5.53)$$

Vezessük be a következő tényezőt: :

$$g = \frac{\sigma_{t \max} - \sigma_{t \min}}{\sigma_{t \max}} \cdot 100 \quad \%$$

↓

$$\boxed{g = \frac{D^2 - d^2}{D^2 + d^2} \cdot 100 \quad \%} \quad (5.54)$$

A (g) tényező értéke alapján különböztetjük meg a csöveket:

- *VASTAG FALÚ CSÖVEK*..... $g \geq 5\%$

- *VÉKONY FALÚ CSÖVEK*..... $g \leq 5\%$

5.3. PÉLDA

A csövet, mely külső átmérője ($D=60 \text{ mm}$) és a belső átmérője ($d=30 \text{ mm}$), ($p=100 \text{ MPa}$). belső nyomás terheli.

Meg kell határozni a cső anyagának megengedett húzófeszültségét.

A CSŐ JELLEME MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást az (5.54). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$g = \frac{D^2 - d^2}{D^2 + d^2} = \frac{60^2 - 30^2}{60^2 + 30^2} \cdot 100 = 60 \quad \% \quad (\text{P.5.17})$$

Mivel ($g > 5 \%$) – nál, vastag falú csőről van szó.

A FŐFESZÜLTÉG MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást az (5.53). kapcsolatok alapján végezzük el.

$$\sigma_1 = p \cdot \frac{D^2 + d^2}{D^2 - d^2} = 100 \cdot \frac{60^2 + 30^2}{60^2 - 30^2} = 116,66 \text{ MPa} \quad (\text{P.5.18})$$

A főfeszültség értéke nem szabad, hogy meghaladja a cső anyagának megengedett húzófeszültségét:

$$\sigma_D \geq \sigma_1 = 166,66 \text{ MPa}$$

- VÉKONY FALÚ CSÖVEK

A vékonyfalu csövek feszültségi állapotát az (5.53). egyenletekből határozzuk meg úgy, hogy az ($R=r+S$, $D=2R$, $d=2r$) kapcsolatokat használjuk. Mivel az (S) falvastagság a sugarakhoz képest kis érték, úgy az (S^2). értéket figyelem kívül lehet hagyni. Ekkor:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_t = p \frac{d}{2S} \\ \sigma_2 &= \sigma_a = p \frac{d}{4S} \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -p \end{aligned} \quad (5.55)$$

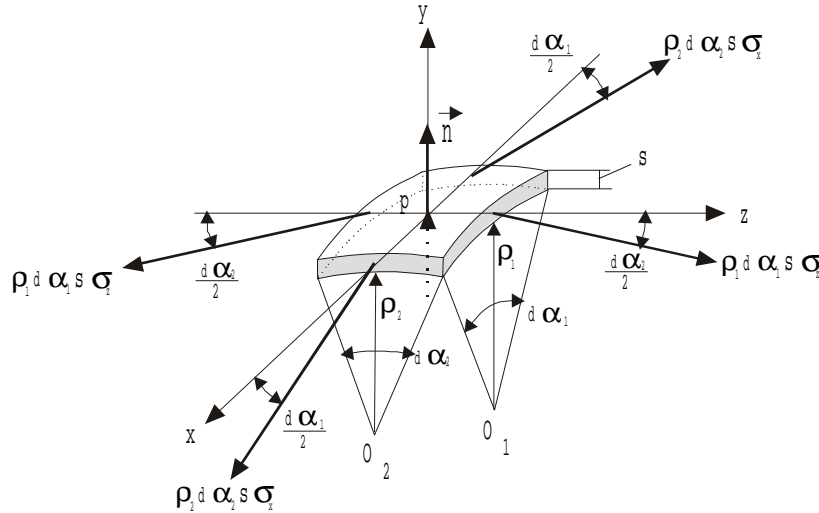
Az utóbbi sorrend érvényes ha ($\frac{d}{4} \gg S$).

- TARTÁLYOK

A tartályok vékonyfalu edények, melyek lehetnek gömb és henger alakúak. A henger alakú edények végei kialakítása a sík és a gömbfelület kombinációja.

Vizsgáljunk meg egy differenciálisan kisméretű elemet (5.06. ábra). A vizsgált elem a (O_1, O_2). központokhoz kötődik, és egy (\vec{n}) normálvektor jellemzi. Az (\vec{n}) normálvektor iránya megegyezik egy (xyz) derékszögű koordináta-rendszernek a (y) irányával. A (O_1). központ az (xy) síkhoz, az (O_2) központ pedig az (yz) síkhoz tartozik. Az elemet a (ρ_1, ρ_2) sugarak, a ($d\alpha_1, d\alpha_2$) szögek, és az (S) falvastagság jellemzi. A tartályt (p) nyomás terheli.

A (p) nyomás következtében az elem oldalain feszültségek jönnek létre, melyeket (σ_x, σ_y, p) -el jelöljük. Ezek a feszültségek a megfelelő felületeken erőket hoznak létre, melyek egyensúlyban tartják az elemet.



5.06. ábra

Írjuk fel az egyensúlyi egyenletet az (y) tengely irányára:

$$\sum Y = p \cdot (\rho_1 \cdot d\alpha_1 \cdot \rho_2 \cdot d\alpha_2) - 2 \left(\rho_1 \cdot d\alpha_1 \cdot S \cdot \sigma_z \cdot \sin \frac{d\alpha_2}{2} + \rho_2 \cdot d\alpha_2 \cdot S \cdot \sigma_x \cdot \sin \frac{d\alpha_1}{2} \right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p = S \frac{\rho_1 \cdot d\alpha_1 \cdot S \cdot \sigma_z \cdot \sin \frac{d\alpha_2}{2} + \rho_2 \cdot d\alpha_2 \cdot S \cdot \sigma_x \cdot \sin \frac{d\alpha_1}{2}}{\rho_1 \cdot d\alpha_1 \cdot \rho_2 \cdot d\alpha_2}$$

(5.56)

Differenciális szögmértékek révén, a következő kapcsolatok érvényesek:

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} \quad ; \quad \sin d\varphi \approx d\varphi$$

Alkalmazva az előző kapcsolatokat, és rendezzük az (5.56). egyenletet:

$$\boxed{\frac{p}{S} = \frac{\sigma_x}{\rho_1} + \frac{\sigma_z}{\rho_2}}$$

(5.57)

Az (5.57). függvény két ismeretlent tartalmaz (σ_x, σ_y) . Az egyértelmű megoldás csak akkor lehetséges, ha felehet állítani egy pótegyenletet az alakváltozások alapján, vagy ha a (σ_x, σ_y) feszültségek közül az egyiket más módszerrel (p.l. kísérletek alapján) határozzuk meg.

5.4. PÉLDA

A henger alakú tartály belső átmérője ($d=1200 \text{ mm}$). A tartály falvastagsága ($S=12 \text{ mm}$), a belső nyomás értéke ($p=2 \text{ MPa}$).

Meg kell határozni a tartály falában működő feszültségeket.

AZ AXIÁLIS FESZÜLTSEG

A meghatározást az (5.55). kapcsolat szerint végezzük el.

$$\sigma_z = \sigma_a = p \cdot \frac{d}{4 \cdot S} = 2 \cdot \frac{1200}{4 \cdot 12}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma_z = 50 \text{ MPa}} \quad (\text{P.5.19})$$

A TANGENCIÁLIS FESZÜLTSEG

A meghatározást az (5.57). kapcsolat szerint végezzük el.

$$\frac{p}{S} = \frac{\sigma_x}{\rho_1} + \frac{\sigma_z}{\rho_2}$$

Mivel:

$$\rho_1 = \frac{d}{2} = 600 \text{ mm} \quad ; \quad \rho_2 = \infty \quad ; \quad \sigma_x = \sigma_T$$

Meghatározzuk a tangenciális feszültséget:

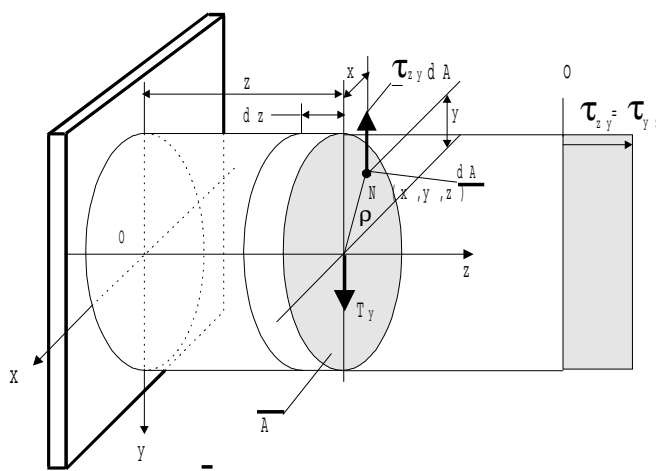
$$\sigma_T = p \cdot \frac{\rho_1}{S} = 2 \cdot \frac{600}{12}$$

$$\Downarrow$$

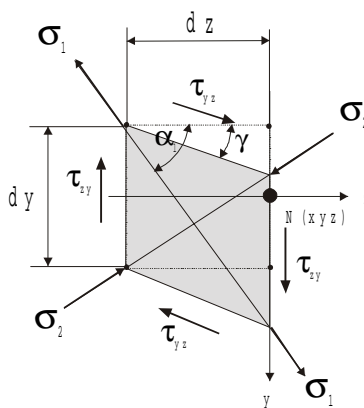
$$\boxed{\sigma_T = 100 \text{ MPa}} \quad (\text{P.5.20})$$

5.1.2. NYIRÓ IGÉNYBEVÉTEL

Így nevezzük azt az általános igénybevételi esetet, amikor az (5.04). összetevők közül csak a (\vec{T}_x) , vagy a (\vec{T}_y) hat (5.07.a. ábra).



5.07.a. ábra



5.07b. ábra

Az egyensúlyi állapotok megfelelnek az (5.07-1). és az (5.07-2). egyenleteknek.

Vizsgáljuk meg az (5.07-2). esetet, amikor a (T_y) összetevő hat.

$$\sum y = T_y - \int_A \tau_{zy} dA = 0 \quad (5.58)$$

Feltételezzük, hogy az aktív erő elég távol hat az (A) normálmetszeten lévő síkidom súlypontjától. Ekkor a megfelelő erőter és a feszültségtér homogének, vagyis a feszültség eloszlása egyenletes.

$$\tau_{yz} \neq f(z) = \frac{T_y}{A} = \text{const.} \quad (5.59)$$

Ez megfelel egy síkbeli tiszta tangenciális feszültségi állapotnak, mely részletesen volt tárgyalva a (4.3). részben. Az (N) pont környékéből ki van vágva egy differenciális (dx, dy, dz) méretű téglalakú hasáb (5.07.b. ábra). A hasáb a megterhelés után (igénybevéve a SAINT-VENANT hipotéziseket), az (yz) síkban alakváltozásokat szenved. Az (5.07.b.). ábrán fel vannak tüntetve a főfeszültségek irányai és a megfelelő szögelfordulások.

A tangenciális feszültségek a dualitás elv alapján (2.22. kapcsolat):

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

Az állapotnak megfelelő feszültségi vektor:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha_y \\ \cos \alpha_z \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Az alakváltozási vektor pedig:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha_y \\ \cos \alpha_z \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

A számítások során mérvadók a (σ_1) főfeszültség és az (ε_1) fő fajlagos hosszváltozás, melyek a következők:

A fő feszültség, a (2.54, 5.59). kapcsolatok, és a (5.60) feszültségi vektorban található értékek alapján:

$$\boxed{\sigma_1 = \pm \tau_{zy} = \pm \tau_{yz} = \frac{T_y}{A}} \quad (5.62)$$

A fő fajlagos hosszváltozás és a fő fajlagos hosszváltozási sík elhelyezése, a (3.29). kapcsolatok, és a (5.60) feszültségi vektorban található értékek alapján határozzuk meg:

$$\varepsilon_1 = \pm \frac{1}{2}\gamma_{zy} = \pm \frac{1}{2}\gamma_{yz} \quad ; \quad \alpha_1 = 45^\circ \quad (5.63)$$

A szögelfordulás és a megfelelő tangenciális feszültség közötti kapcsolatot a HOOKE-törvényből kapjuk:

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (5.64)$$

A gyakorlatban a következő jelzéseket alkalmazzuk:

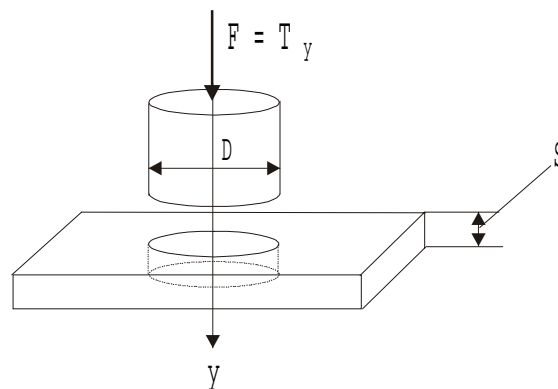
$$\begin{aligned} |\tau_{zy}| &= |\tau_{yz}| = \tau \\ \gamma_{zy} &= \gamma_{yz} = \gamma \end{aligned} \quad (5.65)$$

Használva az (5.65). jelöléseket, az (5.62, 5.64). egyenleteket a következőképpen írjuk:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T_y}{A} \\ \tau &= G\gamma \\ \Downarrow \\ \boxed{\gamma = \frac{T_y}{A\gamma}} \end{aligned} \quad (5.66)$$

5.5. PÉLDA

Meg kell határozni a legnagyobb (D) tárcsaátmérőt (5.1.2.1. ábra), melyet egy ($F=500 \text{ kN}$) nagyságú erőt kifejlesztő préssel lehet elvégezni. A használt lemez vastagsága ($S=4 \text{ mm}$), az anyag nyírószilárdsága ($\tau_M = 400 \text{ MPa}$)



5.1.2.1. ábra

A meghatározást az (5.62). kapcsolat alapján végezzük el. A működő (kifejtett) tangenciális feszültség meg kell hogy haladja az anyag nyírófeszültségét, különben a nyírás nem jöhet létre:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{T_y}{A} = \frac{F}{A} = \frac{F}{D \cdot \pi \cdot S} > \tau_M$$

$$\Downarrow$$

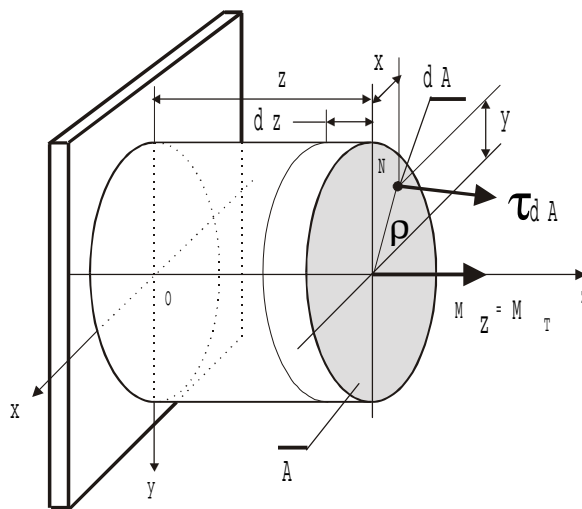
$$\boxed{D < 99,52 \text{ mm}}$$

(P.5.22)

5.1.3. CSAVARÓ IGÉNYBEVÉTEL

Így nevezzük azt az általános igénybevételi esetet, amikor az (5.04). összetevők közül csak a (\vec{M}_z) (5.08.-ábra). Az (\vec{M}_z) nyomatékot (M_T) torziós nyomatéknak nevezzük.

$$M_z = M_T \quad (5.67)$$



5.08. ábra

5.1.3.1. KÖR KERESZTMETSZETŰ RUDAK CSAVARÁSA

Ez az igénybevételi forma leginkább a nyomaték átviteli tengelyeknél jelentkezik, és a dinamikából ismert formája a következő:

$$M_T \cong 9550 \cdot \frac{P}{n} \text{ Nm} \quad (5.68)$$

ahol a,

$P [kW]$ - teljesítmény

$n [min^{-1}]$ - fordulatszám

A rúd egyensúlyi állapota megfelel a (5.07-6). egyensúlyi egyenletnek:

$$\begin{aligned}
 0 &= M_z + \int_A \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \tau \cdot dA \\
 &\Downarrow \\
 M_T &= \int_A \tau_{(\rho)} \cdot \rho \cdot dA
 \end{aligned}
 \tag{5.69}$$

Az (M_T) torziós nyomaték következményeként, a rúdban feszültségek keletkeznek és alakváltozások jönnek létre.

Tételezzük fel, hogy a rúd (z) hosszú tartományában, valamennyi normálmetszetre redukált torziós nyomaték megegyezik, vagyis a (z) tartományban homogén nyomatéki tér működik:

$$M_T \neq f(z) = \text{const.} \tag{5.70}$$

Jacob Bornoulli alakváltozási modelje szerint, alakváltozások csak a terhelések irányában jönnek létre, vagyis, csak a metszetek közötti relatív elmozdulásokkal nyilvánulnak meg. Mérések igazolják, hogy kis elmozdulások esetén, a kör síkidom normálmetszeten kiválasztott (N) pont körív elmozdulást végez. Ha az (N) pont befogási keresztmetszetétől (z) távolságon van, akkor a ($k_{(\rho)}$) körív elmozdulás arányos a koordinátákkal:

$$k_{(\rho)} = C \cdot z \cdot \rho \tag{5.71}$$

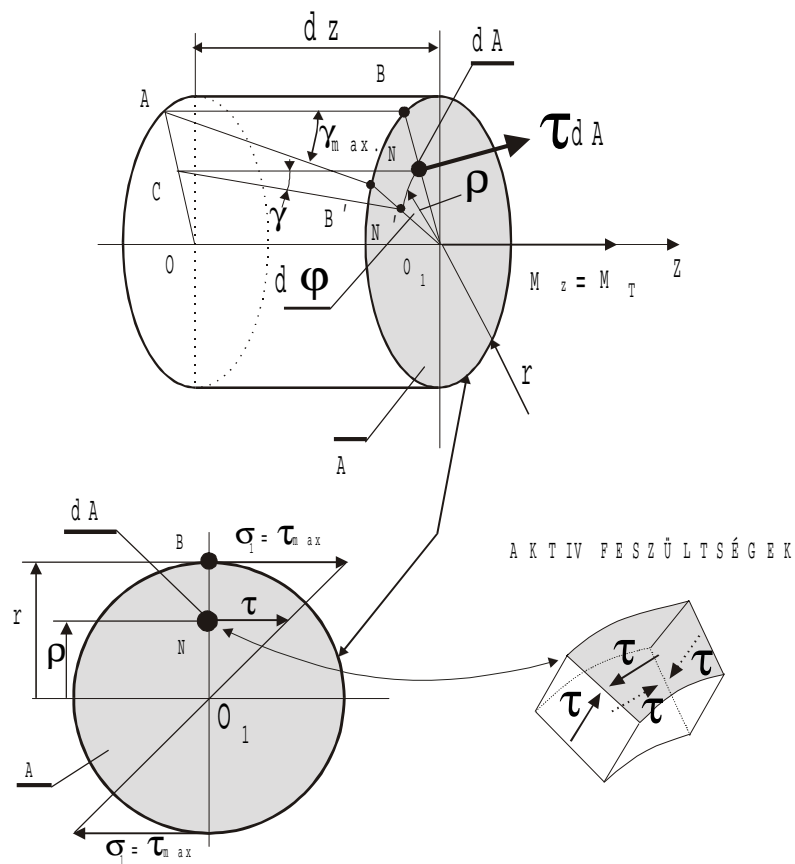
A feszültségek és az alakváltozások vizsgálatához egy (z) hosszú és kör normálmetszetű rúdat választunk ki. A rúdból egy (dz) vastagságú elemi korongot vágunk ki (5.09. ábra).

A korong oldalai relatív elmozdulást végeznek (szögelfordulás), melynek meghatározása úgy fog történni, hogy a bal oldalt rögzítetnek tekintjük. A korongon belül meghatározunk egy (O, A, B, O_I) központi síkot, és azon egy (ρ) központi távolságon lévő (CN) vonalat.

Ha a korongot (M_T) nyomatékkal terheljük, a jobb oldal elfordul ($d\rho$) szögértékkel a terhelés irányában. Így a (B, N) pontok (ρ), illetve (r) köríven mozdulnak el ($B \rightarrow B^* ; N \rightarrow N^*$). A külső (AB) szál (γ_{\max}) szöggel, a (CN) szál pedig (γ) szöggel fordul el.

Az (N) pontban az elmozdulásokból ítélve, csak tangenciális feszültség jön létre. Ennek iránya az (N) ponthoz kötődő (ρ) sugarú körív érintőjének felel meg. A tangenciális feszültségek dualitása szerint az (N) ponthoz tartozó differenciál hasáb oldalain úgyszintén tangenciális feszültségek hatnak.

Ez az eset a tiszta síkbeli tangenciális feszültségi állapotnak felel meg, mely részeltessen a (4.3). részben volt tárgyalva.



5.09. ábra

Az állapotnak a megfelelő feszültségi vektora:

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \alpha_y \\ \cos \alpha_z \end{vmatrix} \quad (5.72)$$

Az alakváltozási vektor pedig:

$$\vec{f} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \alpha_y \\ \cos \alpha_z \end{vmatrix} \quad (5.73)$$

A műszaki számításoknál mérvadó (σ_1) főfeszültség értékét és elhelyezését, a (2.53, 2.54). egyenletek és az (5.72). tenzor alapján határozzuk meg:

$$\boxed{|\sigma_1| = |\tau_{\max}| \quad ; \quad \alpha_1 = 45^\circ} \quad (5.74)$$

Ahogy az az (5.09). ábrán fel van tüntetve, a (B) és az (N) pontok körív álmozdulásai a következők:

$$\begin{aligned} BB' &= \gamma_{\max} \cdot dz = d\varphi \cdot r \\ NN' &= \gamma_{(\rho)} \cdot dz = d\varphi \cdot \rho \end{aligned} \quad (5.75)$$

Az (5.75) egyenleteket egymással elosztjuk

$$\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_{(\rho)}} = \frac{r}{\rho} \quad (5.76)$$

Szorozzuk és osztjuk (G) - vel az egyenlet bal oldalát, majd igénybe vesszük a HOOKE törvényt:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{\max}}{\gamma_{(\rho)}} \cdot \frac{G}{G} &= \frac{\tau_{\max}}{\tau_{(\rho)}} = \frac{r}{\rho} \\ \Downarrow \\ \tau_{(\rho)} &= \tau_{\max} \frac{\rho}{r} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Helyettesítjük be a ($\tau_{(\rho)}$) értéket (5.69). egyensúlyi egyenletbe:

$$M_T = \int_A \tau_{\max} \frac{\rho}{r} \cdot \rho \cdot dA \quad (5.78)$$

Mivel a (τ_{\max} , r) értékek konstansok,

$$\begin{aligned} M_T &= \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A \rho^2 \cdot dA = \frac{\tau_{\max}}{r} I_o \\ \Downarrow \\ \boxed{\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_o} r = \frac{M_T}{W_o}} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Az utóbbi egyenlet az (M_T) megterhelés, a (W_o) megfelelő síkidom tényező és a (τ_{\max})

maximális belső tangenciális feszültség közötti kapcsolatot képezi.

A normálmetszet szögelfordulását az (5.75). egyenletből határozzuk meg:

$$\begin{aligned}\gamma_{\max} \cdot dz &= d\varphi \cdot r \\ \Downarrow \\ \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{\gamma_{\max}}{r}\end{aligned}\tag{5.80}$$

Az előző egyenlet jobb oldalát szorozzuk és osztjuk (G) nyíró rugalmassági tényezővel, majd vegyük igénybe a HOOKE törvényt:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\gamma_{\max}}{r} \frac{G}{G} = \frac{\tau_{\max}}{rG}\tag{5.81}$$

A (τ_{\max}) értéket a (5.79). egyenletből vesszük.

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\frac{M_T}{I_o} r}{rG} = \frac{M_T}{I_o G}\tag{5.82}$$

Szétválasztjuk a differenciálokat, és elvégezzük az integrációt:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int_{z_1}^{z_2} \frac{M_T}{I_o G} dz\tag{5.83}$$

mivel:

$$M_T = \text{const.} \quad ; \quad I_o = \text{const.} \quad ; \quad G = \text{const}$$

a következő kapcsolatot kapjuk:

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{M_T}{I_o G} (z_2 - z_1)\tag{5.84}$$

Ha

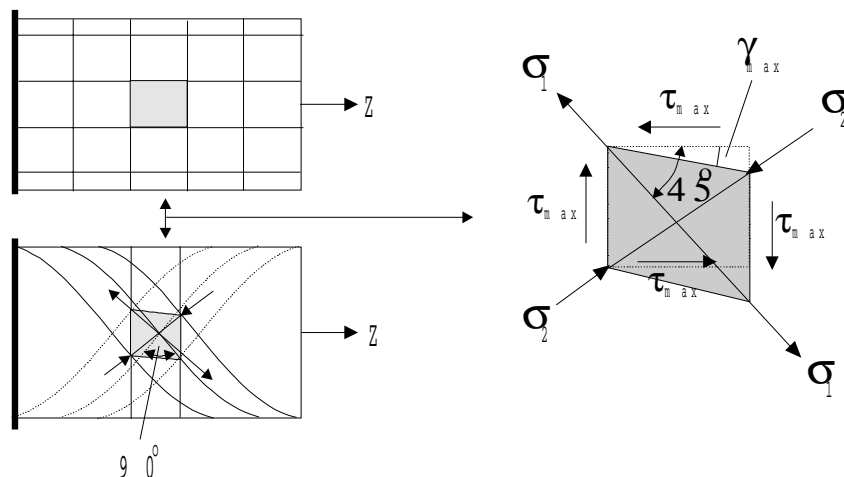
$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \varphi \\ z_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad z_2 = z = l\end{aligned}$$

akkor a (5.84). kapcsolat a következő formát kapja:

$$\boxed{\varphi = \frac{M_T}{I_o G} l}\tag{5.85}$$

Szemléleti szempontból célszerű külön tárgyalni a rúd burkolatán fellépő feszültségeket. E célból a rúd peremén felrajzolunk több alkotót, és a megterhelés után megfigyeljük az

alakváltozások felvételét (5.10. ábra).



5.10. ábra

A burkolaton berajzoljuk az egymást követő (σ_1) főfeszültségi irányokat. Az így kapott vonal egy csavarvonalnak felel meg. Ez érvényes a (σ_2) főfeszültség irányára is. Így két csavarvonal halmazt kapunk, melyek (90°) fok alatt metszik egymást. A törések a gyakorlatban megközelítőleg e vonalak mentén történnek.

5.6. PÉLDA

Egy ($P=40 \text{ kW}$) teljesítmény átvitelére egy ($n=1400 \text{ min}^{-1}$) fordulatszámú, ($l=100 \text{ mm}$) hosszú tengelyt használunk. A tengely anyaga ($\text{A}461$), melynek a (τ_d) megengedett nyírófeszültsége ($\tau_d = 150 \text{ MPa}$), a nyíró rugalmassági modulusa pedig ($G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$).

Meg kell határozni a tengely átmérőjét úgy, hogy a főfeszültség ne haladja meg a (τ_d) nyírófeszültség megengedett értékét, és a létrejött szögelfordulás ne legyen nagyobb mint ($\varphi = 1^\circ$).

AZ ÁTVITELI NYOMATÉK

A meghatározást az (5.68). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\begin{aligned}
 M_T &\approx 9550 \cdot \frac{P}{n} = 9550 \cdot \frac{40}{1400} \\
 &\Downarrow \\
 M_T &= 2,73 \text{ Nm} = 2,73 \cdot 10^5 \text{ Nmm}
 \end{aligned}
 \tag{P.5.23}$$

AZ ÁTMÉRŐ MEGHATÁROZÁSA A (τ_D) MEGENGEDETT NYÍRÓ FESZÜLTSG FÜGVÉNYÉBEN

A meghatározást az (5.79). kapcsolat alapján végezzük el, a keresztmetszet tényező műszaki táblázatban található.

$$\begin{aligned}
 \tau_{\max} &= \frac{M_T}{W_0} \leq \tau_D \\
 &\Downarrow \\
 \frac{M_T}{\frac{\pi \cdot D^3}{16}} \leq \tau_D &\Rightarrow D' \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_T}{\pi \cdot \tau_D}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,7 \cdot 10^5 \cdot 16}{\pi \cdot 150}} \\
 &\Downarrow \\
 D' &\geq 21 \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{P.5.24}$$

AZ ÁTMÉRŐ MEGHATÁROZÁSA A ($\varphi = 1^0$) MEGENGEDETT SZÖGELFORDULÁS FÜGVÉNYÉBEN

Előzetesen a szögelfordulást radiánokba fejezzük ki:

$$\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 1^0 = \frac{\pi}{180}
 \tag{P.5.25}$$

Az átmérő meghatározást az (5.85). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{\pi}{180} \cdot \varphi^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 1^0 = \frac{\pi}{180} \\
 \varphi &= \frac{M_T \cdot l}{I_0 \cdot G} = \frac{M_T \cdot l}{\frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot G} = \frac{16 \cdot 2,7 \cdot 10^5 \cdot 100}{\frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot 8 \cdot 10^4} \leq \frac{\pi}{180} \\
 &\Downarrow \\
 D'' &\geq 29,8 \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{P.5.26}$$

AMEGFELELŐ ÁTMÉRŐ MEGHATÁROZÁSA

Megfelelő átmérőnek az első szabványos szelvény méretét tekintjük, mely nagyobb a (D', D'') értékektől.

$$D \geq (D' ; D'') \geq 29,8$$

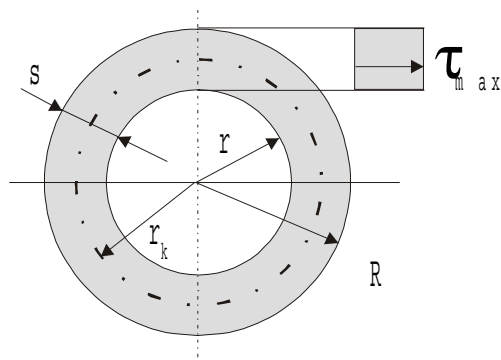
$$\Downarrow$$

$$\boxed{D = 30 \text{ mm}}$$

(P.5.27)

- VÉKONY FALÚ CSÖVEK CSAVARÁSA

Vegyük figyelembe egy csőnek a normálmetszetét (5.11. ábra), és azon feltüntetett méreteket.

**5.11. ábra**

A méretek alapján a következő kapcsolatok érvényesek:

$$r_k = \frac{R+r}{2} \quad ; \quad S = R-r \quad ; \quad A \approx \pi \cdot r_k^2 \quad ; \quad I_{o(r_k, s)} \approx 2\pi \cdot r_k^3 \cdot s \quad (5.86)$$

Hozzunk létre egy (k_r) tényezőt:

$$k_r = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{\tau_{\max}} \cdot 100\% \quad (5.87)$$

Az utóbbi egyenletbe helyettesítjük be a megfelelő (5.79). értékeket, és vegyük igénybe az (5.86). kapcsolatokat.

$$\boxed{k_r = \left(\frac{(R^4 - r^4)}{(R + r)^3 s} \right) \cdot 100 [\%]} \quad (5.88)$$

Ha a (k_r) tényező értéke kisebb (5%) -nál, az esetben *VÉKONY FALÚ* csövekről van szó.

Az (5.79). egyenlet alapján, a vékonyfalú csövek tangenciális feszültség maximális értéke a következő:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_T}{I_o} r \approx \frac{M_T}{I_{0(r_K, s)}} r = \frac{M_T}{2\pi \cdot r_K^3 \cdot s} r \\ &\Downarrow \\ \boxed{\tau_{\max(r_K, s)} &= \frac{M_T}{2A \cdot s}} \end{aligned} \quad (5.89)$$

A megfelelő szögelfordulást az (5.85). kapcsolat szerint határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{M_T}{I_{o(r_K, s)} \cdot G} l = \frac{M_T}{2\pi \cdot r_K^3 \cdot s \cdot G} l \\ &\Downarrow \\ \boxed{\varphi &= \frac{M_T}{2A \cdot r_K \cdot G \cdot s} \cdot l} \end{aligned} \quad (5.90)$$

5.1.3.2. NEM KÖR KERESZTMETSZETŰ RUDAK CSAVARÁSA

A kör keresztmetszetű rudak alakváltozása megfelelt a JACOB BERNOULLI - féle

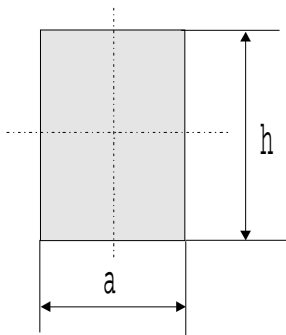
alakváltozási modellnek, és így meglehetősen egyszerű matematikai módszerrel lehetett megalapítani, a főfeszültséget és a szögelfordulást.

Nem kör keresztmetszetű, és összetett síkidomok esetében, csavarás közben a keresztmetszetek síkjai is alakváltozásokat szenvednek (nem csak a megterhelés irányában jönnek létre alakváltozások - a BERNOULI féle alakváltozási modell nem használható), vagyis a rúd feszültségi állapota síkbeli.

Ilyen esetekben a főfeszültségeket, a feszültségek eloszlását és a szögelfordulásokat csak összetett matematikai módszerek igénybevételével lehet meghatározni (NAVIER -féle egyenletek, ciklikus integrálok,...) ami jóval felülmúlja az ebben a könyvben használt alapokat.

Ezért a továbbiakban, csak néhány gyakran használt eset kerül bemutatásra (általában hengerelt szelvények), melyeknél csak a (τ_{\max}) maximális tangenciális feszültség értékét, és a (φ) szögelfordulást tüntetjük fel, valamint a (τ_{\max}) megközelítő elhelyezését.

- TÉGLAALAKÚ KERESZTMETSZET CSAVARÁSA



5.12. ábra

A maximális tangenciális feszültség értéke:

$$\tau_{\max} = \alpha \cdot \frac{M_T}{b^2 h} \quad ; \quad b > h \quad (5.91)$$

A keresztmetszet sarkaiban a tangenciális feszültség értéke nulla, a maximális értéke pedig a hosszabb oldal közepén jön létre.

A keresztmetszet szögelfordulása:

$$\varphi = \beta \cdot \frac{M_T}{b^3 h \cdot G} \cdot l \quad (5.92)$$

Az (α, β) tényezők műszaki táblázatokban találhatók

$$(\alpha, \beta) = f\left(\frac{h}{b}\right) \quad (5.93)$$

Ha például:

$$h = b = a \Rightarrow \alpha = 4,8 \quad ; \quad \beta = 4,7$$

↓

$$\tau_{\max} \approx 4,8 \cdot \frac{M_T}{a^3} \quad ; \quad \varphi \approx 4,7 \cdot \frac{M_T}{a^4 \cdot G} \cdot l \quad (5.94)$$

- VÉKONY TÉGLAALAKÚ KERESZTMETSZET CSAVARÁSA

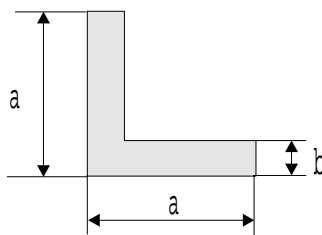
Ez az eset megközelítőleg megfelel a téglalapú keresztmetszetnek, mely méreteinek aránya:

$$\frac{h}{b} \approx \infty$$

↓

$$\tau_{\max} \approx 3 \cdot \frac{M_T}{a^3} \quad ; \quad \varphi \approx 3 \cdot \frac{M_T}{a^4 \cdot G} \cdot l \quad (5.95)$$

- (L) ALAKÚ KERESZTMETSZET CSAVARÁSA



5.13. ábra

A maximális tangenciális feszültség értéke:

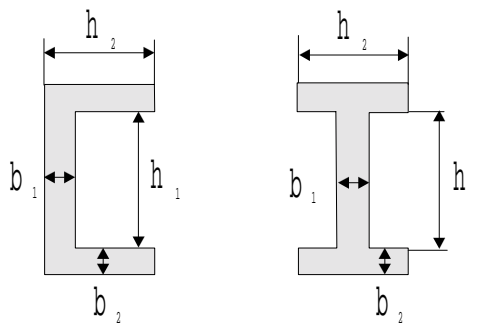
$$\tau_{\max} \approx \frac{M_T}{\frac{1}{3}(2a-b) \cdot b^2} \quad (5.96)$$

E feszültség megközelítőleg a sarkoktól a legnagyobb távolságon helyezkedik el.

A szögelfordulás értéke:

$$\varphi \approx \frac{M_T}{\frac{1}{3}(2a-b) \cdot b^3 \cdot G} \cdot l \quad (5.97)$$

- (L, I) ALAKÚ KERESZTMETSZET CSAVARÁSA



5.14. ábra

A maximális tangenciális feszültség értéke:

$$\tau_{\max} \approx \frac{M_T}{\frac{1}{3}(h_1 b_1^3 + 2h_2 b_2^3)} \quad (5.98)$$

E feszültség megközelítőleg a sarkoktól a legnagyobb távolságon helyezkedik el.

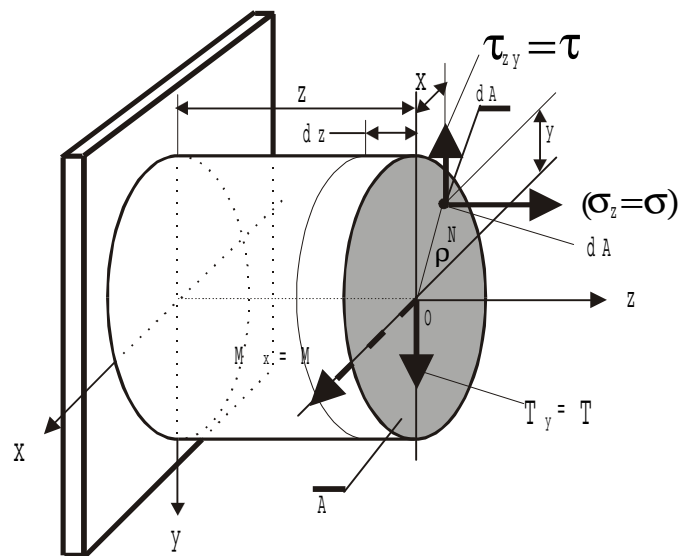
A szögelfordulás értéke:

$$\varphi \approx \frac{M_r}{\frac{1}{3}(h_1 b_1^3 + 2h_2 b_2^3) \cdot G} \cdot l \quad (5.99)$$

Más, összetettebb esetben ajánlatos a feszültségek és a szögelfordulások értékeit mérésekkel meghatározni.

5.1.4. HAJLÍTÓ IGÉNYBEVÉTEL

Így nevezzük azt az általános igénybevételi esetet, amikor az (5.04). összetevők közül csak az (M_x, T_y) vagy (M_y, T_x) terhelési párok hatnak.



5.15. ábra

A további eljárás során egy olyan rudat veszünk igénybe, mely eleget tesz a következő követelményeknek:

- Valamennyi normálmetszete szimmetrikus az (yz) síkhoz képest.
- A megterhelő rendszer az (yz) síkban hat.
- Az (xy) tengelyek súlyponti tengelyek.
- Az (A) normálmetszetben az (M_x, T_y) terhelőpár működik.

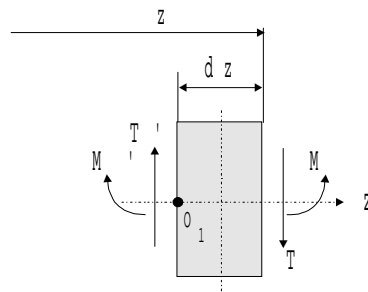
Egyszerűsítés céljából a (z) indexeket mellőzzük, vagyis a következő megjelöléseket használjuk:

$$\begin{aligned}
 (M_x)_z &= M \quad ; \quad (T_y)_z = T \\
 A_z &= A \quad ; \quad (I_x)_z = I_x \\
 \sigma_z &= \sigma \quad ; \quad (\sigma_z)_{y=y_{\max.}} = \sigma_{\max.} \\
 \tau_z &= \tau
 \end{aligned}
 \tag{5.100}$$

Vágjunk ki egy (dz) vastagságú elementáris lapot, mely jobb oldala megegyezik az (5.15). ábrán feltüntetett (A) normálmetszettel. A metszet (z) távolságon van a befogástól, és (M, T) terhelési pár hat rá. Az utóbbiak a (z) helyzetfüggvényei:

$$M = f(z) \quad ; \quad T = f(z) \tag{5.101}$$

Az (5.101). helyzetfüggvények révén, az elementáris lap oldalain egymás közt differenciálisan különböző megterhelések hatnak (5.16. ábra)



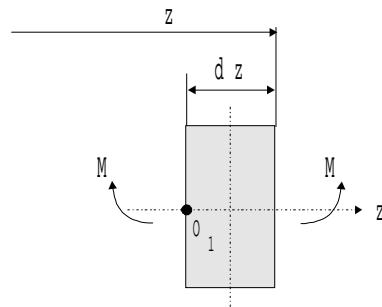
5.16. ábra

Az elemi lap egyensúlyi állapota révén leírhatjuk az (0_1) . pontra vonatkozó egyensúlyi egyenletet:

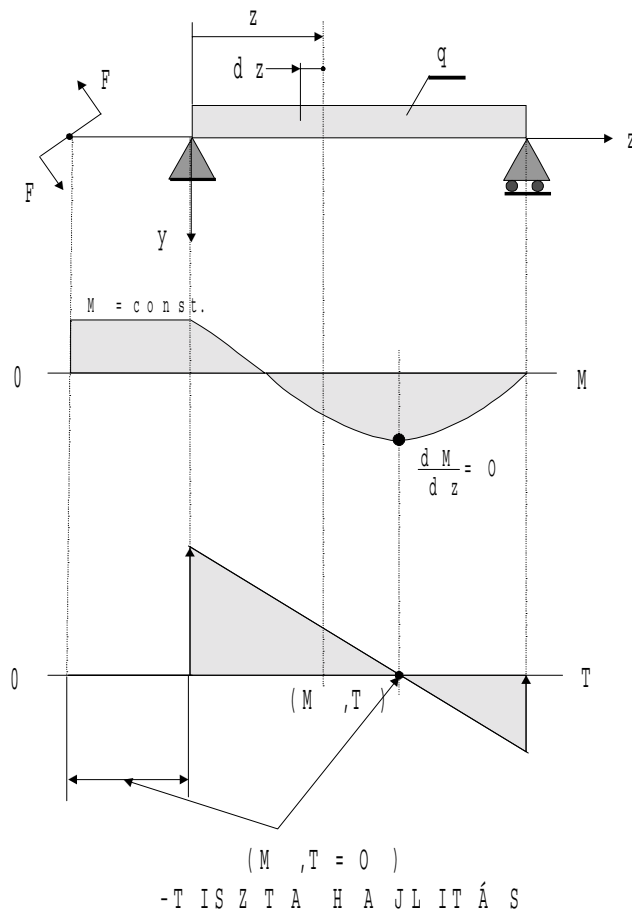
$$\begin{aligned}
 \sum M_{01} &= (M - M') - T \cdot dz = 0 \\
 &\Downarrow \\
 dM - Tdz &= 0 \\
 &\Downarrow \\
 \boxed{\frac{dM}{dz} = T} & \tag{5.102}
 \end{aligned}$$

Az (5.102). egyenlet, a statikából ismert nyomaték és a transzverzális erő közötti kapcsolat.

