Lagrange-multiplikátor módszer

$f(x,y)$ - célfüggvény optimumát keressük

$g(x,y)=c$ - korlátozásokkal

f és g - folytonos függvények $\in C^{1,1}$

Írjuk fel a következő Lagrange függvényt:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot(g(x,y)-c)$$

∇ - nabla operátor; $\nabla=\left[\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\right]^T$

A szélső értékeket a $\nabla L=0$ helyeken találjuk meg, ahol a korlátozások teljesülnek!

Időben változó DI MIMO rendszerek LQ optimális irányítása

Az időhorizont nem ∞. !!

A rendszert leíró egyenlet:

$$X_{k+1}=A_k X_k+B_k U_k \; ; \; k=0,1,\dots,N-1$$

$$X_0=a.$$

A költségfüggvény kvadratikus alakban adott:

$$f(x,u)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k^T\cdot Q_k x_k+u_k^T\cdot R_k u_k\right)+\frac{1}{2}x_N^T\cdot Q\cdot x_N .$$

$$Q_N, Q_k \geq 0 \;,\quad R_k>0 \quad, k=0,1,\dots,N-1$$

A megoldást az

$$x=\{x_k\}_{k=0}^{N} \quad \text{és} \quad u=\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$$

változókban keressük. x_0 – kezdeti feltétel

Lagrange módszer:

$$L(x,u,\lambda)=f(x,u)+\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_{k+1}\cdot\left(A_k x_k+B_k u_k-x_{k+1}\right)+$$

$$+\lambda_0\cdot(a-x_0) .$$

$$L(x,u,\lambda)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k^T\cdot Q_k x_k+u_k^T R_k u_k\right)+\frac{1}{2}x_N^T Q_N x_N+$$

$$+\lambda_0\cdot(a-x_0)+\lambda_1\cdot\left(A_0x_0+B_0u_0-x_1\right)+\dots$$

$$+\lambda_{N-1}\cdot\left(A_{N-2}x_{N-2}+B_{N-2}u_{N-2}-x_{N-1}\right)+$$

$$+\lambda_N\cdot\left(A_{N-1}x_{N-1}+B_{N-1}u_{N-1}-x_N\right) .$$

$$\nabla L(x,u,\lambda)=0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_0} &= Q_0 \cdot x_0 - \lambda_0 + A_0^T \cdot \lambda_1 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_{N-1}} &= Q_{N-1} \cdot x_{N-1} - \lambda_{N-1} + A_{N-1}^T \cdot \lambda_N = 0 \end{aligned}\right\} \lambda_k = Q_k \cdot x_k + A_k^T \cdot \lambda_{k+1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_N} = Q_N \cdot x_N - \lambda_N = 0. \qquad \lambda_N = Q_N \cdot x_N$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_0} &= R_0 \cdot u_0 + B_0^T \cdot \lambda_1 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial u_{N-1}} &= R_{N-1} \cdot u_{N-1} + B_{N-1}^T \cdot \lambda_N = 0 \end{aligned}\right\} u_k = -R_k^{-1} \cdot B_k^T \cdot \lambda_{k+1}$$

A korlátozásoknak teljesülnie kell ezért

$$x_{k+1} = A_k \cdot x_k - B_k \cdot R_k^{-1} \cdot B_k^T \lambda_{k+1}$$

Az optimum feltétele:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & -B_k \cdot R_k^{-1} \cdot B_k^T \\ Q_k & A_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix}, \qquad x_0 = a, \quad \lambda_N = Q_N \cdot x_N$$

Ezek kevert, kezdeti és végérték feltételek.

