SZABADKAI MŰSZAKI SZAKFŐISKOLA

Csikós Pajor Gizella

MATEMATIKAI ANALÍZIS

feladatgyűjtemény a gyakorlatokhoz

SZABADKA 2008

Szakvéleményező, valamint
az elektronikus és nyomtatott
kiadvány műszaki szerkesztője
Mgr. Boros István

A szöveg előkészítése: Csikós P. Gizella

Kiadó: **Szabadkai Műszaki Szakfőiskola**

A kiadó nevében: Dr Matijevics István, igazgató

Példányszám: 300
Nyomda: Čikoš – Subotica

Készült az APÁCZAI ALAPÍTVÁNY támogatásával

ELŐSZÓ

A feladatgyűjtemény a matematikai analízis tantárgy gyakorlatainak tananyagát öleli fel a Szabadkai Műszaki Szakfőiskola minden akkreditált szakiránya részére.

A feladatgyűjtemény külön fejezetekben tárgyalja az egyes anyagrészeket. Minden fejezet elején megtalálhatók a legfontosabb definíciók és tételek bizonyítások nélkül, amelyek ismerete elengedhetetlen a feladatok kidolgozásához. Minden fejezetben találhatók részletesen kidolgozott példák, amelyeket igyekeztem úgy összeválogatni, hogy ezekkel az egész tananyagot feldolgozzuk. A kidolgozott példákat a gyakorlati órákon is feldolgozzuk, és itt szükség esetén további magyarázatokkal is szolgálhatunk.

Minden egyes fejezet végén feladatok találhatók, amelyeket további gyakorlás és az önálló munkára való szoktatás céljából gyűjtöttem össze. Ezeket a feladatokat több ismert hazai és magyarországi egyetemi tankönyvből és példatárból válogattam. Az írásbeli vizsgán hasonló feladatokat kell megoldani.

Mivel a fejezetek tananyagai a feldolgozott sorrendben egymásra épülnek, ajánlom a hallgatóknak, hogy a tanulás folyamán kövessék a megadott útvonalat.

A feladatgyűjtemény kellőképpen felkészíthet az írásbeli vizsgára, de a szóbeli vizsga elméleti kérdéseit nem dolgozza fel, arra az előadások kéziratából kell készülni.

Az elmúlt évek gyakorlata azt mutatta, hogy nagyon eltérő előtudással érkeznek a hallgatók a középiskolákból. Ezért minden olyan hallgatónknak, akinek túl nehezek az itt megadott példák és feladatok azt ajánlom, hogy még egyszerűbb példákkal kezdje a tanulást és gyakorlást, valamely középiskolai példatárból.

A szerző

TARTALOMJEGYZÉK

1. Matematikai (teljes) indukció ..... *7 oldal*
   Feladatok ..... *11 oldal*

2. Binomiális képlet ..... *13 oldal*
   Feladatok ..... *17 oldal*

3. Sorozatok ..... *19 oldal*
   Feladatok ..... *28 oldal*

4. Függvények ..... *30 oldal*
   4.1. A függvény értelmezési tartománya ..... *30 oldal*
   Feladatok ..... *33 oldal*
   4.2. A függvény párossága ..... *33 oldal*
   Feladatok ..... *35 oldal*
   4.3. A függvény periodikussága ..... *36 oldal*
   Feladatok ..... *38 oldal*
   4.4. Inverz függvény ..... *39 oldal*
   Feladatok ..... *43 oldal*
   4.5. Függvény határértéke és folytonossága ..... *44 oldal*
   Feladatok ..... *50 oldal*

5. Differenciálszámítás ..... *52 oldal*
   5.1. Függvények differenciálhányadosa és differenciálja ..... *52 oldal*
   Feladatok ..... *58 oldal*
   5.2. Magasabbrendű differenciálhányadosok ..... *59 oldal*
   Feladatok ..... *60 oldal*
   5.3. A L'Hospital-Bernoulli szabály ..... *61 oldal*
   Feladatok ..... *66 oldal*

6. Függvénykivizsgálás ..... *68 oldal*
   Feladatok ..... *84 oldal*

7. Határozatlan integrálok ..... *86 oldal*
   7.1. Helyettesítéssel való integrálás ..... *89 oldal*
   Feladatok ..... *92 oldal*
   7.2. Parciális integrálás ..... *94 oldal*
   Feladatok ..... *95 oldal*
   7.3. Racionális függvények integrálása ..... *96 oldal*
   Feladatok ..... *103 oldal*
   7.4. Irracionális függvények integrálása ..... *104 oldal*
   Feladatok ..... *109 oldal*

Feladatok ... *111 oldal*
Feladatok ... *114 oldal*
Feladatok ... *116 oldal*
Feladatok ... *117 oldal*
Feladatok ... *120 oldal*
7.5. Trigonometrikus függvények integrálása ... *121 oldal*
Feladatok ... *124 oldal*
7.6. Exponenciális függvények integrálása ... *125 oldal*
Feladatok ... *127 oldal*

8. Határozott integrálok ... *128 oldal*
Feladatok ... *130 oldal*
8.1. Síkidomok területének kiszámítása ... *131 oldal*
8.1.1. Területszámítás a derékszögű koordináta-rendszerben ... *131 oldal*
Feladatok ... *135 oldal*
8.1.2. Területszámítás a poláris koordináta-rendszerben ... *136 oldal*
Feladatok ... *138 oldal*
8.1.3. Területszámítás paraméteres alakban ... *139 oldal*
Feladatok ... *142 oldal*
8.2. Görbe ívhosszúságának kiszámítása ... *143 oldal*
8.2.1. Ívhossz a derékszögű koordináta-rendszerben ... *143 oldal*
Feladatok ... *144 oldal*
8.2.2. Ívhossz a poláris koordináta-rendszerben ... *145 oldal*
Feladatok ... *147 oldal*
8.2.3. Ívhossz számítás paraméteres alakban ... *148 oldal*
Feladatok ... *149 oldal*
8.3. Forgástestek térfogata ... *150 oldal*
8.3.1. Forgástestek térfogata a derékszögű koordináta-rendszerben ... *150 oldal*
Feladatok ... *153 oldal*
8.3.2. Forgástestek térfogata polár-koordinátákban ... *154 oldal*
Feladatok ... *155 oldal*
8.3.3. Forgástestek térfogata paraméteres alakban ... *155 oldal*
Feladatok ... *159 oldal*
8.4. Forgástestek palástjának felszíne ... *160 oldal*
8.4.1. Forgástestek palástjának felszíne a derékszögű koord.-rend.-ben. *160 oldal*
Feladatok ... *163 oldal*
8.4.2. Forgástest palástjának felszíne a poláris koordináta-rendszerben. *164 oldal*
Feladatok ... *164 oldal*
8.4.3. Forgástest palástjának felszíne paraméteres alakban ... *165 oldal*
Feladatok ... *166 oldal*

9. Többváltozós függvények ... *167 oldal*
9.1. Kétváltozós függvények értelmezési tartománya ... *167 oldal*
Feladatok ... *169 oldal*
9.2. Kétváltozós függvények határértéke ... *170 oldal*
Feladatok ... *172 oldal*
9.3. Kétváltozós függvények differenciálhányadosai ... *174 oldal*
9.3.1. Kétváltozós függvények parciális deriváltjai és differenciáljai ... *174 oldal*
Feladatok ... *178 oldal*
9.3.2. Összetett függvény parciális differenciálhányadosai ... *179 oldal*
Feladatok ... *181 oldal*
9.3.3. Implicit alakban adott kétváltozós függvény differenciálása ... *182 oldal*

Feladatok ... *184 oldal*
9.4. Kétváltozós függvények szélső értéke ... *185 oldal*
Feladatok ... *193 oldal*
9.4.1. Feltételes szélső érték ... *194 oldal*
Feladatok ... *199 oldal*

10. Differenciálegyenletek ... *200 oldal*
10.1. Elsőrendű differenciálegyenletek ... *201 oldal*
10.1.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek ... *201 oldal*
Feladatok ... *206 oldal*
10.1.2. Homogén differenciálegyenletek ... *208 oldal*
Feladatok ... *213 oldal*
10.1.3. Homogénre visszavezethető differenciálegyenletek ... *215 oldal*
Feladatok ... *220 oldal*
10.1.4. Lineáris differenciálegyenletek ... *221 oldal*
Feladatok ... *225 oldal*
10.1.5. Bernoulli-féle differenciálegyenletek ... *226 oldal*
Feladatok ... *229 oldal*
10.1.6. Egzakt differenciálegyenletek ... *230 oldal*
Feladatok ... *232 oldal*
10.1.7. Euler-féle integráló tényező ... *233 oldal*
Feladatok ... *238 oldal*
10.2. Másodrendű (magasabb rendű) differenciálegyenletek ... *239 oldal*
10.2.1. Az $y^{(n)} = f(x)$ típusú differenciálegyenletek ... *239 oldal*
Feladatok ... *241 oldal*
10.2.2. Az y-változót nem tartalmazó hiányos differenciálegyenletek ... *242 oldal*
Feladatok ... *245 oldal*
10.2.3. Az x-változót nem tartalmazó hiányos differenciálegyenletek ... *246 oldal*
Feladatok ... *248 oldal*
10.2.4. Állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenletek *249 oldal*
Feladatok ... *252 oldal*
10.2.5. Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása egyenlő együtthatók módszerével ... *253 oldal*
Feladatok ... *260 oldal*
10.2.6. Változó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenletek *261 oldal*
Feladatok ... *263 oldal*
10.2.7. Euler-féle differenciálegyenletek ... *264 oldal*
Feladatok ... *270 oldal*
10.2.8. Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása a constansok variációjának módszerével ... *271 oldal*
Feladatok ... *274 oldal*

Irodalomjegyzék ... *275 oldal*
Hibajegyzék ... *276 oldal*

3. Sorozatok

Definíció: *A természetes számok halmazának leképezését a valós számok halmazába számsorozatnak nevezzük. Jelölése* $a : N \to R$.

Megegyezés szerint a következő rövidített jelöléseket használjuk:

$$a(1) = a_1$$
$$a(2) = a_2$$
$$\vdots$$
$$a(n) = a_n$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ a sorozat tagjai, a_n pedig a sorozat általános tagja.

Definíció: *Az* $\{a_n\}$*sorozatot növekvőnek nevezzük ha* $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots$; *ha viszont* $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$, *akkor a sorozat csökkenő. A növekvő és csökkenő sorozatokat közös néven monoton sorozatoknak nevezzük.*

Az $\{a_n\}$ sorozat: - monoton növekvő ha $a_{n+1} - a_n \ge 0$
- szigorúan monoton növekvő ha $a_{n+1} - a_n > 0$
- monoton csökkenő ha $a_{n+1} - a_n \le 0$
-szigorúan monoton csökkenő ha $a_{n+1} - a_n < 0$

Pozitív tagú sorozatok esetében a hányados kritériumot is használhatjuk a monotonitás meghatározására: - monoton növekvő ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$

- szigorúan monoton növekvő ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

- monoton csökkenő ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$

- szigorúan monoton csökkenő ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Definíció: *Egy* k *szám az* $\{a_n\}$*sorozat alsó korlátja ha a sorozatnak nincs* k*-nál kisebb tagja:* $k \le a_n$. *A* K *szám az* $\{a_n\}$*sorozat felső korlátja, ha a sorozatnak nincs* K*-nál nagyobb tagja:* $a_n \le K$.

Definíció: *Egy* $\{a_n\}$*sorozat korlátos ha megadható egy olyan* M *szám, hogy* $|a_n| \le M$.

Definíció: *Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke az A szám, ha bármely pozitív ε számhoz van olyan n_0 (az ε-tól függő) szám, hogy valahányszor $n > n_0$, mindannyiszor $|a_n - A| < \varepsilon$.*
Logikai szimbólumok segítségével:
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)\ |a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, n \in N.$

16. Példa: Határozzuk meg az $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ sorozat általános tagját.

Megoldás: $1 = a_1 = a(1) = \frac{1}{1^2}$

$$\frac{1}{4} = a_2 = a(2) = \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{9} = a_3 = a(3) = \frac{1}{3^2}$$

$$\vdots$$

$$a_n = a(n) = \frac{1}{n^2}.$$

17. Példa: Határozzuk meg a $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ sorozat általános tagját.

Megoldás: $\frac{2}{3} = a_1 = a(1) = \frac{1+1}{1+2}$

$$\frac{3}{4} = a_2 = a(2) = \frac{2+1}{2+2}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

18. Példa: Határozzuk meg a $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}, \ldots$ sorozat általános tagját.

Megoldás: $\frac{2}{3} = a_1 = a(1) = \frac{1^2+1}{5 \cdot 1 - 2}$

$$\frac{5}{8} = a_2 = a(2) = \frac{2^2+1}{5 \cdot 2 - 2}$$

$$\frac{10}{13} = a_3 = a(3) = \frac{3^2+1}{5 \cdot 3 - 2}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{n^2+1}{5 \cdot n - 2}.$$

19. Példa: Írjuk fel az $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ sorozat első öt tagját.

Megoldás: $a_1 = a(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$

$$a_2 = a(2) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = a(3) = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = a(4) = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$$

$$a_5 = a(5) = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}$$

A keresett sorozat tehát a $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \ldots$.

20. Példa: Írjuk fel az $a_n = 3a_{n-1} + 1$ rekurzióval adott sorozat négy tagját ha $a_1 = 2$.

Megoldás: $a_1 = 2$

$$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot 7 + 1 = 22$$

$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 22 + 1 = 67$$

A keresett sorozat tehát $2, 7, 22, 67, \ldots$.

21. Példa: Vizsgáljuk ki az $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ sorozat monotonitását.

Megoldás: Ha a különbség kritériumot alkalmazzuk, akkor:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+1+1} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+2} - \frac{1}{n^2+1} =$$

$$= \frac{n^2+1-n^2-2n-2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = \frac{-(2n+1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0$$

tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Mivel a sorozatot pozitív tagok alkotják, ez esetben alkalmazhatjuk a hányados kritériumot is:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}} = \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} < 1$$

mert a számláló bármely $n \in N$ esetén kisebb a nevezőnél. A hányados kritérium alapján is megállapíthatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

22. Példa: Vizsgáljuk ki az $a_n = \frac{2n+1}{3n+2}$ sorozat monotonitását.

Megoldás: Alkalmazzuk a különbség kritériumot:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2} - \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2n+3}{3n+5} - \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{(2n+3)(3n+2)-(2n+1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} =$$

$$= \frac{6n^2+4n+9n+6-6n^2-10n-3n-5}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{1}{(3n+5)(3n+2)} > 0$$

tehát a szemlélt sorozat szigorúan monoton növekvő.

23. Példa: Vizsgáljuk ki az $a_n = \frac{n+1}{n}$ sorozat korlátosságát.

Megoldás: Mivel az

$$a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1,$$

így a sorozat alulról korlátos, és alsó korlátja (infimuma) a $k = 1$. Ugyanakkor

$$a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \le 2,$$

így a sorozat felülről is korlátos, és felső korlátja (supremuma) a $K = 2$.

24. Példa: Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = \frac{5n}{n+1}$ sorozat konvergens és a határértéke $A = 5$.

Megoldás: A sorozat konvergens ha $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)\ |a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, n \in N$.

