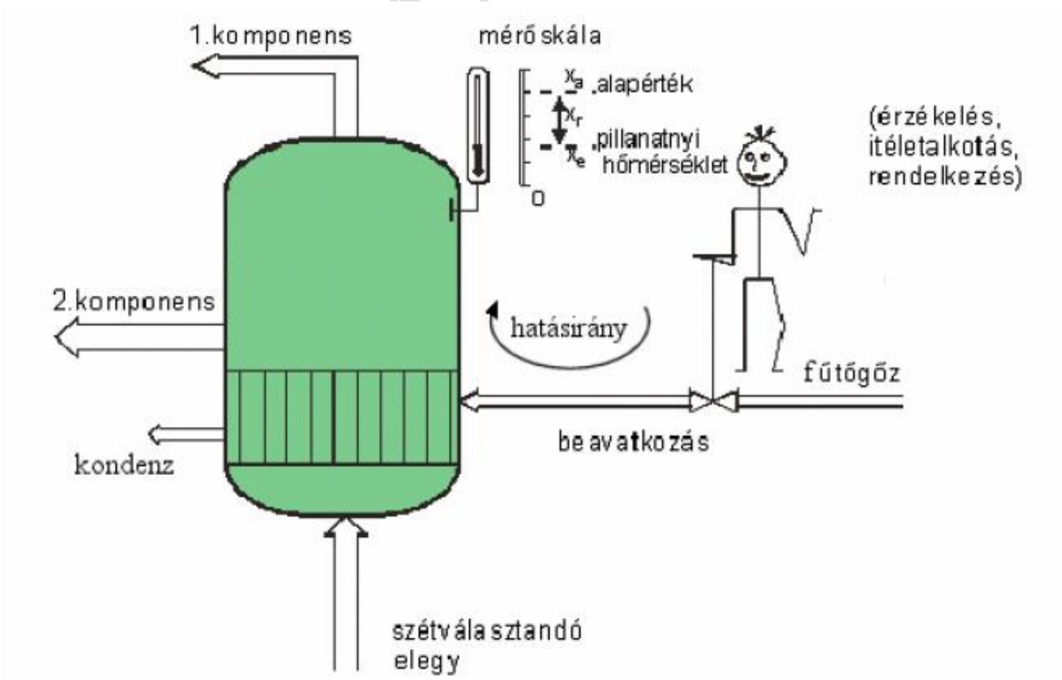
Rendszerek modellezése és rendszertechnikai leírása. Nemlineáris rendszerek egyensúlyi helyzete, linearizálás.

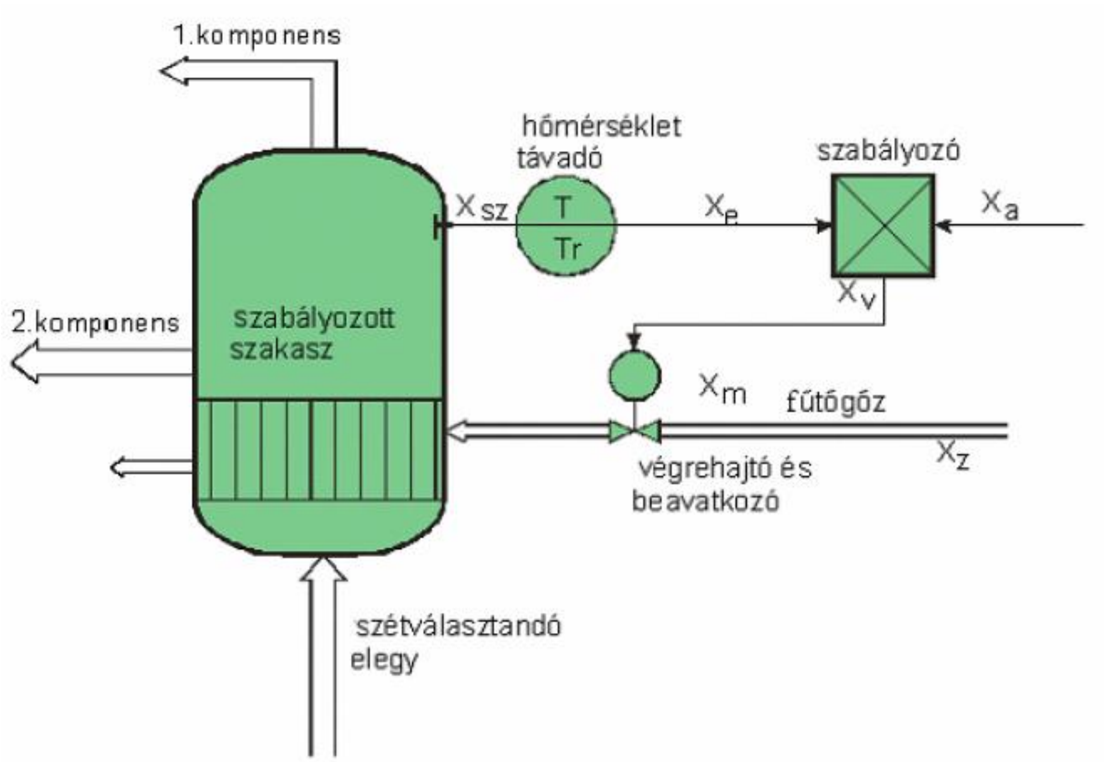
Bevezetés

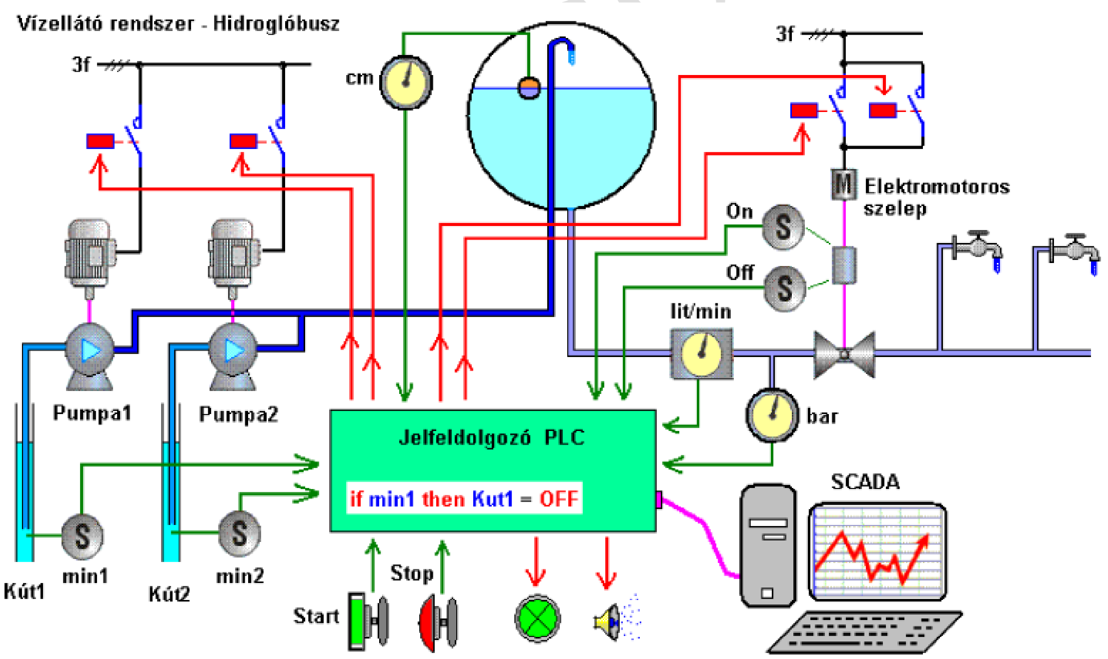
Napjainkban érvényes mondás: “Controlare necesse est”, vagyis irányítani muszáj.

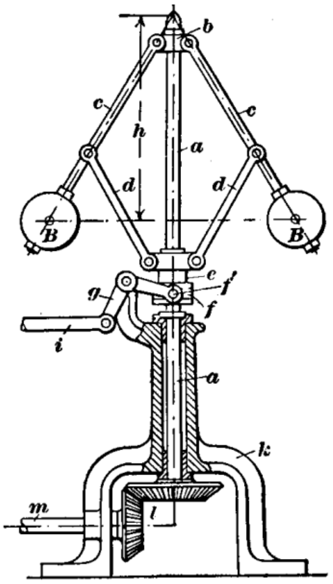
Fürdővíz,
Vasaló,
DVD,
Járművek,
Robotok,
Hadászat,
Gyártás,
Biológia,
Közgazdaság,

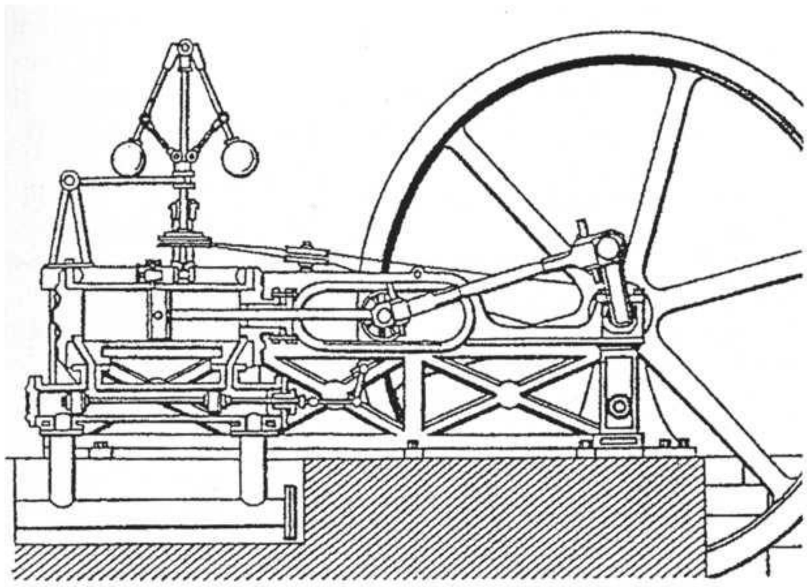
A irányítások rejtettek maradnak, rejtett technológia.
Control-Computation-Communication=C3 szerves együttes (Synergy)

