

A Laplace transzformáció tulajdonságaiból következik:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)$$

Laplace transzformáció után:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

Vagy

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s)$$

$$Y(s) = H(s) U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Átviteli függvény alakjai:

A holtidőmentes LTI rendszerek több alakban is megadhatók.

Polinom/polinom alak:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Zérus-pólus alak:

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad k = \frac{b_m}{a_n} \text{ erősítési tényező.}$$

A zérusok és pólusok komplex vagy valós számok.

Részletlörtés alak:

$$H(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - p_i}, \text{ ahol } r_i \text{ a reziduálok értékeit jelöli.}$$

Többszörös gyökhöz a részletlörtékre bontáskor a gyök multiplicitásával azonos számú részletlört tartozik.

Időállandós alak:

$$H(s) = A \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \dots (1 + s\tau_m)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_n)},$$

$$\tau_i = -\frac{1}{z_i}, \quad T_i = -\frac{1}{p_i}, \text{ valós, vagy komplex számok, időállandók.}$$

$$\text{Átviteli tényező: } A = \frac{b_0}{a_0} = k \frac{(-z_1) \dots (-z_m)}{(-p_1) \dots (-p_n)}$$

Legyenek $p_1 = -(\sigma_1 + j\zeta_1)$ és $p_2 = -(\sigma_1 - j\zeta_1)$ $p_1 = \bar{p}_2$ konjugált komplex pólusok.

$$(s - p_1)(s - p_2) = (s + (\sigma_1 + j\zeta_1))(s + (\sigma_1 - j\zeta_1)) = s^2 + 2\sigma_1 s + \sigma_1^2 + \zeta_1^2 = s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2$$

$$\omega_0^2 = \sigma_1^2 + \zeta_1^2 \text{ és } \delta = -\frac{\sigma_1}{\omega_0}. \quad p_{1,2} = -\delta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\delta^2}.$$

ω_0 - csillapítatlan sajátfrekvencia.

$$s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2\delta}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2 \right), \quad \text{a sajátfrekvencia periódusideje:}$$

$$T_0 = \frac{1}{\omega_0}, \quad \delta \text{ pedig csillapítási tényező.}$$

$$s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2 = \omega_0^2 (1 + 2\delta T_0 s + T_0^2 s^2)$$

Gyöktényezők szorzatára írhatjuk:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{P_M(s)}{Q_N(s)} = \frac{b_m \prod_{k=1}^{M_R} (\beta_k + s)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{M_c} (\gamma_k^2 + \rho_k^2 + 2\gamma_k s + s^2)^{\nu_k}}{a_N s^\nu \prod_{k=1}^{N_R} (\alpha_k + s)^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{N_c} (\zeta_k^2 + \sigma_k^2 + 2\sigma_k s + s^2)^{\xi_k}} = \\ &= A \frac{\prod_{k=1}^{M_R} (1 + s/\beta_k)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{M_c} (1 + 2\gamma_k s/(\gamma_k^2 + \rho_k^2) + s^2/(\gamma_k^2 + \rho_k^2))^{\nu_k}}{s^\nu \prod_{k=1}^{N_R} (1 + s/\alpha_k)^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{N_c} (1 + 2\sigma_k s/(\zeta_k^2 + \sigma_k^2) + s^2/(\zeta_k^2 + \sigma_k^2))^{\xi_k}}, \\ H(s) &= A \frac{\prod_{k=1}^{M_R} (1 + s\tau_k)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{M_c} (1 + 2\varepsilon_k \tau_{0k} s + s^2 \tau_{0k}^2)^{\nu_k}}{s^\nu \prod_{k=1}^{N_R} (1 + sT_k)^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{N_c} (1 + 2\delta_k \tau_{0k} s + s^2 T_{0k}^2)^{\xi_k}}, \end{aligned}$$

Az átviteli függvény alakja meghatározza az általa leírt rendszer jellegét.

$\nu < 0$ - differenciáló jelleg,

$\nu = 0$ - arányos jelleg,

$\nu > 0$ - integráló jelleg.

Az **átmeneti függvény** a rendszer egységugrásra adott válasza az időtartományban.

$$Y(s) = H(s)U(s); \quad Y(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

A végértéktétel alapján:

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{H(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s)$$

Az átmeneti függvény r - edik deriváltjának kezdeti értéke:

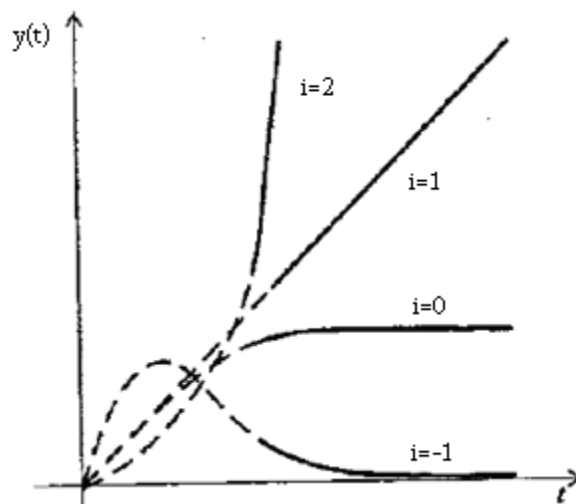
$$y^{(r)}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s^r H(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^r H(s)$$

Ha $m=n$ akkor az átmeneti függvénynek ugrása van $t=0$ pontban. Ha $n>m$ akkor $r=n-m$ deriváltban van ugrás.

Az átmeneti függvény állandósult értéke:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{H(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)$$

Legyen $i=\nu$, akkor:



Frekvenciatartománybeli alak:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg H(j\omega)}$$

Tehát az átviteli függvény kapcsolata a súlyfüggvénnyel és az átmeneti függvénnyel:

Súlyfüggvény - a rendszer Dirac impulzusra adott válasza időtartományban.

Átmeneti függvény - a rendszer egységugrásra adott válasza időtartományban.

Pólus-zérus elrendezés

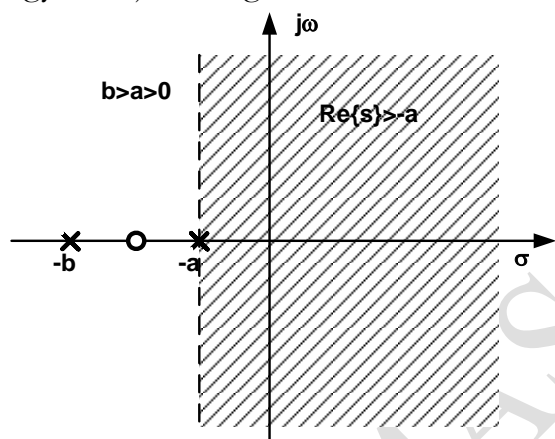
Egy példa:

$$x(t) = e^{-at} 1(t) + e^{-bt} 1(t), \quad a \neq b.$$

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-at} 1(t) + e^{-bt} 1(t)) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} 1(t) e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt} 1(t) e^{-st} dt = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(b+s)t} dt = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b}; \quad \operatorname{Re}\{s\} > \max(-a, -b) \\
 X(s) &= \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b} = \frac{2s+a+b}{(s+a)(s+b)} = \\
 &= \frac{2s+a+b}{s^2 + (a+b)s + ab}; \quad \operatorname{Re}\{s\} > \max(-a, -b)
 \end{aligned}$$

A pólusok: $p_1 = -a, p_2 = -a$,

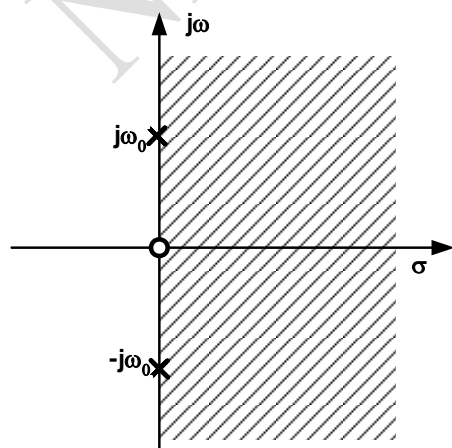
A zérus: $z_1 = -\frac{a+b}{2}$. Mivel minden valós racionális függvénynek azonos számú pólusa és zérusa van, így az $X(s)$ függvénynek a végtelenben van még egy nullája. A végtelenben levő nullákat grafikusan nem ábrázoljuk.



Egy másik példa:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) 1(t)$$

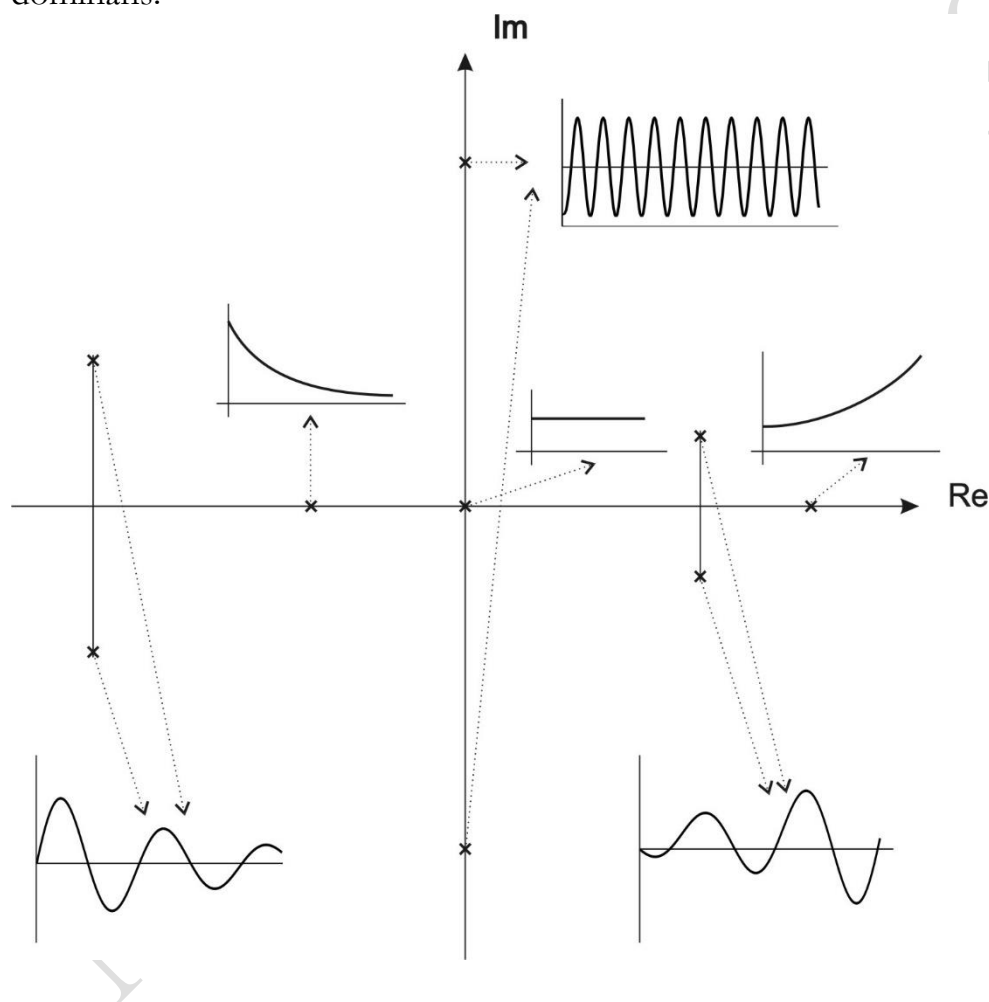
$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) 1(t) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-st} dt = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega_0)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega_0)t} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0
 \end{aligned}$$



Domináns pólus.

Stabil rendszer esetén domináns pólusnak azt a konjugált komplex póluspárt értjük, amely legközelebb fekszik a képzetes tengelyhez, vagyis amely póluspárnak legnagyobb a valós része.

Speciális esetben, ha a rendszernek csak valós pólusai vannak, akkor a legnagyobb valós pólus a domináns. Amennyiben hasonló távolságra a képzetes tengelytől létezik valós és konjugált komplex pólus is, akkor el kell dönteni, hogy fontos-e a rendszer gyors válasza. Ha igen, akkor némi túllengés árán is a valós pólus lesz a domináns, vagy elegendő a lassúbb rendszer de túllengés nélkül, és akkor a konjugált komplex pár lesz a domináns.