Konkrét esetben: $\left|\frac{5n}{n+1} - 5\right| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, n \in N$ esetén

$$\left|\frac{5n-5n-5}{n+1}\right| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, n \in N$$

$$\frac{5}{n+1} < \varepsilon \qquad \forall n > n_0, n \in N$$

$$\frac{5}{\varepsilon} < n+1 \qquad \forall n > n_0, n \in N$$

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

$$n_0 \ge \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

tehát $\forall\varepsilon > 0$-hoz kiszámítható az $n_0 \geq \frac{5}{\varepsilon} - 1$ küszöbindex, amely után következő összes tag az 5 határérték $(5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$ környezetébe esik. Ez viszont azt jelenti, hogy az 5 határértéke a sorozatnak.

25. Példa: Mutassuk meg, hogy az $a_n = \frac{3n^2+1}{5n^2-1}$ sorozat ahtárértéke $A = \frac{3}{5}$, és számítsuk ki azt a küszöbindexet, amelytől kezdve a sorozat minden tagja a határérték $\varepsilon = 10^{-3}$ környezetébe esik.

Megoldás: $|a_n - A| < \varepsilon$

$$\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| < 10^{-3}$$

$$\left|\frac{15n^2+5-15n^2+3}{5(5n^2-1)}\right| < 10^{-3}$$

$$\left|\frac{8}{5(5n^2-1)}\right| < 10^{-3}$$

$$\frac{8}{5(5n^2-1)} < \frac{1}{1000}$$

$$5n^2 - 1 > \frac{8000}{5}$$

$$n^2 > \frac{1601}{5}$$

$$n > \sqrt{320{,}2}$$

$$n > 17{,}89$$

$$n_0 \geq 18$$

az a_{18}-tól kezdve tehát a sorozat minden tagja a $\frac{3}{5}$ $\varepsilon = 10^{-3}$ környezetébe esik, ami egyben azt is jelenti, hogy a sorozat konvergens és a határértéke $\frac{3}{5}$, $a_n \to \frac{3}{5}$ vagy másképpen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{5}.$$

26. Példa: Adottak az $a_n = 3 + \frac{5}{n}$ és $b_n = -2 + \frac{7}{n}$ sorozatok. Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ határértéket.

Megoldás: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{5}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(-2 + \frac{7}{n}\right) =$

$$\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} + \lim_{n\to\infty}(-2) + \lim_{n\to\infty}\frac{7}{n} = 3 + 0 - 2 + 0 = 1.$$

27. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ határértéket ha $a_n = 5+\frac{1}{n}$ és $b_n = 8+\frac{1}{n^2}$.

Megoldás: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{1}{n^2}\right) = 5\cdot 8 = 40$.

28. Példa: Vizsgáljuk ki az $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , n = 2k-1 \\ \frac{n}{n+2} & , n = 2k \end{cases}$ **sorozat konvergenciáját.**

Megoldás: Külön kell vizsgálnunk a páratlan és páros indexű tagok viselkedését. Ha:

$$n = 2k-1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2k-1} = \frac{1}{\infty} = 0 ,$$

tehát a páratlan indexű tagok a 0 körül torlódnak fel. Ha :

$$n = 2k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2k}{2k+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{k}{k+1} = 1 ,$$

tehát a páros indexű tagok az 1 körül torlódnak fel.A sorozatnak két torlódási pontja van a 0 és az 1. Mindkét torlódási pont tetszőlegesen kicsiny környezetében a sorozatnak számtalan sok tagja van, de mindkét környezeten kívül is számtalan sok tagja marad a sorozatnak. Ebben az esetben tehát nem létezik határérték ami viszont azt jelenti, hogy az a_n sorozat divergens.

29. Példa: Vizsgáljuk ki az $a_n = 3n+1$, valamint a $b_n = 7n-1$ sorozatok konvergenciáját, majd határozzuk meg az $\frac{a_n}{b_n}$ sorozat határértékét.

Megoldás: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(3n+1) = 3\cdot\infty+1 = \infty$ tehát az a_n sorozat divergens.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(7n-1) = 7\cdot\infty-1 = \infty$ tehát a b_n sorozat is divergens.

Ezért az $\frac{a_n}{b_n}$ sorozat határértékét nem számíthatjuk mint $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, mert a $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan kifejezés. Ilyen esetekben a következő módon juthatunk eredményhez:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{7n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(7-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{7-\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{7-0} = \frac{3}{7}$$

mert a kifejezés egyszerűsíthető n-el, és az $\frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$ esetén. Az eredmény viszont azt mutatja, hogy az $\frac{a_n}{b_n}$ sorozat konvergens, és a határértéke $\frac{3}{7}$.

30. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-4}{3n^2-4n+1}$ határértéket, és állapítsuk meg a sorozat konvergenciáját.

Megoldás: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-4}{3n^2-4n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}.$

A sorozat konvergens.

31. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{n^2+n+1}$ határértéket, és állapítsuk meg a sorozat konvergenciáját.

Megoldás: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}{n\left(n+1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n+1} = \frac{-1}{\infty} = 0.$

A sorozat konvergens.

32. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n-1}{2n+3}$ határértéket, és állapítsuk meg a sorozat konvergenciáját.

Megoldás: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n-1}{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(3n+5-\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2} = \frac{3\cdot\infty+5}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty.$

A sorozat divergens.

33. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}$ határértéket, és állapítsuk meg a sorozat konvergenciáját.

Megoldás: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\dfrac{\sqrt{1}+1}{2}=\dfrac{2}{2}=1.$

A sorozat konvergens.

34. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$ határértéket, és állapítsuk meg a sorozat konvergenciáját.

Megoldás: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2\left(3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}\right)^3=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}.$

A sorozat konvergens.

35. Példa: Ha tudjuk, hogy $a>0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ akkor számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\cdot 1=1.$

36. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+5}$ határértéket.

Megoldás: $6n\le 6n+5\le 6n+n=7n \quad ha \quad n\to\infty,$

akkor $\sqrt[n]{6n}\le\sqrt[n]{6n+5}\le\sqrt[n]{7n}$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+5}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n}$

az előző példa alapján pedig

$$1\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+6}\le 1$$

amiből az következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+6}=1.$$

37. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\dfrac{3}{\infty}=0.$

38. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-2}-\sqrt[3]{n}\right)$ határértéket.

Megoldás: $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-2}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-2}-\sqrt[3]{n}\right)\frac{\sqrt[3]{(n-2)^2}+\sqrt[3]{n(n-2)}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n-2)^2}+\sqrt[3]{n(n-2)}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2-n}{\sqrt[3]{(n-2)^2}+\sqrt[3]{n(n-2)}+\sqrt[3]{n^2}}=\frac{-2}{\infty}=0.$$

39. Példa: Ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ akkor számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ határértéket.

Megoldás: $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{n\frac{-(n+1)}{-(n+1)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\frac{n}{-(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n}{-(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{-(n+1)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-(n+1)}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

40. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{2n+1}$ határértéket.

Megoldás: A sorozat általános tagjának számlálójában és nevezőjében nem egyenlő n együtthatója, ezért először ezt kell elérnünk, majd az előbbi példában követett eljárást ismételjük meg:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+4}{2n+1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(\frac{2n+1+3}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(1+\frac{3}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^{\frac{2n+1}{3}3}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^{\frac{2n+1}{3}}\right)^3\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot e^3\right)=\frac{1}{\infty}\cdot e^3=0.$$

41. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+1)-\ln n]$ határértéket.

Megoldás: A logaritmus szabályokat alkalmazva juthatunk eredményhez, a következőképpen:

$$\lim_{n\to\infty} n[\ln(n+1)-\ln n]=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$$

FELADATOK:

36. Feladat: Számítsuk ki az $a_n=\dfrac{n^2+2}{2n^2-3}$ sorozat első öt tagját.

37. Feladat: Számítsuk ki az $a_n=\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$ sorozat első öt tagját.

38. Feladat: Határozzuk meg az $1,\frac{1}{5},\frac{1}{25},\frac{1}{125},\ldots$ sorozat általános tagját.

39. Feladat: Határozzuk meg az $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32}\ldots$ sorozat általános tagját.

40. Feladat: Vizsgáljuk ki az $a_n=\dfrac{3}{2n+3}$ sorozat monotonitását.

41. Feladat: Vizsgáljuk ki az $a_n=\dfrac{1}{1+n^2}$ sorozat monotonitását.

42. Feladat: Vizsgáljuk ki az $a_n=\dfrac{7n+1}{4n-2}$ sorozat korlátosságát.

43. Feladat: Vizsgáljuk ki az $a_n=\dfrac{n^2+2}{n-3}$ sorozat korlátosságát.

44. Feladat: Mutassuk meg, hogy az $a_n=\dfrac{2n+12}{n-6}$ sorozat határértéke az $A=2$, majd határozzuk meg annak a tagnak az indexét, amelytől kezdve a sorozat minden tagja a határérték $\varepsilon=10^{-2}$ környezetébe esik.

45. Feladat: Mutassuk meg, hogy az $a_n=\dfrac{n^2-3}{n-3}$ sorozat divergens.

46. Feladat: Adottak az $a_n = \frac{3n+2}{7n-6}$ **és a** $b_n = \frac{6n-6}{3n-2}$ **sorozatok. Számítsuk ki a**

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)$, **a** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ **és a** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ **határértékeket.**

47. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{3n^5}$ **határértéket.**

48. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{3n^2}{6n+1}\right)$ **határértéket.**

49. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+9n+1}$ **határértéket.**

50. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ **határértéket.**

51. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{2n+3}$ **határértéket.**

52. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)$ **határértéket.**

53. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n+9}\right)$ **határértéket.**

54. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$ **határértéket.**

55. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}$ **határértéket.**

56. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+8}$ **határértéket.**

57. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ **határértéket.**

58. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n$ **határértéket.**

59. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{5n}$ **határértéket.**

60. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{2n}$ **határértéket.**

4. Függvények

A matematikai analízis vizsgálatainak középpontjában a függvény áll. A függvény fogalma az okozati összefüggés általános elvéből fejlődött ki. Mennyiségek közötti kapcsolatok vizsgálata során olyan összefüggéseket találunk, amelyeknél egy vagy több mennyiség bizonyos értékeihez egy másik mennyiség meghatározott értéke tartozik. Ekkor az utóbbi mennyiséget az első, illetve elsők *függvényének* nevezzük.

Egy függvénykapcsolatban a meghatározó mennyiséget *független változónak*, a meghatározott mennyiséget pedig *függő változónak* nevezzük.

Attól függően, hogy a függő változó egy vagy több független változónak a függvénye, beszélhetünk *egyváltozós* vagy *többváltozós függvényekről*. Mi a továbbiakban egyelőre csak az egyváltozós függvényekkel fogunk foglalkozni és azok tulajdonságait fogjuk vizsgálni.

A függvény megadása többféleképpen történhet, de matematikai szempontból a legfontosabb módja a *képlettel (formulával)* való megadás. Ekkor megadunk egy olyan $y = f(x)$ összefüggést amely az y függő és x független változókon kívül csak adott számokat tartalmaz. Ha az $x = x_0$ értékhez tartozó függvényértéket ki akarjuk számítani, akkor az x változó helyére az x_0 számot kell helyettesíteni.

A függvény képlettel való megadásának hátránya, hogy nem eléggé szemléletes. Ezért arra törekszünk, hogy a függvény tulajdonságainak kivizsgálása segítségével megrajzoljuk a *függvény grafikonját* vagy *görbéjét*, aminek éppen a szemléletesség az előnye.

Definíció: *A függvény grafikonja vagy görbéje a sík azon pontjainak halmaza, amelyek abszcisszái a független változó értékei, ordinátái pedig az ezeknek megfelelő függvényértékek.*

4.1. A függvény értelmezési tartománya

Definíció: *Az $y = f(x)$ függvény az x_0 helyen értelmezve van, ha x_0-hoz tartozik függvényérték, míg ha x_0-hoz nem tartozik függvényérték, akkor az x_0 helyen a függvény nem értelmezett.*

Definíció: *Azon helyek halmazát, amelyeken az $y = f(x)$ értelmezve van, a függvény értelmezési tartományának nevezzük és D_f-el (domen) jelöljük.*

Definíció: *A független változó különböző értékeihez tartozó függvényértékek halmazát a függvény értékkészletének nevezzük és CD_f-el (codomen) jelöljük.*

42. Példa: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^3+7}{x^2-5x+6}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Racionális törtfüggvény nevezője nem lehet nulla, ezért:

$$f(x)=\frac{x^3+7}{(x-2)(x-3)}$$

$$D_f:\ x-2\neq 0$$
$$x-3\neq 0$$

$D_f=R\setminus\{2,3\}$ a függvény értelmezési tartománya.

43. Példa: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}+e^{\frac{1}{x}}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Páros kitevőjű irracionális függvény csak nemnegatív gyök alatti mennyiségekre értelmezett, exponenciális függvény esetén pedig a kitevő kell értelmezett legyen:

$$D_f:\ x+1\geq 0$$
$$3-x\geq 0$$
$$x\neq 0$$

$$D_f:\ x\geq -1$$
$$x\leq 3$$
$$x\neq 0$$

$D_f: x\in[-1,0)\cup(0,3]$ a függvény értelmezési tartománya.

44. Példa: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln(1-x)}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Logaritmus függvény csak pozitív értékekre értelmezett, ezért:

$$D_f:\ x+1\geq 0$$
$$1-x>0$$
$$\ln(1-x)\neq 0$$

$$D_f:\ x\geq -1$$
$$x<1$$
$$1-x\neq 1 \Rightarrow x\neq 0$$

$D_f: x\in[-1,0)\cup(0,1)$ a függvény értelmezési tartománya.

45. Példa: Határozzuk meg az $f(x)=\arcsin(3+2^x)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Az $\arcsin x$ és az $\arccos x$ függvények a $[-1,1]$ zárt intervallumban értelmezettek, ezért:

$D_f:\ -1\le 3+2^x\le 1$

$-4\le\ 2^x\ \le -2$ ami lehetelen, mert $2^x>0$ minden $x\in\mathbf{R}$

$D_f: x\in\varnothing$, a függvény tehát nem értelmezett egyetlen valós számra sem.

46. Példa: Határozzuk meg az $f(x)=\ln\left(\arcsin\frac{x+2}{5-x}\right)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Figyelembe véve minden elementáris függvény értelmezési helyét:

$D_f:\ 5-x\ne 0$

$-1\le\frac{x+2}{5-x}\le 1$

$\arcsin\frac{x+2}{5-x}>0$

$D_f:\ x\ne 5$

$-1\le\frac{x+2}{5-x}\le 1$

$0<\frac{x+2}{5-x}\ \le 1$

$D_f:\ x\ne 5$

$0<\frac{x+2}{5-x}\ \le 1$

D_f:

$\frac{x+2}{5-x}>0$ $\wedge$ $\frac{x+2}{5-x}\le 1$

$\frac{x+2}{5-x}-1\le 0$

$x\in(-2,5)$ $\frac{x+2-5+x}{5-x}\le 0$

$\frac{2x-3}{5-x}\le 0$

$x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\cup(5,\infty)$

$D_f: x\in\left(-2,\frac{3}{2}\right]$ a függvény értelmezési tartománya.

