A DI LTI rendszer teljesen megfigyelhető akkor és csakis akkor, ha $\mathrm{rank}(M_o) = n = \dim(x)$.
A teljes rekonstruálhatóságnak $\mathrm{rank}(M_o) = n$ elégséges feltétele és ha $\exists A^{-1}$ (reverzibilis), akkor szükséges feltétele is.

Az állapottranszformációk

$$\tilde{x} = T \cdot x \; ; \quad T \in R^{n \times n} \; ; \; x \in R^n ; \; T = \mathrm{const}$$
$$\exists T^{-1}$$

Kanonikus alakok: Matlab:

$$\boxed{[AT, BT, CT, DT, T] = \mathrm{canon}(A, B, C, D, \text{'modal'})}$$

$$\det(\lambda I - AT) = \lambda^5 + h_1 \lambda^4 + h_2 \lambda^3 + h_3 \lambda^2 + h_4 \lambda + h_5 = 0$$

- Irányíthatósági kanonikus alak:

$$\tilde{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 & -h_4 & -h_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

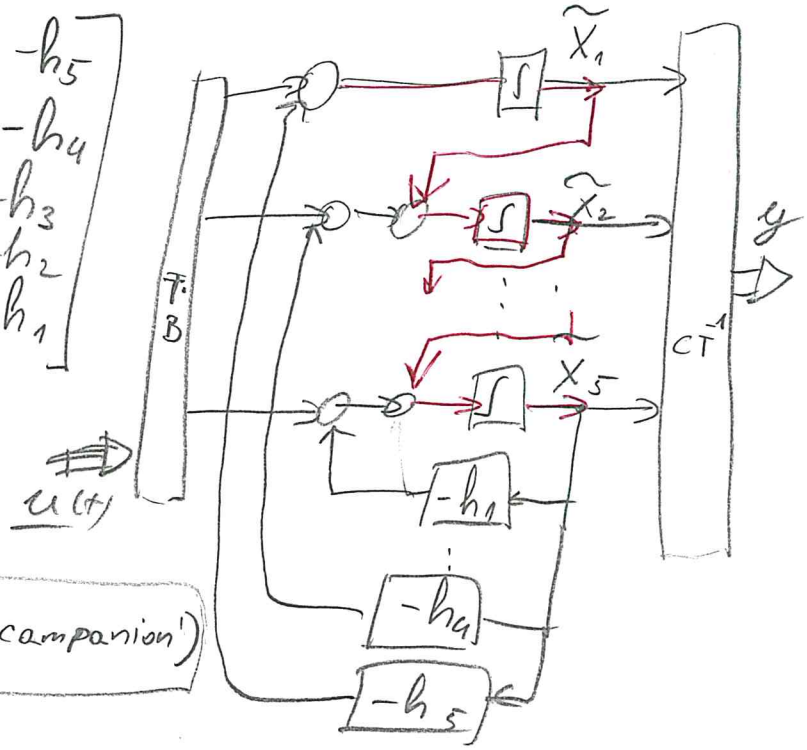
ha

$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} \quad \text{akkor}$$

$$\boxed{[AT, BT, CT, DT] = \mathrm{tf2ss}(G, H)}$$

- Megfigyelhetőségi kanonikus alak:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -h_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -h_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -h_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -h_1 \end{bmatrix}$$



$$\boxed{[AT, BT, CT, DT, T] = \text{canon}(A, B, C, D, \text{'campanion'})}$$

- Fázis változós kanonikus alak:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -h_5 & -h_4 & -h_3 & -h_2 & -h_1 \end{bmatrix}$$

Az $\tilde{x}$ állapotteret fázisterének is hívjuk, mivel az egyes állapotváltozók egymásnak sebességei.

- Jordan alak:

$$V = [V_1, V_2, V_3, V_4, V_5] \; ; \; T = V^{-1}$$

V_i - az A mátrix i-edik sajátvektora.

$$[V, P] = eig(A)$$

$$\boxed{[AT, BT, CT, DT] = canon(A, B, C, D, 'modal')}$$

$$P_{i,i+1} = \sigma_i \pm j\omega_i$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & & & 0 \\ \omega_1 & \sigma_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{n-1} & \\ 0 & & & & \sigma_n \end{bmatrix} \; ; \; \dot{\tilde{X}} = \tilde{A} \cdot \tilde{X}$$

$$\tilde{x}_i = e^{\sigma_i t}\left(\tilde{x}_i(0)\cos(\omega_i t) + \tilde{x}_{i+1}(0)\sin(\omega_i t)\right)$$

Szétcsatolt alak!

