Állapottér módszer

Jelölések: $(\tau, \underline{x})$ ← esemény – a Σ τ pillanatban $\underline{x}$ állapotban van.

$$(\tau, x) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, x(t))$$

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) \quad \rightarrow \text{ nemlineáris rendszer}$$

$$x(t) = \phi(t,\tau)x + \int_{\tau}^{t} \phi(t,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta$$

↳ idővariáns lineáris

$$x(t) = e^{A(t-\tau)} \cdot x + \int_{\tau}^{t} e^{A(t-\theta)} \cdot B \cdot u(\theta)\, d\theta$$

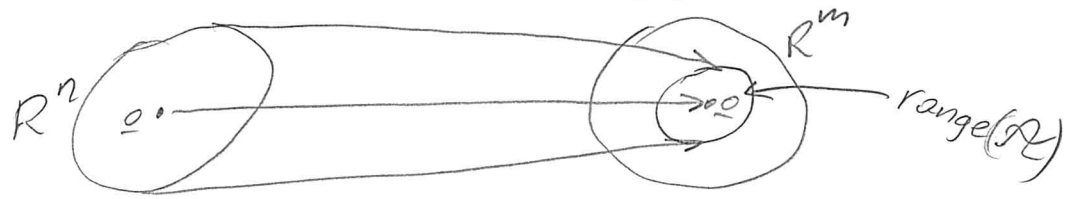
↳ időinvariáns lineáris

$\underline{x} \in R^n$; $u \in R^r$; $\underline{y} \in R^m$

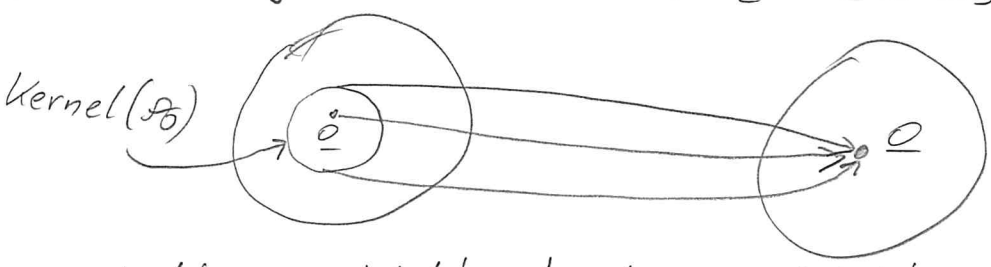
Lineáris algebrából tudjuk, hogy:

$\mathcal{A}: R^n \rightarrow R^m$ egy lineáris leképezés, melynek mátrixa $\underline{\underline{A}} \in R^{n \times m}$. $\underline{y} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$; $y = \mathcal{A}(x)$

A leképezés képtere: $\text{range}(\mathcal{A}) = \{ y = A \cdot x : x \in R^n \} \subset R^m$



A leképezés magtere: $\text{kernel}(\mathcal{A}) = \{ x : \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{0} \} \subset R^n$



R^m felbontható a képtérnek és a képtér ortogonális kiegészítőjének direkt összegére:

$$R^m = \text{range}(\mathcal{A}) + \text{range}(\mathcal{A})^{\perp}$$

Ortogonális kiegészítő: mely elemekkel a skalárszorzat $\emptyset$.

Speciálisan ha $\mathcal{A}: R^n \to R^n$ és $A = A^T$ akkor

$\text{range}(\mathcal{A})^{\perp} = \text{kernel}(\mathcal{A})$ és R^n felírható:

$$R^n = \text{range}(\mathcal{A}) + \text{kernel}(\mathcal{A})$$

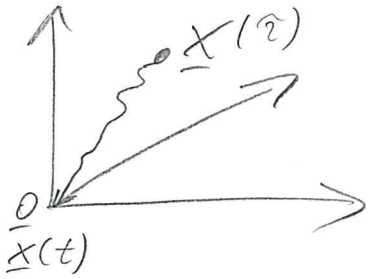
Érvényes: $\langle A \cdot x, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$

<u>Irányíthatóság</u>

"Kalman, Falb, Arbib: Topics in mathematical system theory 1969"

- A Σ (τ, x) eseménye <u>nulla állapotba irányítható</u> ha létezik véges $t \geq \tau$ időpont és $u: [\tau, t) \to R^r$ irányítás, hogy $x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = 0$

Tehát $(\tau, x) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, 0)$



- A rendszer (Σ) a τ <u>időpontból teljesen a nulla állapotba irányítható</u>, ha minden $x \in R^n$ állapot esetén a (τ, x) esemény a nulla állapotba irányítható.