FELADATOK:

61. Feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ **függvény értelmezési tartományát.**

62. Feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ **függvény értelmezési tartományát.**

63. Feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x^2+x+5}$ **függvény értelmezési tartományát.**

64. Feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x^2-2}$ **függvény értelmezési tartományát.**

65. Feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ **függvény értelmezési tartományát.**

66. Feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\ln\left(x^2-5x+4\right)$ **értelmezési tartományát.**

67. Feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ **függvény értelmezési tartományát.**

68. Feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{\cos 3x}$ **függvény értelmezési tartományát.**

69. Feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x}$ **függvény értelmezési tartományát.**

70. Feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{\ln\frac{x-4}{x+2}}+\sqrt{4-3x-x^2}$ **függvény értelmezési tartományát.**

4.2. A függvény párossága

Definíció: *Az* $y=f(x)$ *függvény egy* $(-a,a)$ *intervallumon páros, ha az adott intervallum minden* x *pontjában* $f(-x)=f(x)$.

A páros függvények grafikonjai szimmetrikusak az y-tengelyhez viszonyítva.

Definíció: *Az $y = f(x)$ függvény egy $(-a, a)$ intervallumon páratlan, ha az adott intervallum minden x pontjában $f(-x) = -f(x)$.*

A páratlan függvények grafikonjai szimmetrikusak az origóhoz viszonyítva.

47. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x) = \frac{3}{2}$ konstansfüggvény párosságát.

Megoldás: Ahhoz, hogy egy függvényről megállapíthassuk, hogy páros, páratlan vagy esetleg egyik sem, az $f(-x)$-et kell vizsgálnunk. Ebben az esetben:

$$f(-x) = \frac{3}{2} = f(x)$$

az értelmezési tartomány minden x értékére, ami azt jelenti, hogy az :

$$f(x) = \frac{3}{2}$$

függvény páros.

48. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ polinomfüggvény párosságát.

Megoldás: Ugyancsak $f(-x)$-et kell kivizsgálni:

$$f(-x) = (-x)^5 - 5(-x)^3 + (-x)$$
$$f(-x) = -x^5 + 5x^3 - x$$
$$f(-x) = -(x^5 - 5x^3 + x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$

az értelmezési tartomány minden x értékére, ami azt jelenti, hogy az :

$$f(x) = x^5 - 5x^3 + x$$

függvény páratlan.

49. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x) = \ln x$ logaritmusfüggvény párosságát.

Megoldás: Az $f(x) = \ln x$ logaritmusfüggvény $x > 0$ értékekre értelmezett. Ezért:

$$f(-x) = \ln(-x)$$

nem is értelmezett, mivel $x > 0$ esetén $-x < 0$, negatív számok logaritmusa pedig nem értelmezett. Ez azt jelenti, hogy az:

$$f(x) = \ln x$$

függvény se nem páros, se nem páratlan.

50. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ exponenciális függvény párosságát.

Megoldás: $f(-x) = \frac{1}{2}(a^{-x} + a^x)$

$$f(-x)=f(x)$$

az értelmezési tartomány minden x értékére, ami azt jelenti, hogy az:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right)$$

függvény páros.

51. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^2}+\sqrt[5]{(x+1)^2}$ irracionális függvény párosságát.

Megoldás: $f(-x)=\sqrt[5]{(-x-1)^2}+\sqrt[5]{(-x+1)^2}$

$$f(-x)=\sqrt[5]{(x+1)^2}+\sqrt[5]{(x-1)^2}$$

$$f(-x)=f(x)$$

az értelmezési tartomány minden x értékére, ami azt jelenti, hogy az

$$f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^2}+\sqrt[5]{(x+1)^2}$$

függvény páros.

52. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ logaritmusfüggvény párosságát.

Megoldás: $f(-x)=\log_a\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)$

$$f(-x)=\log_a\left[\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$$

$$f(-x)=\log_a\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$f(-x)=\log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$f(-x)=\log_a 1-\log_a\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$f(-x)=0-\log_a\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$f(-x)=-\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$f(-x)=-f(x)$$

az értelmezési tartomány minden x értékére, ami azt jelenti, hogy az:

$$f(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

függvény páratlan.

FELADATOK:

71. Feladat: Vizsgáljuk ki, hogy az $f(x)=e^{x}+e^{-x}$ függvény páros vagy páratlan.

72. Feladat: Vizsgáljuk ki, hogy az $f(x)=a^{x}-a^{-x}$ függvény páros vagy páratlan.

73. Feladat: Vizsgáljuk ki, hogy az $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$ függvény páros vagy páratlan.

74. Feladat: Vizsgáljuk ki, hogy az $f(x)=x^3-4x$ függvény páros vagy páratlan.

75. Feladat: Vizsgáljuk ki, hogy az $f(x)=\frac{10x}{1+x^2}$ függvény páros vagy páratlan.

76. Feladat: Vizsgáljuk ki, hogy az $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$ függvény páros vagy páratlan.

77. Feladat: Vizsgáljuk ki, hogy az $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ függvény páros vagy páratlan.

78. Feladat: Vizsgáljuk ki, hogy az $f(x)=2^x$ függvény páros vagy páratlan.

79. Feladat: Vizsgáljuk ki, hogy az $f(x)=\sin\left(x^5-x^3+1\right)$ függvény páros vagy páratlan.

80. Feladat: Vizsgáljuk ki, hogy az $f(x)=\cos\left(\frac{6}{x^4+4}\right)$ függvény páros vagy páratlan.

4.3. A függvény periodikussága

Definíció: *Az $y=f(x)$ függvény periodikus, ha létezik egy olyan pozitív ω valós szám, hogy $f(x+\omega)=f(x)$ az értelmezési tartomány minden x értékére. Ekkor az ω-t a függvény periódusának nevezzük, míg a legkisebb ilyen ω_0 pozitív szám az alapperiódus.*

53. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\sin\frac{x}{3}$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

Megoldás: $f(x)=\sin\frac{x}{3}=\sin\left(\frac{x}{3}+2k\pi\right)$, $k\in Z$ mert a $\sin x$ függvény 2π szerint periodikus, ha viszont $f(x)=\sin\frac{x}{3}$ periodikus függvény, akkor létezik egy olyan ω pozitív valós szám melyre érvényes, hogy:

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\sin\frac{x+\omega}{3}=\sin\left(\frac{x}{3}+2k\pi\right)$$

$$\frac{x}{3}+\frac{\omega}{3}=\frac{x}{3}+2k\pi$$

$$\frac{\omega}{3}=2k\pi$$

$\omega=6k\pi$, $k\in Z^{+}$ esetén pozitív valós szám, tehát az :

$$f(x)=\sin\frac{x}{3}$$

függvény $\omega=6k\pi$ szerint periodikus. Az alapperiódust $k=1$ értékre kapjuk, ez esetben $\omega_0=6\pi$.

54. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\cos\frac{3x-2}{5}$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

Megoldás: $f(x)=\cos\frac{3x-2}{5}=\cos\left(\frac{3x-2}{5}+2k\pi\right)$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\cos\frac{3(x+\omega)-2}{5}=\cos\left(\frac{3x-2}{5}+2k\pi\right)$$

$$\frac{3x+3\omega-2}{5}=\frac{3x-2}{5}+2k\pi$$

$$\frac{3\omega}{5}=2k\pi$$

$\omega=\frac{10k\pi}{3}$ szerint periodikus, míg az alapperiódus:

$$\omega_0=\frac{10\pi}{3}.$$

55. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x)=1+\cos\frac{\pi}{2}x$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

Megoldás: $f(x)=1+\cos\frac{\pi}{2}x=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$1+\cos\frac{\pi}{2}(x+\omega)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\omega\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$$

$$\frac{\pi}{2}\omega=2k\pi$$

$\omega=4k$ szerint periodikus, az alapperiódusa pedig:

$\omega_0=4$.

56. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\cos^2 x$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

Megoldás: Trigonometrikus azonossággal helyettesítsük a $\cos^2 x$ függvényt, megfelelő lineáris trigonometrikus függvénnyel:

$$f(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x+2k\pi)$$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2(x+\omega)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x+2k\pi)$$

$$\cos(2x+2\omega)=\cos(2x+2k\pi)$$

$$2\omega=2k\pi$$

$\omega=k\pi$ szerint periodikus, az alapperiódusa pedig:

$\omega_0=\pi$.

57. Példa: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\sin\sqrt{x}$ függvény periodikusságát.

Megoldás: $f(x)=\sin\sqrt{x}=\sin\left(\sqrt{x}+2k\pi\right)$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\sin\sqrt{x+\omega}=\sin\left(\sqrt{x}+2k\pi\right)$$

$$\sqrt{x+\omega}=\sqrt{x}+2k\pi$$

$$x+\omega=x+4k\pi\sqrt{x}+4k^2\pi^2$$

$$\omega=4k\pi\sqrt{x}+4k^2\pi^2\neq const.$$

mivel ω tartalmaz x-et nem létezik olyan pozitív valós ω szám, melyre $f(x+\omega)=f(x)$, ami azt jelenti hogy az $f(x)=\sin\sqrt{x}$ függvény nem periodikus.

FELADATOK:

81. Feladat: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\sin\frac{3x+1}{4}$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

82. Feladat: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\sin 4x$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

83. Feladat: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\frac{1}{3}-\sin\sqrt{2x}$ függvény periodikusságát.

84. Feladat: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

85. Feladat: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\cos^2(3x)$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

86. Feladat: Vizsgáljuk ki az $f(x)=10\sin 3x$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

87. Feladat: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\sin^2 x$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

88. Feladat: Vizsgáljuk ki az $f(x)=2\sin 2x+3\cos 2x$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

89. Feladat: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\tan\frac{3x}{2}$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

90. Feladat: Vizsgáljuk ki az $f(x)=\sqrt{\tan x}$ függvény periodikusságát, majd állapítsuk meg az alapperiódusát.

4.4. Inverz függvény

Definíció: *Ha az $y=f(x)$ függvény bijektív (az x és y változók közötti kapcsolat olyan, hogy bármelyik megadása egyértelműen meghatározza a másikat), akkor az $y=f(x)$ függvény inverzén azt az $y=f^{-1}(x)$ függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya az $f(x)$ értékkészlete, és ha $f(x_0)=y_0$ akkor $f^{-1}(y_0)=x_0$. Érvényes tehát, hogy $f^{-1}(f(x_0))=x_0$ az értelmezési tartomány minden x_0 pontjára, vagyis az $f(x)$ függvény inverze egy olyan f^{-1} függvény melyre igaz, hogy: $f^{-1}(f(x))=x$ vagy $f^{-1}(y)=x$, és ha $f:D_f\to CD_f$ akkor $f^{-1}:CD_f\to D_f$.*

A meghatározásból következik, hogy az f és f^{-1} függvényeknél szerepet cserélnek a független és függő változó (x és y), valamint az értelmezési tartomány és az értékkészlet (D_f és CD_f).

Egy függvény inverzének meghatározásánál pontosan ezt fogjuk felhasználni.

58. Példa: Határozzuk meg az $f(x)=x+1$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: $f \quad : y=x+1$

az inverz függvénynél szerepet cserélnek a független és függő változó:

$$f^{-1} : x=y+1$$

ebből az összefüggésből kifejezzük az f^{-1} függvény függő változóját, az y-t:

$$f^{-1} : y=x-1$$

$$f^{-1}(x)=x-1$$

a keresett inverz függvény, ennek értelmezési tartománya pedig $D_{f^{-1}} : x \in R$.

59. Példa: Határozzuk meg az $f(x)=\ln\frac{x}{2}$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: $f \quad : y=\ln\frac{x}{2}$

$$f^{-1} : x=\ln\frac{y}{2}$$

$$e^x=\frac{y}{2}$$

$$y=2e^x$$

$$f^{-1}(x)=2e^x$$

a keresett inverz függvény, ennek értelmezési tartománya pedig $D_{f^{-1}} : x \in R$.

60. Példa: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: $f \quad : y=\sqrt[3]{x^2+1}$

$$f^{-1} : x=\sqrt[3]{y^2+1}$$

$$x^3=y^2+1$$

$$y^2=x^3-1$$

$$y=\pm\sqrt{x^3-1}$$

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x^3 - 1}$$

a keresett inverz függvény, ennek értelmezési tartománya pedig:

$$D_{f^{-1}} : x^3 - 1 \geq 0$$
$$(x-1)(x^2 + x + 1) \geq 0$$
$$x - 1 \geq 0$$
$$x \geq 1$$

$$D_{f^{-1}} : x \in [1, +\infty).$$

61. Példa: Határozzuk meg az $f(x) = \text{arctg}3x$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: $f \quad : y = \text{arctg}3x$

$$f^{-1} : x = \text{arctg}3y$$
$$\text{tg}x = 3y$$
$$y = \frac{1}{3}\text{tg}x$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\text{tg}x$$

a keresett inverz függvény, ennek értelmezési tartománya pedig $D_{f^{-1}} : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

62. Példa: Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{e^{\cos x} - 1}{2 + e^{\cos x}}$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: $f \quad : y = \dfrac{e^{\cos x} - 1}{2 + e^{\cos x}}$

$$f^{-1} : x = \frac{e^{\cos y} - 1}{2 + e^{\cos y}}$$

$$x\left(2 + e^{\cos y}\right) = e^{\cos y} - 1$$

$$xe^{\cos y} - e^{\cos y} = -1 - 2x$$

$$e^{\cos y}(1 - x) = 1 + 2x$$

$$e^{\cos y} = \frac{1+2x}{1-x}$$

$$\cos y = \ln\frac{1+2x}{1-x}$$

$$y = \arccos\left(\ln\frac{1+2x}{1-x}\right)$$

$$f^{-1}(x) = \arccos\left(\ln\frac{1+2x}{1-x}\right)$$

a keresett inverz függvény, értelmezési tartománya pedig:

$$D_{f^{-1}} : 1-x \neq 0$$

$$\frac{1+2x}{1-x} > 0$$

$$-1 \leq \ln\frac{1+2x}{1-x} \leq 1$$

$$D_{f^{-1}} : x \neq 1$$

$$\frac{1+2x}{1-x} > 0$$

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1+2x}{1-x} \leq e$$

$$D_{f^{-1}} : \frac{1}{e} \leq \frac{1+2x}{1-x} \leq e$$

$$\frac{1+2x}{1-x} \geq \frac{1}{e} \qquad \wedge \qquad \frac{1+2x}{1-x} \leq e$$

$$\frac{1+2x}{1-x} - \frac{1}{e} \geq 0 \qquad \frac{1+2x}{1-x} - e \leq 0$$

$$\frac{e+2ex-1+x}{e(1-x)} \geq 0 \qquad \frac{1+2x-e+ex}{1-x} \leq 0$$

$$\frac{(2e+1)x+e-1}{e(1-x)} \geq 0 \qquad \frac{(2+e)x+1-e}{1-x} \leq 0$$

$$x \in \left[\frac{1-e}{2e+1}, 1\right) \qquad x \in \left(-\infty, \frac{e-1}{2+e}\right] \cup (1, +\infty)$$

az inverz függvény értelmezési tartománya ezek metszete $D_{f^{-1}} : x \in \left[\frac{1-e}{2e+1}, \frac{e-1}{2+e}\right]$.