Folytonosidejű szabályozások tervezése állapottérben

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad y = C \cdot x$$

$$M_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

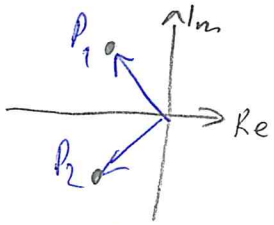
$$M_o = [C^T \quad A^T C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T]^T$$

$$u = -K \cdot x$$

$$\dot{x} = (A - BK)\, x$$

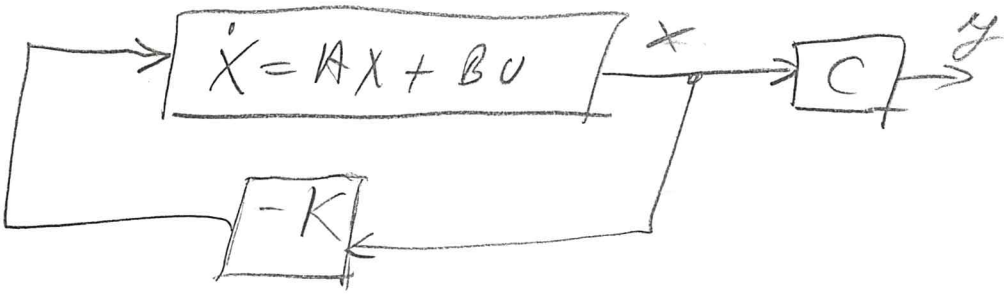
pl.

$$\varphi_c(s) = 1 + 2\xi T_0 \cdot s + T_0^2 s^2$$



$$p_{1,2} = \frac{-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}}{T_0}$$

Terzett pólus



$$\varphi(s) = \det(sI - A)$$ – a rendszer sajátértékei (pólusai)

$$\varphi_c(s) = \det(sI - (A - BK))$$

Ackermann képlet: $\boxed{K = (0 \dots 0 \; 1)\, M_c^{-1} \varphi_c(A)}$

algoritmus

$$(A, B) \xrightarrow[M_c]{\varphi_c(s)} K$$

Matlab kód: $\boxed{K = \text{acker}(A, B, P)}$

$\boxed{K = \text{place}(A, B, P)}$

Az A mátrix sajátértékei egyben meghatározták a karakterisztikus polinom együtthatóit. Legyenek a zárt rendszer előírt karakterisztikus polinomja együtthatói:

$p_1, p_2, \ldots, p_n$.

A zárt rendszer állapotmátrixa irányíthatósági alakja:

$$\tilde{A} = (A - BK) = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} & -p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Egy bemenetű rendszer esetén:

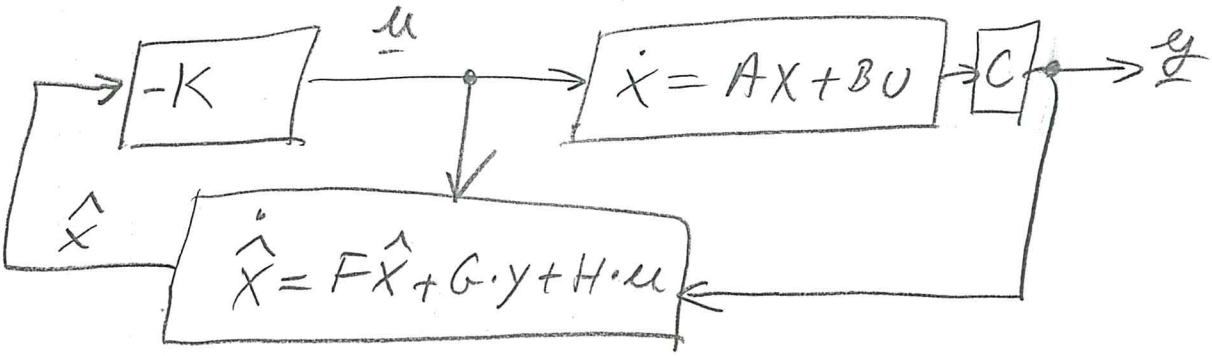
$$\begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & \cdots & -h_{n-1} & -h_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-h_1 - k_1) & (-h_2 - k_2) & \cdots & (-h_{n-1} - k_{n-1}) & (-h_n - k_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{k_i = p_i - h_i}$$