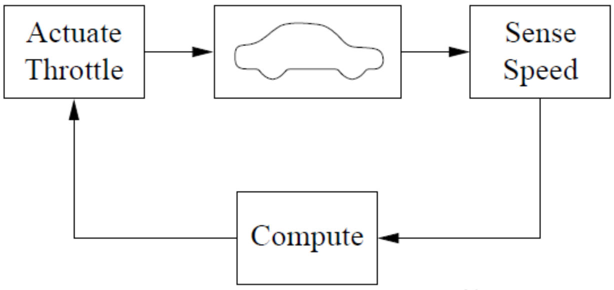


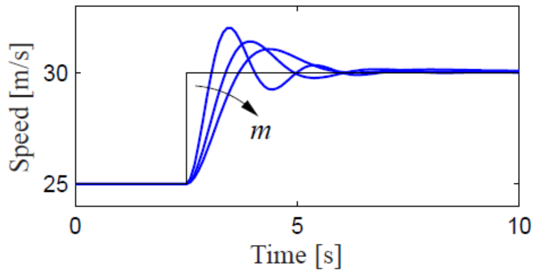

1.komponens
hőmérséklet
távadó
szabályozó
X_{sz}
T
Tr
X_e
X_a
X_v
2.komponens
szabályozott
szakasz
X_m
fűtőgőz
X_z
végrehajtó és
beavatkozó
szétválasztandó
elegy


Vízellátó rendszer - Hidroglóbusz
3f
cm
3f
M
Elektromotoros
szelep
On
Off
lit/min
bar
Pumpa1
Pumpa2
Jelfeldolgozó PLC
if min1 then Kut1 = OFF
SCADA
S
min1
Kút1
S
min2
Kút2
Stop
Start

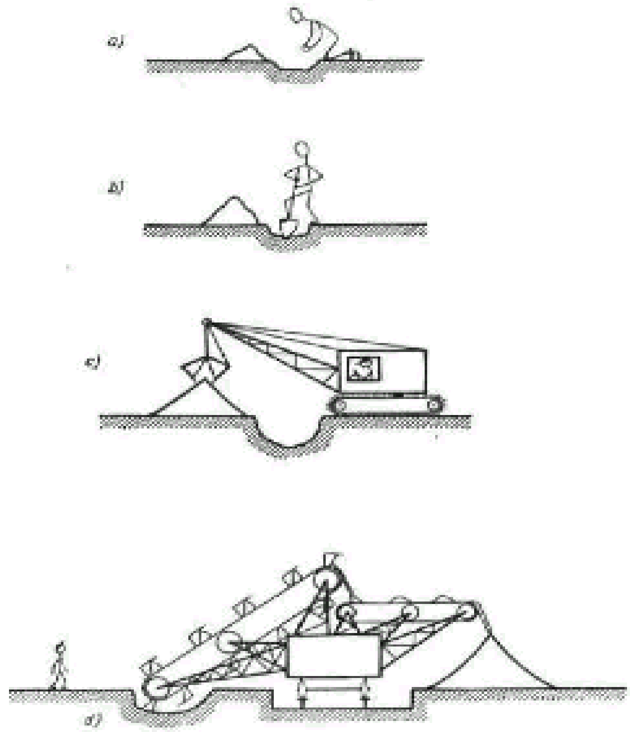








Amióta az ember megjelent a Földön, állandóan harcban áll a természettel. Eleinte a puszta létéért, azután pedig a természet erőinek leigázásáért, és a számára szükséges javak előállításáért küzdött. A hosszú idők folyamán szerzett tapasztalatok az embert a természetben rejlő munkavégző képesség, az energia felismeréséhez, majd pedig ennek az energiának a munka végzésére való felhasználásához vezette. Megalkotta a munkaeszközöket, szerszámokat, gépeket, készülékeket, berendezéseket, megtervezte ezen eszközök szervezett és célszerű egymás közti és a környezettel való kölcsönhatásait és így létrehozta a korszerű termelési (gyártási) folyamatot.



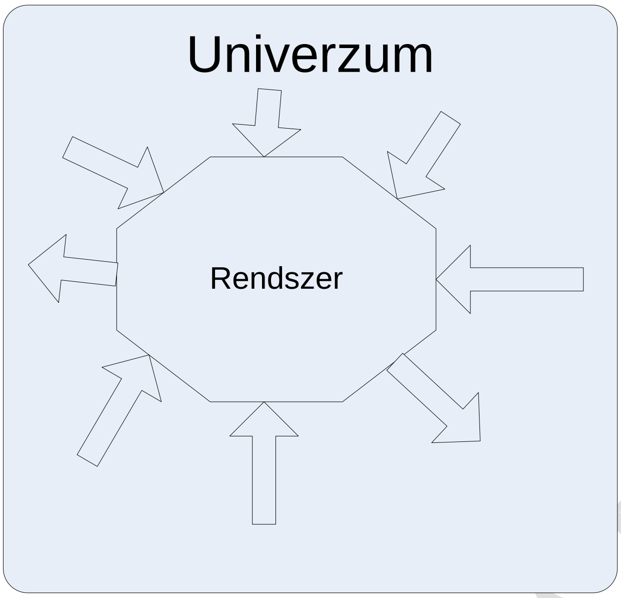
1. Rendszertechnikai alapfogalmak.

A tananyag megértésének érdekében mindenképp tisztázni kell néhány a rendszerrel kapcsolatos alapfogalmat. A rendszer fogalmának meghatározása többféle szempontból lehetséges. Szadovszkij professzor Általános rendszerelmélet alapjai c. művében több jelentős definíciót ad meg. Az első csoportba tartoznak a matematikai modellek irányából megközelítő definíciók, a második csoport definíciói a rendszert mint relációk által összekapcsolt elemek halmazát tekintik, míg a harmadik csoportba sorolható meghatározások a bemenet, kimenet, információfeldolgozás fogalmával operálnak. A továbbiakban a mérnökök számára két egyenértékű érdemes definíció kerül megadásra:

1. A valóságnak minden térben elhatárolt részét, ahol a különböző anyag- és mozgásformák elemeit kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések kapcsolják össze, **rendszernek nevezzük**.
2. A **rendszer**, valóságos vagy elképzelt objektumok viszonylag jól körülhatárolható olyan halmaza, melyeket kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések kapcsolnak egybe.

Elméleti szempontból rendszernek tekinthető minden olyan transzformáció, amely adottnak tekintett gerjesztésekhez meghatározott válaszokat rendel. A rendszer elemének tekintjük azt az objektumot, amelyet a rendszer vizsgálatához már további részekre nem szükséges felbontani. A rendszer elemei közötti és a környezethez fűződő összefüggések és kapcsolatok megvalósításai lehetnek egyszerű vagy bonyolult fizikai, kémiai, biológiai vagy információs jellegűek. A

rendszer leírását, az összefüggések matematikai meghatározását, a matematikai modellt röviden (bár nem eléggé szabályosan) szintén a rendszer szóval jelöljük.
Mivel minden természetben előforduló, vagy ember által létrehozott rendszer, folyamat, jelenség kölcsönhatásban van egymással, ha bármilyen rendszert tanulmányozunk is, figyelembe kell vennünk a környezet hatását a rendszerre, és a rendszer hatását a környezetre. Ezek a hatások lehetnek olyanok, amelyek a rendszer meghatározott pontjaiban összpontosulnak, például a rendszer egy elemére ható erő formájában. A hatások azonban lehetnek elosztottak is, ekkor az egész rendszernek vagy valamelyik részének felületére, esetleg minden egyes pontjára hatnak. Ilyen elosztott jellegűek a hőmérséklet, vagy nyomás hatásai, amelyek egy rendszer felületének bizonyos részeire hatnak, vagy a gravitációs és mágneses terek hatásai stb. A rendszer és környezete összetartozó, dialektikus egységet képező fogalmak. Szétválasztásuk, a rendszer határvonalainak kijelölése, a rendszer körülhatárolása a feladattól, a vizsgálat szempontjaitól, a beavatkozást igénylő szituációtól függ. Az 1.1 ábra vázlatosan tünteti fel a rendszert a tér olyan részeként, amelyben összes elemei, és a környezethez fűződő összes kapcsolatai összpontosítva (koncentrálva) vannak. A kapcsolatokat ábrázoló nyilak a hatások terjedésének irányát mutatják. Minden rendszer jellemezhető az azt felépítő elemek tulajdonságaival, és azokkal a kapcsolatokkal, amelyek az adott rendszer és környezet kölcsönhatását jellemzik. Meg kell jegyezni, hogy akármilyen részletesen és alaposan is tanulmányozzuk a rendszer tulajdonságát és viselkedését, sohasem tudjuk figyelembe venni mind azt a végtelen sok tényezőt, amely a rendszert közvetve vagy közvetlenül befolyásolja. Ezért minden tanulmányozás, kísérlet eredményét csakis megfelelő fenntartással fogadhatjuk el és alkalmazhatjuk a gyakorlatban. A rendszerekben keringő és áthaladó hatásokat, amelyek információs kapcsolatokat valósítanak meg, jeleknek nevezik, ugyanis a jelnek legfontosabb jellemvonása az információtartalom. Elmondható, hogy a jel minden olyan folyamat, amelynek segítségével az információ anyagi jellegűvé válik és továbbítható vagy tárolható.
A **jel** valamely fizikai vagy kémiai állapothatározó olyan értéke vagy értékváltozása, amely egy egyértelműen hozzárendelt információ szerzésére, továbbítására vagy tárolására alkalmas.