- A rendszer <u>teljesen a nulla állapotba irányítható</u> ha minden τ időpontból teljesen a nulla állapotba irányítható.

Az Elérhetőség meghatározása

- Legyen Σ a τ pillanatban nulla állapotban. A rendszer x állapota $(\tau, 0)$ eseményből elérhető, ha létezik véges $t \geq \tau$ időpont és $u : [\tau, t) \to R^r$ irányítás, hogy $x(t) = \varphi(t, \tau, 0, u(\cdot)) = x$.

$$(\tau, 0) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, x).$$

- A rendszer a τ pillanatból és a nulla állapotból <u>teljesen elérhető</u>, ha minden $x \in R^n$ állapota a $(\tau, 0)$ eseményből elérhető.

- A rendszer a nulla állapotból <u>teljesen elérhető</u>, ha minden τ időpontból a nulla állapotból teljesen elérhető.

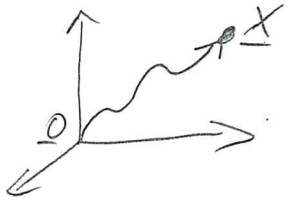
Az irányíthatóság és elérhetőség feltételei időben változó lineáris rendszerek esetén.

(τ, x) -irányítható akkor:

$$0 = \phi(t, \tau)x + \int_\tau^t \phi(t, \theta) B(\theta) u(\theta) d\theta =$$

$$= \phi(t, \tau) \Big\{ \underbrace{x + \int_\tau^t \phi(\tau, \theta) B(\theta) u(\theta) d\theta}_{=0} \Big\} \Longleftrightarrow$$

$$x = -\int_\tau^t \phi(\tau, \theta) B(\theta) u(\theta) d\theta \qquad \text{---------- [1]}$$



Definiáljunk egy új mátrixot, az úgynevezett irányíthatósági Gram-mátrixot:

$$\boxed{P(\tau,t)=\int_{\tau}^{t}\phi(\tau,\theta)B(\theta)B^T(\theta)\phi^T(\tau,\theta)\,d\theta}$$

A Gram mátrix tulajdonságai:

1.) $P: R^n \to R^n$

2.) $P=P^T$

3.) pozitív szemidefinit
(a kvadratikus alakja ≥ 0)

$$\langle x, Px\rangle = \langle x, \int_{\tau}^{t}\phi(\tau,\theta)B(\theta)B^T(\theta)\phi^T(\tau,\theta)\,d\theta \cdot x\rangle$$

| Kvadratikus alak: $\langle A\cdot x, x\rangle = \sum a_{ij}x_i\cdot x_j$ |

$$\langle x, P\cdot x\rangle = \int_{\tau}^{t}\| B^T(\theta)\cdot\phi^T(\tau,\theta)\cdot x\|^2 d\theta \geq 0$$

4.) $R^n = \text{range}(P) + \text{kernel}(P)$

<u>Lemma</u>: Ha $\boxed{x \in \text{kernel}(P)}$, akkor

$$\boxed{B^T(\theta)\cdot\phi^T(\tau,\theta)\cdot x \equiv 0}$$

Bizonyítás: ha $x \in \text{kernel}(P)$ akkor $P\cdot x = 0$

$$0=\langle 0, x\rangle = \langle P\cdot x, x\rangle = \int_{\tau}^{t}\| B^T(\theta)\cdot\phi^T(\tau,\theta)\cdot x\|^2 d\theta$$

<u>Tétel</u>: A (τ, x) esemény a nulla állapotba irányítható $\Longleftrightarrow$ létezik $t \geq \tau$ hogy $x \in \mathrm{range}(P(\tau, t))$.

Bizonyítás:

i. Tegyük fel, hogy $x \in \mathrm{range}(P(\tau,t))$

Akkor $\exists \hat{x}$, hogy $x = \mathrm{range}(P(\tau,t) \cdot \hat{x})$.

