La Salle stabilitás tétele

Autonóm vagy periodikus rendszerekre használható

Miért van rá szükség? A gyakorlatban nehéz találni olyan $V(x)$ függvényt ahol $\dot{V}(x) < \emptyset$.

$\dot{x} = f(x)$ vagy $\dot{x} = f(x, t+T)$ ahol T a rendszer periódus ideje.

- $V(x,t) = V(x, t+T)$ és $V > 0$ és korlátos

  $r > 0$ fix; $\{x : |V(x)| < r\} \subset \Omega_r$ Korlátos és nyílt halmaz

  Bennmaradunk egy gömbön belül.

  és $\dot{V} \leq \emptyset$; $\dot{V} \neq 0$ minden máshol, kivéve

  az $x = \emptyset$; $0 = f(0)$

  Akkor az $\underline{x} = \underline{\emptyset}$ globálisan, egyenletesen, asszimptotikusan stabil Ljapunov értelemben.

- $\dot{x} = f(x)$

  $r > 0$ fix; $\{x : |V(x)| < r\} \subset \Omega_r$

  $V(x)$ Kielégíti Ω_r-en:

  ① $V(x) > 0$ ha $x \neq 0$

  ② $\dot{V}(x) = \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \leq \emptyset$ negatív szemi definit

③ $V(x)$ folytonosan differenciálható

akkor igaz:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Omega_r : \dot{V}(x)=0\} = MCE$$

| $x(0) \in M \Rightarrow \forall t\,(-\infty,\infty)\; x(t) \in M$
A trajektória benn marad az invariáns halmazban |

E – maximális invariáns halmaz.

Következmény:

① Ha $M=\{0\}$ akkor a rendszer asztimptotikusan stabil.

② Ha $x=\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ y – a szokosz állapota
z – a szabályzó állapota

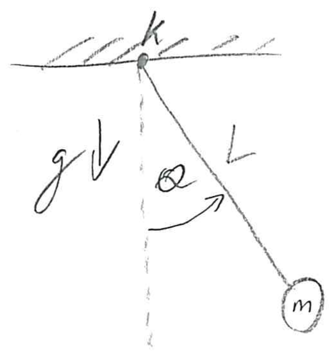
Ha $\dot{V}(x)=0 \Rightarrow y=0$ | bár az egyik komponens egyensúlyi helyzetbe kerüljön |

$$\dot{y}=\varphi(y,z)$$

$\varphi(0,z)=0 \Leftrightarrow z=0$ akkor

$x=0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ asztimptotikusan stabil.

Példa: Matematikai inga



$$mL^2\ddot{\Theta}+m\cdot gL\sin\Theta=\emptyset$$

$$\ddot{\Theta}+\frac{g}{L}\sin\Theta=\emptyset \;\Big|\; \frac{g}{L}=1$$

Legyen ↗

$\ddot{\theta} + \sin\theta = \phi \qquad x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$

Keressük a stabil pontokat $\dot{\theta} = \phi,\ \theta = \pm n\pi$

Vizsgáljuk a (ϕ, ϕ) stabilitását

Egy választás lehet: $V(\theta, \dot{\theta}) = \theta^2 + \dot{\theta}^2$ de ez nem érdekes.

Legyen: $V(\theta, \dot{\theta}) = (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$

ami a rendszer energia függvénye $E = E_p + E_k$

$$\dot{V} = \dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}\ddot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}(\sin\theta + \ddot{\theta}) = \phi$$

$\dot{V} = 0$ mindenütt

A csillapítás nélküli inga mindig lengeni fog, így a $(0,0)$ körül nem aszimptotikusan stabil.

<u>Csillapítással:</u> $\ddot{\theta} + \sin\theta + k \cdot \dot{\theta} = \phi$

$$V(\theta, \dot{\theta}) = (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$$

$$\dot{V} = \dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}\ddot{\theta} = -k \cdot \dot{\theta}^2 \leq \phi$$

A $(0,0)$ stabil, de nem aszimptotikusan.