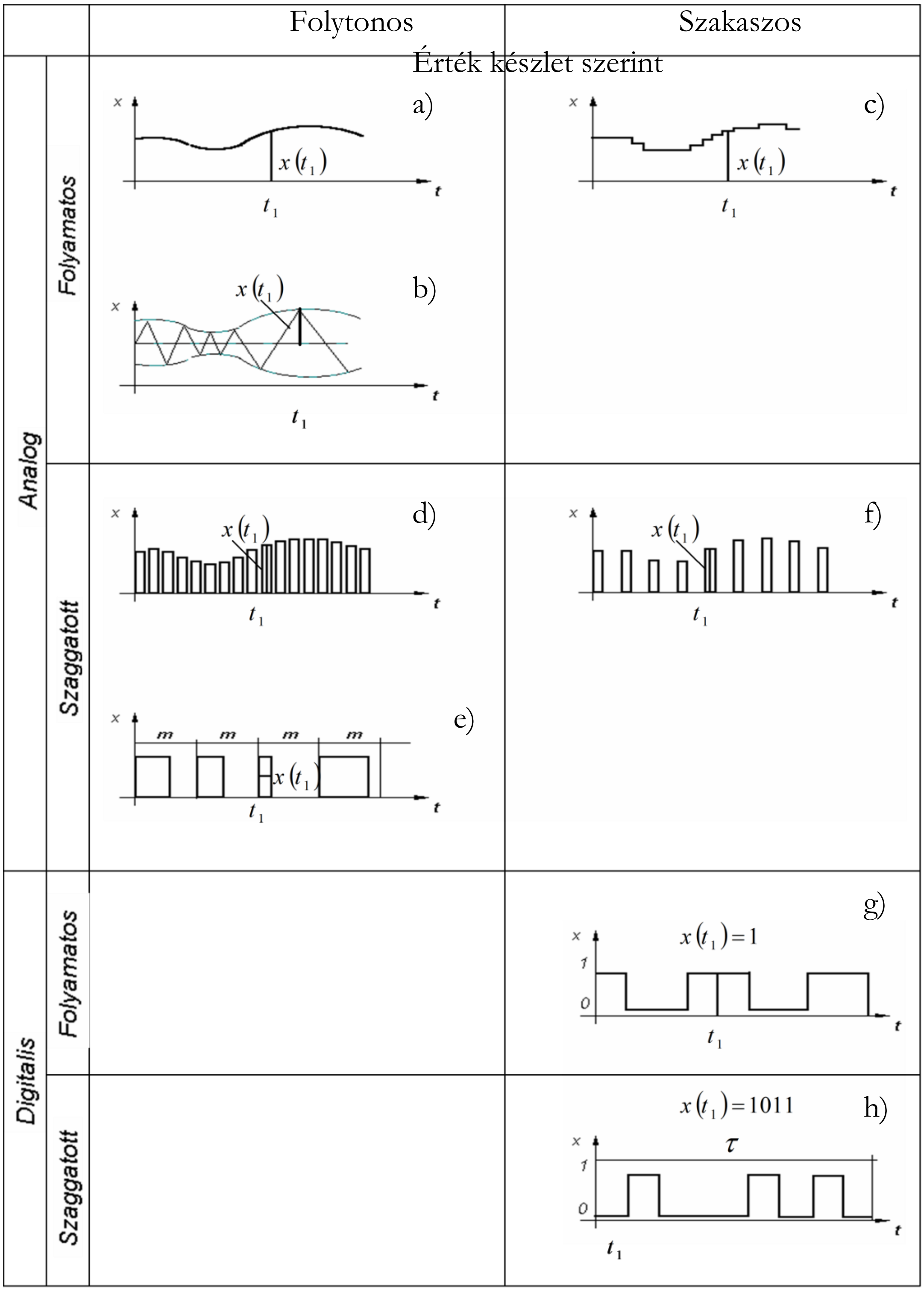


1.1. ábra. –A rendszer és környezete

2. Jelek felosztása.

Egy rendszer egyes elemei között, vagy különböző rendszerek között olyan kapcsolatok vannak, melyeken keresztül kölcsönhatásban állnak egymással. Ezek a kapcsolatok az energia vagy az anyag átadását jelenthetik az egymásra ható elemek vagy rendszerek között. A kapcsolatok azonban olyanok is lehetnek, hogy információ tartalmuk lesz lényeges, azaz azok az ismeretek, amelyeket az elem vagy rendszer más rendszerek vagy elemek állapotáról kap, vagy a saját állapotáról közöl. Ekkor az ismereteket hordozó anyagi forma csak másodrangú jelentőségű lesz.
A rendszerekben keringő és áthaladó hatásokat, amelyek információs kapcsolatokat valósítanak meg, **jel**eknek nevezik. A jelnek legfontosabb jellemvonása az információtartalom (közleménytartalom), az energiaszint nagysága csak másodlagos jelentőségű. Legtöbbször a jelet, mint időtől függő információt hordozó mennyiséget határozzák meg. E meghatározás csak részben igaz, ugyanis gyakran jelként tekintünk azon függvényekre is melyek független változóként nem tartalmazzák az időt, valamint előfordul, hogy komplex függvényeket is jelként kezelünk.
Jelhordozó lehet minden mérhető fizikai, kémiai állapothordozó, amelynek segítségével az információ anyagi jellegűvé válik és továbbítható vagy tárolható. Matematikai modell esetén a jeleket **változó**kkal jelöljük. Jelhordozó jelölése esetén a változónak fizikai értelme van.
Jellemzőnek nevezzük azokat az állapothatározókat, amelyek a rendszer állapotát vagy állapotának változását jellemzik vagy befolyásolják (pl. nyomás, hőmérséklet, koncentráció). Tehát a jellemző olyan jel, amely a rendszer állapothatározóinak értékéhez vagy értékváltozásához rendel információt.
Az a rendszer vagy közeg, amelyen keresztül kapjuk a jelet, a hírközlő csatorna. A jeleket nagy távolságra lehet közvetíteni, így megvalósítható a térben elválasztott

rendszerek közötti kapcsolat is. A jelek rögzítése (memorizálása) lehetővé teszi, hogy megfelelő idő elteltével közvetítsük őket, és így az időben elválasztott rendszerváltozási folyamatokat is össze lehet kapcsolni. A 2.1. ábra. mutatja a jelek szabvány szerinti felosztását.



2.1. ábra. A jelek felosztása

A 2.1. ábrán látható felosztás Dr. Csáki Frigyes szerint történt.
A jeleket feloszthatjuk:

- értékkészlet szerint,
- lefolyás szerint,
- az információ megjelenési formája szerint,
- az érték meghatározottsága szerint,
- a jelhordozó fizikai mennyiségek szerint,

<u>A jel értékkészlete szerint:</u>

Folytonos a jel, ha – meghatározott tartományban – tetszés szerinti értéket vehet fel és értékkészlete folytonos, vagyis egy összefüggő tartomány. (példa: 2.1 ábra a, b, d, e)

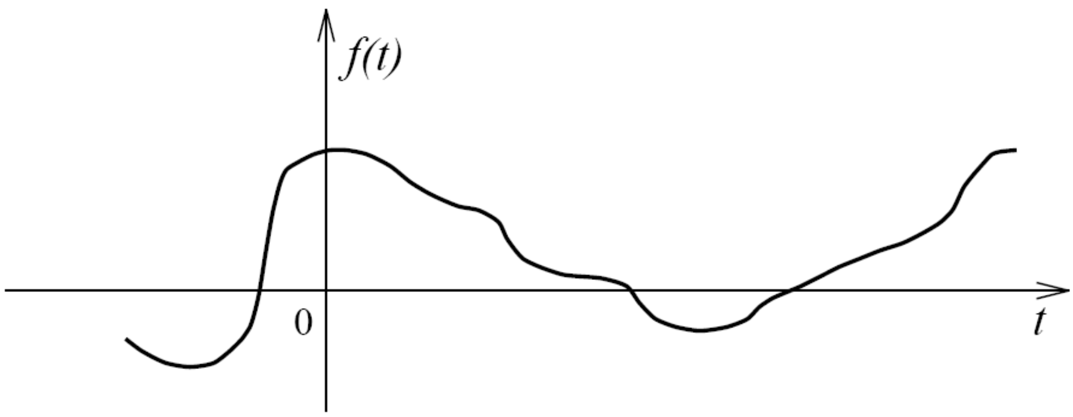
Szakaszos a jel, ha – meghatározott tartományban – csak meghatározott, diszkrét (izolált) értékeket vehet fel, két szomszédos diszkrét értéke közötti értékkészlete hiányzik (példa: 2.1 ábra c, f, g, h)

<u>Lefolyás szerint:</u>

Folyamatos a jel, ha a független változó egy adott tartományában megszakítás nélkül fennáll. (példa: 2.1 ábra a, b, c, g).

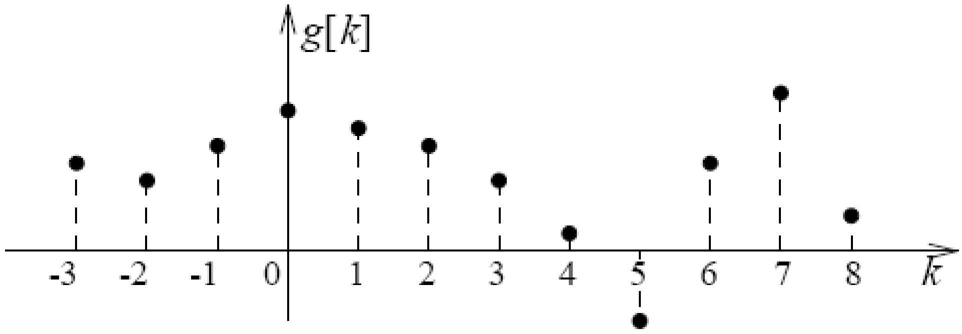
A folyamatos jel matematikai modellezésénél olyan függvényt alkalmazunk ahol a független változó $t \in \Re$ ($\Re$ a valós számok halmaza). Folyamatos jelnél fontos, hogy az egyértelműen definiált legyen a teljes $\Re$ felett esetleg, néhány véges számú pont képezhet kivételt. Például a $y(t) = \sqrt{t}$ nem értelmezett a $t < 0$ értékekre, a pozitívokra pedig két megoldással is rendelkezik. Gyakran, főleg dinamikus rendszerek esetében a független változó az idő. Ilyenkor folytonos idejű jelről beszélünk, melynek jele „FI”.