FELADATOK:

91. Feladat: **Határozzuk meg az $f(x)=2x+3$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.**

92. Feladat: **Határozzuk meg az $f(x)=x^2-1$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.**

93. Feladat: **Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.**

94. Feladat: **Határozzuk meg az $f(x)=\log\frac{x+2}{5}$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.**

95. Feladat: **Határozzuk meg az $f(x)=\cos x-\sin x+1$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.**

96. Feladat: **Határozzuk meg az $f(x)=\ln\left(\arcsin\frac{x}{x+1}\right)$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.**

97. Feladat: **Határozzuk meg az $f(x)=2\arctan\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.**

98. Feladat: **Határozzuk meg az $e^x(2\cos y-1)=2\sin y-1$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.**

99. Feladat: **Határozzuk meg az $2e^x\sin y+2\cos y=e^x-1$ függvény inverzét, majd az inverz függvény értelmezési tartományát.**

4.5. Függvény határértéke és folytonossága

Definíció: *Egy $y = f(x)$ függvénynek az $\underline{a}$ pontban létezik határértéke, és az A, ha valahányszor $x \to a$, $x \neq a$, mindannyiszor $f(x) \to A$, és ezt így jelöljük:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Definíció: *Ha $x < a$ és $x \to a$, akkor megegyezés szerint azt mondjuk, hogy $x \to a - 0$, és a $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ számot az $f(x)$ függvény bal oldali határértékének nevezzük az $\underline{a}$-ban.*

Definíció: *Ha $x > a$ és $x \to a$, akkor megegyezés szerint azt mondjuk, hogy $x \to a + 0$, és a $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ számot az $f(x)$ függvény jobb oldali határértékének nevezzük az $\underline{a}$-ban.*

Definíció: *Az $y = f(x)$ függvény folytonos az $\underline{a}$ pontban, ha ezen a helyen léteznek a bal oldali és jobb oldali határértékek, és ezek egyenlők a függvény $\underline{a}$ pontbeli értékével:* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ *illetve* $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$.

Függvények $\underline{a}$ pontbeli határértékének kiszámításakor sok esetben *határozatlan kifejezést* kapunk. Ekkor különböző algebrai transzformációkat kell végeznünk az adott kifejezésen, hogy a határo-zatlanságot megszüntessük. A határozatlan kifejezéseknek hét különböző alakja ismert, melyeket három csoportba sorolhatunk.

Határozatlan kifejezések: *1.* $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

2. $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

3. 1^{∞}, 0^0, ∞^0

Ha $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ *alakú határértéket kell számítani és* $P(a) = Q(a) = 0$, *akkor* $\frac{0}{0}$ *típusú határozatlan kifejezést kapunk, melyet $x - a$ binómmal kell egyszerűsíteni.*

63. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x + 1}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x - 1)} = \frac{1+1+1}{1+1-1} = \frac{3}{1} = 3$.

64. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-1}=\dfrac{2-3}{4-1}=-\dfrac{1}{3}$.

65. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^2}{(x-5)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x+5}=\dfrac{0}{10}=0$.

A $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *alakú határértékek legtöbbször* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *típusú határozatlan kifejezések, melyeknél a számlálóból is és a nevezőből is* x *legnagyobb hatványát kell kiemelni.*

66. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+5x-3}{2x^3-x+12}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+5x-3}{2x^3-x+12}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}}=\dfrac{3}{2}$,

ahol x^3-nel egyszerűsítettünk, és $x\to\infty$ esetén $\dfrac{2}{x}\to 0$, $\dfrac{5}{x^2}\to 0$ stb.

67. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+10}{5x^2-x-1}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+10}{5x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3x-2+\dfrac{10}{x}\right)}{x^2\left(5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2+\dfrac{10}{x}}{5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{5}=\dfrac{\infty}{5}=\infty$.

68. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+5}{x^2+2x+1}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+5}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(4+\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{5}{x}}{x+2+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{4}{\infty}=0$.

Irracionális kifejezések határértékének meghatározásakor legtöbbször a kifejezés racionalizálása vezet eredményhez.

69. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\dfrac{\sqrt{9x^2+1}+3x}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\dfrac{1}{\infty}=0$.

70. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

71. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}\cdot\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\mathrm{tg}x-1-\mathrm{tg}x}{2\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-2\mathrm{tg}x}{2\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-1}{\cos^2 x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=$

$=\dfrac{-1}{(-1)^2(1+1)}=-\dfrac{1}{2}$.

Trigonometrikus függvények határértékének számítása esetén a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ *képletet használjuk.*

72. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=1\cdot 3=3$.

73. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$.

74. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}\cdot\frac{x^2}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

75. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x+\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\sqrt{2}\cdot\frac{|\sin x|}{x}=$

$$=\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\frac{|\sin x|}{x}\cdot\frac{|x|}{|x|}=\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\cdot\frac{|x|}{x}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to\pm 0}\frac{|x|}{x}=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to+0}\frac{|x|}{x}\\ \sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to-0}\frac{|x|}{x}\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{2}\cdot 1 & ha\ x\to+0\\ \sqrt{2}\cdot(-1) & ha\ x\to-0\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{2} & ha\ x\to+0\\ -\sqrt{2} & ha\ x\to-0\end{cases}.$$

Az olyan típusú határértékek kiszámításánál, melyeknél az alapban is és a kitevőben is megjelenik az x változó, és a határérték 1^{∞} alakú határozatlan kifejezés, a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ *képletet használjuk, ahol* $e=2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ldots$ *a Neper-féle szám.*

76. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^{x}$ **határértéket.**

Megoldás: $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+1}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x\frac{2x+1}{2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{(2x+1)\frac{x}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{2x+1}\right]^{\frac{x}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{2x+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\ .$$

77. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$ **határértéket.**

Megoldás: $$\lim_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\right)^{\mathrm{ctg}x}=\left|\begin{matrix}\mathrm{ctg}x=t\\ x\to 0\\ t\to\infty\end{matrix}\right|=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e\ .$$

78. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ **határértéket.**

Megoldás: $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\left|\begin{matrix}\frac{1}{x}=t\\ x\to 0\\ t\to\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=\ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]=\ln e=1\ .$$

79. Példa: Határozzuk meg az A **állandó értékét úgy, hogy az** $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & , \ x<0\\ A & , \ x=0\\ 1+x & , \ x>0\end{cases}$

függvény folytonos legyen.

Megoldás: Az $1-x^2$ (parabola) függvény az $x<0$ értékekre folytonos, ugyanígy az $1+x$ (egyenes) függvény is az $x>0$ értékekre folytonos. Ahhoz tehát, hogy az $f(x)$ függvény

folytonos legyen, az $x=0$-ban kell úgy definiálnunk a függvényértéket, hogy az $f(x)$ az összetételnél is folytonos legyen. Definíció szerint:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(0) = \lim_{x\to +0} f(x)$$
$$\lim_{x\to -0}\left(1-x^2\right) = A = \lim_{x\to +0}(1+x)$$
$$1 = A = 1$$

tehát

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & , \quad x<0 \\ 1 & , \quad x=0 \\ 1+x & , \quad x>0 \end{cases}.$$

80. Példa: Határozzuk meg a λ paraméter értékét úgy, hogy az $f(x)=\begin{cases} e^{-x}+1 & , \quad x\geq 0 \\ x+\lambda & , \quad x<0 \end{cases}$ függvény folytonos legyen.

Megoldás: Az előző feladat megoldásához hasonlóan:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(0) = \lim_{x\to +0} f(x)$$
$$\lim_{x\to -0}\left(e^{-x}+1\right) = e^{-0}+1 = \lim_{x\to +0}(x+\lambda)$$
$$1+1=1+1=0+\lambda$$
$$2=2=\lambda$$

tehát $f(x)$ folytonos ha $\lambda=2$, vagyis

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}+1 & , \quad x\geq 0 \\ x+2 & , \quad x<0 \end{cases}.$$

81. Példa: Határozzuk meg az A állandó értékét úgy, hogy az $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \quad x\neq 2 \\ A & , \quad x=2 \end{cases}$ függvény folytonos legyen.

Megoldás: $\lim_{x\to 2-0} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2+0} f(x)$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-4}{x-2} = A = \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-4}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = A = \lim_{x\to 2+0}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2-0}(x+2) = A = \lim_{x\to 2+0}(x+2)$$
$$4 = A = 4$$

tehát $f(x)$ folytonos ha $A=4$, vagyis

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \quad x\neq 2 \\ 4 & , \quad x=2 \end{cases}.$$

FELADATOK:

100. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}$ **határértéket.**

101. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^3-6x^2+x-5\right)$ **határértéket.**

102. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{3x^2-4x-4}$ **határértéket.**

103. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$ **határértéket.**

104. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+2x-x^2}{2x^2-x}$ **határértéket.**

105. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ **határértéket.**

106. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ **határértéket.**

107. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ **határértéket.**

108. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ **határértéket.**

109. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}$ **határértéket.**

110. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ **határértéket.**

111. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{|x|-x}{x}$ **határértéket.**

112. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x)$ **határértéket, ha** $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & , \quad x>0\\ x+1 & , \quad x\le 0\end{cases}$.

113. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ **határértéket.**

114. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ **határértéket.**

115. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ **határértéket.**

116. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin x}{x}$ **határértéket.**

117. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-3x^2}{\sin x}$ **határértéket.**

118. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$ **határértéket.**

119. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{-x}$ **határértéket.**

120. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{x}$ **határértéket.**

121. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ **határértéket.**

122. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ **határértéket.**

123. Feladat: Határozzuk meg az A **paraméter értékét úgy, hogy az**

$$f(x)=\begin{cases}(2-x)\dfrac{\sin x}{3x} & , \quad x\neq 0\\ A & , \quad x=0\end{cases}$$ **függvény folytonos legyen.**

124. Feladat: Határozzuk meg az A **paraméter értékét úgy, hogy az**

$$f(x)=\begin{cases}e^x\dfrac{\sin 5x}{x} & , \quad x\neq 0\\ A & , \quad x=0\end{cases}$$ **függvény folytonos legyen.**

125. Feladat: Határozzuk meg az A **paraméter értékét úgy, hogy az**

$$f(x)=\begin{cases}(x^2+1)\dfrac{\sin x}{x} & , \quad x\neq 0\\ A & , \quad x=0\end{cases}$$ **függvény folytonos legyen.**

5. Differenciálszámítás

5.1. Függvények differenciálhányadosa és differenciálja

Definíció: *Az $y = f(x)$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosa (első deriváltja):*

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad a \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \textit{különbségi hányados határértéke ha} \quad \Delta x \to 0, \quad \textit{vagyis}$$

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Definíció: *Ha az $y = f(x)$ függvény az x_0 pontban differenciálható, akkor az (x_0, y_0) ponton átmenő és $y'(x_0)$ iránytangensű egyenes az $y = f(x)$ görbe x_0 pontbeli érintője.*

A differenciálhányados geometriai jelentése tehát: az x_0 pontbeli differenciálhányados az x_0 pontbeli érintő iránytangense.

A differenciálhányados keresésének folyamatát *deriválásnak* nevezzük.

Definíció: *Ha $y = f(x)$ függvény differenciálható, akkor $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ahonnan $dy = f'(x)dx$.*

Ezt a kifejezést az y változó x-szerinti differenciáljának nevezzük.

Deriválási szabályok

Ha c konstans, $u = \varphi(x)$ és $v = \psi(x)$ deriválható fügvények, akkor érvényesek a következő deriválási szabályok:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Összetett függvény deriváltja

Ha $y = f(u)$ és $u = g(x)$ deriválható függvények, akkor az $y = f(u) = f(g(x))$ összetett függvény deriváltja: $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = y'_u \cdot u'_x$ vagy $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Elemi függvények deriváltjainak táblázata

1. $(const)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
10. $(\arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
11. $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
13. $(a^x)' = a^x \ln a$
14. $(e^x)' = e^x$
15. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$
17. $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$
18. $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$
19. $(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
20. $(\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
21. $(\mathrm{Arsh}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
22. $(\mathrm{Arch}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$
23. $(\mathrm{Arth}x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$
24. $(\mathrm{Arth}x)' = -\frac{1}{x^2-1} \quad (|x| > 1)$

82. Példa: Definíció szerint határozzuk meg az $y = x^2 + 1$ függvény első deriváltját.
Megoldás:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x,$$

az $y = x^2 + 1$ függvény első deriváltja tehát $y' = 2x$.

83. Példa: Definíció szerint határozzuk meg az $y = \sqrt{x+2}$ függvény első deriváltját.
Megoldás:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x + 2 - x - 2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

84. Példa: Határozzuk meg az $y = x^7$ függvény első deriváltját.
Megoldás: Használjuk fel az elemi függvények deriváltjainak táblázatát valamint a deriválási szabályokat. Ekkor: $y' = 7x^6$.

85. Példa: Határozzuk meg az $y = \sqrt[3]{x}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

86. Példa: Határozzuk meg az $y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} = 2x^{-\frac{3}{4}}$

$$y' = 2\left(-\frac{3}{4}\right) x^{-\frac{3}{4} - 1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{2\sqrt[4]{x^7}} = \frac{3}{2x\sqrt[4]{x^3}}.$$

87. Példa: Határozzuk meg az $y = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}} = \sqrt[36]{x} = x^{\frac{1}{36}}$

$$y' = \frac{1}{36}x^{\frac{1}{36}-1} = \frac{1}{36}x^{-\frac{35}{36}} = \frac{1}{36\sqrt[36]{x^{35}}}$$

88. Példa: Határozzuk meg az $y = \sqrt{x}(5x - x^3)$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y = \sqrt{x}(5x - x^3)$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x - x^3) + \sqrt{x}(5 - 3x^2) = \frac{5x - x^3 + 10x - 6x^3}{2\sqrt{x}} = \frac{15x - 7x^3}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{15}{2}\sqrt{x} - \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}\ .$$

89. Példa: Határozzuk meg az $y = \frac{2x^2 + 3x}{4x - 6}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y = \frac{2x^2 + 3x}{4x - 6} = \frac{u}{v}$

$$y' = \frac{(4x+3)(4x-6) - (2x^2+3x)4}{(4x-6)^2} = \frac{16x^2 - 24x + 12x - 18 - 8x^2 - 12x}{(4x-6)^2} =$$

$$= \frac{8x^2 - 24x - 18}{(4x-6)^2} = \frac{2(4x^2 - 12x - 9)}{(4x-6)^2}.$$

90. Példa: Határozzuk meg az $y = 2\sin x - 3\cos x$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y' = 2\cos x - 3(-\sin x) = 2\cos x + 3\sin x$.

91. Példa: Határozzuk meg az $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x$.

92. Példa: Határozzuk meg az $y = (3x + 7)^2$ függvény első deriváltját.

Megoldás: Az $y = (3x + 7)^2$ függvény összetett függvény, a deriválási szabály alapján:

$$y' = 2(3x+7)^{2-1} \cdot (3x+7)' = 2(3x+7)3 = 6(3x+7)\ .$$

93. Példa: Határozzuk meg az $y = \sin\sqrt{5x}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y' = \cos\sqrt{5x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x}} \cdot 5 = \frac{5\cos\sqrt{5x}}{2\sqrt{5x}}$.

94. Példa: Határozzuk meg az $y = \mathrm{tg}(\sin 5x)$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y' = \frac{1}{\cos^2(\sin 5x)} \cdot \cos 5x \cdot 5 = \frac{5\cos 5x}{\cos^2(\sin 5x)}$.