Állapot-visszacsatolás realizálása megfigyelővel

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + G\cdot y + H\cdot u \quad ; \quad \dim(\hat{x}) = \dim(x) = n$$



$$\tilde{x} = x - \hat{x} \; ; \quad \dot{\tilde{x}} = Ax + Bu - F\hat{x} - GC\cdot x - H\cdot u$$

$$F = A - G\cdot C \quad ; \quad H = B \quad ; \quad \dot{\tilde{x}} = F\cdot\tilde{x}$$ – stabil és gyors

$$\varphi_o(s) = \det(sI - F) = \det(sI - (A - GC))$$

$$= \det(sI - (A^T - C^T\cdot G^T))$$

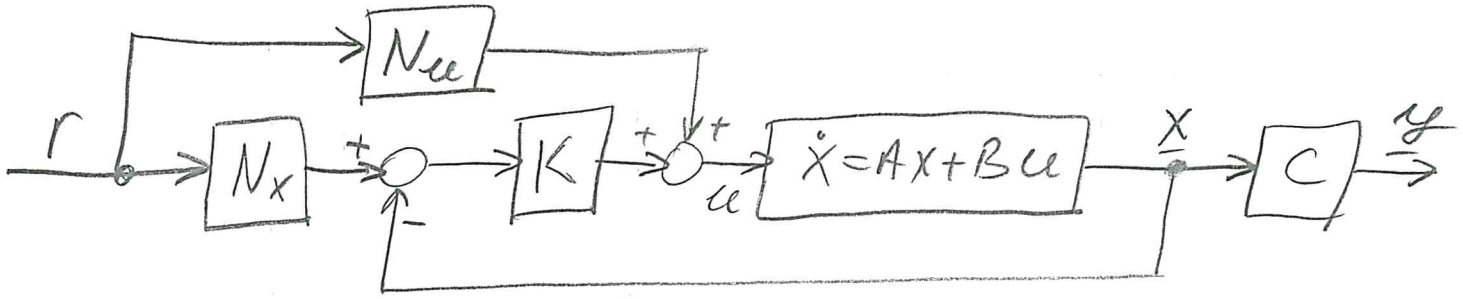
A tervezés visszavezethető állapot-visszacsatolás tervezésére

$$(A, C) \rightarrow (A^T, C^T) \xrightarrow[M_{cII}]{\varphi_o(s)} K_{II} \rightarrow G = K_{II}^T \rightarrow F$$

$$F = A - G\cdot C \; ; \quad H = B$$

Az állapot-visszacsatolás PD típusú szabályozás.

- Az alapjel miatti korrekció folytonos időben



r - alapjel - lassan változik, ritkán változik, állandó.
Elvárjuk, hogy állandósult állapotban

$\boxed{N_x \cdot r = x_\infty}$ a kimenet pedig $\boxed{y_\infty = r}$

A szükséges bemenő jelet $u_\infty = N_u \cdot r$

fogja szolgáltatni. $\dim(y) = \dim(r) = \dim(u) = m$

$$N_x \cdot r = x_\infty \Rightarrow y_\infty = C \cdot x_\infty = C \cdot N_x \cdot r = r \Rightarrow \boxed{C \cdot N_x = I_m}$$

$$N_u \cdot r = u_\infty \Rightarrow A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty = \dot{x}_\infty = 0 \Rightarrow$$

$$A \cdot N_x \cdot r + B \cdot N_u \cdot r = 0 \Rightarrow \boxed{A \cdot N_x + B \cdot N_u = 0_{n \times m}}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix}$$

- Integráló szabályozás

Egészítsük ki a rendszert egy integrátor jelével:

$$x_I = \int y\,dt \Rightarrow \dot{x}_I = C \cdot x$$

$$\tilde{x} = [x^T, x_I^T]^T$$

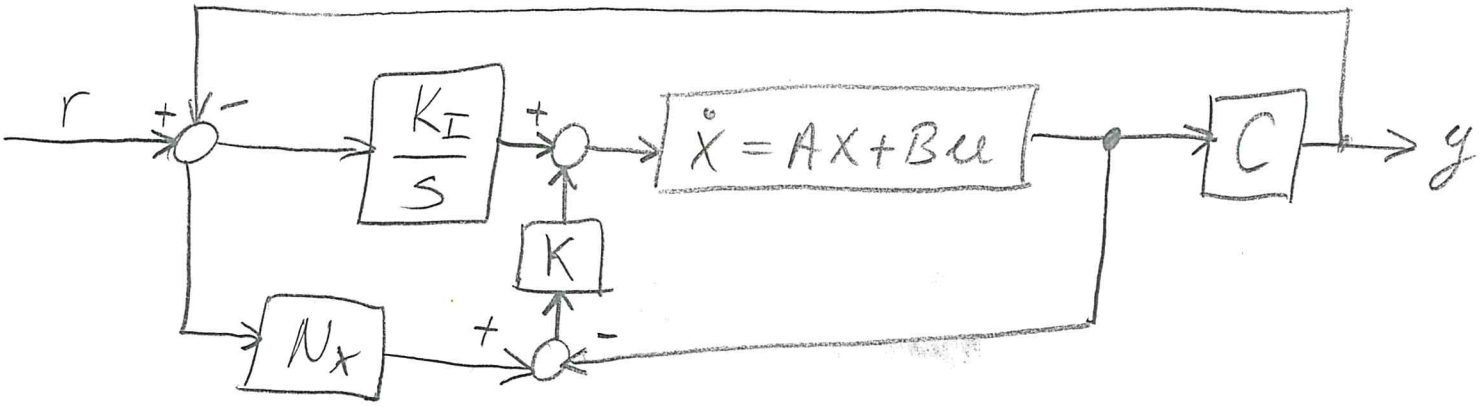
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B} \cdot u$$