Legyen $u(\theta) = -B^T(\theta)\Phi^T(\tau,\theta)\hat{x}$, akkor

$$x(t) = \Phi(t,\tau)x - \int_\tau^t \Phi(t,\theta)B(\theta)B^T(\theta)\Phi^T(\tau,\theta)\hat{x}\,d\theta$$

$$= \Phi(t,\tau)\left\{x - \int_\tau^t \Phi(\tau,\theta)B(\theta)B^T(\theta)\Phi^T(\tau,\theta)d\theta\,\hat{x}\right\}$$

$$= \Phi(t,\tau)\left\{x - P(\tau,t)\hat{x}\right\} = 0$$

ezért a rendszer $u(\cdot)$ irányítással nullába irányítható

ii. Tegyük fel, hogy $(\tau, x) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, 0)$.

$$R^n = \underbrace{\mathrm{range}(P)}_{x_1 \in \mathrm{range}(P)} + \underbrace{\mathrm{kernel}(P)}_{x_2 \in \mathrm{kernel}(P)} \text{ miatt } \quad x = x_1 + x_2 = P \cdot \hat{x}_1 + x_2$$

$$(\tau, P \cdot \hat{x}_1 + x_2) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, 0)$$

$$(\tau, P\hat{x}_1) \xrightarrow{-B^T(\theta)\Phi^T(\tau,\theta)\hat{x}_1} (t, 0) \quad \ldots\ldots (i)\text{-ből}$$

[1] ból $x = -\int_\tau^t \Phi(\tau,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta$

$$x = P\hat{x}_1 + x_2 = -\int_\tau^t \Phi(\tau,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta$$

$$\underline{P \cdot \hat{x}_1} = \int_\tau^t \Phi(\tau,\theta)B(\theta)B^T(\theta)\Phi^T(\tau,\theta) \cdot \hat{x}_1\,d\theta \qquad \ominus$$

$$P\hat{X}_1 + X_2 - P\cdot\hat{X}_1 = -\int_\tau^t \phi(\tau,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta - \int_\tau^t \phi(\tau,\theta)B(\theta)B^T(\theta)\phi^T(\tau,\theta)\cdot\hat{X}_1 d\theta$$

$$X_2 = -\int_\tau^t \phi(\tau,\theta)B(\theta)\left\{u(\theta) + B^T(\theta)\phi^T(\tau,\theta)\hat{X}_1\right\}d\theta$$

$X_2 \in \text{kernel}(P)$ és a Lemma szerint $B^T(\theta)\phi^T(\tau,\theta)\cdot X_2 = 0$

$$u_2(\theta) = u(\theta) + B^T(\theta)\phi^T(\tau,\theta)\hat{X}_1$$

$$X_2 = -\int_\tau^t \phi(\tau,\theta)B(\theta)u_2(\theta)d\theta$$

$$\|X_2\|^2 = \langle X_2, X_2\rangle = \left\langle X_2, -\int_\tau^t \phi(\tau,\theta)B(\theta)u_2(\theta)d\theta\right\rangle$$

T T

$$\|X_2\|^2 = -\int_\tau^t \langle \underbrace{B^T(\theta)\cdot\phi^T(\tau,\theta)\cdot X_2}_{=0}, u_2(\theta)\rangle d\theta$$

$\|X_2\|^2 = 0$; $X_2 \in \text{kernel}(P)$; $X_2 = 0$

Ezért $X = X_1 = P\hat{X}_1 \in \text{range}(P)$

Elérhetőség

$$(\tau, 0) \xrightarrow{u(\cdot)} (t, x)$$

$$x(t) = \phi(t,\tau)x + \int_\tau^t \phi(t,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta \quad / x=0$$

$$x(t) = \int_\tau^t \phi(t,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta$$

Elérhetőségi Gram mátrix

$$\boxed{\tilde{P}(\tau,t) \overset{def.}{=} \int_\tau^t \phi(t,\theta)B(\theta)B^T(\theta)\phi^T(t,\theta)d\theta}$$

$\tilde{P}: R^n \to R^n$; $\tilde{P} = \tilde{P}^T$; pozitív szemi definit

$R^n = \text{range}(\tilde{P}) + \text{kernel}(\tilde{P})$

Tétel: A (t,x) esemény elérhető a nulla állapotból $\Leftrightarrow$ létezik véges $\tau \leq t$ hogy $x \in \text{range}\, \tilde{P}(\tau,t)$.