Az (M, T) terhelési pár, hajlító igénybevétel esetében együtt lép fel,



5.17. ábra



5.18. ábra

Az olyan erőpár igénybevétel ahol a transzverzális erő értéke egy bizonyos tartományon belül nulla, **TISZTA EGYENES HAJLÍTÁS**-nak hívjuk (5.17. ábra).

$$\begin{aligned}
 T &= 0 \\
 \Downarrow \\
 \frac{dM}{dz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.103}$$

Ez az állapot a nyomaték extrémális helyzeteiben áll fen. A tiszta egyenes hajlítás egy példája a (5.18). ábrával van bemutatva.

Mivel az (A) normálmetszetet (5.15. ábra) redukált (M, T) terhelő rendszer terheli, arra lehet következtetni, hogy az anyagban (σ) normálfeszültségek és (τ) tangenciális feszültségek jönnek létre.

5.1.4.1. A NORMÁLFESZÜLTSEGEK MEGHATÁROZÁSA

Az (5.16). ábrán látható, hogy a (T) transzverzális erő (τ) tangenciális feszültségeket hozhat létre. Emiatt a (σ) normálfeszültséget a tiszta hajlítási helyzetből fogjuk meghatározni, mivel ilyen helyzetben a (T) transzverzális erő értéke nulla - így tangenciális feszültség sem jöhet létre (5.17. ábra)

Terhelés előtt az elementáris lap (yz) szimmetriasíkkal metszett felületének alakja (A, B, C, D) . A metszősíkban megjelölünk egy a semleges síktól (y) távolságban lévő (E, F) vonalat (5.19. ábra).

A megterhelés következtében alakváltozások jönnek létre, úgy, hogy a megváltozott alak sarkai (A', B', C', D') . A metszet (C, D) szála megnyúlnak az (A, B) szála pedig zsugorodik, amiből arra lehet következtetni, hogy a kettő között létezik egy szál mely nem változtatja hosszát. Ezt a szálát (vonalat) **SEMLEGES VONAL** -nak nevezzük, a megfelelő tulajdonságokkal rendelkező síkot **SEMLEGES SÍK** -nak hívjuk.

A Jacob Bernoulli alakváltozási modell szerint, a normálmetszetek nem szenvednek alakváltozásokat, csak egymáshoz képest $(d\varphi)$ szögben fordulnak el, miszerint:

$$\begin{aligned}
 \overline{AD} &= \overline{A'D'} \\
 \overline{BC} &= \overline{B'C'}
 \end{aligned}
 \tag{5.104}$$

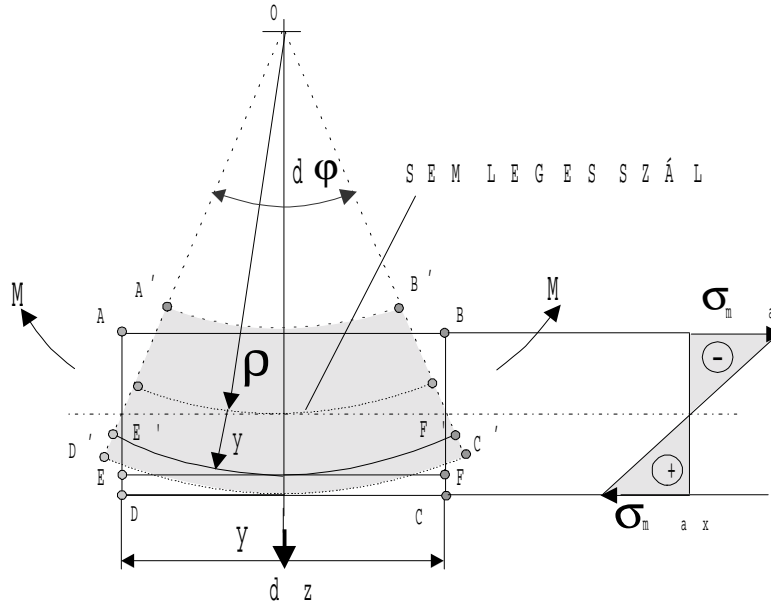
Ez alapján az (E, F) jelölésű szál fajlagos hosszváltozása:

$$\varepsilon = \frac{(E'F') - (EF)}{(EF)} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho}}$$

(5.105)



5.19. ábra

Az igénybevett esetnek megfelel az (5.07-4). egyensúlyi egyenlet, mely az (5.100). jelölések használatával a következő formát kapja:

$$M - \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = 0 \quad (5.106)$$

Az (5.106). egyenlet értéke csak akkor lehet nulla, ha

$$\int_A y \cdot dA = 0 \quad (5.107)$$

Az utóbbi egyenlet a statikai nyomaték nulla értékét képezi. Ez az eset akkor lehető, ha az (x) tengely *SÚLYPONTI*. Mivel az (yz) sík szimmetriasík, az (xyz) tengelyek valamennyi normálmetszetben súlyponti tengelyeket alkotnak. Ebből arra lehet következtetni, hogy tiszta egyenes hajlítás esetében a (z) tengely megegyezik a semleges fonállal, az (xy) sík pedig a semleges síkot képezi.

Használva a HOOKE törvényt, helyettesítjük be az (5.105). egyenlet értékét az (5.106).

egyenletbe:

$$\begin{aligned}
 M - \int_A y \cdot E \cdot \varepsilon \cdot dA &= 0 \\
 \Downarrow \\
 M - \int_A y \cdot E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot dA &= 0 \\
 \Downarrow \\
 M - \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA &= 0 \\
 \Downarrow \\
 M - \frac{E}{\rho} I_x &= 0
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

Rendezzük át az utóbbi egyenletet, és a jobb oldalát szorozzuk és osztjuk (y) -al:

$$\frac{M}{I_x} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{y}{y} \tag{5.109}$$

Az (5.109). kapcsolatba helyettesítjük be az (5.105). kapcsolatot, majd vegyük igénybe a HOOKE törvényt

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{I_x} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{y}{y} &\Rightarrow \frac{M}{I_x} = \frac{E}{y} \cdot \varepsilon \Rightarrow \frac{M}{I_x} = \frac{\sigma}{y} \\
 \Downarrow \\
 \boxed{\sigma = \frac{M}{I_x} y}
 \end{aligned} \tag{5.110}$$

Ha az ($y=y_{max.}$)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{max.} &= \frac{M}{\frac{I_x}{y_{max.}}} \\
 \Downarrow \\
 \boxed{\sigma_{max.} = \frac{M}{W_x}}
 \end{aligned} \tag{5.111}$$

Az (5.111). egyenlet a külső (M) terhelés, a (W_x) síkidom keresztmetszet tényező és a ($\sigma_{\max.}$) belső normál feszültség kapcsolatát képezi.

5.1.4.2. A TANGENCIÁLIS FESZÜLTÉG MEGHATÁROZÁSA

A tangenciális feszültség eloszlása az (A) normálmetszetben nem egyenletes, hanem az (y) koordináta függvényében változik, illetve az (5.07-2). egyenletben a

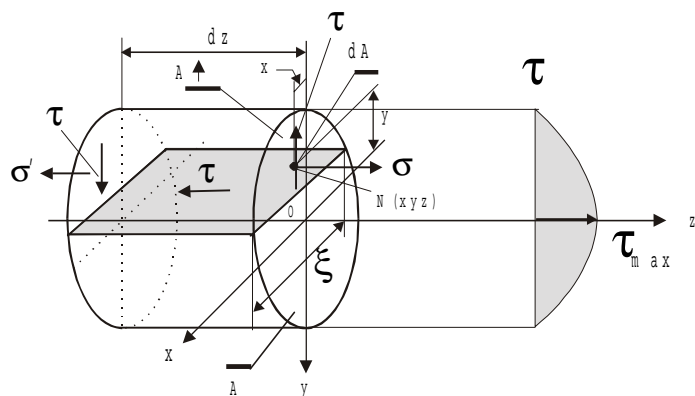
$$\tau_{zy} = f(y) \quad (5.112)$$

A tangenciális feszültség eloszlásának meghatározási módszerét szimmetrikus normálmetszetek esetében ZSUKOVSKI javasolta. Ez az eljárás feltételezi, hogy a tangenciális feszültség párhuzamos a semleges (xz) síkkal, és csak a (z) irányban, illetve a konjugációs elv szerint az (y) irányban működik.

Metsszük el az (5.16). ábrán feltüntetett elemi lapot egy síkkal mely központi távolsága (y), szélessége (ξ), és mely párhuzamos az (xz) síkkal (5.20. ábra). Egyúttal tüntetjük fel a metszősíkon működő feszültségeket.

Írjuk le a (z) irányra az egyensúlyi egyenletet, azzal, hogy az ($S_{x\uparrow}$) a vonalfeletti statikai nyomatékot az ($A\uparrow$) pedig vonalfeletti felületet képezi:

$$\begin{aligned} \sum z &= \int_{A\uparrow} \sigma \cdot dA - \int_{A\uparrow} \sigma' \cdot dA - \tau \cdot dz \cdot \xi = 0 \\ &\Downarrow \\ \int_{A\uparrow} (\sigma - \sigma') dA &= \tau \cdot dz \cdot \xi \\ &\Downarrow \\ \int_{A\uparrow} d\sigma \cdot dA &= \tau \cdot \xi \cdot dz \end{aligned} \quad (5.113)$$



5.20. ábra

Vegyük figyelembe az (5.110). egyenletet.

$$\int_{A \uparrow} \frac{dM}{I_x} y \cdot dA = \tau \cdot \xi \cdot dz \quad (5.114)$$

Mivel

$$M \neq f(y) \quad (5.115)$$

az (5.114). egyenlet formája

$$\begin{aligned} \frac{dM}{I_x} \int_{A \uparrow} y \cdot dA &= \tau \cdot \xi \cdot dz \\ \Downarrow \\ \frac{dM}{I_x} S_{x \uparrow} &= \tau \cdot \xi \cdot dz \end{aligned} \quad (5.116)$$

vagyis

$$\frac{dM}{dz} = \frac{\tau \cdot \xi \cdot I_x}{S_{x \uparrow}} \quad (5.117)$$

Használva az (5.102). kapcsolatot:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\tau \cdot \xi \cdot I_x}{S_{x \uparrow}} \\ \Downarrow \\ \boxed{\tau = \frac{T \cdot S_{x \uparrow}}{I_x \cdot \xi}} \end{aligned} \quad (5.118)$$

Az (5.118). egyenlet a (T) transzverzális erő, az $(S_{x\uparrow})$. vonalfeletti statikai nyomaték, az (I_x) síkidom tényező, a megfigyelt sík (ξ) hossza, és a (τ) belső tangenciális feszültség közötti kapcsolatot képezi.

A (τ) tangenciális feszültség maximális értéke a súlypontban helyezkedik, értékét pedig a következő kapcsolat képezi:

$$\boxed{\tau_{\max.} = \alpha \frac{T}{A}} \quad (5.119)$$

Az (α) tényező a normálmetszet formája függvényében határozható meg.

5.1.4.3. A FŐFESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA

A (σ) normálfeszültség és a (τ) tangenciális feszültség irányából arra lehet következtetni, hogy ezek együttesen síkbeli feszültségi állapotot hoznak létre.

Ennek az állapotnak a következő feszültségi tenzor felel meg:

$$T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (5.120)$$

Sík feszültségi állapot révén, a megfelelő főfeszültségeket valamint a főfeszültségi sík helyzetét, használva az (5.100). jelöléseket és a (zx) terhelő síkot, a (2.54, 2.56). egyenletek alapján határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2\tau}{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (5.121)$$

A tangenciális feszültség maximális értéke a (2.74). egyenlet alapján:

$$\tau_{\max.} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (5.122)$$

Mérnöki szempontból mérvadó a (σ_1) főfeszültség:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (5.123)$$

Tiszta hajlítás esetén az (5.123). kapcsolat alapján:

$$T = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma \quad (5.124)$$

Ha például egy téglalakú normálmetszetű tartót veszünk igénybe, melyet a szabad végén egy összpontosult (F) erő terheli (5.21. ábra), a (σ) normálfeszültség eloszlása az (y) középponti távolság lineáris függvénye, a (τ) tangenciális feszültség eloszlása pedig az (y) középponti távolság az $(S_{x\uparrow})$ statikai nyomaték és a (ξ) szálhossz függvénye:

$$\sigma = f(y) \quad ; \quad \tau = f(y, S_{x\uparrow}, \xi)$$

Ezek alapján a főfeszültség értéke:

$$\sigma_1 = f(y, S_{x\uparrow}, \xi) \quad (5.125)$$

Mivel a (ξ) a síkidom kiépítésétől függ (nem feltétlenül folyamatos függvény), a (σ_1) maximális értékét helyzetértékek meghatározásából állapítjuk meg.

Az összetevő feszültségeket az (y) központi távolság függvényében lehet meghatározni. Ekkor a főfeszültségek és a főfeszültségi síkok is meghatározandók.

A külső szálakban a főfeszültség értéke:

$$\sigma_{1,2} = \pm \sigma_{\max.} \quad ; \quad \alpha_1 = 0 \quad (5.126)$$

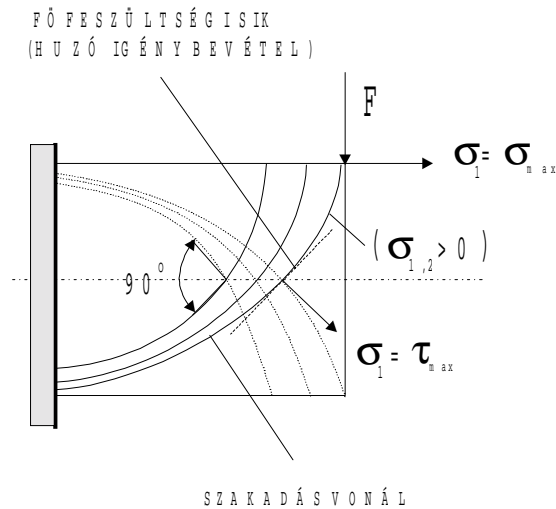
A súlyponti szálban pedig:

$$\sigma_{1,2} = \pm \tau_{\max.} \quad ; \quad \alpha_1 = 45^\circ \quad (5.127)$$

Tetszőlegesen kiválasztott szálban pedig az (5.121). egyenlet alapján, a főfeszültségek értékei a következők:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (5.128)$$

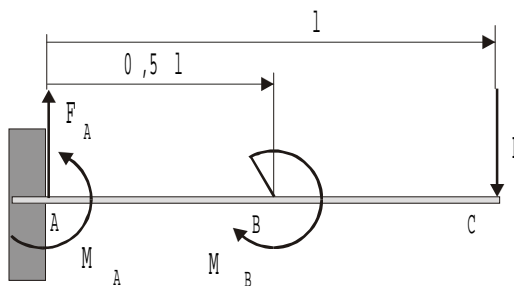
Az (5.21). ábrán a szakadást követő vonalakat teli vonalakkal jelöltük meg. Ezek a vonalak nagy mértékben megegyeznek a $(\sigma_1, \text{ vagy } \sigma_2)$ főfeszültségek irányával, melyek szakadást idéznek elő.



5.21. ábra

5.7. PÉLDA

Az (5.1.4.1). ábrán bemutatott tartó hossza $(l=1000 \text{ mm})$, és (JUS C.B3.101). szabványos szelvényből van kiépítve. A szelvény anyaga ($\sigma_{0.0300}$), melynek az anyagjellemzői $(E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \sigma_M = 320 \text{ MPa})$. A biztonsági tényező $(\gamma_M = 2)$. A tartót $(F = 2,5 \cdot 10^3 \text{ N})$ erő, és $(M_B = 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm})$ erőpár terheli. Az (F, M) terhelőpár az (yz) síkban működik.



5.1.4.1. ábra

Ki kell számítani a (σ_{lmax}) főfeszültség maximális értékét, ha az (F, M) terhelőpár az (yz) síkban működik, valamint meg kell határozni eleget tesz-e a tartó a (γ_M) biztonsági tényezőnek.

A MAXIMÁLIS MEGTERHELÉSEK

- Maximális transzverzális erő:

$$F_{Tmax} = F_A = T$$

$$\Downarrow$$

$$T = 2,5 \cdot 10^3 \text{ N}$$

(P.5.28)

- Maximális nyomaték:

$$M_{max} = M_A = M$$

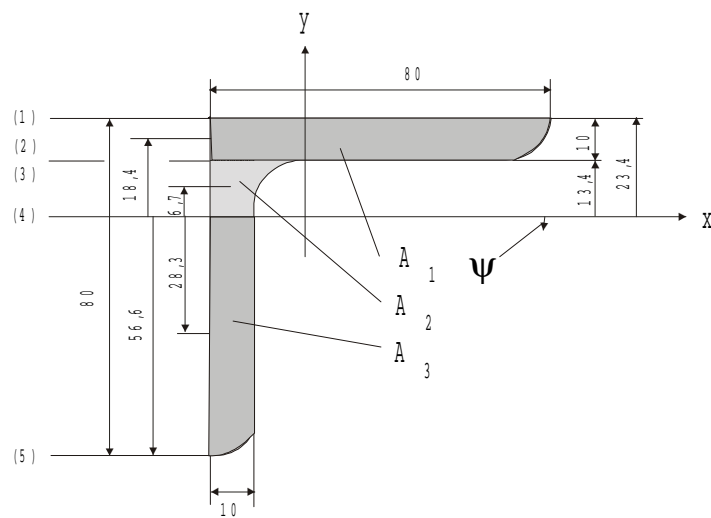
$$\Downarrow$$

$$M = 2,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

(P.5.29)

A SZELVÉNY MÉRTANI JELLEMZŐINEK, ÉS A JELLEGZETES SÍKOK MEGHATÁROZÁSA

A (σ_1) főfeszültség értéke a (σ, τ) normál és tangenciális feszültségektől függ (5.123. kapcsolat). A (τ) tangenciális feszültség eloszlása az (y) távolságban lévő metszet (ξ) szálhosszától is függ (5.118. kapcsolat). Emiatt meg kell határozni azokat a jellegzetes (y) helyzetben lévő síkokat, melyekben a (ξ) szálhossz ugrásszerűen változik, vagy eléri az extrém értékeit (5.1.4.2. ábra), és ezekben a helyzetekben külön-külön kiszámítani a (σ) normálfeszültséget, a (τ) tangenciális feszültséget, és a (σ_1) főfeszültségek értékeit.



5.1.4.2. ábra

- A síkidom mértani jellemzőit műszaki táblázatból határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
 A &= 1510 \text{ mm}^2 \\
 I_x = I_y &= 87,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\
 I_{xy} &= 51,55 \text{ mm}^4
 \end{aligned}
 \tag{P.5.30}$$

Az (A) felületet célszerű felbontani (A_1 , A_2 , A_3) három felületre. A felbontott felületek statikai elsőrendű nyomatékait megközelítően határozzuk meg, mintha azok téglalakúak lennének.

A NORMÁLFESZÜLTSÉGEK

A meghatározásokat az (5.111). kapcsolatok segítségével végezzük el.

$$\begin{aligned}
(1). \text{ sík : } \sigma_{(1)} &= \frac{M}{I_x} \cdot y_{(1)} = \frac{2,6 \cdot 10^6}{87,5 \cdot 10^4} \cdot 23,4 = 69,5 \text{ MPa} \\
(2). \text{ sík : } \sigma_{(2)} &= \frac{M}{I_x} \cdot y_{(2)} = \frac{2,6 \cdot 10^6}{87,5 \cdot 10^4} \cdot 13,4 = 39,8 \text{ MPa} \\
(3). \text{ sík : } \sigma_{(3)} &= \frac{M}{I_x} \cdot y_{(3)} = \frac{2,6 \cdot 10^6}{87,5 \cdot 10^4} \cdot 13,4 = 39,8 \text{ MPa} \\
(4). \text{ sík : } \sigma_{(4)} &= \frac{M}{I_x} \cdot y_{(4)} = \frac{2,6 \cdot 10^6}{87,5 \cdot 10^4} \cdot 0 = 0 \text{ MPa} \\
(5). \text{ sík : } \sigma_{(5)} &= \frac{M}{I_x} \cdot y_{(5)} = \frac{2,6 \cdot 10^6}{87,5 \cdot 10^4} \cdot (-56,6) = -168,2 \text{ MPa}
\end{aligned} \tag{P.5.31}$$

A SZÁLHOSSZAK ÉS A STATIKAI ELSŐRENDŰ NYOMATÉKOK

A meghatározásokat az (1.21-1). kapcsolat segítségével végezzük el.

$$\begin{aligned}
(1). \text{ sík : } \xi_1 &= 80 \text{ mm} ; S_{x(1)} = 0 \text{ mm}^3 \\
(2). \text{ sík : } \xi_2 &= 80 \text{ mm} ; S_{x(2)} = (80 \cdot 10) \cdot 18,4 = 14720 \text{ mm}^3 \\
(3). \text{ sík : } \xi_3 &= 10 \text{ mm} ; S_{x(3)} = S_{x(2)} = 14720 \text{ mm}^3 \\
(4). \text{ sík : } \xi_4 &= 10 \text{ mm} ; S_{x(4)} = (80 \cdot 10) \cdot 18,4 + (10 \cdot 13,4) \cdot (0,5 \cdot 13,4) = 15618 \text{ mm}^3 \\
(5). \text{ sík : } \xi_5 &= 10 \text{ mm} ; S_{x(5)} = 0 \text{ mm}^3
\end{aligned}$$

(P.5.32)

A TANGENCIÁLIS FESZÜLTSEGEK

A meghatározásokat az (5.118). kapcsolat segítségével végezzük el.

$$\begin{aligned}
(1). \text{ sík : } \tau_{(1)} &= \frac{T \cdot S_{x(1)}}{I_x \cdot \xi_1} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 0}{87,5 \cdot 10^4 \cdot 80} = 0 \text{ MPa} \\
(2). \text{ sík : } \tau_{(2)} &= \frac{T \cdot S_{x(2)}}{I_x \cdot \xi_2} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 14720}{87,5 \cdot 10^4 \cdot 80} = 0,5 \text{ MPa} \\
(3). \text{ sík : } \tau_{(3)} &= \frac{T \cdot S_{x(3)}}{I_x \cdot \xi_3} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 14720}{87,5 \cdot 10^4 \cdot 10} = 4,2 \text{ MPa} \\
(4). \text{ sík : } \tau_{(4)} &= \frac{T \cdot S_{x(4)}}{I_x \cdot \xi_4} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 15618}{87,5 \cdot 10^4 \cdot 10} = 4,5 \text{ MPa} \\
(5). \text{ sík : } \tau_{(5)} &= \frac{T \cdot S_{x(5)}}{I_x \cdot \xi_5} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 0}{87,5 \cdot 10^4 \cdot 0} = 0 \text{ MPa}
\end{aligned} \tag{P.5.33}$$

A FŐFESZÜLTSEGEK

A meghatározásokat az (5.123). kapcsolat segítségével végezzük el.

$$\begin{aligned}
 (1). \text{ sík : } \sigma_{1(1)} &= \frac{\sigma_{(1)}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{(1)}^2 + 4 \cdot \tau_{(1)}^2} = \frac{69,5}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{69,5^2 + 4 \cdot 0^2} = 69,5 \text{ MPa} \\
 (2). \text{ sík : } \sigma_{1(2)} &= \frac{\sigma_{(2)}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{(2)}^2 + 4 \cdot \tau_{(2)}^2} = \frac{39,8}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{39,8^2 + 4 \cdot 0,5^2} = 39,9 \text{ MPa} \\
 (3). \text{ sík : } \sigma_{1(3)} &= \frac{\sigma_{(3)}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{(3)}^2 + 4 \cdot \tau_{(3)}^2} = \frac{39,8}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{39,8^2 + 4 \cdot 4,2^2} = 40,3 \text{ MPa} \\
 (4). \text{ sík : } \sigma_{1(4)} &= \frac{\sigma_{(4)}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{(4)}^2 + 4 \cdot \tau_{(4)}^2} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4 \cdot 4,5^2} = 4,5 \text{ MPa} \\
 (5). \text{ sík : } \sigma_{1(5)} &= \frac{\sigma_{(5)}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{(5)}^2 + 4 \cdot \tau_{(5)}^2} = \frac{-168,2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{168,2^2 + 4 \cdot 0^2} = -168,2 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

(P.5.34)

A MAXIMÁLIS FŐFESZÜLTSEG

A (P.5.34). értékek közül a maximális főfeszültség értéke ($\sigma_{1\max} = \sigma_{1(5)} = -168,2 \text{ MPa}$).

A megengedett normál feszültség értéke, a szakító szilárdság és a biztonsági tényező hányada.

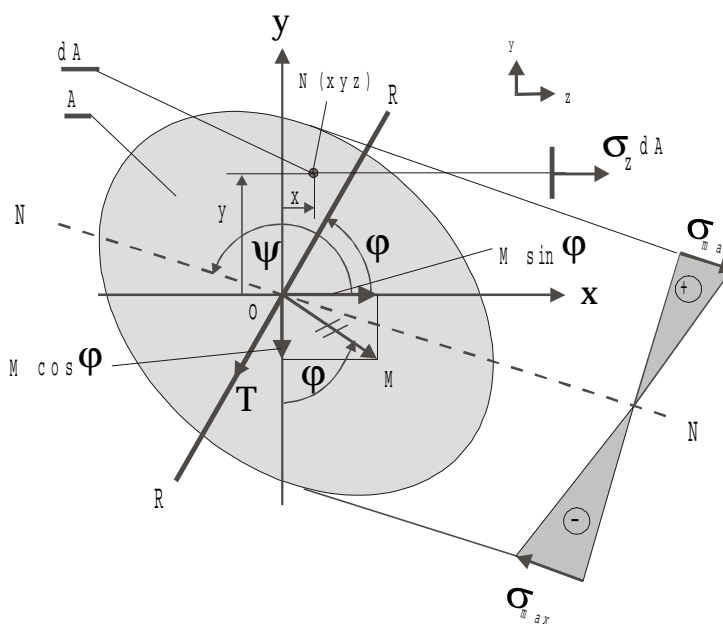
$$\sigma_D = \frac{\sigma_M}{\gamma_M} = \frac{400}{2} = \pm 200 \text{ MPa} \quad (\text{P.5.35})$$

Mivel a tényleges (σ_1) főfeszültség kisebb a (σ_D) megengedett húzószilárdságtól, a ($\gamma_M = 2$) biztonsági követelménynek eleget van téve.

$$\boxed{\sigma_1 < \sigma_D} \quad (\text{P.5.36})$$

5.1.5. ASZIMMETRIKUS (FERDE) HAJLÍTÁS

Ferde hajlításról akkor beszélünk ha az (M, T) terhelő pár egy $(R-R)$ síkban hat, mely az (yz) síkkal (φ) szöget képez. Általános esetben az $(R-R)$ síkhoz képest az (A) normálmetszet nem szimmetrikus, ezért *ASZIMMETRIKUS (ferde) HAJLÍTÁS* -ról beszélünk (5.22. ábra)



5.22. ábra

5.1.5.1. A NORMÁLFESZÜLTÉS ELOSZTLÁSA

Hasonlóképpen mint a tiszta egyenes hajlítás esetében, ezúttal is a normálfeszültség eloszlását olyan helyzetből határozzuk meg, ahol a transzverzális (T) erő értéke nulla.

Ha az (M) nyomatékot felbontjuk az (xy) súlyponti tengelyekkel párhuzamos összetevőkre,

akkor a következő egyensúlyi egyenleteket írhatjuk le:

$$\begin{aligned}\sum M_x &= \int_A \sigma dA \cdot y + M \sin \varphi = 0 \\ \sum M_y &= -\int_A \sigma dA \cdot x - M \cos \varphi = 0\end{aligned}\quad (5.129)$$

Feltételezzük, hogy ilyen esetben, a (z) távolságon lévő (A) normálmetszet (xy) helyzetben lévő (N) pontjában, a normálfeszültség eloszlása az következő:

$$\sigma = B \cdot x + C \cdot y \quad (5.130)$$

Az utóbbi feltételezés alapján az (5.130). egyenletek a következő képen alakulnak:

$$\begin{aligned}B \int_A x \cdot y \cdot dA + C \int_A y^2 \cdot dA &= -M \cdot \sin \varphi \\ B \int_A x^2 \cdot dA + C \int_A x \cdot y \cdot dA &= -M \cdot \cos \varphi\end{aligned}\quad (5.131)$$

A fenti egyenletek alapján meghatározzuk a (B, C) paramétereket:

$$\begin{aligned}B &= -M \cdot \frac{I_x \cdot \cos \varphi - I_{xy} \cdot \sin \varphi}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \\ C &= -M \cdot \frac{I_x \cdot \sin \varphi - I_{xy} \cdot \cos \varphi}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2}\end{aligned}\quad (5.132)$$

Ezek behelyettesítésével az (5.130).-es egyenletbe, a ferdehajlítás normálfeszültség eloszlásának egyenletét kapjuk:

$$\boxed{\sigma = -\frac{M}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \left[(I_x \cdot \cos \varphi - I_{xy} \cdot \sin \varphi) \cdot x + (I_y \cdot \sin \varphi - I_{xy} \cdot \cos \varphi) \cdot y \right]} \quad (5.133)$$

A megfelelő semleges sík (ψ) helyzetét a $(\sigma = 0)$ feltétel alapján határozzuk meg:

$$\begin{aligned}(I_x \cdot \cos \psi - I_{xy} \cdot \sin \psi) \cdot x + (I_y \cdot \sin \psi - I_{xy} \cdot \cos \psi) \cdot y &= 0 \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{y}{x}\end{aligned}\quad (5.134)$$

vagyis, a semleges sík a következő (ψ) szöget zárja a (x) tengellyel:

$$\boxed{\boxed{tg\psi = -\frac{I_x \cdot \cos\varphi - I_{xy} \cdot \sin\varphi}{I_y \cdot \sin\varphi - I_{xy} \cdot \cos\varphi}}} \quad (5.135)$$

Ha a (xy) tengelyeket úgy lehet kiválasztani, hogy azok megegyezzenek a főtengelyekkel, abban az esetben a CENTRIFUGÁLIS másodrendű nyomaték értéke nulla, a normálfeszültség értéke pedig (5.133). egyenlet alapján a következő:

$$\boxed{\boxed{\sigma = -M \left(\frac{\cos\varphi}{I_2} \cdot x + \frac{\sin\varphi}{I_1} \cdot y \right)}} \quad (5.136)$$

A semleges sík elhelyezése pedig a (5.135). egyenlet alapján a következő:

$$\boxed{\boxed{tg\psi = -\frac{I_1}{I_2} \cdot ctg\varphi}} \quad (5.137)$$

A (σ) normálfeszültség maximális értéke abban az (A) *felületen lévő* pontban található, melyben az (xy) koordináták maximálisak. Abban az esetben, ha az ($x=x_{max}$ és $y=y_{max}$) megfelelő helyzetben nincs anyag felület (L – szelvény), a számításokat a legtávolabb pontokban kel meghatározni, és kiválasztani a mérvadó maximális értéket.

Ha az ($x=x_{max}$ és $y=y_{max}$) megfelelő helyzetben *van anyag* felület, akkor az ekvatoriális keresztmetszet-tényezők segítségével a normálfeszültség maximális értéke a következő:

$$\boxed{\boxed{\sigma_{\max} = -M \left(\frac{\cos\varphi}{W_2} + \frac{\sin\varphi}{W_1} \right)}} \quad (5.138)$$

5.8. PÉLDA

Határozzuk meg a (σ_{\max}) maximális normálfeszültség értékét, ha az (5.7). példában a terhelési sík ($\varphi = 60^\circ$) képez az (yz) síkkal (5.1.4.3. ábra), és az ($N-N$) semleges sík (ψ) helyzet-meghatározó szöget.

A MAXIMÁLIS NORMÁLFESZÜLTÉSÉG

A meghatározásokat az (5.132). kapcsolat segítségével végezzük el. Az $(x=x_{max}$ és $y=y_{max})$ helyzetben nincsen megfelelő felület, ezért a számításokat a két szélső sarkokban kell végrehajtani. A sarkok koordinátái:

$$D(56,6 ; 23,4)$$

$$E(23,4 ; 56,6)$$

- A (D) pontnak megfelelő érték:

$$\begin{aligned}\sigma_D &= -\frac{M}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \left[(I_x \cos \varphi - I_{xy} \sin \varphi) \cdot x + \right. \\ &= \left. + (I_y \sin \varphi - I_{xy} \cos \varphi) \cdot y \right] = \\ &= -\frac{-2,6 \cdot 10^6}{87,5 \cdot 10^4 \cdot 87,5 \cdot 10^4 - (51,55 \cdot 10^4)^2} \left[(87,5 \cdot 10^4 \cdot \cos 60^\circ - 51,55 \cdot 10^4 \cdot \sin 60^\circ) \cdot 56,6 + \right. \\ &= \left. + (87,5 \cdot 10^4 \cdot \sin 60^\circ - 51,55 \cdot 10^4 \cdot \cos 60^\circ) \cdot 23,4 \right] \\ &\Downarrow \\ \sigma_D &= 11,8 \text{ MP}\end{aligned}$$

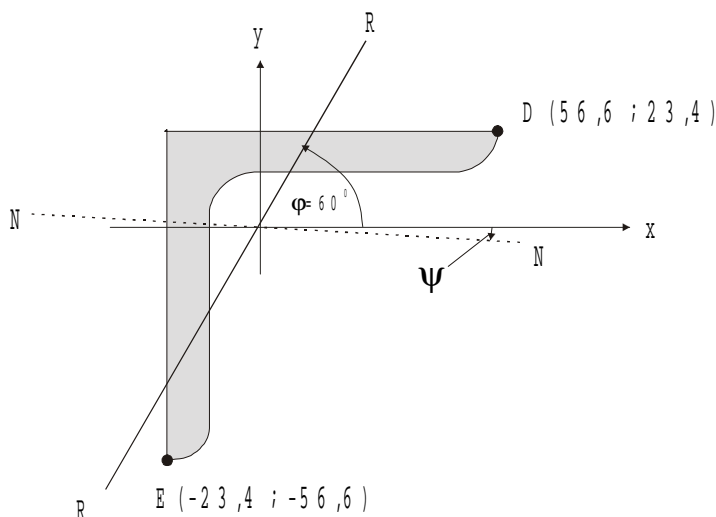
- A (E) pontnak megfelelő érték:

$$\begin{aligned}\sigma_E &= -\frac{M}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \left[(I_x \cos \varphi - I_{xy} \sin \varphi) \cdot x + \right. \\ &= \left. + (I_y \sin \varphi - I_{xy} \cos \varphi) \cdot y \right] = \\ &= -\frac{-2,6 \cdot 10^6}{87,5 \cdot 10^4 \cdot 87,5 \cdot 10^4 - (51,55 \cdot 10^4)^2} \left[(87,5 \cdot 10^4 \cdot \cos 60^\circ - 51,55 \cdot 10^4 \cdot \sin 60^\circ) \cdot (-23,4) + \right. \\ &= \left. + (87,5 \cdot 10^4 \cdot \sin 60^\circ - 51,55 \cdot 10^4 \cdot \cos 60^\circ) \cdot (-56,6) \right] \\ &\Downarrow \\ \sigma_D &= -146,56 \text{ MPa}\end{aligned}$$

- A maximális normálfeszültség (nyomó):

$$\boxed{\sigma_{\max} = \sigma_E = -146,56 \text{ MPa}}$$

(P.5.37)



5.1.4.3. ábra

A SEMLEGES SÍK HELYZETÉ

A meghatározásokat az (5.134). kapcsolat segítségével végezzük el.

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{I_x \cos \varphi - I_{xy} \sin \varphi}{I_y \sin \varphi - I_{xy} \cos \varphi} = -\frac{87,5 \cdot 10^4 \cdot \cos 60^\circ - 51,55 \cdot 10^4 \cdot \sin 60^\circ}{87,5 \cdot 10^4 \cdot \sin 60^\circ - 51,55 \cdot 10^4 \cdot \cos 60^\circ}$$

$$\Downarrow$$

$\psi = -1,03^\circ$

(P.5.38)

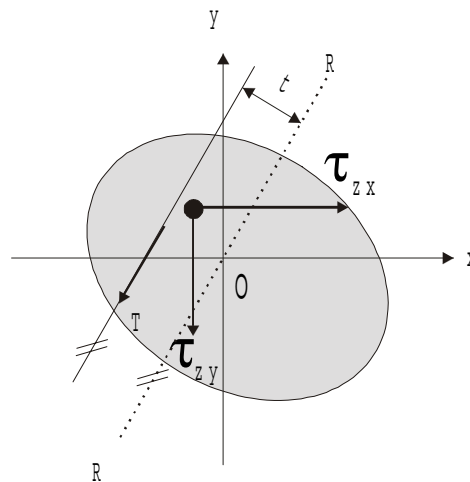
5.1.5.2. A TANGENCIÁLIS FESZÜLTÉG ELOSZLÁSA

Szimmetrikus normálmetszet esetében, amikor a terhelő sík megegyezett az (yz) szimmetriasíkkal, a tangenciális feszültség szintén szimmetrikusan helyezkedett el.

Abban az esetben ha a normálmetszet aszimmetrikus, vagy a terhelési sík nem egyezik meg a szimmetriasíkkal, (ferde) *ASZIMETRIKUS TANGENCIÁLIS FESZÜLTÉGI ÁLLAPOT* jön létre, ami a metszet csavarodását idézi elő. Ilyen esetben a Zsukovszki féle tangenciális feszültségi eloszlási modell nem érvényes, illetve számolni kell az (R-R) terhelősíkra

merőlegesen működő tangenciális feszültségekre is (5.21. ábra).

Az említett csavarodás egy pont körül történik. Ezt a pontot *CSAVARÁSI KÖZÉPPONT* -nak hívjuk.



5.23. ábra

A csavarodást úgy lehet kiküszöbölni, hogy a (T) transzverzális erőt párhuzamosan kimozdítjuk (t) távolságra az eredeti (R - R) terhelősíktól mérve úgy, hogy az eredő csavaró nyomaték értéke nulla legyen:

$$\sum M_0 = \int_A (\tau_{zx} \cdot y - \tau_{zy} \cdot x) dA - T \cdot t = 0$$

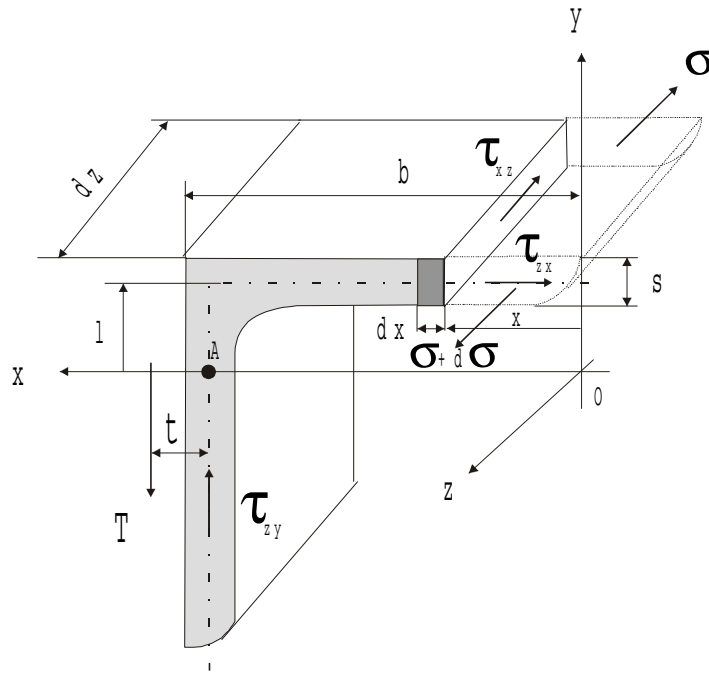
\Downarrow

$$t = \frac{\int_A (\tau_{zx} \cdot y - \tau_{zy} \cdot x) dA}{T}$$

(5.139)

5.9. PÉLDA

Az (5.7). példában használt szelvénynél, és az (yz) terhelősis igénybevételével, meg kell határozni a (t) csavarodási központ vízszintes elhelyezését.



5.1.4.4. ábra

A szelvény normálmetszetének terhelési irányába nem létezik szimmetriatengely, amiből arra lehet következtetni, hogy ha a (T) terhelés a súlypontban hat, szelvénycsavarodás jön létre. Az utóbbi kiküszöbölését úgy éadjuk el, hogy a (T) erő hatópontját elmozdítjuk (t) értékkel párhuzamosan annyira, hogy a szelvényben működő tangenciális feszültségek és az aktív (T) erő nyomatéki egyensúlyi rendszert képeznek. Célszerű az (y) tengelyt elhelyezni a szelvény végső jobb oldalával, az (x) tengelyt pedig balra irányítani (5.1.4.4. ábra). A (τ_{xz} , τ_{zy}) tangenciális feszültségek a szelvény gerince mentén helyezkednek el. A keresztirányú tangenciális értékeket figyelmen kívül lehet hagyni, mivel értékük viszonylag kicsi. A nyomatékokat az (A) pontra kel számítani, mert erre a pontra a szelvény merőleges gerincrésében működő (τ_{zy}) tangenciális feszültségek, és a megfelelő erők (kar hiányában) nem eredményeznek nyomatékokat.

A szelvény jobb végétől (x) távolságon lévő metszetben (τ_{xz}) tangenciális feszültség működik. A konjugációs elv szerint a szelvény vízszintes gerincében (τ_{zx}) tangenciális feszültség hat. A két feszültség megegyezik:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (\text{P.5.39})$$

A (z) irányra merőleges (xS) oldalakon (σ , $\sigma + d\sigma$) normál feszültségek működnek. A feltüntetett normál és tangenciális feszültségek a működtető felületeken erőket hoznak létre, melyek egyensúlyi rendszert alkotnak.

Írjuk le a (z) irányra érvényes egyensúlyi egyenletet:

$$(\sigma + d\sigma) \cdot (x \cdot S) - \sigma \cdot (x \cdot S) - \tau_{xz} \cdot S \cdot dz = 0 \quad (\text{P.5.40})$$

Használjuk fel a (P.5.39). kapcsolatban feltüntetett egyenlőséget, és a (P.5.40). egyenletet rendezzük át:

$$\tau_{zx} = \frac{d\sigma}{dz} \cdot x \quad (\text{P.5.41})$$

Az (5.110). egyenlet alapján, az ($y=l$) távolságon az (x) tengelytől a normálfeszültség értéke:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot y = \frac{M}{I_x} \cdot l \quad (\text{P.5.42})$$

Végezzük el az utóbbi egyenlet derivációját (z) szerint.

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{l}{I_x} \cdot \frac{dM}{dz} \quad (\text{P.5.43})$$

Használva az (5.102). kapcsolatot, az előző egyenlet formája a következő:

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{l}{I_x} \cdot T \quad (\text{P.5.44})$$

Ha be helyettesítjük a (P.5.44). kapcsolatot a (P.5.41). egyenletbe, a (τ_{zx}) tangenciális feszültséget határozzuk meg az (x) helyzet függvényeként.

$$\tau_{zx} = \frac{l}{I_x} \cdot T \cdot x \quad (\text{P.5.45})$$

A szelvény merőleges gerincében a (τ_{zy}) tangenciális feszültség az (5.118). kapcsolatból határozzuk meg, de mivel a nyomatéki egyenletet az (A) pontra számítjuk (a gerincen helyezkedik el), a (τ_{zy}) feszültségből és a megfelelő felületekből származó erők nem adnak nyomatékokat.