A jelek valós matematikai függvények, de néhány rajtuk végzett transzformáció hatására komplex változóként jelentkezhetnek. Ilyen például a forgóvektorok ábrázolása amplitúdójukkal és fázisukkal. $Y(j\omega) = A(j\omega)e^{j\varphi(\omega)}$. Ahol: $Y(j\omega)$ egy komplex kifejezés, ω a forgás szögsebessége, $A(j\omega)$ a forgó vektor amplitúdója és $\varphi(\omega)$ jelöli a fázisszöget.



2.2. ábra. Folytonos idejű jel.

Szaggatott a jel, ha az a független változó egy adott tartományában csak megszakításokkal áll fenn. Például a 2.1 ábra d, e, f, h jelei a független változó meghatározott értékeiben szolgáltatnak információt a jel a többi értékeknél megszakad. Az információszolgáltatás a független változó bizonyos értékeire értelmezett. Időt alkalmazva független változóként eljutunk a diszkrét idejű jel fogalmához, melynek jele a "DI". A diszkrét idejű jel matematikai meghatározása, hogy az egy $k \in Z$ (Z az egész számok halmazát jelöli) független változó függvénye $y = y[k]$. Az egyértelmű megkülönböztetés érdekében a folyamatos jelet jelölő függvénynél egyszerű zárójeleket alkalmazunk, míg a szaggatott jel esetében középzárójelet. Így $y(t)$ FI míg $y[k]$ DI jel jelölése.



2.3. ábra. Diszkrét idejű jel.

A 2.3. ábrán látható $g[k]$ függvény esetében k diszkrét időt jelöl másodpercben, percben, órában vagy egyéb időszeletben megadva.

<u>Az információ megjelenési formája szerint:</u>

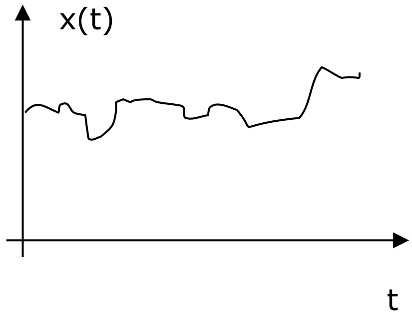
Analóg a jel, ha az információt a jelhordozó értéke vagy értékváltozása közvetlenül képviseli. Az analóg jel információtartalma tetszőlegesen kis változásokat is közvetít.

Digitális a jel, ha az információ a jelhordozó számjegyet kifejező, diszkrét, jelképi értékeiben (kódjaiban) van jelen. (példa: 2.1 ábra a g lineárisan kódolt, h soros kód segítségével előállított digitális jel időfüggvényét mutatja).

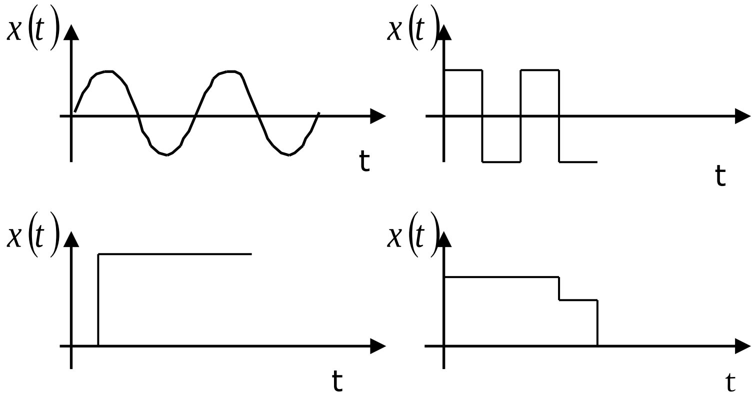
<u>Az érték meghatározottsága szerint:</u>

Determinisztikus a jel, ha értéke meghatározott időfüggvénnyel egyértelműen megadható.

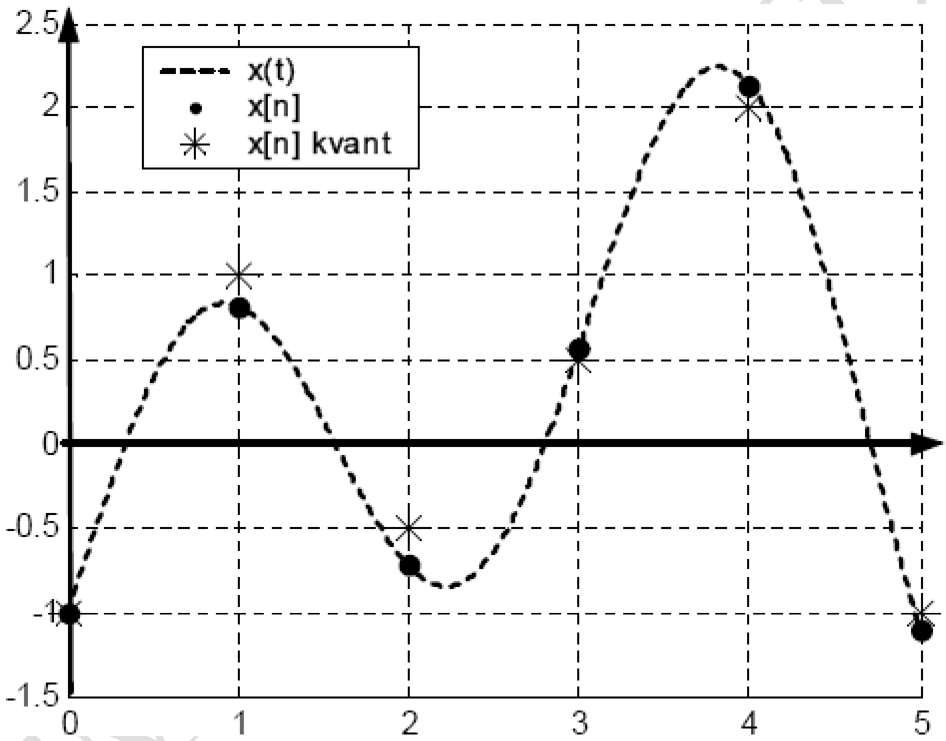
Sztochasztikus a jel, ha véletlen lefolyású, és csak valószínűség-számítási módszerekkel írható le.



2.4. ábra. – Sztochasztikus jel



2.5. ábra. – Periodikus a), és nem periodikus jelek b)

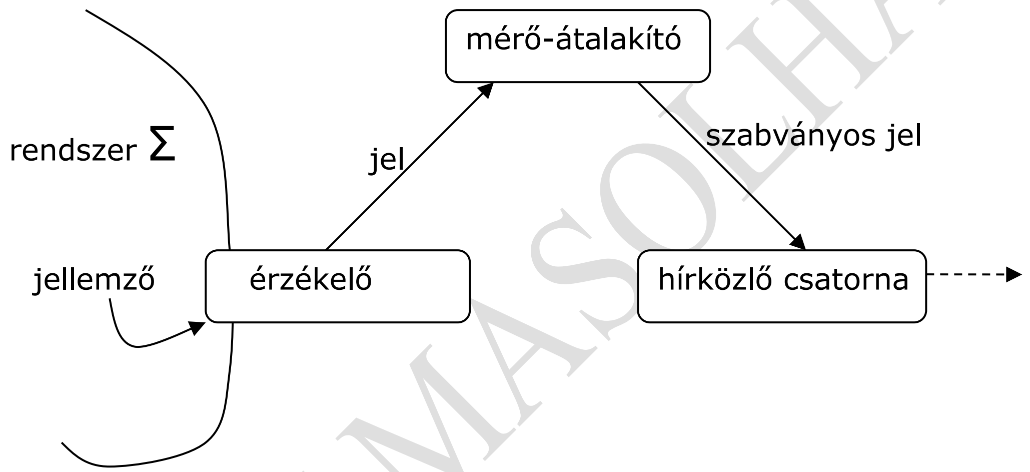


2.6. ábra. Mintavételezett és kvantált jel.

A jelhordozó fizikai mennyiség szerint

Jelhordozó bármelyik fizikai vagy kémiai mennyiség lehet. A továbbiakban megemlítésre kerül néhány, a mérnöki gyakorlatban gyakran használt mennyiség. Ezen mennyiségek attól függően csoportosíthatók, hogy milyen az elsődleges rendszer besorolása. Például a korszerű számítógépekre alapozott irányítási rendszerekben a kétirányú információcsere villamos jelekkel történik. A villamos jelekkel működő rendszerek mellett optikai, elektromágneses, pneumatikus és hidraulikus rendszerek is gyakran képezik vizsgálódások tárgyát. Az optikai rendszer jelhordozója a **fény**. Az elektromágneses rendszerek esetén rádió vagy **mikrohullám** továbbítja az információt. Pneumatikus rendszerek jelhordozója **sűrített levegő**, a hidraulikus rendszereké pedig **folyadék** és azon belül is leggyakrabban olaj nyomása. Robbanásveszélyes üzemekben pneumatikus vagy megbízható, robbanás biztos villamos berendezéseket alkalmaznak.