Bizonyítás hasonló az irányíthatósághoz

$x = \tilde{P}(\tau,t)\hat{x}$; $u(\theta) = B^T(\theta)\phi^T(t,\theta)\hat{x}$

Irányíthatóság és elérhetőség LTI rendszerek esetében

időinvariáns ezért választható $\tau = 0$.

Irányíthatósági Gram mátrix:

$$P(0,t) = \int_0^t \phi(0,\theta) B B^T \phi^T(0,\theta)\, d\theta = \int_0^t e^{-A\theta} \cdot B \cdot B^T e^{-A^T\theta}\, d\theta$$

Tétel: Ei LTI rendszer esetén

$$\text{range}\, P(0,t) = \text{span}\{B, A\cdot B, \dots, A^{n-1}\cdot B\}.$$

/span – a vektorok által kifeszített tér, itt oszlop vektorok/

Bizonyítás: Legyen $L \overset{def}{=} \text{span}\{B, A\cdot B, \dots, A^{n-1}\cdot B\}$

L egy altér R^n-ben ; $R^n = L + L^\perp$

$R^n = \text{range}(P(0,t)) + \text{kernel}(P(0,t))$

Megmutatjuk hogy: $L = \text{range}(P(0,t))$ és $L^\perp = \text{kernel}(P(0,t))$, $\forall t$ esetén.

- Tegyük fel hogy $x \in L^\perp$ és $t > 0$

Mivel $x \perp L$ ezért $\langle P\cdot x, x\rangle = 0$

$$\left\langle \int_0^t e^{-A\theta} B \cdot B^T \cdot e^{-A^T\theta} \cdot x\, d\theta, x \right\rangle = 0$$

$$\int_0^t \left\langle B^T e^{-A^T\theta} \cdot x, B^T \cdot e^{-A^T\theta} \cdot x \right\rangle d\theta = 0$$

$$B^T e^{-A^T\theta} \cdot x = 0 \Rightarrow x \in \text{kernel}(P(0,t))$$

Ahonnan következik, hogy $L^{\perp} \subset \text{kernel}(P(0,t))$

Tegyük fel hogy $x \in \text{kernel}(P(0,t))$

A Lemma szerint $B^T \Phi^T(0,\theta) \cdot x = 0$

transzponálós után: $x^T e^{-A\theta} B = 0^T$ ezt i szer deriválva

$$x^T (-A)^i e^{-A\theta} \cdot B = 0^T, \ \forall i$$

$$\theta = 0 \Rightarrow x^T \cdot A^i \cdot B = 0^T$$

ezért $\text{kernel}(P(0,t)) \subset L^{\perp}$

Tehát $\text{kernel}(P(0,t)) = L^{\perp}, \ \forall t$

ezért $\text{range}(P(0,t)) = L, \ \forall t$ esetén.

<u>Tétel</u>: Folytonosidejű időinvariáns rendszer tetszőleges $t>0$ idő alatt teljesen a nulla állapotba irányítható $\Leftrightarrow$ $L = \text{span}\{B, A \cdot B, \dots, A^{n-1}B\} = R^n$, vagy ami ezzel ekvivalens, az $M_c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ esetében

- $\text{rank}(M_c) = n = \dim(x)$.
- $R^n = \text{range}(P(0,t))$
- $R^n = L$
- $\det(M_c) \neq 0$
- $\text{rank}(A - \lambda_i I, B) = n$ az A mátrix minden λ_i sajátértékére $i = 1, \dots, n$ (Hautus-féle feltétel)

Elérhetőség FI MIMO LTI rendszer esetén

Tétel: FI LTI rendszer esetén

$$\mathrm{range}(\tilde{P}(0,t)) = \mathrm{span}\{B, A\cdot B, \dots, A^{n-1}B\}$$

Tétel: FI LTI rendszer nulla állapotból tetszőleges $t>0$ idő alatt teljesen elérhető $\Leftrightarrow$

$$L \overset{def}{=} \mathrm{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = R^n \quad \text{vagyis}$$

$$\mathrm{rank}\,[B, AB, \dots, A^{n-1}\cdot B] = n = \dim x$$

A FI LTI rendszerek esetében a teljesen irányítható rendszer egyúttal teljesen elérhető is, és fordítva.