A (t) csavarási középpont elmozdulását a már említett (5.139). kapcsolatból határozzuk meg. Az (A) pont helyzetének kiválasztása révén, a keretben lévő második tag értéke nulla, vagyis:

$$t = \frac{\int_A \tau_{zx} \cdot y \cdot dA}{T} \quad (\text{P.5.46})$$

Helyettesítjük be a (P.5.45). értéket a (P.5.46). egyenletbe, és rendezzük az egyenletet, tudva, hogy ($y=l$).

$$t = \frac{\int_A \left(\frac{l}{I_x} \cdot T \cdot x \right) \cdot l \cdot s \cdot dx}{T}$$

$$t = \frac{\int_0^b \left(\frac{l}{I_x} \cdot T \cdot x \right) \cdot l \cdot s \cdot dx}{T} = \frac{l^2 \cdot S}{I_x} \int_0^b x \cdot dx \quad (\text{P.5.47})$$

⇓

$$t = \frac{l^2 \cdot b^2 \cdot S}{2 \cdot I_x} \quad (\text{P.5.48})$$

Végül behelyettesítjük a megfelelő numerikus értékeket:

$$t = \frac{18,4^2 \cdot 80^2 \cdot 10}{2 \cdot 87,5 \cdot 10^4}$$

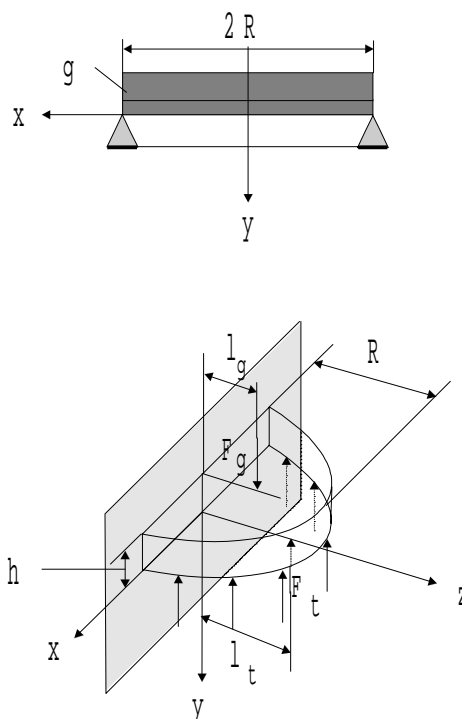
$$\Downarrow$$

$$t = 0,15 \text{ mm}$$

(P.5.49)

5.1.6. SÍK LEMEZ HAJLÍTÁS

Ha a rúd magassága, a hossz és a szélességhez képest kis értékű, és ha a támaszok nem egyenes (nyitott, vagy zárt) vonalat képeznek, akkor *SÍK LEMEZ* -ről van szó.



5.24. ábra

A sok változat közül, a (5.24). ábrán feltüntetett esetet fogjuk részletesen feldolgozni. Ez esetben $(2R)$ átmérőjű kör alakú, (h) vastagságú sík lemeztől van szó, mely egész peremével támaszkodik, a megterhelése pedig (g) kontinuális.

Ilyen esetben a (σ) normál feszültség értékének meghatározására használt módszert BACH javasolta. A módszert *BACH MEGKÖZELÍTŐ MÓDSZER* -nek nevezik.

Mérések igazolják, hogy a normál feszültség maximális értéke a lemez középpontjában jelentkezik. Emiatt, a módszert követve feltételezzük, hogy a lemez a merőleges szimmetriasík metszetében van befogva. Így a félkörtámaszból nyert (F_t) reakció erő, és a külső (F_g) eredő aktív erő egyensúlyban vannak és megegyeznek.

$$F_R = F_t = \frac{R^2 \pi}{2} \cdot g \quad ; \quad g = \frac{N}{m^2} \quad (5.140)$$

Az utóbbi erőknek a hatópontjai a következők:

$$l_t = \frac{2R}{\pi} \quad ; \quad l_g = \frac{4R}{3\pi} \quad (5.141)$$

Írjuk le a befogásra számított nyomatéki egyensúlyi egyenletet:

$$\sum M_x = F_g \cdot l_g - F_t \cdot l_t = 0 \quad (5.142)$$

Az előző egyenletbe helyettesítjük be az (5.140, 5.141.) értékeket:

$$\begin{aligned} \frac{R^2 \pi}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{4R}{3\pi} - \frac{2R}{\pi} \right) &= M \\ \Downarrow \\ M &= \frac{R^3 \cdot g}{3} \end{aligned} \quad (5.143)$$

Vegyük igénybe az (5.111). kapcsolatot, és helyettesítjük be az (5.143). nyomaték, valamint a keresztmetszet tényező értékét:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M}{W} = \frac{\frac{R^3 g}{3}}{\frac{2R \cdot h^2}{6}} \\ \Downarrow \\ \sigma &= g \cdot \frac{R^2}{h^2} \end{aligned} \quad (5.144)$$

Részletesebb vizsgálatok alapján a lemez síkjával párhuzamosan létrejött normálfeszültség maximális értéke, valamivel nagyobb:

$$\sigma_{\max.} = 1.24 \cdot g \cdot \frac{R^2}{h^2} \quad (5.145)$$

Ez a maximális normálfeszültség valamennyi radiális irányban működik és egyforma, így egyúttal főfeszültség is:

$$\sigma_{\max.} = \sigma_x = \sigma_z = \sigma_1 = \sigma_2 \quad ; \quad \sigma_3 = 0 \quad (5.146)$$

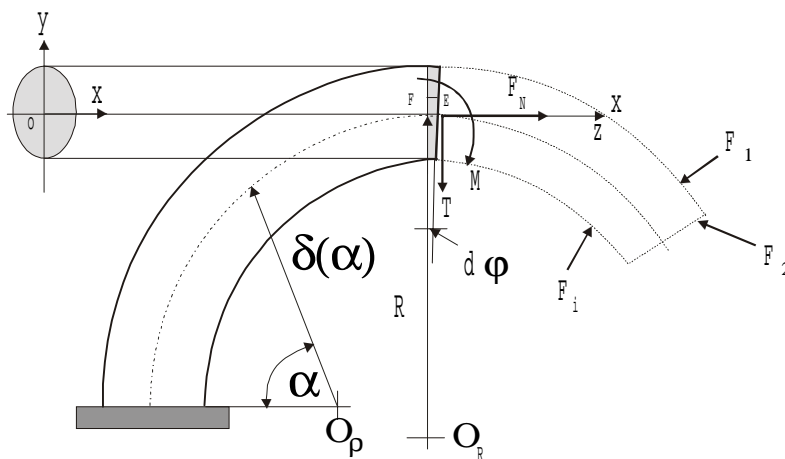
A bemutatott példán kívül több szerkezeti lemez forma létezik. Ezeknek a belső normálfeszültségek meghatározása táblázatokban vannak feltüntetve.

5.2. SÍKGÖRBE RUDAK HAJLÍTÓ IGÉNYBEVÉTELE

A síkgörbe rudak igénybevételei az egyenes tengelyű rudaktól nem különböznek. Viszont egyes elemi igénybevétel esetében (például a hajlító igénybevételnél) a belső feszültségek kisámítása, és azok eloszlása nem egyezik meg az egyenes tengelyű rudaknál meghatározott értékekkel, és eloszlási formával.

A további eljárás során egy olyan síkgörbe rudat vizsgálunk meg, mely eleget tesz a következő követelményeknek:

- Valamennyi normálmetszet szimmetrikus a geometriai tengelyt tartalmazó síkhoz képest.
- A geometriai tengelyt tartalmazó sík egyben terhelő sík is, tehát az általános igénybevétel közül csak a húzó - nyomó, nyíró és a hajlító terhelések működnek.
- A geometriai tengelyt poláris koordináta rendszerben tüntetjük fel, míg a normálmetszetet tovább is (xyz) derékszögű koordinátarendszerben jelöljük (5.25. ábra).



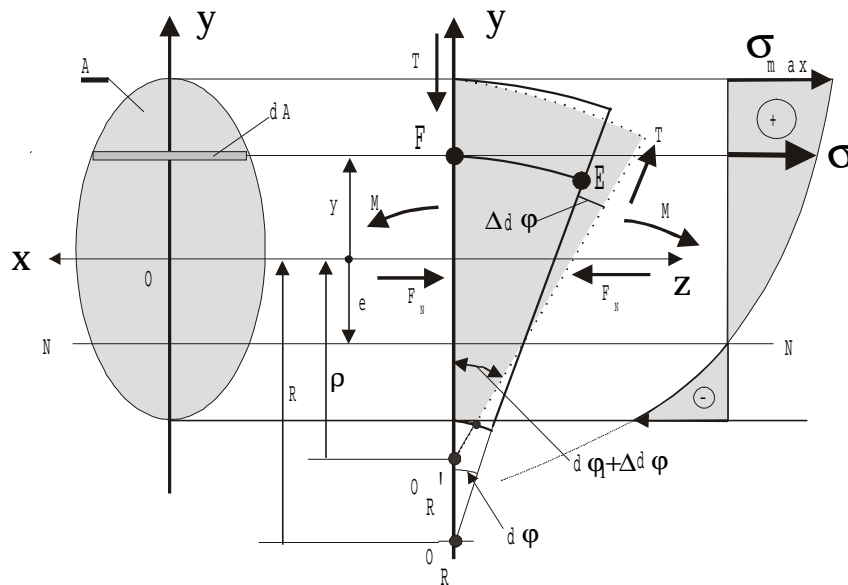
5.25. ábra

Az igénybevett terhelések közül a (T) tangenciális eredő által létrejött (τ) tangenciális feszültségeket az (5.118). egyenlet alapján határozzuk meg.

Az (M) eredő nyomaték és az (F_N) - a normálmetszetre merőleges eredő) együttesen hatnak a (σ) normálfeszültség értékeire és eloszlására, valamint a semleges sík (e) elmozdulására (5.26. ábra). Emiatt az említett igénybevételeket együttesen fogjuk vizsgálni.

Vágjunk ki a görbe tengelyű rúdból egy elemi rúdelemet, mely oldalai $(d\varphi)$ differenciális szöget zárnak (5.26. ábra). A rúdelem (O) súlypontjában a görbe geometriai tengely sugara (R) . A súlyponttól (y) távolságban egy (EF) differenciális körívet jelölünk meg.

Az (M, F_N) terhelőpár hatására, a normálmetszetben a (σ) normálfeszültségek és a $(\Delta d\varphi)$ szögelfordulások jönnek létre.



5.26. ábra

5.2.1. A NORMÁLFESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA

A rúdelem oldalainak befogó szöge az alakváltozás következtében:

$$(d\varphi + \Delta d\varphi) \quad (5.147)$$

A terhelés felvétel után a görbület (ρ) sugara, az $(N-N)$ semleges sík pedig egy (e) távolságon helyezkedik el a súlyponthoz viszonyítva. A feladat az, hogy meg kell meghatározni a $(\sigma = \sigma_{(y)})$ normálfeszültség eloszlásának, és az (e) semleges sík helyzetének meghatározása.

A számítási eljárás a következő:

Terhelés előtt az (y) távolságon lévő (EF) anyagszálnak a mérete:

$$ds = (R + y) \cdot d\varphi \quad (5.148)$$

A terhelés felvétele után, a méretelváltozások révén, a fajlagos hosszváltozás a következő:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)(d\varphi + \Delta d\varphi) - (R + y) \cdot d\varphi}{(R + y)d\varphi} = \frac{\sigma}{E} \quad (5.149)$$

Bevezetjük a következő kapcsolatot:

$$\psi = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \quad (5.150)$$

Helyettesítjük be az (5.150). egyenlet értékét a (5.149). egyenletbe, majd következőképpen rendezzük:

$$\rho(1 + \psi) - R + y \cdot \psi = \frac{\sigma}{E}(R + y) \quad (5.151)$$

Ha ($y=0$), és ennek megfelelően a ($\sigma = \sigma_o$), az (5.151). egyenlet a következőképpen alakul:

$$\rho(1 + \psi) - R = \frac{\sigma_o}{E} R \quad (5.152)$$

Az utóbbi két egyenletből, a (ρ) eliminációja (eltávolítása) után, a normálfeszültség képletét kapjuk:

$$\sigma = \sigma_o + (E\psi - \sigma_o) \frac{y}{R + y} \quad (5.153)$$

Az utóbbi összefüggésből kiderül, hogy a (σ) normálfeszültség és az (y) helyzet-meghatározó közötti kapcsolat nem lineáris (az egyenes rudaknál lineáris).

A fennálló egyensúlyi állapotot statikai egyensúlyi egyenletekkel írjuk le: (a "z" tengelyre és az "O" pontra).

$$F_N = \int_A \sigma dA \quad ; \quad M = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA \quad (5.154)$$

Az (5.153). egyenletből a (σ) értéket behelyettesítjük a (5.154). egyenletekbe:

$$\begin{aligned} F_N &= \sigma_o \int_A dA + (E\psi - \sigma_o) \int_A \frac{y}{R + y} \cdot dA \\ M &= \sigma_o \int_A y dA + (E\psi - \sigma_o) \frac{1}{R} \int_A \frac{R}{R + y} \cdot y^2 \cdot dA \end{aligned} \quad (5.155)$$

Vezessük be az (I_r) REDUKÁLT MÁSODRENDŰ NYOMATÉK fogalmát

$$\boxed{I_r = \int_A \frac{R}{R+y} \cdot y^2 dA} \quad (5.156)$$

Az (5.156). egyenlet algebrális transzformáció után:

$$\begin{aligned} I_r &= R \int_A \frac{y^2}{R+y} dA = R \int_A \frac{y}{R+y} y dA = R \int_A \frac{y+R-R}{R+y} y dA = \\ &= R \int_A \frac{y dA}{\xrightarrow{0}} - R \int_A \frac{R}{R+y} y dA = -R^2 \int_A \frac{y}{R+y} dA \\ &\quad \Downarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{I_r = -R^2 \int_A \frac{y}{R+y} dA} \quad (5.157)$$

Ha az (R) sugár végtelenül nagy (egyenes rúd), akkor a redukált másodrendű nyomaték értéke megegyezik az axiális másodrendű nyomaték értékével:

$$R \rightarrow \infty \quad \text{akor} \quad I_r \rightarrow I_x \quad (5.158)$$

Az (5.157). egyenletben lévő integrál jelölése a következő:

$$-\eta \cdot A = \int_A \frac{y}{R+y} \cdot dA \quad (5.159)$$

Így az (5.157). (I_r) redukált másodrendű nyomaték a következő (TÁBLÁZATI) formát kapja:

$$\boxed{I_r = R^2 \cdot A \cdot \eta} \quad (5.160)$$

Tudnivaló a síkidomok vizsgálatából (1.05. és 1.08. kapcsolatok) hogy:

$$\int_A dA = A \quad ; \quad \int_A y \cdot dA = 0 \quad (5.161)$$

Ha az (5.155). egyenletekbe behelyesítjük az (5.156, 5.157, 5.161). kapcsolatokat, a terhelőpár értékei a következő formákat kapják:

$$\begin{aligned}
 F_N &= \sigma_o A + (E\psi - \sigma_o) \cdot \left(-\frac{I_r}{R^2} \right) \Rightarrow \sigma_o = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{R \cdot A} \\
 M &= (E\psi - \sigma_o) \cdot \frac{I_r}{R} \Rightarrow (E\psi - \sigma_o) = \frac{M \cdot R}{I_r}
 \end{aligned}
 \tag{5.162}$$

Ha az (5.162). kapcsolatokat be helyettesítjük az (5.153). egyenletbe, a (σ) normálfeszültség, az (M, F_N) terhelőpár, valamint az (I_r) redukált másodrendű nyomaték kapcsolatát kapjuk.

$$\boxed{\sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{R \cdot A} + \frac{M}{I_r} \cdot y \cdot \frac{R}{R + y}}
 \tag{5.163}$$

Az utóbbi egyenlet alapján megállapíthatjuk, hogy az egyenestengelyű rudaknál, ellentétben a görbe tengelyű rudakkal, a normálfeszültség értéke a súlypontban NEM NULLA.

A normálfeszültség eloszlása hiperbolikus, és a maximális (elméleti) értéke a görbület középpontjában található, amikor $(y = -R)$. Az utóbbi eset nem reális, de arra utal, hogy az (R) sugár csökkentésével növekszik az anyag külső szálaiban a normálfeszültség legnagyobb - (mérvadó) értéke.

5.2.2. A SEMLEGES SÍK ELMOZDULÁSA

A semleges sík (e) helyzetét a következő feltétel alapján határozzuk meg:

$$\sigma = 0 \Rightarrow y = e
 \tag{5.164}$$

Ebben az esetben a (5.163 és 5.164). kapcsolatok alapján:

$$\frac{F_N}{A} + \frac{M}{R \cdot A} + \frac{M}{I_r} \cdot e \cdot \frac{R}{R + e} = 0
 \tag{5.165}$$

Ha az (F_N) normálerő kihatása az (e) elmozdulásra az (M) nyomaték hatásához viszonylag kis érték, akkor figyelmen kívül hagyhatjuk. Ilyen esetben az (e) semleges sík elmozdulását a következő kapcsolat képezi:

$$\boxed{e = -\frac{I_r \cdot R}{I_r + R^2 \cdot A}}
 \tag{5.166}$$

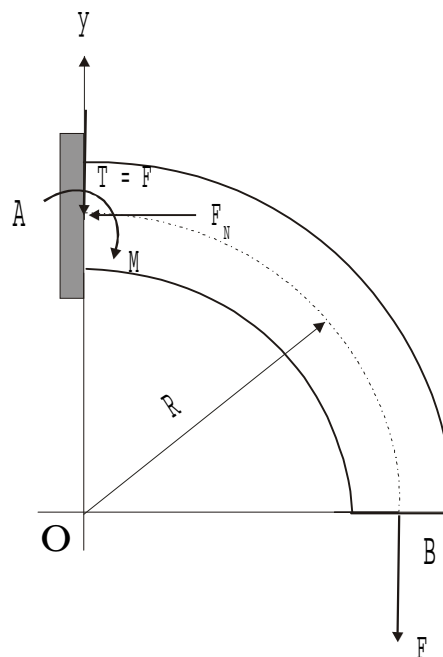
Ha az (R) görbület nagy, abban az esetben az (e) elmozdulás értéke megközelítőleg nulla:

$$R \rightarrow \infty \quad \text{akor} \quad e \approx 0 \quad (5.167)$$

5.10. PÉLDA

Az (5.2.1). ábrán bemutatott tartó $(D=108 \text{ mm}, d=105,5 \text{ mm})$ csőből van kiépítve. A cső anyagának jellemzői $(\sigma_M = 400 \text{ MPa}, E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa})$. A görbület mértéke $(R=100 \text{ mm})$. A szerkezet biztonsági tényezője (γ_M) .

Meg kell határozni a tartó (B) végén ható (F) megengedett terhelés értékét, valamint az (e) semleges sík elmozdulását.



5.2.1. ábra

MEGENGEDETT NORMÁLFESZÜLTÉSÉG

$$\sigma_D = \frac{\sigma_M}{\gamma_M} = \frac{400}{2}$$

↓

$$\sigma_D = 200 \text{ MPa} \quad (P.5.50)$$

REDUKÁLT TERHELŐPÁR

A maximális megterhelések az (A) befogópontban jönnek létre, és a megfelelő értékei a következők:

$$\begin{aligned} F_N &= 0 \text{ N} \\ T &= F \\ M &= F \cdot R \text{ Nmm} \end{aligned} \quad (\text{P.5.51})$$

A SÍKIDOM JELLEMZŐI

- Felület:

$$\begin{aligned} A &= \frac{D^2 - d^2}{4} \cdot \pi = \frac{108^2 - 100,5^2}{4} \cdot \pi \\ &\quad \Downarrow \\ A &= 1228 \text{ mm}^2 \end{aligned} \quad (\text{P.5.52})$$

- Redukált másodrendű nyomaték.

A megfelelő műszaki táblázat alapján meghatározzuk a (η) paramétert a (D, d, R) értékek alapján:

$$\eta \cong 0,00068$$

Az (I_r) redukált másodrendű nyomatékot az (5.160). kapcsolat alapján határozzuk meg.

$$\begin{aligned} I_r &= R^2 \cdot A \cdot \eta = 1000^2 \cdot 1228 \cdot 0,00068 \\ &\quad \Downarrow \\ I_r &= 835040 \text{ mm}^4 \end{aligned} \quad (\text{P.5.53})$$

A MEGENGEDETT TERHELÉS

A meghatározást az (5.163, P.5.50). kapcsolatokat alapján:

$$\sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{R \cdot A} + \frac{M}{I_r} \cdot y \cdot \frac{R}{R + y} \leq \sigma_D$$

Helyettesítjük be az előző egyenletbe a (P.5.51). értékeket:

$$\frac{F \cdot R}{R \cdot A} + \frac{F \cdot R}{I_r} \cdot y \cdot \frac{R}{R + y} \leq \sigma_D$$

$$\Downarrow$$

$$F \leq \pm \sigma_D \cdot \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{R^2}{I_r} \cdot \frac{y}{R + y}} \quad (\text{P.5.54})$$

Az (y) ($\pm 54 \text{ mm}$) értékeket vehet fel. Emiatt az (F) erők értékeit úgy határozzuk meg, hogy a (P.5.5.4). kapcsolatba be helyettesítjük sorban az (y , A , R , I_r) értékeket. A számítások eredményei a következők:

$$F_{y=54} = 3217,7 \text{ N}$$

$$F_{y=-54} = 2960,9 \text{ N}$$

A megengedett terhelést, az utóbbi két érték közül választjuk ki, mint a kisebb értéket:

$$\boxed{F \leq F_{y=-54} = 2960,9 \text{ N}} \quad (\text{P.5.55})$$

A SEMLEGES SÍK ELMOZDULÁSA

A meghatározást az (5.166). kapcsolat alapján végezzük el.

$$e = -\frac{I_r \cdot R}{I_r + R^2 \cdot A} = -\frac{835040 \cdot 1000}{835040 + 1000^2 \cdot 1228}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{e = -0,67 \text{ mm}} \quad (\text{P.5.56})$$

5.3. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL

Ha egy tetszőlegesen kiválasztott normálmetszeten egyidejűleg több alap igénybevétel hat, vagy ha egy igénybevétel több összetevőből áll, akkor *ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL* -ről van szó.

Attól függően, hogy milyen igénybevételekről van szó, a következő esetek lehetők:

- LINEÁRIS ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL. Így nevezzük azokat az eseteket, amikor az összetevő feszültségek egyirányúak (húzó-nyomó + hajlító, csavaró + nyíró,...)
- SÍKBELI ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL. Így nevezzük azokat az eseteket, amikor az összetevő feszültségek egy síkban működnek (nyíró + hajlító, csavaró + húzó-nyomó,...)
- TÉRBELI ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL. Így nevezzük azokat az eseteket, amikor az összetevő feszültségek térben működnek (nyíró + hajlító + csavaró,...)

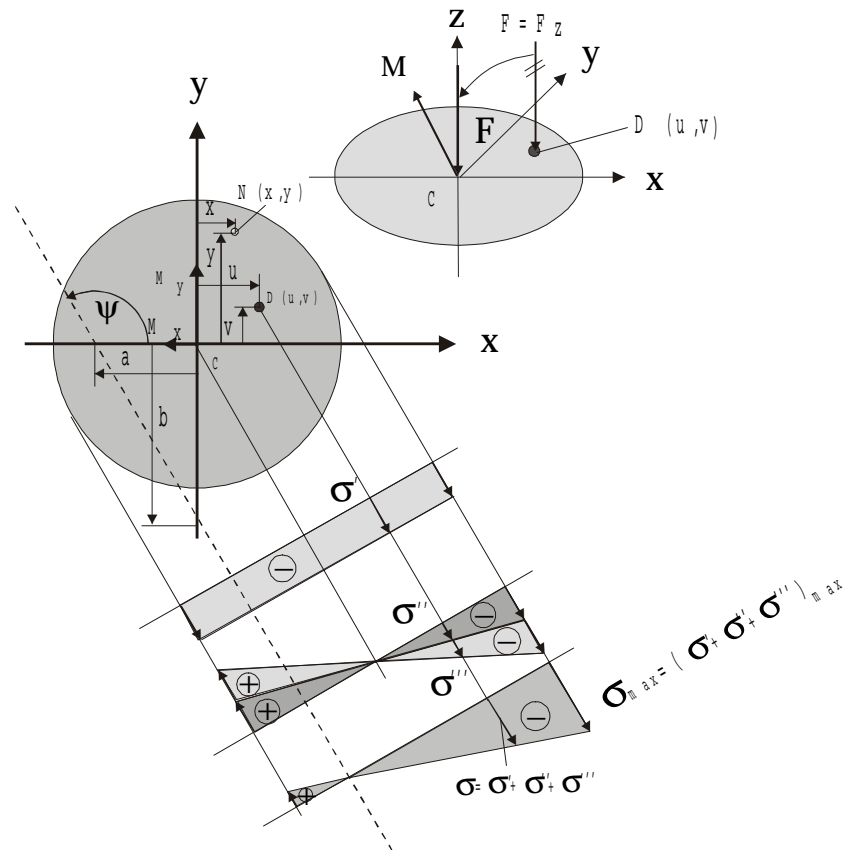
Összetett igénybevétel esetén a szuperpozíciós elv érvényesül, vagyis valamennyi egyjellegű feszültséget összelehet, adni és így meghatározni az eredő feszültséget. A főfeszültségek meghatározása a (2.24). részben bemutatott eljárás szerint történik.

Az egyenes hajlító igénybevételnél találoztunk az összetett síkbeli igénybevétellel (tisztá hajlító + nyíró). A folytatásban egy gyakran használt lineáris összetett igénybevételt vizsgálunk meg.

5.3.1. KÜLPONTOS HÚZÓ-NYOMÓ IGÉNYBEVÉTEL

Ha a húzást, vagy a nyomást idéző ($F=F_z$) erő nem a súlypontban működik, hanem egy $D(u,v)$ koordinátájú külpontban (5.27. ábra), akkor külpontos húzó-nyomó igénybevételről van szó.

Ha a (D) külpontban működő erőt redukáljuk a (C) súlypontra, egy (F, M) terhelőpára teszünk szert. Az (M) nyomatékot felbontjuk két összetevőre, melyek irányai megegyeznek az (xy) koordináta-rendszer tengelyeivel. Ily módon egy (M_x, M_y, F) redukált terhelő-rendszert kapunk, mely egy összetett igénybevételt képez (két tisztá hajlító és egy nyomó)



5.27. ábra

Tüntetjük fel sorban, egy $N(xy)$ koordinátákban lévő pontban, az egyes összetevő igénybevételekből eredő normálfeszültségeket:

NYOMÓ:

$$\sigma' = -\frac{F}{A} \quad (5.168)$$

TISZTA HAJLÍTÓ az (x) tengely körül:

$$\sigma'' = -\frac{M_y}{I_y} \cdot x = -\frac{F \cdot u}{I_y} \cdot x \quad (5.169)$$

TISZTA HAJLÍTÓ az (y) tengely körül:

$$\sigma''' = -\frac{M_x}{I_x} \cdot y = -\frac{F \cdot v}{I_x} \cdot y \quad (5.170)$$

Az összetett normálfeszültség érték:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' \quad (5.171)$$

Helyettesítjük be az utóbbi egyenletbe az (5.168, 5.169, 5.170). értékeket:

$$\boxed{\sigma = -F \left(\frac{1}{A} + \frac{u}{I_y} \cdot x + \frac{v}{I_x} \cdot y \right)} \quad (5.172)$$

Az összetett normálfeszültség maximális értékét egyértelműen akkor lehet meghatározni, ha a (D) külpont és az (x_{\max} , y_{\max}) koordinátában elhelyezett (N) pont egy kvadránsban vannak.

$$\sigma_{\max} = -F \left(\frac{1}{A} + \frac{u}{I_y} \cdot x_{\max} + \frac{v}{I_x} \cdot y_{\max} \right) \quad (5.173)$$

A többi esetekben ki kell választani a maximális értékű normálfeszültséget, mely megfelel a felület egyik külső sarkának.

A semleges sík helyzetét a normálfeszültség nulla értékéből határozzuk meg:

$$\frac{1}{A} + \frac{u}{I_y} \cdot x + \frac{v}{I_x} \cdot y = 0 \Rightarrow 1 + \frac{u}{\frac{I_y}{A}} \cdot x + \frac{v}{\frac{I_x}{A}} \cdot y = 0 \quad (5.174)$$

Vezessük be az MÁSDRENDŰ RÁDIUSZ fogalmát:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} \quad ; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} \quad (5.175)$$

A másodrendű rádiusz igénybevétele a (5.174). egyenletet átrendezés után a következőképpen lehet leírni:

$$\frac{x}{\frac{i_y^2}{u}} + \frac{y}{-\frac{i_x^2}{v}} = 1 \quad (5.176)$$

Vezessük be a következő megjelöléseket:

$$\begin{aligned} x_{(y=0)} &= a = -\frac{i_y^2}{u} \\ y_{(x=0)} &= b = -\frac{i_x^2}{v} \end{aligned} \quad (5.177)$$

A semleges sík a koordinátarendszer központjától (a, b) távolságon metszi az (xy) tengelyeket.

A semleges sík a következő szöget képezi az (x) tengellyel:

$$\boxed{\psi = \arctg\left(-\frac{b}{a}\right) = \arctg\left(-\frac{u}{v} \cdot \frac{I_x}{I_y}\right)} \quad (5.178)$$

5.11. PÉLDA

Az (5.3.1.a). ábrán bemutatott spirál rugót a tengely irányban (F) erő terheli. A rugó anyagára jellemző a (G) nyíró rugalmassági tényező, és a (τ_d) megengedett csavarási feszültség.

Meg kell határozni a rugó szál (d) átmérőjét, és a (C) merevségi tényezőt.

A RUGÓ MÉRTANI JELLEMZŐI

$$H = n \cdot t \quad ; \quad l = D \cdot \pi \cdot n \quad ; \quad f = \varphi \cdot \frac{D}{2}$$

Ahol :

n – a rugó csavarszáma

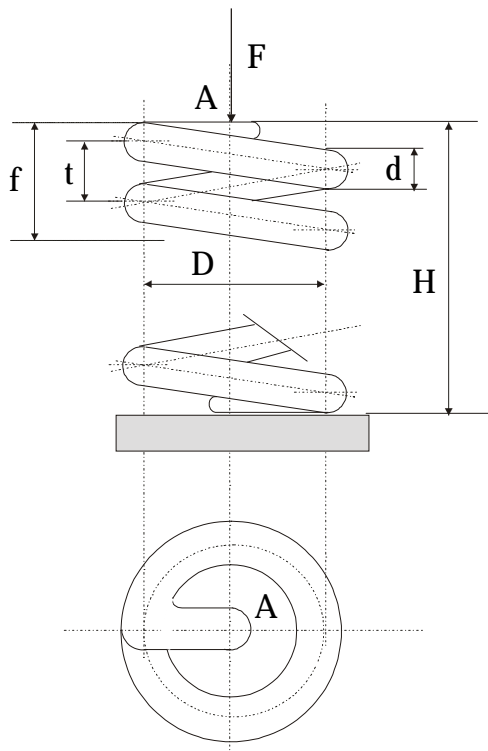
l – a rugó szálának hossza

φ – a csavarodásból származó szögelfordulás

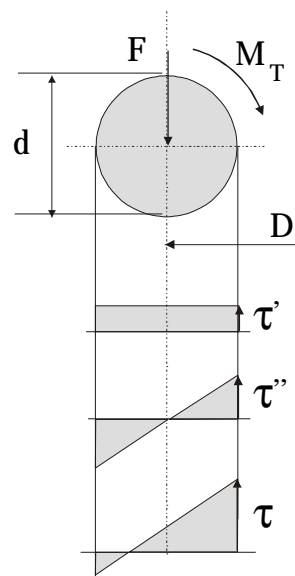
f – a rugó merőerőlegányú hosszváltozása

(P.5.57)

A spirálrugó szerkezetéből kifolyólag, valamennyi mérőleges normálmetszetre (5.3.1.b. ábra) redukálni lehet az (F) erőt mint egy (F , M_T) terhelőpárt. Az (F) erő (τ') tangenciális feszültséget, az (M_T) nyomaték pedig (τ'') tangenciális feszültséget hoznak létre. A feszültségek eloszlását az (5.3.1.b.), ábrán látható. Az összetevő (τ' , τ'') tangenciális feszültségek egy síkban működnek. A vektorösszeg maximális értékét akkor éri, el ha az egyirányú működési helyzetet vesszük igénybe.



5.3.1.a. ábra



5.3.1.b. ábra

AZ ÖSSZETETT FESZÜLTÉS

$$\tau = \tau' + \tau'' \quad (\text{P.5.58})$$

AZ (F) ERŐ HATÁSÁRA LÉTREJÖTT TANGENCIÁLIS FESZÜLTÉS

A meghatározást a (5.62). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\tau' = \frac{F}{A} = \frac{4 \cdot F}{d^2 \pi} \quad (\text{P.5.59})$$

AZ (M_T) NYOMATÉK HATÁSÁRA LÉTREJÖTT TANGENCIÁLIS FESZÜLTSEG

A meghatározást a (5.79). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\tau'' = \frac{M_T}{W_0} = \frac{F \cdot \frac{D}{2}}{\frac{d^3 \pi}{16}} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{d^3 \pi} \quad (\text{P.5.60})$$

Helyettesítjük be a (P.5.59, P.5.60). értékeket a (P.5.58). egyenletbe:

$$\tau = \frac{4 \cdot F}{d^2 \pi} + \frac{8 \cdot F \cdot D}{d^3 \pi} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{d^3 \pi} \left(1 + \frac{2 \cdot d}{D} \right) \quad (\text{P.5.61})$$

Az utóbbi egyenletben a $\left(\frac{2 \cdot d}{D} \right)$ viszonylag kis érték, így figyelmen kívül hagyhatjuk, vagyis:

$$\tau = \frac{8 \cdot F \cdot D}{d^3 \pi} \quad (\text{P.5.62})$$

A RUGÓ HOSSZVÁLTOZÁSA

$$f = \varphi \cdot \frac{D}{2} \quad (\text{P.5.63})$$

A (5.85). egyenlet alapján, használva a (P.5.57). kapcsolatokat, szögelfordulási egyenlet formáját kapjuk:

$$\varphi = \frac{M_T \cdot l}{G \cdot I_0} = \frac{F \cdot \frac{D}{2} \cdot D \cdot \pi \cdot n}{G \cdot \frac{d^4 \pi}{32}} = \frac{16 \cdot F \cdot D^2}{G \cdot d^4} \cdot n \quad (\text{P.5.64})$$

Ha a (P.5.64). szögelfordulás értékét be helyettesítjük a (P.5.63). egyenletbe, akkor a rugó hosszváltozását határozzuk meg:

$$f = \frac{8 \cdot F \cdot D^3}{G \cdot d^4} \cdot n \quad (\text{P.5.65})$$

A HUZAL ÁTMÉRŐJÉNEK MEGHATÁROZÁSA

- A (P.5.62). kapcsolat szerint, a meghatározást úgy végezzük el, hogy a (τ) tangenciális feszültség ne haladja meg a (τ_b) megengedett csavaró szilárdság értékét.

$$\tau = \frac{8 \cdot F \cdot D}{d^3 \pi} \leq \tau_D$$

$$\Downarrow$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{8 \cdot F \cdot D}{\tau_D \cdot \pi}}$$

(P.5.66)

- A (P.5.65). kapcsolat szerint pedig:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{8 \cdot F \cdot D^3}{G \cdot f} \cdot n}$$

(P.5.67)

A MEREVSÉGI TÉNYEZŐ

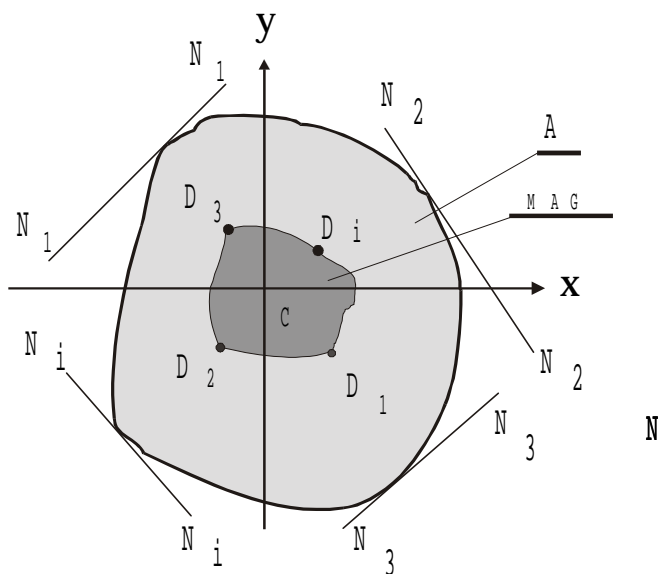
A meghatározást a (P.5.65). kapcsolat alapján végezzük el ($C = F / f$):

$$C = \frac{G}{8 \cdot n} \cdot \frac{d^4}{D^3}$$

(P.5.68)

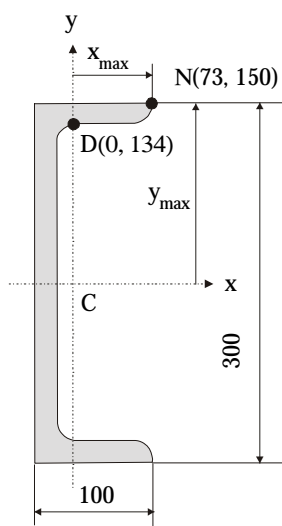
5.3.1.1. A MAG MEGHATÁROZÁSA

Az (5.177). egyenletből látható, hogy a semleges sík (a , b) távolságokon metszi az (xy) koordináta-rendszer tengelyeit, miközben ezek a távolságok az (F) erő $D(u, v)$ koordinátáktól függenek. Eszerint, meglehet határozni egy olyan (D) ponthalmazt, melyben az (F) erő hatása következtében a semleges sík az (A) normálmetszet kívül marad, vagy érinti a metszetet. Az ily módon meghatározott ponthalmazt (felületet) MAG -nak nevezzük (**5.28.** ábra). Mivel így a semleges sík az (A) normálmetszetet nem metszi, a normálmetszet *csak nyomásra*, vagy *csak húzásra* van terhelve (például a gépek alapjai csak nyomást gyakorolhatnak a talajra, stb....).



5.28. ábra

5.12. PÉLDA



5.3.2. ábra

A (5.32). ábrán bemutatott (JUS CB.141). szabványos szelvényt egy ($F=50\text{ KN}$) erő terhe. A terhelési (D) külpont koordinátái ($0, 134$).

Meg kell határozni a legnagyobb normálfeszültség értékét, valamint a MAG felületi elhelyezését.

A SZELVÉNY MÉRTANI JELLEMZŐI

$$\begin{aligned} A &= 5880\text{ mm}^2 \\ I_x &= 8030 \cdot 10^4\text{ mm}^4 \\ I_y &= 495 \cdot 10^4\text{ mm}^4 \end{aligned} \quad (\text{P.5.69})$$

A NORMÁLFESZÜLTÉG MAXIMÁLIS ÉRTÉKE

A meghatározást az (5.173). kapcsolat alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= -F \left(\frac{1}{A} + \frac{u}{I_y} \cdot x_{\max} + \frac{v}{I_x} \cdot y_{\max} \right) = \\ &= -50000 \left(\frac{1}{5880} + \frac{0}{495 \cdot 10^4} \cdot 73 + \frac{134}{8030 \cdot 10^4} \cdot 150 \right) \\ &\quad \Downarrow \\ \boxed{\sigma_{\max} = 21\text{ MPa}} \end{aligned} \quad (\text{P.5.70})$$

A MAG MEGHATÁROZÁSA (5.3.3. ábra)

A meghatározást az (5.177). kapcsolatokat alapján végezzük el.

A másodrendű sugarakat az (5.175). kapcsolatokat alapján határozzuk meg.:

$$\begin{aligned} i_x^2 &= \frac{I_x}{A} = \frac{8030 \cdot 10^4}{5880} = 13656 \\ i_y^2 &= \frac{I_y}{A} = \frac{495 \cdot 10^4}{5880} = 841 \end{aligned} \quad (\text{P.5.71})$$

- Az ($N_i - N_i$) semleges síknak megfelelő (D_i) terhelési hely (u_i, v_i) koordinátái a következők:

$$\begin{aligned} a = \infty \quad ; \quad b = 150 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\frac{i_y^2}{a} = -\frac{841}{\infty} = 0 \quad ; \quad v_1 = -\frac{i_x^2}{b} = -\frac{13656}{150} \\ \Downarrow \\ D_1(0, -91) \end{aligned} \quad (\text{P.5.72})$$

- Az $(N_2 - N_2)$ semleges síknak megfelelő (D_2) terhelési hely (u_2, v_2) koordinátái a következők:

$$a = \infty \quad ; \quad b = 150 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\frac{i_y^2}{a} = -\frac{841}{\infty} \quad ; \quad v_1 = -\frac{i_x^2}{b} = -\frac{13656}{150}$$

$$\Downarrow$$

$$D_2(0, 91)$$
(P.5.73)

- Az $(N_3 - N_3)$ semleges síknak megfelelő (D_3) terhelési hely (u_3, v_3) koordinátái a következők:

$$a = 73 \quad ; \quad b = \infty \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\frac{i_y^2}{a} = -\frac{841}{73} \quad ; \quad v_1 = -\frac{i_x^2}{b} = -\frac{13656}{\infty}$$

$$\Downarrow$$

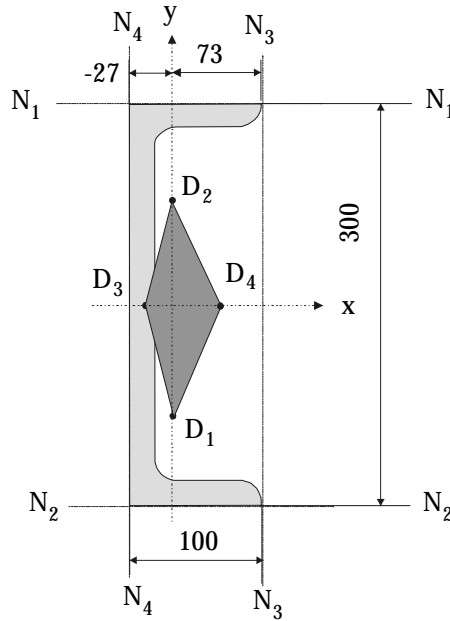
$$D_3(-11, 0)$$
(P.5.74)

- Az $(N_4 - N_4)$ semleges síknak megfelelő (D_4) terhelési hely (u_4, v_4) koordinátái a következők:

$$a = -27 \quad ; \quad b = \infty \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\frac{i_y^2}{a} = -\frac{841}{-27} \quad ; \quad v_1 = -\frac{i_x^2}{b} = -\frac{13656}{\infty}$$

$$\Downarrow$$

$$D_4(31, 0)$$
(P.5.75)



5.3.3. ábra

6. A SZERKEZETEK ALAKVÁLTOZÁSA

A szerkezetek és azok valamennyi elemei alakváltozása meghatározására két elméleti módszer (eljárás) áll rendelkezésünkre:

- A szilárdságtan munkatételeit alkalmazó módszer.
- A rugalmas vonal egyenletein alapuló eljárás.