A villamos jelekkel működő rendszerek elterjedését indokolja, hogy a villamos energia széles körben rendelkezésre áll, a villamos jelek nagy távolságra jól átvihetők, fizikai mennyiségek gyors változásait is képesek követni és a korszerű híradástechnika és számítógép-hálózati eljárások alkalmazásával könnyen csatlakoztathatók különböző berendezésekhez.
A villamos jel esetében az információhordozó a **feszültség** vagy **áramerősség** változása lehet. Az információ közölhető a villamos jel amplitúdójával, frekvenciájával vagy fázisával vagy az impulzusok amplitúdójával, az impulzusok vagy impulzusok közötti szünet időtartamának viszonyával vagy az impulzusok számával.
Az analóg villamos jelek amplitúdója általában szabványos tartományúak így értékük valamely tartományba a következők közül: 0-1V, 0- 10V-os, 0-5mA, 0-20mA-es vagy 4-20mA esik.
A rendszer állapotára jellemző információkat az érzékelők szolgáltatják, az irányító hatásokat pedig a rendszerbe beépített beavatkozó szervek biztosítják.



2.7. ábra. – Az érzékelési folyamat hatáslánca

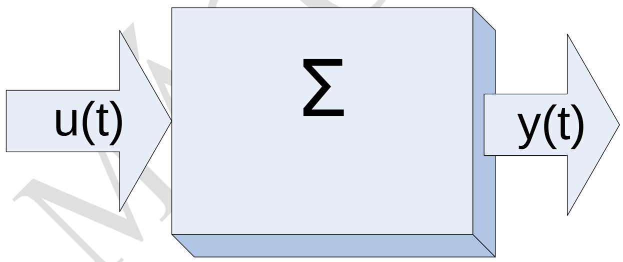
Az érzékelési folyamatra példa a hőmérséklet ellenállás-hőmérővel való mérése. A hőmérséklet mint állapotjelző, nem közvetíthető egy szabványos hírközlő csatornán keresztül. Ezért a rendszer egy adott pontjába egy ellenállás-hőmérőt helyezünk el, amelynek ellenállása a rendszer adott pontjának hőmérsékletével arányosan változik. Az ellenállás-hőmérő egy egyenáramú hídban helyezkedik el. Az ellenállás értéke arányosan változik a rendszer adott pontjának hőmérsékletével, vagyis a híd kimenő feszültségével. Ez a feszültség a helyszínen érzékelhető. Ha ezt az információt nem a helyszínen, hanem attól távolabb akarjuk felhasználni, a híd kimenőjelét úgy kell átalakítani, hogy az zavarmentesen legyen átvihető egy irányító berendezés felé. E célra egy mérő-átalakítót használnak, amelynek bemenőjele a híd feszültsége, a kimenőjele pedig 0-20mA-ig terjedő áramjel. Ez a jel már szabványos, és egy vezetékekből felépített hírközlő csatornán, vagyis a hőmérsékletről szerzett információ különböző fizikai mennyiségek változásán keresztül, (hőmérséklet → ellenállás → feszültség → áramerősség) eljuthat egy áramjelet fogadó irányító berendezéshez.

Az irányítástechnikában a hagyományos villamos, pneumatikus vagy hidraulikus jeleket mind több esetben váltják fel a számítástechnikában és számítógép-hálózatokban alkalmazott hírközlő, kódolt digitális jelek.
Az irányítástechnikában az alap érzékelőn (ellenállás-hőmérő, hőelem, piezo elektromos nyomásérzékelő, stb.) kívül az érzékelő és mérő-átalakító együttesét is érzékelőnek (szenzornak) nevezik. Nagyon fontos, hogy az érzékelőnek megfelelő pontosságúnak, megfelelő méréstartományúnak, lineárisnak, relatív gyorsnak és mindenképp megbízhatónak kell lennie.

3. A rendszer

A rendszereket viselkedésűk és az őket leíró matematikai modell alapján osztályozzuk. Egy rendszer több osztályba is tartozhat. Az osztályok gyakran ellentétpárokból állnak.

Az alábbiakban röviden bemutatásra kerülnek az osztályok. A rendszer szimbolikus jelölését az 1.3. ábra. mutatja.



1.3 ábra. – A rendszer szimbolikus jelölése

A Σ-val jelölt rendszer bemenő és kimenő jeleinek értékét a t pillanatban értelemszerűen $u(t)$ és $y(t)$ jelöli, míg $u(\cdot)$ és $y(\cdot)$ jelöli a teljes megfigyelhető jelet. És érvényes: $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t)$.

Az osztályok:

<u>Folytonos vagy diszkrét</u>

Amennyiben a rendszer bemenetén vagy kimenetén található jel időben folytonos akkor folytonos rendszerről beszélünk, de ha időben csak diszkrét értékekben van értéke akkor diszkrét rendszerről beszélünk. Tehát a folytonos és diszkrét meghatározás az időre vonatkozik. Folytonosidejű rendszer esetében az idő intervalluma $[a,b]$ vagy $\Re^1$, diszkrétidejű rendszernél pedig egy valós számsorozat, tipikusan $\{0,T,2T,3T,\ldots,nT,\ldots\}$, ahol T a mintavételi idő.

Példa folytonosidejű rendszerre: $y(t) = 3u(t - t_0),\ t_0 > 0$, Példa diszkrétidejű rendszerre: $y[n]=2u[n]+3u[n-1]$, ahol $y[n]$ az n-edik mintavételi időben a kimenet értéke. A fentivel egyenértékű leírás: $y[nT]=2u[nT]+3u[(n-1)T]$.

Kauzális vagy nem kauzális

A kauzális rendszernél (ok-okozati rendszernél) ok-okozati kapcsolat áll fenn annak bemenő és kimenő jelei között. Rájuk jellemző, hogy rendszer válasza egy t_0 időpontban csak az időpontot megelőző gerjesztésektől függ $t \le t_0$. Más szóval a kauzális rendszereknek nincs előrelátó képességük. A valós fizikai rendszerek kauzálisak. A nem kauzális rendszerek fizikailag nem reálisak. Ilyenek a jóslások és más prognosztikai, gondolati rendszerek. A mérnöki gyakorlat azonban alkalmazza a nem kauzális rendszereket is. A folytonos idejű rendszerek vizsgálatánál gyakran egyszerűbb matematikai tárgyalást biztosítanak. A diszkrétidejű rendszerek esetében a jelek memorizálhatók és valósidőn kívül feldolgozhatók. Itt megemlíthető a képfeldolgozás, a hangfeldolgozás, a meteorológia vagy más hasonló terület.
A kauzalitás fogalma kiterjeszthető a jelekre is. A kauzális jelek értéke $t<0$ esetén nullával egyenlő.
Példák kauzális rendszerekre:
Folytonosidejű: $y(t)=u(t-t_0),\ t_0>0$, diszkrétidejű: $y[n]=u[n]+u[n-1]$.
Példák nem kauzális rendszerekre:
Folytonosidejű: $y(t)=u(t+t_0),\ t_0>0$, diszkrétidejű: $y[n]=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}u[n-k]$.
Az utóbbi rendszert gyakran használják átlagképzésre.

Statikus vagy dinamikus

A statikus rendszer kimenete egy t_0 időpontban csak is kizárólag az abban a pillanatban jelentkező gerjesztéstől (bemenettől) függ. A statikus rendszereknek nincs memóriájuk. A statikus rendszerek viselkedése nem függ az időtől. A statikus rendszer algebrai vagy idő szerinti deriváltakat nem tartalmazó közönséges vagy parciális differenciálegyenletekkel írható le. A dinamikus rendszerek esetében egy adott időben gerjesztett kimenet értéke függ a múltbeli gerjesztésektől is. A dinamikus rendszerek energiatárolót(kat) tartalmazó rendszerek, vagyis memóriával rendelkező rendszerek. Matematikai modelljük olyan közönséges vagy parciális differenciálegyenletekkel adható meg, amelyekben szerepel idő szerinti derivált.

Koncentrált paraméterű vagy elosztott paraméterű

Koncentrált paraméterű rendszer esetében az elemeket paramétereik tekintetében idealizáltnak, kiterjedés nélkülinek tekintjük. Ilyen idealizált elem a tömegpont, amely bizonyos esetekben alkalmas egy bolygó figyelembevételére egy koncentrált paraméterű rendszeren belül. Az elosztott paraméterű rendszerben a paraméterek általában térben folytonos eloszlásban hatnak. Az elosztott paraméterű rendszerek matematikai modellje parciális differenciálegyenletekkel adható meg.

Homogén vagy nem homogén

Homogén rendszerre érvényes: $u(t)\xrightarrow{\Sigma}y(t)\Rightarrow Au(t)\xrightarrow{\Sigma}Ay(t)$, vagyis amennyiben a bemenetet megnöveljük A szorosára akkor a kimenet is A szorosra növekszik.
Példa homogén rendszerre: $y(t)=5u(t)$.

Példa nem homogén rendszerre: $y(t)=5u(t)+2$.