Tétel: Az $\hat{x} = T\cdot x$ koordináta-transzformáció hatására az irányíthatósági mátrix és az irányíthatósági Gram-mátrix az alábbiak szerint módosul:

$$\hat{M}_c = T\cdot M_c$$

$$\hat{P}(0,t) = T\cdot P(0,t)\,T^T.$$

FI LTI rendszer irányíthatósági

Lépcsős alakja

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot u.$$

$$R^n = L + L^{\perp}; \quad X = X_a + X_b \; ; \; X_a \in L \; ; \; X_b \in L^{\perp}$$

controllability staircase form:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ 0 & A_{bb} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_a \\ 0 \end{pmatrix} u$$

az irányítás nem hat az $X_b \in L^{\perp}$ állapotokra.

$$\dot{X}_a = A_{aa} \cdot X_a + A_{ab} \cdot X_b + B_a \cdot u$$

$$\dot{X}_b = A_{bb} \cdot X_b$$ – nem hat rá az u még közvetve sem (X_a-n keresztül)

<u>Tétel</u>: Az időinvariáns lineáris rendszer irányíthatósági lépcsős alakjában a nem irányítható altérhez tartozó A_{bb} mátrix sajátértékei nem mozdíthatók ki állapot visszacsatolással.

$$u = -K \cdot X = -[K_a \;\; K_b]\begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} = -K_a \cdot X_a - K_b \cdot X_b$$

$$\dot{X} = A \cdot X - B \cdot K \cdot X \implies \dot{X} = (A - B \cdot K) \cdot X$$

$$B \cdot K = \begin{bmatrix} B_a \cdot K_a & B_a \cdot K_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = A - B \cdot K = \begin{bmatrix} A_{aa} - B_a \cdot K_a & A_{ab} - B_a \cdot K_b \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - \tilde{A}) = \det(sI_a - (A_{aa} - B_a K_a)) \cdot \det(sI_b - A_{bb})$$

- Választható $K_b = 0$
- A_{aa} sajátértékei módosíthatók ÁV-al.
- A_{bb} sajátértékei nem módosíthatók ÁV-val.
- Csak stabil A_{bb} esetén stabilizálható az instabil rendszer!

F1 Lineáris rendszer megfigyelhetősége
rekonstruálhatósága

$x(\tau)=X$ állapot megfigyelhető ha meghatározható a rendszer bemenő és kimenő jelének megfigyelésből a $[\tau, t]$ időintervallumban, a τ hoz képest jövőbeli $y(\theta)$ és $u(\theta)$ megfigyelésekből.

Ha viszont $x(t)=X$ meghatározható a t-hez képest múltbeli $y(\theta)$, $u(\theta)$, $\theta \leq t$ megfigyelésekből, akkor az $x(t)=X$ állapotot rekonstruálhatónak fogjuk nevezni.

Megfigyelhetőségi Gram-mátrix

$$Q(\tau,t) \stackrel{def}{=} \int_{\tau}^{t} \Phi^T(\theta,\tau)\, C^T(\theta)\, C(\theta)\, \Phi(\theta,\tau)\, d\theta$$

$Q: R^n \to R^n$; $Q=Q^T$; pozitív szemidefinit

$$R^n = \text{range}(Q) + \text{kernel}(Q)$$

Ha $Q(\tau,t)$ invertálható lenne, akkor a maghoz csak nulla vektorból állna, akkor a keresett x állapot is meghatározható lenne

$$X = Q^{-1}(\tau,t) \int_{\tau}^{t} \Phi^T(\theta,\tau)\, C^T(\theta)\, y(\theta)\, d\theta .$$