A két megemlített módszer segítségével az alakváltozások egyértelműen meghatározhatók, de a gyakorlatban, nagy számú szerkezeti megoldásra műszaki táblázatokban találhatjuk az elmozdulások és a szögelfordulások értékeit. Összetett terhelési rendszerek esetében a szuperpozíciós elv érvényes, illetve az alakváltozások értékeit egy-egy terhelésre határozzuk meg, majd azokat összeadjuk.

6.1. A SZILÁRDSÁGTAN MUNKATÉTELEI

Az energia-megmaradás tétele értelmében, a konzervatív rendszerek esetében, csak energia formaváltozásra kerülhet sor, az energia összértéke változatlan marad.

Ha egy tartószerkezetet, vagy annak egyes elemeit megterhelünk, alakváltozások jönnek létre (elmozdulások és szögelfordulások), és így a külső megterhelő rendszer (erők, nyomatékok) (W) külső munkát végeznek. Ez a munka (U) rugalmas alakváltozási, (U_k) kinetikus, (U_T) termikus, és elméletileg, más energia formává változik.

$$W = U + U_k + U_T + \dots \quad (6.01)$$

Ha a megterhelő rendszert folyamatosan hozzuk létre, úgy, hogy a megterhelés felvevés után a szerkezet sztatikus állapotban legyen, akkor:

$$U_k + U_T + \dots \approx 0 \quad (6.02)$$

vagyis, megközelítőleg az egész külső megterhelő rendszer (W) munkája átváltozik (U) rugalmas alakváltozási energiává (*alakváltozási energia*).

$$\boxed{W \cong U} \quad (6.03)$$

A (W) külső munka és az (U) alakváltozási energia jellemzői a következők:

dV	differentiális köbtartalom (volumen)
W	külső munka (munka)
dW	differentiális (külső) munka
U	alakváltozási energia
dU	differentiális alakváltozási energia
dU/dV	fajlagos alakváltozási energia
f	elmozdulás
γ	szögelfordulás

6.1.1. A MUNKA MEGHATÁROZÁSA

A külső megterhelő rendszer összetevői a következők:

F_iúj erő

F_{iR}meglévő erő (az új erő felvételékor már egész intenzitásban működik)

M_iúj nyomaték

M_{iR}meglévő nyomaték (az új nyomaték felvételékor már egész intenzitásban működik)

Feltételezzük, hogy az (F_i, M_i) új megterhelések felvételékor már teljes intenzitással működnek az előzőleg felvett (F_{iR}, M_{iR}) terhelések. Ekkor a külső terhelőrendszer munkája:

$$\begin{aligned}
 W &= \sum (W_{(Fi)} + W_{(Mi)}) + \sum (W_{(FiR)} + W_{(MiR)}) = \\
 &= \sum (W_{(Fi)} + W_{(FiR)}) + \sum (W_{(Mi)} + W_{(MiR)}) \\
 &\quad \Downarrow
 \end{aligned}$$

$$\boxed{W = W_F + W_M} \quad (6.04)$$

Vizsgáljunk meg a (W_F) munkát melyet egy (F_i, F_{iR}) terhelőpár végez. A (W_F) munka összetevőit a (W_{Fi}) új munka és a (W_{FiR}) idegen munkák képezik. Az erők és a megfelelő elmozdulások a (6.01). ábrán vannak feltüntetve.

Tételezzük fel, hogy az (F_i) új erő (dF_i) értékkel differenciálisan megnövekszik. Az erő

növekedés (df_i) differenciális elmozdulást hoz létre. Az erő és az elmozdulás (dW_F) differenciális munka változást idéz, éspedig:

- Az új munka növekvése:

$$dW_{(Fi)} = F_i \cdot df_i + \frac{1}{2}(dF_i \cdot df_i)_{\rightarrow 0}$$

$$\Downarrow$$

$$dW_{(Fi)} = F_i \cdot df_i \quad (6.05)$$

A rugalmas rendszereknél az erő és az egyirányú elmozdulás közötti kapcsolat a következő:

$$F_i = c \cdot f_i \quad (6.06)$$

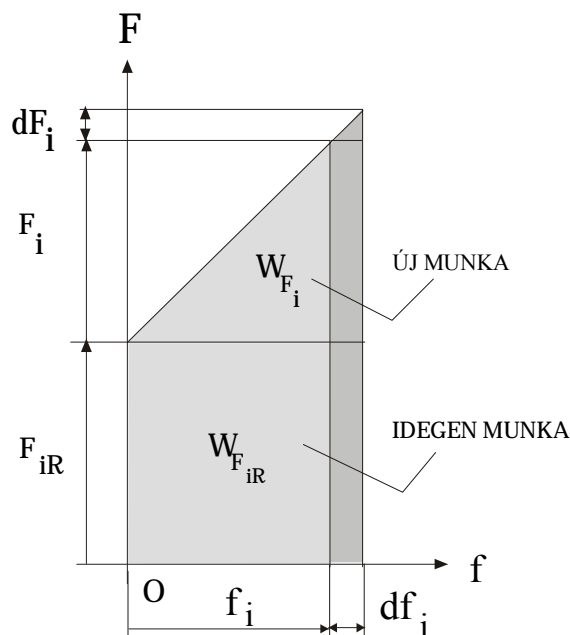
Ahol a:

$$c \left[\frac{N}{m} \right] - \text{merevségi tényező}$$

- Az idegen munka növekvése:

Mivel az (F_{iR}) meglévő erő elmozdulása megegyezik az (F_i) erő okozta (df_i) elmozdulással, a differenciális idegen munka értéke (1/2 - szorzás nélkül) a következő:

$$dW_{(FiR)} = F_{iR} \cdot df_i \quad (6.07)$$



6.01. ábra

Az differenciális munka összege a következő:

$$dW_F = dW_{(F_i)} + dW_{(F_{iR})} \quad (6.08)$$

Helyettesítjük be a (6.08). egyenletbe a (6.05, 6.07). értékeket, és végezzük el az integrációt, felhasználva a (6.06). kapcsolatot:

$$\begin{aligned} W_F &= \int_0^f c f_i \cdot df_i + \int_0^f F_{iR} \cdot df_i \\ &\Downarrow \\ W_F &= \frac{1}{2} c f_i^2 + F_{iR} f_i \\ &\Downarrow \\ W_F &= \frac{1}{2} F_i f_i + F_{iR} f_i \end{aligned} \quad (6.09)$$

Identikus eljárással meghatározhatjuk a nyomatékokból származó munkát is:

$$W_M = \frac{1}{2} M_i \gamma_i + M_{iR} \gamma_i \quad (6.10)$$

Ha a (6.04). egyenletbe be helyettesítjük a (6.09 és 6.10). értékeket, a terhelő rendszer összmunkáját határozzuk meg:

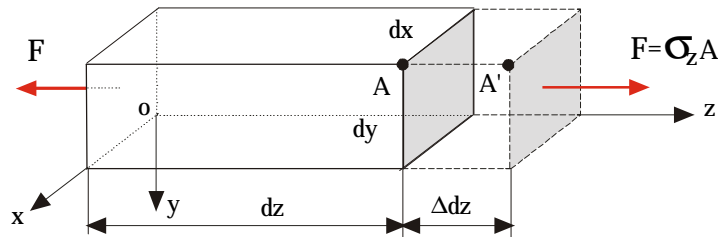
$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_i (F_i f_i + M_i \gamma_i) + \sum_i (F_{iR} f_i + M_{iR} \gamma_i)} \quad (6.11)$$

6.1.1.1. ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIA MEGHATÁROZÁSA HÚZÓ-NYOMÓ IGÉNYBEVÉTELNÉL

Vágjunk ki egy húzott, vagy egy nyomott rúdból egy differenciális (dx , dy , dz) méretű hasábot (6.02. ábra). A (σ_z) feszültség miatt a hasáb (dz) hossza (Δdz) hosszváltozást szenved, (Jacob Bernouli alakváltozási modell szerint, a többi mérete nem változik meg).

Az (5.18, 5.20). egyenletek szerint:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} \quad (6.12)$$



6.02. ábra

Az (U) alakváltozási energia jellemzői a következők:

- Differenciális alakváltozási energia:

$$dU = \frac{1}{2} F df = \frac{1}{2} (\sigma_{(z)} dx dy) (\varepsilon \cdot dz) = \frac{1}{2} \sigma_{(z)} dV \frac{\sigma_{(z)}}{E}$$

↓

$$\boxed{dU = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{(z)}^2}{E} dV} \quad (6.13)$$

- Fajlagos alakváltozási energia:

$$\boxed{u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{(z)}^2}{E} = \frac{1}{2} \sigma_{(z)} \varepsilon} \quad (6.14)$$

- Alakváltozási energia:

$$\boxed{U = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{(z)}^2 dV} \quad (6.15)$$

Ha az igénybevett rúd (A) normálmetszete és a redukált (Fz) axiális erő nem állandó értékek (6.03. ábra),

$$A_z = f(z) \quad ; \quad F_z = f(z) \quad (6.16)$$

akkor az (U) alakváltozási energia, a (6.15). egyenlet szerint következőképpen képződik:

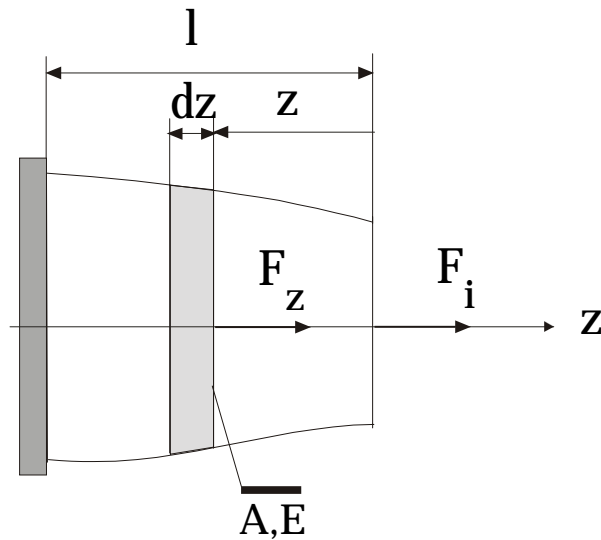
$$U = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{(z)}^2 dV$$

Ha az utóbbi egyenletbe be helyettesítjük a (σ_z, dV) értékeit:

$$\sigma_{(z)} = \frac{F_{(z)}}{A_{(z)}} = \frac{\sum F_i}{A_{(z)}} \quad ; \quad dV = A_{(z)} dz \quad (6.17)$$

akkor a következő munkatételt kapjuk:

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{F_{(z)}^2}{A_{(z)}} dz \quad (6.18)$$



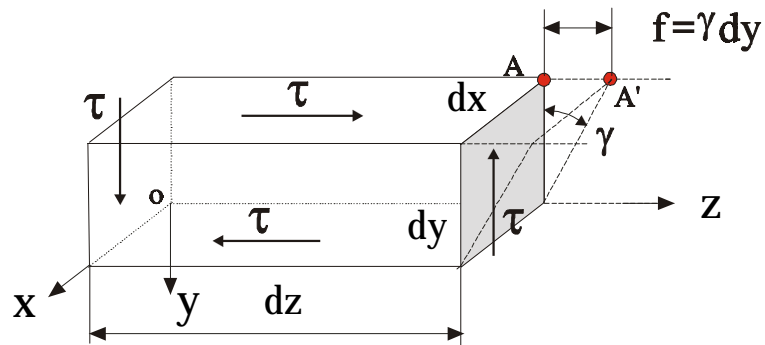
6.03. ábra

6.1.1.2. ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIA MEGHATÁROZÁSA (NYÍRÓ – CSAVARÓ) IGÉNYBEVÉTELNÉL

A (6.1.1). részben igénybevett differenciális hasábot a (6.04). ábrán bemutatott (τ) tangenciális feszültség terheli, mely (γ) szögelfordulást és ($\gamma \cdot dy$) elmozdulást hoz létre.

Az (5.66). egyenlet és a (6.04). ábra szerint:

$$\tau_{(z)} = G\gamma \quad ; \quad \gamma dy = f \quad (6.19)$$



6.04. ábra

Az (U) alakváltozási energia jellemzői a következők:

- Differenciális alakváltozási energia:

$$dU = \frac{1}{2} Ff = \frac{1}{2} (\tau_{(z)} dx dz) (\gamma dy) = \frac{1}{2} \tau_{(z)} dV \frac{\tau_{(z)}}{G}$$

$$\Downarrow$$

$$dU = \frac{1}{2} \frac{\tau_{(z)}^2}{G} dV$$

(6.20)

- Fajlagos alakváltozási energia:

$$u = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \frac{\tau_{(z)}^2}{G} = \frac{1}{2} \tau_{(z)} \gamma$$

(6.21)

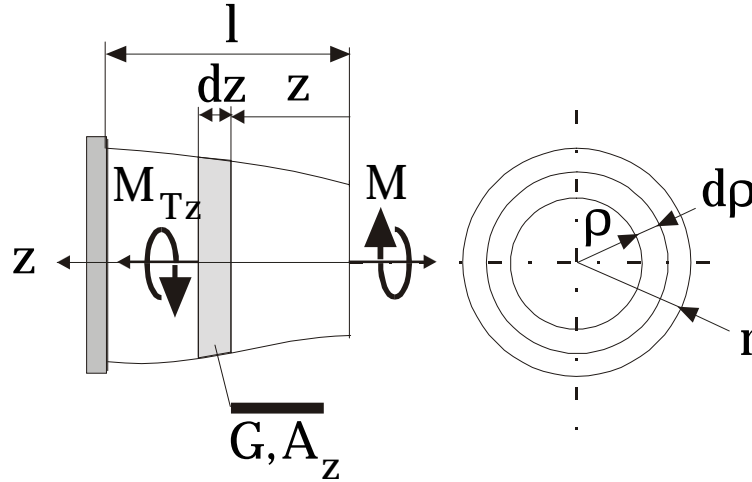
- Alakváltozási energia:

$$U = \frac{1}{2G} \int_V \tau_{(z)}^2 dV$$

(6.22)

Ha a rúd csavarásra van igénybevéve, és ha az (A) normálmetszet és a redukált csavaró nyomatékok a (z) helyzet függvényei (6.05. ábra),

$$A_z = f(z) \quad ; \quad M_{Tz} = f(z) \quad (6.23)$$



6.05. ábra

akkor az (U) alakváltozási energia formáját a következőképpen lehet meghatározni:

A (τ_z) tangenciális feszültség értékét a (5.79). egyenlet szerint, a (dV) differenciális volument pedig a (6.05). ábra szerint határozzuk meg:

$$\tau_{(z)} = \frac{M_{T(z)}}{I_{0(z)}} \rho \quad ; \quad dV = (2\pi\rho) d\rho dz \quad (6.24)$$

Az utóbbi értékeket a (6.22) egyenletbe helyettesítjük be:

$$U = \frac{1}{2G} \int_0^l \int_0^r \frac{M_{T(z)}^2}{I_{0(z)}^2} \rho^2 (2\pi\rho d\rho dz) = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{M_{T(z)}^2}{I_{0(z)}^2} dz \left(\int_0^r (2\pi\rho d\rho) \rho^2 \right) \Big|_{\Rightarrow I_{0(z)}} \quad (6.25)$$

Vagyis,

$$\boxed{U = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{M_{T(z)}^2}{I_{0(z)}} dz} \quad (6.26)$$

6.1.1.3. ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIA MEGHATÁROZÁSA HAJLÍTÓ IGÉNYBEVÉTELNÉL

A hajlító igénybevételnél a rúd normálmetszetén redukált (M, T) terhelő pár működik. A megfelelő feszültségi állapot síkbeli, vagyis belső (σ) normálfeszültség és (τ) tangenciális feszültségek jönnek létre. Emiatt, az alakváltozási energia a (U_σ) normálfeszültségtől és (U_τ) tangenciális feszültségtől nyert alakváltozási energiából áll:

$$U = U_{(\sigma)} + U_{(\tau)} \quad (6.27)$$

A (6.15). és a (6.22). egyenletek igénybevételével a (6.27). egyenlet a következő formát kapja:

$$U = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{(z)}^2 dV + \frac{1}{2G} \int_V \tau_{(z)}^2 dV \quad (6.28)$$

Helyettesítjük be a (6.28). egyenletbe a (σ_z, τ_z) feszültségek értékeit az (5.110, 5.118). egyenletek alapján:

$$\sigma_{(z)} = \frac{M_{(z)}}{I_x} y \quad ; \quad \tau_{(z)} = \frac{T_{(z)} S_{(c)}}{I_x \xi} \quad (6.29)$$

és alkalmazzuk a következő kapcsolatot:

$$dV = dA \cdot dz \quad (6.30)$$

A behelyettesítés során a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2E} \int_l \int_A \frac{M_{(z)}^2}{I_x^2} y^2 dA dz + \frac{1}{2G} \int_l \int_A \frac{T_{(z)}^2 S_{(c)}^2}{I_x^2 \xi^2} dA dz = \\ &= \frac{1}{2E} \int_l \frac{M_{(z)}^2}{I_x^2} dz \int_A y^2 dA + \frac{1}{2G} \int_l T_{(z)}^2 dz \int_A \frac{S_{(c)}^2}{I_x^2 \xi^2} dz \end{aligned} \quad (6.31)$$

$\xrightarrow{A \rightarrow I_x} \quad \xrightarrow{A \rightarrow \frac{\alpha}{A}}$

Az utóbbi egyenlet rendezése után a következő kapcsolat jön létre:

$$\boxed{U = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_{(z)}^2}{I_x} dz + \frac{K}{2GA} \int_0^l T_{(z)}^2 dz} \quad (6.32)$$

(Hosszú rudak esetében az utóbbi egyenlet második tagja, az első taghoz képest aránylag kicsi, és így figyelmen kívül lehet hagyni).

6.1.1.4. TÉRBELI ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIA ÁLTALÁNOS FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT ESETÉBEN.

A térbeli feszültségi állapotra jellemző (U) alakváltozási munkát két összetevőre lehet felbontani:

$$U = U_v + U_f \quad (6.33)$$

Ahol az:

U_va volumen változására igényelt energia

U_f az alaktorzításra igényelt energia

Az alakváltozási differenciális energia:

$$dU = dU_v + dU_f \quad (6.34)$$

A fajlagos térbeli alakváltozási energia pedig

$$u = u_v + u_f \quad (6.35)$$

A további eljárás során, csak a (6.35). fajlagos energiát és összetevőit fogjuk meghatározni.

- AZ (u) FAJLAGOS TÉRBELI ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIA

Az általános feszültségi állapotot a (2.20). feszültségi vektor szerint a (σ) normál és a (τ) tangenciális feszültségek jellemzik, amiből arra lehet következtetni, hogy az (u) fajlagos alakváltozási energiának az összértéke, a normál és a tangenciális feszültségek, és azok által létrejött alakváltozások alapján lehet meghatározni. Használva a (6.14, 6.21). kapcsolatokat, leírhatjuk a fajlagos térbeli alakváltozási energia képletét:

$$\begin{aligned} u &= u_\sigma + u_\tau = u_v + u_f = \frac{1}{2} \sum \sigma \varepsilon + \frac{1}{2} \sum \tau \gamma = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \end{aligned} \quad (6.36)$$

Helyettesítjük be az utóbbi egyenletbe a megfelelő (4.07). kapcsolatokat és az így kapott egyenletet számtanilag rendezzük. Eredményként, a fajlagos térbeli alakváltozási energia általános formáját kapjuk:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (6.37)$$

Ha az alapul vett a (xyz) derékszögű koordináta rendszer tengelyei megegyeznek a fő tengelyekkel, akkor $(\sigma_x \rightarrow \sigma_1; \sigma_y \rightarrow \sigma_2; \sigma_z \rightarrow \sigma_3; \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0)$, és a (6.37). egyenlet formája a következőképpen alakul:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (6.38)$$

Különleges esetben ha

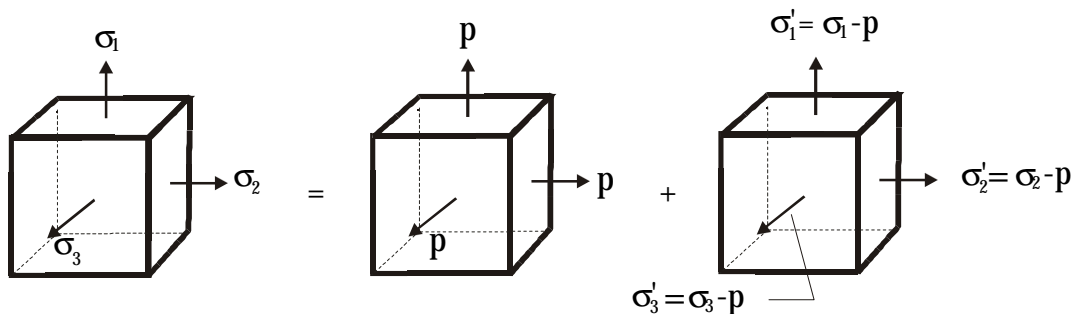
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma \quad (6.39)$$

a (6.38). egyenlet a következőképpen módosul:

$$u = \frac{3}{2} \frac{\sigma^2}{E} (1 - 2\mu) \quad (6.40)$$

- A VOLUMENVÁLTOZÁSÁRA IGÉNYELT FAJLAGOS ENERGIA

Vágjunk ki a rúd tetszőlegesen kiválasztott (N) pontja környékéből egy elemi hasábot, mely oldalai megegyeznek a főfeszültségi síkokkal. Így a síkokban csak a $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ főfeszültségek működnek, és (u) fajlagos térbeli alakváltozást hoznak létre (6.06. ábra).



6.06. ábra

Bontjuk fel a főfeszültségeket két-két egyirányú összetevőre:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= p + \sigma'_1 \\ \sigma_2 &= p + \sigma'_2 \\ \sigma_3 &= p + \sigma'_3\end{aligned}\tag{6.41}$$

úgy, hogy a (p) értékét a következőképpen határozzuk meg:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\tag{6.42}$$

Ha a (p) értéket sorban be helyettesítjük a (6.41). egyenletekbe és ezeket összeadjuk, a következő kapcsolatot kapjuk:

$$(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0\tag{6.43}$$

A (p) és a $(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)$ tovább is főfeszültségi jelleműek. Mivel térbeli feszültségi állapotról van szó, a térbeli fajlagos térváltozást a (3.39). egyenlet alapján határozzuk meg, úgy, hogy a (6.43). kapcsolatban használt jelzéseket alkalmazzuk:

$$\varepsilon'_\nu = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3\tag{6.44}$$

A (6.44). összetevőket a (4.06). POISSON - féle egyenletekből kapjuk:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_1 &= \frac{1}{E}(\sigma'_1 - \mu\sigma'_2 - \mu\sigma'_3) \\ \varepsilon'_2 &= \frac{1}{E}(\sigma'_2 - \mu\sigma'_3 - \mu\sigma'_1) \\ \varepsilon'_3 &= \frac{1}{E}(\sigma'_3 - \mu\sigma'_1 - \mu\sigma'_2)\end{aligned}\tag{6.45}$$

Az utóbbi egyenlet értékeit be helyettesítjük a (6.46). egyenletbe:

$$\varepsilon'_\nu = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0\tag{6.46}$$

A (6.43). összetevők használatával, a (6.46). egyenlet alapján $(\varepsilon'_\nu = 0)$. Mivel nem jön létre volumenváltozás, a megfelelő fajlagos energia értéke nulla.

Az utóbbiból arra lehet következtetni, hogy a volumen változást csak a (p) összetevő idézi elő.

Mivel a (p) összetevő a fősíkokban hat, a (6.40) egyenlet szerint meghatározható a volumen változására igényelt (u_V) fajlagos energia:

$$u_V = \frac{3}{2} \frac{p^2}{E} (1 - 2\mu) \quad (6.47)$$

Az utóbbi egyenletbe helyettesítjük be a (6.42). értékeket

$$u_V = \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2}{E} (1 - 2\mu) \quad (6.48)$$

Rendezés után a végleges forma :

$$\boxed{u_V = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{6E} (1 - 2\mu)} \quad (6.49)$$

- AZ (u_f) ALAKTORZÍTÁSRA IGÉNYELT FAJLAGOS ENERGIA

A (6.35). egyenlet alapján:

$$\begin{aligned} u &= u_V + u_f \\ \Downarrow \\ u_f &= u - u_V \end{aligned} \quad (6.50)$$

Helyettesítjük be az utóbbi egyenletbe az (6.38 és 6.49). értékeket:

$$u_f = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 \frac{1}{E} (1 - 2\mu)$$

Ha az utóbbi egyenletet átrendezzük, az alaktorzításra igényelt fajlagos energia általános formáját kapjuk:

$$\boxed{u_f = \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (6.51)$$

Különleges esetben, ha $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma)$, akkor az alakváltozásra igényelt fajlagos energia értéke: $(u_f = 0)$.

6.1.2. BETTI ÉS MAXWELL FELCSERÉLHETÉSI TÉTEL

Általános esetben, a megterhelő rendszer összetevői bizonyos sorrendben kezdik el hatásukat. Vizsgáljunk meg egy ilyen két koncentrikus (F_1, F_2) erőre vonatkozó esetet. A vizsgálat eredményei hasznosíthatók a tetszőlegesen összetett megterhelő rendszerek esetében is.

A tétel meghatározását egy egyszerű statikailag meghatározott kéttámaszú rúd esetén mutatjuk be (6.07. ábra).

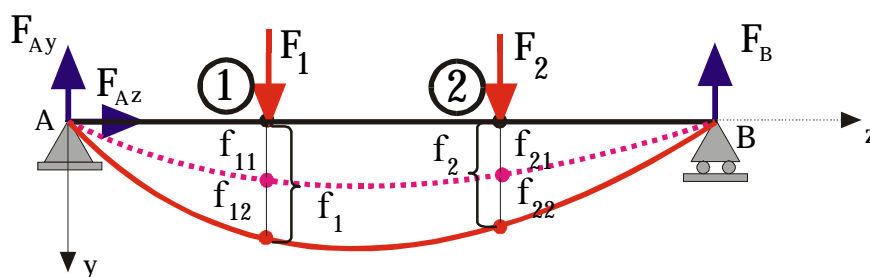
Az (F_1, F_2) erők függőleges elmozdulásokat hoznak létre, melyeket a következőképpen fogjuk jelölni:

$$f_{X(az\ elmozdulás\ helye)X(erő\ hatása\ miatt)} = f_{XX} \quad (6.52)$$

Az (F_1, F_2) erőket két különböző sorrendbe helyezzük a rúdra.

I. ESET: a) (F_1) . majd b) (F_2) . erővel való terhelés.

II. ESET: a) (F_2) . majd b) (F_1) . erővel való terhelés.



6.07. ábra

Határozzuk meg az esedékes munkákat:

I. ESET

$$\begin{aligned} W_I &= \frac{1}{2} F_1 f_{11} + \Rightarrow az (F_1). erő (f_{11}, f_{21}). elmozdulást hoz létre \\ &+ \frac{1}{2} F_2 f_{22} + F_1 f_{12} \Rightarrow az (F_2). erő (f_{22}, f_{12}). elmozdulást hoz létre \end{aligned} \quad (6.53)$$

Az (F_2) . erő felvételénél az (F_1) . erő idegen munkát végez (1/2 - nélkül).

Összegezve:

$$W_I = \frac{1}{2} F_1 f_{11} + \frac{1}{2} F_2 f_{22} + F_1 f_{12} \quad (6.54)$$

II. ESET

$$\begin{aligned} W_{II} = \frac{1}{2} F_2 f_{22} + \Rightarrow az (F_2). erő \quad (f_{22}, f_{12}). elmozdulást idéz elő \\ + \frac{1}{2} F_1 f_{11} + F_2 f_{21} \Rightarrow az (F_1). erő \quad (f_{11}, f_{21}). elmozdulást idéz elő \end{aligned} \quad (6.55)$$

Az (F_1) . erő felvevésékor az (F_2) . erő idegen munkát végez $(1/2 -$ nélkül).

Összegezve:

$$W_{II} = \frac{1}{2} F_1 f_{11} + \frac{1}{2} F_2 f_{22} + F_2 f_{21} \quad (6.56)$$

Az össz munka értéke nem függ az erők felhelyezésének sorrendjétől, vagyis leírhatjuk, hogy:

$$W_I = W_{II} = W \quad (6.57)$$

Ha az utóbbi egyenletbe be helyettesítjük az (6.54 és 6.56). értékeket, az ismert *BETTI* -féle **FELCSERÉLHETÉSI TÉTELT** kapjuk:

$$\boxed{F_1 f_{12} = F_2 f_{21}} \quad (6.58)$$

Ha az utóbbi tételben $(F_1=F_2=1)$ egységérték erőket alkalmazunk, akkor a *MAXWELL* -féle tételt kapjuk:

$$\boxed{f_{12} = f_{21}} \quad (6.59)$$

A (6.58). egyenletet osztjuk végig $(2 -$ vel):

$$\frac{F_1 f_{12}}{2} = \frac{F_2 f_{21}}{2} \quad (6.60)$$

A (6.58). egyenlet bal oldalát leírhatjuk mint:

$$F_1 f_{12} = \frac{F_1 f_{12}}{2} + \frac{F_1 f_{12}}{2} \quad (6.61)$$

Az egyenlet utolsó tagját a (6.58) felcserélhetőségi tétel alapján felcseréljük:

$$F_1 f_{12} = \frac{F_1 f_{12}}{2} + \frac{F_1 f_{12}}{2} = \frac{F_1 f_{12}}{2} + \frac{F_2 f_{21}}{2} \quad (6.62)$$

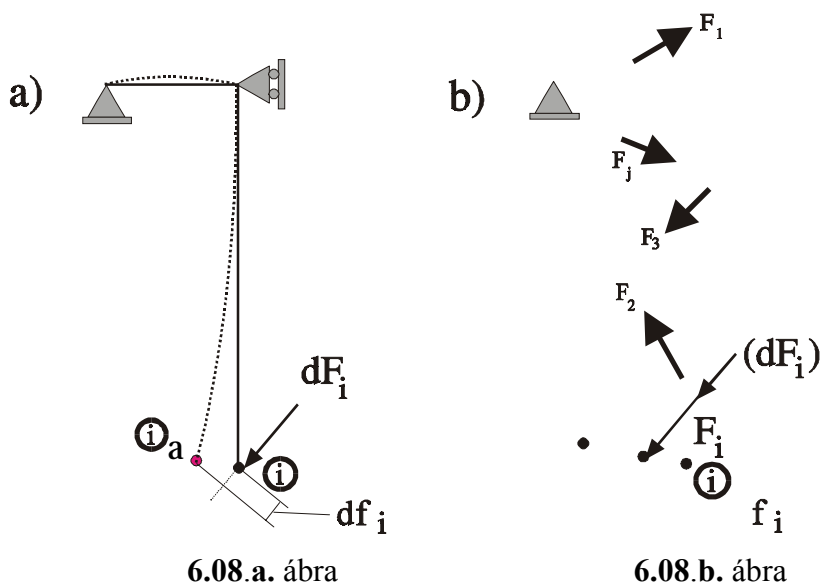
A (6.54). egyenlet utolsó tagját cseréljük fel a (6.62). egyenlőség formájával, és az így kapott egyenletet a következőképpen rendezzük (igénybevéve a 6.57. egyenlőséget):

$$W_I = W_{II} = W = \frac{1}{2} F_1 (f_{11} + f_{12}) + \frac{1}{2} F_2 (f_{22} + f_{21}) = \frac{1}{2} F_1 f_1 + \frac{1}{2} F_2 f_2 \quad (6.63)$$

Az utóbbi munka meghatározási eljárást meg lehet ismételni nyomatékok hatása esetében is. A két eset struktúrája megegyezik. Az eljárás érvényes tetszőleges összetételű terhelő rendszer munkájának meghatározásakor, vagyis:

$$W_{\{i,k\}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (F_i f_i + M_k \gamma_k) \quad (6.64)$$

6.1.3. CASTIGLIANO TÉTELEI



A tétel kidolgozásánál a BETTI féle tétel szolgál alapul, és igen egyszerű gyakorlati módszert képez a tartók alakváltozásának meghatározásakor.

Vegyük igénybe egy tetszőleges statikailag meghatározott szerkezetet (6.08. ábra),

melyre egy külső *terhelési rendszer hat.*

$$\{K_j\} = \{F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_j, M_1, \dots, M_i, \dots, M_k\} \quad (6.65)$$

A terhelés során a terhelési rendszer egyik (például az F_i) összetevője (dF_i) differenciálisan megváltozik (az értéke megnövekszik, vagy csökken)

$$\{0, 0, \dots, dF_i, \dots, 0\} \quad (6.66)$$

Ha a (6.65). terhelőrendszer, és a (6.66). differenciál változás egymást követően, de megváltozott sorrendben helyeződnek el, az (i) hatópontban az (F_i illetve dF_i) terhelések (f_i , illetve df_i) terhelés irányú elmozdulásokat hoznak létre (6.08.a, 6.08.b). ábrák

AZ ÖSSZ MUNKA MEGHATÁROZÁSA

$$W = W_{\{K_j\}} + W_{\{dF_i\}} = W_{\{dF_i\}} + W_{\{K_j\}} \quad (6.67)$$

Az össz $\{K_j + dF_i\}$ megterhelő rendszert kétféle sorrendben lesz felvéve.

I TERHELÉSI SORREND

II TERHELÉSI SORREND

$$\text{a. } \{K_j\} \quad \text{b. } \{dF_i\} \qquad \text{a. } \{dF_i\} \quad \text{b. } \{K_j\} \quad (6.68)$$

A SORRENDEKNEK MEGFELELŐ MUNKÁK:

MATEMATIKAILAG

MÉRTANILAG

$$\text{a. } W_{\{K_j\}} = W(K_j) \qquad \text{a. } W_{\{dF_i\}} = \frac{1}{2} dF_i df_i \quad (6.08.a. \text{ ábra}) \quad (6.69)$$

$$\text{b. } W_{\{dF_i\}} = \frac{\partial W(K_j)}{\partial F_i} dF_i \qquad \text{b. } W_{\{K_j\}} = W(K_j) + dF_i df_i \quad (6.08.b. \text{ ábra}) \quad (6.70)$$

AZ ÖSSZ MUNKA

$$W = W_{\{K_j\}} + W_{\{dF_i\}} = W(K_j) + \frac{\partial W(K_j)}{\partial F_i} dF_i \qquad W = \frac{1}{2} dF_i df_i + W(K_j) + dF_i df_i \quad (6.71)$$

A (W) munka összértéke mindkét esetben megegyezik, nem függ a terhelés felvévén sorrendjétől (6.67. kapcsolat).

$$W(K_j) + \frac{\partial W(K_j)}{\partial F_i} dF_i = \frac{1}{2} dF_i df_i + W(K_j) + dF_i df_i \quad (6.72)$$

Ha az utóbbi egyenletben figyelmen kívül hagyjuk a másodrendű differenciál értékeket, a következő kapcsolat jön létre, mely a rúd (F_i) erő irányú elmozdulását képezi.

$$\boxed{f_i = \frac{\partial W(K_j)}{\partial F_i}} \quad (6.73)$$

Az utóbbi egyenlet azt mutatja, hogy a $\{K_j\}$ megterhelő rendszerből eredő (f_i) elmozdulást, abban az (i) helyben, és abban az irányban melyben az (F_i) erő hat, meglehet határozni a $(W(K_j))$ összmunka parciális, (F_i) erő szerinti deriválásból.

A szögelfordulás identikus hozzáállás szerint határozható meg:

$$\boxed{\gamma_i = \frac{\partial W(K_j)}{\partial M_i}} \quad (6.74)$$

6.1.1.1. AZ ALAKVÁLTOZÁSOK RUGALMAS TÁMASZOK ESETÉBEN

Ha a támaszok rugalmasak, akkor a támaszreakciók erőrendszere:

$$\{R_e\} \quad (6.75)$$

Ebben az esetben a munka függvény formája a következő:

$$W = W(K_j, R_e) \quad (6.76)$$

Vagyis:

$$W = W(F_1, \dots, F_i, \dots, F_j, M_1, \dots, M_i, \dots, M_k, R_1, \dots, R_i, \dots, R_e) \quad (6.77)$$

Igénybevétel a Castigliano módszert, az (i) pontban létrejött elmozdulás az (F_i) irányában:

$$\boxed{f_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} + \frac{\partial W}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial F_i}, \dots, \frac{\partial W}{\partial R_e} \frac{\partial R_e}{\partial F_i}} \quad (6.78)$$

Az (i) pontban létrejött szögelfordulás az (M_i) irányában:

$$\boxed{\gamma_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} + \frac{\partial W}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial M_i}, \dots, \frac{\partial W}{\partial R_e} \frac{\partial R_e}{\partial M_i}} \quad (6.79)$$

6.1.1.2. AZ ALAKVÁLTOZÁS MEGHATÁROZÁSA FIKTÍV MEGTERHELÉSEL

A Castigliano módszer szerint, az alakváltozást csak a megterhelő rendszer összetevőinek ható helyzetében lehet meghatározni.

Olyan (f) helyzetben, ahol nem hat erő, illetve nyomaték, de az alakváltozást meg kell határozni, bevezetjük az úgynevezett **FIKTÍV** megterheléseket (F_f - fiktív erő, M_f - fiktív nyomaték). Ily módon a munka függvényt mint az aktív és a fiktív erőrendszer összetevői függvényeként tüntetjük fel. Ezt a munkafüggvényt *fiktív munkafüggvény* -ként kezeljük.

$$W_f = W(K_j, F_f, M_f) \quad (6.80)$$

A továbbiakban az elmozdulásokat és a szögelfordulásokat a (6.73 és 6.74). egyenletek alapján határozzuk meg úgy, hogy a számítások végen a fiktív megterheléseket nullának vesszük:

$$(F_f = 0) \quad (M_f = 0) \quad (6.81)$$

- Az (f) helyen létrejött alakváltozások:

$$\boxed{\begin{aligned} f_f &= \left(\frac{\partial W_f}{\partial F_f} \right)_{F_f=0} \\ \gamma_f &= \left(\frac{\partial W_f}{\partial M_f} \right)_{M_f=0} \end{aligned}} \quad (6.82)$$

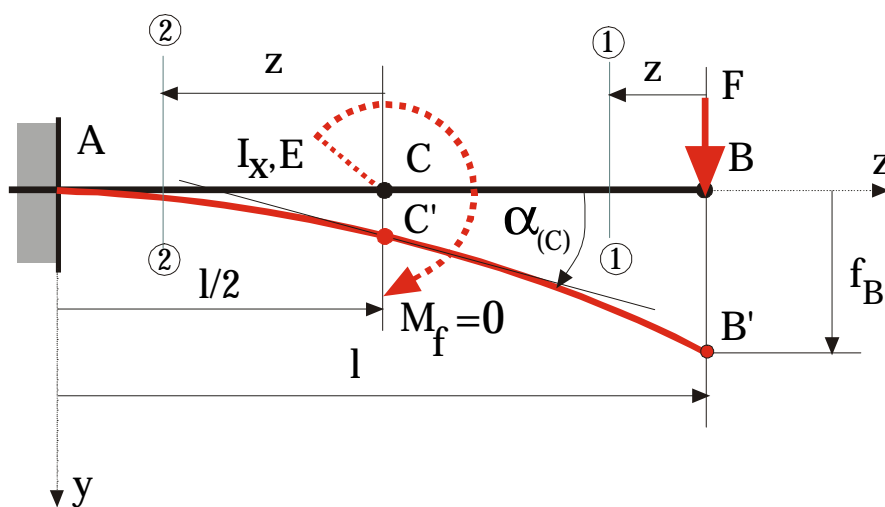
Ha a rendszeren fiktív megterhelő rendszer van igénybevéve, de az alakváltozásokat az aktív megterhelések irányába is meg kell határozni, alkalmazhatjuk a (6.80). fiktív munkafüggvényt, figyelembe véve a $((F_f = 0), (M_f = 0))$ fiktív megterhelések nulla értékét.

$$\boxed{\begin{aligned} f_i &= \left(\frac{\partial W_f}{\partial F_i} \right)_{F_f=0} \\ \gamma_i &= \left(\frac{\partial W_f}{\partial M_i} \right)_{M_f=0} \end{aligned}} \quad (6.83)$$

6.1. PÉLDA

A (6.1.1). ábrán bemutatott tartót (F) aktív külső erő terheli. A tartó állandó normálmetszetű szelvény ($I_x = \text{const.}$), anyagát (E) rugalmassági tényező jellemzi. A tartót hosszú rúdként kel kezelni.

Meg kel határozni a (B) pont (f_B) merőleges elmozdulását, és a (C) pontban létrejött (α_C) szögelfordulást.



6.1.1. ábra

A Castigliano módszer szerint, azokban a pontokban, melyekben nem működnek aktív megterhelések, de az alakváltozásokat meg kel határozni, fiktív megterheléseket alkalmazunk.

Mivel a (C) pontban nem működik aktív nyomaték da az (α_C) szögelfordulást meg kel határozni, az ($M_f = 0$) fiktív nyomatékot alkalmazzuk.