LaSalle tétele alapján:

$$\dot{V} = \phi \Rightarrow \dot{\theta} = \phi \Rightarrow \ddot{\theta} = \phi$$

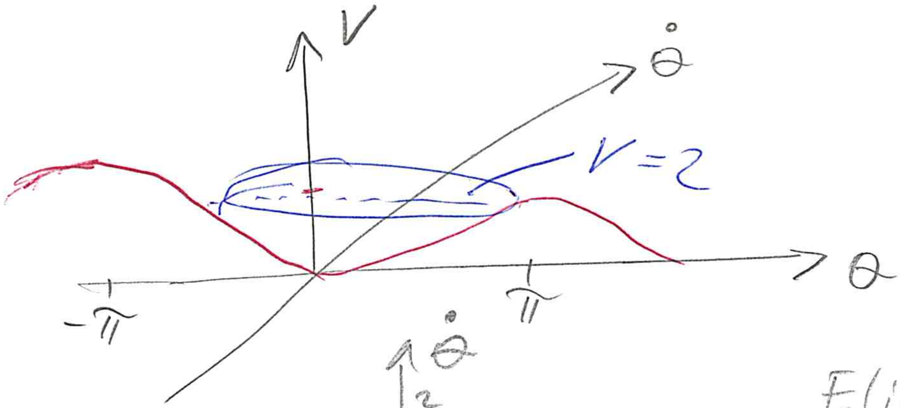
$$\dot{V} = \phi \Rightarrow \sin\theta = \phi \Rightarrow \theta = \pm n\pi$$

Mi szeretnénk megtalálni Ω_r ahol $V < r$ ahol az inga nem bukik át és nem tesz meg egy teljes kört.

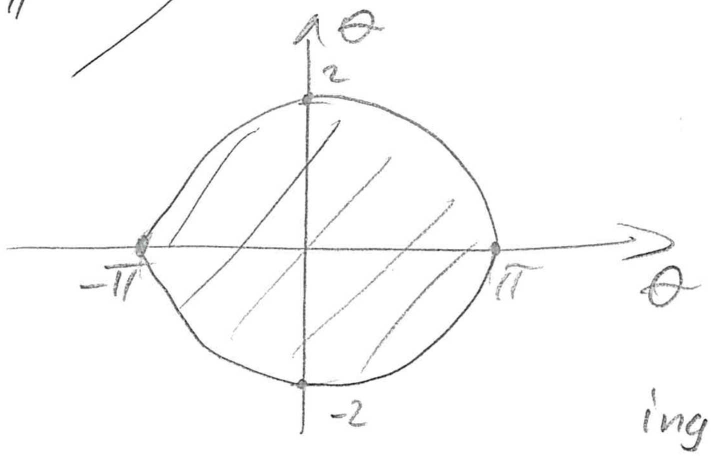
r – meghatározása : legyen $\theta = \pm\pi$, $\dot{\theta} = \emptyset$

Akkor $V = 2$

$$\Omega_r = \{ (\theta, \dot{\theta}) \mid (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 < 2 \}$$



$V(\theta, \dot{\theta}) = V(\pi, 0) = 2$



Elipszis

Amennyiben a kezdeti feltételek a régión belül vannak az inga a régión belül marad nem bukik át!

Vegyük észre, hogy a régió nem függ "k"-tól. a csillapítás lehet bármekkora. Egyes pontok működhetnek a régión kívül is "k"-tól függően.

Csúszó szabályozás
(Sliding control)

SISO - rendszereket figyelünk

az állapotváltozó $\underline{x} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^T$

$$u \longrightarrow \boxed{y^{(n)} = f(\underline{x}) + b(\underline{x})u} \longrightarrow y$$

$y_a(t)$ alapjel ; $\tilde{y} = y_a - y$ - hibajel

Az eddigi módszereknél csak azt tudtuk megmondani, hogy stabil-e a rendszer vagy sem, de nem tudtuk megmondani, hogy milyen gyorsan konvergál.