95. Példa: Határozzuk meg az $y = 5e^x - 3e^{2x}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y' = 5e^x - 3e^{2x} \cdot 2 = 5e^x - 6e^{2x}$.

96. Példa: Határozzuk meg az $y = a^x + \frac{1}{2}a^{-x} + a^{2x}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y' = a^x \ln a + \frac{1}{2}a^{-x} \ln a \cdot (-1) + a^{2x} \ln a \cdot 2 = \ln a\left(a^x - \frac{1}{2}a^{-x} + 2a^{2x}\right)$.

97. Példa: Határozzuk meg az $y = 3^{\frac{1}{x+1}}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y = 3^{\frac{1}{x+1}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\frac{1}{x+1}\right)' = 3^{\frac{1}{x+1}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{0-1}{(x+1)^2} = \frac{-\ln 3}{(x+1)^2} \cdot 3^{\frac{1}{x+1}}$.

98. Példa: Határozzuk meg az $y = e^{e^{2x}}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y' = e^{e^{2x}} \cdot \left(e^{2x}\right)' = e^{e^{2x}} \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}e^{e^{2x}}$.

99. Példa: Határozzuk meg az $y = \sin e^{x^2}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y' = \cos e^{x^2} \cdot \left(e^{x^2}\right)' = \cos e^{x^2} \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2} \cos e^{x^2}$.

100. Példa: Határozzuk meg az $y = 5\ln x + 3\ln 2x$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y' = 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{5}{x} + \frac{3}{x} = \frac{8}{x}$.

101. Példa: Határozzuk meg az $y = \ln(3x+4)$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y' = \frac{1}{(3x+4)} \cdot 3 = \frac{3}{3x+4}$.

102. Példa: Határozzuk meg az $y = \ln(\sin^2 x)$ függvény első deriváltját és differenciálját.

Megoldás: $y' = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot (\sin x)' = \frac{2}{\sin x} \cdot \cos x = 2\mathrm{ctg}x$ az első derivált,

míg

$dy = 2\mathrm{ctg}x\,dx$ a differenciál.

103. Példa: Határozzuk meg az $y=\log(2x+3)$ függvény első differenciálját.

Megoldás: $y'=\dfrac{1}{(2x+3)\ln 10}\cdot(2x+3)'=\dfrac{2}{(2x+3)\ln 10}$,

$$dy=\frac{2}{(2x+3)\ln 10}dx\ .$$

104. Példa: Határozzuk meg az $y=e^{2x}\ln 2x$ függvény első deriváltját és differenciálját.

Megoldás: $y'=e^{2x}\cdot 2\cdot\ln 2x+e^{2x}\dfrac{1}{2x}\cdot 2=e^{2x}\left(2\ln 2x+\dfrac{1}{x}\right)$,

$$dy=e^{2x}\left(2\ln 2x+\frac{1}{x}\right)dx\ .$$

105. Példa: Határozzuk meg az $y=e^{2x+\ln 2x}$ függvény első deriváltját és differenciálját.

Megoldás: $y=e^{2x+\ln 2x}=e^{2x}\cdot e^{\ln 2x}=e^{2x}\cdot 2x=2xe^{2x}$

$y'=2\left(e^{2x}+xe^{2x}\cdot 2\right)=2e^{2x}(1+2x)$,

$dy=2e^{2x}(1+2x)dx$.

106. Példa: Határozzuk meg az $y=x^x$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y=x^x$

$\ln y=\ln x^x$

$\ln y=x\ln x \qquad /\dfrac{d}{dx}$

$\dfrac{1}{y}y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$y'=y(\ln x+1)$

$y'=x^x(\ln x+1)$.

107. Példa: Határozzuk meg az $y=(5-2x)^x$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y=(5-2x)^x$

$\ln y=x\ln(5-2x)$

$\dfrac{1}{y}y'=\ln(5-2x)+x\dfrac{1}{5-2x}\cdot(-2)$

$y'=y\left[\ln(5-2x)-\dfrac{2x}{5-2x}\right]$

$y'=(5-2x)^x\left[\ln(5-2x)-\dfrac{2x}{5-2x}\right]$.

108. Példa: Határozzuk meg az $y=\left(6-x^2\right)^{x^2}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $y=\left(6-x^2\right)^{x^2}$

$$\ln y = x^2 \ln\left(6-x^2\right)$$

$$\frac{1}{y}y' = 2x\ln\left(6-x^2\right)+x^2\frac{1}{6-x^2}\cdot(-2x)$$

$$y' = y\left[2x\ln\left(6-x^2\right)-\frac{2x^3}{6-x^2}\right]$$

$$y' = \left(6-x^2\right)^{x^2}\left[2x\ln\left(6-x^2\right)-\frac{2x^3}{6-x^2}\right].$$

109. Példa: Határozzuk meg az $y=x^{\cos x}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $\ln\ y\ =\ \cos\ \ x\ \ln\ x$

$$\frac{1}{y}y' = -\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y' = y\left[-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$y' = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\cdot\ln x\right).$$

110. Példa: Határozzuk meg az $y=(\ln 2x)^{3x^2}$ függvény első deriváltját.

Megoldás: $\ln y = 3x^2\ln(\ln 2x)$

$$\frac{1}{y}y' = 6x\cdot\ln(\ln 2x)+3x^2\cdot\frac{1}{\ln 2x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2$$

$$y' = y\left(6x\ln(\ln 2x)+\frac{3x}{\ln 2x}\right)$$

$$y' = (\ln 2x)^{3x^2}\left(6x\ln(\ln 2x)+\frac{3x}{\ln 2x}\right).$$

FELADATOK:

126. Feladat: Definíció szerint határozzuk meg az $y=x^2+x+2$ első deriváltját.

127. Feladat: Definíció szerint határozzuk meg az $y=\sqrt{3x-4}$ függvény első deriváltját.

128. Feladat: Határozzuk meg az $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ függvény első deriváltját.

129. Feladat: Határozzuk meg az $y=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2$ függvény első deriváltját.

130. Feladat: Határozzuk meg az $y=\sqrt{3x^2+5x-6}$ függvény első deriváltját.

131. Feladat: Határozzuk meg az $y = \ln(\cos x \cdot \sin^2 2x)$ függvény első deriváltját.

132. Feladat: Határozzuk meg az $y = x^{\sin x}$ függvény első deriváltját.

133. Feladat: Határozzuk meg az $y = (\sqrt{x})^{x^2}$ függvény első deriváltját.

134. Feladat: Határozzuk meg az $y = \frac{e^x}{x^2}$ függvény első deriváltját és differenciálját.

135. Feladat: Határozzuk meg az $y = \arcsin\frac{1}{x^2}$ első deriváltját és differenciálját.

5.2. Magasabb rendű differenciálhányadosok

Definíció: Ha az $y = f(x)$ függvény differenciálhányadosa ismét differenciálható, akkor ezt az újabb differenciálhányadost az $y = f(x)$ függvény második differenciálhányadosának (második deriváltjának) nevezzük. Hasonlóan kapjuk a harmadik,... stb. differenciálhányadosokat.

A magasabbrendű differenciálhányadosokat a következő módon jelöljük:

$$y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots, y^{(n)}$$

vagy

$$f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)} \ldots, f^{(n)}$$

illetve

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

111. Példa: Határozzuk meg az $y = \ln x$ magasabb rendű differenciálhányadosait.

Megoldás: $y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$y'' = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$y''' = 2 \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$y^{(4)} = -6 \cdot x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

112. Példa: Határozzuk meg az $y=\sin x$ függvény magasabb rendű differenciálhányadosait.

Megoldás: $y=\sin x$

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y^{(4)}=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

113. Példa: Határozzuk meg az $y=e^{3+4x}$ függvény magasabb rendű differenciálhányadosait.

Megoldás: $y=e^{3+4x}$

$$y'=e^{3+4x}\cdot 4=4\cdot e^{3+4x}$$
$$y''=4\cdot e^{3+4x}\cdot 4=16\cdot e^{3+4x}=4^2\cdot e^{3+4x}$$
$$y'''=16\cdot e^{3+4x}\cdot 4=64\cdot e^{3+4x}=4^3\cdot e^{3+4x}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}=4^n\cdot e^{3+4x}.$$

FELADATOK:

136. Feladat: Határozzuk meg az $y=\cos x$ függvény magasabb rendű differenciálhányadosait.

137. Feladat: Határozzuk meg az $y=\sin 5x$ függvény magasabb rendű differenciálhányadosait.

138. Feladat: Határozzuk meg az $y=\sqrt{x}$ függvény magasabb rendű differenciálhányadosait.

139. Feladat: Határozzuk meg az $y=a^x$ függvény magasabb rendű differenciálhányadosait.

140. Feladat: Határozzuk meg az $y=x^n$ függvény magasabb rendű differenciálhányadosait.

5.3. A L'Hospital-Bernoulli szabály

A L'Hospital-Bernoulli szabály a $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakú határozatlan kifejezések határértékének kiszámítását könnyíti meg.

Tétel: *Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ az $x=a$ pont valamely környezetében differenciálható függvények, és legyen $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Ha ebben a környezetben $g(x)\neq 0$ és $g'(x)\neq 0$ és a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik (vagy $\pm\infty$-nel egyenlő), akkor a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik (vagy $\pm\infty$-nel egyenlő), és:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

114. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}}{1}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$.

115. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x^2}{3(x-1)}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x^2}{3(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{3x}=\frac{2}{3\cdot 1}=\frac{2}{3}$.

116. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$.

117. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\frac{1}{1+0}=1$.

118. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-7^x}{x}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-7^x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x\ln 5-7^x\ln 7}{1}=\ln 5-\ln 7=\ln\frac{5}{7}$.

119. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}7x}{x}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}7x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 7x}\cdot 7}{1}=\frac{7}{1}=7$.

120. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2^x(\ln 2)^2}=\frac{2}{\infty}=0$.

121. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{\infty}=0$.

122. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\frac{\infty}{2}=\infty$.

123. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\frac{\sin x}{x}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot 1=-\sin 0=0$.

A $0\cdot\infty$ *típusú határozatlan kifejezések vizsgálata: ha a* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, *és a* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, *akkor a* $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$ *vizsgálata visszavezethető a* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ *vagy a* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ *határérték valamelyikének vizsgálatára, amelyek már* $\dfrac{0}{0}$ vagy $\dfrac{\infty}{\infty}$ *típusúak.*

124. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to+0} 2x\ln x$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to+0} 2x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{2\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{2\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}=-2\lim\limits_{x\to+0} x=-2\cdot 0=0$.

125. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} 5x\operatorname{ctg}3x$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0} 5x\operatorname{ctg}3x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{tg}3x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{\dfrac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3}=\dfrac{5}{3}$.

126. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}=(\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{\infty}=0$.

A $\infty-\infty$ *típusú határozatlan kifejezések vizsgálata: ha a* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, *akkor a* $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ *határérték vizsgálata visszavezethető a* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$ *határérték vizsgálatára, amely már* $\dfrac{0}{0}$ *típusú.*

127. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ **határértéket.**

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1\cdot\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

128. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+(\cos x-x\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

129. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}$.

Az $1^\infty,\infty^0,0^0$ exponenciális típusú határozatlan kifejezések határértékét logaritmálással számítjuk ki, miközben $0\cdot\infty$ típusú határozatlan kifejezést kell megoldanunk.

130. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}=(0^0)=\lim\limits_{x\to +0}y$ ahol

$y=x^{\sin x}$ ennek logaritmusa pedig

$\ln y=\ln x^{\sin x}$ a logaritmus szabályok alapján

$\ln y=\sin x\ln x$ ennek határértéke pedig

$$\lim_{x\to +0}(\ln y)=\ln\left(\lim_{x\to +0}y\right)=\lim_{x\to +0}(\sin x\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to +0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}=$$

$$=-\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\operatorname{tg}x=-1\cdot 0=0$$

innen pedig, mivel $\ln\left(\lim\limits_{x\to +0}y\right)=0$

következik, hogy $\lim\limits_{x\to +0}y=e^0$

vagyis $\lim\limits_{x\to +0}y=1$

illetve $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x} = 1$.

131. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{2}{3+4\ln x}}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{2}{3+4\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim\limits_{x\to+0} y$

$$y = x^{\frac{2}{3+4\ln x}}$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{2}{3+4\ln x}} = \frac{2}{3+4\ln x}\ln x$$

$$\lim_{x\to+0}(\ln y) = \ln\left(\lim_{x\to+0} y\right) = \lim_{x\to+0}\frac{2\ln x}{3+4\ln x} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{4}{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+0} y = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to+0} x^{\frac{2}{3+4\ln x}} = \sqrt{e} .$$

132. Példa: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ határértéket.

Megoldás: $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \left(1^\infty\right) = \lim\limits_{x\to0} y$

$$y = (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

$$\ln y = \frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x)$$

$$\lim_{x\to0}(\ln y) = \ln\left(\lim_{x\to0} y\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to0} 3\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x} =$$

$$= -6\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{1}{\cos 2x} = -6\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos 2x} = -6\cdot 1 = -6$$

$$\ln\left(\lim_{x\to0} y\right) = -6$$

$$\lim_{x\to0} y = e^{-6}$$

$$\lim_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{e^6} .$$

FELADATOK:

141. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

142. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

143. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

144. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x-\sin x}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

145. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

146. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

147. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

148. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln\sin x}$, $(m>0)$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

149. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

150. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

151. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\operatorname{ctg}x)$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

152. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

153. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

154. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right]$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

155. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

156. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

157. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to +0} x^x$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

158. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to +0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

159. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to +0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

160. Feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{\sin x}$ **határértéket a L'Hospital-szabály alkalmazásával.**

6. Függvénykivizsgálás

A függvénykivizsgálás célja a függvény grafikonjának ábrázolása. E célból meg kell állapítanunk a függvény legfontosabb tulajdonságait, különböző aszimptótáit, helyi szélső értékeit, menetét, az inflexiós pontokat valamint a konkáv és konvex íveket. Ezek kivizsgálása után már láthatjuk hogyan változik a függvény, és ha szükséges bizonyos szakaszokon még kiszámíthatjuk néhány pontban a függvény értékeket. A függvény grafikonjának megrajzolása a kapott pontoknak a kivizsgált tulajdonságok alapján való összekötésével történik.

A függvénykivizsgálást a következő szempontok alapján a megadott sorrendben fogjuk végezni:

1. *Értelmezési tartomány:* D_f.

2. *Párosság:* $f(-x) = \pm f(x)$ *és*
   Periodikusság: $f(x+\omega) = f(x)$ *(csak a trigonometrikus függvényeknél).*

3. *Nullahelyek:* $y = 0$.

4. *Előjel:* $y > 0$ *vagy* $y < 0$.

5. *Aszimptóták: vertikális VA, horizontális HA, ferde FA.*

6. *Szélső értékek:* $y' = 0$.

7. *Menet:* $y' > 0$ *vagy* $y' < 0$.

8. *Inflexiós pontok:* $y'' = 0$.

9. *Konvexitás, konkávság:* $y'' > 0$ *vagy* $y'' < 0$.

10. *Grafikon.*

Bővebben az egyes szempontokról:

1. Minden függvény kivizsgálását az értelmezési tartományának meghatározásával kezdjük, ugyanis azokon a helyeken ahol a függvény nem értelmezett, nem is vizsgáljuk a tulajdonságokat.