FÜGGVÉNYEK LAPLACE TRANSZFORMÁCIÓJA

Sorszám	$f(t)$ ha $t > 0$	$F(s)$
	$af(t)$	$aF(s)$
	$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots$	$F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + \dots$
	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \frac{d^{k-1} f(0^+)}{dt^{k-1}}$
	$\int f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s}$
	$f(t) \cdot e^{-at}$	$F(s+a)$
	$f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
	$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
	$\delta(t)$ egységimpulzus függvény	1
	$u(t)$ egységugrás függvény	$\frac{1}{s}$
	T	$\frac{1}{s^2}$
	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
	$t^{n-1} \cdot e^{-at} \cdot \frac{1}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
	$e^{-at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
	$e^{-at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
	$\delta(t-a)$	e^{-as}
	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
	$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
	$\cos^2 t$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right)$
	$\sin^2 t$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right)$
	$\sin at \cdot \sin bt$	$\frac{2abs}{[s^2 + (a+b)^2] \cdot [s^2 + (a-b)^2]}$

Az alaptagok jelátviteli tulajdonságai

Egy irányítási rendszer vizsgálatához ismernünk kell a benne előforduló elemek, szervek viselkedését. A különböző feladatot ellátó elemek, szervek viselkedésében sok közös tulajdonságot fedezhetünk fel. Ezeket a tulajdonságokat matematikai modellé redukáljuk, azért, hogy segítségével a vizsgálatainkat matematikai módszerekkel végezhessük el.

E modellezés után jutunk el a jelátvivő tag fogalmához (absztrakciójához). A különböző típusú jelátvivő tagra érvényes általános megállapításokat értelmezzük az irányítási kör különböző szerveire, készülékeire, amelyek a legkülönbözőbb kialakításúak lehetnek, és így azok jelátviteli működését jobban megismerhetjük, illetve azok alkalmazása, javítása, karbantartása is egyértelmű elvekre épülő gyakorlattá válhat.

Ahhoz, hogy az irányítási rendszerek működését megértsük, a jelátvivő tagok elemzése során az állandósult állapotú és dinamikus tulajdonságuk együttes megismerésére van szükség.

A tagok jellemzésére az átmeneti $h(t)$ és a súlyfüggvényt $g(t)$, valamint az átviteli függvényt $W(p)$, impulzusátviteli függvényt $W(z)$ és a frekvenciafüggvényt $W(j\omega)$ használjuk.

Egy jelátvivő tag viselkedését annak leíró differenciálegyenlete határozza meg. Az általános differenciálegyenlet a tag struktúráját, azaz felépítését (bal oldal) és az alkalmazott bemenetet vagyis gerjesztést (jobb oldal) egy egyenletbe foglalja össze. Egy lineáris rendszer általános differenciálegyenlete:

$$T_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \left(T_{dm}^m \frac{du(t-\tau)}{dt^m} + \dots + T_{d1} \frac{du(t-\tau)}{dt} + u(t-\tau) \right)$$

A rendszer energiatárolóit a differenciálegyenletben a T időállandókkal jellemezzük. Az energiatárolókat tartalmazó rendszer differenciálegyenletének homogén részében a kimenő jelnek olyan rendűnek differenciálhányadosa szerepel, ahány energiatárolót tartalmaz a tag. Minden matematikailag különválasztható és leírható energiatároló eggyel növeli a differenciálegyenlet rendszámát (fokát).

A jelátvivő tag a jel átvitelét két ok miatt késlelteti:

a.) A jelátvivő tag energiatárolói a bemenőjel hatására véges idő alatt érik el egyensúlyi állapotukat, és ezzel késleltetik az állandósult állapotbeli kimenőjel megjelenését.

b.) A jelátvivő tag belső felépítéséből adódóan, a véges idejű τ késleltető hatású, mert a jel átvitelét τ ideig zárolja. Ezt a hatást holtidőnek nevezzük. A holtidő hatása (érvényre jutása) az általános differenciálegyenlet felírásakor a bemenet argumentumában $(t-\tau)$ kerül kifejezésre.

A jelátviteli jelenség állandósult állapota akkor következik be, ha az általános differenciálegyenlet bal oldalán szereplő rész deriváltjai nullává válnak, azaz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^n y(t)}{dt^n} = 0;$$

Állandósult állapotban a K átviteli tényező ad összefüggést a kimenő ($y(\infty)$) és a bemenőjel $u(\infty)$ állandósult értéke között. Mértékegysége megegyezik a kimenő és a bemenőjel mértékegységeinek a hányadosával.

Ha az átviteli tényező mértékegységmentes, akkor erősítésként értelmezzük.

Az alaptagok típusát és paramétereit szerkezeti felépítésük határozza meg. Az állandósult állapotot leíró összefüggésekből a jelátvivő tagok következő alaptípusai származtathatók:

a.) Arányos tag – kimenőjele arányos a bemenőjellel

$$y(\infty) = Ku(\infty) \quad (3.6)$$

b.) Integráló tag – kimenőjele arányos a bemenőjel idő szerinti integráljával

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T \frac{dy(t)}{dt} = Ku(t) \rightarrow y(\infty) = \frac{K}{T} \int_0^t u(t) dt + c \quad (3.7)$$

c.) Differenciáló tag

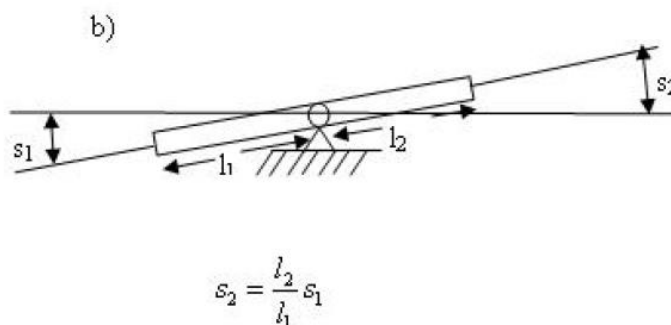
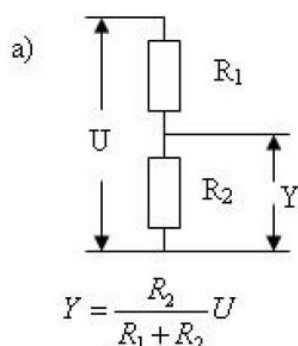
$$y(t) = A_D \frac{du(t)}{dt} \quad (3.8)$$

d.) Holtidős tag

$$y(t) = u(t - \tau) \quad (3.9)$$

A fenti alaptípusoknak számtalan változata létezik, annak függvényében, hogy a rendszer hány jelkésleltető energiátárolót tartalmaz.

Arányos tagok



Az ideális arányos tag viselkedését leíró és jellemző formák a következők:

1.) Differenciál egyenlete:

$$y(t) = K_{ob} u(t)$$

2.) Differencia egyenlete:

$$y(k) = K_{ob} u(k)$$

3.) Átviteli függvénye:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = K_{ob}$$

4.) Impulzus átviteli függvénye:

$$W(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = K_{ob}$$

5.) Átmeneti és súlyfüggvénye:

$$h(t) = K_{ob} 1(t)$$

$$g(t) = K_{ob} \delta(t)$$

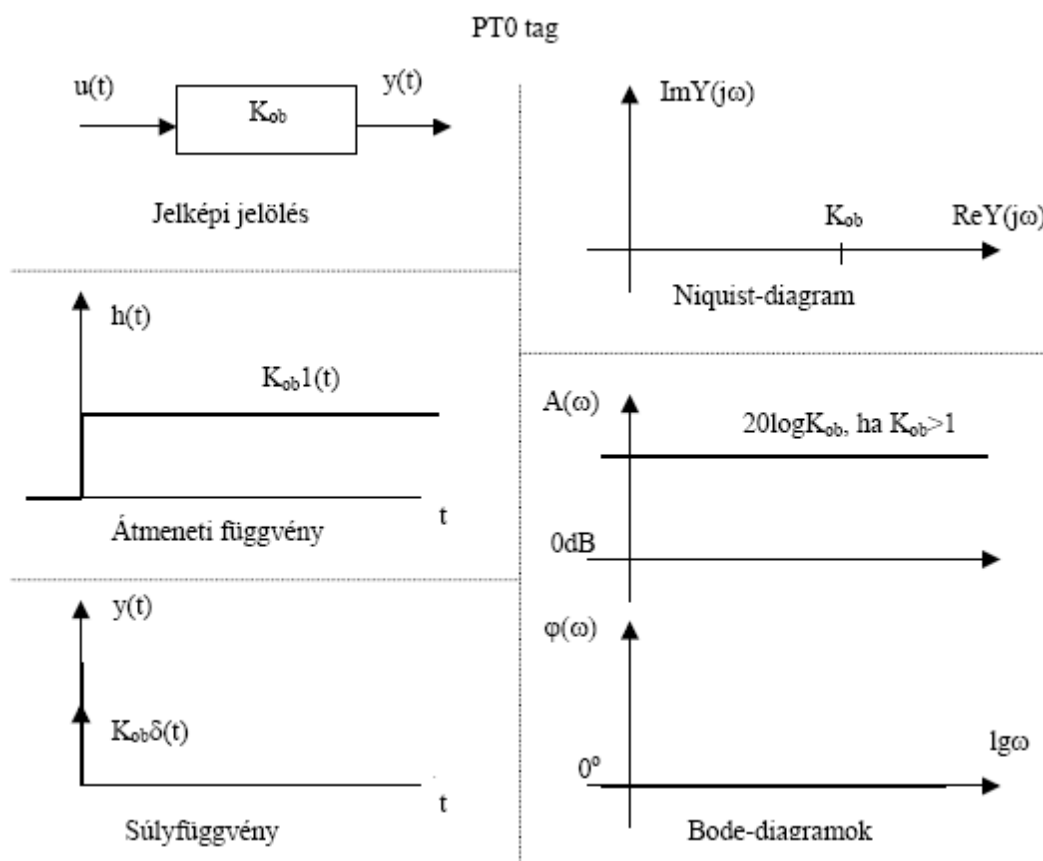
6.) Frekvenciafüggvénye:

$$W(j\omega) = K_{ob}$$

$$A(\omega) = 20 \log W(j\omega) = 20 \log K_{ob}$$

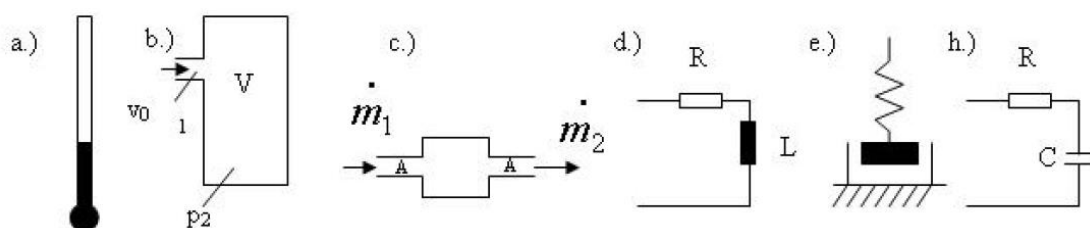
7.) Logaritmikus frekvenciafüggvényei:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}\{W(j\omega)\}}{\text{Re}\{W(j\omega)\}} = 0$$



Az arányos tagnak nincs se pólusa, se zérusa.

Egy energiatárolós arányos időkéseletető tag PT1



Az egy energiatárolós arányos időkéseletető tag viselkedését leíró és jellemző formák a következők:

1.) Differenciálegyenlete:

$$T \frac{dy}{dt} + y = K_{ob} u$$

2.) Differenciaegyenlete:

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k)$$

3.) Átviteli függvénye:

$$W(p) = \frac{K_{ob}}{Tp + 1}$$

4.) Impulzus átviteli függvénye:

$$W(\tau) = \frac{K_{ob}}{T} \frac{z}{z - e^{-\frac{T_0}{T}}}$$

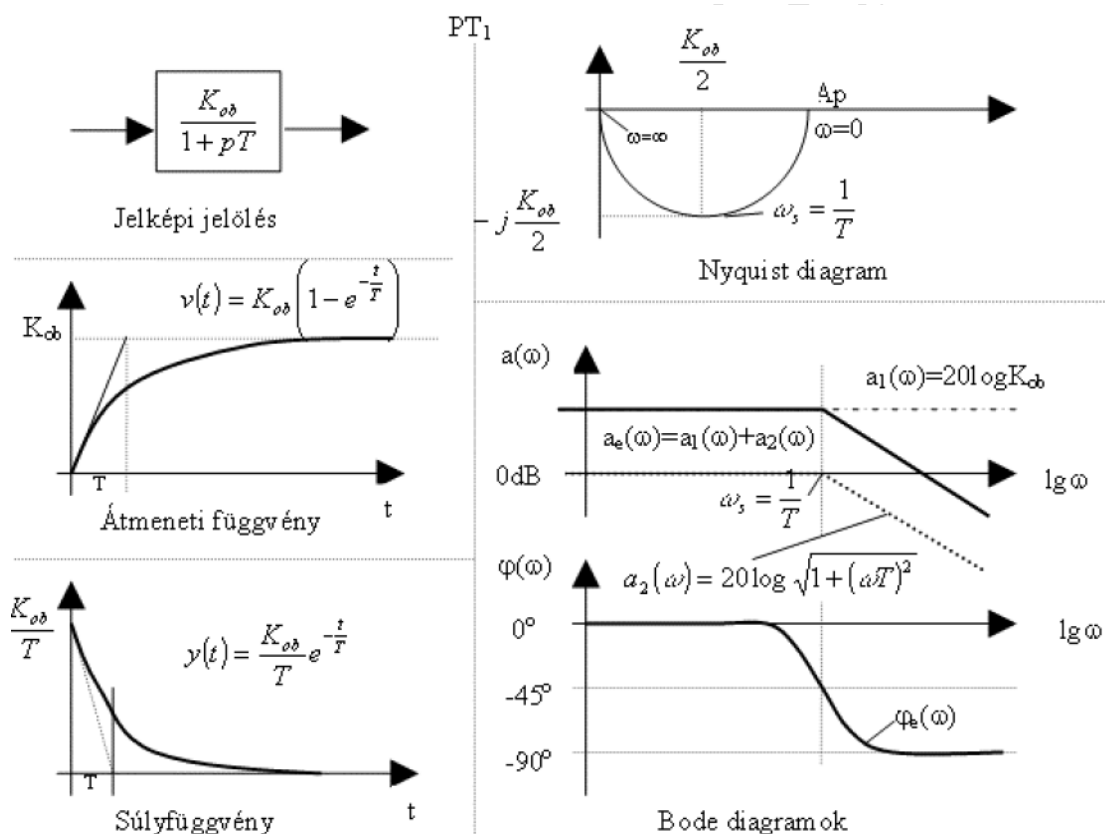
5.) Átmeneti és súlyfüggvénye:

$$h(t) = K_{ob} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$g(t) = \frac{K_{ob}}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