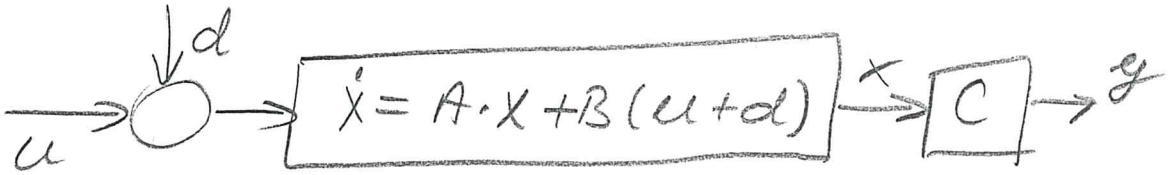
$$u = -\tilde{K}\tilde{x} = -[K \;\; K_I] \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) \xrightarrow[\tilde{M}_c]{\tilde{\varphi}_c(s)} \tilde{K} = [K \;\; K_I].$$

Az integrátor állandósult állapotban nulla bemenet esetében is képes nemnulla kimenetet biztosítani.



- Terhelésbecslés



$$\dot{d} = 0$$

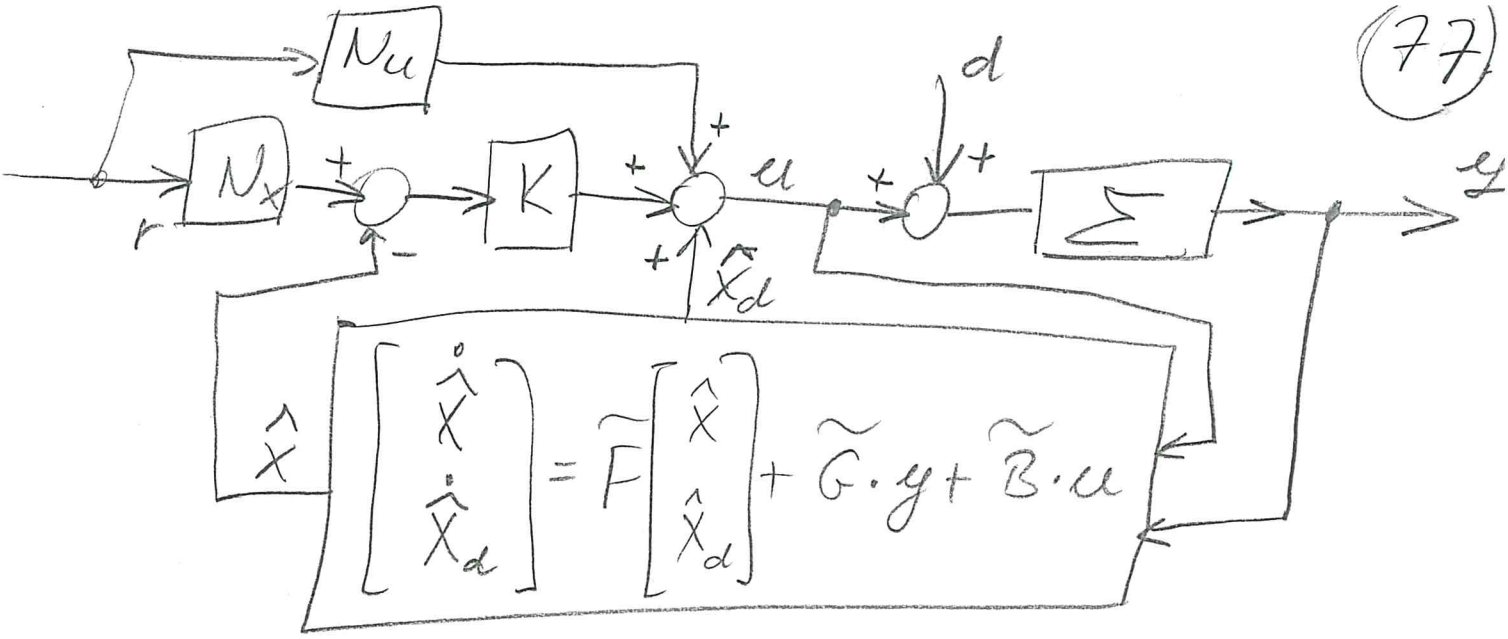
Bővítsük a rendszert $x_d = d$

$$\tilde{x} = [x^T, x_d^T]^T$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \cdot \tilde{x} + \tilde{B} \cdot u \; ; \; y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} = \tilde{C} \cdot \tilde{x}$$