① Bevezetünk két állandót $\lambda > 0$; $\eta > 0$

s - csúszó változó $\quad s(\underline{x}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{y}$

Ha $s = 0$ - akkor a hiba exponenciálisan tart nullához $\quad s = 0 \Rightarrow \tilde{y}(t) \to 0$

a sebesség arányos $e^{-\lambda t}$-vel

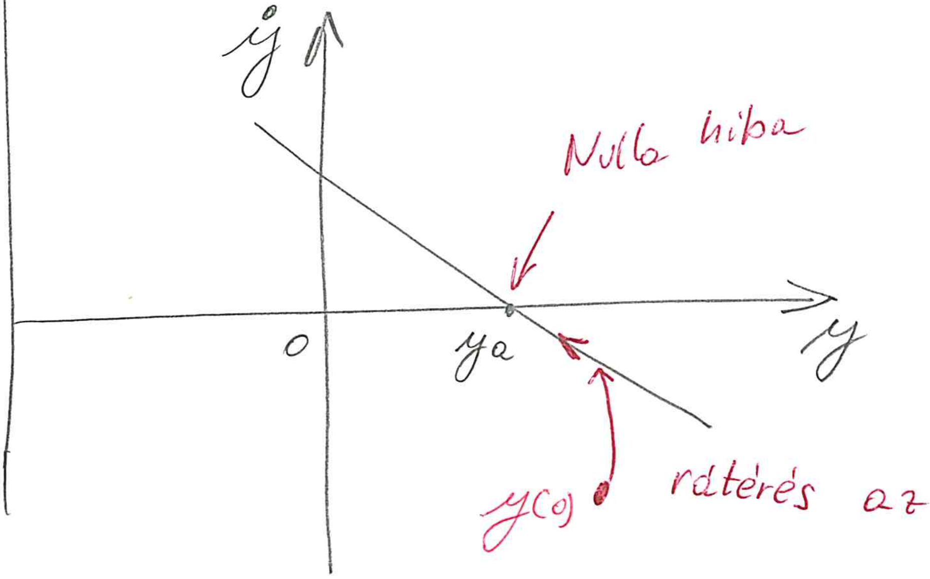
② Annak érdekében, hogy gyorsan visszatérjünk az $s = 0$ felületre.

Példa: $y_a = \text{const}$

$$n=2 \Rightarrow \left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^1 \cdot \tilde{y} = \dot{\tilde{y}} + \lambda\tilde{y} = s$$

$$\dot{\tilde{y}} = -\dot{y}\,\Big|_{y_a=\text{const}}$$

$$s=\emptyset \Rightarrow -\dot{y}+\lambda(y_a-y)=\emptyset \Rightarrow \dot{y}=\lambda(y_a-y)$$



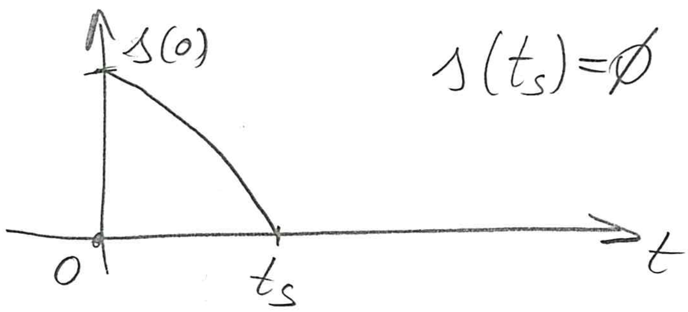
Az $s=0$ felületen exponenciálisan tartunk a nulla hiba felé.

② Tekintsünk egy Ljapunov függvényt $V=\frac{1}{2}s^2$

$$\dot{V}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot s\cdot s' = s\cdot s' \leq -\eta|s|$$ a stabilitás feltétele.

Teljesíteni kell, hogy bárhonnan indulva ráterjünk az $s=0$ felületre. Tegyük fel, hogy $s(0)>0$

így $s\cdot s' \leq -\eta|s| = -\eta s \Rightarrow s' \leq -\eta$



$s(t_s)=\emptyset$

$$t_s \leq \frac{|s(0)|}{\eta}$$

$$\int_0^{t_s} \dot{s}(t)\,dt \le -\int_0^{t_s} \eta\, dt$$

$$s(t_s)-s(0) \le -\eta(t_s-0) \Rightarrow \boxed{t_s \le \frac{s(0)}{\eta}}$$

A felület elérésének sebessége függ η értékétől.