6.) Frekvencia függvénye:

$$W(j\omega) = \frac{K_{ob}}{1 + j\omega T}$$



7.) Logaritmusos frekvencia függvényei:

$$A(\omega) = 20 \log K_{ob} - 20 \log \sqrt{1 - (\omega T)^2}$$

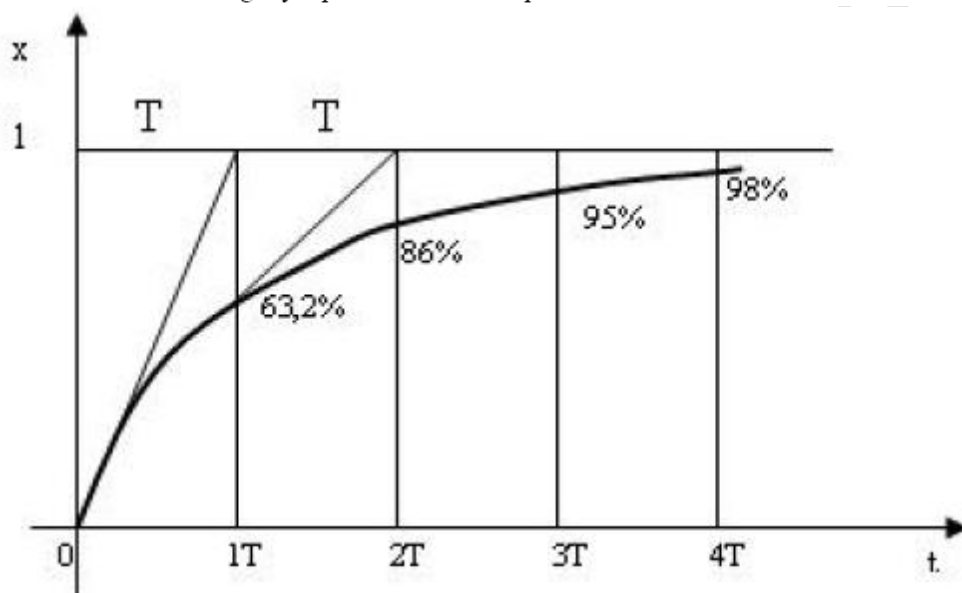
$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega T)$$

8.) A folyamatos rendszernek egy $p = -\frac{1}{T}$, a mintavételezett rendszernek pedig $z = e^{-\frac{T_0}{T}}$ valós pólusa van.

A tag jelképi jelölése és jellemző diagramjai a 3.4-es ábrán láthatók.

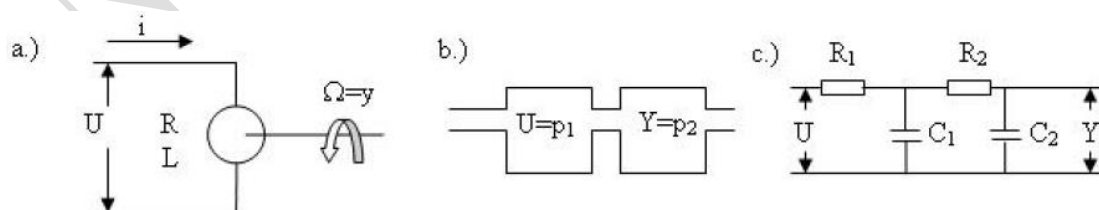
A PT1 – es tag bemenetének ugrásszerű U_0 amplitúdójú változása után a kimeneti jellemző a bemenettel arányos sebességgel kezd változni, de a kezdeti sebesség fokozatosan csökken, míg nem hosszabb idő múlva az irányított jellemző, új ($K_{ob}U_0$) végértéket ér el. Az átmeneti függvényt a T időállandó jellemzi. Az átmeneti idő időállandója az az időtartam, amely alatt a tag a végértékének a 63.2% - át éri el. Az időállandó négyszeres értéke alatt az átmeneti függvény már 98.2% - át éri el. A gyakorlatban úgy tekintjük, hogy ekkor már az átmeneti folyamat lecsengett.

Az időállandó más meghatározás szerint az az időtartam, amelyet a kiindulási pontban húzott érintő az időtengellyel párhuzamos aszimptotából lementsz.



A gyakorlatban előforduló időállandók széles határok között, egy ezredmásodperc és néhány óra között változnak.

Két energiatárolós arányos időkéseltető tag PT2



1.) Differenciálegyenlete: $T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = K_{ob} u$

Helyettesítve: $T_2=T$ és $\xi = \frac{1}{2} \frac{T_1}{T_2}$ ahol a ξ a lengési tényező, a differenciálegyenlete:

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = K_{ob} u$$

Helyettesítve az $\omega_0 = \frac{1}{T}$ ahol ω_0 a saját frekvencia, a rendezés után a differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi \omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = K_{ob} \omega_0^2 u$$

2.) Differencia egyenlete: $a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_0 u(k)$

ahol: $a_0 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 + \frac{2\xi T}{T_0} + 1; a_1 = -\frac{2\xi T}{T_0} - \frac{2T}{T_0^2}; a_2 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2$

3.) Átviteli függvénye:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_{ob}}{1 + T_1 p + T_2 p^2} = \frac{K_{ob}}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{K_{ob} \omega_0^2}{p^2 + 2\xi \omega_0 + \omega_0^2}$$

4.) Az impulzus átviteli függvényének formája a ξ értékétől függően különböző felépítésű lehet.

5.) Átmeneti és súlyfüggvénye:

Az időfüggvények visszakereséséhez figyelembe kell venni, hogy a ξ értékétől függően, a karakterisztikus egyenlet gyökei három esetet képviselnek:

a.) $\xi > 1$ A gyökök negatív valóságok.

$$p_1 = -\frac{\xi}{T} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = -\frac{1}{T_a} \quad ; \quad p_2 = -\frac{\xi}{T} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = -\frac{1}{T_b}$$

Ekkor:

$$h(t) = K_{ob} \left[1 - \frac{T_a}{T_a - T_b} e^{-\frac{t}{T_a}} + \frac{T_b}{T_a - T_b} e^{-\frac{t}{T_b}} \right]$$

$$g(t) = K_{ob} \frac{1}{T_a - T_b} \left[e^{-\frac{t}{T_a}} - e^{-\frac{t}{T_b}} \right]$$

b.) $\xi = 1$ A gyökök egybevágóak. $p_1 = p_2 = -\frac{1}{T}$

Ekkor:

$$h(t) = K_{ob} \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \left(1 + \frac{t}{T} \right) \right]$$

$$g(t) = \frac{K_{ob}}{T^2} t e^{-\frac{t}{T}}$$

c.) $\xi < 1$ A gyökök konjugált komplex gyökpárt alkotnak,

$$p_1 = -\frac{\xi}{T} + j \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = -\alpha + j\omega_p \quad ; \quad p_2 = -\frac{\xi}{T} - j \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = -\alpha - j\omega_p$$

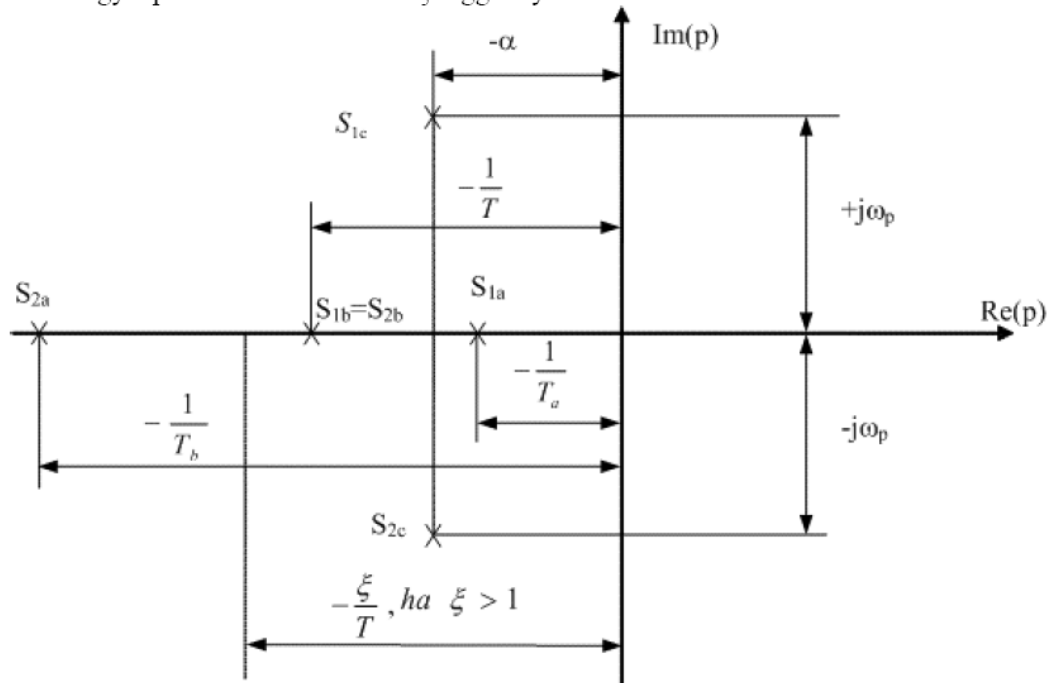
ahol α a csillapítási tényező, ω_p pedig a lengési körfrekvencia vagy a csillapított saját frekvencia.

Ekkor:

$$h(t) = K_{ob} \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_p t + \frac{\alpha}{\omega_p} \sin \omega_p t \right) \right]$$

$$g(t) = \frac{K_{ob}}{\omega_p T^2} e^{-\alpha t} \sin \omega_p t$$

A gyökök vagyis pólusok elrendezése a ξ függvényében a 3.7 –es ábrán látható.



3.7 ábra - A PT2 tag pólus elrendezése a ξ függvényében

Látható, hogy a tag viselkedése a ξ értékétől, vagyis a benne lévő két időállandó viszonyától függ, mert: $\xi = \frac{1}{2} \frac{T_1}{T_2}$

Ha $\xi > 1$, a tag kimenőjele aperiódikus módon (kúszó jelleggel) éri el állandósult állapotát, egy időállandó értéket;

Ha $\xi = 1$, a tag kimenőjele aperiódikus határjelleggel (a leggyorsabb kúszó jelleggel) éri el állandósult állapotát, egy állandó értéket;

Ha $\xi < 1$, a tag kimenőjele csillapodó lengésekkel éri el állandósult állapotát. Vagyis egy állandó érték körül csillapodó amplitúdójú harmonikus lengést végez. A ξ a lengés mértékére jellemző szám, értékének csökkenésekor növekszik a túllendülés amplitúdója.

A PT2 tag átmeneti és súlyfüggvénye relatív egységben a 3.8 –as ábrán látható.