2. A párosságot illetve a páratlanságot minden függvénynél vizsgáljuk, mert a páros vagy páratlan függvényeknél elegendő az értelmezési tartomány felén vizsgálni a tulajdonságokat, a grafikon szimmetrikussága miatt a másik felén is megrajzolható a függvény.

A periodikusságot csak trigonometrikus függvények esetében kell vizsgálni.

3. A függvény nullahelyei azok a pontok amelyekben a grafikon metszi az x-tengelyt. Ezen pontok ordinátája 0, tehát az $y=0$ egyenlet megoldásával számíthatók ki.

4. A függvény grafikonjának ábrázolása szempontjából fontos, mely intervallumokon lesz a grafikon az x-tengely felett (itt az $y>0$) és mely intervallumokon lesz az x-tengely alatt (itt az $y<0$).

5. Három féle aszimptóta létezik, attól függően milyen helyzetű az az egyenes amelyhez közelít a függvény.

VA: vertikális aszimptóta, olyan $x=a$ egyenes, melyre $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ahol a a függvény szakadáspontja vagy az értelmezési tartomány véges határa.

HA: horizontális aszimptóta, olyan $y=b$ egyenes, melyre $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$.

FA: ferde aszimptóta, olyan ferde helyzetű $y=kx+n$ egyenes, melyre $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ és $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-k\,x)$ ahol $k\neq 0$ és $k\neq\infty$.

6. Lehetséges szélső érték helyek azok a pontok melyekre $y'=0$. Hogy ezek közül melyik maximum és melyik minimum esetleg egyik sem, a 7.-ik szempontban vizsgált menet táblázatából könnyen kiolvasható.

7. A függvény menetét az első deriváltja előjelének segítségével vizsgálhatjuk ki. Ahol $f'(x)>0$ *ott* $f(x)\uparrow$ (növekvő), ahol $f'(x)<0$ *ott* $f(x)\downarrow$ (csökkenő). Ahol a függvény növekvőből átmegy csökkenőbe ott helyi maximumot ér el, ahol pedig csökkenőből megy át növekvőbe ott helyi minimumot ér el.

8. Inflexiós pontoknak nevezzük azokat a pontokat, melyekben a függvény konvex íve konkávba hajlik át, vagy fordítva. Az áthajlási pontokban az $y''=0$. Ezért a lehetséges inflexiós pontokat az $y''=0$ egyenlet megoldásával kapjuk. Hogy az egyenlet megoldásai közül melyek valójában inflexiók és melyek nem, az a 9.-ik pontban vizsgált konvexitási táblázatból könnyen leolvasható.

9. A függvény íve valamely intervallumon lehet alulról konkáv vagy konvex, illetve fölülről konkáv vagy konvex. Ez a második derivált előjelétől függ. Ha $f''(x)>0$ *akkor* $f(x)\cup$ (alulról konvex, felülről konkáv), ha pedig $f''(x)<0$ *akkor* $f(x)\cap$ (alulról konkáv, felülről konvex).

10. A kivizsgált tulajdonságok és a meghatározott jellemző pontok alapján megrajzoljuk a függvény grafikonját.

133. Példa: Vizsgáljuk ki az $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ racionális tört függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.

Megoldás: A függvénykivizsgálást a felsorolt pontok szerint végezzük.

1.) Értelmezési tartomány:

$x-1\neq 0$

$x\neq 1$

$D_f=R\setminus\{1\}$.

2.) Párosság:

$f(-x)=\frac{-2x-1}{(-x-1)^2}=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}\neq\pm f(x)$, a függvény se nem páros se nem páratlan.

3.) Nullahelyek:

$y=0$

$\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0$

$2x-1=0$

$x=\frac{1}{2}$, a függvénynek tehát egy nullahelye van, az $N\left(\frac{1}{2},0\right)$ pont.

4.) Előjel:

$y>0$ *vagy* $y<0$

x	$-\infty$ 0.5	0.5 1	1 $+\infty$
2x-1	-	+	+
y	-	+	+

5.) Aszimptóták:

VA: $x=1$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{(1-0-1)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{(1+0-1)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

HA: $y=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-\infty}=0$$

FA: nincs, mert van horizontális.

6.)Szélső értékek:

$y' = 0$

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1) - 2(2x-1)}{(x-1)^3} = \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3} = 0$$

$-2x = 0$ innen

$x = 0$ a lehetséges helyi szélső érték abszcisszája (stacionáris pont).

7.)Menet:

$y' > 0$ *vagy* $y' < 0$

x	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
$-2x$	+	-	-
$(x-1)^3$	-	-	+
y'	-	+	-
y	↓	↑	↓

A táblázatból leolvashatjuk, hogy az $x = 0$-ban a függvénynek lokális minimuma van, $y_{\min}(0) = -1$.
Az $x = 1$-ben szakadáspont van.

8.)Inflexiós pontok:

$y'' = 0$

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 2x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-2(x-1) + 6x}{(x-1)^4} = \frac{-2x+2+6x}{(x-1)^4} = \frac{4x+2}{(x-1)^4} = 0$$

$4x + 2 = 0$ innen

$x = -\frac{1}{2}$ a lehetséges inflexiós pont.

9.)Konvexitás:

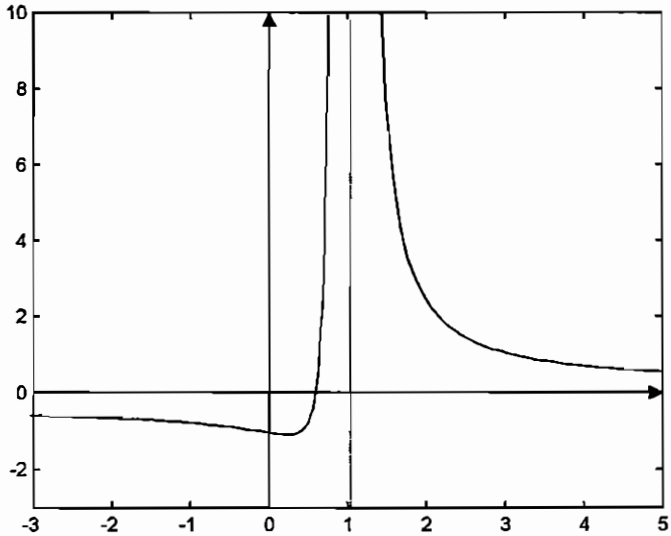
$y'' > 0$ *vagy* $y'' < 0$

x	$-\infty$ -0.5	-0.5 1	1 $+\infty$
$4x+2$	-	+	+
$(x-1)^4$	+	+	+
y''	-	+	+
y	∩	∪	∪

A táblázatból leolvashatjuk, hogy az $x = -\frac{1}{2}$-ben a függvénynek inflexiós pontja van

melynek koordinátái $y_{inf}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-1-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{-2}{\frac{9}{4}}=-\frac{8}{9}$.

10.)Grafikon:



134. Példa: Vizsgáljuk ki az $y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ irracionális függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.

Megoldás: A függvénykivizsgálást a felsorolt pontok szerint végezzük.

1.)Értelmezési tartomány:

Mivel a gyökkitevő páratlan a gyök alatti mennyiség bármilyen előjelű lehet. A gyök alatti kifejezés egy harmadfokú polinom, amely minden valós számra értelmezett, így:

$D_f=R$.

2.)Párosság:

$f(-x)=\sqrt[3]{2x^2-(-x)^3}=\sqrt[3]{2x^2+x^3}\neq\pm f(x)$ se nem páros, se nem páratlan.

3.)Nullahelyek:

$y=0$

$\sqrt[3]{2x^2-x^3}=0$

$2x^2-x^3=0$

$x^2(2-x)=0$

$x^2=0 \quad \vee \quad 2-x=0$

$x_{1/2} = 0 \quad \vee \quad x_3 = 2$,

a függvénynek tehát két nullahelye van, az $N_1(0,0)$ és az $N_2(2,0)$.

4.)Előjel:

$y > 0$ *vagy* $y < 0$

$\sqrt[3]{x^2(2-x)} > 0$ *vagy* $\sqrt[3]{x^2(2-x)} < 0$

a függvény előjele csak az $2-x$ tényező előjelétől függ

x	$-\infty \quad 0$	$0 \quad 2$	$2 \quad +\infty$
$2-x$	+	+	–
y	+	+	–

5.)Aszimptóták:

VA: nincs

(mert a függvénynek nincs szakadáspontja, se az értelmezési tartománynak véges határa)

HA: nincs

mert: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2(2-x)} = \sqrt[3]{+\infty\cdot(-\infty)} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2(2-x)} = \sqrt[3]{+\infty\cdot(+\infty)} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$

FA: $y = -x + \dfrac{2}{3}$

mert: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2}{x} - 1} = \sqrt[3]{0-1} = -1$

és: $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\right) = (-\infty + \infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + \sqrt[3]{x^3}\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + \sqrt[3]{x^3}\right)\frac{\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2} - \sqrt[3]{x^3(2x^2 - x^3)} + \sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2} - \sqrt[3]{x^3(2x^2 - x^3)} + \sqrt[3]{x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{4x^4 - 4x^5 + x^6} - \sqrt[3]{2x^5 - x^6} + \sqrt[3]{x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{4}{x} + 1} - \sqrt[3]{\dfrac{2}{x} - 1} + \sqrt[3]{1}\right)} =$$

$$= \frac{2}{1-(-1)+1} = \frac{2}{3} .$$

6.)Szélső értékek:

$y' = 0$

$$y' = \frac{1}{3}\left(2x^2 - x^3\right)^{-2/3}\left(4x - 3x^2\right) = \frac{x(4-3x)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(2x^2-x^3\right)^2}} = \frac{x(4-3x)}{3x\sqrt[3]{x(2-x)^2}} = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} = 0$$

$4 - 3x = 0$ innen

$x = \frac{4}{3}$ a lehetséges helyi szélső érték abszcisszája (stacionáris pont).

Az első deriváltról észre kell vennünk, hogy nem értelmezett az $x = 0$ és $x = 2$ pontokban, habár maga a függvény az egész R halmazon értelmezett.

7.) Menet:

$y' > 0 \quad \vee \quad y' < 0$

x	$-\infty$ 0	0 4/3	4/3 $+\infty$
$-\sqrt[3]{x}$	-	+	+
$4-3x$	+	+	-
y'	-	+	-
y	↓	↑	↓

A táblázatból látható, hogy az $x = \frac{4}{3}$ stacionáris pontban a függvénynek lokális maximuma van, míg az $x = 0$-ban a függvény úgyszintén változtatja a menetét, de ebben a pontban az első derivált nem egyenlő nullával, tehát itt a függvénynek nem lehet helyi szélső értéke.

$$y_{\max}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3} \approx 1.06$$

8.) Inflexiós pontok:

$$y'' = 0$$

$$y' = \frac{1}{3}(4-3x)\left(4x - 4x^2 + x^3\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left[-3\left(4x-4x^2+x^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(4-3x)\left(4x-4x^2+x^3\right)^{-\frac{4}{3}}\left(4-8x+3x^2\right)\right]$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left[\frac{-3}{\sqrt[3]{4x-4x^2+x^3}} - \frac{(4-3x)\left(4-8x+3x^2\right)}{3\left(4x-4x^2+x^3\right)\sqrt[3]{4x-4x^2+x^3}}\right]$$

$$y'' = \frac{1}{3}\cdot\frac{-9\left(4x-4x^2+x^3\right)-(4-3x)\left(4-8x+3x^2\right)}{3\left(4x-4x^2+x^3\right)\sqrt[3]{4x-4x^2+x^3}}$$

$$y'' = \frac{1}{9}\cdot\frac{-36x+36x^2-9x^3-16+32x-12x^2+12x-24x^2+9x^3}{\left(4x-4x^2+x^3\right)\sqrt[3]{4x-4x^2+x^3}}$$

$$y'' = \frac{1}{9}\cdot\frac{8x-16}{\left(4x-4x^2+x^3\right)\sqrt[3]{4x-4x^2+x^3}} = \frac{-8(2-x)}{9x(2-x)^2\sqrt[3]{x(2-x)^2}}$$

$$y'' = \frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4\left(2-x^2\right)}} \neq 0$$

ami azt jelenti, hogy a függvénynek nincs inflexiós pontja. Mivel a második derivált sem

értelmezett az $x=0$-ban és az $x=2$-ben ezért ezekben a pontokban az y'' válthatja az előjelét, illetve a függvény a konvexitását.

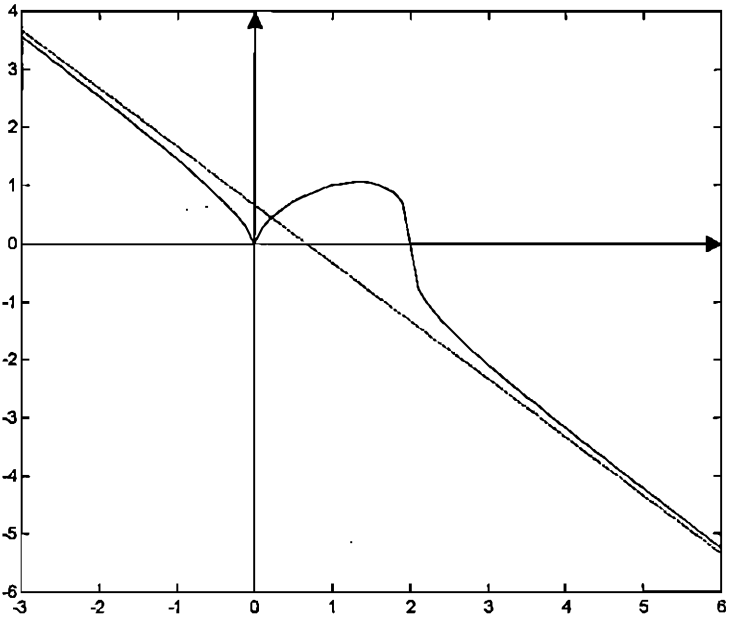
9.)Konvexitás:

$$y''>0 \quad \vee \quad y''<0$$

$$\frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x^2)}}>0 \quad \vee \quad \frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x^2)}}<0$$

x	$-\infty$ 0	0 2	2 $+\infty$
x-2	-	-	+
y''	-	-	+
y	$\cap$	$\cap$	$\cup$

10.)Grafikon:



135. Példa: Vizsgáljuk ki az $y=e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}$ függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.

Megoldás: A függvénykivizsgálást a felsorolt pontok szerint végezzük.

1.)Értelmezési tartomány:

az exponenciális fügvény értelmezett ha a kitevője értelmezett, ez esetben

$x^2-3x-4\neq 0$

$x_1=-1 \vee x_2=4$

$D_f=R\setminus\{-1,4\}$

2.)Párosság:

$f(-x)=e^{\frac{1}{x^2+3x-4}}\neq\pm f(x)$, se nem páros se nem páratlan.

3.)Nullahelyek:

$y=0$

$e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\neq 0$, a függvénynek tehát nincs nullahelye.

4.)Előjel:

$y>0$ *vagy* $y<0$

$e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}>0$, $\forall x\in D_f$,

$y>0$, $\forall x\in D_f$, a függvény pozitív az értelmezési tartomány minden pontjában.