A (W_f) fiktív munkafüggvény (6.80. kapcsolat) formája az aktív (F) erő és az ($M_f = 0$) fiktív nyomaték függvénye lesz:

$$W_f = W(F, M_f) \quad (P.6.01)$$

A terhelőrendszerből ítélve, hajlító igénybevételről van szó, ezért a munkafüggvényt a (6.32). kapcsolat alapján határozzuk meg (a 6.03. kapcsolat szerint $W=U$). Hosszú rúd révén, a használt egyenlet második tagját figyelmen kívül hagyjuk.

$$W = W_f = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_z^2}{I_x} \cdot dz \quad (\text{P.6.02})$$

A NYOMATÉKOK MEGHATÁROZÁSA

A tartót két tartományra bontjuk fel:

$$(1-1). \text{ TARTOMÁNY } \dots\dots \frac{l}{2} \geq z \geq 0 \quad (2-2). \text{ TARTOMÁNY } \dots\dots \frac{l}{2} \geq z \geq 0$$

$$M_{(1-1)} = -Fz \quad M_{(2-2)} = -\left(\frac{l}{2} + z\right)F - M_f \quad (\text{P.6.03})$$

AZ ÖSSZ MUNKA ÉRTEKE

A tartományokban végzett munkák összegéből kapjuk:

$$W_f = W = W_{(1-1)} + W_{(2-2)} = \frac{1}{2E} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{(1-1)}^2}{I_x} dz + \frac{1}{2E} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{(2-2)}^2}{I_x} dz \quad (\text{P.6.04})$$

A (B) PONT MERŐLEGES ELMOZDULÁSA

A meghatározást a (6.83). kapcsolat szerint végezzük el.

$$f_B = \left(\frac{\partial W_f}{\partial F} \right)_{M_f=0} = \left\{ \frac{1}{2EI_x} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} 2M_{(1-1)} \frac{\partial M_{(1-1)}}{\partial F} dz + \int_0^{\frac{l}{2}} 2M_{(2-2)} \frac{\partial M_{(2-2)}}{\partial F} dz \right] \right\}_{M_f=0} =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} (-Fz)(-z) dz + \int_0^{\frac{l}{2}} \left[-\left(\frac{l}{2} + z\right)F - M_f \right] \left(-\frac{l}{2} - z \right) dz \right]_{M_f=0}$$

⇓

$$\boxed{f_B = \frac{Fl^3}{3EI_x}} \quad (\text{P.6.05})$$

A (C) PONT SZÖGELFORDULÁSA

A meghatározást a (6.83). kapcsolat szerint végezzük el.

$$\begin{aligned}
\gamma_C = \alpha_C &= \left(\frac{\partial W_f}{\partial M_f} \right)_{M_f=0} = \left\{ \frac{1}{2EI_x} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} 2M_{(1-1)} \frac{\partial M_{(1-1)}}{\partial M_f} dz + \int_0^{\frac{l}{2}} 2M_{(2-2)} \frac{\partial M_{(2-2)}}{\partial M_f} dz \right] \right\}_{M_f=0} = \\
&= \left\{ \frac{1}{EI_x} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} -Fz(0) dz + \int_0^{\frac{l}{2}} \left[-\left(\frac{l}{2} + z \right) F - M_f \right] (-1) dz \right] \right\}_{M_f=0} \\
&\quad \Downarrow
\end{aligned}$$

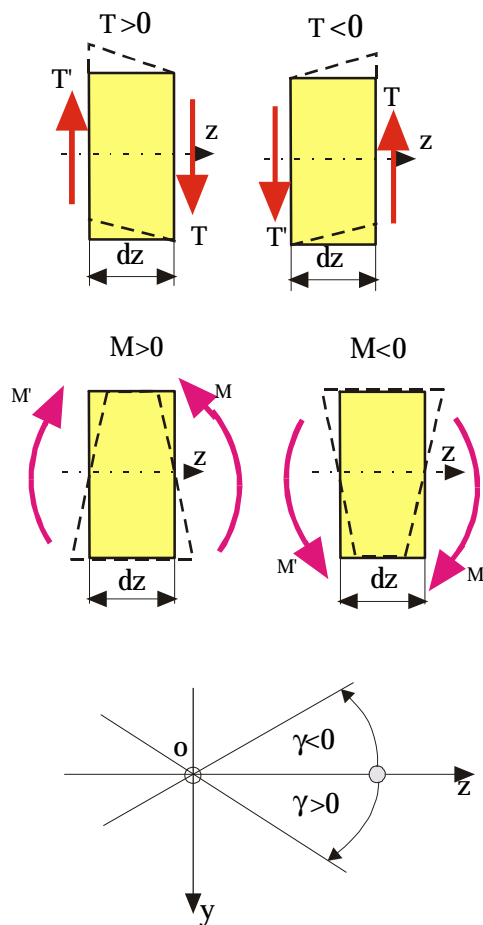
$$\boxed{\alpha_C = \frac{3}{8} \frac{Fl^2}{EI_x}}$$

(P.6.06)

6.2. A RUGALMAS VONAL EGYENLETE

6.2.1. A JELÖLÉSEKRE VONATKOZÓ KONVENCIÓK

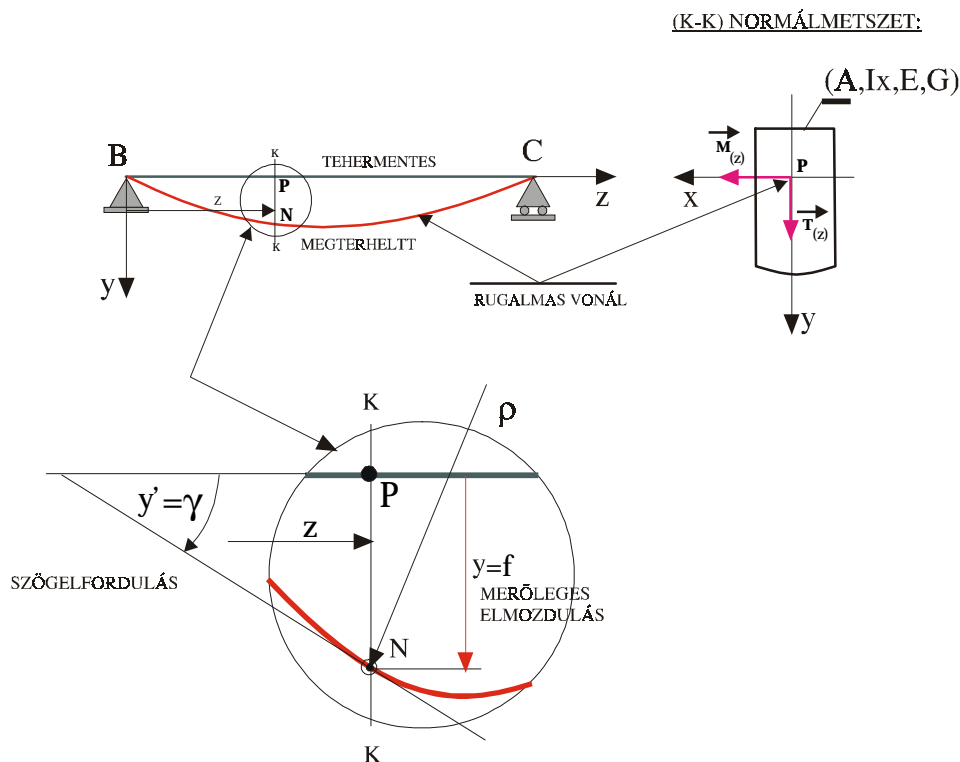
Az eljárás folyamán az általánosan elfogadott jelöléseket fogjuk használni. Ezek a (T) transzverzális erőkre, (M) nyomatékokra és az (y) merőleges elmozdulásokra, valamint a (γ) szögelfordulásokra vonatkoznak, és egy (xyz) derékszögű koordinátarendszerhez kötődnek (6.09. ábra).



6.09. ábra

6.2.2. A RUGALMAS VONAL ÁLTALÁNOS DIFFERENCIÁLEGYENLETE

Habár a módszer általános összetett terhelési rendszerre vonatkozik, egyszerűség céljából, a megfelelő elméletet egy sztatikailag meghatározott két támaszú rúd esetén fogjuk bemutatni (6.10. ábra)



6.10. ábra

Tehermentes állapotban a síkegyenes rúd semleges vonala megegyezik a (z) koordináta tengellyel. A terhelés felvétele után (megterhelt állapotban) a terhelés következményeként a semleges sík rugalmasan elmozdul, és az (yz) koordinátarendszerben egy folyamatos

$$y_{(z)} = f(z) \quad (6.84)$$

vonalat képez. Ezt a vonalat a továbbiakban *RUGALMAS VONAL* -nak nevezzük.

Egy tetszőlegesen kiválasztott (z) távolságnak megfelelő $(K-K)$ normálmetszetben, a rugalmas vonal mértani jellemzői a következők:

z a normálmetszet távolsága.

Aa normálmetszet felülete.

I_xa normálmetszet axiális másodrendű nyomatéka.

$y_{(z)} = f$merőleges elmozdulás (elmozdulás).

$\gamma_{(z)}$szögelfordulás.

$\rho_{(z)}$görbületi sugár.

$M_{(z)}$a normálmetszetre redukált nyomaték.

$T_{(z)}$ a normálmetszetre redukált transzverzális erő.

A matematikai analízisből ismerjük a (6.84). egyenletnek a görbület helyzetbeli meghatározását:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''_{(z)}}{\pm \left[1 + (y'_{(z)})^2 \right]^{\frac{2}{3}}} \quad (6.85)$$

Ha az utóbbi egyenletben a másodrendű differenciális tagot figyelmen kívül hagyjuk, a RUGALMAS VONAL DIFFERENCIÁLEGYENLET -ét kapjuk.

$$\frac{1}{\rho_{(z)}} = \pm y''_{(z)} \quad (6.86)$$

A (K-K) normálmetszet merőleges elmozdulását a szuperpozíciós elv szerint (kis elmozdulások révén) két összetevőből alkotjuk:

$$y_{(z)} = y_{M(z)} + y_{T(z)} \quad (6.87)$$

AHOL :

$y_{(z)}$ – össz (y) irányú elmozdulás

$y_{M(z)}$ – az $(M_{(z)})$ nyomaték hatására létrejött (y) irányú elmozdulás

$y_{T(z)}$ – a $(T_{(z)})$ transzverzális erő hatására létrejött (y) irányú elmozdulás

Ha a (6.87). egyenletet egyszer illetve kétszer deriváljuk, a rugalmas vonal,

általános szögelfordulási egyenletét

$$y'_{(z)} = y'_{M(z)} + y'_{T(z)} \quad (6.88)$$

és a rugalmas vonal görbületi egyenletét kapjuk.

$$y''_{(z)} = y''_{M(z)} + y''_{T(z)} \quad (6.89)$$

A (6.89) egyenletben az első összetevőt az (M) nyomaték hozza létre. Ennek értékét az (5.105, 5.110, 6.86). egyenletek és a (4.01). HOOKE törvény alapján határozzuk meg:

$$\sigma = \frac{M_{(z)}}{I_x} y = E \varepsilon = E \frac{y}{\rho} = E y (\pm y''_{(z)}) \quad (6.90)$$

A (6.90). egyességből az aláhúzott (második és utolsó) tagok alapján:

$$\frac{M_{(z)}}{I_x} = E(\pm y_{(z)}'') \quad (6.91)$$

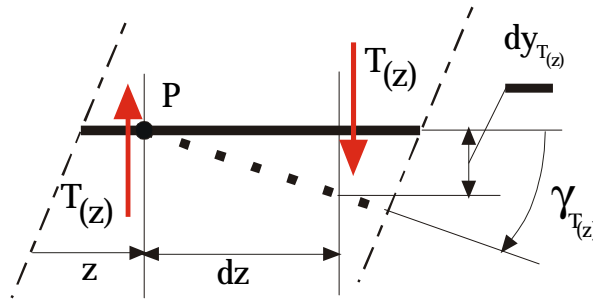
Az (M) nyomaték jelét, a (6.2.1). konvenciókra alapozva határozzuk meg.

A (6.91). egyenletből a nyomaték jele meghatározása után, a rugalmas vonal görbületének azt a változatát kapjuk, mely az (M) nyomaték, az (E) rugalmassági modulus, az (I_x) axiális másodrendű nyomaték kapcsolatát képezi.

$$y_{(z)}'' \approx -\frac{M_{(z)}}{EI_x} \quad (6.92)$$

A (6.89). egyenletben a második összetevőt a (T_z) transzverzális erő idézi elő.

Vegyük igénybe a semleges vonal (dz) hosszát (6.11. ábra), mely a (T_z) transzverzális erő hatására elmozdul ($dy_{T(z)}$) értékkel.



6.11. ábra

A (6.11). ábra szerint:

$$\gamma \cong \frac{dy_{T(z)}}{dz} = y_{T(z)}' \quad (6.93)$$

A HOOKE törvény és a (5.116, 5.117, 6.93). egyenletek alapján:

$$\tau_{\max} = G\gamma = G y_{T(z)}' = \alpha \frac{T_{(z)}}{A} \quad (6.94)$$

Ha az utóbbi egyesség két utolsó tagját deriváljuk és rendezzük, akkor a rugalmas vonal transzverzális erő idézte görbületét kapjuk, mely a (T) transzverzális erő, a (G) nyíró rugalmassági modulus, az (A) normálmetszeti felület és az (α) normálmetszeti tényező kapcsolatát képezi.

$$y_{T(z)}'' = \alpha \frac{T'_{(z)}}{G A} \quad (6.95)$$

Ha a (6.89). egyenletbe be helyettesítjük a (6.92, 6.95). egyenletek értékeit, a *RUGALMAS VONAL ÁLTALÁNOS DIFFERENCIÁLEGYENLET*-ét kapjuk:

$$y_{(z)}'' = -\frac{M_{(z)}}{E I_x} + \frac{\alpha T'_{(z)}}{G A} \quad (6.96)$$

6.2.2.1. A TRANSZFERZÁLIS ERŐ RELATIV HATÁSA

A transzverzális erő viszonylagos (relatív) hatását (hozzájárulását) az össz alakváltozásban, a következő (k) tényezővel jellemezzük:

$$k = \frac{y_{T(z)}}{y_{M(z)} + y_{T(z)}} 100\% \quad (6.97)$$

A (k) tényező értéke alapján a rudakat két csoportra osztjuk:

- RÖVID RUDAK

Ha a (k) értéke meghaladja az (5%) százalékot, akkor RÖVID RUDAK -ról beszélünk. Eben az esetben a (6.94). egyenletet egészében használjuk.

- HOSSZÚ RUDAK

HOSSZÚ RUDAK esetében a (k) értéke nem éri el az (5%) százalékot. Abban az esetben a transzverzális erő hatását az alakváltozásra figyelmen kívül hagyhatjuk (a gépészetben leginkább hosszú rudakkal dolgozunk).

6.2.3. A RUGALMAS VONAL MEGKÖZELÍTŐ DIFFERENCIÁLEGYENLETE

Hosszú rudak esetében a (6.96). egyenletben a második összetevőt figyelmen kívül hagyhatjuk, mivel annak kihatása az alakváltozásra nem lényeges (kisebb 5%-nál). Ekkor a kapott egyenletet a *RUGALMAS VONAL MEGKÖZELÍTŐ DIFFERENCIÁLEGYENLET* -nek

nevezzük.

$$\boxed{y''(z) \cong -\frac{M(z)}{EI_x}} \quad (6.98)$$

- A SZÖGELFORDULÁS MEGHATÁROZÁSA

A (6.98). differenciál egyenlet integrálása elvégzésével a rúd (z) helyzetének megfelelő szögelfordulását kapjuk:

$$\boxed{y'(z) = \gamma(z) = \int -\frac{M(z)}{EI_x} dz + C_1} \quad (6.99)$$

- A MERŐLEGES ELMOZDULÁS MEGHATÁROZÁSA

A (6.99). egyenlet integrálása elvégzésével a rúd (z) helyzetének megfelelő merőleges elmozdulását kapjuk:

$$\boxed{y(z) \cong f(z) = \int \left(\int -\frac{M(z)}{EI_x} dz + C_1 \right) dz + C_2} \quad (6.100)$$

A (C_1 , C_2) integrációs állandók meghatározását az ismert, vagy megadott mértani jellemzők (határértékek) alapján határozzuk meg.

6.2. PÉLDA

A (6.2.1). ábrán látható ($A-B$) tartó (B) végét (M) erőpár terheli. A tartó anyagát (E) rugalmassági tényező jellemzi. A normálmetszet állandó ($I_x = \text{const.}$). A szerkezetet hosszú rúdként kell kezelni.

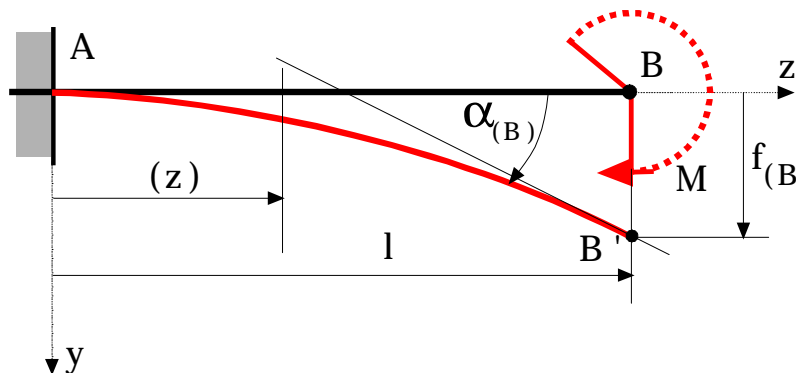
Meg kell határozni a (B) pont ($f_{(B)}$) merőleges elmozdulását, és az ($\alpha_{(B)}$) szögelfordulását.

A NYOMATÉK (z) METSZETBEN VALÓ MEGHATÁROZÁSA

6.2.4.

$$M_{(z)} = -M$$

(P.6.07)



6.2.1. ábra

A RUGALMAS VONAL DIFFERENCIÁLEGYENLETE

A meghatározást a (6.98). kapcsolat alapján végezzük el.

$$E I_x y_{(z)}'' = -M_{(z)} = M \quad (\text{P.6.08})$$

AZ INTEGRÁCIÓK ELVÉGZÉSE

$$\begin{aligned} E I_x y_{(z)}' &= Mz + C_1 \\ E I_x y_{(z)} &= \frac{1}{2} M z^2 + C_1 z + C_2 \end{aligned} \quad (\text{P.6.09})$$

AZ INTEGRÁCIÓS ÁLANDÓK KISZÁMITÁSA

A meghatározást az ismert mértani jellemzők (határértékek) alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} \text{Ha: } z = 0, \text{ akkor } y_{(z=0)}' &= 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ z = 0, \text{ akkor } y_{(z=0)} &= 0 \Rightarrow C_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{P.6.10})$$

Ha a (P.6.10). állandókat vissza helyettesítjük a (P.6.09). egyenletekbe, az $(y_{(z)})'$ szögelfordulás és az $(y_{(z)})$ merőleges elmozdulások (z – függvénybeli) általános egyenleteit határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
 y'_{(z)} &= \frac{M}{EI_x} z = \frac{Ml}{EI_x} \left(\frac{z}{l} \right) \\
 y_{(z)} &= \frac{M}{2EI_x} z^2 = \frac{Ml^2}{2EI_x} \left(\frac{z}{l} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{P.6.11}$$

AZ ALAKVÁLTOZÁSOK

- A (B) pont ($\alpha_{(B)}$) szögelfordulása ($z=l$):

$$\begin{aligned}
 y'_{(z=l)} &= \frac{Ml}{EI_x} = \alpha_{(B)} \\
 &\Downarrow \\
 \boxed{\alpha_{(B)} = \frac{Ml}{EI_x}}
 \end{aligned}
 \tag{P.6.12}$$

- A (B) pont ($f_{(B)}$) merőleges elmozdulása ($z=l$):

$$\begin{aligned}
 y_{(z=l)} &= \frac{Ml^2}{2EI_x} = f_{(B)} \\
 &\Downarrow \\
 \boxed{f_{(B)} = \frac{Ml^2}{2EI_x}}
 \end{aligned}
 \tag{P.6.13}$$

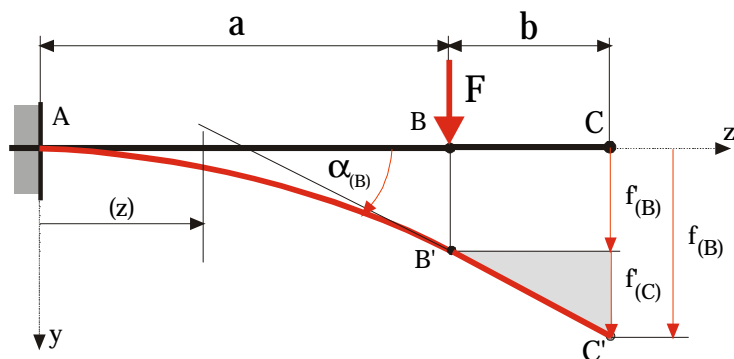
6.3. PÉLDA

A (6.2.2). ábrán látható (ABC) tartó (B) pontjában (F) erő terheli. A tartó anyagát (E) rugalmassági tényező jellemzi. A normálmetszet állandó ($I_x = \text{const.}$). A (B-C) tartományban nincsenek igénybevételek. A szerkezetet hosszú rúdként kell kezelni.

Meg kell határozni a (C) pont ($f_{(C)}$) merőleges elmozdulását, és az ($\alpha_{(C)}$) szögelfordulását.

A NYOMATÉK (z) METSZETBEN VALÓ MEGHATÁROZÁSA

$$M_{(z)} = -F(a-z) \quad 0 \leq z \leq a \tag{P.6.14}$$



6.2.2. ábra

A RUGALMAS VONAL DIFFERENCIÁLEGYENLETE

A meghatározást a (6.98). kapcsolat alapján végezzük el.

$$E I_x y_{(z)}'' = -M_{(z)} = F(a-z) \quad (\text{P.6.15})$$

AZ INTEGRÁCIÓK ELVÉGZÉSE

$$E I_x y_{(z)}' = -\frac{1}{2} F(a-z)^2 + C_1$$

$$E I_x y_{(z)} = \frac{1}{6} F(a-z)^3 + C_1 z + C_2 \quad (\text{P.6.16})$$

AZ INTEGRÁCIÓS ÁLANDÓK KISZÁMITÁSA

A meghatározást az ismert mértani jellemzők (határértékek) alapján végezzük el.

$$\text{Ha: } z=0, \text{ akkor } y_{(z=0)}' = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} F \cdot a^2$$

$$z=0, \text{ akkor } y_{(z=0)} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{6} F \cdot a^3 \quad (\text{P.6.17})$$

Ha a (P.6.17). állandókat vissza helyettesítjük a (P.6.16). egyenletekbe, az $(y_{(z)})$ szögelfordulás és az $(y_{(z)})$ merőleges elmozdulások (z – függvénybeli) általános egyenleteit határozzuk meg.

$$y_{(z)}' E I_x = \frac{1}{2} F a^2 \left[2 \left(\frac{z}{a} \right) - \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]$$

$$y_{(z)} EI_x = \frac{1}{6} F a^3 \left[3 \left(\frac{z}{a} \right)^2 - \left(\frac{z}{a} \right)^3 \right] \quad (\text{P.6.18})$$

AZ ALALKVÁLTOZÁSOK

- A (B) pont ($\alpha_{(B)}$) szögelfordulása ($z=a$):

$$y'_{(z=a)} = \frac{1}{2} \frac{F a^2}{E I_x} = \alpha_{(B)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha_{(B)} = \frac{1}{2} \frac{F a^2}{E I_x}} \quad (\text{P.6.19})$$

- A (B) pont ($f'_{(B)}$) merőleges elmozdulása ($z=a$):

$$y_{(z=a)} = \frac{1}{3} \frac{F a^3}{E I_x} = f'_{(B)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f'_{(B)} = \frac{1}{3} \frac{F a^3}{E I_x}} \quad (\text{P.6.20})$$

- A (C) pont ($\alpha_{(C)}$) szögelfordulása:

$$\boxed{\alpha_{(C)} = \alpha_{(B)} = \frac{1}{2} \frac{F a^2}{E I_x}} \quad (\text{P.6.21})$$

- A (C) pont ($f_{(B)}$) merőleges elmozdulását a (P.6.20). kapcsolat, és a (6.2.2). ábra szerint:

$$f_{(C)} = f_{(B)} + f'_{(C)} = f_{(B)} + \alpha_{(B)} b$$

$$\Downarrow$$

$$f_{(C)} = \frac{1}{3} \frac{F a^3}{E I_x} + \frac{1}{2} \frac{F a^2}{E I_x} b$$

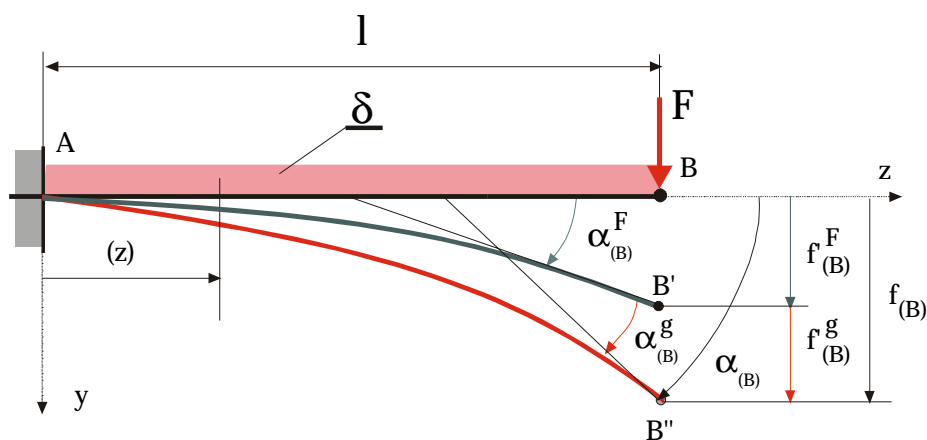
$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_{(C)} = \frac{1}{6} \frac{F a^3}{E I_x} \left[2 + 3 \left(\frac{b}{a} \right) \right]} \quad (\text{P.6.22})$$

6.4. PÉLDA

A (6.2.3). ábrán látható $(A-B)$ tartót összetett megterhelés terheli. A megterhelő rendszer egy (F) erőből és egy (δ) folyamatos terhelésből áll. A tartó anyagát (E) rugalmassági tényező jellemzi. A normálmetszet állandó $(I_x = \text{const.})$. A szerkezetet hosszú rúdként kell kezelni.

Meg kell határozni az általános alakváltozási egyenleteket, valamint a (B) pont $(f_{(B)})$ merőleges elmozdulását, és az $(\alpha_{(B)})$ szögelfordulását.



6.2.3. ábra

Mivel a tartón (F, δ) összetett megterhelő rendszer működik, a problémát a szuperpozíciós elv szerint úgy is megoldhatjuk, hogy külön meghatározzuk az (F) erővel, majd a (δ) folyamatos terheléssel előidézett alakváltozásokat, és ezt követően az alakváltozásokat összegezzük.

A példa megoldása során a rugalmas vonal differenciálegyenlete felállításakor a megterhelő rendszert egészében fogjuk használni, de a szuperpozíciós elv érvényesülése céljából, az egyes megterhelések hatását $(\dot{})$ jelzéssel választjuk szét.

A NYOMATÉK (z) METSZETBEN VALÓ MEGHATÁROZÁSA

$$M_{(z)} = -F(l-z) \dot{-} -\frac{1}{2} \delta (l-z)^2 = -F \cdot l \cdot \left[1 - \frac{z}{l} \right] \dot{-} -\frac{1}{2} \delta \cdot l^2 \left[1 - 2 \frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2} \right] \quad ; \quad 0 \leq z \leq l \quad (\text{P.6.23})$$

A RUGALMAS VONAL DIFFERENCIÁLEGYENLETE

A meghatározást a (6.98). kapcsolat alapján végezzük el.

$$E I_x y_{(z)}'' = F l \left[1 - \frac{z}{l} \right] \dot{+} \frac{1}{2} \delta \cdot l^2 \left[1 - 2 \frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2} \right] \quad (\text{P.6.24})$$

AZ INTEGRÁCIÓK ELVÉGZÉSE

$$E I_x y'_{(z)} = Fl \left[z - \frac{1}{2} \frac{z^2}{l} \right] + \frac{1}{2} \delta \cdot l^2 \left[z - \frac{z^2}{l} + \frac{1}{3} \frac{z^3}{l^2} \right] + C_1$$

$$E I_x y_{(z)} = Fl \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{6} \frac{z^3}{l} \right] + \frac{1}{2} \delta \cdot l^2 \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} \frac{z^3}{l} + \frac{1}{12} \frac{z^4}{l^2} \right] + C_1 z + C_2 \quad (\text{P.6.25})$$

AZ INTEGRÁCIÓS ÁLANDÓK KISZÁMITÁSA

A meghatározást az ismert mértani jellemzők (határértékek) alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} \text{Ha } z=0, \text{ akkor } y'_{(z=0)}=0 &\Rightarrow C_1=0 \\ z=0, \text{ akkor } y_{(z=0)}=0 &\Rightarrow C_2=0 \end{aligned} \quad (\text{P.6.26})$$

Ha a (P.6.26). állandókat vissza helyettesítjük a (P.6.24). egyenletekbe, az $(y'_{(z)})$ szögelfordulás és az $(y_{(z)})$ merőleges elmozdulások $(z - \text{függvénybeli})$ általános egyenleteit határozzuk meg.

$$y'_{(z)} = \frac{Fl^2}{2EI_x} \left[2 \left(\frac{z}{l} \right) - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right] + \frac{1}{6} \frac{\delta \cdot l^3}{EI_x} \left[3 \left(\frac{z}{l} \right) - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right]$$

$$y_{(z)} = \frac{Fl^3}{6EI_x} \left[3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] + \frac{1}{24} \frac{\delta \cdot l^4}{EI_x} \left[6 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - 4 \left(\frac{z}{l} \right)^3 + \left(\frac{z}{l} \right)^4 \right] \quad (\text{P.6.27})$$

AZ ALALKVÁLTOZÁSOK

- A (B) pont $(\alpha_{(B)})$ szögelfordulása $(z=l)$:

$$y'_{(z=l)} = \frac{1}{2} \frac{F l^2}{E I_x} + \frac{1}{6} \frac{\delta \cdot l^3}{E I_x} = y'_{(z=l)}^{(F)} + y'_{(z=l)}^{(\delta)} = \underline{\underline{\alpha_{(B)}^F + \alpha_{(B)}^\delta = \alpha_{(B)}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha_{(B)} = \frac{1}{2} \frac{F l^2}{E I_x} + \frac{1}{6} \frac{\delta \cdot l^3}{E I_x}} \quad (\text{P.6.28})$$

- A (B) pont $(f_{(B)})$ merőleges elmozdulása $(z=l)$:

$$y_{(z=l)} = \frac{F l^3}{3 E I_x} + \frac{1}{8} \frac{\delta \cdot l^4}{E I_x} = y_{(z=l)}^{(F)} + y_{(z=l)}^{(\delta)} = \underline{\underline{f_{(B)}^{(F)} + f_{(B)}^{(\delta)} = f_{(B)}}}$$

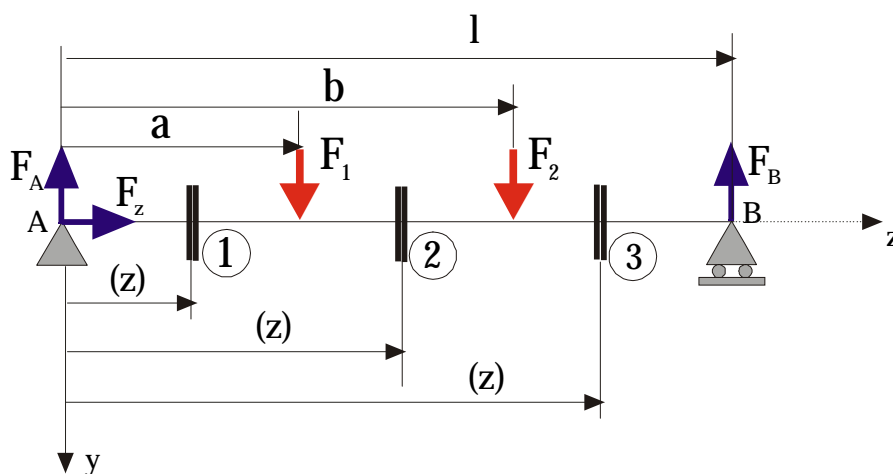
$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_{(B)} = \frac{F l^3}{3 E I_x} + \frac{1}{8} \frac{\delta \cdot l^4}{E I_x}} \quad (\text{P.6.29})$$

6.2.5. A RUGALMAS VONAL EGYENLETEINEK MEGHATÁROZÁSA ÖSZETETT IGÉNYBEVÉTEL ESETÉBEN (CLEBSCH-FÉLE MÓDSZER)

Ha egy rúdra egy összetett terhelési rendszer hat, akkor a rudat tartományokra kel felosztani. Valamennyi tartománynak a terhelési összetétele különbözik egymástól, és ezért a rúd alakváltozásának meghatározása csak úgy lehető, ha a tartományok számának megfelelő számú differenciálegyenletet képezünk. Ez természetesen kétszer annyi integrációt és integrációs állandó meghatározását jelenti, miszerint az egész eljárás igen időigényes.

A probléma megoldása ALFRED CLEBSCH nevéhez fűződik. A módszert egy statikailag meghatározott kéttámaszú rúd esetében mutatjuk be. A rudat (6.12. ábra) két összpontosított (F_1 , F_2) erő terheli.



6.12. ábra

Az eljárás a következő sorrend betartásán alapszik:

1. A rudat tartományokra osztjuk fel, a bal támasztól a jobb támasz irányában haladva, úgy, hogy minden (következő) tartomány egy új erőt (megterhelést) tartalmazzon.
2. A tartományokat balról jobbra jelöljük (a tartományokat arab számozással, a megterhelések távolságát pedig kisbetűkkel).
3. Minden következő tartományt jellemző nyomaték, kel hogy tartalmazzon az előző tartomány összetételét (strukturális identitás).
4. A (C) integrációs állandó meghatározása után (a meghatározás a folytatásban lesz bemutatva), az alakváltozásokat a számozott megjelölésig tartalmazó struktúrából kapjuk.
5. Valamennyi tartományban a tetszőlegesen kiválasztott normálmetszetet (z) -el jelöljük, azzal, hogy a (z) az adott tartományt jellemzi.

Az eljárással összhangban (jobb áttekintés céljából táblázatot használunk) tartományként írjuk le:

A nyomatéki egyenleteket:

TARTOMÁNY	NYOMATÉKI EGYENLET	(z) TARTOMÁNY
1	$M_{(z)}^1 = F_A z$	$0 \leq z \leq a$
2	$M_{(z)}^2 = F_A z - F_1(z - a)$	$a \leq z \leq b$
3	$M_{(z)}^3 = F_A z - F_1(z - a) - F_2(z - b)$	$b \leq z \leq l$

Végezzük el a most már ismertnek tekinthető módszer szerint a megfelelő integrációkat:

TARTOMÁNY	$EI_x y'' = -M_{(z)}$	$EI_x y' = -\int M_{(z)} dz$
1	$-F_A z$	$-\frac{1}{2} F_A z^2 + C_1$
2	$-F_A z + F_1(z - a)$	$-\frac{1}{2} F_A z^2 + \frac{1}{2} F_1(z - a)^2 + C_2$
3	$-F_A z + F_1(z - a) + F_2(z - b)$	$-\frac{1}{2} F_A z^2 + \frac{1}{2} F_1(z - a)^2 + F_2(z - b)^2 + C_3$

TARTOMÁNY	$EI_x y = \int \left(\int -M_{(z)} dz \right) dz$
1	$-\frac{1}{6} F_A z^3 + C_1 z + D_1$
2	$-\frac{1}{6} F_A z^3 + \frac{1}{6} F_1(z - a)^3 + C_2 z + D_2$
3	$-\frac{1}{6} F_A z^3 + \frac{1}{6} F_1(z - a)^3 + F_2(z - b)^3 + C_3 z + D_3$

Látható, hogy három tartomány révén ($C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$) hat integrációs állandót kel meghatározni. Ezek meghatározását a következő ismert vertikális elmozdulások és ismert szögelfordulások alapján történik:

$$\begin{aligned}
 z=0 \quad y_A=0 &\Rightarrow D_1=0 \\
 z=a \quad y_1' &= y_2' \Rightarrow C_1=C_2 \\
 z=a \quad y_1 &= y_2 \Rightarrow D_1=D_2 \\
 z=b \quad y_2' &= y_3' \Rightarrow C_2=C_3 \\
 z=b \quad y_2 &= y_3 \Rightarrow D_2=D_3 \\
 z=l \quad y_B=0 &\Rightarrow C_3 = \frac{1}{6l} [F_A l^3 - F_1(l-a)^3 - F_2(l-b)^3] = C
 \end{aligned} \tag{6.101}$$

A (6.101). értékek alapján:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= D_2 = D_3 = 0 \\
 C_1 &= C_2 = C_3 = C
 \end{aligned} \tag{6.102}$$

Az utóbbi következtetés azt jelenti, hogy függetlenül a tartományok számától, egy többtartományú rúdnak csak egy (C) integrációs állandót kel meghatározni. A (C) integrációs állandót az utolsó (komplett - teljes) rugalmas vonal egyenletéből számítjuk ki, az ismert (végső jobb) támasz merőleges elmozdulásából:

$$z=l \quad ; \quad y=0 \tag{6.103}$$

E módszer szerint tehát, meglehet határozni az érdekelt tartományban (olvassd a tartományt jelző dupla vonalig) az:

- ÖSSZETETT TERHELÉSI RENDSZER NYOMATÉKI EGYENLETÉT:

$$\boxed{M_{(z)} = F_A z \Big|_1 - F_1(z-a) \Big|_2 - F_2(z-b) \Big|_3} \tag{6.104}$$

- ÖSSZETETT TERHELÉSI RENDSZER DIFFERENCIÁL EGYENLETÉT:

$$\boxed{EI_x y_{(z)}'' = -F_A z \Big|_1 + F_1(z-a) \Big|_2 + F_2(z-b) \Big|_3} \tag{6.105}$$

- ÖSSZETETT TERHELÉSI RENDSZER SZÖGELFORDULÁSI EGYENLETÉT:

$$\boxed{y_{(z)}' = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{1}{2} F_A z^2 + C \Big|_1 + \frac{1}{2} F_1(z-a)^2 \Big|_2 + \frac{1}{2} F_2(z-b)^2 \Big|_3 \right]} \tag{6.106}$$

- **ÖSSZETETT TERHELÉSI RENDSZER MEROLEGES ELMOZDULÁSI EGYENLETÉT:**

$$y_{(z)} = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{1}{6} F_A z^3 + Cz \right]_1 + \frac{1}{6} F_1 (z-a)^3 \Big|_2 + \frac{1}{6} F_2 (z-b)^3 \Big|_3 + \dots \quad (6.107)$$

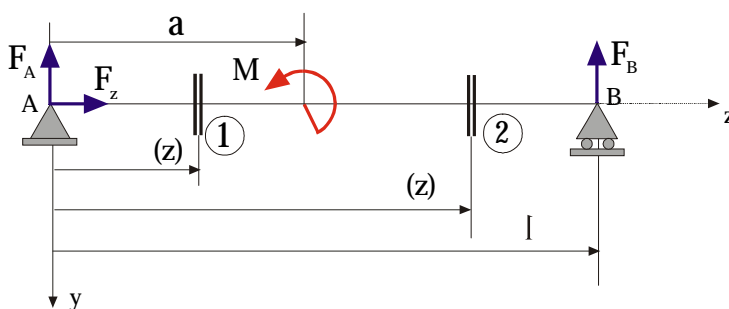
- **ÖSSZETETT TERHELÉSI RENDSZER INTEGRÁCIÓS ÁLANDÓJÁT**

$$C = \frac{1}{6l} \left[F_A l^3 - F_1 (l-a)^3 - F_2 (l-b)^3 + \dots \right] \quad (6.108)$$

6.2.5.1. AZ ÖSZETETT TERHELÉSI RENDSZEREK NYOMATÉKI EGYENLETEINEK FORMÁI

Az előző részben magyarázatként erőket vettünk igénybe. Ha az erők mellett (M) nyomatékok és erőpárok, valamint (δ) folyamatos megterhelések is működnek, a nyomatéki egyenleteket a következő bemutatott példák alapján formáljuk:

- **ERŐPÁR MŰKÖDÉS ESETÉBEN (6.13. ábra).**

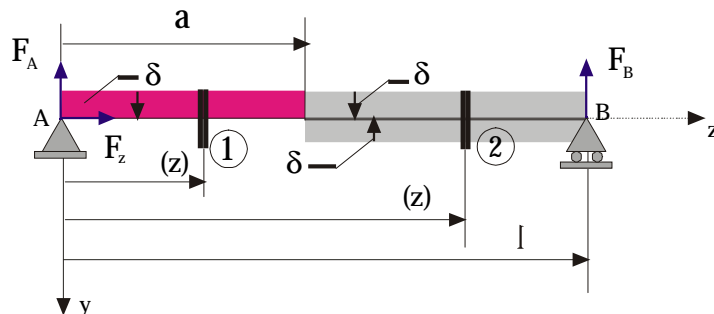


6.13. ábra

A megfelelő nyomatéki egyenlet formája tartalmazza a $(z-a)^0$ tagot, melyet a későbbi integrációs eljárás miatt vezettük be.

$$M_{(z)} = F_A z \Big|_1 - M (z-a)^0 \Big|_2 \quad (6.109)$$

- FOLYAMATOS MEGTERHELÉS ESETÉBEN (6.14. ábra).

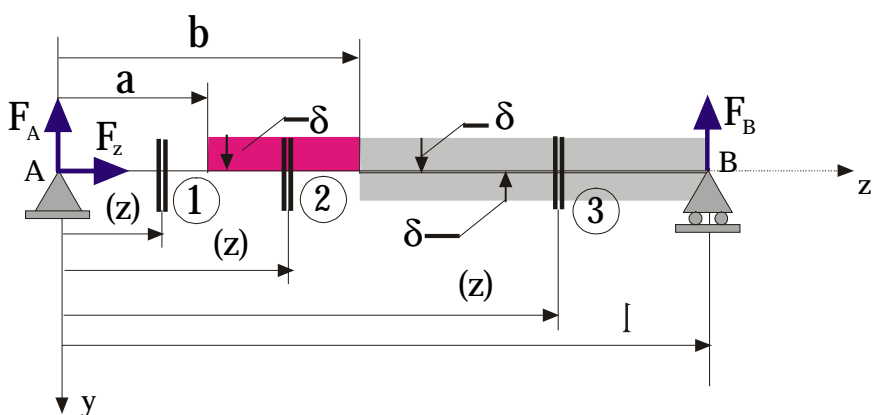


6.14. ábra

A tartomány $(l - a)$ részére, melyen nem működik (δ) folyamatos megterhelés, a strukturális identitás biztosítása céljából, $(\pm \delta)$ folyamatos megterhelést kell pótterhelésként használni. A pótterhelés nem változtathatja meg a rúd alakváltozását.

$$M_{(z)} = F_A z - \frac{1}{2} \rho z^2 \Big|_1 - \frac{1}{2} \rho (z - a)^2 \Big|_2 \quad (6.110)$$

- FOLYAMATOS FESZTÁVON BELÜLI MEGTERHELÉS ESETÉBE (6.15. ábra).

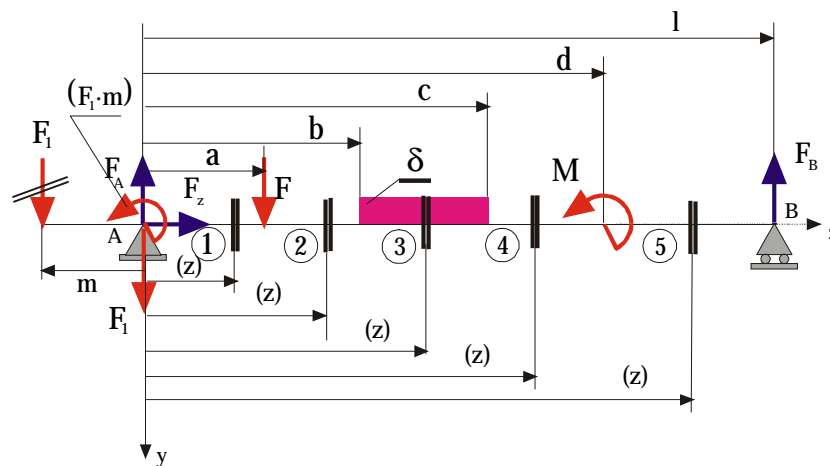


6.15. ábra

A megfelelő nyomatéki egyenlet strukturális formáját az előző példával összhangban határozzuk meg.

$$M_{(z)} = F_A z \left\|_1 - \frac{1}{2} \rho(z-a)^2 \right\|_2 + \frac{1}{2} \rho(z-b)^2 \left\|_3 \quad (6.111)$$

- **ÖSSZETETT MEGTERHELÉS ESETÉBEN (6.16. ábra).**



6.16. ábra

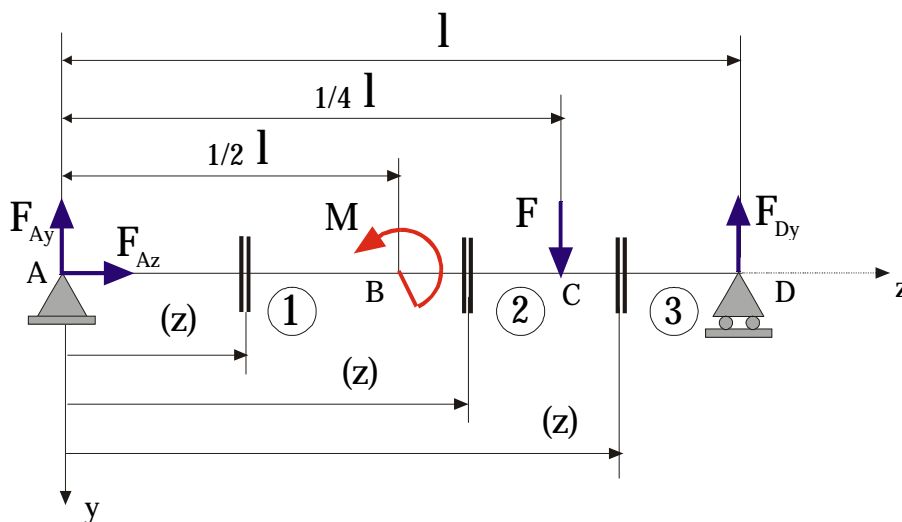
A megfelelő összetett terhelési rendszer nyomatóki egyenlet formája az előbbi (6.109, 6.110, 6.111). példákat igénybevéve a következő:

$$M_{(z)} = F_A z - F_1 z - M_1(z-0)^0 \Big\|_1 - M(z-a)^0 \Big\|_2 - \frac{1}{2} \rho(z-b)^2 \Big\|_3 - \frac{1}{2} \rho(z-c)^2 \Big\|_4 - M(z-d)^0 \Big\|_5 \quad (6.112)$$

6.5. PÉLDA

A (6.2.4). ábrán látható összetett igénybevételű kétfázisú rúdon (M, F) összetett megterhelő rendszer működik, mely egy $(M=0,5 F)$ erőpárból és egy (F) erőből áll. A tartó anyagát (E) rugalmassági tényező jellemzi. A normálmetszet állandó $(I = const.)$. A szerkezetet hosszú rúdként kell kezelni.