Tételezzük fel, hogy minden lépésben felírható, hogy $\lambda_k = P_k \cdot x_k$, amiből $P_N = Q_N$.

$$x_{k+1} = A_k x_k - B_k R_k^{-1} B_k^T P_{k+1} x_{k+1} \Rightarrow$$

$$x_{k+1} = \left(I + B_k R^{-1} B_k^T P_{k+1} \right)^{-1} A_k x_k .$$

Mátrix inverz lemma:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B \left(D A^{-1} B + C^{-1} \right)^{-1} D A^{-1}$$

$$A := I, \quad B := B_k, \quad C := R_k^{-1}, \quad D := B_k^T P_{k+1}$$

$$\left(I + B_k R_k^{-1} B_k^T P_{k+1} \right)^{-1} = I - B_k \left(B_k^T P_{k+1} B_k + R_k \right)^{-1} B_k^T P_{k+1} = \Omega$$

$$x_{k+1} = \left[I - B_k \left(B_k^T P_{k+1} B_k + R_k \right)^{-1} B_k^T P_{k+1} \right] \cdot A_k \cdot x_k ,$$

$$u_k = - R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1} = - R_k^{-1} B_k^T P_{k+1} [\Omega] A_k \cdot x_k$$

$$= - K_k \cdot x_k, !$$

$$K_k = \left[R_k^{-1} - R_k^{-1} B_k^T P_{k+1} B_k \left(B_k^T P_{k+1} B_k + R_k \right)^{-1} \right] B_k^T P_{k+1} \cdot A_k$$

Inverz mátrix lemma fordított irány:

$$A := R_k, \quad B := B_k^T P_{k+1} B_k, \quad C = D := I$$

$$\boxed{K_k = \left(B_k^T P_{k+1} B_k + R_k \right)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k .}$$

$$\lambda_k = Q_k x_k + A_k^T \lambda_{k+1} = Q_k x_k + A_k^T P_{k+1} x_{k+1} =$$

$$= Q_k x_k + A_k^T P_{k+1} [\,\Omega\,] A_k x_k =$$

$$= \left[Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k - A_k^T P_{k+1} B_k \left(B_k^T P_{k+1} B_k + R_k \right)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k \right] x_k =$$

$$= P_k \cdot x_k$$

$$\boxed{P_k = Q_k + A_k^T P_{k+1} A_k - A_k^T P_{k+1} B_k \left(B_k^T P_{k+1} B_k + R_k \right)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k} \; . \; (1)$$

(1) Rekurzív összefüggés P_k-ra, neve Riccati-dif. egyenlet, a megoldás $P_k \geq 0$.
Számítás hátratartóan!

Egyszerűbb ha bevezetünk egy segédmátrixot

$$M_{k+1} = P_{k+1} - P_{k+1} B_k \left(B_k^T P_{k+1} B_k + R_k \right)^{-1} B_k^T P_{k+1} \; ,$$

$$P_k = Q_k + A_k^T M_{k+1} A_k \; .$$

Időben változó rendszer esetén a tervezést offline végezzük.

Algoritmus:

Offline:
- inicializálás $k = N$, $P_N = Q_N$
- hátratartó rekurzió: $k = N-1, \ldots, 1$
  - M_{k+1} számítása
  - P_k számítása

Online irányítás:

(1) Inicializálás x_0 kezdeti állapot

(2) Előretartó rekurzió $k = 0, 1, \ldots, N-1$

- K_k számítása
- $U_k = -K_k \cdot X_k$ kiadása a rendszerre
- $X_{k+1} = A_k \cdot X_k + B_k U_k$ meghatározása

X_k -mérésével.

$\boxed{\text{DI MIMO LTI esetén } A_k = A;\ B_k = B}$

FI MIMO LTI rendszer véges horizont

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad x(t) = z$$

$$J_t = \int_t^T x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau) d\tau + x^T(T) Q_f x(T)$$

$P_t = P_t(t)$.

Riccatti dif. egyenlet

$$\boxed{-\dot{P}_t = A^T P_t + P_t A - P_t B R^{-1} B^T P_t + Q}$$

Vég érték feltétel $\boxed{P_T = Q_f}$

$$\boxed{u(t) = -K_t \cdot x(t)}$$

$$\boxed{K_t = R^{-1} B^T P_t}$$

$T = \infty$ vagy $N = \infty$ P_t és P_k állandók lesznek a Riccat pedig algebrai

Kálmán - szűrő

- Állapotbecslés zajos esetben.

DI MIMO időben változó rendszer

A rendszer: $X_{k+1} = A_k X_k + B_k \cdot u_k + V_k$

$$Y_{k+1} = C_k X_k + Z_k$$

V_k és Z_k - zajok $X(0)$ - kezdeti állapot ismeretlen
- Gauss eloszlás, nulla várható érték.