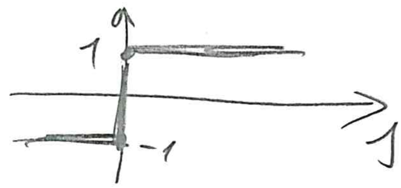
A beavatkozó jelet úgy keressük, hogy a csúsztó feltétel teljesüljön korlátos modellbizonytalanság mellett is.

Példa 1: Arányos szabályozás $b=1,\ n=2$

$$y''=f(\underline{X})+u$$

próbálkozzunk kétállásos szabályozóval

$$\boxed{u=\hat{u}+k(\underline{X})\cdot \mathrm{sign}(s)}$$



ha $s=\emptyset$ akkor $k(\underline{x})$ lekapcsolódik.

Ez egy nemlineáris szabályozó. Mekkora névleges szabályozót kell választani?

$$\hat{u},\ k(\underline{x}) = ? \Longleftrightarrow s\cdot s' \le -\eta|s| \qquad s=\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)\tilde{y}$$

$$s'=\ddot{\tilde{y}}+\lambda\dot{\tilde{y}} = \ddot{y}_a - \ddot{y} + \lambda \dot{\tilde{y}} \qquad s=\dot{\tilde{y}}+\lambda\tilde{y}$$

$$s' = \ddot{y}_a - f(\underline{X}) - u + \lambda\dot{\tilde{y}}$$

Ha egyszer rajta vagyok az $s'=\emptyset$ akkor

$$u=\hat{u} \qquad 0=\ddot{y}_a - \hat{f}(\underline{x}) - \hat{u} + \lambda \dot{\tilde{y}}$$

$$\boxed{\hat{u} = \ddot{y}_a - \hat{f} + \lambda \dot{\tilde{y}}}$$

$\hat{f}$ – névleges f_g

Biztosítani kell: $s \cdot s' \leq -\eta |s|$ legyen.

$$s' = \ddot{y}_a - f - \hat{u} - k(\underline{x})\,\mathrm{sign}(s) + \lambda \dot{\tilde{y}} - \hat{f} + \hat{f}$$

$$s' = \hat{f} - f - k(\underline{x})\,\mathrm{sign}(s) \quad \Big/ \quad s \cdot \mathrm{sign}(s) = |s|$$

$$s \cdot s' = (\hat{f} - f)\,s - k(\underline{x})|s| \leq |\hat{f} - f| \cdot |s| - k(\underline{x})|s| \leq -\eta |s|$$

$$|\hat{f} - f| - k(\underline{x}) \leq -\eta \Rightarrow k(\underline{x}) \geq |\hat{f} - f| + \eta$$

felülről becslem a névlegestől való eltérést.

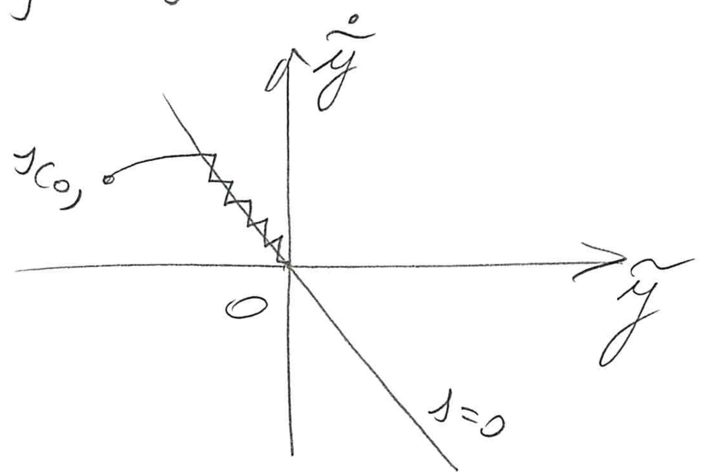
$$|\hat{f} - f| \leq F(\underline{x}) \quad ; \quad \boxed{k(\underline{x}) = F(\underline{x}) + \eta}$$

Nem jó túl nagy λ értéket alkalmazni mert nagy lesz a beavatkozó jel, igaz gyorsan konvergál az $s = 0$ felé. Ugyan ez a helyzet az η-val kapcsolatban is. A telítésbe kerülést szimulációval lehet elkerülni.