5.)Aszimptóták:

VA: $x=-1$ és $x=4$

$$\lim_{x\to -1-0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{1+2\cdot 0+0^2+3+3\cdot 0-4}}=e^{\frac{1}{+0}}=e^{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1+0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{1-2\cdot 0+0^2+3-3\cdot 0-4}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 4-0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{16-8\cdot 0+0^2-12+3\cdot 0-4}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 4+0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{16+8\cdot 0+0^2+12+3\cdot 0-4}}=e^{\frac{1}{+0}}=e^{+\infty}=+\infty$$

HA: $y=1$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{+\infty}}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{+\infty}}=e^0=1$$

FA: nincs, mert van horizontális aszimptóta.

6.)Szélső értékek:

$y'=0$

$$y'=e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\cdot\frac{-(2x-3)}{(x^2-3x-4)^2}=0$$

$2x-3=0$ innen

$x=\frac{3}{2}$ a lehetséges helyi szélsőérték (stacionáris pont).

7.)Menet:

$$y'>0 \quad \vee \quad y'<0$$

$$e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\cdot\frac{3-2x}{\left(x^2-3x-4\right)^2}>0 \quad \vee \quad e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\cdot\frac{3-2x}{\left(x^2-3x-4\right)^2}<0 \quad .$$

x	$-\infty$ -1	-1 3/2	3/2 4	4 $+\infty$
3-2x	+	+	-	-
y'	+	+	-	-
y	↑	↑	↓	↓

A táblázatból látható, hogy a stacionáris pontban az, $x=\frac{3}{2}$-ben a függvénynek lokális maximuma van:

$$y_{\max}\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{-4}{25}}=\frac{1}{\sqrt[25]{e^4}}\approx 0.85$$

8.)Inflexiós pontok:

$$y''=0$$

$$y''=e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\cdot\left(\frac{3-2x}{\left(x^2-3x-4\right)^2}\right)^2+e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\cdot\frac{-2\left(x^2-3x-4\right)^2+(3-2x)2\left(x^2-3x-4\right)(2x-3)}{\left(x^2-3x-4\right)^4}$$

$$y''=e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\cdot\left(\frac{(3-2x)^2}{\left(x^2-3x-4\right)^4}+\frac{-2\left(x^2-3x-4\right)^2-2(3-2x)^2\left(x^2-3x-4\right)}{\left(x^2-3x-4\right)^4}\right)$$

$$y''=e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\cdot\left(\frac{(3-2x)^2\left(1-2x^2+6x+8\right)-2\left(x^2-3x-4\right)^2}{\left(x^2-3x-4\right)^4}\right)$$

$$y''=e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\cdot\frac{(3-2x)^2\left(-2x^2+6x+9\right)-2\left(x^2-3x-4\right)^2}{\left(x^2-3x-4\right)^4}\neq 0$$

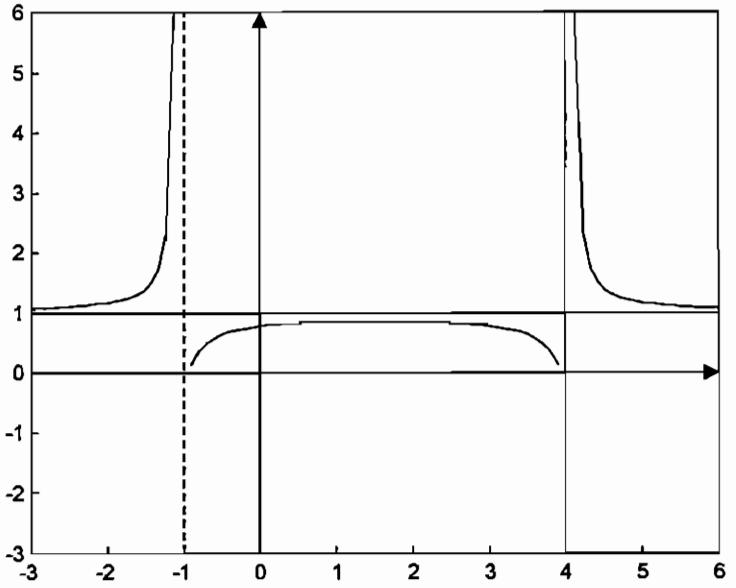
tehát a függvénynek nincs inflexiós pontja.

9.)Konvexitás:

$$y''>0 \quad \vee \quad y''<0$$

x	$-\infty$ -1	-1 4	4 $+\infty$
y''	+	-	+
y	∪	∩	∪

10.)Grafikon:



136. Példa: Vizsgáljuk ki az $y = x^4 \ln\frac{1}{x}$ függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.

Megoldás: A függvénykivizsgálást a felsorolt pontok szerint végezzük.

1.)Értelmezési tartomány:

A logaritmus függvény csak nemnegatív argumentumokra értelmezett, ezért:

$\frac{1}{x} > 0$ innen

$x > 0$ az értelmezési tartomány tehát:

$D_f : x \in (0, +\infty)$

2.)Párosság:

$f(-x) = (-x)^4 \ln\left(\frac{1}{-x}\right) = x^4 \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$ nem értelmezett,

mert ha $x \in (0, +\infty)$ akkor $-\frac{1}{x} < 0$, negatív számnak pedig nem létezik logaritmusa.

A függvény tehát se nem páros, se nem páratlan.

3.)Nullahelyek:

$y = 0$

$$x^4 \ln\frac{1}{x} = 0$$

$$x^4 = 0 \quad \vee \quad \ln\frac{1}{x} = 0 \qquad \text{innen}$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{x} = 1 \qquad \text{illetve}$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 1$$

a függvénynek tehát két nullahelye van, az $N_1(0,0)$ és az $N_2(1,0)$.

4.)Előjel:

$$y > 0 \quad \vee \quad y < 0$$

$$x^4 \ln\frac{1}{x} > 0 \quad \vee \quad x^4 \ln\frac{1}{x} < 0$$

x	0 1	1 $+\infty$
$\ln\frac{1}{x}$	+	-
y	+	-

5.)Aszimptóták:

VA: nincs

$$\lim_{x\to+0} x^4 \ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+0} \frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{4}{x^5}} = \lim_{x\to+0} \frac{x^5}{4x} = \lim_{x\to+0} \frac{x^4}{4} = 0$$

HA: nincs

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 \ln\frac{1}{x} = \infty \cdot \ln 0 = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

FA: nincs

$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x^3 \ln\frac{1}{x} = -\infty$, ilyen esetben az n értékét már nem is kell számolni.

6.)Szélső értékek:

$$y' = 0$$

$$y' = 4x^3 \ln\frac{1}{x} + x^4 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x^3 \ln\frac{1}{x} - x^3 = x^3\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) = 0$$

$$x^3 = 0 \quad \vee \quad 4\ln\frac{1}{x} - 1 = 0 \text{ innen pedig}$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad \ln\frac{1}{x} = \frac{1}{4} \qquad \text{illetve}$$

$x_1 = 0 \notin D_f$, de $\frac{1}{x} = e^{\frac{1}{4}}$ vagyis

$x = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0.78$ a függvény stacionáris pontja.

7.)Menet:

$y' > 0 \quad \vee \quad y' < 0$

x	$0 \quad e^{-1/4}$	$e^{-1/4} \quad +\infty$
y'	+	-
y	↑	↓

A táblázatból leolvasható, hogy az $x = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ stacionáris pontban a függvénynek lokális maximuma van:

$$y_{\max}(e^{-\frac{1}{4}}) = \left(e^{-\frac{1}{4}}\right)^4 \cdot \ln\frac{1}{e^{-\frac{1}{4}}} = e^{-1} \cdot \ln e^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4e} \approx 0.09$$

8.)Inflexiós pontok:

$y'' = 0$

$y'' = 3x^2\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) + x^3 \cdot 4 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$y'' = 12x^2 \ln\frac{1}{x} - 3x^2 - 4x^2$

$y'' = 12x^2 \ln\frac{1}{x} - 7x^2$

$y'' = x^2\left(12\ln\frac{1}{x} - 7\right) = 0$ ha

$x^2 = 0 \quad \vee \quad 12\ln\frac{1}{x} - 7 = 0$ innen

$x = 0 \notin D_f$ és $\ln\frac{1}{x} = \frac{7}{12}$ vagyis

$\frac{1}{x} = e^{\frac{7}{12}}$ ahonnan

$x = \frac{1}{e^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{e^7}} \approx 0.56$ a függvény lehetséges inflexiós pontja.

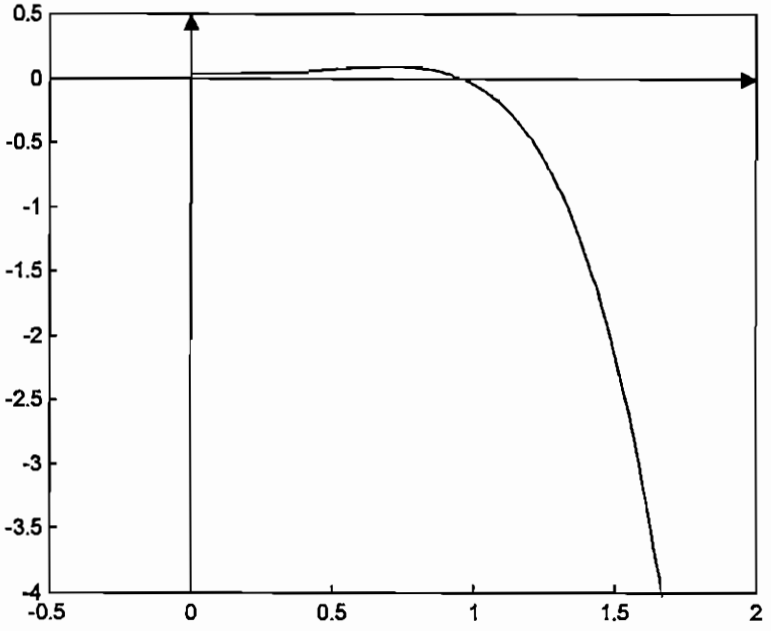
9.)Konvexitás:

$y'' > 0 \quad \vee \quad y'' < 0$

x	$0 \quad e^{-7/12}$	$e^{-7/12} \quad +\infty$
$12\ln \frac{1}{x} - 7$	+	-
y''	+	-
y	$\cup$	$\cap$

A táblázatból látható, hogy a függvénynek az $x = \frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}$ valóban van inflexiós pontja, mert a függvény itt váltja a konvexitását: $y_{inf}\left(\frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}\right)^4 \ln\sqrt[12]{e^7} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^7}} \cdot \frac{7}{12} \approx 0.056$

10.)Grafikon:



137. Példa: Vizsgáljuk ki az $y = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.

Megoldás: A függvénykivizsgálást a felsorolt pontok szerint végezzük.

1.)Értelmezési tartomány:

Az *arctgx* függvény minden véges argumentumra értelmezett, így az értelmezési tartományt illetően csak egy feltételt kell felállítanunk:

$x \neq 0$

$D_f = R \setminus \{0\}$.

2.)Párosság:

$f(-x) = arctg\left(1-\frac{1}{x}\right) \neq \pm f(x)$ se nem páros, se nem páratlan.

3.)Nullahelyek:

$y = 0$

$\text{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ ha

$1+\frac{1}{x} = 0$ innen

$\frac{1}{x} = -1$ illetve

$x = -1$ a függvénynek tehát egy nullahelye van az $N(-1,0)$ pont.

4.)Előjel:

$y > 0 \quad \vee \quad y < 0$

x	$-\infty$ -1	-1 0	0 $+\infty$
y	+	–	+

5.)Aszimptóták:

VA: nincs

$$\lim_{x\to -0} \text{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \text{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to +0} \text{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \text{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

HA: $y = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to -\infty} \text{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to \infty} \text{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$$

FA: nincs

mert van horizontális.

6.)Szélső értékek:

$y' = 0$

$$y' = \frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2+(x+1)^2} \neq 0,$$

ezért a függvénynek nincsenek lokáli szélső értékei.

7.)Menet:

$y' > 0 \quad \vee \quad y' < 0$

x	$-\infty \quad 0$	$0 \quad +\infty$
y'	-	-
y	$\downarrow$	$\downarrow$

A függvény tehát monoton csökkenő, nincsenek szálső értékei.

8.)Inflexiós pontok:

$y'' = 0$

$$y'' = \frac{2x + 2(x+1)}{(x^2 + x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{4x+2}{(2x^2 + 2x + 1)^2} = 0 \quad \text{ha}$$

$4x + 2 = 0$ illetve

$x = -\frac{1}{2}$ a lehetséges inflexiós pont.

9.)Konvexitás:

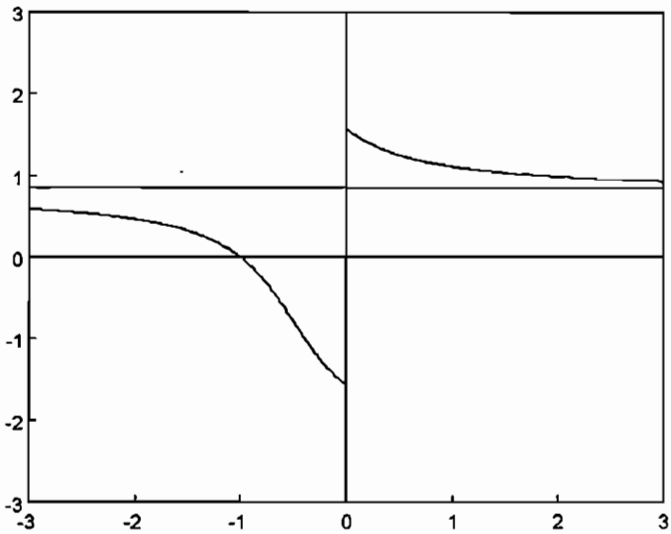
$y'' > 0 \quad \vee \quad y'' < 0$

x	$-\infty \quad -1/2$	$-1/2 \quad 0$	$0 \quad +\infty$
$4x+2$	-	+	+
y''	-	+	+
y	$\cap$	$\cup$	$\cup$

A táblázatból leolvasható, hogy az $x = -\frac{1}{2}$ valóban inflexiós pont, és:

$$y_{\inf}\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}(1-2) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

10.)Grafikon:



FELADATOK:

161. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = x^3 - 3x^2$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

162. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = \left|x - x^2\right| - x$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

163. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = \frac{6x}{x^2+1}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

164. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = x + \frac{1}{x}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

165. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

166. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

167. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = \sqrt[3]{1-x^2}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

168. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

169. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

170. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = x \cdot e^{-x}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

171. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = e^{8x-x^2-14}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

172. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = \left(2+x^2\right)e^{-x^2}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

173. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

174. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y=\frac{x}{\ln x}$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

175. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y=(x+1)\ln^2(x+1)$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

176. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y=\ln(1+e^{-x})$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

177. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y=x\cdot\operatorname{arctg}x$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

178. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y=x+2\operatorname{arctg}x$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

179. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}x$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

180. Feladat: Vizsgáljuk ki az $y=x^x$ **függvényt és ábrázoljuk a grafikonját.**

7. Határozatlan integrálok

Definíció: *Ha $f(x)$ valamely véges vagy végtelen intervallumban folytonos függvény és ennek az intervallumnak minden pontjában $F'(x) = f(x)$, akkor $\int f(x)dx = F(x) + c$, ahol c tetszőleges állandó, az $F(x)$ függvényt pedig az $f(x)$ egy primitív függvényének nevezzük. A primitív függvényt határozatlan integrálnak is nevezzük, az összes primitív függvény keresésének folyamatát pedig integrálásnak nevezzük.*

A határozatlan integrálás a differenciálás fordított művelete, ezért az integrálási szabályokat a deriválási szabályokból nyerhetjük. Ezek közül a legegyszerűbbek a következők:

Integrálási szabályok

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

2. $\int df(x)dx = f(x) + c$

3. $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx \quad , \quad c = const.$

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Annak ellenére, hogy az integrálás a deriválás fordított művelete, mégsem olyan egyszerű "sablonmunka" mint a differenciálás. Az integrálandó függvényt minden esetben olyan alakra kell hozni, amelyre már valamelyik képlet alkalmazható. Éppen ezért az integrálás elsajátításához sok gyakorlásra van szükség. Soha ne felejtsük el, hogy az integrálási feladat eredményét mindig ellenőrizhetjük: az eredmény deriváltja az integrálandó függvény kell legyen.