X – meghatározható a jövőbeli adatokból

Rekonstruálhatósági Gram-mátrix

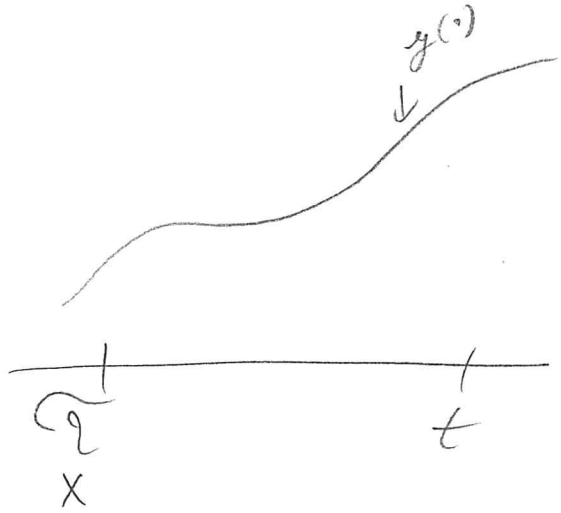
$$\tilde{Q}(\tau,t)=\int_{\tau}^{t}\Phi^T(\theta,t)\,C^T(\theta)\,C(\theta)\,\Phi(\theta,t)\,d\theta$$

$\tilde{Q}: R^n \to R^n$; $\tilde{Q}=\tilde{Q}^T$; poz. szem. def.

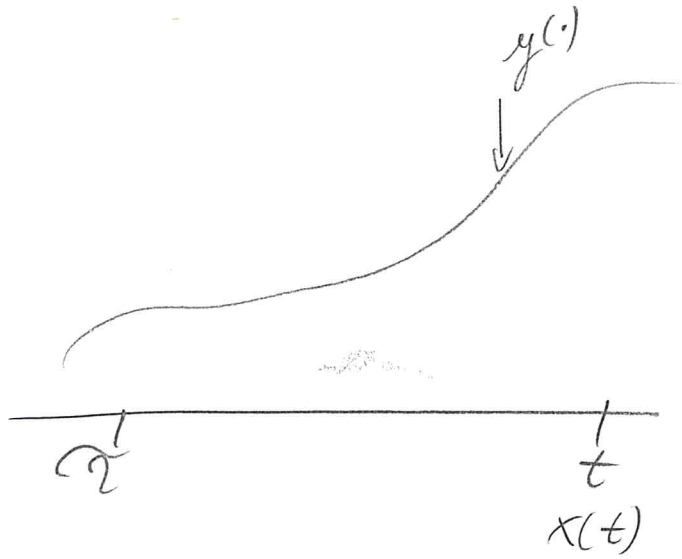
$$R^n = \mathrm{range}(\tilde{Q}) + \mathrm{Kernel}(\tilde{Q})$$

Ha $\tilde{Q}(\tau,t)$ invertálható akkor a keresett x végállapot meghatározható:

$$x = \tilde{Q}^{-1}(\tau,t)\int_{\tau}^{t}\Phi^T(\theta,t)\,C^T(\theta)\,y(\theta)\,d\theta$$



x megfigyelhető ha meghatározható jövőbeli kimenőjel adatokból



$x(t)$ rekonstruálható, ha meghatározható a múltbeli kimenőjel adatokból

FI LTI rendszerek megfigyelhetősége

$$Q(0,t)=\int_0^t e^{A^T\theta}\cdot C^T\cdot C\cdot e^{A\theta}\,d\theta$$

A következő állítások igazak:

Ha (A,C) teljesen megfigyelhető akkor teljesen rekonstruálható is.

$$M_o=\begin{bmatrix} C \\ C\cdot A \\ \vdots \\ C\cdot A^{n-1}\end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank}(M_o)=n=\dim(x)$$

A megfigyelhetőség feltétele.

Dualitás $M_{c\,II}=[C^T, A^T\cdot C^T, \dots, (A^T)^{n-1}\cdot C^T]$; $\operatorname{rank}(M_{c\,II})=n$

A megfigyelhetőségi lépcsős alak

$R^n=L+L^\perp$, $x=x_a+x_b$; $x_a\in L$; $x_b\in L^\perp$

Observability staircase form:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_a\\ \dot{x}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{aa} & 0\\ A_{ba} & A_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_a\\ x_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_a\\ B_b\end{bmatrix}u,$$

$$y=[C_a \quad 0]\begin{bmatrix}x_a\\ x_b\end{bmatrix}+Du.$$

Teljesrendű lineáris állapotmegfigyelő

$\hat{x}$ – becsült állapot

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + G\cdot y + H\cdot u \qquad \dim(\hat{x}) = \dim(x) = n$$