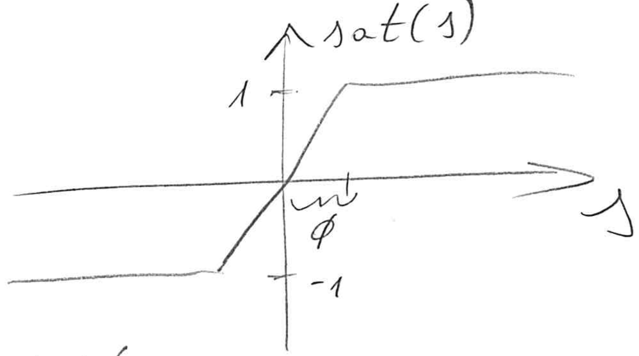
Hátrány még az is, hogy a szignum nagy erősítése miatt az irányított rendszer tehetetlensége miatt a hiba tölló az $s=\emptyset$ felületen, az $s=\emptyset$ körül csattogó módon

Konvergál a nulla hiba felé.

Ezt a jelenséget csattogásnak hívjuk.



Ennek orvoslására az előjel függvény helyett gyakran alkalmazzuk:



Példa 2. Integráló szabályozás

$$\int \tilde{y}\,dt$$

A rendszer továbbra is másodrendű, de a hibaintegrál miatt harmadrendű lesz, $n=3$.

$$\ddot{y} = f(\underline{x}) + u$$

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^2 \int \tilde{y}\,dt = \dot{\tilde{y}} + 2\lambda\tilde{y} + \lambda^2 \int \tilde{y}\,dt$$

$$u = \hat{u} + k(\underline{x})\,\mathrm{sign}(s)$$

$$s' = \ddot{\tilde{y}} + 2\lambda\dot{\tilde{y}} + \lambda^2\tilde{y} = \ddot{y}_a - \ddot{y} + 2\lambda\dot{\tilde{y}} + \lambda^2\tilde{y}$$

$$s' = \ddot{y}_a - f - u + 2\lambda\dot{\tilde{y}} + \lambda^2\tilde{y}$$

$s' = 0$ – elértük a csúszó felületet.

$s = 0$; $\hat{f}$; $u = \hat{u} = ?$ $\boxed{\hat{u} = \ddot{y}_a - \hat{f} + 2\lambda\dot{\tilde{y}} + \lambda^2\tilde{y}}$

$$s' = \ddot{y}_a - f - \hat{u} - k(x)\,\mathrm{sign}(s) + 2\lambda\dot{\tilde{y}} + \lambda^2\tilde{y} + \hat{f} - \hat{f}$$

$$s' = \hat{f} - f - k(x)\,\mathrm{sign}(s) \Rightarrow \boxed{k(\underline{x}) = F(\underline{x}) + \eta}$$

Ez a tervezés a hiba integrálját veszi alapul, de azonnal deriválom, tehát bármilyen állandót hozzáadok az a deriválttal eltűnik így a konstans választás

$$\boxed{s = \dot{\tilde{y}} + 2\lambda\tilde{y} + \lambda^2\int_0^t \tilde{y}(\tau)\,d\tau - \dot{\tilde{y}}(0) - 2\lambda\tilde{y}(0)}$$

Ha s-t a fenti alapján választom, akkor azonnal rajta vagyok a csúszó felületen!

Példa 3. Változó erősítés $b \neq 1$; $n=2$

arányos szabályozás

$$y'' = f(\underline{x}) + b(\underline{x}) \cdot u$$

Feltevés ismert $\hat{f}$ és ismert $|\hat{f} - f| \leq F(\underline{x})$

a névlegestől való eltérés felső becslése.

Feltételeztük, hogy létezik névleges erősítés $\hat{b}(\underline{x})$

feltesszük, hogy létezik $\exists B > \emptyset$: olyan $B^{-1} \leq \frac{\hat{b}}{b} \leq B$

$\frac{\hat{b}}{b}$ felülről becsülve B alulról pedig B^{-1}.