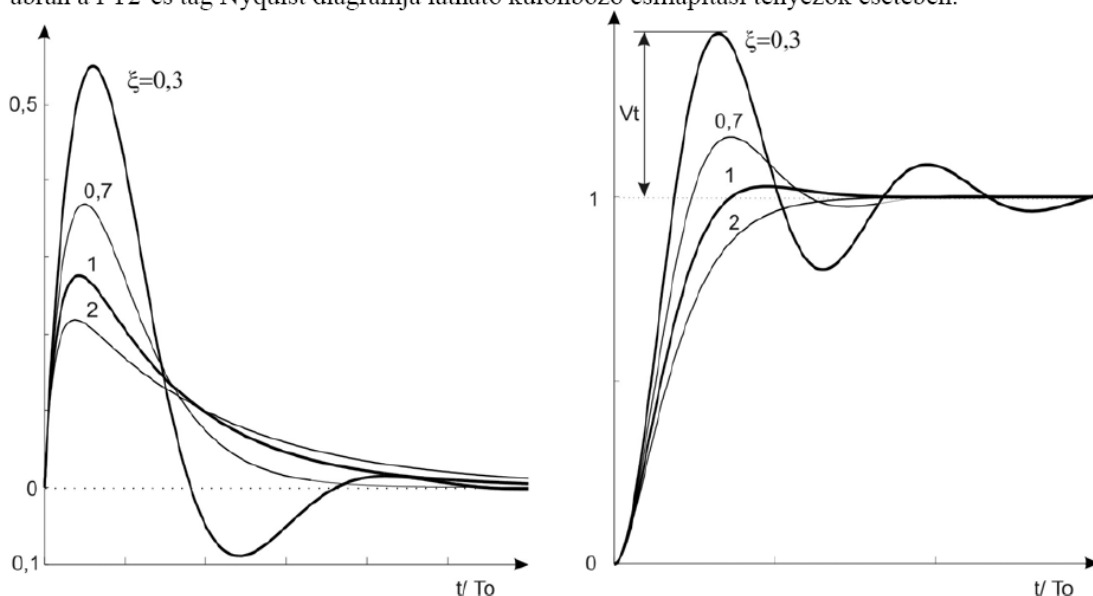
A lengés és a csillapítás kapcsolatát a 3.9 ábra segíti áttekinteni, ahol:

$$T_{cs} = \frac{1}{\alpha} = \frac{T}{\xi} = \frac{1}{\xi \omega_0} \quad \text{csillapítási idő;}$$

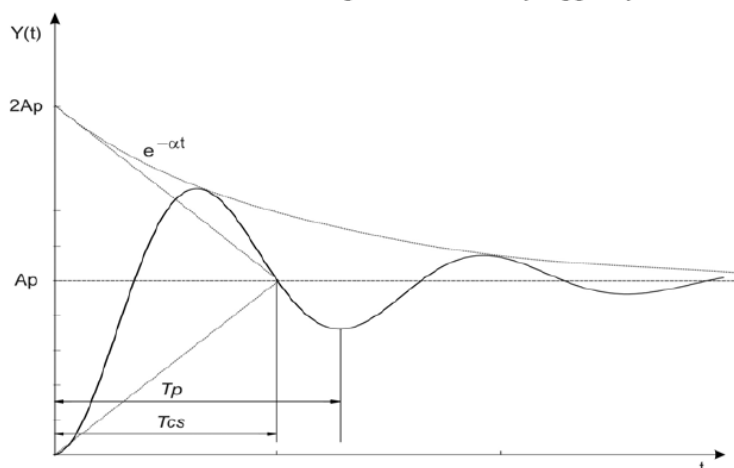
$$T_p = 2\pi \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{lengési periódusidő.}$$

6.) Frekvenciafüggvénye: $W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{K_{ob}}{1 + j\omega 2\xi T + (j\omega)^2 T^2}$

A frekvenciafüggvény ábrázolásakor is figyelembe kell venni a $\xi \geq 1$ eseteket. A 6.10 –es ábrán a PT2-es tag Nyquist diagramja látható különböző csillapítási tényezők esetében.



3.8 ábra - A PT2-es tag átmeneti és súlyfüggvénye



3.9 ábra - A lengés és a csillapítás kapcsolata a PT2-es tag $\xi < 1$ esetén

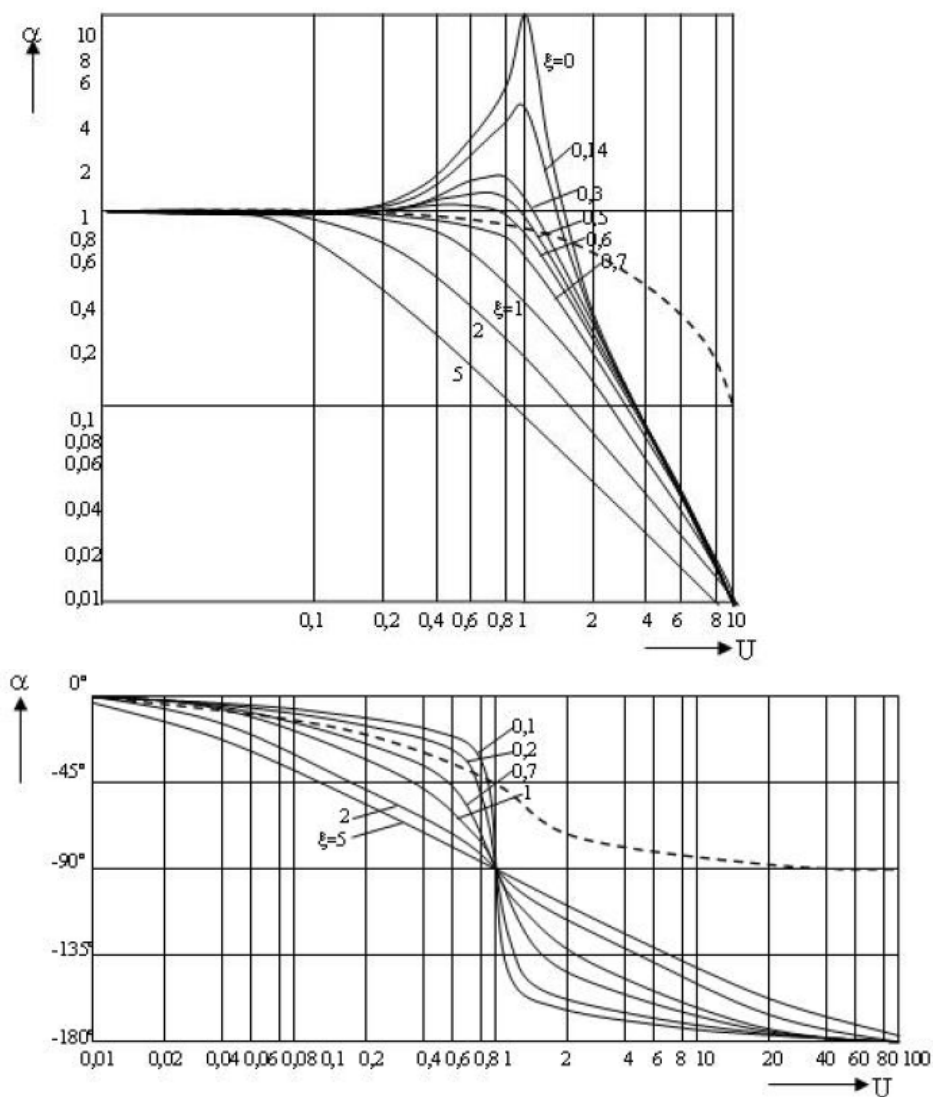
A frekvenciamenetet vizsgálva azt látjuk, hogy $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ esetén relatív kiemelés jön létre. A körfrekvenciát $\omega=0$ –ról növelve, a kimenőjel amplitúdója is nő, és $\omega=\omega_n$ –nél vagyis a rezonancia frekvencián maximum van. A rezonancia frekvencia értéke:

$$\omega_r = \frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{T}$$

Tovább növelve az ω - át a kimenőjel amplitúdója csökken és $\omega=\omega_0$ –án vagyis a saját illetve sarkfrekvencián a ki – és bemenőjel között a fáziseltolás -90° lesz. Tovább növelve az ω - át a kimenőjel amplitúdója tovább csökken, és $\omega=\omega_c$ –nél vagyis a vágási frekvenciánál az $\omega=0$ –hoz tartozó jel amplitúdójával lesz egyenlő.

7.) A logaritmikus frekvencia függvényei

A logaritmikus frekvenciafüggvények a ξ különböző értékeire a 3.11 –es ábrán láthatók.



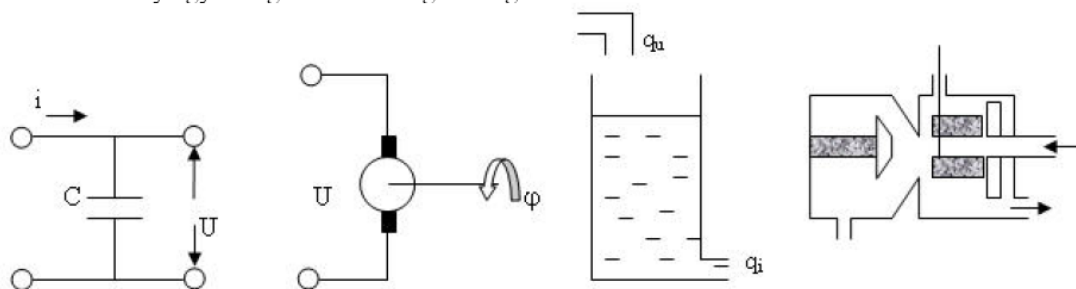
3.11 ábra - A PT2 –es tag frekvencia függvényei a ξ különböző értékeire

Integráló tagok

Az integráló tagokat az jellemzi, hogy állandósult állapotban a kimenőjel a bemenőjel integráljával arányos. Véges bemenőjel esetén, a kimenőjel, nyugalmi állapota nem jöhet létre. Vagyis állandósult bemenőjelhez csak állandó változási sebességű kimenőjel tartozhat. A változás állandó, és a kimenet minden határon túl egész a telítődésig növekszik.

ITO

Néhány egy energiatárolós integráló tagként kezelhető elem vázlata a 6.12 –es ábrán látható.



3.12 ábra - Egy energiatárolós integráló tagok

1.) Differenciálegyenlete: $T_i \frac{dy}{dt} = K_{ob} u$

Ebből az integrálási átviteli tényező: $A_I = \frac{K_{ob}}{T_i}$

2.) Differencia egyenlete: $y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = \frac{K_{ob}}{T_i} u(k-1)$

3.) Átviteli függvénye: $W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_{ob}}{T_i p} = \frac{A_I}{p}$

4.) Impulzus átviteli függvénye: $W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = A_I \frac{z}{(z-1)^2}$

5.) Átmeneti és súlyfüggvénye: $h(t) = A_I t$
 $g(t) = A_I$

Az integrálási vagyis ismétlési idő azt jelenti, hogy a kimenőjel T_i idő múlva éri el a bemenőjel értékét, azaz ismétli meg önmagát.

$$t_{izm} = \frac{T_i}{A} = \frac{1}{A_I} = T_i$$

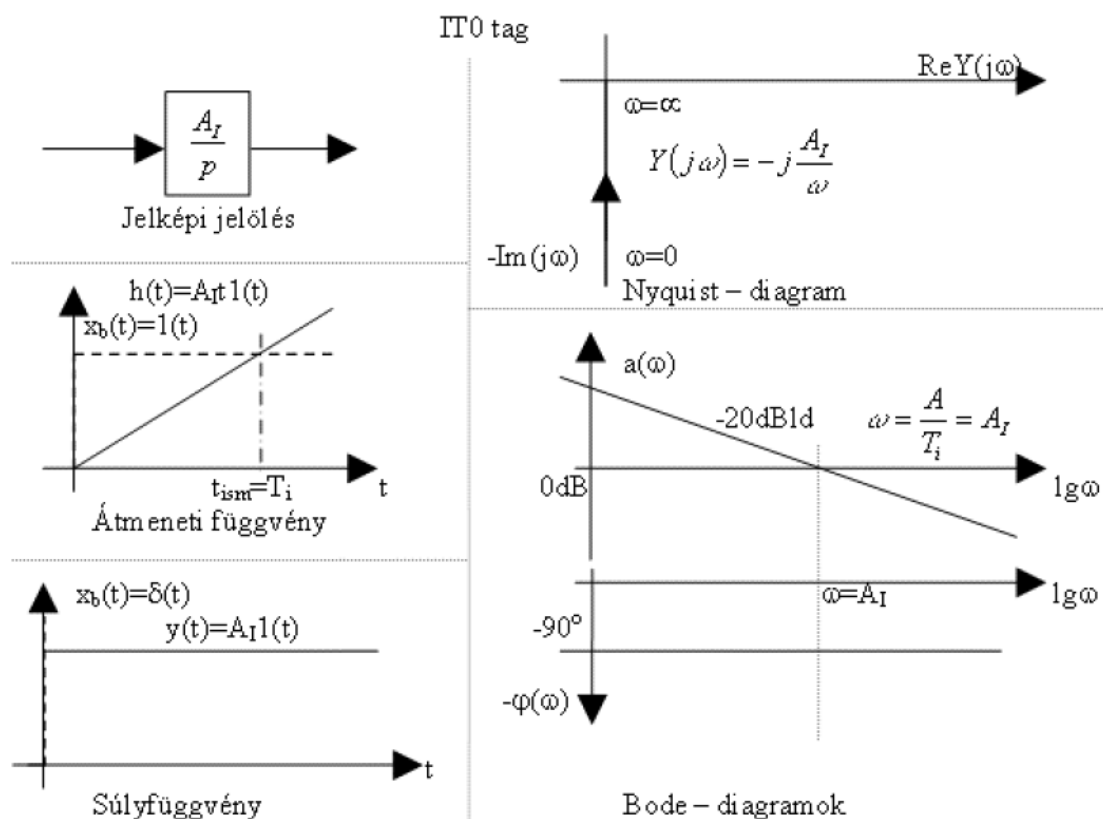
6.) Frekvenciafüggvénye: $W(j\omega) = \frac{K_{ob}}{j\omega T_i} = \frac{A_I}{j\omega} = \frac{1}{T_i j\omega}$

$$A(\omega) = 20 \log \frac{K_{ob}}{\omega T_i} = -20 \log \frac{\omega}{A_I} = -20 \log T_i \omega$$

7.) Logaritmikus frekvenciafüggvényei:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-A_I}{\omega} = -90^\circ$$

A 3.13 –as ábrán az egy energiatárolós integráló tag jelképi jelölése és jellemző diagramjai láthatók.