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad \text{elvárt} \quad \lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= C\cdot x \end{aligned}}$$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A\cdot x + B\cdot u - F\hat{x} - G\cdot C\cdot x - H\cdot u + (Fx - Fx)$$

$$= (A - G\cdot C - F)x + (B - H)u + F(x - \hat{x})$$

az állapotbecslő konvergál ha:

$F = A - G\cdot C$; $H = B$; $\dot{\tilde{x}} = F\cdot\tilde{x}$ stabil és gyors.

$$G = [G_a^T \; G_b^T]^T$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_a \\ \dot{\tilde{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} - G_a C_a & 0 \\ A_{ba} - G_b C_a & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_a \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix}$$

$$\varphi_0(s) = \det(sI - (A_{aa} - G_a\cdot C_a))\cdot\det(sI - A_{bb})$$

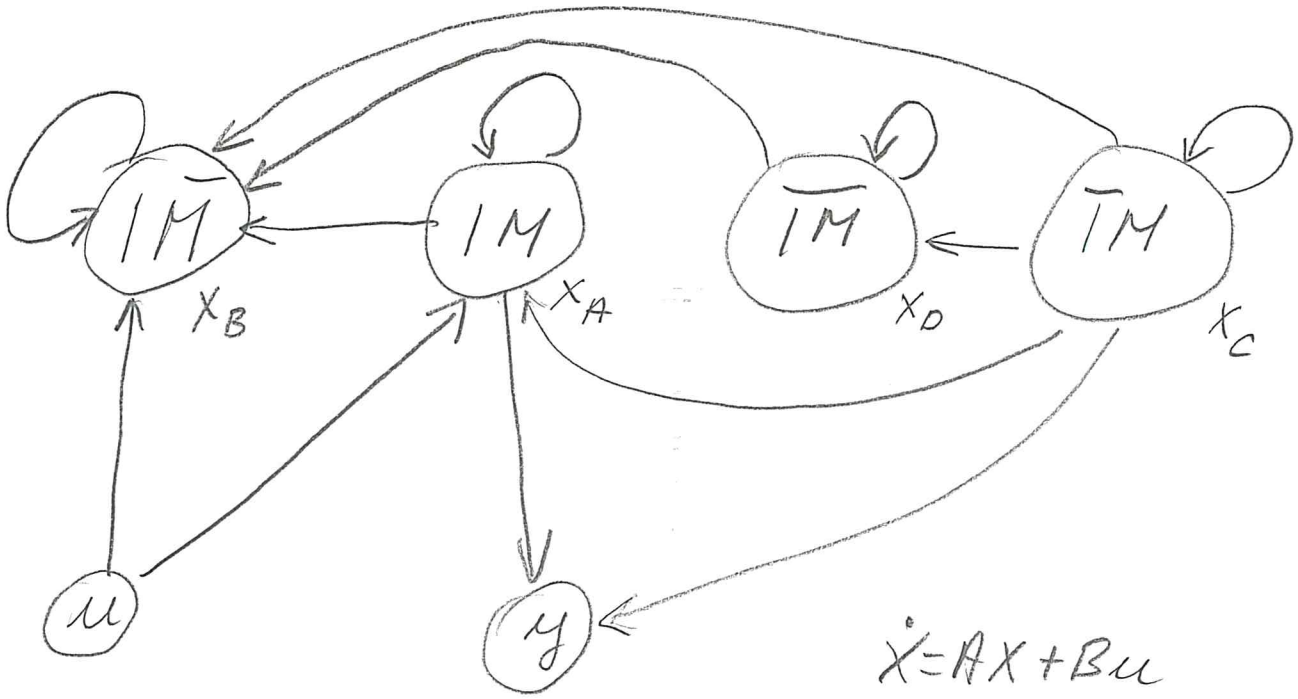
G_b – nincs hatással $\varphi_0(s)$-re

Az időinvariáns lineáris rendszert <u>detektálhatónak</u> nevezzük, ha a nem megfigyelhető (A_{bb}) sajátértékek stabilak.

$$\varphi_o(s) = \det[sI - (A - GC)] = \det[sI - (A^T - C^T G^T)]$$

ezért az állapotmegfigyelő tervezés ekvivalens az állapotvisszacsatolás tervezéssel egy fiktív (A^T, C^T) rendszerhez $\varphi_c(s) = \varphi_o(s)$.