Meg kell határozni a (D) pont $(\beta_{(D)})$ szögelfordulását.



6.2.4. ábra

A TÁMASZREAKCIÓK MEGHATÁROZÁSA

- A meghatározást a statikából ismert egyensúlyi egyenletek segítségével végezzük el.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sum Z &= F_{Az} = 0 \\
 (2) \quad \sum Y &= F - F_{Ay} - F_{Dy} = 0 \\
 (3) \quad \sum M_A &= -M - F \cdot \frac{3}{4} \cdot l + F_{Dy} \cdot l = 0
 \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}
 (1) &\Rightarrow F_{Az} = 0 \\
 (3) &\Rightarrow F_{Dy} = \frac{M}{l} + \frac{3}{4} \cdot F \\
 (2) &\Rightarrow F_{Ay} = \frac{1}{4} \cdot F - \frac{M}{l}
 \end{aligned}
 \tag{P.6.30}$$

AZ ÖSSZETETT TERHELÉSI RENDSZER NYOMATÉKI EGYENLETE

A (6.16). ábrán bemutatott példa alapján kapott (6.117). egyenlet szerint határozzuk meg.

$$M = F_{Ay} \cdot z \Big|_1 + M \cdot \left(z - \frac{l}{2} \right) \Big|_2^0 - F \cdot \left(z - \frac{3}{4} \cdot l \right) \Big|_{l,3}
 \tag{P.6.31}$$

AZ ÖSSZETETT TERHELÉSI RENDSZER DIFFERENCIÁLEGYENLETE

A (6.105). kapcsolat szerint:

$$E \cdot I_x \cdot y''_{(z)} = -M = -F_{Ay} \cdot z \Big|_1 - M \cdot \left(z - \frac{l}{2} \right) \Big|_2 + F \cdot \left(z - \frac{3}{4} \cdot l \right) \Big|_3 \quad (\text{P.6.32})$$

AZ ÖSSZETETT TERHELÉSI RENDSZER SZÖGELFORDULÁSI EGYENLETE

A (6.106). kapcsolat szerint:

$$y'_{(z)} = \frac{1}{E \cdot I_x} \left[-\frac{1}{2} \cdot F_{Ay} \cdot z^2 + C \Big|_1 - M \cdot \left(z - \frac{l}{2} \right) \Big|_2 + F \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(z - \frac{3}{4} \cdot l \right)^2 \Big|_3 \right] \quad (\text{P.6.33})$$

AZ ÖSSZETETT TERHELÉSI RENDSZER MERŐLEGES ELMOZDULÁSI EGYENLETE

A (6.107). kapcsolat szerint:

$$y_{(z)} = \frac{1}{E \cdot I_x} \left[-\frac{1}{6} \cdot F_{Ay} \cdot z^3 + C \cdot z \Big|_1 - M \cdot \frac{1}{2} \left(z - \frac{l}{2} \right)^2 \Big|_2 + F \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(z - \frac{3}{4} \cdot l \right)^3 \Big|_3 \right] \quad (\text{P.6.34})$$

AZ ÖSSZETETT TERHELÉSI RENDSZER INTEGRÁCIÓS ÁLANDOJA

A meghatározást a (6.101, P.6.34). kapcsolatokat szerint végezzük el úgy, hogy az $(y_{(z=0)} = 0)$ határértéket használjuk:

$$C = \frac{1}{6} \cdot F_{Ay} \cdot z^2 + M \cdot \frac{1}{2 \cdot z} \left(z - \frac{l}{2} \right)^2 + F \cdot \frac{1}{6 \cdot z} \cdot \left(z - \frac{3}{4} \cdot l \right)^3 \quad (\text{P.6.35})$$

A (P.6.35). egyenletbe be helyettesítjük az $(F_{Ay}, M, z=l)$. értékeket.

$$C = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot F - \frac{\frac{1}{2} F \cdot l}{l} \right) \cdot l^2 + \frac{1}{2} F \cdot l \cdot \frac{1}{2 \cdot l} \left(z - \frac{l}{2} \right)^2 + F \cdot \frac{1}{6 \cdot l} \cdot \left(z - \frac{3}{4} \cdot l \right)^3$$

Az utóbbi egyenlet rendezése után, a (C) állandó értéke a következő:

$$C = \frac{7}{384} \cdot l^2 \quad (\text{P.6.36})$$

A (D) PONTBAN LÉTREJÖTT SZÖGELFORDULÁS

Az értéket úgy határozzuk meg, hogy a (P.6.33). kapcsolatba be helyettesítjük a $(z=l)$ és a (P.6.36). egyenletből kapott (C) állandó értékét, és elvégezzük az egyenlet rendezését. A rendezés után a következő értéket kapjuk:

$$\beta_{(D)} = y'_{(z)} = -\frac{29}{384} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_x} \quad (\text{P.6.37})$$

6.2.6. ÁLLANDÓ ÉS VÁLTOZÓ NORMÁLMETSZETŰ RÚDAK ALAKVÁLTOZÁSA

A rúdszerkezetek alakváltozását a (6.99, 6.100). egyenletekkel határoztuk meg. Az említett egyenletekben az (E) rugalmassági modulus állandó értékű, míg az $(M_{(z)})$ nyomaték és az (I_x) másodrendű axiális nyomaték egy (z) tartományon belül a (z) helyzet függvényei.

A rudak normálmetszetei a szerkesztési igényeknek megfelelően lehetnek *változó*, vagy *állandó* értékűek.

6.2.6.1. ÁLLANDÓ NORMÁLMETSZETŰ RÚDAK

Ide sorolhatjuk valamennyi szabványos hengerelt szelvényt, valamint a tengelyek egyes tartományait.

Mivel az állandó normálmetszetet

$$I_x = \text{const.} \quad (6.113)$$

állandó axiális másodrendű nyomaték jellemzi, úgy az alakváltozást meghatározó egyenletek a (6.99, 6.100). egyenletek alapján a következők:

A szögelfordulás:

$$y'_{(z)} = \gamma_{(z)} = -\frac{1}{E I_x} \int M_{(z)} dz + C_1 \quad (6.114)$$

A merőleges elmozdulás:

$$y_{(z)} \equiv f_{(z)} = -\frac{1}{EI_x} \int \left(\int M_{(z)} dz + C_1 \right) dz + C_2 \quad (6.115)$$

6.2.6.2. VÁLTOZÓ NORMÁLMETSZETŰ RÚDAK ALAKVÁLTOZÁSA

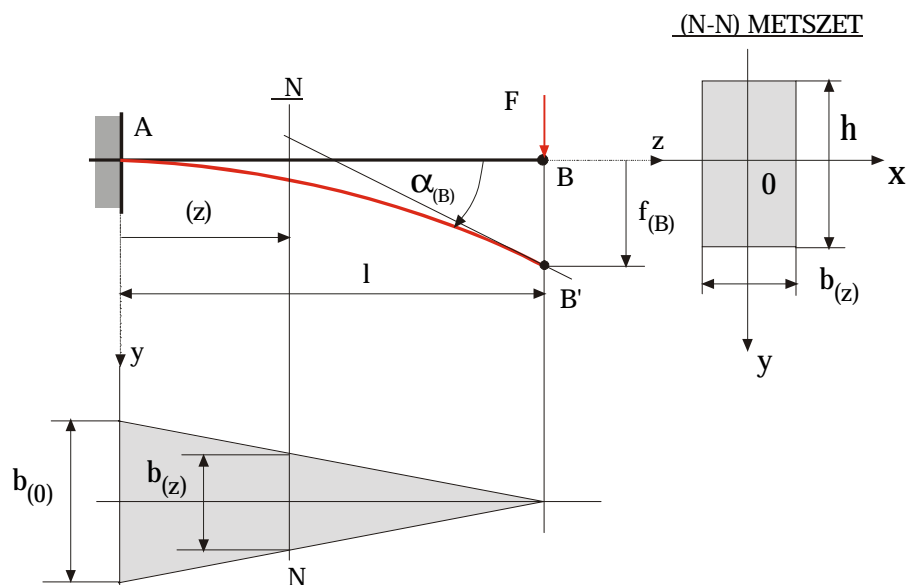
Ide sorolhatjuk az egyes rugószerkezeteket, oszlopszerkezeteket, távvezetéseket és más változó normálmetszetű szerkezetet.

Mivel a változó normálmetszettet

$$I_x \neq \text{const.} = f(z) = I_{x(z)} \quad (6.116)$$

másodrendű axiális nyomaték a (z) helyzet függvénye, az alakváltozások meghatározására az említett (6.99, 6.100). egyenletek érvényesek.

6.6. PÉLDA



6.2.5. ábra

A (6.2.5). ábrán látható $(A-B)$ tartó (B) végét (F) erő terheli. A tartó anyagát (E) rugalmassági tényező jellemzi. A normálmetszet NEM ÁLANDÓ $(I_x \neq \text{const.})$. A szerkezetet hosszú rúdként kell kezelni.

Meg kell határozni a (B) pont $(f_{(B)})$ merőleges elmozdulását, és az $(\alpha_{(B)})$ szögelfordulását.

A (6.2.5). ábrán látható, hogy a tartó szélessége változó, és a (z) támasztávolság függvénye:

$$\frac{b_o}{l} = \frac{b_z}{(l-z)} \Rightarrow b_z = \frac{b_o}{l}(l-z) \quad (\text{P.6.38})$$

AZ AXIÁLIS MÁSODRENDŰ NYOMATÉK VÁLTOZÓ ÉRTÉKE

$$I_x = I_{x(z)} = \frac{1}{12} h^3 b_{(z)} = \frac{1}{12} h^3 b_0 \left(\frac{l-z}{l} \right) \quad (\text{P.6.39})$$

A NYOMATÉK (z) METSZETBEN VALÓ MEGHATÁROZÁSA

$$M_{(z)} = -F(l-z) \quad (\text{P.6.40})$$

A RUGALMAS VONAL DIFFERENCIÁLEGYENLETE

A meghatározást a (6.98). kapcsolat alapján végezzük el.

$$E \cdot y''_{(z)} = -\frac{M_{(z)}}{I_{x(z)}} = \frac{F \cdot (l-z)}{\frac{1}{12} \cdot h^3 \cdot b_0 \cdot \left(\frac{l-z}{l} \right)} = \frac{12 \cdot F \cdot l}{h^3 \cdot b_0} \quad (\text{P.6.41})$$

AZ INTEGRÁCIÓK ELVÉGZÉSE

$$E y'_{(z)} = \frac{12Fl}{h^3 b_0} z + C_1$$

$$E y_{(z)} = \frac{6Fl}{h^3 b_0} z^2 + C_1 z + C_2 \quad (\text{P.6.42})$$

AZ INTEGRÁCIÓS ÁLANDÓK KISZÁMITÁSA

A meghatározást az ismert mértani jellemzők (határértékek) alapján végezzük el.

$$\begin{aligned} \text{Ha: } z=0, \text{ akkor } y'_{(z=0)} = 0 &\Rightarrow C_1 = 0 \\ z=l, \text{ akkor } y_{(z=l)} = 0 &\Rightarrow C_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{P.6.43})$$

Ha a (P.6.43). állandókat vissza helyettesítjük a (P.6.42). egyenletekbe, az $(y'_{(z)})$ szögelfordulás és az $(y_{(z)})$ merőleges elmozdulások (z – függvénybeli) általános egyenleteit határozzuk meg.

$$y'_{(z)} = \frac{12Fl}{Eh^3b_0} z$$

$$y_{(z)} = \frac{6Fl}{Eh^3b_0} z^2 \quad (\text{P.6.44})$$

A (B) PONT ALAKVÁLTOZÁSAI.

- A (B) pont $(\alpha_{(B)})$ szögelfordulása ($z=l$):

$$y'_{(z=l)} = \frac{12Fl^2}{Eh^3b_0} = \alpha_{(B)}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{(B)} = \frac{12Fl^2}{Eh^3b_0}$$

(P.6.45)

- A (B) pont $(f_{(B)})$ merőleges elmozdulása ($z=l$):

$$y_{(z=l)} = \frac{6Fl^3}{Eh^3b_0} = f_{(B)}$$

$$\Downarrow$$

$$f_{(B)} = \frac{6Fl^3}{Eh^3b_0}$$

(P.6.46)

6.2.7. TÖRT TENGYELŰ RUDAK (KERETSZERKEZETEK) ALAKVÁLTOZÁSA

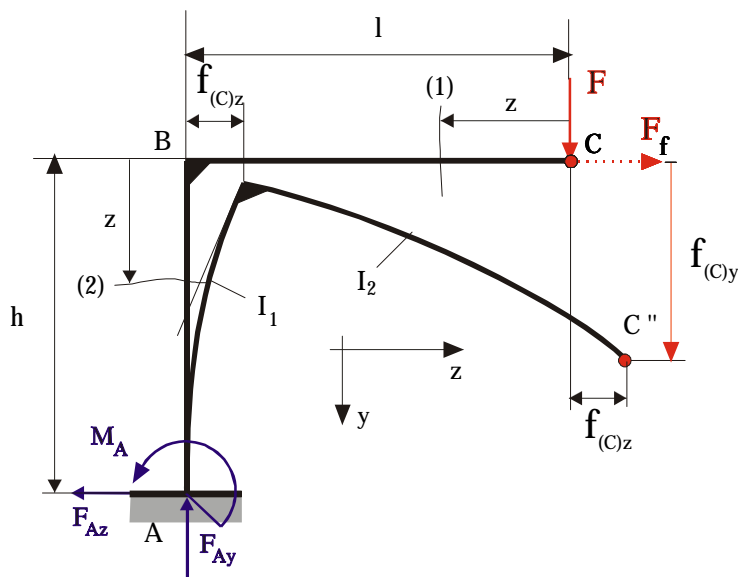
A törttengelyű rudak sztatikailag nem különböznek a síktengelyű rudaktól.

Az alakváltozások meghatározása alapjában, szintén megegyezik a síkegyenes rudaknál alkalmazott módszerrel, azzal, hogy szemelőt kel tartani a szerkezeti kiépítés különlegességeit.

6.7. PÉLDA

A (6.2.6). ábrán látható tört tengelyű (ABC) tartót, a (C) pontban (F) erő terheli. A rúd anyagára jellemző az (E) rugalmassági modulus.

Meg kell határozni a (C) pont ($f_{(C)y}$) merőleges, és az ($f_{(C)z}$) vízszintes elmozdulását.



6.2.6. ábra

A feladatot két módszer alkalmazásával fogjuk megoldani, éspedig:

- A) Táblázati módszer alkalmazásával.
- B) Castigliano módszer szerint.

Függetlenül az alkalmazott módszertől, első lépésként meg kell határozni a befogás reakció erőit. A meghatározást az egyensúlyi egyenletek alapján végezzük el.

$$(1) \quad \sum Y = -F_{Ay} + F = 0$$

$$(2) \quad \sum Z = -F_{Az} + F_f = 0$$

$$(3) \quad \sum M_A = F \cdot l + F_f \cdot h - M_A = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(1) \Rightarrow F_{Ay} = F$$

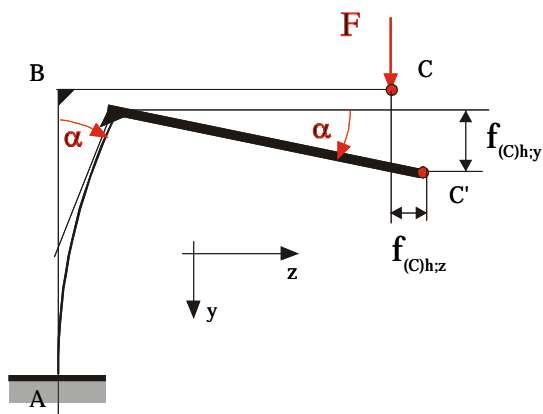
$$(2) \Rightarrow F_{Az} = F_f$$

$$(3) \Rightarrow M_A = F \cdot l + F_f \cdot h$$

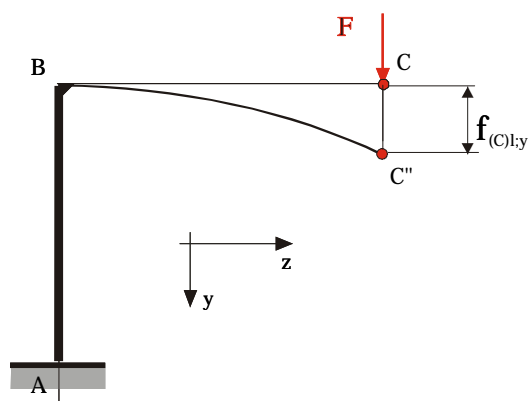
(P.6.47)

A) A TÁBLÁZATI MÓDSZER ALKALMAZÁSA

Ezt a módszert úgy alkalmazzuk, hogy sorban feltételezzük, hogy az egyes tartományok rugalmasak, a többiek pedig merevek. Ily módon meghatározzuk a (C) pont elmozdulásait mint az egyes tartományok alakváltozása következményét, majd a szuperpozíciós elv szerint a meghatározott elmozdulásokat összeadjuk. A tartományok alakváltozását műszaki táblázatokból határozzuk meg. E módszer alkalmazásánál a (6.2.6.). ábrán feltüntetett ($F_f = 0$) fiktív megterhelést nem kell használni, mivel nulla értéke alapján nem eredményez alakváltozást.



6.2.6.a. ábra



6.2.6.b. ábra

- Ha a (h) tartományt rugalmasnak, az (l) tartományt pedig merevnek tekintjük (6.2.6.a. ábra), akkor a (C) pont merőleges elmozdulása:

$$f_{(C)h;y} = \left\{ \frac{(F \cdot l) \cdot h}{E \cdot I_1} \right\} \cdot l \quad (\text{P.6.48})$$

vízszintes elmozdulása:

$$f_{(C)h;z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(F \cdot l) \cdot h^2}{E \cdot I_1} \quad (\text{P.6.49})$$

- Ha az (l) tartományt rugalmasnak, a (h) tartományt pedig merevnek tekintjük (6.2.6.b. ábra), akkor a (C) pont merőleges elmozdulása:

$$f_{(C)l;y} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_2} \quad (\text{P.6.50})$$

vízszintes elmozdulása:

$$f_{(C)l;z} = 0 \quad (\text{P.6.51})$$

A (C) PONT ÖSSZETETT ELMOZDULÁSAI

A (C) pont merőleges elmozdulás:

$$f_{(C);y} = f_{(C)h;y} + f_{(C)l;y} = \left\{ \frac{(F \cdot l) \cdot h}{E \cdot I_1} \right\} \cdot l + \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_{(C);y} = \frac{F \cdot l^3}{E} \cdot \left\{ \frac{1}{I_1} \cdot \left(\frac{h}{l} \right) + \frac{1}{3 \cdot I_2} \right\}} \quad (\text{P.6.52})$$

A (C) pont vízszintes elmozdulása:

$$f_{(C);z} = f_{(C)h;z} + f_{(C)l;z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(F \cdot l) \cdot h^2}{E \cdot I_1} + 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_{(C);z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(F \cdot l) \cdot h^2}{E \cdot I_1}} \quad (\text{P.6.53})$$

B) A CASTIGLIANO MÓDSZER ALKALMAZÁSA

A Castigliano módszer szerint, azokban a pontokban, melyekben nem működnek aktív megterhelések, de az alakváltozásokat meg kell határozni, fiktív megterheléseket alkalmazunk.

Mivel a (C) pontban a vízszintes irányban nem működik aktív erő de az $(f_{(c)z})$ vízszintes elmozdulást meg kell határozni, az $(F_f = 0)$ fiktív erőt fogjuk alkalmazni.

A (W_f) fiktív munkafüggvény (6.80. kapcsolat szerint), az (F) aktív erő, és az $(F_f = 0)$ fiktív erő függvénye lesz:

$$W_f = W(F, F_f) \quad (\text{P.6.54})$$

A terhelőrendszerből itélve, hajlító igénybevételről van szó, ezért a munkafüggvényt a (6.32). kapcsolat alapján határozzuk meg (a 6.03. kapcsolat szerint $W=U$). Hosszú rúd révén a (6.32). kapcsolat második összetevőjét figyelmen kívül hagyjuk.

$$W = W_f = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_z^2}{I_x} \cdot dz \quad (\text{P.6.55})$$

A NYOMATÉKOK MEGHATÁROZÁSA

A tartót két tartományra bontjuk fel:

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{TARTOMÁNY: } M_1 &= -F \cdot z & l \geq z \geq 0 \\ (2) \quad \text{TARTOMÁNY: } M_2 &= -F \cdot l - F_f \cdot z & h \geq z \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{P.6.56})$$

AZ ÖSSZ MUNKA ÉRTEKE

Az össz munka értékét tartományokban végzett munkák összegéből kapjuk:

$$W = W_{(1)} + W_{(2)} = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_{(1)}^2}{I_x} dz + \frac{1}{2E} \int_0^h \frac{M_{(2)}^2}{I_x} dz \quad (\text{P.6.57})$$

A (C) PONT ELMOZDULÁSAI

A meghatározásokat a (6.83). kapcsolatok szerint végezzük el.

Merőleges elmozdulás:

$$\begin{aligned}
 f_{(c);y} &= \left(\frac{\partial W_f}{\partial F} \right)_{F_f=0} = \left\{ \frac{1}{2E} \left[\int_0^l \frac{2M_{(1)}}{I_2} \frac{\partial M_{(1)}}{\partial F} dz + \int_0^h \frac{2M_{(2)}}{I_1} \frac{\partial M_{(2)}}{\partial F} dz \right] \right\}_{F_f=0} = \\
 &= \frac{1}{E} \left[\int_0^l \frac{(-Fz)}{I_2} (-z) dz + \int_0^h \frac{(-F \cdot l - F_f \cdot z)}{I_1} (-l) dz \right]_{F_f=0} \\
 &\quad \Downarrow \\
 &\boxed{f_{(c);y} = \frac{F \cdot l^3}{E} \cdot \left\{ \frac{1}{I_1} \cdot \left(\frac{h}{l} \right) + \frac{1}{3 \cdot I_2} \right\}} \quad (P.6.58)
 \end{aligned}$$

Vízszintes elmozdulás:

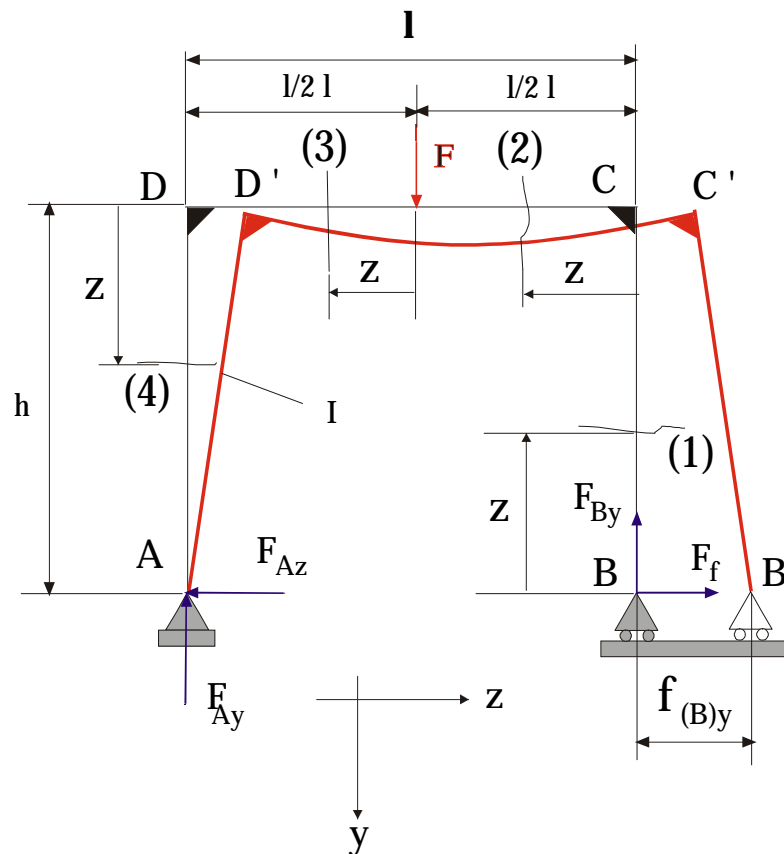
$$\begin{aligned}
 f_{(c);z} &= \left(\frac{\partial W_f}{\partial F_f} \right)_{F_f=0} = \left\{ \frac{1}{2E} \left[\int_0^l \frac{2M_{(1)}}{I_2} \frac{\partial M_{(1)}}{\partial F_f} dz + \int_0^h \frac{2M_{(2)}}{I_1} \frac{\partial M_{(2)}}{\partial F_f} dz \right] \right\}_{F_f=0} = \\
 &= \frac{1}{E} \left[\int_0^l \frac{(-F \cdot z)}{I_2} \cdot 0 \cdot dz + \int_0^h \frac{(-F \cdot l - F_f \cdot z)}{I_1} (-z) dz \right]_{F_f=0} \\
 &\quad \Downarrow \\
 &\boxed{f_{(c);z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(F \cdot l) \cdot h^2}{E \cdot I_1}} \quad (P.6.59)
 \end{aligned}$$

Látható, hogy mindkét módszer alkalmazásával a meghatározott alakváltozások megegyeznek.

6.8. PÉLDA

A (6.2.7). ábrán látható (ABCD). Kéttámaszú tört tengelyű rúdszerkezet a (CD) tartomány közepén (F) erő terheli. A szerkezet valamennyi normálmetszetét (I) axiális másodrendű nyomaték jellemzi. A használt anyag rugalmassági modulusa (E):

Meg kell határozni Castigliano módszer alkalmazásával a (B) pont vízszintes elmozdulását.



6.2.7. ábra

A TÁMASZREAKCIÓK MEGHATÁROZÁSA

A meghatározást az egyensúlyi egyenletek alapján végezzük el.

$$(1) \quad \sum Y = F - F_{Ay} + F_{By} = 0$$

$$(2) \quad \sum Z = F_f - F_{Az} = 0$$

$$(3) \quad \sum M_A = -F \cdot \frac{l}{2} + F_{By} \cdot l = 0$$

⇓

$$(2) \Rightarrow F_{Az} = F_f$$

$$(3) \Rightarrow F_{By} = \frac{1}{2}F$$

$$(1) \Rightarrow F_{Ay} = \frac{1}{2}F$$

(P.6.60)

A NYOMATÉKOK MEGHATÁROZÁSA

A tartót négy tartományra bontjuk fel:

- (1). *TARTOMÁNY*: $M_1 = F_f \cdot z$ $h \geq z \geq 0$
- (2). *TARTOMÁNY*: $M_2 = F_f \cdot h + F_{By} \cdot z = F_f \cdot h + \frac{1}{2} F \cdot z$ $\frac{1}{2} l \geq z \geq 0$
- (3). *TARTOMÁNY*: $M_3 = F_f \cdot h + F_{By} \cdot z - F \cdot z = F_f \cdot h - \frac{1}{2} F \cdot z$ $\frac{1}{2} l \geq z \geq 0$
- (4). *TARTOMÁNY*: $M_4 = F_{Az} \cdot z = F_f \cdot z$ $h \geq z \geq 0$

(P.6.61)

AZ ÖSSZ MUNKA ÉRTEKE

A tartományokban végzett munkák összegéből kapjuk:

$$W_f = W_{(1)} + W_{(2)} + W_{(3)} + W_{(4)} = \frac{1}{2E} \int_0^h \frac{M_{(1)}^2}{I_x} dz + \frac{1}{2E} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{(2)}^2}{I_x} dz + \frac{1}{2E} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{(3)}^2}{I_x} dz + \frac{1}{2E} \int_0^h \frac{M_{(4)}^2}{I_x} dz$$

(P.6.62)

A (B) PONT VÍZSZINTES ELMOZDULÁSA

A meghatározást a (6.83). kapcsolat szerint végezzük el.

$$f_{(B)y} = \left(\frac{\partial W_f}{\partial F_f} \right)_{F_f=0} = \left\{ \frac{1}{2E \cdot I_x} \left[\int_0^l 2M_{(1)} \frac{\partial M_{(1)}}{\partial F_f} dz + \int_0^l 2M_{(2)} \frac{\partial M_{(2)}}{\partial F_f} dz + \int_0^l 2M_{(3)} \frac{\partial M_{(3)}}{\partial F_f} dz + \int_0^l 2M_{(4)} \frac{\partial M_{(4)}}{\partial F_f} dz \right] \right\}_{F_f=0} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{E \cdot I_x} \left[\int_0^l (F_f \cdot z) \cdot (z) dz + \int_0^l \left(F_f \cdot h + \frac{1}{2} F \cdot z \right) \cdot (h) dz + \int_0^l \left(F_f \cdot h + \frac{1}{4} F \cdot l - \frac{1}{2} F \cdot z \right) \cdot (h) dz + \int_0^l (F_f \cdot z) \cdot (z) dz \right] \right\}_{F_f=0}$$

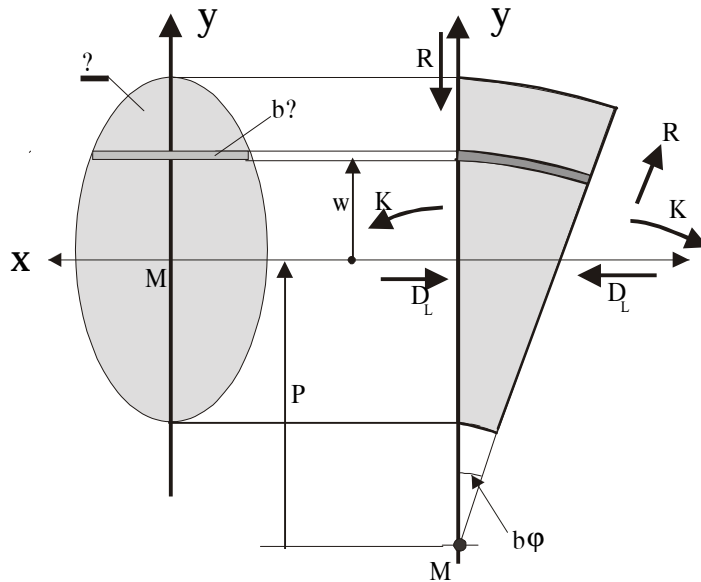
$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_{(B)y} = \frac{1}{8} \frac{F \cdot l^2 \cdot h}{E \cdot I_x}}$$
(P.6.63)

6.2.8. SÍKGÖRBE RÚDAK ALAKVÁLTOZÁSA

A síkgörbe rudak alakváltozását az (5.2). részben bemutatott síkgörbe rúd hajlító igénybevételre vonatkozó elmélettel, és a (6.1.3). Castigliáno féle elmélet segítségével határozzuk meg.

Ez alkalommal is vegyük igénybe az (5.26). ábrát, mely a redukált (M, F_N, T) terhelőrendszert, és az alakváltozás mértani jellemzőit tartalmazza.



6.17. ábra

Az (5.162). egyenletekből elimináljuk a (ψ) tagot

$$\begin{aligned}
 E\psi - \sigma_0 &= \frac{MR}{I_r} \\
 \rho(1 + \psi) - R &= \frac{\sigma_0}{E} R \\
 \Downarrow \\
 \rho \left(1 + \frac{\sigma_0}{E} \right) + \frac{M}{EI_r} R \rho &= R \left(1 + \frac{\sigma_0}{E} \right)
 \end{aligned} \tag{6.117}$$

Az utóbbi egyenletben a (σ_0 / E) -tag arányosan kis érték, és ezért a továbbiakban figyelmen kívül hagyjuk. Rendezés után a (6.117). egyenlet formája:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EI_r} \quad (6.118)$$

Határozzuk meg az (y) központi távolságon lévő (dA) keresztmetszetű elemi szálaban (6.17. ábra) felhalmozódott $[d(dU)]$ rugalmas energiát. Ez az energia mennyiség a differenciális (dV) volumenű rúdelem (dU) felhalmozott energiájának része. A (dU) energiát a (6.15). alakváltozási energiaként határozzuk meg.

$$d(dU) = \frac{1}{2E} \sigma^2 \Delta dV \quad (6.119)$$

Az elemi szál térfogata a következő:

$$\Delta dV = dA(R + y)d\varphi \quad (6.120)$$

Mivel

$$d\varphi = \frac{ds}{R} \quad (6.121)$$

a (6.120). egyenlet formája a következő:

$$\Delta dV = dA \frac{(R + y)}{R} ds \quad (6.122)$$

Helyettesítjük be a (6.119). egyenletbe a (6.122). értéket.

$$d(dU) = dA \cdot \sigma^2 \cdot \frac{R + y}{R} \cdot dA \cdot ds \quad (6.123)$$

Ha a (ds) hosszát véglegesnek tekintjük, akkor a (6.123). egyenlet integrációjával a differenciális rúdelem energiáját határozzuk meg.

$$dU = \frac{ds}{2ER} \int_A \sigma^2 (R + y) dA \quad (6.124)$$

Az utóbbi egyenlet integrálját bontjuk fel két összetevőre:

$$dU = \frac{ds}{2ER} \left(\int_A \sigma^2 R \cdot dA + \int_A \sigma^2 y \cdot dA \right) \quad (6.125)$$

A (6.125). egyenletben a második tagot figyelmen kívül hagyjuk, mivel a $(\int_A y \cdot dA = 0)$ statikai elsőrendű nyomaték értéke a súlyponti tenhelyekre nulla.

A (σ) normálfeszültség értékét az (5.163). egyenlettel határozzuk meg. Ha a (σ)

normál feszültség értékét be helyettesítjük a (6.125). egyenletbe, és a (σ_0/E) tagot mint arányosan kis értéket figyelmen kívül hagyjuk, majd az egyenletet rendezzük, a (dU) differenciál munka formáját kapjuk.

$$dU \cong \frac{1}{2EI_r} M_{(s)}^2 ds \quad (6.126)$$

Ha az (I_r) redukált másodrendű axiális nyomatékot mint állandót vesszük igénybe $(I_r = \text{const.})$, ami megfelel az állandó normálmetszetű síkgörbe rudaknak, majd elvégezzük az integrációt, a *SÍKGÖRBE RÚD ENERGIATÉTEL* -ét kapjuk:

$$U \cong \frac{1}{2EI_r} \int_s M_{(s)}^2 ds \quad (6.127)$$

Ha az utóbbi egyenletben az (M_s) nyomatékot a (φ) helyzet-meghatározó szög által tüntetjük fel, majd a (6.121). egyesség szerint elvégezzük a megfelelő transzformációt, a síkgörbe rúd energiatételének egy *változatát* kapjuk.

$$U \cong \frac{1}{2EI_r} R \int_{\varphi} M_{(\varphi)}^2 d\varphi \quad (6.128)$$

Általános esetben az $(M_{(\varphi)})$ nyomaték értéke a következő:

$$M_{(\varphi)} = f(M_0, F_n, F_T) \quad (6.129)$$

A Castigliáno elmélet szerint az alakváltozásokat a terhelések irányában a (6.73, 6.74, 6.127). egyenletek alapján határozzuk meg.

- Az (0) pont (y) irányú elmozdulása:

$$y_{(0)} = \frac{\partial U}{\partial F_T} = \frac{1}{EI_r} \int_s M_{(s)} \frac{\partial U}{\partial F_T} ds \quad (6.130)$$

- Az (0) pont (z) irányú elmozdulása:

$$z_{(0)} = \frac{\partial U}{\partial F_n} = \frac{1}{EI_r} \int_s M_{(s)} \frac{\partial U}{\partial F_n} ds \quad (6.131)$$

- Az (θ) pontot tartalmazó normálmetszet szögelfordulása:

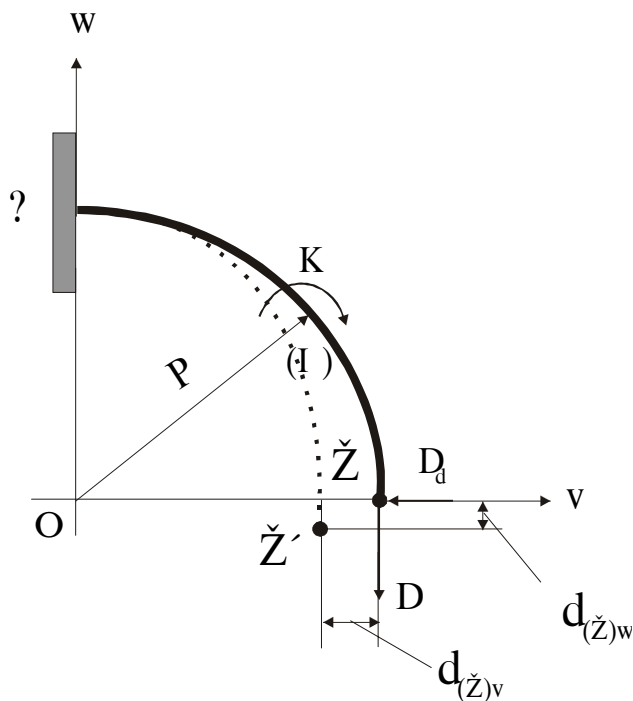
$$\gamma_{(\theta)} = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{1}{EI_r} \int_s M_{(s)} \frac{\partial U}{\partial M_0} ds \quad (6.132)$$

Az alakváltozást a (6.128). munkatétel formájából is egyértelműen meg lehet határozni.

6.9. PÉLDA

A (6.23.1). ábrán látható (AB) síkgörbe rúd (B) pontját (F) erő terheli. A rúd anyagára jellemző az (E) rugalmassági modulus. A szerkezet normálmetszete állandó.

Meg kell határozni a (B) pont $(f_{(\theta)y})$ merőleges, és az $(f_{(\theta)v})$ vízszintes elmozdulását Castigliáno módszer alkalmazásával.



6.2.7.1. ábra

A (K) PONTRA SZÁMITOTT NYOMATÉK

$$M = F \cdot (R - x) + F_f \cdot y \quad (\text{P.6.64})$$

A MÉRTANI ÖSSZEFÜGGÉSEK

$$x = R \cdot \cos \varphi \quad ; \quad y = R \cdot \sin \varphi \quad ; \quad ds = R \cdot d\varphi \quad (\text{P.6.65})$$

AZ ÖSSZ MUNKÁ ÉRTEKE

$$W_f = W = \frac{1}{2EI_x} \int_0^h M^2 dz \quad (\text{P.6.66})$$

A (B) PONT VÍZSZINTES ELMOZDULÁSAI

A meghatározásokat a (6.83). egyenletek szerint végezzük el, azzal, hogy a (P.6.64, P.6.65). kapcsolatokat használjuk.

- Vízszintes elmozdulás:

$$\begin{aligned} f_{(B)x} &= \left(\frac{\partial W_f}{\partial F_f} \right)_{F_f=0} = \frac{1}{EI_x} \left(\int_s M \cdot \frac{\partial M}{\partial F_f} ds \right)_{F_f=0} = \frac{1}{EI_x} \left(\int_s [F \cdot (R - x) + F_f \cdot y] \cdot (y) ds \right)_{F_f=0} = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} [F \cdot (R - R \cdot \cos \varphi)] \cdot (R \cdot \sin \varphi) \cdot R \cdot d\varphi \right) \\ &\quad \Downarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{f_{(B)x} = -\frac{3}{2} \frac{F \cdot R^3}{E \cdot I_x}} \quad (\text{P.6.67})$$

- Merőleges elmozdulás:

$$\begin{aligned} f_{(B)y} &= \left(\frac{\partial W_f}{\partial F} \right)_{F_f=0} = \frac{1}{EI_x} \left(\int_s M \cdot \frac{\partial M}{\partial F} ds \right)_{F_f=0} = \frac{1}{EI_x} \left(\int_s [F \cdot (R - x) + F_f \cdot y] \cdot ((R - x)) ds \right)_{F_f=0} = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} [F \cdot (R - R \cdot \cos \varphi)] \cdot (R - R \cdot \cos \varphi) \cdot R \cdot d\varphi \right) \\ &\quad \Downarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{f_{(B)y} = \left(\frac{3}{4} \pi - 2 \right) \frac{F \cdot R^3}{E \cdot I_x}} \quad (\text{P.6.68})$$

7. A RÚDAK KIHAJLÁS

A számítások során, a húzó-nyomó igénybevétel esetében (5.1.1.-rész), a rúd hosszát figyelmen kívül hagytuk. A említett esetben csak a (σ) normálfeszültség értékét, és a (σ_1) főfeszültség értékét határoztuk meg. Rövid rudak esetében ez a hozzáállás kielégítő, viszont, ha a rúd hossza a normálmetszet méretéhez képest viszonylag nagy, akkor a rudakból álló szerkezetek méretei a rúd (l) hosszától is függenek

7.1. A NYOMOTT RÚDAK STABILITÁSA.

Ha egy nyomott rúd (mely megfelelően van méretezve nyomásra) geometriai tengelyét bizonyos okok miatt (ütés, rövid időtartalmú túlterhelés, rezgés,...) elmozdul az egyensúlyi állapotból, három eset jöhet létre:

STABIL ÁLLAPOT

Az elmozdulást idéző ok megszűntével, a rúd geometriai tengelye visszanyeri eredeti stabil formáját.

INDIFERENS ÁLLAPOT

Az elmozdulást idéző ok megszűntével, a rúd geometriai tengelye az (új) - elmozdított helyzetben marad.

LABILIS ÁLLAPOT

Az elmozdulást idéző ok megszűntével, a rúd geometriai tengelye nem nyeri vissza eredeti (stabil) formáját, hanem az elmozdulások értékei növekednek és törést idéznek elő.

A szilárdságtanban a labilis elmozdulást **KIHAJLÁS** -nak nevezzük.

A további eljárás során meg kell határozni melyek azok a (F_K, σ_K, l_K) kritikus erők, kritikus feszültségek és rúdhosszak, melyek eléérésekor válnak a rudak labilissá.