Additív vagy nem additív

Legyen $u_1(t)$ gerjesztésre egy rendszer válasza $y_1(t)$ és $u_2(t)$ gerjesztésre $y_2(t)$, akkor a két bemenet összegére $u_1(t)+u_2(t)$ a válasz a két kimenet összege $y_1(t)+y_2(t)$, tehát additív rendszerre érvényes:

$u_1(t)\xrightarrow{\Sigma} y_1(t), u_2(t)\xrightarrow{\Sigma} y_2(t) \Rightarrow (u_1(t)+u_2(t))\xrightarrow{\Sigma}(y_1(t)+y_2(t))$

Az additívitást igen jól szemlélteti a 1.4 ábrán látható jelleggörbe. Ha egy függvény leképezés az:

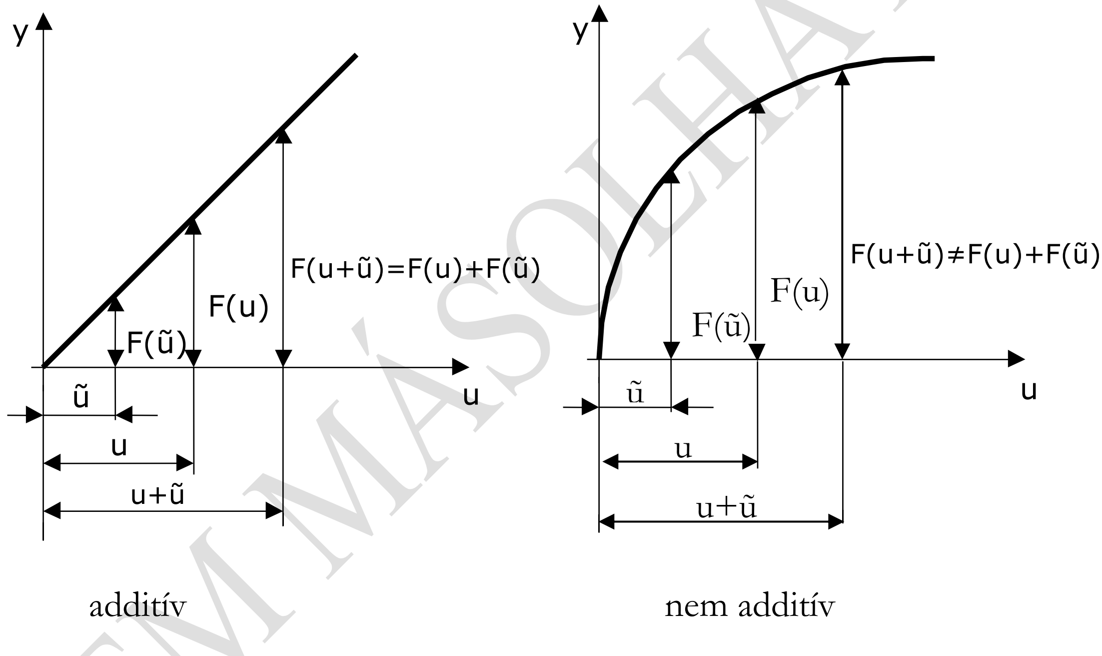
y(t) = F(u(t))

törvényszerűség szerint történik, akkor a modell aditív, ha

F(u+ũ) = F(u) + F(ũ)

és nem additív ha

F(u+ũ) ≠ F(u) + F(ũ)



1.4 ábra. Additív és nem additív jelleggörbék

Lineáris vagy nemlineáris

A lineáris rendszer egyszerre homogén és additív is.

Ezt a tulajdonságot szuperpozíciónak nevezzük. Vagyis

$u_1(t)\xrightarrow{\Sigma} y_1(t), u_2(t)\xrightarrow{\Sigma} y_2(t) \Rightarrow (Au_1(t)+Bu_2(t))\xrightarrow{\Sigma}(Ay_1(t)+By_2(t))$

Az egyenletek akkor lineárisak, ha a független változók (vagy annak deriváltjai) csak első hatványon és transzcendens függvények által történő leképezések nélkül fordulnak elő benne, egyébként nemlineárisak. Ha a linearitás valóban fennáll, akkor jelentősen leegyszerűsíti a rendszer viselkedésének elemzését. A valódi világ számos rendszere igen széles tartományban, legalábbis első közelítésben, lineáris.

Példa lineáris rendszerre: $a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=bu$

Példa nemlineáris rendszerre: $a_2 \dfrac{d^2y}{dt^2} + a_1\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + a_0 y^3 = bu$

A folytonos rendszerekhez hasonlóan, amennyiben a diszkrét rendszer egyszerre homogén és additív is akkor az lineáris diszkrétidejű rendszer.

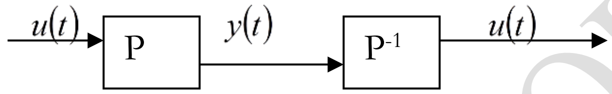
<u>Időinvariáns vagy idővariáns</u>

Ha a rendszer kapcsolatai és paraméterei időfüggetlenek, akkor a rendszer időinvariáns (autonóm). Időinvariáns rendszerek esetén egy adott gerjesztésre ugyanaz a válasz függetlenül attól, hogy az mikor lett alkalmazva. Vagyis $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t) \Rightarrow u(t-t_0) \xrightarrow{\Sigma} y(t-t_0)$.

Diszkrét rendszerek esetén pedig ha $x[n]$ bemenetre a válasz $y[n]$, akkor az időinvariáns rendszer válasza $x[n-n_0]$ bemenetre $y[n-n_0]$.

<u>Invertálható rendszer</u>

A rendszer invertálható ha annak kimenetéből egyértelműen meghatározható a bemenete. Más szóval a rendszernek létezik inverze amennyiben különböző gerjesztések különböző válaszokat generálnak.



Ez igaz diszkrét rendszerek esetében is. Például az $y[n_0] = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n]$ akkumulátorként is ismert rendszer inverze az $x[n_0] = y[n_0] - y[n_0 - 1]$ rendszer.

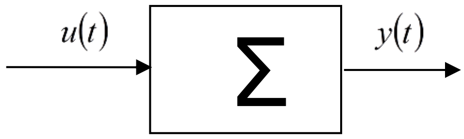
<u>Determinisztikus vagy sztochasztikus</u>

A determinisztikus rendszer független változói függvényekkel adhatók meg térben és időben. A sztochasztikus rendszer egyes független változói csak valószínűségszámítási összefüggésekkel írhatók le.

Dinamikus rendszerek állapota

A továbbiakban a dinamikus rendszerek állapotával foglalkozunk. Egy dinamikus rendszer állapotának nevezünk minden tetszőleges, jól meghatározott körülményt vagy tulajdonságot, amely felismerhető, ha újra előfordul.

A dinamikus rendszerek definíciója során Kalman, Falb és Arbib módszerét használjuk. Feltételezzük, hogy a rendszer teljes előélete bármilyen τ esetén leírható az $x(\tau)$ állapottal egészen τ időpontig. A rendszer bemenő jelének értéke egy t időpillanatban $u(t)$ a kimenő jel ugyanakkor $y(t)$.



6.1. ábra. A dinamikus rendszer szimbolikus ábrázolása

Általánosan a 6.1. ábra. szerint megadott dinamikus rendszer felírható egy többkomponensű struktúrával az alábbiak szerint:

$$\Sigma = (\Im, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, g) \quad (6.1)$$

A struktúra egyes elemei a következők:

$\Im$ az időpontok halmaza,

X az állapotok halmaza,

U a bemenet értékeinek halmaza,

Ω a megengedett bemenő jelek halmaza, $\Omega \subset \{u : \tau \to U\}$,

Y a kimenet értékeinek halmaza,

Γ a lehetséges kimenő jelek halmaza, $\Gamma \subset \{y : \tau \to Y\}$,

φ az állapotátmenet függvény, $\varphi : \tau \times \tau \times X \times \Omega \to X$,

g a kimenet leképezés függvény, $g : \tau \times X \times U \to Y$.

Ha a rendszer a τ pillanatban az x állapotban van és a bemenő jel $u(\cdot)$, akkor az állapot és a kimenet a t pillanatban $x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot))$ és $y(t) = g(t, x(t), u(t))$ módon adható meg.

Tehát általánosan egy rendszer állapota egy t pillanatban megadható a:

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) \quad (6.2).$$

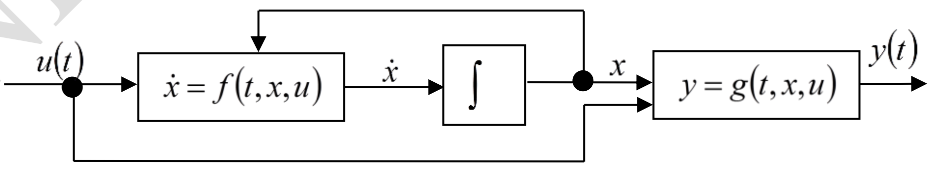
Speciális esetben, ha a rendszer **lineáris** akkor

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = \Phi(t, \tau)x + \Theta(t, \tau)u(\cdot) \quad (6.3)$$

az állapot megadható a kezdeti feltétel hatásából és a bemenő jel hatásából.

Egy másik speciális eset a **sima** rendszer. Sima rendszer esetében az állapotokat leképező leképezés $x(\cdot) = \varphi(\cdot, \tau, x, u(\cdot))$ folytonos, $x(\cdot) \in C^{(1)}$, tehát legalább egyszer differenciálható és így felírható a

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \quad (6.4)$$



6.2. ábra. Sima nemlineáris rendszer hatásvázlata

Tehát gyakorlati megközelítésből kijelenthetjük, hogy az egy és több bemenetű és kimenetű dinamikus rendszer leírására nemcsak a bemenőjelek és kimenőjelek alkalmasak, hanem a belső állapotváltozók és azok változásai is.

Az **állapotváltozók**on az időtől függő változóknak azt a legkisebb elemszámú halmazát értjük, amely a rendszer állapotának teljes és pontos leírásához szükséges és elegendő.