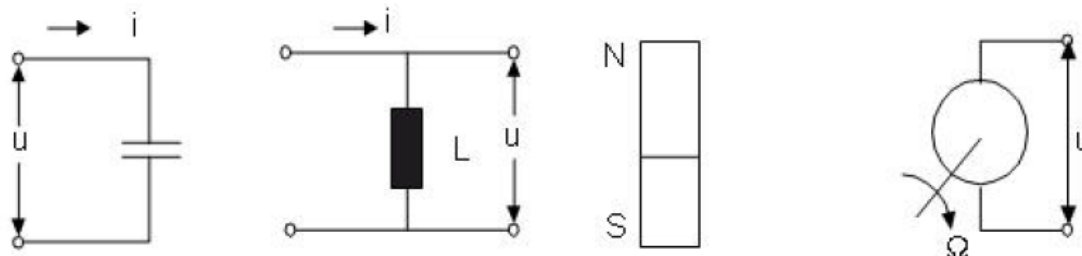
Differenciáló tagok

A differenciáló tagokat az jellemzi, hogy állandósult állapotban a kimenőjel, a bemenőjel deriváltjával arányos.

Ha a bemenőjel változási sebessége zérus értékű, akkor a differenciáló tag kimenőjele állandósult állapotban szintén zérus értékű. Ha egy ilyen tagot sorosan iktatunk az irányítási rendszerbe, ekkor ez azt eredményezi, hogy az irányítási rendszer hatásvonala - állandósult állapotában - szakadást mutat.

Az ideális differenciáló tagnak nincs energiatárolója. Egyes elemek a működési tartományuk egy adott sávjában mégis ideális differenciáló tagoknak tekinthetők.

Néhány ilyen elem vázlata a 3.14-es ábrán látható. A továbbiakban csak egy eszményi differenciáló tag tulajdonságait elemezzük.



1.) Differencia egyenlete:

$$y = T_D \cdot \frac{du}{dt}$$

ahol a T_D a differenciálási átviteli tényező

2.) Differencia egyenlete nem írható fel.

3.) Átviteli függvénye:

$$W(p) = T_D \cdot p$$

4.) Impulzusfüggvénye nem írható fel.

5.) Átmeneti és súlyfüggvénye:

$$h(t) = T_D \cdot \delta(t)$$

$$g(t) = -T_D \cdot \delta(t)$$

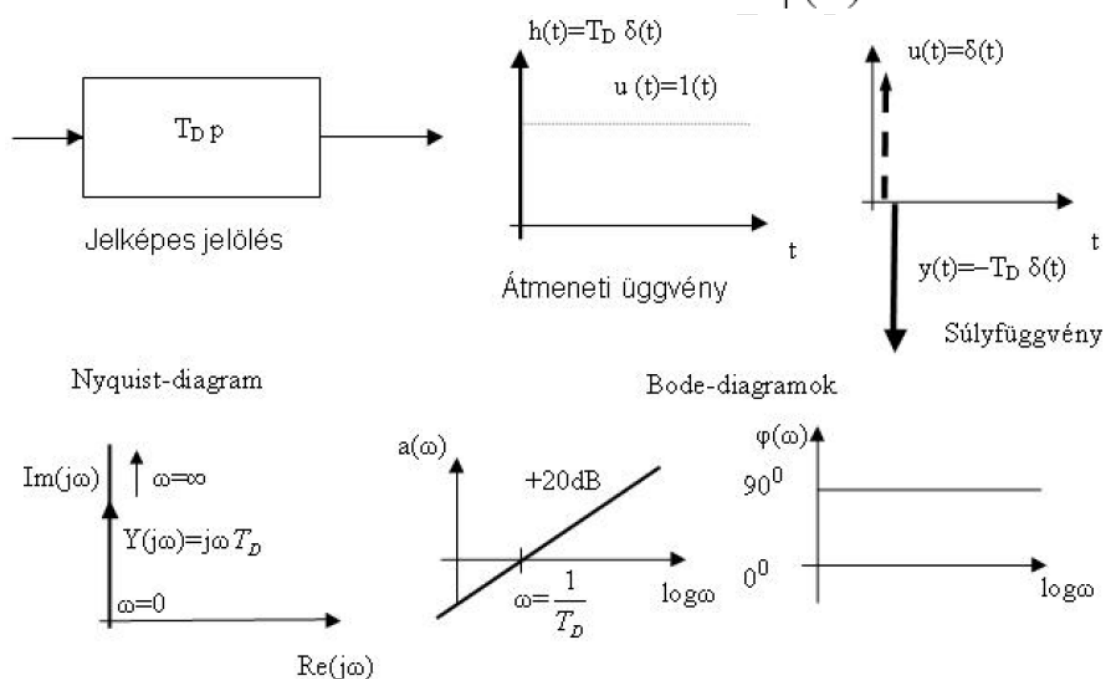
6.) Frekvenciafüggvénye:

$$W(j\omega) = j\omega T_D$$

7.) Logaritmikus frekvenciafüggvénye:

$$A(\omega) = 20 \log(T_D \omega)$$

$$\varphi(\omega) = +90^\circ$$



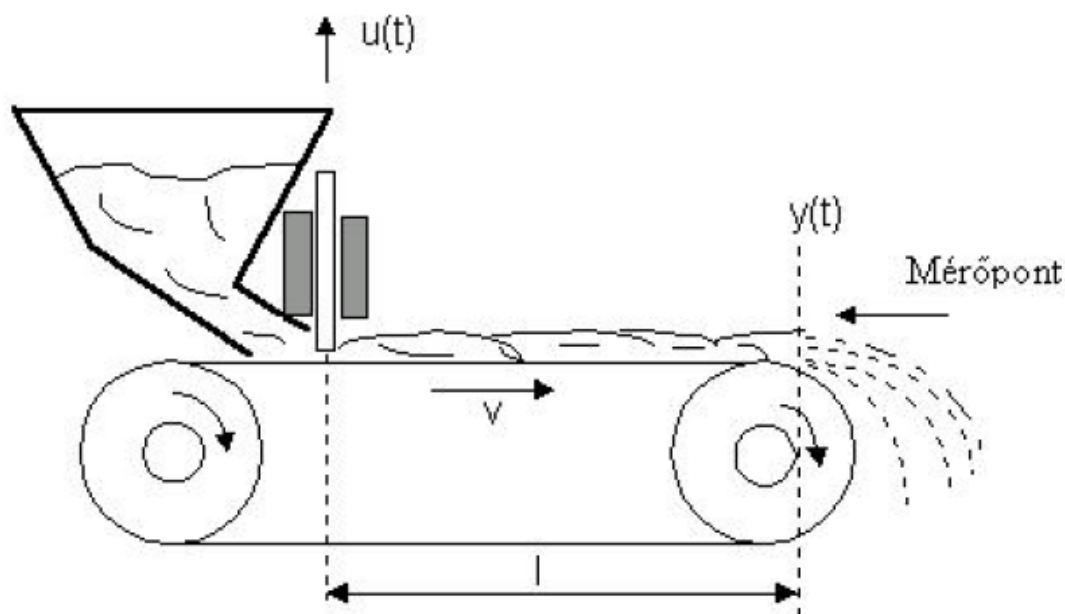
Az eszményi differenciáló tagnak egységugrás alakú bemenőjel esetén, végtelen nagy kimenőjelet kellene adnia a belépés pillanatában. A gyakorlatban a tagok csak bizonyos tartományban lineárisak, de ezt a tartományt is a telítődés korlátozza, így a kimenőjel a végtelen értéket nem érheti el. A tagban lévő, esetleg igen kis értékű, de mégis csak létező energiátároló az elérhető legnagyobb értéket is csak időkésséssel engedi létrejönni.

Holtidős tagok

Vannak tagok, amelyek a bemenő jellemző alakulását egész híven tovább adják a kimenő jellemzőben; a továbbadás azonban csak meghatározott idő múlva következik be. Ez az idő, amely eltelik addig, amíg a bemenő jellemző változása, a kimenőn érezhetővé nem válik: a holtidő (τ).

A holtidő oka az, hogy a hatás a tag belsejében véges sebességgel terjed, ezért a holtidő rendszerint akkor jelentkezik, ha a hatás anyagáramhoz van kötve.

Holtidős tagként tekinthető egy szállítószalag, mivel az elején lévő bemenő jelnek tekintett anyagmennyiség csak egy meghatározott idő elteltével jelenik meg a kimeneten, azaz a szalag végén.



Holtidős tag lehet egy hosszú csővezeték is, amelyben adott hőmérsékletű folyadék áramlik. Ha a csőszakasz elején a folyadék hőmérséklete ugrásszerűen megváltozik, ez a változás a csőszakasz végén is megközelítőleg ugrásszerűen következik be, de csak a holtidő eltelte után.

1.) Differenciálegyenlete: $y(t) = K_{ob} u(t - \tau)$

2.) Differenciaegyenlete: $y(k) = K_{ob} u(k - d)$

ahol a d a $\frac{\tau}{T_0}$ egészszámú hányadosa.

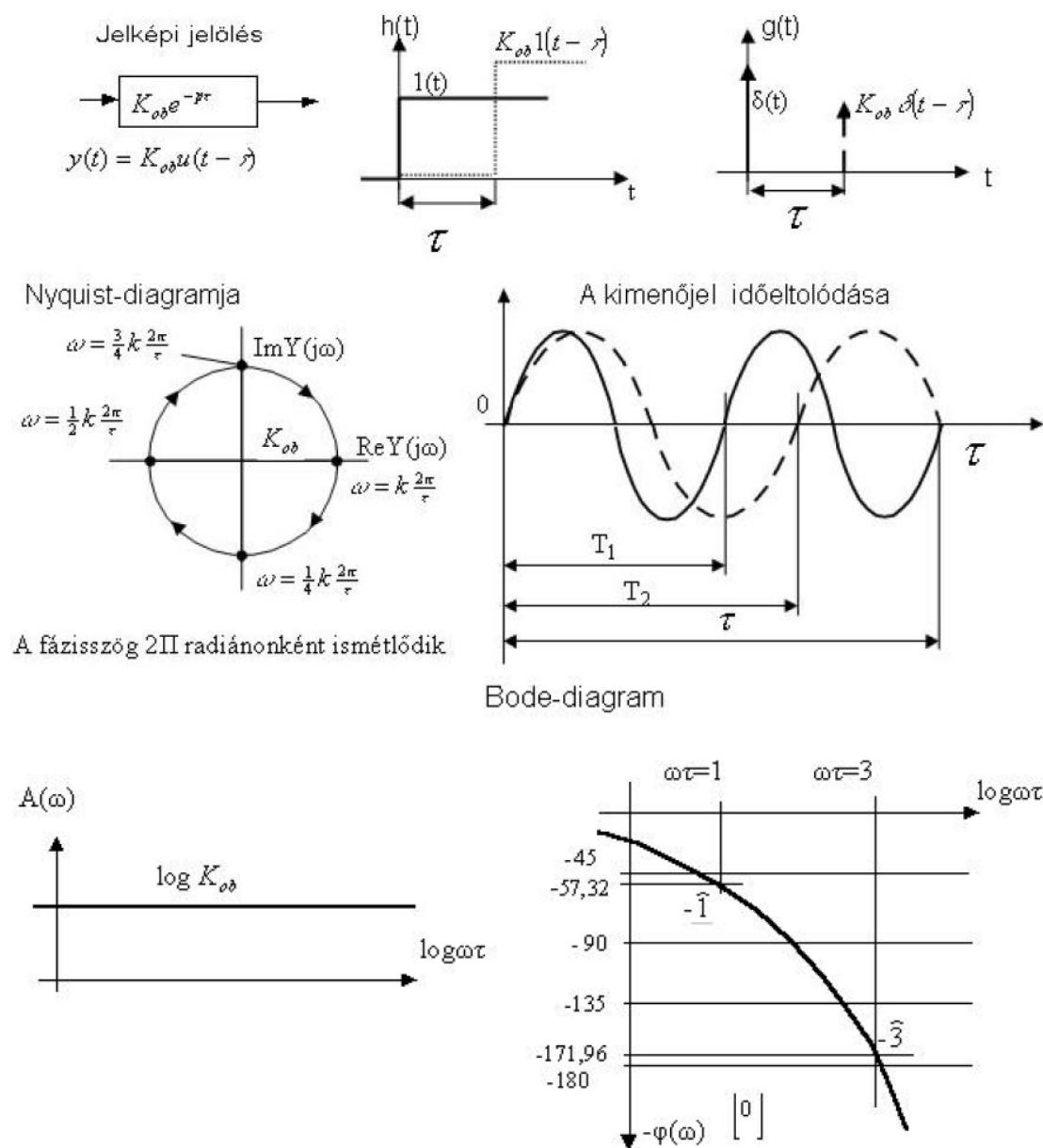
3.) Átviteli függvénye: $W(p) = K_{ob} e^{-p\tau}$