A rendszer nem teljesen irányítható, mert az x_d hez tartozó alrendszer nem irányítható.
Az állapotvisszacsatolást az (A, B, C) rendszerhez a megfigyelőt pedig az $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ rendszerhez kell tervezni. N_x és N_u értékét szintén az eredeti rendszerhez kell meghatározni.



$$u = K(N_x r - \hat{x}) + N_u r = -K\hat{x} + (KN_x + N_u) r$$

$$u = -Kx + K\tilde{x} + (KN_x + N_u) r.$$

$$\dot{x} = A \cdot x + B\{-K \cdot x + K \cdot \tilde{x} + (K \cdot N_x + N_u) r\} =$$

$$= (A - BK) x + BK\tilde{x} + B(KN_x + N_u) r,$$

$$\dot{\tilde{x}} = F \cdot \tilde{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(KN_x + N_u) \\ 0 \end{bmatrix} r,$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

Matematika: Blokk-háromszögmátrixok inverze

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

ezért:

$$W(s) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-(A-BK) & -BK \\ 0 & sI-F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B(KN_x+N_u) \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI-A+BK)^{-1} & B(KN_x+N_u) \\ & 0 \end{bmatrix}$$

$$W(s) = C(sI-A+BK)^{-1}B(KN_x+N_u)$$

Az átviteli függvénymátrix nem függ F sajátértékeitől. A hozzá tartozó pólusok és zérusok kiejtik egymást. $\varrho_0(s)$ nullahelyei nem szerepelnek a rendszerben P/Z kiejtés.

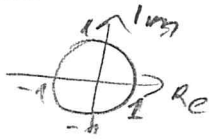
FI → DI

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad\qquad x[k+1] = A_d \cdot x[k] + B_d \cdot u[k]$$
$$y = Cx + Du \qquad\qquad y[k] = C_d \cdot x[k] + D_d \cdot u[k]$$

Matlab

$$[A_d, B_d, C_d, D_d] = c2dm(A, B, C, D, T_s, 'zoh');$$

Pólusáthelyezés és állapotmegfigyelés diszkrét időben



$$x_{i+1} = A x_i + B \cdot u_i \; ; \quad y_i = C \cdot x_i$$

$$u_i = -K \cdot x_i$$

$$\varphi_c(z) = \det(z \cdot I - (A - BK))$$

$$M_c = [B \;\; AB \; \dots \; A^{n-1}B]$$

$$(A, B) \xrightarrow[M_c]{\varphi_c(z)} K$$

$$\hat{x}_{i+1} = F \hat{x}_i + G y_i + H u_i \; ;$$

$$\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i \Rightarrow F = A - GC \; ; \; H = B$$

$$\tilde{x}_{i+1} = A \cdot x_i + B \cdot u_i - F \cdot \hat{x}_i - G \cdot C \cdot x_i + H \cdot u_i = 0$$

$$\tilde{x}_{i+1} = F \cdot \tilde{x}_i \qquad \text{stabil és gyors}$$

$$\varphi_o(z) = \det(zI - (A - GC)) = \det(zI - (A^T - C^T G^T))$$

$$M_o^T = M_{c_{II}} = [C^T \;\; A^T C^T \; \dots \; (A^T)^{n-1} C^T]$$

Diszkrét időben azonban az így tervezett állapotmegfigyelő y aktuális értékét csak egy mintavételi idővel később veszi figyelembe, miáltal egy ütem holtidőt visz be a zárt rendszerbe. Kínálkozik egy javítási lehetőség, ugyanis x_i és u_i értékeit már ismerjük. Az irodalomban ez az aktuális állapotmegfigyelő.

Az aktuális állapotmegfigyelő

$$\hat{x}_{i+1} = F\hat{x}_i + G y_{i+1} + H u_i = F\hat{x}_i + G C x_{i+1} + H u_i$$

$$= F\hat{x}_i + G C (A x_i + B u_i) + H u_i$$

$$\tilde{x}_{i+1} = x_{i+1} - \hat{x}_{i+1} = A x_i + B u_i - F\hat{x}_i - GC(A x_i + B u_i) -$$

$$- H u_i + (F x_i - F x_i) =$$

$$= (A - GCA - F) x_i + (B - GCB - H) u_i + F(x_i - \hat{x}_i)$$

$$F = A - GCA \quad ; \quad H = B - GCB$$

$\tilde{x}_{i+1} = F\tilde{x}_i$ – stabil és gyors

$$\varphi_o(z) = \det(zI - (A - GCA))$$

(A, CA) – párnak megfigyelhetőnek kell lennie

$$\bar{M}_o = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \cdot A = M_o \cdot A \Rightarrow$$

$$\operatorname{rank}(\bar{M}_o) = \operatorname{rank}(M_o \cdot A) = n = \dim x$$