7.1.1. A KARCSUSÁGI TÉNYEZŐ

Így nevezzük azt a mértéknélküli tényezőt, mely konvenció szerint tartalmazza a rúd (l_r)

megfelelő - redukált hosszát, az (A) normálmetszet felületét és az (I_2) minimális fő axiális másodrendű nyomatékot. Az (I_2) minimális fő másodrendű nyomaték használata indokolt, mivel a kihajlás mindig a gyengébb (2). főtengely körül történik.

$$\lambda = \frac{l_r}{\sqrt{\frac{I_2}{A}}} \quad (7.01)$$

7.2. EULER-FÉLE ELJÁRÁS

Ez a módszer a rugalmas (σ, ε) terhelési tartománynak $(\sigma_p, \varepsilon_p)$ arányos altartományát veszi igénybe, illetve azt a tartományt ahol a HOOKE törvény érvényesül (7.03. ábra)

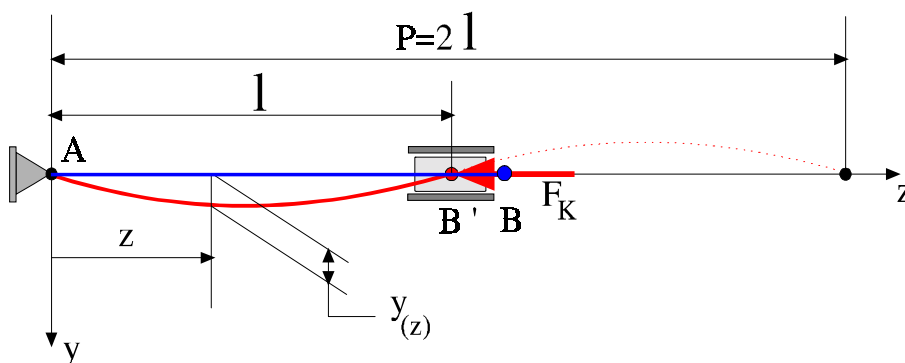
$$0 \leq \sigma \leq \sigma_p$$

Ahol: σ – tényleges normálfeszültség (7.02)

σ_p – az arányos tartomány felső normálfeszültségi érték

7.2.1. A KRITIKUS ERŐ MEGHATÁROZÁSA

E célból egy (l) hosszúságú rudat veszünk igénybe, mely anyagát (E) rugalmassági modulus, a normálmetszetet pedig (I_2) fő másodrendű nyomaték jellemzi (7.01. ábra).



7.01. ábra

Az ábrán fel vannak tüntetve a rúd végeinek befogási kiépítései, az (F_K) kritikus erő, valamint a geometriai tengely elmozdult formája.

Egy tetszőlegesen kiválasztott (z) távolságon ($y_z=y$) elmozdulási érték jellemzi.

E szerint a hajlító nyomaték értéke:

$$M_{(z)} = F_k y \quad (7.03)$$

Az elmozdult geometriai tengely rugalmas vonalának differenciál egyenlete:

$$EI_2 y'' = -M_{(z)} = -F_k y \quad (7.04)$$

Ha bevezetjük a következő jelölést:

$$k^2 = \frac{F_k}{EI_2} \quad (7.05)$$

a (7.04). egyenlet a következő homogén formát kapja:

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (7.06)$$

A (7.06). egyenlet általános megoldása:

$$y = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz \quad (7.07)$$

a (C_1, C_2) integrációs állandókat az ismert határértékek alapján határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \text{Ha: } z=0 \quad y=0 &\Rightarrow C_1 = 0 \\ z=l \quad y=0 &\Rightarrow C_2 \sin kl = 0 \\ \text{Mivel: } C_2 \neq 0 &\Rightarrow \sin kl = 0 \Rightarrow kl = n\pi ; [n=1,2,3,\dots] \end{aligned} \quad (7.08)$$

A rúd kihajlásakor csak az első sinus hullámot vesszük igénybe ($n=1$),

$$k = \frac{n\pi}{l} : \text{ ha } n=1 \Rightarrow k = \frac{\pi}{l} \Rightarrow k^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \quad (7.09)$$

Eszerint a (7.05). egyenlet alapján az (F_K) kritikus erő értéke:

$$F_K = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2} \quad (7.10)$$

Ha a (7.07). egyenletbe be helyettesítjük a (7.08). integrációs állandók értékét és a (7.09). (k) értéket, a rugalmas vonal egyenletét kapjuk

$$y = C_2 \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right) \quad (7.11)$$

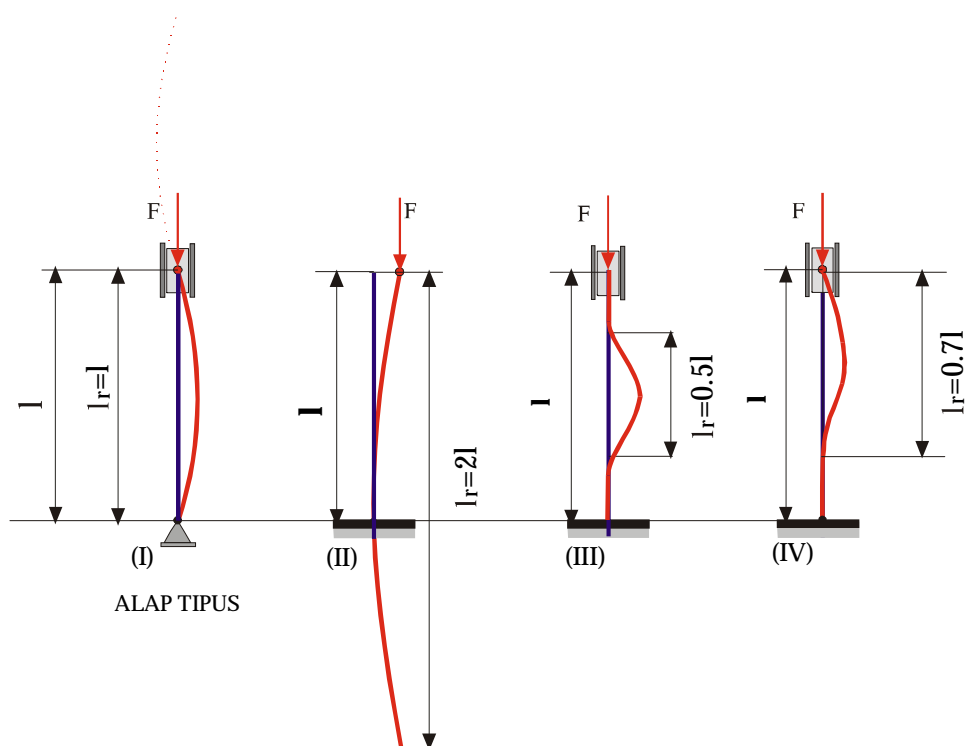
A (7.11). egyenlet szerint a rugalmas vonal periódusa:

$$P = \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{l}\right)} = 2l \quad (7.12)$$

A bemutatott eljárás más befogási megoldások esetében is alkalmazható, azzal, hogy a rugalmas vonal differenciális egyenletek megoldásakor az integrációs állandókat más-más határértékek alapján határozhatók meg, ami alapján az (F_K) kritikus erő formája is részben megváltozik. Ez a változás nem strukturális, és csak a kihajlott rúd rugalmas vonalának hosszára vonatkozik (fél periódus).

A (7.02). ábrán be van mutatva néhány befogási eset és ezeknek a megfelelő rugalmas vonalak fél periódusai. Ha a megfelelő fél periódust (l_r) redukált hosszal jelöljük, akkor valamennyi esetre a (7.10). egyenlet redukált formája érvényes:

$$F_K = \frac{\pi^2 EI_2}{l_r^2} \quad (7.13)$$



7.02. ábra

7.2.2. A KRITIKUS FESZÜLTÉG MEHATÁROZÁSA

Tudva, hogy a nyomó igénybevételre a következő kapcsolat érvényes:

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} \quad (7.14)$$

a kritikus feszültség értéke a (7.13). kapcsolat alapján a következő lesz:

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} = \frac{\pi^2 EI_2}{l_r^2 A} \quad (7.15)$$

Ha igénybe vesszük a (λ) karcsúsági tényezőt a (7.01). egyenlet alapján

$$\boxed{\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}} \quad (7.16)$$

A (σ_K) kritikus feszültség, a (λ) karcsúsági tényező függvényében hiperbola, melyet EULER féle hiperbolának nevezzük. Ezzel a módszerrel a (σ_K) kritikus feszültség értéke nem haladhatja meg a (σ_p) arányos feszültségi tartományt jelző értéket. A (λ) legkisebb értékét, mely a hiperbola használatát határozza meg a (7.16). egyenletből kapjuk $(\sigma_K \leq \sigma_p : \lambda = \lambda_p)$:

$$\sigma_p \geq \frac{\pi^2 E}{\lambda_p^2}$$

⇓

$$\boxed{\lambda_p \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}} \quad (7.17)$$

7.3. TETMAJER-FÉLE ELJÁRÁS

A nyomott rudak a való szerkezetekben a (7.03). ábrán megjelölt $(P-T)$ tartományban is működnek. E tartományra nem érvényes a HOOKE törvény, tehát az EULER -féle eljárás nem alkalmazható.

Az említett $(P-T)$ tartományra TETMAJER LAJOS, mérések és nagyszámú tapasztalati adatok alapján, a kritikus feszültségek értékeinek meghatározását a következő lineáris

egyenlettel határozta meg:

$$\sigma_K = a - b\lambda_p \quad (7.18)$$

A (7.18). egyenletben az (a, b) állandók a felhasznált anyagok tulajdonságaitól függenek, és műszaki táblázatokban találhatók.

Mivel a feszültségek a (σ_p) arányossági és (σ_T) felső anyagfolyási értékek közötti tartományban működnek, a (λ) karcsúsági tényezőt a (7.18).egyenletből határozzuk meg $(\sigma_K = \sigma_T \ ; \ \lambda = \lambda_T)$:

$$\lambda_T = \frac{a - \sigma_T}{b} \quad (7.19)$$

A műszaki táblázatok a leginkább használt anyagok esetében tartalmazzák a $(\sigma_K = a - b\lambda; \lambda_T; \lambda_p)$ értékeket.

A $(P-T)$ tartományra jellemzők más (ritkábban használt) eljárások is, például az ENGESZER -féle eljárás, mely az EULER -féle eljárást veszi alapul, azzal, hogy esetenként meg kell határozni az (E_T) rugalmassági modulus értékét:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E_T}{\lambda^2} \quad (7.20)$$

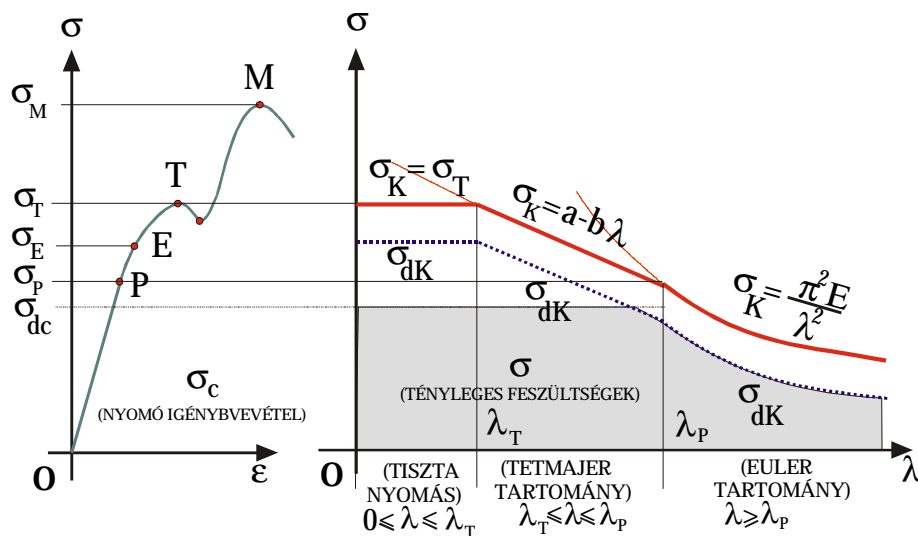
7.4. ω -ELJÁRÁS

A rudak (szerkezetek) kihajlási veszélye, és annak belátható következményei miatt, valamennyi ország törvényhozásakor, bizonyos számítások és ellenőrzések vannak előlátva, melyeket kötelező alkalmazni, függetlenül attól, hogy milyen előző (EULET, TETMAJER, ..) módszer alapján végeztük el a számításokat. Így a törvények is kötelezik a tervezőket a (JUS.U.E7.087 , JUS.U.E7.088). Jugoszláv, illetve (MSZ 500 ,MSZ 6280 ,MSZ 6912). Magyar szabványok alkalmazására.

Az előirt módszerek közül igen elfogadott az úgynevezett (ω) -OMEGA módszer, mely lényegében egy biztonsági (ω) tényezőn alapszik. Az (ω) biztonsági tényező a beépített anyag és a (λ) karcsúsági tényező függvényeként található a műszaki táblázatokban. E módszer szerint a (σ_K) kritikus kihajlási feszültség értéke:

$$\sigma_{dK} = \frac{\sigma_{dC}}{\omega} \quad (7.21)$$

Ahol: σ_{dC} – megengedett nyomó feszültség



7.03. ábra

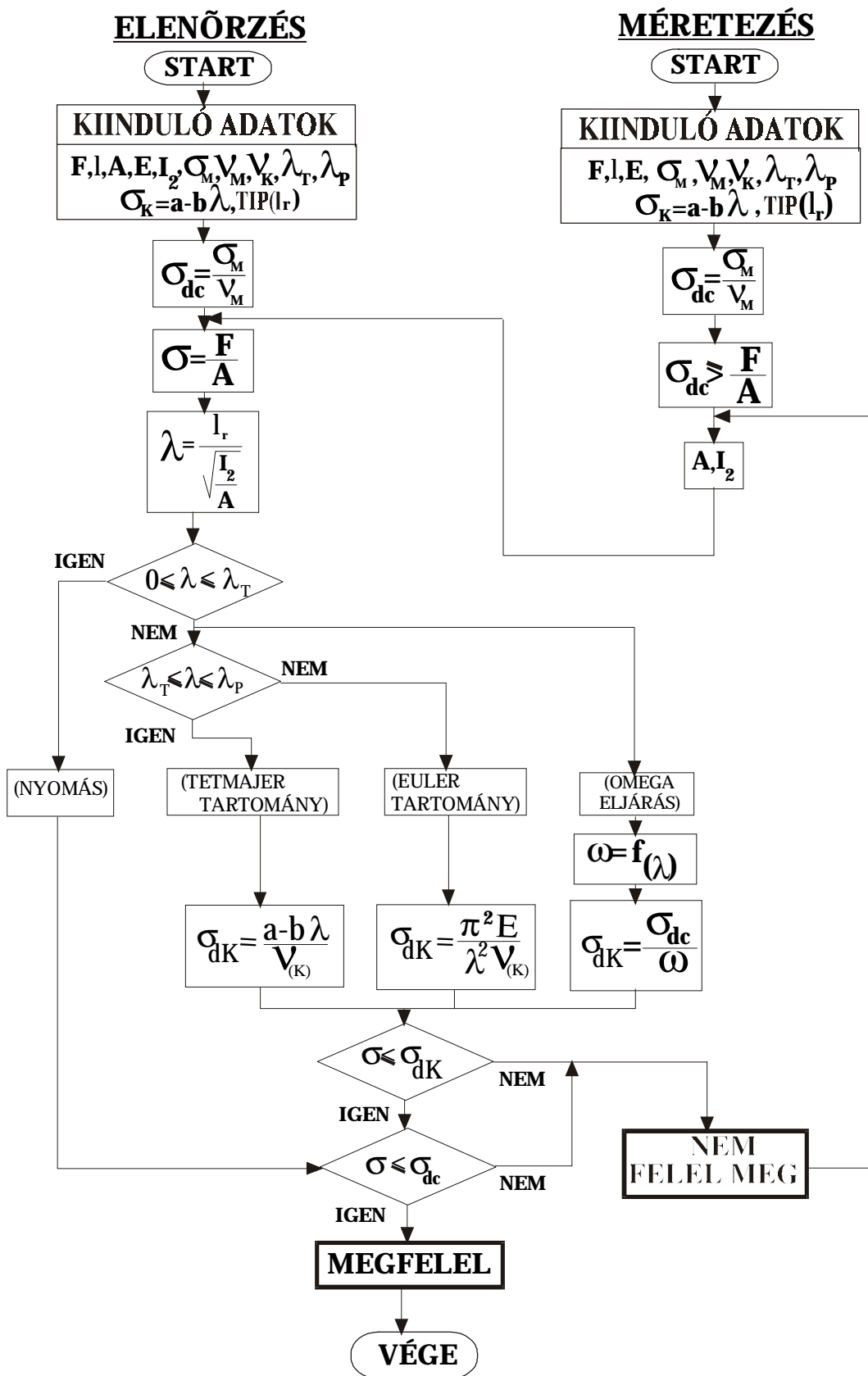
7.5. MÉRETEZÉS ÉS ELLENŐRZÉS

A méretezés és az ellenőrzés részeltessen e tankönyv (9). részében lesz tárgyalva.

E helyen a kihajlási módszerek (többsféleség) miatt, blokk diagram formájában van bemutatva a megfelelő méretezési, illetve ellenőrzési eljárás folyamata.

Külön kel arra ügyelni, hogy a méretezés esetében a kiinduló pontot a nyomásra való méretezés képezi. Ezt pedig a kihajlásra vonatkozó ellenőrzési folyamat követi. Ha a rúd ellenőrzése folyamán kiderül, hogy az nem felel meg a kihajlási követelményeknek, növelni kel a normálmetszet (A, I_2) értékeit, vagy meg kel változtatni az anyag minőségét, illetve a befogások kiépítési formáját.

MÉRETEZÉSI ÉS ELENŐRZÉSI FOLYAMAT



7.1. PÉLDA

A (7.1). ábrán látható nyomott rúd szabványos (*JUS C.B3.141*). hengerelt (*U-10*).szelvényből van kiépítve. A rúd anyaga (*^0300*), melynek megfelel a ($\sigma_M = 400 \text{ MPa}$) szakítószilárdság és ($E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$) rugalmassági modulus. A szerkezetre jellemzők a ($\nu_M = 2$) normálmetszeti és a ($\nu_K = 2$) kihajlási biztonsági tényezők. A rúd hossza ($l = 2000 \text{ mm}$), és ($F = 5 \text{ KN}$) erő terheli.

El kell végezni a rúd szilárdsági ellenőrzését.

AZ ELLENŐRZÉSI FOLYAMAT

START

KIINDULÓ ADATOK

$$F = 5000 \text{ N}$$

$$l = 2000 \text{ mm}$$

$$l_r = 0,7 \cdot l = 1400 \text{ mm}$$

$$\nu_M = \nu_K = 2$$

Táblázati adatok

$$I_2 = 29,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \quad (\text{P.7.01})$$

$$A = 1350 \text{ mm}^2$$

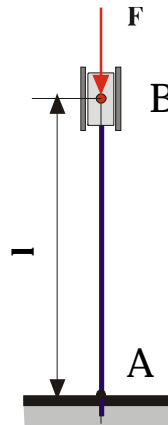
$$\sigma_M = 400 \text{ MPa}$$

$$E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\lambda_T = 84$$

$$\lambda_P = 108$$

$$\sigma_K = 289 - 0,82 \cdot \lambda \text{ MPa}$$



7.1. ábra

MEGENGEDETT NYOMÓ NORMÁLFESZÜLTÉSÉG

$$\sigma_{dC} = \frac{\sigma_M}{v_M} = \frac{400}{2} = 200 \text{ MPa} \quad (\text{P.7.02})$$

TÉNYLEGES NORMÁLFESZÜLTÉSÉG

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{5000}{1350} = 3,7 \text{ MPa} \quad (\text{P.7.03})$$

KARCSUSÁGI TÉNYEZŐ

$$\lambda = \frac{l_r}{\sqrt{\frac{I_2}{A}}} = \frac{1400}{\sqrt{\frac{293000}{1350}}} = 94,85 \quad (\text{P.7.04})$$

A MŰKÖDTETŐ TARTOMÁNY MEGHATÁROZÁSA

$$\lambda_t = 84 < \lambda = 94,85 < \lambda_p = 108$$

$$\Downarrow$$

TETMAJER működtetett tartomány

(P.7.05)

MEGEGEDETT KIHAJLÁSI FESZÜLTSG

$$\sigma_{dK} = \frac{289 - 0,82 \cdot \lambda}{v_K} = \frac{289 - 0,82 \cdot 94,85}{2} = 105,6 \text{ MPa} \quad (\text{P.7.06})$$

MEGEGEDETT KIHAJLÁSI FESZÜLTSG (ω) ELJÁRÁS SZERINT

Az (ω) értékét a használt anyagra, műszaki táblázatból, a (λ) karcsúsági tényező függvényében határozzuk meg.

$$\omega = f(\lambda) = 1,73$$

$$\sigma_{dK} = \frac{\sigma_{dC}}{\omega} = \frac{200}{1,73} = 115,6 \text{ MPa} \quad (\text{P.7.07})$$

VÉGLEGES ELLENŐRZÉS

A ($\sigma_{dK \min}$) érték a (P.7.06, P.7.07). értékek közül a kisebbik (mérvadó az összehasonlításnál).

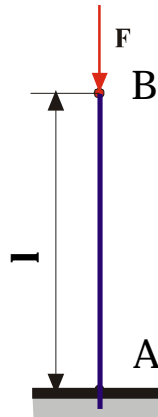
$$\sigma = 3,7 \text{ MPa} < \sigma_{dK \min} = 105,6 \text{ MPa} \quad (\text{P.7.08})$$

Mivel a (σ) tényleges normálfeszültség kisebb az eljárás során kiszámított ($\sigma_{dK \min}$) megengedett kihajlási feszültségtől, a szerkezet kiépítésénél használt (U-10). szelvény szilárdsági szempontból **MEGFELEL**.

7.2. PÉLDA

A (7.2). ábrán látható nyomott rúd szabványos (JUS C.B3.141). hengerelt (U).szelvényből van kiépítve. A rúd anyaga ($\sigma_{\text{m}} = 400 \text{ MPa}$), melynek megfelel a ($\sigma_{\text{m}} = 400 \text{ MPa}$) szakítószilárdság és ($E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$) rugalmassági modulus. A szerkezetre jellemzők a ($v_{\text{m}} = 2$) normálmetszeti és a ($v_K = 2$) kihajlási biztonsági tényezők. A rúd hossza ($l = 1000 \text{ mm}$), és ($F = 5 \text{ KN}$) erő terheli.

Meg kell határozni a szelvény legkisebb, szilárdsági szempontból megfelelő méretét.



7.2. ábra

A MÉRETEZÉSI FOLYAMAT**START****KIINDULÓ ADATOK**

$$F = 5000 \text{ N}$$

$$l = 1000 \text{ mm}$$

$$l_r = 2 \cdot l = 2000 \text{ mm}$$

$$\nu_M = \nu_K = 2$$

Táblázati adatok

$$\sigma_M = 400 \text{ MPa}$$

(P.7.09)

$$E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\lambda_T = 84$$

$$\lambda_P = 108$$

$$\sigma_K = 289 - 0,82 \cdot \lambda \text{ MPa}$$

MEGEGEDETT NYOMÓ NORMÁLFESZÜLTSG

$$\sigma_{dC} = \frac{\sigma_M}{\nu_M} = \frac{400}{2} = 200 \text{ MPa}$$

(P.7.10)

A NYOMÓ IGÉNYBEVÉTELNEK MEGFELELŐ SZELVÉNY

$$\sigma_{dc} \geq \frac{F}{A} \Rightarrow A = \frac{F}{\sigma_{dc}} = \frac{5000}{200} = 25 \text{ mm}^2$$

$$\Downarrow$$

<i>Az első megfelelő, nagyobb méretű szelvény száma : U – 8</i>

(P.7.11)

A SZELVÉNY TÁBLÁZATI JELLEMZŐI

$$I_2 = 63000 \text{ mm}^4$$

$$A = 758 \text{ mm}^2$$
(P.7.12)

TÉNYLEGES NORMÁLFESZÜLTSG

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{5000}{758} = 6,59 \text{ MPa}$$
(P.7.13)

KARCSUSÁGI TÉNYEZŐ

$$\lambda = \frac{l_r}{\sqrt{\frac{I_2}{A}}} = \frac{2000}{\sqrt{\frac{63000}{758}}} = 219$$
(P.7.14)

A MŰKÖDTETŐ TARTOMÁNY MEGHATÁROZÁSA

$$\lambda = 219 > \lambda_p = 108$$

$$\Downarrow$$

$$EULER \text{ működtet tartomány}$$
(P.7.15)

MEGENGEDETT KIHAJLÁSI FESZÜLTSG

$$\sigma_{dK} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot \nu_K} = \frac{\pi^2 \cdot 2,2 \cdot 10^5}{219^2 \cdot 2} = 22,85 \text{ MPa}$$
(P.7.16)

MEGENGEDETT KIHAJLÁSI FESZÜLTSG (ω) ELJÁRÁS SZERINT

Az (ω) értékét a használt anyagra, műszaki táblázatból, a (λ) karcsúsági tényező függvényében határozzuk meg.

$$\omega = f(\lambda) = 8,82$$

$$\sigma_{dK} = \frac{\sigma_{dC}}{\omega} = \frac{200}{8,82} = 22,67 \text{ MPa} \quad (\text{P.7.17})$$

VÉGLEGES ELLENŐRZÉS

A ($\sigma_{dK \min}$) érték a (P.7.16, P.7.17). értékek közül a kisebbik (mérvadó az összehasonlításnál).

$$\boxed{\sigma = 6,59 \text{ MPa} \quad \langle \sigma_{dK \min} = 22,67 \text{ MPa} \rangle} \quad (\text{P.7.18})$$

Mivel a (σ) tényleges normálfeszültség kisebb az eljárás során kiszámított ($\sigma_{dK \min}$) megengedett kihajlási feszültségtől, a szerkezet kiépítésénél használt (U-8). szelvény szilárdsági szempontból **MEGFELEL**.

8. STATIKAILAG MEGHATÁROZATLAN FELADATOK

Konvenció szerint, HATÁROZATLANSÁGI TÉNYEZŐ -nek hívjuk a következő kapcsolatot:

$$S = n - k \quad (8.01)$$

melyben:

n - az ismeretlen kötésreakciók száma(erők, nyomatékok).

k - a mozgásszabadság száma, illetve a statikai egyensúlyi egyenletek száma:

Térben: $k \leq 6$

Síkban: $k \leq 3$

Az (S) határozatlansági tényező értékétől függően, a következő esetek lehetők:

a.

Ha az ($S \leq 0$), a (k) statikai egyensúlyi egyenletek száma meghaladja az (n) kötésreakciók számát. Ekkor (S) *szabadságfokú mechanizmusról* van szó (a kinematika tárgya).

b.

Ha az ($S = 0$), a (k) statikai egyensúlyi egyenletek száma megegyezik az (n) kötésreakciók számával. Ilyen eset a *relatív nyugvó állapotnak* -nak megfelel meg (a kötésreakciók száma egyértelműen meghatározhatóak)

c.

Ha az ($S > 0$), a (k) statikai egyensúlyi egyenletek száma kisebb mint az ismeretlen (n) kötésreakciók száma. Ilyen esetben a kötésreakciókat nem lehet egyértelműen meghatározni - *STATIKAILAG MEGHATÁROZATLAN* tartószerkezetről van szó.

Ha az utóbbi szerkezetek statikus állapotban vannak, akkor az ismert, (vagy megadott) alakváltozások értékei alapján, (S) *PÓTEGYENLETET* lehet felállítani, és a rendszert megoldandóvá tenni.

8.1. A PÓTEGYENLETEK MEGHATÁROZÁSA

Ahogy azt előzőleg is megállapítottuk, a pótegyenleteket az ismert, vagy megadott

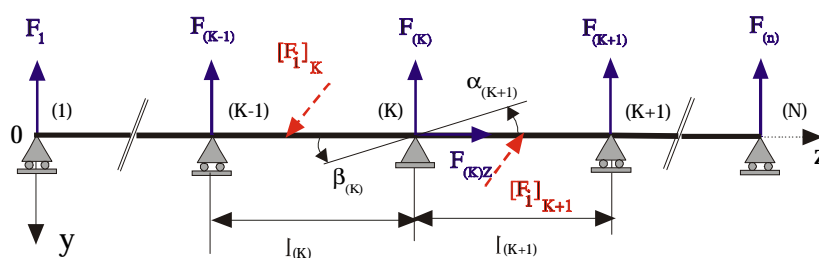
elmozdulások illetve szögelfordulások alapján határozzuk meg.

8.1.1. CLAPEYRON-FÉLE MÓDSZER

Ez a módszer folyamatos geometriai tengelyű, több mint két támaszú rudak reakcióerőinek kiszámítására alkalmas.

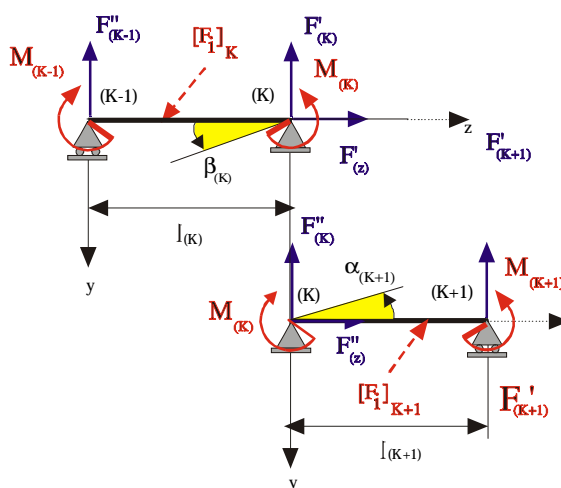
Általános esetben a több támaszú rúd támaszszáma (N). E módszer szerint, a támaszok közül csak egy síkbeli csukló, a többi pedig gördülő támasz (8.01. ábra).

ALAP RENDSZER



8.01.-ábra

EKVIVALENS RENDSZER



8.02.-ábra

Az (N) támaszokban ható reakcióerők száma:

$$n = N + 1 \quad (8.02)$$

A határozatlansági tényező a (8.01. és 8.02.) kapcsolatok alapján:

$$S = n - 3 = N - 2 \quad (8.03)$$

Az utóbbi egyenlet (érték) egyben a felalítandó pótegyenletek számát meghatározza meg.

A (8.01). ábrán bemutatott (N) támaszú rudat (*ALAP RENDSZER*) egyensúlyban tartó terhelő rendszere a következő:

- Az ismeretlen kötésreakciók:

$$\{R_n\} = \{F_{(K-1)}, F_{(K)}, F_{(Kz)}, F_{(K+1)}, M_{(K-1)}, M_{(K+1)}\} \quad (8.04)$$

- A ($K-1$, K). és a (K , $K+1$). Tartományokban működő aktív terhelő rendszer:

$$\{K_j\} = \{F_i\}_K; \{F_i\}_{K+1} \quad (8.05)$$

Az *ALAP RENDSZER* –ből válaszunk ki tetszőlegesen két tartományból álló (*ELEMI RUDRÉSZEK*), és három támaszt tartalmazó rúdrészt (*ALAP RÚDRÉSZ*). Gondolatban szüntessük meg az *ALAP RÚDRÉSZ* belső kötéseit. Az ily módon kapott *ELEMI RUDRÉSZEK* -et a további eljárás során egyensúlyi rendszerekként kezeljük. Jelöljük (l_K, l_{K+1}) –el, a támaszközi távolságokat, a támaszok számát pedig ($K-1, K, K+1$) –al (8.02. ábra)..

A gondolatban megszüntetett (eltávolított) belső kötéseket a támaszokban működő (R_S) ekvivalens kötésreakciókkal helyettesítjük (8.02. ábra).

Az (M_{K-1}, M_K, M_{K+1}) nyomatékokat úgy választjuk meg, hogy azok működése során *ELEMI RUDRÉSZEK* alakváltozása a (K) támaszban, egyezzen meg az *ALAP* (háromtámaszú) *RÚDRÉSZ* alakváltozásával. Ha ez a feltétel megvalósul, akkor alakváltozási szempontból a két rendszer *EKVIVALENS* (nem különbözik).

A (8.02). ábrán bemutatott *ELEMI RUDRÉSZEK* egyensúlyban tartó (*EKVIVALENS*) terhelő rendszere a következő:

- A (K) pontban működő belső reakció (nyomaték):

$$\{R_S\} = \{M_{(K)}\} \quad (8.06)$$

- Az ekvivalens kötésreakciók:

$$\{R\} = \{R_n\} + \{R_S\} = \{F_{(K-1)}, F_{(K)}, F_{(Kz)}, F_{(K+1)}, M_{(K-1)}, M_{(K)}, M_{(K+1)}\} \quad (8.07)$$

- Az ekvivalens aktív terhelő rendszer

$$\{K\} = \{K_j\} + \{R_s\} + M_{(K-1)}, M_{(K+1)} = \{F_i\}_K, \{F_i\}_{K+1}, M_{(K-1)}, M_{(K)}, M_{(K+1)} \quad (8.08)$$

Mivel a szétválasztás során a $(K-1, K, K+1)$ támaszok változatlanok maradnak (csukló, gördülő), a (8.08) ekvivalens aktív terhelő rendszernek biztosítani kell (az *ALAP RENDSZER* folyamatossága révén), hogy a (K) támaszban létrejött szögelfordulások értékei megegyezzenek:

$$\beta_{(K)} = \alpha_{(K+1)} \quad (8.09)$$

A (8.08). megterhelő rendszer alapján leírhatjuk a (8.09). szögelfordulások összetevőit:

$$\beta_{(K)}^{M_{(K-1)}} + \beta_{(K)}^{[F_i]_{(K)}} + \beta_{(K)}^{M_{(K)}} = \alpha_{(K+1)}^{M_{(K+1)}} + \alpha_{(K+1)}^{[F_i]_{(K+1)}} + \alpha_{(K+1)}^{M_{(K)}} \quad (8.10)$$

Műszaki táblázatokból meghatározzuk a (8.10). egyenletben feltüntetett nyomatékok, és a tartományokon működő terhelőrendszerek okozta szögelfordulásokat:

$$-\frac{M_{(K-1)}l_{(K)}}{6EI_x} - \frac{M_{(K)}l_{(K)}}{3EI_x} + \beta_{(K)}^{[F_i]_{(K)}} = \frac{M_{(K)}l_{(K+1)}}{3EI_x} + \frac{M_{(K+1)}l_{(K+1)}}{6EI_x} + \alpha_{(K)}^{[F_i]_{(K+1)}} \quad (8.11)$$

Az utóbbi egyenletet rendszük nyomatékok szerint:

$$\boxed{M_{(K-1)}l_{(K)} + 2M_{(K)}(l_{(K)} + l_{(K+1)}) + M_{(K+1)}l_{(K+1)} = 6EI_x(\beta_{(K)}^{[F_i]_{(K)}} - \alpha_{(K)}^{[F_i]_{(K+1)}})} \quad (8.12)$$

A (8.12). egyenletet még CLAPEIRON -féle egyenletnek is nevezzük. A Clapeyron -féle egyenlet három ismeretlen nyomatékot tartalmaz.

Egy egyszerű példa segítségével (8.03. ábra) meghatározhatjuk, hogy egy (N) támaszú rúd esetében

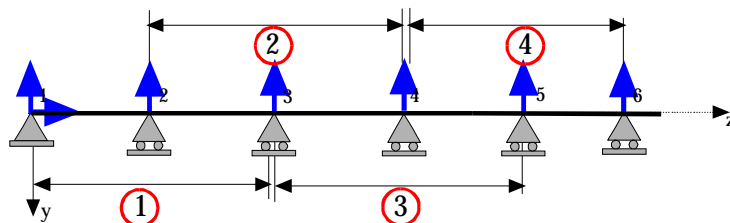
$$Q = N - 2 \quad (8.13)$$

háromtámaszú *ALAP RÚDRÉSZ* lehet kialakítani, és ugyanannyi Clapeyron -féle egyenletet lehet felállítani.

Ez azt jelenti, hogy egy (N) támaszú rúd esetében a Clapeyron -féle egyenletek száma megegyezik a (8.03). egyenlettel meghatározott $(N-2)$ pótegyenletek számával.

Mivel az (Q) . egyenlet rendszer $(N-2)$ ismeretlen nyomatékot tartalmaz, a többtámaszú rudak támaszaiban működő nyomatékokat, egyértelműen meg lehet határozni.

Ha valamennyi $(N-2)$ támaszokban működő nyomatékokat meghatároztuk, mivel az *ELEMI RUDRÉSZEK* (S) határozatlansági tényezői nullák, akkor valamennyi *ALAP RÚDRÉSZ* reakcióerőit is sztatikailag meg lehet határozni.



8.03.-ábra

Az utóbbiból arra lehet következtetni, hogy az (Q) alap háromtámaszú rendszerek reakcióerőit ki lehet számolni, vagyis az egész (N) támaszú rúd reakció erőrendszere ezzel a módszerrel egyértelműen meghatározható.

8.1. PÉLDA

A (8.1). ábrán látható (ABC). Háromtámaszú rudat (ALAP RENDSZER) folyamatos (δ) erő terheli. A rúd anyagára az (E) rugalmassági modulus, valamint az (I_x) axiális másodrendű nyomaték jellemző.

Meg kell határozni a reakciók terhelőrendszerét Clapeyron féle módszer használatával.

AZ ALAP RENDSZER ELEMZÉSE

A példában használt megjelölések:

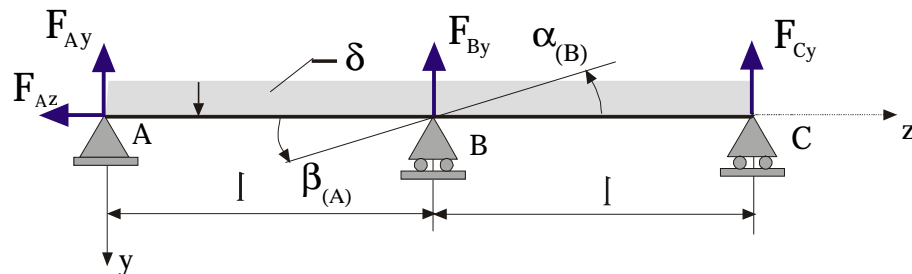
$$\begin{aligned} F_{(K-1)} &= F_{Ay}, F_{Az} & ; & & F_{(K)} &= F_{By} & ; & & F_{(Kz)} &= F_{Bz} & ; & & F_{(K+1)} &= F_{Cy} \\ M_{(K-1)} &= M_A = 0 & ; & & M_{(K)} &= M_B = M & ; & & M_{(K+1)} &= M_C = 0 \end{aligned} \quad (\text{P.8.01})$$

- Az ismeretlen kötésreakciók (8.04. kapcsolat szerint):

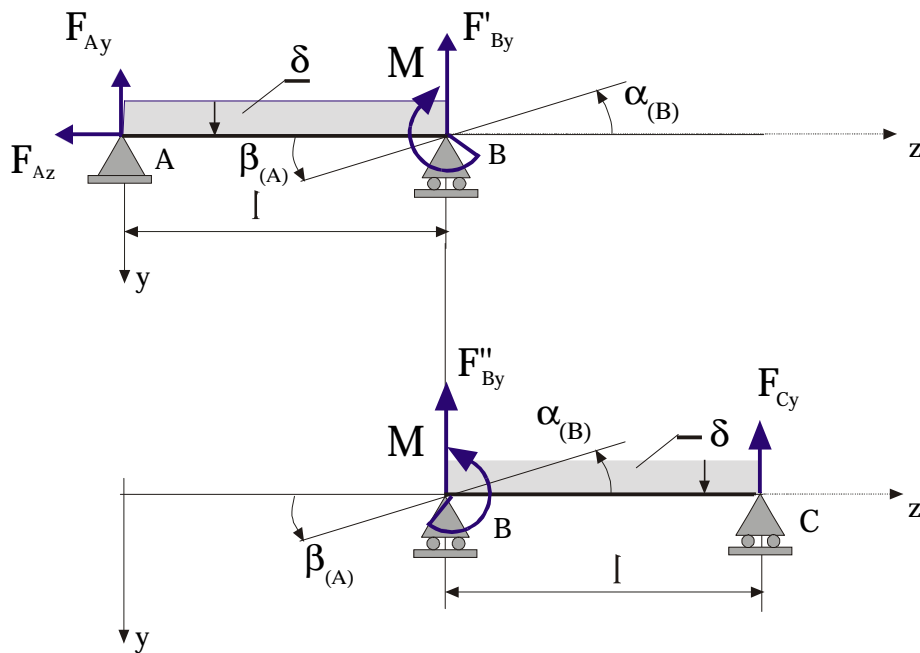
$$\begin{aligned} \{R_n\} &= \{F_{(K-1)}, F_{(K)}, F_{(Kz)}, F_{(K+1)}, M_{(K-1)}, M_{(K+1)}\} = \\ &= \{F_{Ay}, F_{Az}, F_{By}, F_{Cy}, 0, 0\} \end{aligned} \quad (\text{P.8.02})$$

- Az aktív külső terhelőrendszer (8.05. kapcsolat szerint):

$$\{K_j\} = \{F_i\}_K; \{F_i\}_{K+1} = \{\delta\} \quad (\text{P.8.03})$$



8.1. ábra



8.2. ábra

- A támaszok száma:

$$N=3 \quad (\text{P.8.04})$$

- Az egyensúlyi egyenletek száma:

$$k=3 \quad (\text{P.8.05})$$

- Az ismeretlen kötésireakciók száma:

$$n=4 \quad (\text{P.8.06})$$

- A határozatlansági tényező (8.01. kapcsolat szerint):

$$S = n - k = 4 - 3 = 1 \quad (\text{P.8.07})$$

Az *ALAP RENDSZER* statikailag meghatározatlan, mivel ($S=1$). A Clapeyron módszer szerint a pótegyenleteket (ebben az esetben egy pótegyenletet) úgy határozzuk meg, hogy az *ALAP RENDSZER* -ből kiválasztunk egy kéttámaszú *ALAP RÚDRÉSZ* -t, és felbontjuk két *ELEMI RÚDRÉSZ* -re. Mivel az *ELEMI RÚDRÉSZ* -ek statikailag meghatározottak, a statikában használt módszer szerint meghatározzuk az *EKVIVALENS RENDSZER* kötési reakcióit.

Ebben a példában az *ALAP RENDSZER* és az *ALAP RÚDRÉSZ* megegyeznek (három támaszú *ALAP RENDSZER* -ről van szó)

AZ EKVIVALENS RENDSZER ELEMZÉSE

- A (*B*) pontban működő (a pótegyenletből meghatározandó) nyomaték (8.06. kapcsolat szerint):

$$\{R_S\} = \{M_{(K)}\} = M \quad (\text{P.8.07})$$

- Az ekvivalens kötési reakciók (8.07. kapcsolat szerint):

$$\begin{aligned} \{R\} &= \{R_n\} + \{R_S\} = \{F_{(K-1)}, F_{(K)}, F_{(K_z)}, F_{(K+1)}, M_{(K-1)}, M_{(K)}, M_{(K+1)}\} = \\ &= \{F_{Ay}, F_{Az}, F'_{By}, F''_{By}, F_{Cz}, 0, M, 0\} \end{aligned} \quad (\text{P.8.08})$$

- Az ekvivalens terhelőrendszer (8.08. kapcsolat szerint):

$$\begin{aligned} \{K\} &= \{K_j\} + \{R_S\} + M_{(K-1)}, M_{(K+1)} = \{F_i\}_K, \{F_i\}_{K+1}, M_{(K-1)}, M_{(K)}, M_{(K+1)} = \\ &\{\delta, 0, M, 0\} \end{aligned} \quad (\text{P.8.09})$$

- Az egyensúlyi egyenletek száma.