Az erősítéstől (b) elvárjuk, hogy ne váltson előjelet.

$$s = \dot{y}_a - \dot{y} + \lambda \tilde{y}$$

$$s' = \ddot{y}_a - \ddot{y} + \lambda \dot{\tilde{y}} = \ddot{y}_a - f - b \cdot u + \lambda \dot{\tilde{y}}$$

$$\boxed{u = \hat{b}^{-1} \{ \hat{u} + k(\underline{x}) \cdot \mathrm{sign}(s) \}}$$

rajta vagyok a csúszó felületen!

$$s = \emptyset \text{ ; } \hat{f}, \hat{b} \Rightarrow s' = \emptyset \text{ ; } u = \hat{b}^{-1} \cdot \hat{u} = ?$$

$$\boxed{\hat{u} = \ddot{y}_a - \hat{f} + \lambda \dot{\tilde{y}}}$$

$$s' = \ddot{y}_a - f - b\cdot\hat{b}^{-1}\{\hat{u}\, k(\underline{x})\, \mathrm{sign}(s)\} + \lambda\cdot\mathring{y} + \hat{f} - \hat{f} + \hat{u} - \hat{u}$$

$$s' = \hat{f} - f + (1 - b\cdot\hat{b}^{-1})\cdot\hat{u} - b\cdot\hat{b}^{-1} k(x)\, \mathrm{sign}(s)$$

$$s\cdot s' = (\hat{f} - f)\, s + (1 - b\cdot\hat{b}^{-1})\hat{u}\cdot s - b\cdot\hat{b}^{-1} k(\underline{x})\cdot|s| \leq$$

$$\leq |\hat{f} - f|\cdot|s| + |1 - b\cdot\hat{b}^{-1}|\cdot|\hat{u}|\cdot|s| - b\cdot\hat{b}^{-1} k(\underline{x})|s| \leq -\eta|s|$$

$$|\hat{f} - f| + |1 - b\cdot\hat{b}^{-1}||\hat{u}| - b\cdot\hat{b}^{-1}\cdot k(\underline{x}) \leq -\eta \qquad /* \hat{b}\cdot b^{-1}$$

$$\hat{b}\cdot b^{-1}|\hat{f} - f| + |\hat{b} b^{-1} - 1||\hat{u}| + \hat{b} b^{-1}\eta \leq k(x)$$

$$k(\underline{x}) \geq \beta|\hat{f} - f| + (\beta - 1)|\hat{u}| + \beta\eta$$

$$\boxed{k(\underline{x}) = \beta\{F(\underline{x}) + (1 - \beta^{-1})|\hat{u}| + \eta\}}$$

A valóságban általában ismert az erősítés alsó és felső határa $b_{min}(\underline{x}) \leq b(\underline{x}) \leq b_{max}(\underline{x})$

A becslést választhatom a mértani középre:

$$\hat{b} = \sqrt{b_{max} - b_{min}} \quad ; \quad \frac{\hat{b}}{b} = \frac{\sqrt{b_{max} - b_{min}}}{b}$$

$$\sqrt{\frac{b_{min}}{b_{max}}} \leq \frac{\hat{b}}{b} \leq \sqrt{\frac{b_{max}}{b_{min}}} = \beta$$

$$\beta > 1$$

itt is probléma a csattogás $\pm|k(x)|\hat{b}^{-1}$

Itt is megoldás, hogy változó szélességű telítés függvényt alkalmazzunk

$\phi = \phi(t)$

$s \cdot s' \leq -(\eta \cdot \dot{\phi}) \cdot |s|$

irányítás $\quad u: \hat{b}^{-1}\{\hat{u} + \tilde{k}(\underline{x})\, sat(s(\phi))\}$

$\hat{u}$ – nem változik $\qquad \hat{k}(\underline{x}) \geq k(\underline{x}) - \frac{\hat{b}}{b}\dot{\phi}$

① $\dot{\phi} > \phi \qquad \dot{\phi} + \phi\lambda = \beta k(\underline{x})$

$$\tilde{k}(\underline{x}) = k(\underline{x}) - \beta^{-1}\dot{\phi}$$

② $\dot{\phi} < \phi \qquad \dot{\phi} + \frac{\lambda}{\beta^2}\phi = \beta^{-1}k(\underline{x})$

$$\tilde{k}(x) = k(\underline{x}) - \beta\dot{\phi}$$