Kalman-féle felbontás



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = C \cdot x$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_B \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{AA} & 0 & 0 & 0 \\ A_{BA} & A_{BB} & A_{BC} & A_{BD} \\ 0 & 0 & A_{CC} & 0 \\ 0 & 0 & A_{DC} & A_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_A \\ B_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [C_A \;\; 0 \;\; C_c \;\; 0] \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}; \quad W(s) = C_A (sI - A_{AA})^{-1} \cdot B_A$$

<u>példa</u>:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$
$$y = x_1 + x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ [1\ 1] & \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad \det(M_o) = 0$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(M_c) = 0$$

DI MIMO LTI rendszer irányíthatósága és elérhetősége

$$\Sigma$$

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu \; ; \; y_i = C \cdot x_i + Du_i$$

jelölés: (k, x) – a Σ kT pillanatban az x állapotban van

T – a mintavételi idő.

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-(j+1)} \cdot B \cdot u_j$$

$n = \dim(x)$ és ha az x állapot elérhető nT pillanatban az $x_0 = 0$ állapotból, tehát

$(0,0) \xrightarrow{u(\cdot)} (n, x)$ akkor ezzel ekvivalens, hogy

$$x = \underbrace{[B, AB, \dots, A^{n-1}B]}_{M_c} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} = M_c \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

DI esetben is M_c.

A fenti összefüggés azt mutatja, hogy x elérhetősége a nulla állapotban nT idő alatt ekvivalens azzal, hogy x benne van az M_c oszlopai által kifeszített térben. $k = n$ választásnak nincs jelentősége, mert $k < n$ esetén kevesebb oszlop lineáris kombinációja elegendő M_c-ből, $k > n$ esetén a Cayley-Hamilton tétel szerint elegendő csak az M_c

A DI LTI rendszer <u>teljesen elérhető</u> akkor ha $\text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = R^n \iff$

$$\boxed{\text{rank}(M_c) = n = \dim(x)}$$

irányíthatóság, ha nulla állapot elérhető nT idő alatt az x állapotból

$$(0, x) \xrightarrow{u(\cdot)} (n, 0)$$

$$0 = A^n \cdot x + [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

$$A^n \cdot x = -M_c \cdot \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Tehát ha a rendszer teljesen elérhető, akkor x-hez meghatározható $A^n \cdot x$, és mivel $A^n \cdot x \in \text{span}\{B \ AB \dots A^{n-1}B\} = R^n$, ezért létezik olyan $u(\cdot) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ bemenőjel sorozat, amelynek hatására az x állapotból el lehet jutni a nulla állapotba.

Ez azt jelenti, hogy a teljes elérhetőségből következik a teljes irányíthatóság. Fordítva ez em mindig igaz. mert az irányíthatósághoz csak

$$x \in \text{range}(A^n) \cap \text{span}\{B \ AB \dots A^{n-1}B\} \text{ szükséges.}$$

Kivételt képez az az eset ha $\exists A^{-1}$ (reverzibilis rendszer) mert akkor:

$$X = -A^{-n} M_c \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}.$$

A DI LTI rendszer <u>teljesen elérhető</u> akkor és csakis akkor, ha $\operatorname{rank}(M_c) = n = \dim(x)$. A <u>teljes irányíthatóságnak</u> $\operatorname{rank}(M_c) = n$ elégséges feltétele, és ha $\exists A^{-1}$, akkor szükséges feltétele is.

<u>DI LTI rendszer megfigyelhetősége és rekonstruálhatósága</u>

$$x_{i+1} = A x_i + B \cdot u_i \quad ; \quad y_i = C \cdot x_i + D \cdot u_i$$

$$y_0 = C \cdot x_0 + D \cdot u_0$$

$$y_k = C \cdot A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-(j+1)} \cdot B \cdot u_j + D \cdot u_k$$

$$k = 1, \dots, n-1$$

Vezessük be $\bar{y}_0 = y_0 - D \cdot u_0$ és

$$\bar{y}_k = y_k - \sum_{j=0}^{k-1} C \cdot A^{k-(j+1)} \cdot B u_j - D \cdot u_k \; , \; k \geq 1$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{akkor} \quad M_o \cdot X_0 = \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ennek az egyenletnek X_0 megoldása, a megfigyelhetőség azon múlik, hogy a megoldás egyértelmű-e.