Tegyük fel, hogy egy villamos rezgőkör bemenő jele a kapocsfeszültség, kimenő jele az áram. Két energia felhalmozó elemet, a kondenzátort és az induktivitást tartalmazza. Ezért két független állapotváltozója lehet, például a kondenzátor feszültsége és az ellenállás feszültsége, vagy a kondenzátor töltése és árama. Hasonlóképpen egy mechanikai rezgőkör bemenő jele az erő, kimenő jele a sebesség, két állapotváltozója lehet, például a rugóerő és a csillapítóerő, vagy az elmozdulás és a sebesség. (Egyes állapotváltozók meg is egyezhetnek a kimenőjellel.) Az eddigiekből világosan kitűnik, hogy egy vizsgált rendszernek többféle állapotváltozója és így többféle egyenletrendszere képzelhető el, még akkor is, ha a bemenőjelek és a kimenőjelek adottak.
Az állapotváltozókból alkalmas módon egy vektort képezünk; az állapotvektort. Az átmeneti folyamatot egy elsőrendű vektor-differenciálegyenlet segítségével írjuk le. A bemenőjelből ugyancsak vektort képzünk, a bemenőjelek vektorát. Hasonlóképpen képezhető a kimenő jelek vektora, vagy röviden a kimenővektor. A 6.2. ábrán megadott rendszerre általánosan érvényes, hogy $x \in \Re^n$, $u \in \Re^r$, $y \in \Re^m$. n az állapotváltozók száma, r a bemenetek száma és m a kimenetek száma. Speciálisan ha $m = r = 1$ akkor a rendszer egybemenetű-egykimenetű (angolul single input-single output system SISO), máskülönben több bemenetű-több kimenetű (angolul multiple input-multiple output system MIMO) rendszerről beszélünk.
A harmadik speciális rendszer legyen a **sima lineáris** rendszer. A rendszert leíró egyenletek a következőképp alakulnak:

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = \Phi(t, \tau)x + \Theta(t, \tau)u(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, t, x(t), u_{[t, t+\Delta t]}) - \varphi(t, t, x(t), u_{[t, t+\Delta t]})}{\Delta t}$$

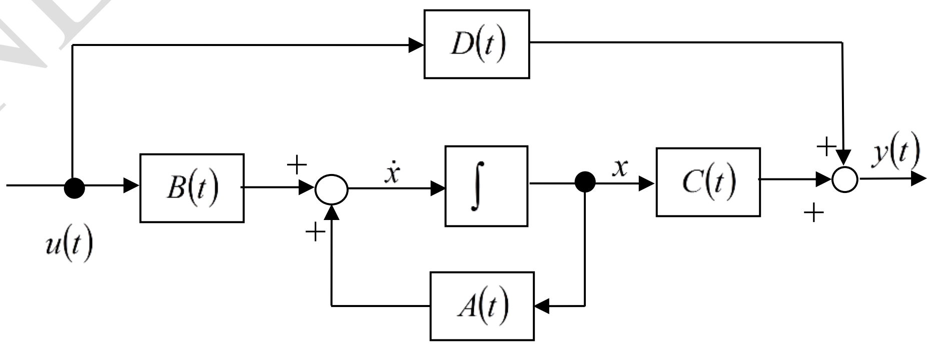
$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t + \Delta t, t) - \Phi(t, t)}{\Delta t} x(t) + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Theta(t + \Delta t, t) - \Theta(t, t)}{\Delta t} u_{[t, t+\Delta t]}$$

Az állapotegyenlet: $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, ... (6.5)

$x(\tau) = x$,

és a kimenet $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$, ... (6.6)

$x \in \Re^n$, $u \in \Re^r$, $y \in \Re^m$.



6.3. ábra. Sima lineáris rendszer hatásvázlata

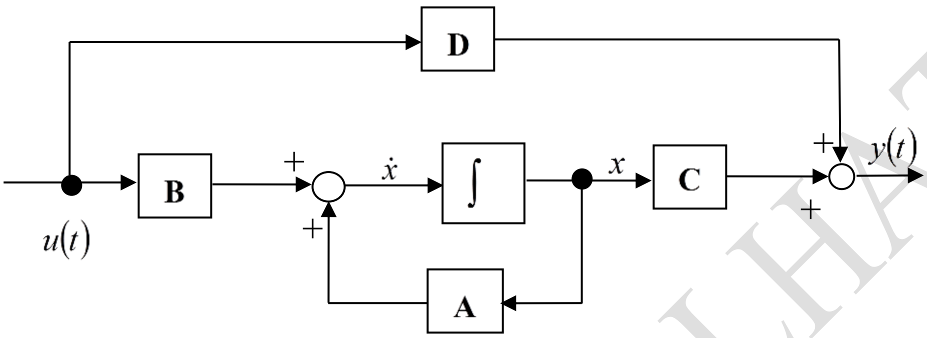
A 6.3. ábra. által meghatározott rendszer folytonosidejű időben változó lineáris rendszer ahol $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ és $\mathbf{D}(t)$ rendre $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$, $m \times r$ méretű időben változó elemeket tartalmazó mátrixok. A (6.5) állapotegyenlet megoldása $\mathbf{\Phi}(t,\tau)$ álapmátrix segítségével adható meg: $x(t)=\Phi(t,\tau)x+\int_{\tau}^{t}\Phi(t,\gamma)B(\gamma)u(\gamma)d\gamma$ (6.7)

És végül a negyedik speciális eset a **folytonosidejű időinvariáns lineáris rendszerek** (linear time invariant system LTI) leró egyenletei a következők:

Az állapotegyenlet: $\frac{dx(t)}{dt}=\dot{x}(t)=\mathbf{A}x(t)+\mathbf{B}u(t)$ .... (6.8)

$x(\tau)=x$,

és a kimenet $y(t)=\mathbf{C}x(t)+\mathbf{D}u(t)$ .... (6.9)



6.4. ábra. Lineáris időinvariáns rendszer hatásvázlata

Ebben az esetben a $\mathbf{\Phi}(t,\tau)$ alapmátrix az exponenciális mátrixból számítható: $\mathbf{\Phi}(t,\tau)=e^{A(t-\tau)}$. Az exponenciális mátrix definíciója: $e^{At}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!}$.

A (6.8) állapotegyenlet megoldása:

$x(t)=e^{A(t-\tau)}x+\int_{\tau}^{t}e^{A(t-\gamma)}Bu(\gamma)d\gamma$ .... (6.10)

Az összes lehetséges állapotvektornak halmaza az állapottér, az összes lehetséges bemenő vektorok halmaza a bemeneti tér, az összes lehetséges kimenővektorok halmaza a kimeneti tér. Általában ezek a terek i-dimenziós valós EUKLIDESZI-i terek.

Az állapotváltozókat egy-egy koordinátatengelyre felmérve absztrakt állapottér áll elő. Háromnál több állapotváltozóra a szokásos háromdimenziós euklideszi tér általánosításaként a több-dimenziós, ún. hipertér áll elő, míg a kétdimenziós állapotsík és az egydimenziós állapotegyenes az állapottér speciális esetének tekinthető. Az állapottérnek az a része, amelyben a rendszer állapotát meghatározó pont előfordulhat, az a megengedett állapotok tartománya. A dinamikus rendszerek vizsgálata és méretezése ebben az állapottérben végezhető el.

A rendszer állapota azt az egy adott időpontban megadott információt jelenti, amely ettől az időponttól kezdve a rendszer viselkedésének meghatározásához szükséges.

Minden rendszer nagyszámú és egymástól megkülönböztethető állapotba kerülhet. A rendszer állapotát bizonyos pontossággal meghatározhatjuk azoknak a belső jellemzőknek és kölcsönhatásoknak mértékrendszerben kifejezett értékeivel, amelyek a rendszer helyzetét (pl. távolság, szint), energia- és anyagjellemzőit (pl. hőmérséklet, nyomás, összetétel) és az egyéb információjellegű (pl. számláló állapota, megtett fordulatok száma) állapotát mutató értékek határozzák meg. Az állapotváltozók értékeit a *t* időpontban az $x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots x_n(t)$ időfüggvényekkel és az

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad x(t)\in R^n \qquad (1.1)$$

állapotvektor felhasználásával rendszerezzük. Az állapotvektor egy tetszőleges *t* időpontra meghatározza a rendszer pillanatnyi állapotát. Ha az állapotvektor elemeinek értékeit két egymástól különböző időpontban vizsgáljuk ($t_1 \neq t_2$), akkor az állapotvektor értékeinek megváltozásából meghatározhatjuk a rendszer által elvégzett „mozgás" mértékét és jellegét.

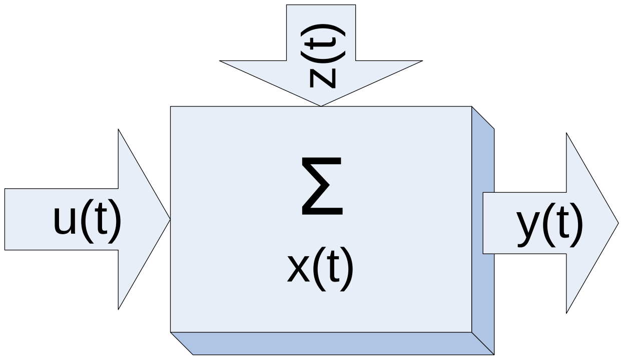
A mozgás fogalmát a mechanikában a szó szoros értelmében használják, és ez azt jelenti, hogy a test időben változtatja helyzetét. A továbbiakban mozgásnak nevezzük az elem állapotjellemzőinek mindenfajta időbeli változását. Mozgásnak nevezzük például a test hőmérsékletének, a kondenzátor töltésének, egy bankszámla végösszegének, a raktáron lévő nyersanyagnak a változását, sőt a mozgás meghatározott, bár igen bonyolult formáinak kell tekintenünk az olyan folyamatokat is, mint például az élet és a gondolkodás.

A rendszer mozgása – állapotváltozása – történhet külső hatásokra vagy a rendszeren belül lejátszódó folyamatok hatására is. A rendszerrel való minden kölcsönhatás, érintkezés a rendszer bizonyos tulajdonságainak, állapotának megváltozását vonja maga után. A tulajdonságok változásait az állapotjellemzők változásai révén figyeljük meg.

Szigorúan véve, minden rendszert végtelen számú külső hatás ér, de korántsem lényeges mindegyikük. Így nyilvánvaló, hogy a Hold vonzása nem lényeges egy autónak a Földhöz viszonyított mozgására, bár elvben ez a hatás létezik. A külső hatások halmazából csak azokat választjuk ki, amelyek a feladat adott körülményei között lényegesek a rendszer állapotára. Ezt nevezzük lényegkiemelésnek. Ezen külső hatásokat bemenő jellemzőknek (vagy bemenő hatásoknak), a rendszer bemenő változásának, míg a rendszernek azon elemeit, amelyekre a bemenő hatások hatnak, a rendszer bemenetének nevezik.