4.) Impulzus átviteli függvénye: $W(z) = z^{-d}$

5.) Átmeneti és súlyfüggvénye: $h(t) = K_{ob} (t - \tau)$
 $g(t) = K_{ob} \delta(t - \tau)$

6.) Frekvenciafüggvénye: $W(j\omega) = K_{ob} e^{-j\omega\tau}$

7.) Logaritmikus frekvenciafüggvénye: $A(\omega) = 20 \log K_{ob}$
 $\varphi(\omega) = -\omega\tau$



A holtidős tag fázisszöge 2π radiánonként ismétlődik

$$a(\omega) = 20 \log K_{0\delta}$$

mivel $2\pi = 360^\circ$

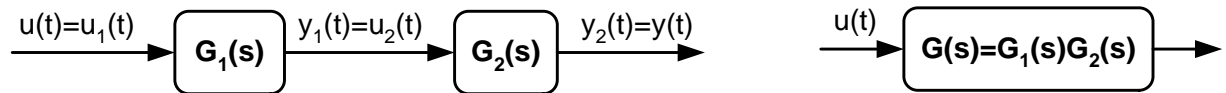
$$\varphi(\omega) = -\omega\tau$$

$$-1 = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.32^\circ$$

Tagok összetett kapcsolásai

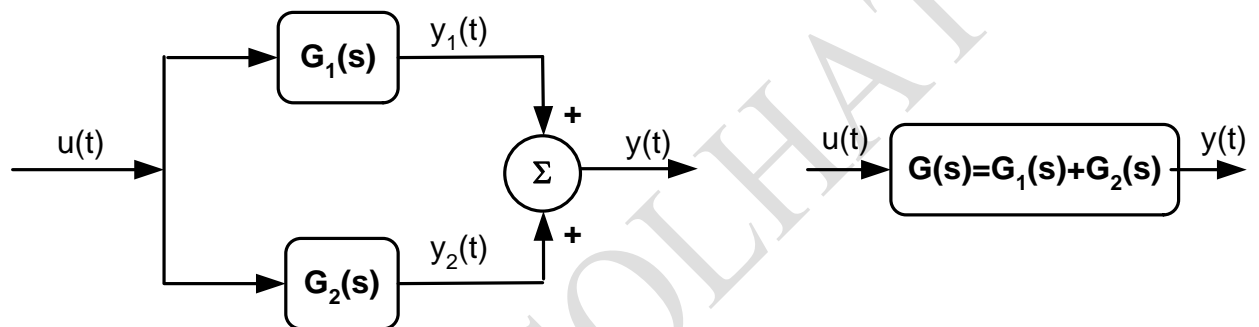


Soros:



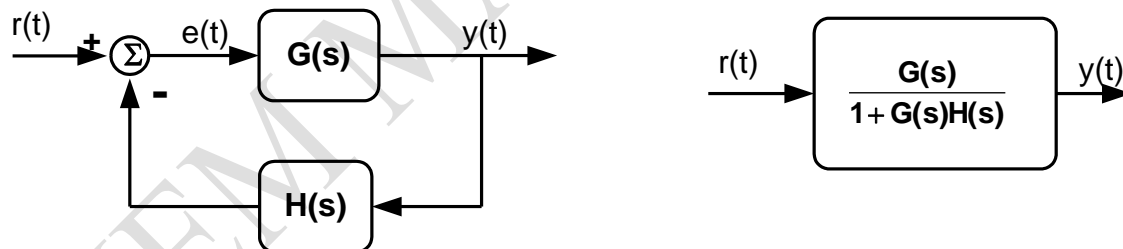
$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

Párhuzamos:



$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

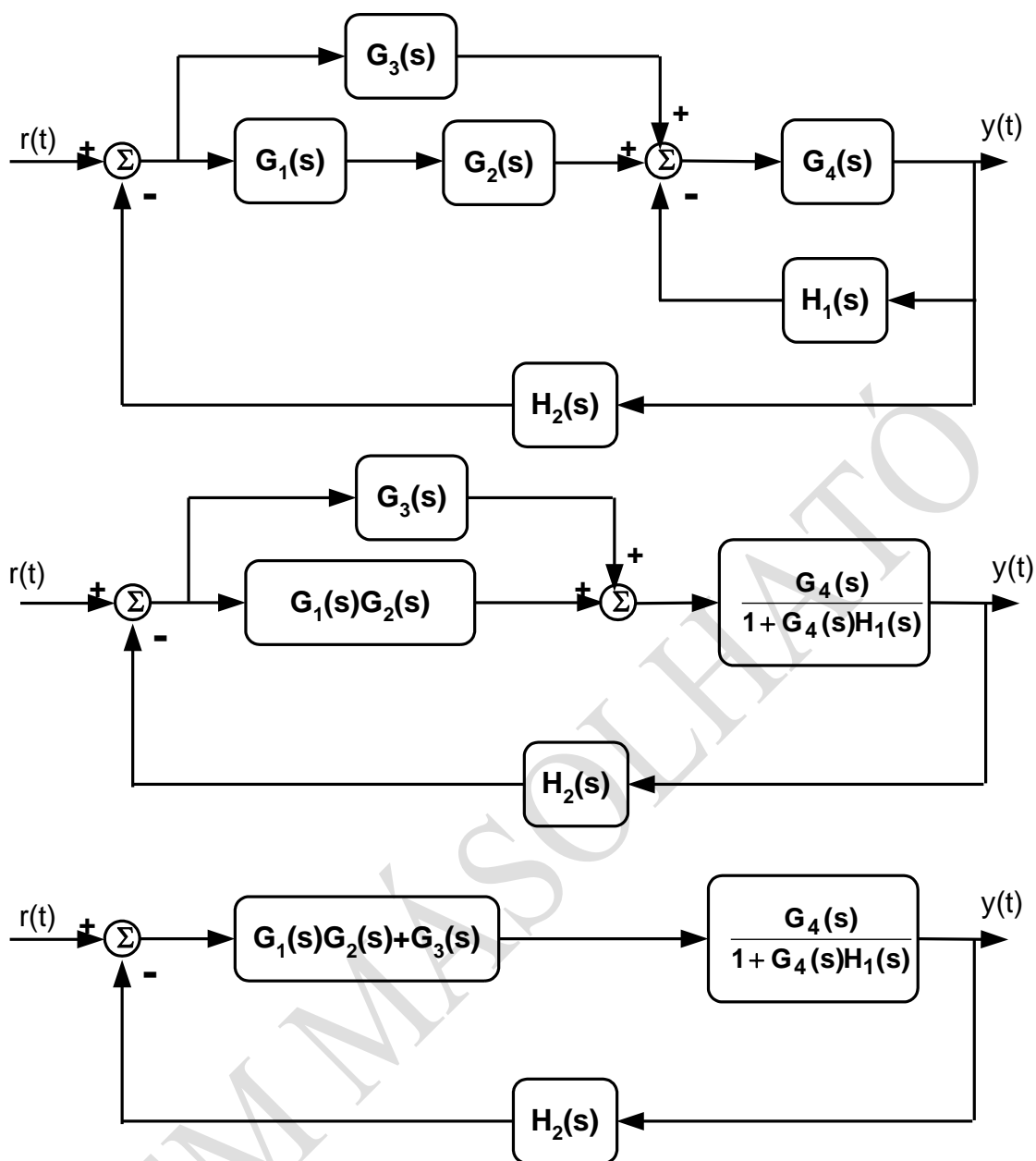
Visszacsatolás:



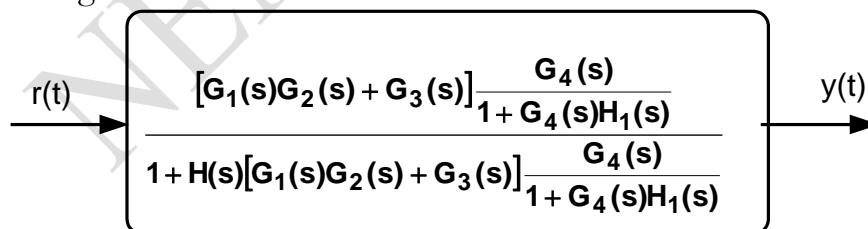
$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)Y(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} R(s)$$

Összetett kapcsolat:



és végül:

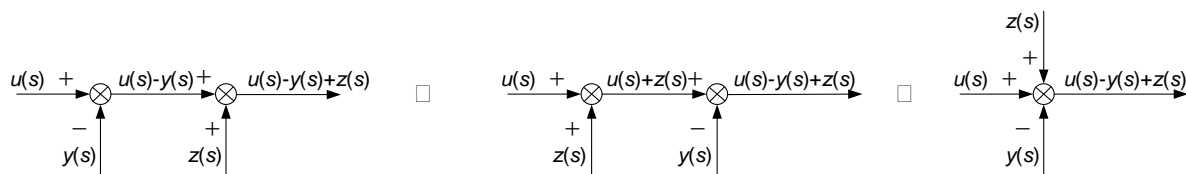


Helyettesítő kapcsolások

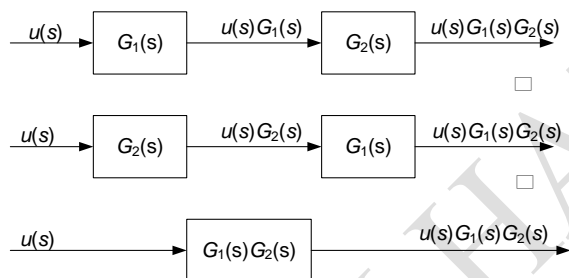
Az alábbiakban bemutatott ún. helyettesítő kapcsolások alkalmazása esetén olyan műveletek hajtunk végre a hatásvázlaton, amelyek nincs hatása az eredő átviteli függvényre, de jelentősen megkönnyíthetik annak meghatározását. Ezeket leggyakrabban átlapolódó előre- és visszacsatolások szétbontásánál tudjuk alkalmazni. Az átalakítás egyenértékűsége akkor lesz

igaz, ha az átalakítás előtt és után az átalakított tagcsoport bemenete(i) és kimenete(i) megegyezik(nek).

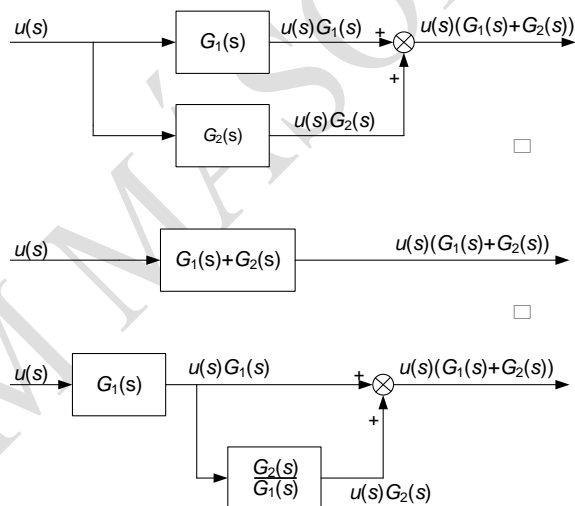
1. Összegzők felcserélése, összevonása, szétbontása