Feltételek:

- $X(0)$ független V_k-tól és z_k-tól.
- $E[X(0)] = X_0$
- $E[(X(0)-X_0)(X(0)-X_0)^T] = \Sigma_0 \geq 0$
- $E[V_k] = 0$, $E[V_k \cdot V_l^T] = R_{V,k} \cdot \delta_{k,l}$, $R_{V,k} \geq 0$

  δ_{kl} - Kronecker-delta; R - kovariancia mátrix
- $E[z_k] = 0$, $E[z_k, z_l^T] = R_{z,k} \cdot \delta_{k,l}$, $R_{z,k} > 0$
- $E[V_k, z_l^T] = 0$, $E[z_l, V_k^T] = 0$

  (V_k és z_l korrelálatlanok)

Becslőt tervezünk, úgy, hogy:

$E[X_k - \hat{X}_k] = 0$ és

$E[(X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_k)^T] = \Sigma_k \rightarrow$ infimum

Az "aktuális" Kálmán szűrő algoritmusa:

① Inicializálás $\hat{X}_0 = X_0 = E[X(0)]$ → várható érték

$$E[(X(0)-X_0)(X(0)-X_0)^T] = \Sigma_0$$ → szórás

② mérési (mintavételi) időpontok közötti tevékenység

- $\bar{X}_k = A_{k-1}\hat{X}_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1}$
- $M_k = A_{k-1}\Sigma_{k-1}A_{k-1}^T + R_{v,k-1}$
- $\Sigma_k = M_k - M_k C_k^T (C_k M_k C_k^T + R_{z,k})^{-1} C_k M_k$.
- $G_k = M_k C_k^T (C_k M_k C_k^T + R_{z,k})^{-1} = \Sigma_k C_k^T R_{z,k}^{-1}$

③ A mérési eredmény frissítése:

$$\hat{X}_k = \bar{X}_k + G_k (y_k - C_k \bar{X}_k).$$

- Az algoritmusnak jó eredményei vannak a gyakorlatban.
- Alkalmas valós időben való alkalmazásra
- Implementálása egyszerű

A szabad paraméterek megválasztására érzékeny

$$\Sigma_0,\ \hat{X}_0,\ R_{v,k},\ R_{z,k}$$

A kiterjesztett Kalman szűrő

$$X_{k+1} = f(x_k, u_k, v_k)$$

$$y_k = g(X_k, z_k)$$

Legyen:
$$E\left[\begin{bmatrix} v_k \\ z_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_k^T & z_e^T \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} R_{v,k} & R_{vz,k} \\ R_{vz,k}^T & R_{zk} \end{bmatrix}\delta_{ke}.$$

$$X_{k+1} \cong f(\tilde{X}_k, u_k, 0) + \frac{\partial f(\hat{X}_k, u_k, 0)}{\partial X}(X_k - \hat{X}_k) + \frac{\partial f(\hat{X}_k, u_k, 0)}{\partial v_k} v_k.$$

$$y_k \cong g(\hat{X}_k, 0) + \frac{\partial g(\hat{X}_k, 0)}{\partial X}(X_k - \hat{X}_k) + \frac{\partial g(\hat{X}_k, 0)}{\partial z} z_k$$

$$A_k = \frac{\partial f(\hat{X}_k, u_k, 0)}{\partial X_k}; \quad B_{v,k} = \frac{\partial f(\hat{X}, u_k, 0)}{\partial v}$$

$$C_k = \frac{\partial g(\hat{X}_k, 0)}{\partial X}; \quad C_{z,k} = \frac{\partial g(\hat{X}_k, 0)}{\partial z}$$

- $\bar{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$
- $M_k = A_{k-1} \Sigma_{k-1} A_{k-1}^T + R_{v,k-1}$
- $\Sigma_k = M_k - M_k C_k^T (C_k M_k C_k^T + R_{z,k})^{-1} C_k M_k$
- $G_k = \Sigma_k C_k^T R_{z,k}^{-1}$
- $\hat{X}_k = \bar{X}_k + G_k (y_k - g(\bar{X}_k, 0))$