Speciálisan ha (A, C) megfigyelhető és $\exists A^{-1}$, akkor $\operatorname{rank}(M_o, A) = \operatorname{rank}(M_o) = n$

$$(A, C) \longrightarrow (A^T, A^T C^T)_{II} \xrightarrow[M_{c,II}]{\varphi_o(z)} K_{II} \rightarrow G = K_{II}^T \rightarrow F = A - G \cdot CA$$

$$H = B - G \cdot C \cdot B$$

$$\hat{X}_i = F \cdot \hat{X}_{i-1} + G \cdot y_i + H \cdot u_{i-1}$$

Az $\hat{X}_i$ becsült állapot számítása valós idő szempontjából kedvezőbb alakra hozható

$$\hat{X}_i = (A - G \cdot C \cdot A)\hat{X}_{i-1} + G \cdot y_i + (B - GCB)u_{i-1}$$

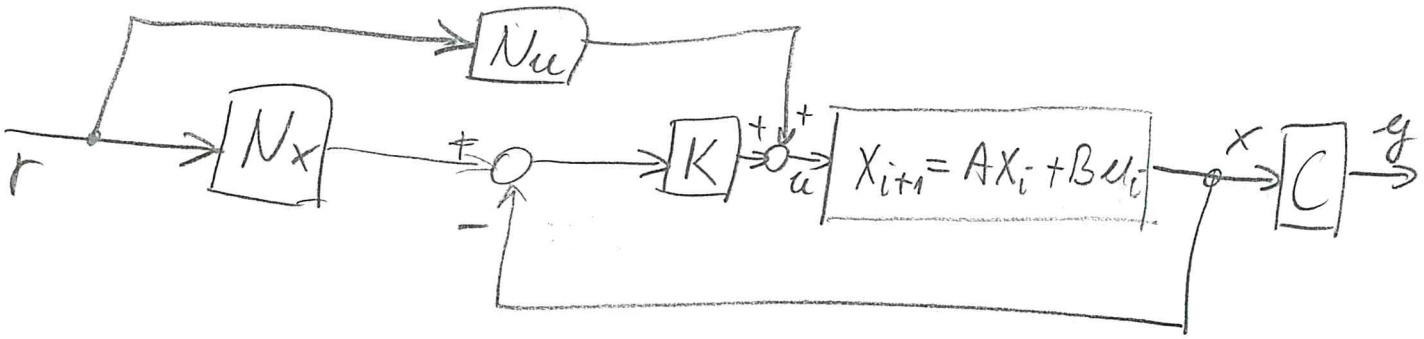
$$= A\hat{X}_{i-1} + Bu_{i-1} + G\{y_i - C(A\hat{X}_{i-1} + B \cdot u_{i-1})\}$$

$$\boxed{\bar{X}_i = A\hat{X}_{i-1} + B \cdot u_{i-1}},$$ "time update" – azonnal számítható

$$\boxed{\hat{X}_i = \bar{X}_i + G(y_i - C \cdot \bar{X}_i)},$$ – "measurement update"

$C \cdot \bar{X}_i$ – a kimenet értéke a régi megfigyelések alapján.

- Alapjel korrekció



$N_x \cdot r = X_\infty$; $y_\infty = r$; $u_\infty = N_u \cdot r$

$\dim(y) = \dim(r) = \dim(u) = m$; $N_x \in R^{n \times m}$, $N_u \in R^{m \times m}$

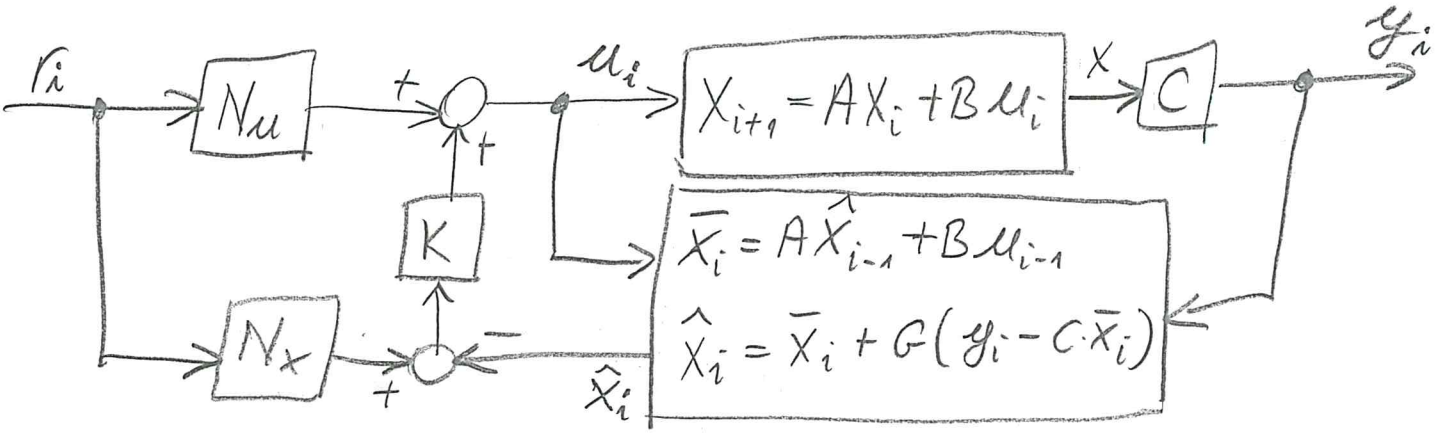
$N_x \cdot r = X_\infty \Rightarrow y_\infty = C \cdot X_\infty = C \cdot N_x \cdot r = r \Rightarrow C \cdot N_x = I_m$,