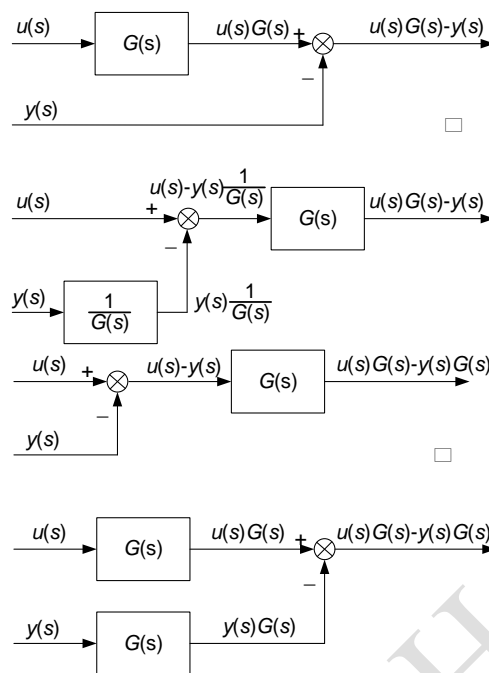
2. Tagok felcserélése, összevonása



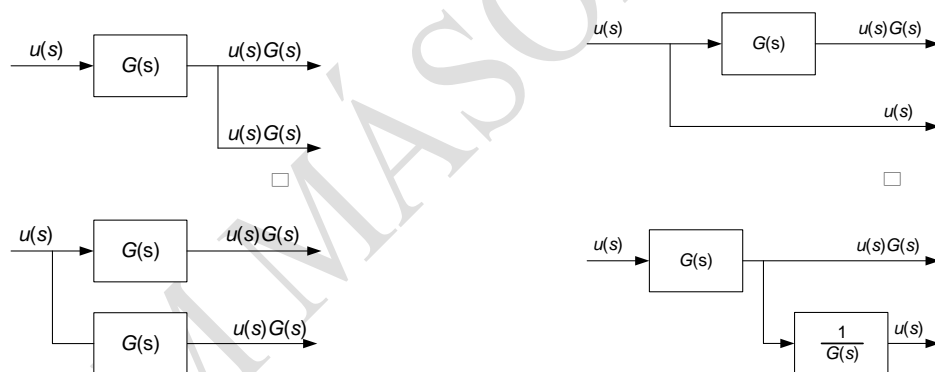
3. Tagok párhuzamos kapcsolásának átalakítása



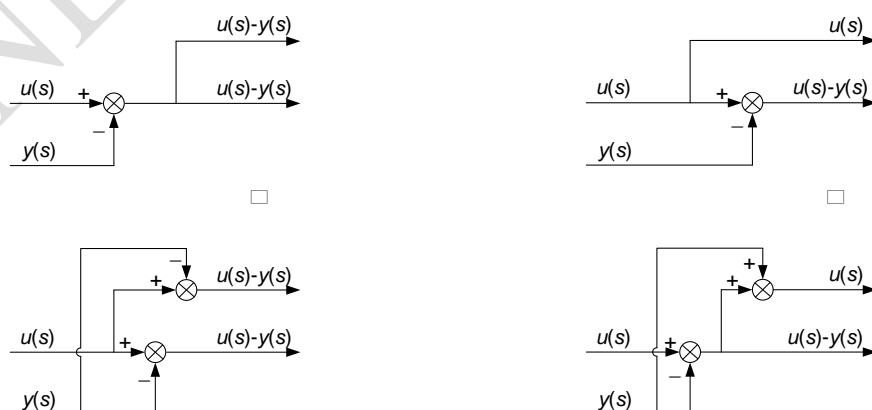
4. Tag és összegző felcserélése



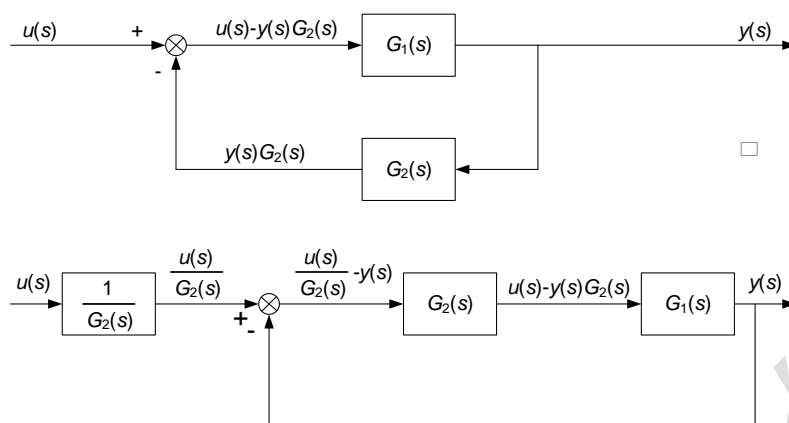
5. Tag és elágazás felcserélése



6. Összegző és elágazás felcserélése



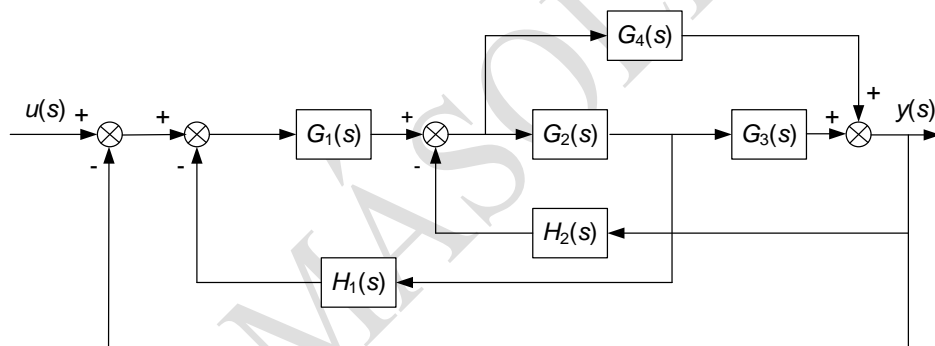
7. Visszacsatolt kör átalakítása



Feladatok hatásvázlatok átalakítására

1. példa

Legyen a feladat a 4.5. ábrán látható rendszer eredő átviteli függvényének meghatározása!

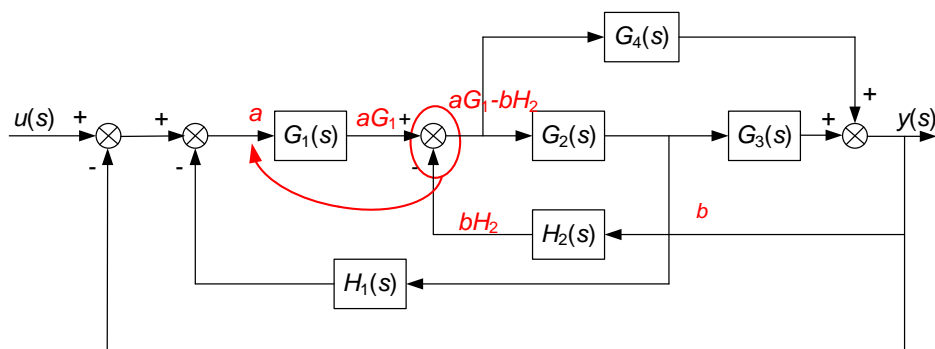


4.5. ábra Az 1. példa hatásvázlata

Megoldás menete

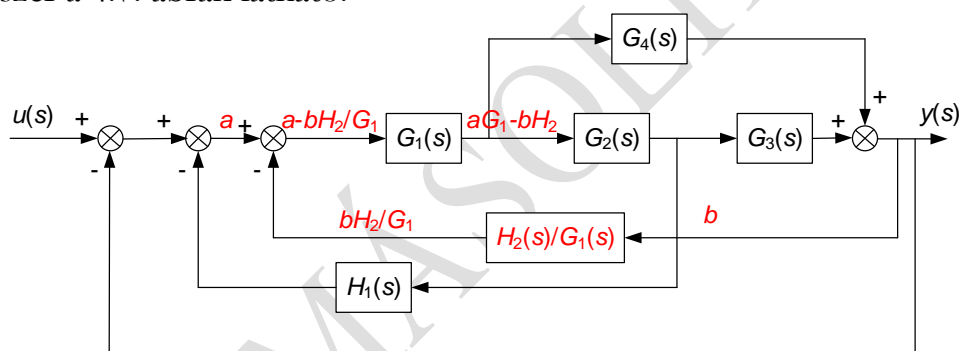
Jól látható, hogy a feladat nehézségét az egymásba átlapolódó két visszacsatolás és az előreccatolás okozza. A megoldás menete, azaz az, hogy mely lépésekkel milyen sorrendben csatoljuk szét a köröket, tetszőleges. A végeredményül kapott eredő átviteli függvény minden esetben ugyan az lesz. Az egyszerűbb jelölés érdekében az átalakítást magyarázó lépéseknél az s argumentum nem került feltüntetésre.

Válasszuk első lépésként a harmadik összegző áthelyezését $G_1(s)$ jelű tag elé, mint ez a 4.6. ábrán látható.



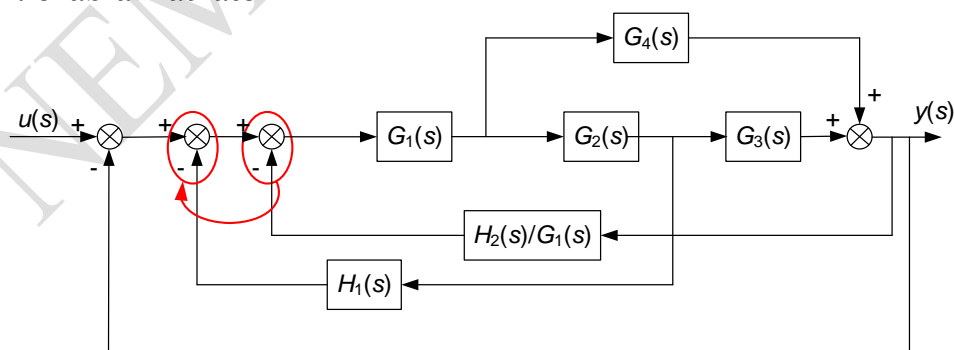
4.6. ábra Az átalakítás első lépése

Az átalakítandó tagcsoport meghatározását az áthelyezendő elemhez kapcsolódó tagok figyelembe vételével határozzuk meg. Ennek megfelelően, itt a bemenő jelek az a és b szimbólumokkal jelöltek lesznek, míg a kimenet az $aG_1 - bH_2$ lesz. Az átalakítás után a ugyanezeket a bemeneteket és kimenetet kell kapnunk. Kiindulva ebből a tényből és visszafelé következtetve a kimeneti jelből, könnyen beláthatjuk, hogy az átalakítás előtt H_2 átviteli függvénnyel jellemzett tagot kell H_2/G_1 -re módosítani. A kapott rendszer a 4.7. ábrán látható.



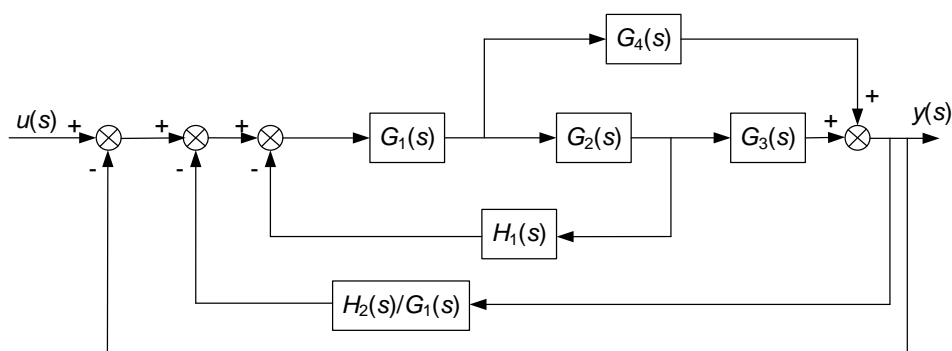
4.7. ábra Az átalakítás első lépése után kapott rendszer

Következő lépésként cseréljük meg a második és harmadik összegzőt, ahogy ezt a 4.8. ábrán látható.



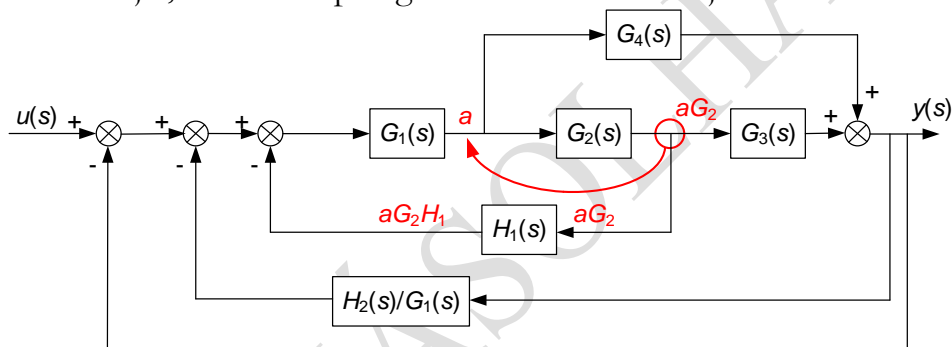
4.8. ábra Az átalakítás második lépése

Ez a lépés az összegzők felcserélésére vonatkozó általános szabályok szerint a többi tagot érintő különösebb átalakítás nélkül megtehető, ahogy ez a 4.9. ábrán látható.