A bemenő hatások két csoportját különböztetjük meg: az irányító és a zavaró hatásokat. Az irányító hatások értékeit a rendszer működése közben módosítani tudjuk (pl. egy tartályba vezető szelep állítása, a motor táplálásának átkapcsolása,…). Ez a módosítás annak érdekében történik, hogy a rendszerben elindítsunk bizonyos folyamatokat, megvalósíthassuk annak legelőnyösebb mozgását és leállítsuk az elindított folyamatot.. A zavaró bemenő hatások az irányító által nem módosíthatók. A zavaró hatások nemcsak külső eredetűek lehetnek, hanem létrejöhetnek a rendszeren belül is, például az elemek tulajdonságainak hosszabb működés után bekövetkező változása miatt (öregedés, szigetelési tulajdonságok vesztése stb.).

A rendszernek a környezetére gyakorolt hatását a kimenő mennyiségek (vagy kimenő hatások) leegyszerűsítve kimenetek határozzák meg. A kimeneti hatás változását a módosító vagy zavaró hatások hozzák létre. Az 1.5 ábrán látható vázlatosan egy rendszer és a hozzátartozó módosított bemenő u(t), zavaró z(t), állapot x(t) valamint kimenő y(t) jellemzők vektorai.



1.5 ábra – A rendszer és jellemzői

Az állapotok, kimenetek, irányító és zavaró hatások közötti összefüggések a valós rendszereknél gyakran igen bonyolultak. Ha ezen összefüggéseket megfosztjuk a fizikai mivoltuktól, absztrakt rendszereket kapunk. Az így kapott összefüggések nem mindig egyértelműek, és ezért a rendszer matematikai leírása egy reláció és nem egy függvény vagy operátor.

Mivel a legkülönbözőbb rendszerek mozgási törvényszerűségeiben sok közös vonás van, különösen a bennük lezajló változások irányítása szempontjából, nem mindig célszerű konkrét rendszerek mozgásának törvényszerűségeit tanulmányozni, hanem áttérhetünk elvont és általánosított, vagyis absztrakt irányítási rendszerek tanulmányozására is. Az így szerzett eredményeket azután sikeresen alkalmazhatjuk a valós irányítási feladatok megoldásában.

Azok a rendszerek, amelyeknek a bemenetei között irányított bemenetek is találhatók, irányított rendszerek. Az irányított rendszer egyik jellegzetes tulajdonsága az, hogy különböző irányító hatások következtében, képes mozgását megváltoztatni. Ha irányított rendszerről van szó, mindig megtalálható a cselekvések olyan összessége, amelyek közül az adott esetben kiválasztható a legelőnyösebb (optimális). Ahol erre a választásra nincs mód, ott nincs és nem is lehet szó irányításról.

Egy rendszer mozgását tekinthetjük úgy is, mint állapotai átalakulásának kapcsolatát. Bármely rendszer állapotának változása azonban nem valósítható meg az alkotóelemeiben végbemenő anyag, energia vagy információ átalakulási vagy átviteli folyamatai nélkül. Így egy test hőmérsékletének változása kapcsolatban van belső energiájának változásával, egy tartályban a folyadékszint megváltozásához szükség van a benne levő folyadék mennyiségének megváltoztatására.

Ha a rendszer állapotának változása egy pillanat alatt lefolyhatna, ez azt jelentené, hogy a benne levő anyag és energia mennyisége végtelenül kis idő alatt, véges mennyiséggel változna. Ehhez arra lenne szükség, hogy az anyag- vagy energiaáramlás intenzitása a rendszer egyes elemein keresztül végtelenül nagy értéket vegyen fel, ami lehetetlen. Egy valós rendszer állapota tehát nem változhat pillanatszerűen, hanem véges idő alatt, az úgynevezett átmeneti folyamat eredményeképpen.

Azok a rendszerek, melyeknek állapotváltozásai nem egy pillanat alatt zajlanak le, hanem egy átmeneti folyamat eredményei, dinamikus rendszerek. Az eddigiekből kitűnik, hogy szigorú értelemben véve, minden valós rendszer, dinamikus rendszer. Azokban az esetekben, amikor az átmeneti folyamat tartalma lényegtelenül kicsi a vizsgált jelenség időtartamához képest, és az átmeneti jelenség lefolyásának jellege nem gyakorol lényeges befolyást a rendszer viselkedésére, elhanyagolhatjuk a vizsgált rendszer dinamikus tulajdonságát, és úgy tekinthetjük, hogy állapotváltozásai egy pillanat alatt követik az őket kiváltó okokat.

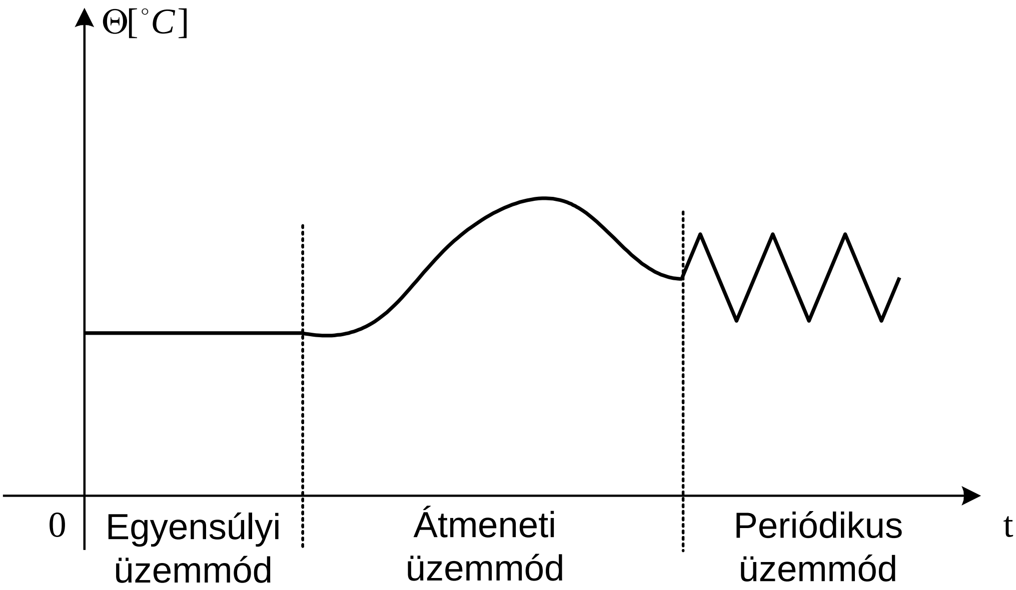
Egy dinamikus rendszer működésének három alapvető módja van: egyensúlyi vagy állandósult, átmeneti és periodikus.

Azt mondjuk, hogy a rendszer egyensúlyi vagy állandósult üzemmódban van, ha állapota nem változik az időben.

Átmeneti üzemmódnak nevezzük a dinamikus rendszer mozgásának azt az üzemmódját, amikor egy bizonyos kiinduló helyzetből, egy állandósult egyensúlyi vagy periodikus üzemmódba törekszik. Átmeneti üzemmód jelenhet meg a rendszerben a külső hatások változásának vagy a rendszer belső tulajdonságainak megváltozása következtében.

Periodikus üzemmód esetén, a rendszer egyenlő időközönként, ugyanabba az állapotba kerül.

Az 1.6 ábrán egy hőmérsékletváltozás egyensúlyi, átmeneti és periodikus üzemmódját tüntettük fel.



1.6 ábra – A dinamikus rendszer üzemmódjai

A rendszer üzemmódjainak meghatározásával és megalkotásával kapcsolatosan igen sok kérdés merül fel, amelyekre felelet csak a rendszer alapos vizsgálata után, a kapott adatok részletes minőségi és mennyiségi elemzésével adhatunk. Az itt fellépő feladatokat két alapvető osztályba soroljuk:

1. A rendszeranalízis azt vizsgálja, hogy ha a rendszer felépítése (struktúrája) és paraméterértékei előre adottak, akkor ezekből kiindulva, hogyan állapítható meg a rendszer viselkedése és tulajdonságai.

2. A rendszerszintézis azzal foglalkozik, hogy a rendszertől megkövetelt tulajdonságokból kiindulva, hogyan kell a rendszer struktúráját kialakítani és paramétereinek értékeit meghatározni.

A rendszer tulajdonságait meghatározhatjuk akár valódi kísérletezéssel nyert adatok feldolgozása útján (indentifikáció), akár a rendszer működési folyamatának számítógépen végzett lejátszása és feldolgozása (szimuláció) segítségével.

Ahhoz azonban, hogy egy kísérleti megfigyelés alapján tanulmányozzuk a rendszert legalább a következő követelményeknek kell eleget tennünk:

1. A kísérleti megfigyelés célját alkotó feladatok megoldásához a rendszer működési feltételeit elég széles körben változtathatjuk.

2. Mód van arra, hogy a szükséges információt jelentősebb kiadások nélkül, a megfelelő berendezéseken felfogjuk és összegyűjtsük.

3. A működési feltételek változása a kísérleti megfigyelés folyamán, nem idéz elő jelentős veszteségeket, baleseteket avagy más nem kívánatos következményeket.

A valós rendszereket célszerű az egyes elemekre vonatkozóan végzett szimulációk együttes alkalmazásával vizsgálni.

<ins>Memóriával rendelkező diszkrét rendszer</ins>

Diszkrét rendszerre akkor mondjuk, hogy memóriával rendelkezik ha egy adott pillanatban jelentkező kimeneti érték nemcsak az akkor ható bemeneti értéktől függ, hanem az azt megelőző értékektől is.
Példa memóriával nem rendelkező rendszerre: $y[n] = x^2[n]$.

Példa memóriával rendelkező rendszerre: $y[n_0] = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n]$, amely rendszert akkumulátornak is szoktak nevezni.