A ball oldalon lévő tartományra három egyenletet lehet felállítani a jobb oldalon lévő tartományra pedig kettőt (a jobb oldalon lévő tartományban nem működnek (z) irányú erők, tehát a megfelelő egyensúlyi egyenletet sem lehet használni), ami azt jelenti, hogy az egyensúlyi egyenletek száma (5) öt.

- Az ekvivalens rendszer egyensúlyi egyenletei:

(*AB*). *TAROMÁNY*

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum Y &= -F_{Ay} - F'_{By} + \delta \cdot l = 0 \\ (2) \quad \sum Z &= F_{Az} = 0 \\ (3) \quad \sum M_A &= F'_{By} \cdot l - \frac{1}{2} \delta \cdot (l)^2 - M = 0 \end{aligned} \quad (\text{P.8.10})$$

.....(BC). TARTOMÁNY

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \sum Y &= -F_B'' - F_C + \delta \cdot l = 0 \\
 (5) \quad \sum M_B &= M + F_C l - \frac{1}{2} \delta \cdot l^2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{P.8.11}$$

- A Clapeyron fále pótegyenlet (8.12. kapcsolat szerint):

$$\begin{aligned}
 (6) \quad M_{(K-1)l_{(K)}} + 2M_{(K)}(l_{(K)} + l_{(K+1)}) + M_{(K+1)l_{(K+1)}} &= 6EI_x \left(\beta_{(K)}^{[F_i]l_{(K)}} - \alpha_{(K)}^{[F_i]l_{(K+1)}} \right) \\
 \Downarrow \\
 0 \cdot l + 2(-M)(l+l) + 0 \cdot l &= 6EI_x \left(-\frac{1}{24} \frac{\delta \cdot l^3}{EI_x} - \frac{1}{24} \frac{\delta \cdot l^3}{EI_x} \right)
 \end{aligned}
 \tag{P.8.12}$$

- Az ekvivalens rendszer kötésreakcióinak meghatározása:

-

$$\begin{aligned}
 (6) \dots &\Rightarrow \dots M = \frac{1}{8} \delta \cdot l \\
 (2) \dots &\Rightarrow \dots F_{Az} = 0 \\
 (3) \dots &\Rightarrow \dots F_B' = \frac{5}{8} \delta \cdot l \\
 (4) \dots &\Rightarrow \dots F_B'' = \frac{5}{8} \delta \cdot l \\
 (1) \dots &\Rightarrow \dots F_{Ay} = \frac{3}{8} \delta \cdot l \\
 (5) \dots &\Rightarrow \dots F_C = \frac{3}{8} \delta \cdot l \\
 F_B &= F_B' + F_B'' = \frac{5}{4} \delta \cdot l
 \end{aligned}
 \tag{P.8.13}$$

8.1.2. KÖZVETLEN TÁBLÁZATI MÓDSZER

Ha a többtámaszú (*ALAPRENDSZER*) határozatlansági tényezője (S), akkor az $\{R_n\}$ kötésreakciók halmazából meg kell határozni $\{R_s\}$ reakcióterhelést, melyeknek ismerjük a megfelelő kötésekben létrejött alakváltozásait.

A kiválasztott kötések gondolatban eltávolítjuk, és egy rendszert hozunk létre mely alakváltozási szempontból *EKVIVALENS* az *ALAPRENDSZER* -rel. Az $\{R_s\}$ reakcióterheléseket (műszaki táblázatok segítségével) úgy határozzuk meg, hogy azok a további számítások során mint *feltételezett EKVIVALENS* aktív terhelések, a külső $\{K_j\}$ terhelőrendszerrel együtt, biztosítják az *ALAPRÚD* mértani jellemzőit.

Az *EKVIVALENS* rendszer jellemzői:

- Az ekvivalens kötésreakciók:

$$\{R\} = \{R_n\} + \{R_s\} \quad (8.14)$$

- Az ekvivalens aktív terhelő rendszer

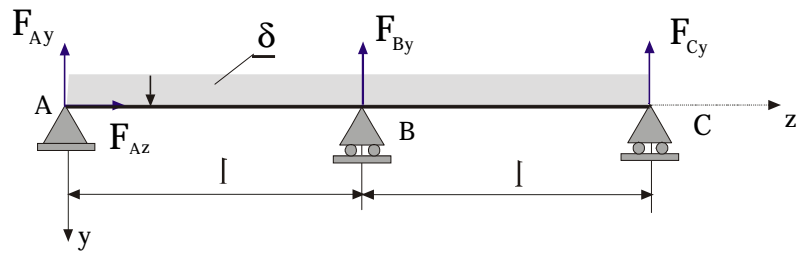
$$\{K\} = \{K_j\} + \{R_s\} \quad (8.15)$$

Az ilyen feltevéseken alapozott rendszer szerkezetileg különbözik az alaprendszertől, mégis mértani szempontból *EKVIVALENS*, megegyezik az *ALAPRÚD* -dal (a két rendszer alakváltozásban nem különbözik egymástól).

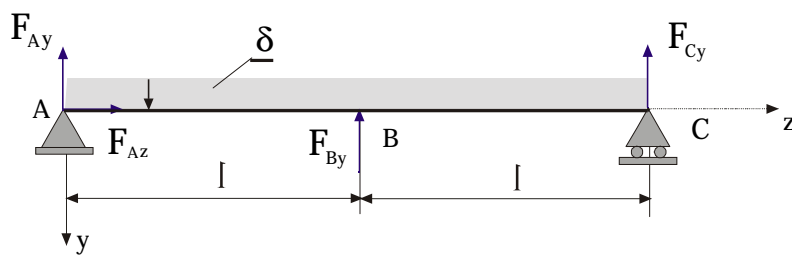
8.2. PÉLDA

A (8.3). ábrán látható (*ABC*). Háromtámaszú rudat (*ALAP RENDSZER*) folyamatos (δ) erő terheli. A rúd anyagára az (E) rugalmassági modulus, valamint az (I_x) axiális másodrendű nyomaték jellemző.

Meg kell határozni a reakciók terhelőrendszerét közvetlen táblázati módszer használatával.



8.3. ábra



8.4. ábra

AZ ALAP RENDSZER ELEMZÉSE

- Az ismeretlen kötésireakciók:

$$\{R_n\} = \{F_{Ay}, F_{Az}, F_{By}, F_{Cy}\} \quad (\text{P.8.14})$$

- Az aktív külső terhelőrendszer:

$$\{K_j\} = \{\delta\} \quad (\text{P.8.15})$$

- Az egyensúlyi egyenletek száma:

$$k=3 \quad (\text{P.8.16})$$

- Az ismeretlen kötésireakciók száma:

$$n=4 \quad (\text{P.8.17})$$

- A határozatlansági tényező (8.01. kapcsolat szerint):

$$S = n - k = 4 - 3 = 1 \quad (\text{P.8.18})$$

Az *ALAP RENDSZER* statikailag meghatározatlan, mivel ($S=1$), vagyis a gondolatban eltávolítandó (R_s) támaszok száma egy. A konkrét példában a (B) támaszt fogjuk gondolatban eltávolítani, és az (F_{By}) reakcióerővel fogjuk be helyettesíteni (8.4. ábra).

AZ EKVIVALENS RENDSZER ELEMZÉSE

- Az eltávolított kötésreakció:

$$\{R_s\} = \{F_{By}\} \quad (\text{P.8.19})$$

- Az ekvivalens kötésreakciók.

A bekeretezéssel hangoztatjuk, hogy az (F_{By}) erő tovább is ismeretlen, de a módszerrel összhangban a további számítási eljárás során az *EKVIVALENS* terhelő rendszer erőjeként kezeljük:

$$\{R\} = \{R_n\} + \{R_s\} = \{F_{Ay}, F_{Az}, (F_{By}), F_{Cy}\} \quad (\text{P.8.20})$$

- Az ekvivalens terhelőrendszer:

$$\{K\} = \{K_j\} + \{R_s\} = \{\delta, F_{By}\} \quad (\text{P.8.21})$$

- Az alakváltozási feltétel:

A (B) támasz merőleges elmozdulásának értéke az ekvivalencia révén nulla.

$$f_{By} = 0 \quad (\text{P.8.22})$$

- Az ekvivalens rendszer egyensúlyi egyenletei:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum Y &= -F_{Ay} - F_{By} + \delta \cdot 2l = 0 \\ (2) \quad \sum Z &= F_{Az} = 0 \\ (3) \quad \sum M_A &= F_{By} \cdot l - \frac{1}{2} \delta \cdot (2l)^2 + F_{Cy} = 0 \end{aligned} \quad (\text{P.8.23})$$

- A pótegyenlet (P.8.22). feltétel szerint):

$$(4) \quad f_{(B)} = f_{(B)}^{\delta} + f_{(B)}^{F_B} = \frac{5}{384} \frac{\delta \cdot (2l)^4}{EI_x} - \frac{1}{48} \frac{F_{By} (2l)^3}{EI_x} = 0 \quad (\text{P.8.24})$$

- Az ekvivalens rendszer kötésireakcióinak meghatározása:

$$\begin{aligned}
 (4) &\Rightarrow F_B = \frac{5}{4} \delta l \\
 (2) &\Rightarrow F_{Az} = 0 \\
 (3) &\Rightarrow F_C = \frac{3}{8} \delta l \\
 (1) &\Rightarrow F_{Ay} = \frac{3}{8} \delta l
 \end{aligned}
 \tag{P.8.25}$$

8.1.3. AZ ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIA MUNKAMINIMUMÁNAK ELVE

Ha az (N) támaszú *ALAPRÚD* határozatlansági tényezője (S) , akkor az $\{R_n\}$ kötésireakciók halmazából meg kell határozni $\{R_s\}$ reakcióterhelést, melyeknek a megfelelő kötésekben létrejött alakváltozásai nullák.

A kiválasztott kötések gondolatban eltávolítjuk, majd az $\{R_s\}$ reakcióterheléseket a további számítások során mint *FELTÉTELEZETT* aktív terhelések kezeljük. Eszerint a feltételezett terhelő rendszer:

$$\{K\} = \{K_j\} + \{R_s\} \tag{8.16}$$

A feltételezett (8.16). terhelési rendszer munkája:

$$W(K) = f[\{K_j\} + \{R_s\}] = W \tag{8.17}$$

Az $\{R_s\}$ kötésireakciókat erők és nyomatékok alkotják:

$$\{R_s\} = \{F_1, \dots, F_{s1}, M_1, \dots, M_{s2}\} \quad ; \quad S = S1 + S2 \tag{8.18}$$

A (8.16). kötésireakciók által létrejött alakváltozások értéke nulla. Az alakváltozások értékeit a (6.73, 6.74). Castigliano tételeken alapozott egyenletek alapján határozzuk meg.

A (8.17). egyenletben a $(W(K))$ feltételezett terhelési rendszer munkája strukturálisan megfelel a (6.73, 6.74). egyenletekben $(W(K_j))$ val jelölt össz munkának.:

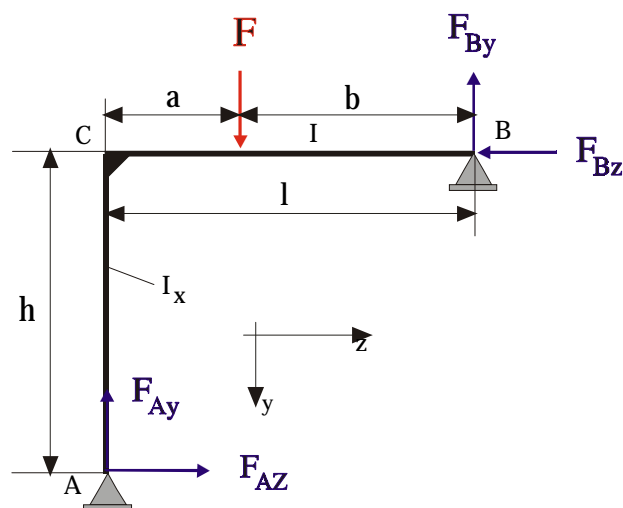
$$\begin{aligned}
 f_1 = \frac{\partial W}{\partial F_1} = 0; f_2 = \frac{\partial W}{\partial F_2} = 0; \dots; f_{s1} = \frac{\partial W}{\partial F_{s1}} = 0 \\
 \gamma_1 = \frac{\partial W}{\partial M_1} = 0; \gamma_2 = \frac{\partial W}{\partial M_2} = 0; \dots; \gamma_{s2} = \frac{\partial W}{\partial M_{s2}} = 0
 \end{aligned}
 \quad (8.19)$$

A (8.19). egyenletrendszer (S) egyenletből áll és ($S=S1+S2$) ismeretlent tartalmaz, vagyis általa az $\{R_s\}$ kötésreakciók értékei egyértelműen meghatározhatók. Az ($\{R_s\}$) kötésreakciók kiszámítása után, az (N) támaszú *ALAPRÚD* -at a további számítások során statikailag meghatározott rendszerként kezeljük.

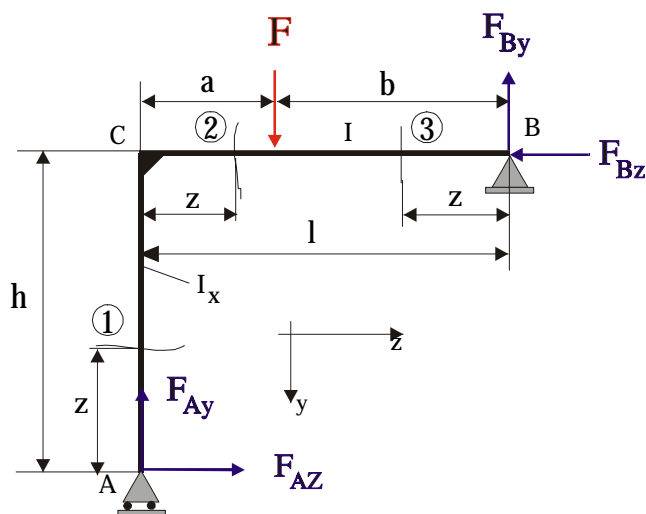
8.3. PÉLDA

A (8.5). ábrán látható (ABC). rúdszerkezet (*ALAP RENDSZER*) (F) erő terheli. A rúd anyagára az (E) rugalmassági modulus, valamint az (I_x) axiális másodrendű nyomaték jellemző.

Meg kell határozni a reakciók terhelőrendszerét az alakváltozási energia minimumának elve használatával.



8.5. ábra



8.6. ábra

AZ ALAP RENDSZER ELEMZÉSE (8.5. ábra)

- Az ismeretlen kötésireakciók:

$$\{R_n\} = \{F_{Ay}, F_{Az}, F_{By}, F_{Bz}\} \quad (\text{P.8.26})$$

- Az aktív külső terhelőrendszer:

$$\{K_j\} = \{F\} \quad (\text{P.8.27})$$

- Az egyensúlyi egyenletek száma:

$$k=3 \quad (\text{P.8.28})$$

- Az ismeretlen kötésireakciók száma:

$$n=4 \quad (\text{P.8.29})$$

- A határozatlansági tényező (8.01. kapcsolat szerint):

$$S = n - k = 4 - 3 = 1 \quad (\text{P.8.30})$$

Az ALAP RENDSZER statikailag meghatározatlan, mivel ($S=1$), vagyis a gondolatban eltávolítandó (R_s) támaszok száma egy. A konkrét példában az (A) támaszt fogjuk gördülő csapágyra felcserélni. E szerint az EKVIVALENS rendszernek úgy kell működni, hogy az (A) pont (z) irányú elmozdulása nulla legyen. (8.6. ábra).

Az EKVIVALENS rendszert három tartományra bontjuk fel.

AZ EKVIVALENS RENDSZER ELEMZÉSE (8.6. ábra)

- Az eltávolított kötésreakció:

$$\{R_S\} = \{F_{Az}\} \quad (\text{P.8.31})$$

- Az ekvivalens kötésreakciók.

A bekeretezéssel hangoztatjuk, hogy az (F_{Az}) erő tovább is ismeretlen, de a módszerrel összhangban a további számítási eljárás során az *EKVIVALENS* terhelő rendszer erőjeként kezeljük.

$$\{R\} = \{R_n\} + \{R_S\} = \{F_{Ay}, (F_{Az}), F_{By}, F_{Bz}\} \quad (\text{P.8.32})$$

- Az ekvivalens terhelőrendszer:

$$\{K\} = \{K_j\} + \{R_S\} = \{F, F_{Az}\} \quad (\text{P.8.33})$$

- Az alakváltozási feltétel:

A (A) támasz vízszintes elmozdulásának értéke az ekvivalencia révén nulla.

$$f_{Az} = 0 \quad (\text{P.8.34})$$

- Az ekvivalens rendszer egyensúlyi egyenletei:

(P.8.35)

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum Y &= F - F_{Ay} - F_{By} = 0 \\ (2) \quad \sum Z &= F_{Az} - F_{Bz} = 0 \\ (3) \quad \sum M_A &= Fa - F_{By}l - F_{Bz}h = 0 \end{aligned} \quad (\text{P.8.36})$$

A (P.8.36). egyensúlyi egyenletek alapján meghatározzuk az (F_{Ay}, F_{By}, F_{Bz}) az (F_{Az}) erő függvényeként.

$$\begin{aligned} (2) \quad F_{Bz} &= F_{Az} \\ (3) \quad F_{By} &= \frac{1}{l}(F \cdot a - F_{Az} \cdot h) \\ (1) \quad F_{Ay} &= F - \frac{1}{l}(F \cdot a - F_{Az} \cdot h) \end{aligned} \quad (\text{P.8.37})$$

- A tartományok nyomatéki egyenletei:

$$\begin{aligned} M_1 &= -F_{Az} \cdot z \\ M_2 &= -F_{Az} \cdot h + \left[F - \frac{1}{l} (F \cdot a - F_{Az} \cdot h) \right] \cdot z \\ M_3 &= \frac{1}{l} (F \cdot a - F_{Az} \cdot h) \cdot z \end{aligned} \quad (\text{P.8.38})$$

- Az össz munka értéke

A tartományokban végzett munkák összegéből kapjuk:

$$W = W_{(1)} + W_{(2)} + W_{(3)} = \frac{1}{2E} \int_0^h \frac{M_{(1)}^2}{I_x} dz + \frac{1}{2E} \int_0^a \frac{M_{(2)}^2}{I_x} dz + \frac{1}{2E} \int_0^b \frac{M_{(3)}^2}{I_x} dz \quad (\text{P.6.39})$$

- Az (A) pont vízszintes elmozdulása, a (P.8.34). feltétel alapján.

A meghatározást a (8.19). kapcsolat szerint végezzük el és *pótegyenletek* is nevezzük.

$$f_{Az} = \left(\frac{\partial W_K}{\partial F_{Az}} \right) = \left\{ \frac{1}{2EI_x} \left[\int_0^h 2M_{(1)} \frac{\partial M_{(1)}}{\partial F_{Az}} dz + \int_0^a 2M_{(2)} \frac{\partial M_{(2)}}{\partial F_{Az}} dz \right] + \int_0^b 2M_{(3)} \frac{\partial M_{(3)}}{\partial F_{Az}} dz \right\} = 0 \quad (\text{P.6.40})$$

A (P.6.40).egyenletbe be helyettesítjük a (P.8.38). nyomatéki értékeket, elvégezzük a feltüntetett derivációkat és integrációkat, majd az egyenletet rendezzük. Mivel a nyomatékok az (F, F_{Az}) erők függvényei, a rendezett egyenletből kiszámítjuk az (F_{Az}) erő értékét:

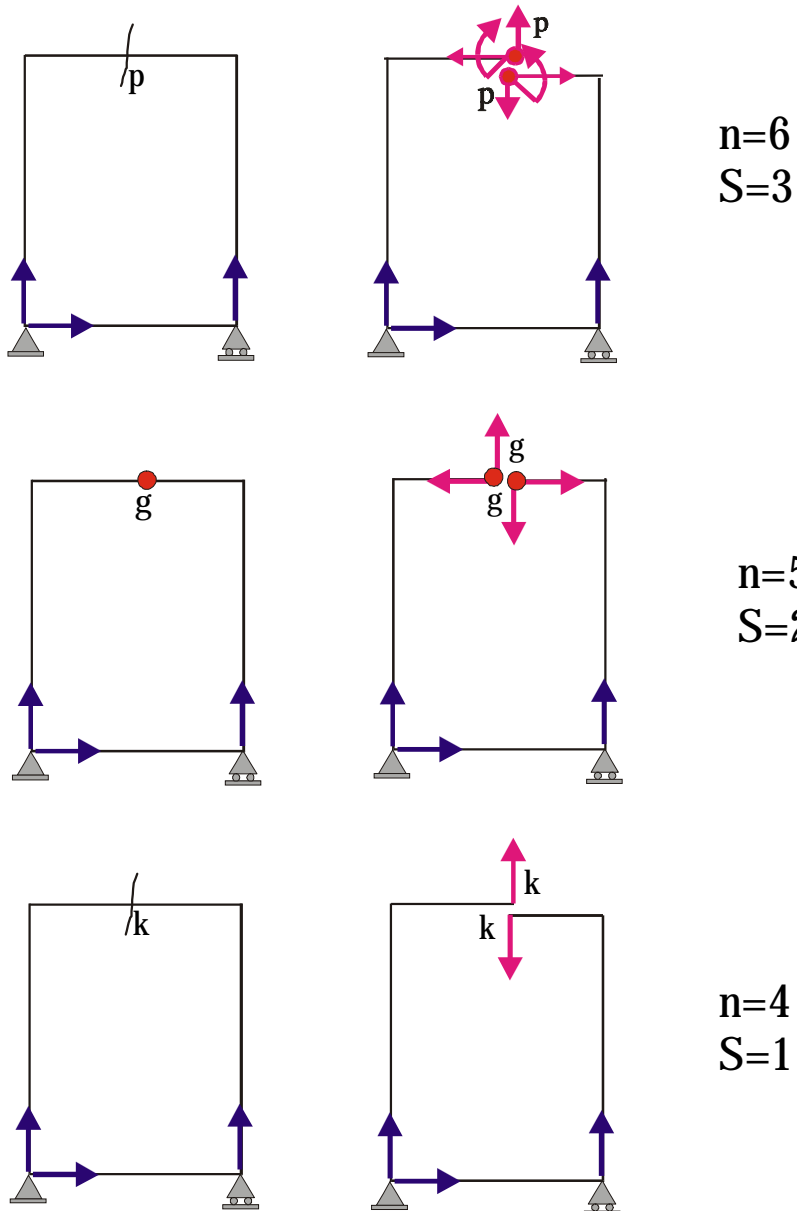
$$F_{Az} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h} \right) \cdot \left(\frac{b}{l} \right) \cdot \left(\frac{l+b}{l+h} \right) \cdot F \quad (\text{P.6.41})$$

A (P.8.37). egyenletekbe be helyettesítjük a (P.6.41). értéket, és így kiszámíthatjuk a többi reakció erőket is

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow F_{Ay} &= \left[1 - \left(\frac{a}{l} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h} \right) \cdot \left(\frac{b}{l} \right) \cdot \left(\frac{l+b}{l+h} \right) \cdot \left(\frac{h}{l} \right) \right] \cdot F \\ (2) \Rightarrow F_{Bz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h} \right) \cdot \left(\frac{b}{l} \right) \cdot \left(\frac{l+b}{l+h} \right) \cdot F \\ (3) \Rightarrow F_{By} &= \left[\left(\frac{a}{l} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h} \right) \cdot \left(\frac{b}{l} \right) \cdot \left(\frac{l+b}{l+h} \right) \right] \cdot F \end{aligned} \quad (\text{P.6.42})$$

8.1.4. A CSUKOTT KERETSZERKEZETEK ESETEI

ALAP SZERKEZET EKVIV.SZERKEZET JELLEMZŐK



8.04. ábra

A csukott keretszerkezetek kötésireakcióinak meghatározása nem különbözik a rudakra

vonatkozó eljárásoktól, viszont a keret normálmetszeteiben működő erők és nyomatékok meghatározása legtöbbször statikailag meghatározatlan feladatot képeznek.

A (8.04). ábrán látható, három csukott keretszerkezet. A külső és a belső reakciók csak megfelelő vektorokkal vannak jelölve. Az első keretszerkezet folyamatos, a második egy csuklót tartalmaz, a harmadik szabad szelvényközi támasszal rendelkezik. Ezeknek az eseteknek a megfelelő (n) ismeretlen reakciók száma illetve az (S) határozatlansági tényezők vannak jellemzőkként feltüntetve. Ami a külső támaszokat illeti, mind a három eset statikailag meghatározott feladatot képez, de ha az úgynevezett belső reakciókat is meg kell határozni, akkor statikailag meghatározatlan feladattal találkozunk. A megoldást az előzőleg bemutatott módszerek egyikével oldható meg.

9. MÉRETEZÉS (TÖRÉS HIPOTÉZISEK)

A szerkezetek és azok valamennyi elemei eleget kel hogy tegyenek két alapvető követelménynek

a. Rugalmas szilárd rendszerként kel működniük.

b. Meg kel hogy feleljenek az elvárt biztonsági követelményeknek.

Az utóbbi követelménynek lineáris feszültségi állapot esetében viszonylag könnyű eleget tenni, mivel a használt anyag mechanikai tulajdonságait könnyen és biztonságosan meg lehet állapítani, a Jacob Bernoulli alakváltozási modell alapján kapott igénybevételi kapcsolatok pedig a gyakorlatban elfogadhatóan jó eredményeket nyújtanak.

Nemlineáris (síkbeli és térbeli) feszültségi állapotok esetében, igaz csak elméletileg, a $(\sigma, \tau, F, M, A, T)$ kapcsolatokat meg lehet határozni, de sajnos csak kvalitatív elemzésre használhatók (a gyakorlati értékek igen eltérnek az elméletileg előlátott értékektől).

Az utóbbi miatt, kívannak fejlesztve bizonyos empirikus eljárások, melyek feltételezéseken (*hipotéziseken*) alapszanak.

9.1. A TÖRÉS HIPOTÉZISEK

Valamennyi hipotézis alapul a lineáris feszültségi állapotot, és e állapotra jellemző tényezőket használja. Ennek az oka az említett mechanikai tulajdonságok könnyű és megbízható meghatározása. Az igénybevett tényezők közé tartoznak a:

σ_M - szakítást (zúzást) idéző normálfeszültség (szakító szilárdság)

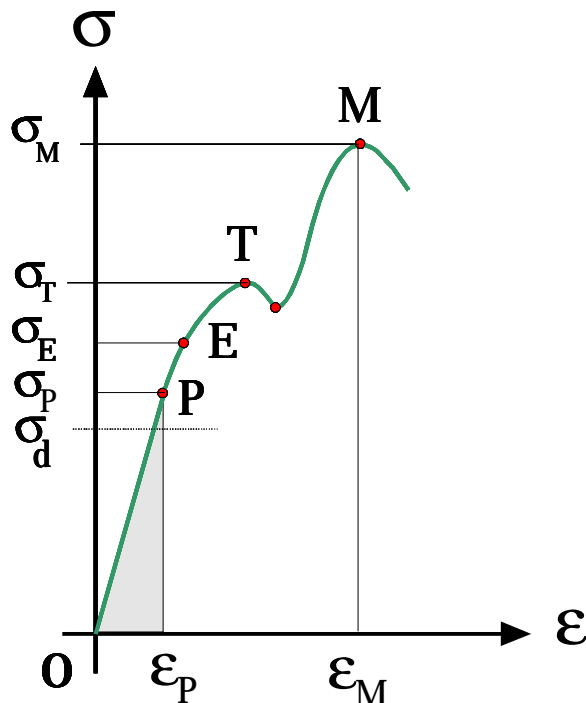
ε_M - szakítást (zúzást) idéző fajlagos hosszváltozás

τ_M - szakítást (törést) idéző tangenciális feszültség (nyíró szilárdság) (9.01)

u_{fM} - szakítást (zúzást) idéző fajlagos alaktorzító munka

Meg kel említeni, hogy alapul használható az (M) szakadási állapot helyet a (T) felső anyagfolyási állapot is.

A méretezési követelményeknek akkor lehet eleget tenni, ha biztosítjuk a rugalmas $(0 - \sigma_e; \varepsilon_e)$ tartománynak $(0 - \sigma_p; \varepsilon_p)$ arányos (proporcionális) résztartományának használatát (9.01. ábra).



9.01. ábra

Ezt úgy érzük el, hogy az (M) szakítási, illetve a (T) felső anyagfolyási állapotra jellemző (9.01). értékeket egy (ν_M) vagy (ν_T) biztonsági tényezővel osszuk. E tényezők a szerkezet jelegétől függenek, és nemegyszer több összetevőből állnak. Eszerint meghatározott értékeket (D) *MEGENGEDET ÉRTÉKEK* -nek hívjuk.

$$\sigma_D = \frac{\sigma_M}{\gamma_M} \quad \text{megengedett normál feszültség}$$

$$\varepsilon_D = \frac{\varepsilon_M}{\gamma_M} \quad \text{megengedet fajlagos hosszváltozás} \quad (9.02)$$

$$\tau_D = \frac{\tau_M}{\gamma_M} \quad \text{megengedett tangenciális feszültség}$$

$$u_{jD} = \frac{u_{jM}}{\gamma_M} \quad \text{megengedett alaktorzító munka}$$

Valamennyi törés hipotézis alapján *nemlineáris* feszültségi állapotban (az anyag bármely pontjában) a törés (szakadás, zúzódás) akkor jön létre ha az állapotot jellemző tényezői közül

egyik domináns, és eléri a lineáris feszültségi állapotra jellemző (9.01). megfelelő értékeket. E feltételt *TÖRÉS FELTÉTEL* -nek nevezzük.

A nemlineáris feszültségi állapotra jellemző és használt tényezők a következők:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 & \text{ fő feszültségek} \\
 \varepsilon_1 & \text{ fő fajlagos hosszváltozás} \\
 \tau_{\max} & \text{ a tangenciális feszültség maximális értéke} \\
 u_{f \max} & \text{ maximális fajlagos alaktorzulás}
 \end{aligned} \tag{9.03}$$

A *TÖRÉS FELTÉTEL* -ek a (9.01 és 9.03). adatok alapján:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_M \\
 \varepsilon_1 &= \varepsilon_M \\
 \tau_{\max} &= \tau_M \\
 u_{f \max} &= u_{fM}
 \end{aligned} \tag{9.04}$$

A hipotézisek alapján, a nemlineáris feszültségi állapotban lévő szerkezetek és azoknak valamennyi elemei, akkor tesznek eleget a méretezési alapvető követelményeknek, ha a működő (9.03). jellemzők nem haladják meg a (9.02). értékeket. Ezeket a feltételezéseket *SZILÁRDSÁGI FELTÉTELEK* -nek nevezzük.

$$\begin{aligned}
 I - \sigma_1 &\leq \sigma_D = \frac{\sigma_M}{\gamma_M} \\
 II - \varepsilon_1 &\leq \varepsilon_D = \frac{\varepsilon_M}{\gamma_M} \\
 III - \tau_{\max} &\leq \tau_D = \frac{\tau_M}{\gamma_M} \\
 IV - u_{f \max} &\leq u_{fD} = \frac{u_{fM}}{\gamma_M}
 \end{aligned} \tag{9.05}$$

A (9.05). hipotéziseket még *ALAP HIPOTÉZIS* -eknek is nevezik.

Valamennyi hipotézis használatát úgy biztosítjuk, hogy a (9.05). kapcsolatokat a kiszámított főfeszültségek és a megengedett (9.02). értékek közötti kapcsolatokat képezzék.

9.1.1. (I) - A LEGNAGYOBB FŐFESZÜLTTSÉGI HIPOTÉZIS

Ez a hipotézist GALILEI (alapozta meg, és így az ő nevét viseli).

A *TÖRÉS FELTÉTEL* a (9.04). egyenletek alapján:

$$\sigma_1 = \sigma_M \quad (9.06)$$

A *SZILÁRDSÁGI FELTÉTEL* a (9.05). egyenletek alapján erre a hipotézisra jellemző kapcsolatot kapjuk:

$$\sigma_1 \leq \sigma_D = \frac{\sigma_M}{\gamma_M} \quad (9.07)$$

9.1.2. (II) - A LEGNAGYOBB FAJLAGOS HOSSZVÁLTOZÁSI HIPOTÉZIS

Ez a hipotézist MARIOT (1620-1684) alapozta meg, és így az ő nevét viseli.

A *TÖRÉS FELTÉTEL* a (9.04). egyenletek alapján:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_M \quad (9.08)$$

A *SZILÁRDSÁGI FELTÉTEL* a (9.05). egyenletek alapján:

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_D = \frac{\varepsilon_M}{\gamma_M} \quad (9.09)$$

Poisson féle elmélet szerint az (ε_1) fő fajlagos hosszváltozás értéke:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 - \sigma_3)] \quad (9.10)$$

HOOKE törvénye szerint a megengedett fajlagos hosszváltozás:

$$\varepsilon_D = \frac{\sigma_D}{E} = \frac{\sigma_M}{E\gamma_M} \quad (9.11)$$

Ha a (9.10 és 9.11). értékeket be helyettesítjük a (9.09). egyenletbe, és azt számtanilag rendezzük a következő (erre a hipotézisre jellemző) kapcsolatot kapjuk:

$$\frac{\sigma_M}{\gamma_M} \geq [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 - \sigma_3)] \quad (9.12)$$

9.1.3. (III) - A LEGNAGYOBB TANGENCIÁLIS FESZÜLTSG HIPOTÉZIS

Ez a hipotézist COLOMB (1736 - 1804) alapozta meg, és így az ő nevét viseli.

A *TÖRÉS FELTÉTEL* a (9.04). egyenletek alapján:

$$\tau_{\max} = \tau_M \quad (9.13)$$

A *SZILÁRDSÁGI FELTÉTEL* a (9.05). egyenletek alapján:

$$\tau_{\max} \leq \tau_D = \frac{\tau_M}{\gamma_M} \quad (9.14)$$

A (2.78). egyenlet alapján:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (9.15)$$

Ha a (9.15). egyenletet be helyettesítjük a (9.14). egyenletbe, akkor az erre a hipotézisre jellemző kapcsolatot kapjuk:

$$\boxed{\frac{\tau_M}{\gamma_M} \geq \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} \quad (9.16)$$

9.1.4. (IV) - A LEGNAGYOBB ALAKTORZÍTÓ FAJLAGOS MUNKA HIPOTÉZISE

Ez a hipotézist HUBER, MISES és HENCKU alapozták meg, és így az ő nevükhöz fűződik.

A *TÖRÉS FELTÉTEL* a (9.04). egyenletek alapján:

$$u_{f \max} = u_{fM} \quad (9.17)$$

A *SZILÁRDSÁGI FELTÉTEL* a (9.05). egyenletek alapján:

$$u_{f \max} \leq u_{fD} = \frac{u_{fM}}{\gamma_M} \quad (9.18)$$

A (6.51). munkatétel egyenlet alapján az ($u_{f \max}$) értéke :

$$u_{f \max} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (9.19)$$

A megfelelő lineáris feszültségi állapotra jellemző (u_{fM}) értéke az (9.19) egyenlet alapján:

$$u_{fM} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_M^2 \quad (9.20)$$

Ha a (9.19 és 9.20). egyenleteket be helyettesítjük a (9.18). egyenletbe , akkor az erre a hipotézisra jellemző kapcsolatot kapjuk:

$$\boxed{\frac{\sigma_M}{\gamma_M} \geq \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}} \quad (9.21)$$

A feltüntetett négy alap hipotézis mellett léteznek más szerzők (Balagin, Mirolyubov, Yang, Mohr,...) által kifejlesztett és felajánlott megoldások is, melyek inkább egyes szerkezeti formáknál alkalmazhatók, de nem tekinthetők általánosoknak.

Valamennyi hipotézis struktúrájából ítélve, egyes elemi vagy összetett igénybevétel esetében, az állapotra jellemző (9.03). tényezőket elméletileg határozzuk meg a JACOB BERNOULI alakváltozási modell szerint (Saint Venant féle eljárás - 5. rész), a (9.01). szakítást jellemző (lineáris feszültségi állapot) értékeket pedig műszaki táblázatokból , gyártói adatok, vagy mérések alapján határozzuk meg.

9.1. PÉLDA

A (9.1). ábrán látható (ABC) szerkezet (AB) része hengerelt (D).átmérőjű szelvényből van kiépítve. A szerkezet (C) pontját ($F=5 \text{ KN}$). erő terheli. A szerkezet anyaga (σ_{0300}), melynek megfelel a ($\tau_M = 320 \text{ MPa}$) nyíró szilárdság, a ($\sigma_M = 400 \text{ MPa}$) szakító szilárdság, valamint ($E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$) rugalmassági modulus. A szerkezet hossz méretei ($l=2000 \text{ mm}$, $k=100 \text{ mm}$), és a ($\nu_M = 2$) biztonsági tényező jellemzi.

Meg kell határozni a (D) átmérőt, alkalmazva a legnagyobb tangenciális feszültségi és a legnagyobb főfeszültségi hipotéziseket.

Az (F) erőt a (B) , majd az (A) pontra redukáljuk. Az (A) pontnak megfelelő normálmetszetébe (M_f, M_t, F) egy hajlító nyomaték, egy csavaró nyomaték és az (F) erő lesz igénybevéve.

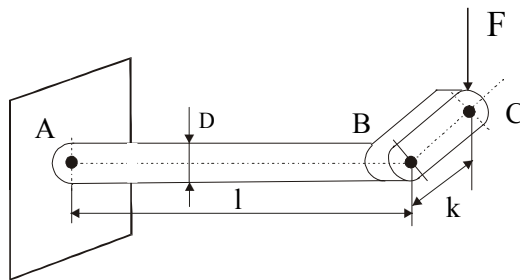
Hosszú rudak esetében a transzverzális (F) erő kihatását az össz feszültségre figyelmen kívül hagyhatjuk, miszerint a számítások során használandó igénybevételek a következők:

- A hajlító nyomaték:

$$M_f = F \cdot l = 5000 \cdot 500 = 25 \cdot 10^5 \text{ N mm} \quad (\text{P.9.01})$$

- A csavaró nyomaték:

$$M_t = F \cdot k = 5000 \cdot 100 = 5 \cdot 10^5 \text{ N mm} \quad (\text{P.9.02})$$



9.1. ábra

Az (M_f, M_t) nyomatékok síkbeli (σ, τ) feszültségi állapotot hoznak létre.

A FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA

- Hajlító nyomatéktól eredő normál feszültség (5.110. kapcsolat):

$$\sigma = \frac{M_f}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{M_f}{I_x} \cdot \frac{D}{2} = \frac{25 \cdot 10^5}{\frac{D^4 \cdot \pi}{64}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{2,5 \cdot 10^7}{D^3} \text{ MPa} \quad (\text{P.9.03})$$

- Csavaró nyomatéktól eredő nyíró feszültség (5.79. kapcsolat):

$$\tau = \frac{M_t}{I_0} \cdot y_{\max} = \frac{M_t}{2I_x} \cdot \frac{D}{2} = \frac{5 \cdot 10^5}{2 \cdot \frac{D^4 \cdot \pi}{64}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{0,25 \cdot 10^7}{D^3} \text{ MPa} \quad (\text{P.9.04})$$

A FŐFESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA (5.123. kapcsolat):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = \frac{2,5 \cdot 10^7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2,5 \cdot 10^7}{D^3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{0,25 \cdot 10^7}{D^3}\right)^2} = \frac{10^7}{D^3} \cdot (1,25 \pm 2,55)$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_1 = \frac{3,8 \cdot 10^7}{D^3}$$

$$\sigma_2 = -\frac{1,3 \cdot 10^7}{D^3} \quad (\text{P.9.05})$$

A (D) ÁTMÉRŐ MEGHATÁROZÁSA

A LEGNAGOBBI TANGENCIÁLIS FESZÜLTSÉGI HIPOTÉZIS SZERINT:

- A legnagyobb tangenciális feszültség hipotézis (9.16. kapcsolat) szerint:

$$\frac{\tau_M}{\nu_M} \geq \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Síkbeli feszültségi állapot révén ($\sigma_3 = \sigma_2$), miszerint az előző kapcsolat formája:

$$\frac{\tau_M}{\nu_M} \geq \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (\text{P.9.06})$$

A (P.9.06). kapcsolatba be helyettesítjük a (P.9.05). értékeket és az anyag, illetve szerkezet jellemzőjét.

$$\frac{320}{2} \geq \frac{\frac{3,8 \cdot 10^7}{D^3} - \left(-\frac{1,3 \cdot 10^7}{D^3}\right)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$D = D' \geq \sqrt[3]{\frac{10^7 \cdot 5,1 \cdot 2}{320}} = 68 \text{ mm} \quad (\text{P.9.07})$$

A LEGNAGOBBI TANGENCIÁLIS FESZÍTÉSI HIPOTÉZIS SZERINT:

- A legnagyobb főfeszítés hipotézis (9.07. kapcsolat) szerint:

$$\sigma_1 \leq \frac{\sigma_M}{\nu_M} \quad (\text{P.9.08})$$

A (P.9.08). kapcsolatba be helyettesítjük a (P.9.05). értékeket és az anyag, illetve szerkezet jellemzőjét.

$$\begin{aligned} \frac{3,8 \cdot 10^7}{D^3} &\leq \frac{400}{2} \\ &\Downarrow \\ D = D'' &\geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3,8 \cdot 10^7}{400}} = 57 \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{P.9.09})$$

A beépítésre kiválasztandó szabványos, hengerelt szelvény (D) átmérője nagyobb, vagy egyenlő kell hogy legyen a (D' , D'') hipotézisek szerint meghatározott értékektől:

$$\begin{aligned} D &\geq (D', D'') \\ &\Downarrow \\ \boxed{D = 70 \text{ mm}} & \quad (\text{P.9.10}) \end{aligned}$$

IRODALOMJEGYZÉK

Az irodalomjegyzékben csak a könyvtartalmához kapcsolódó szak és tankönyvek, valamint a használt táblázatok tartalmazó műszaki kézikönyvek vannak feltüntetve.

1. Dr. Bazjanac Davorin: NAUKA O ^VRSTO] I
Tehni~ka knjiga, Zagreb, 1973.
2. Dr. Br~i} Vlatko: OTPORNOST MATERIJALA
Gra| evinska knjiga, Beograd, 1975.
3. Dr. Király Béla: SZILÁRDSÁGTAN (I, II)
(egyetemi jegyzet), Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
4. Dr. Kósza Csaba: RUGALMAS RENDSZEREK MECHANIKÁJA (II)
(főiskolai jegyzet), Bánki Donát, Budapest, 1983.
5. Dr. Rastko ^uki}: OTPORNOST MATERIJALA
Ma{inski Fakultet Beograd, 1992.
6. Dr. Rastko ^uki}
(sa grupom autora) PRIRU^NIK IZ OTPORNOSTI MATERIJALA
Ma{inski Fakultet Beograd, 1991.

7. Shanely F. R. MECHANICS OF MATERIALS
 McGRAW - HILL Book company, New York, 1967.

8. Timosenko S. HISTORY OF STRENGTH OF MATERIALS
 McGRAW - HILL Book company, New York, 1953.

9. Timosenko S STRENGTH OF MATERIALS (I)
 D. VAN NOSTRAND Company, Princeton, 1958.