$N_u \cdot r = u_\infty \Rightarrow AX_\infty + Bu_\infty = X_\infty \Rightarrow [(A - I)N_x + BN_u]r = 0$

$$(A - I)N_x + BN_u = 0_{n \times m}$$

$$\begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} \\ I_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n\times m} \\ I_m \end{bmatrix}$$

- Állapotbecslő alkalmazása:



- Integráló szabályozás: LSR

$$X_I = \int y\,dt \quad \text{ill. téglalap szabály} \quad \Big| \; X_{I,i+1} = X_{I,i} + Ty_i = X_{I,i} + T\cdot C\cdot X_i$$

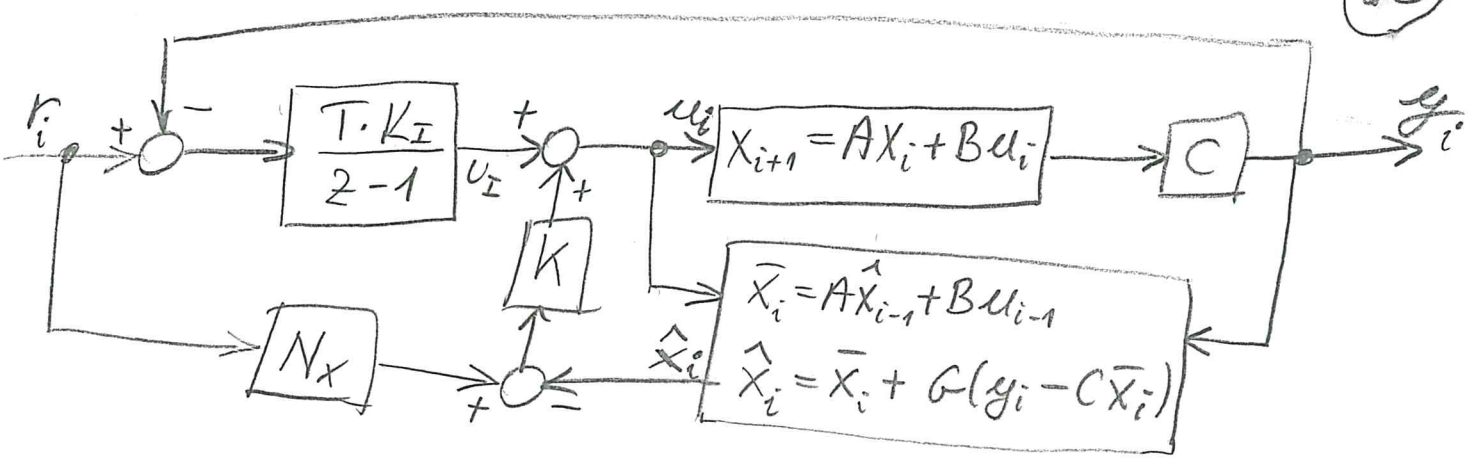
$$\tilde{X} = [x^T, X_I^T]^T$$

$$\begin{bmatrix} X_{i+1} \\ X_{I,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C\cdot T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{I,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

$$y_i = [C \quad 0] \begin{bmatrix} X_i \\ X_{I,i} \end{bmatrix} \Rightarrow y_i = \tilde{C}\tilde{X}_i \quad \Big| \; \tilde{X}_{i+1} = \tilde{A}\tilde{X}_i + \tilde{B}u_i$$

$$u_i = -\tilde{K}\tilde{X}_i = -[K \quad K_I] \begin{bmatrix} X_i \\ X_{I,i} \end{bmatrix} = -KX_i - K_I X_{I,i}$$

$$\tilde{X}_{i+1} = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})\tilde{X}_i \qquad (\tilde{A}, \tilde{B}) \xrightarrow[\tilde{M}_c]{\tilde{\ell}_c(z)} \tilde{K}$$



Tervezési algoritmus:

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) \rightarrow \tilde{K} = [K \;\; K_I] \qquad \text{ÁV}$$

$$(A, B, C) \rightarrow (F, G, H) \qquad \text{ÁM}$$

$$(A, B, C) \rightarrow (N_x, N_u)$$

- Terhelésbecslés: A terhelés nem változik $\dot{d} = 0$

$x_d = d \qquad \tilde{x} = [x^T, x_d^T]^T$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$

$$y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} \Rightarrow y = \tilde{C} \cdot \tilde{x}$$

ZOH Alkalmazásával

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) \xrightarrow{ZOH} (\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}, \tilde{C})$$

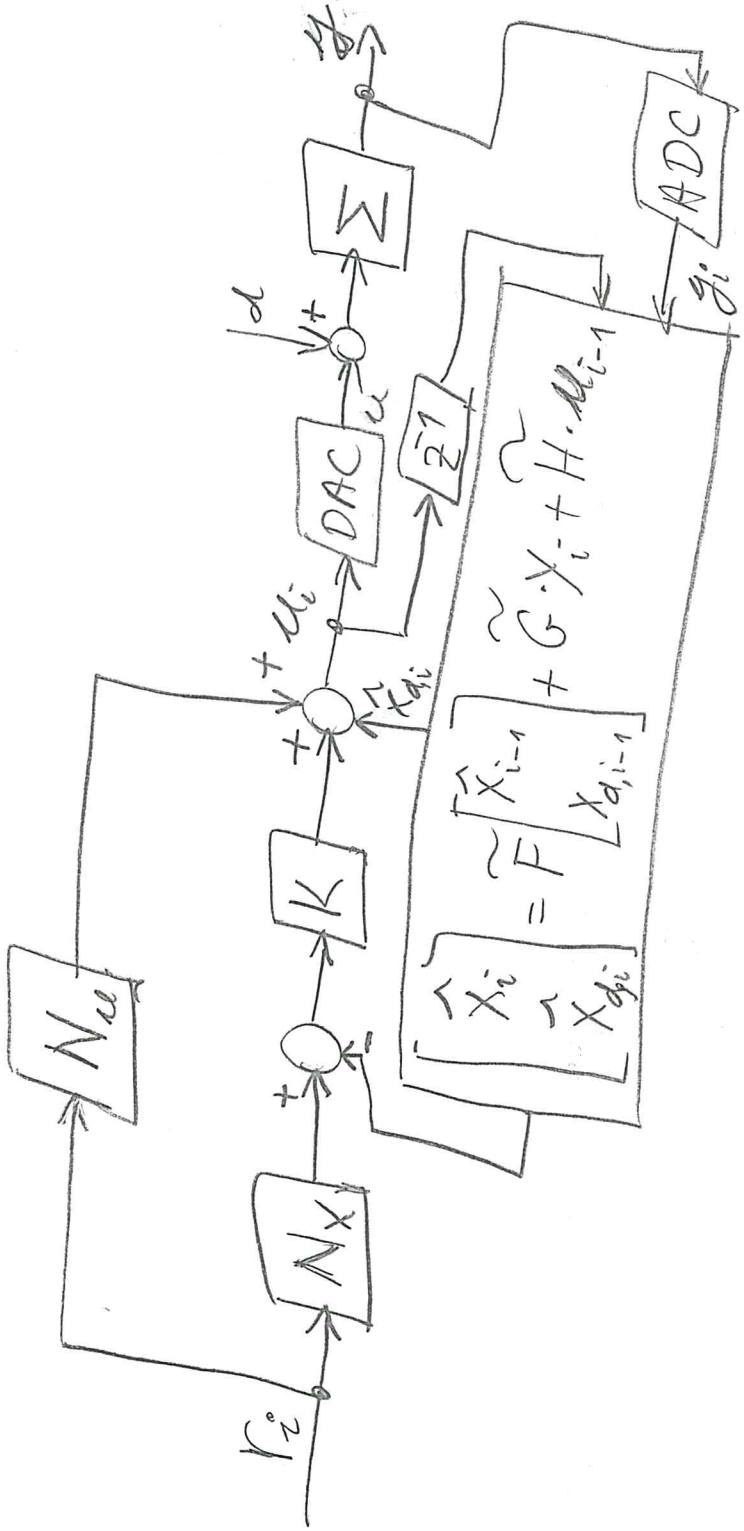
$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{\Phi} x_i + \tilde{\Gamma} u_i$$

$$y_i = \tilde{C} \tilde{x}_i$$

$(\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}, \tilde{C})$ nem irányítható

Algoritmus a tervezéshez:

$$(\Phi, \Gamma, C) \longrightarrow K \qquad (A'V)$$

$$(\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}, \tilde{C}) \longrightarrow (\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}) \qquad (A'M)$$

$$(\Phi, \Gamma, C) \longrightarrow (N_x, N_u)$$