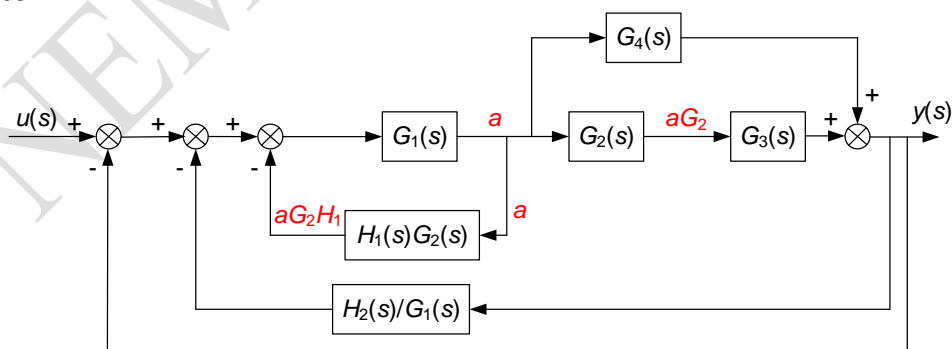
4.9. ábra Az átalakítás második lépése után

Az átlapolások szétszétválasztásának utolsó lépéseként bontjuk szét a H_1 tagot tartalmazó legbelső visszacsatolást és a G_4 tagot tartalmazó előreccsatolást. Ebben az esetben is szabadon megválasztható, hogy melyik elágazás helyezzük át. Helyezzük át a visszacsatolás hatáspontját az előreccsatolás hatáspontja elé, ahogy ez a 4.10. ábrán látható. Az átalakítandó tagcsoport bemenet az a jel, kimenetei pedig az aG_2 és az aG_2H_1 jelek.



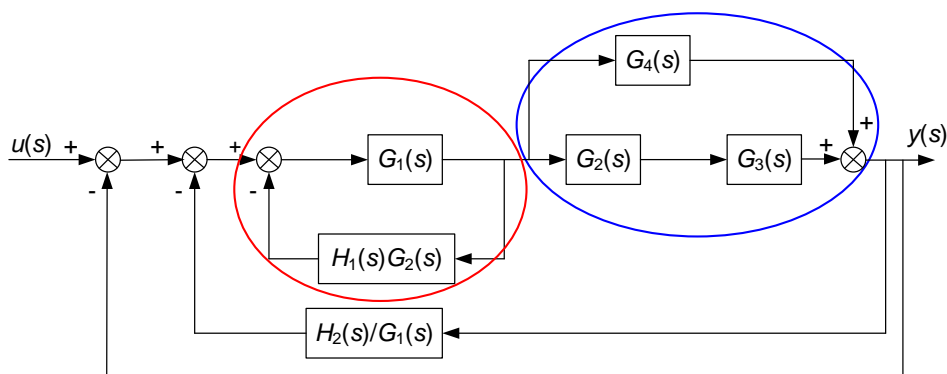
4.10. ábra Az átalakítás harmadik lépése

A módosítandó átviteli függvényt ebben az esetben is a változatlan kimenetekből vezethetjük le. Könnyen belátható, hogy a visszacsatolásban lévő tag átviteli függvényét kell H_1G_2 -re módosítani, ahogy ez a 4.11. ábrán látható.



4.11. ábra Az átalakítás harmadik lépése után

Az így kapott hatásvázlat már nem tartalmaz átlapolásokat, így a visszacsatolásokra és az előreccsatolásra alkalmazhatjuk az eredőjük meghatározására levezetett képleteket. Írjuk fel a legbelső visszacsatolás és az előreccsatolás eredőjét (4.12. ábra).



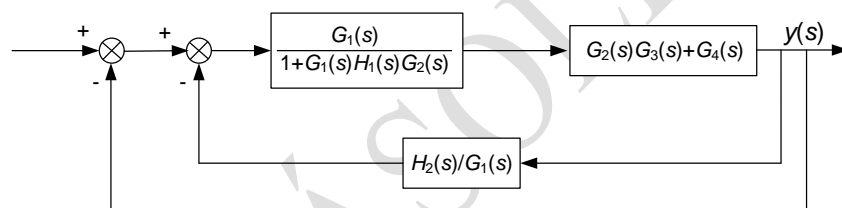
4.12. ábra A belső visszacsatolás és az előreccsatolás eredőjének meghatározása

A visszacsatolás eredője:

$$G_v(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

Az előreccsatolás eredője:

$$G_e(s) = G_2(s)G_3(s) + G_4(s)$$



4.13. ábra A belső visszacsatolás és az előreccsatolás eredője

Az utolsó két lépés a két visszacsatolás eredőjének meghatározása. Legyen $G'(s)$ a belső visszacsatolás eredője:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\frac{G_1(s)(G_2(s)G_3(s) + G_4(s))}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)}}{1 + \frac{G_1(s)(G_2(s)G_3(s) + G_4(s))}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{G_1(s)}} = \\ &= \frac{G_1(s)(G_2(s)G_3(s) + G_4(s))}{1 + G_1(s)(G_2(s)G_3(s) + G_4(s)) + (G_2(s)G_3(s) + G_4(s))H_2(s)} \end{aligned}$$

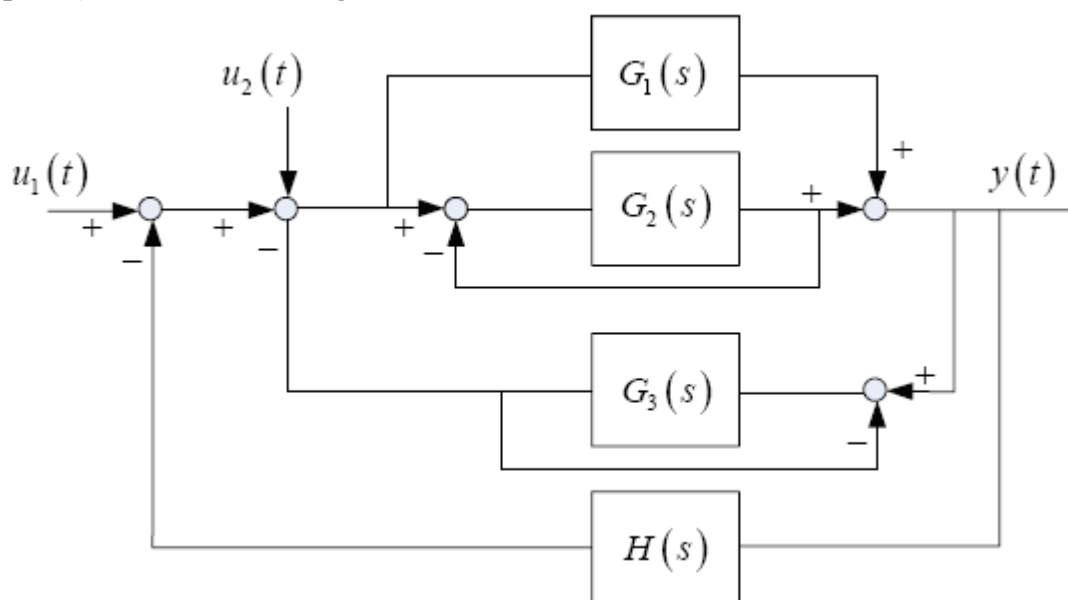
Innen a rendszer eredő átviteli függvénye:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_4(s)H_2(s)} \end{aligned}$$

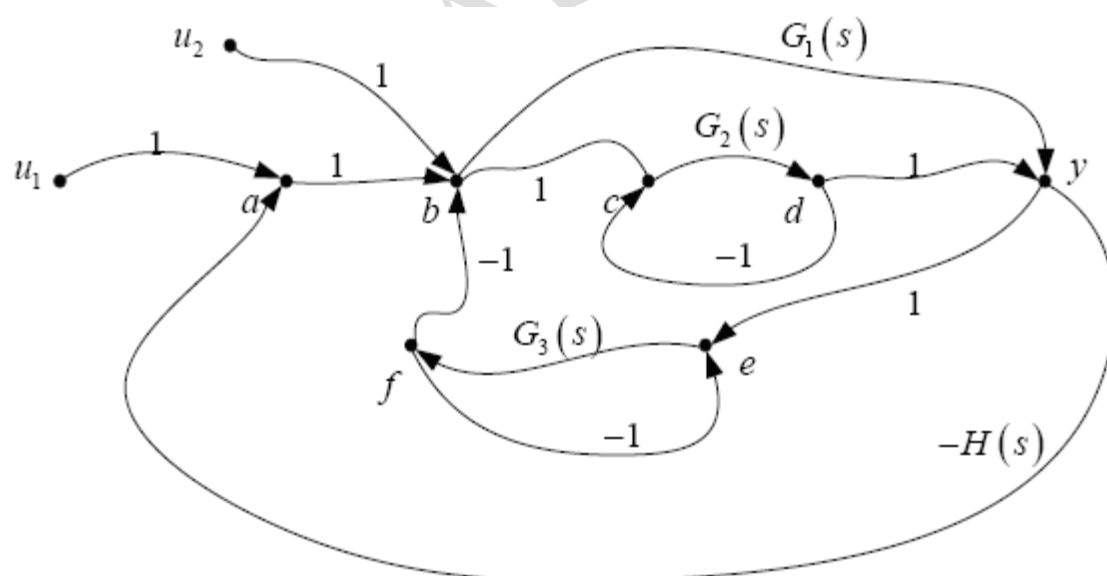
Ha jól megfigyeljük az eredményül kapott átviteli függvényt, akkor „leellenőrizhetjük”, hogy jó eredményt kaptunk. A számlálóban az előremenő ágak eredője szerepel, míg a nevezőben az egyes előremenő ágak és visszatérő ágak kombinációinak a szorzatai.

Samuel Jefferson Mason (1921–1974 Amerikai villamosmérnök http://en.wikipedia.org/wiki/Mason%27s_gain_formula) kidolgozott egy algoritmust, ami a szakmában Mason szabályként ismert. Az általa javasolt egyszerű algoritmus alapján kiszámítható a tagok összetett kapcsolásával megadott rendszer átviteli függvénye.

Következőekben egy két bemenettel és egy kimenettel rendelkező rendszer példáján keresztül az algoritmus bemutatása következik.



Gráfot alkotunk:



A következő lépésben a gráf minden hurkának meghatározzuk a körerősítését. Hurok alatt az ágak azon sorát értjük, melyek esetében a kiindulópont megegyezik a végponttal, úgy, hogy az ágak irányítottságát figyelembe vesszük. A körerősítés az útvonalon levő ágak átvitelének szorzata.

A fellelhető hat hurok:

1. hurok *cdc* $\Delta_1 = -G_2(s)$
2. hurok *fef* $\Delta_2 = -G_3(s)$
3. hurok *bcdyefb* $\Delta_3 = -G_2(s)G_3(s)$
4. hurok *byefb* $\Delta_4 = -G_1(s)G_3(s)$
5. hurok *abcdya* $\Delta_5 = -G_2(s)H(s)$
6. hurok *abya* $\Delta_6 = -G_1(s)H(s)$

Az algoritmus következő pontja a gráf determinánsának kiszámítása a következők szerint:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_i \Delta_i + \sum_{i,j} \Delta_i \Delta_j - \sum_{i,j,k} \Delta_i \Delta_j \Delta_k + \dots$$

Ahol az első összegben szerepel minden hurok körerősítése, a másodikban az összes nem érintkező páros szorzata, a harmadikban az összes nem érintkező hármas és így tovább. Nem érintkező hurkoknak tekinthetők azok, miknek nincs közös águk.

E szerint a példára vonatkozó determináns:

$$\Delta(s) = 1 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6) + (\Delta_1 \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_4 + \Delta_1 \Delta_6 + \Delta_2 \Delta_5 + \Delta_2 \Delta_6) - (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_6)$$

A gráf determinánsának meghatározását követően meg kell keresni minden utat ami a bemeneteket és a kimeneteket összeköti. Kiszámítjuk az utak nyomán levő átviteli függvényeket és determinánsokat. Egy út nyomán levő átviteli függvény az úton fellelt átvitelek szorzata. Az útvonalhoz tartozó determináns számítása ugyanúgy történik, mint a gráf determinánsának számítása, azzal a különbséggel, hogy az adott úthoz tartozó hurkokat figyelmen kívül hagyjuk.

A példában fellelhető utak

1. u_1 bemenethez tartozó út *abcdy* $P_1^1 = G_2(s)$ a determináns $\Delta_1^1 = 1 - \Delta_2$,
2. u_1 bemenethez tartozó út *aby* $P_1^2 = G_1(s)$ a determináns $\Delta_1^2 = 1 - (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_1 \Delta_2$,
3. u_2 bemenethez tartozó út *bcdy* $P_2^1 = G_1(s)$ a determináns $\Delta_2^1 = 1 - \Delta_2$,
4. u_2 bemenethez tartozó út *by* $P_2^2 = G_1(s)$ a determináns $\Delta_2^2 = 1 - (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_1 \Delta_2$.

Végül az átviteli függvény:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_1^1 \Delta_1^1 + P_1^2 \Delta_1^2}{\Delta} & \frac{P_2^1 \Delta_2^1 + P_2^2 \Delta_2^2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Amint látható a nevező minden átviteli függvénynél a gráf determinánsa. A számláló pedig az egyes utak erősítésének és a hozzájuk tartozó determináns szorzatának összege.

NEM MÁSZOLHATÓ