Az összetettebb függvények integrálásánál arra kell törekedni, hogy azt visszavezessük egyszerűbb függvények határozatlan integráljának kiszámítására. Ezeket az egyszerűbb integrálo-kat az elemi alapfüggvények differenciálási szabályainak megfordításából kapjuk, és alapintegrá-loknak nevezzük. Ezek a következők:

Alapintegrálok táblázata

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4. $\int e^x dx = e^x + c$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad , \quad (a > 0 \, , \, a \neq 1)$

6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

7. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + c$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + c$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + c$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$

13. $\int \mathrm{sh} x \, dx = \mathrm{ch} x \, dx + c$

14. $\int \mathrm{ch} x \, dx = \mathrm{sh} x \, dx + c$

15. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + c$

16. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + c$

Először néhány olyan példát oldunk meg, melyek integrálási folyamatában csak a szabályokat és alapintegrálokat kell alkalmazni:

138. Példa: Számítsuk ki az $\int 5a^2x^6dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int 5a^2x^6dx = 5a^2\int x^6dx = 5a^2\frac{x^7}{7}+c = \frac{5a^2}{7}x^7+c$.

139. Példa: Számítsuk ki az $\int\sqrt{2px}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int\sqrt{2px}dx = \sqrt{2p}\int\sqrt{x}dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c =$

$$= \frac{2\sqrt{2p}}{3}\sqrt[2]{x^3}+c = \frac{2\sqrt{2p}}{3}x\sqrt{x}+c.$$

140. Példa: Számítsuk ki az $\int(6x^2+8x+3)dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int(6x^2+8x+3)dx = 6\int x^2dx+8\int xdx+3\int dx = 6\frac{x^3}{3}+8\frac{x^2}{2}+3x+c =$

$$= 2x^3+4x^2+3x+c.$$

141. Példa: Számítsuk ki az $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{n}}dx = \frac{x^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}+c = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n}{n-1}}+c = \frac{n}{n-1}\sqrt[n-1]{x^n}+c = \frac{nx\cdot\sqrt[n-1]{x}}{n-1}+c$.

142. Példa: Számítsuk ki az $\int 3^xe^xdx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int 3^xe^xdx = \int(3e)^xdx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+c = \frac{(3e)^x}{\ln 3+\ln e}+c = \frac{3^xe^x}{1+\ln 3}+c$.

143. Példa: Számítsuk ki az $\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$.

7.1. Helyettesítéssel való integrálás

Legyen $x = \varphi(t)$, ahol t egy új változó. Tegyük fel, hogy az $x = \varphi(t)$ függvény differenciálhányadosa $\varphi'(t)$ folytonos egy zárt intervallumban, és $\varphi'(t) \neq 0$. Ekkor érvényes, hogy:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Ennek a képletnek segítségével integrálhatunk helyettesítéssel. A φ függvényt mindig úgy kell megválasztani, hogy a formula jobb oldala a lehető legegyszerűbb legyen.

144. Példa: Számítsuk ki az $\int (1+x)^6 dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int (1+x)^6 dx = \left| \begin{matrix} 1+x=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + c = \frac{1}{7}(1+x)^7 + c$.

145.Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \left| \begin{matrix} x-2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2(x-2)^2} + c$.

146. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{x^2+9}$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = \left| \begin{matrix} \frac{x}{3}=t \\ dx=3dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{9}\int \frac{3dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$

$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + c$.

147. Példa: Számítsuk ki az $\int \sin(2x+3)dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \sin(2x+3)dx = \left| \begin{array}{l} 2x+3=t \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}(-\cos t)+c = -\frac{1}{2}\cos(2x+3)+c$.

148. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2}=t \\ dx=2dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} =$

$= \mathrm{tg}\, t + c = \mathrm{tg}\frac{x}{2} + c$.

149. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{xdx}{3-2x^2} = \left| \begin{array}{l} 3-2x^2=t \\ -4xdx=dt \\ xdx=-\frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{4}}{t} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{4}\ln|t|+c = -\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right|+c$.

150. Példa: Számítsuk ki az $\int x^2\sqrt{x^3-9}\,dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int x^2\sqrt{x^3-9}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^3-9=t \\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=\frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{9}\sqrt{t^3}+c =$

$= \frac{2}{9}t\sqrt{t}+c = \frac{2}{9}(x^3-9)\sqrt{x^3-9}+c$.

151. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{c} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c =$

$= \frac{-1}{\sqrt{t}} + c = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} + c.$

152. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx = \left| \begin{array}{c} e^x+x=t \\ (e^x+1)dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|e^x+x| + c.$

153. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{\ln x}{x}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{\ln x}{x}dx = \left| \begin{array}{c} \ln x=t \\ \frac{dx}{x}=dt \end{array} \right| = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}\ln^2 x + c.$

154. Példa: Számítsuk ki az $\int \sin^5 x \cos x\,dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \sin^5 x \cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} \sin x=t \\ \cos x\,dx=dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{6}\sin^6 x + c.$

155. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x+3}$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x+3} = \left| \begin{array}{c} \sin^2 x+3=t \\ 2\sin x\cos x\,dx=dt \\ \sin^2 x\,dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\sin^2 x+3| + c =$

$= \ln(\sin^2 x+3) + c.$

FELADATOK:

Helyettesítéssel oldjuk meg a következő határozatlan integrálokat:

181. Feladat: Oldjuk meg az $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ **határozatlan integrált a** $\sqrt{x-1}=t$ **helyettesítéssel.**

182. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$ **határozatlan integrált az** $5x-2=t$ **helyettesítéssel.**

183. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$ **határozatlan integrált a** $\sqrt{x+1}=t$ **helyettesítéssel.**

184. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ **határozatlan integrált a** $\sin x=t$ **helyettesítéssel.**

185. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **határozatlan integrált.**

186. Feladat: Oldjuk meg az $\int (a+bx)^n dx$ **határozatlan integrált.**

187. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}$ **határozatlan integrált ha** $a>0$.

188. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ **határozatlan integrált.**

189. Feladat: Oldjuk meg az $\int (a+bx^2)^n x\,dx$ **határozatlan integrált.**

190. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ **határozatlan integrált, ha** $a>0$.

191. Feladat: Oldjuk meg az $\int \sin^n x\cos x\,dx$ **határozatlan integrált.**

192. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n}$ **határozatlan integrált ha** $n \neq 1$.

193. Feladat: Oldjuk meg az $\int \mathrm{tg}x\,dx$ **határozatlan integrált.**

194. Feladat: Oldjuk meg az $\int \mathrm{ctg}x\,dx$ **határozatlan integrált.**

195. Feladat: Oldjuk meg az $\int a^{6x}dx$ **határozatlan integrált ha** $a > 0$.

196. Feladat: Oldjuk meg az $\int e^{ax+b}dx$ **határozatlan integrált.**

197. Feladat: Oldjuk meg az $\int x\sin(x^2+1)dx$ **határozatlan integrált.**

198. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{dx}{x(\ln x)^5}$ **határozatlan integrált.**

199. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{\mathrm{tg}x+3\mathrm{tg}^2x+5\mathrm{tg}^3x}{\cos^2 x}dx$ **határozatlan integrált.**

200. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$ **határozatlan integrált az** $x^2 = t$ **helyettesítéssel.**

7.2. Parciális integrálás

Ha $u = f(x)$ és $v = g(x)$ differenciálhányadosai folytonosak egy tetszőleges intervallumban, akkor az $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ képletet a parciális integrálás képletének nevezzük.

E képlet alkalmazásával szorzatok integrálását más szorzatok integrálására vezethetjük vissza. Pontosabban az $\int u\,dv$ integrál az $\int v\,du$ integrálra vezethető vissza, amelyet esetleg könnyebben ki tudunk számítani. A képlet alkalmazása úgy történik, hogy az integrálandó függvényt két tényező szorzataként fogjuk fel, melyek közül az egyiknek az u a másiknak a dv szerepét szánjuk. u-ból differenciálással kiszámítjuk a du-t majd a dv-ből integrálással a v-t, és behelyettesítjük a képletbe.

156. Példa: Parciális integrálással oldjuk meg az $\int xe^x dx$ határozatlan integrált.

Megoldás:

$$\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c.$$

157. Példa: Parciális integrálással oldjuk meg az $\int \ln x\,dx$ határozatlan integrált.

Megoldás:

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c =$$

$$= x(\ln x - 1) + c.$$

158. Példa: Parciális integrálással oldjuk meg az $\int x\,\mathrm{sh}x\,dx$ határozatlan integrált.

Megoldás:

$$\int x\,\mathrm{sh}x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \mathrm{sh}x\,dx \\ du = dx & v = \int \mathrm{sh}x\,dx = \mathrm{ch}x \end{matrix} \right| = x\,\mathrm{ch}x - \int \mathrm{ch}x\,dx = x\,\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x + c.$$

159. Példa: Parciális integrálással oldjuk meg az $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$ határozatlan integrált.

Megoldás:

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2} \\ du = dx & v = \int \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \left| \begin{matrix} 1+x^2 = t \\ x\,dx = \dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{t^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-1}{t} = \dfrac{-1}{2(1+x^2)} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{-x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}\right) + c.$$

160. Példa: Parciális integrálással oldjuk meg az $\int e^x \sin x\,dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int e^x \sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x & dv = e^x dx \\ du = \cos x\,dx & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx =$

$$= \left| \begin{matrix} u = \cos x & dv = e^x dx \\ du = -\sin x\,dx & v = \int e^x\,dx = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx\right)$$

a levezetést kihagyva

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx + c$$

innen pedig

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + c$$

illetve az eredeti integrál megoldása

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c.$$

FELADATOK:

A parciális integrálás módszerével oldjuk meg a következő határozatlan integrálokat:

201. Feladat: Számítsuk ki az $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ határozatlan integrált.

202. Feladat: Számítsuk ki az $\int \arcsin x\,dx$ határozatlan integrált.

203. Feladat: Számítsuk ki az $\int x \cdot 2^{-x}\,dx$ határozatlan integrált.

204. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{x}{e^x}\,dx$ határozatlan integrált.

205. Feladat: Számítsuk ki az $\int x^2 \ln x\,dx$ határozatlan integrált.

206. Feladat: Számítsuk ki az $\int \ln^2 x\,dx$ határozatlan integrált.

207. Feladat: Számítsuk ki az $\int x\cos 3x\,dx$ határozatlan integrált.

208. Feladat: Számítsuk ki az $\int e^x \cos x\,dx$ határozatlan integrált.

209. Feladat: Számítsuk ki az $\int 3^x \sin x\,dx$ határozatlan integrált.

210. Feladat: Számítsuk ki az $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ határozatlan integrált.

7.3. Racionális függvények integrálása

A racionális függvények két polinóm hányadosaként állíthatók elő: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$. Ha $Q(x)=const.$ akkor az $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ valójában egy polinóm, amelynek integrálása nem jelent különösebb gondot, tagonként integrálható. Ha $Q(x)$ alacsonyabb fokú $P(x)$-nél akkor az $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ nem valódi tört függvény (álltört). Ekkor a $P(x)$ polinómot elosztjuk a $Q(x)$ polinómmal és így szétválasztjuk az egész részt és a valódi tört részt: $f(x)=P_1(x)+\frac{P_2(x)}{Q(x)}$. Bármely racionális $f(x)$ függvény integrálása visszavezethető tehát egy polinóm és egy valódi tört függvény integrálására. A valódi tört rész integrálását legtöbbször a parciális összeadandókra való bontás tagonkénti integerálásával oldhatjuk meg.

161. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{x^2+5x}$ határozatlan integrált.

Megoldás: Az integrálandó függvény $f(x)=\frac{1}{x^2+5x}$ valódi tört függvény, tehát:

$$\int \frac{dx}{x^2+5x}=\int \frac{dx}{x(x+5)}=\mathrm{I}.$$

Az utasítás szerint bontsuk parciális összeadandókra ezt a függvényt:

$$\frac{1}{x(x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}$$

$$1=A(x+5)+x$$

$$1=Ax+5A+Bx$$

$$1=(A+B)x+5A$$

két polinóm egyenlő ha a megfelelő együtthatók egyenlőek, ezért

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ 5A\quad&=1 \end{aligned}$$

az egyenletrendszer megoldása:

$$A=\frac{1}{5}$$

$$B=-\frac{1}{5}$$

az $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x}$ tört függvény tehát $f(x)=\dfrac{1}{5x}-\dfrac{1}{5(x+5)}$ módon bontható parciális összeadandókra. Folytathatjuk tehát az integrálást:

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{5x}-\int\frac{dx}{5(x+5)}$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+5}=\begin{vmatrix} x+5=t\\ dx=dt \end{vmatrix}$$

a helyettesítés csak a második integrálra vonatkozik,

$$\mathrm{I}=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t}$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{5}\ln|t|+c=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{t}\right|+c=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|+c$$

$$\int\frac{dx}{x(x+5)}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|+c.$$

162. Példa: Számítsuk ki az $\int\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Az integrálandó függvény $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$ olyan tört függvény amelynél a számláló magasabb fokú polinóm mint a nevező, ezért osztással szét kell választanunk az egész részt és a valódi tört részt:

$$\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{7x-5}{x^2-3x+2}$$

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\int x\,dx+\int 3\,dx+\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx$$

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+\mathrm{I}$$

ahol

$$\mathrm{I}=\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx$$

már valódi tört függvény integrálja, melyet parciális összeadandókra kell bontanunk:

$$\frac{7x-5}{x^2-3x+2}=\frac{7x-5}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$$
$$7x-5=A(x-1)+B(x-2)$$
$$7x-5=Ax-A+Bx-2B$$
$$7x-5=(A+B)x-A-2B$$

innen a megfelelő együtthatók kiegyenlítésével:

$$\begin{array}{l} A+\ B=7 \\ \underline{-A-2B=-5} \\ -B=2 \ \Rightarrow \ B=-2 \\ \qquad\qquad A=9 \end{array}$$

tehát

$$\mathrm{I}=\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{9dx}{x-2}-\int\frac{2dx}{x-1}=9\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x-1}$$

$\left|\begin{array}{l} x-2=t \\ dx=dt \end{array}\right|$ legyen a helyettesítés az első integrálban,

$\left|\begin{array}{l} x-1=z \\ dx=dz \end{array}\right|$ legyen a helyettesítés a második integrálban,

ekkor

$$\mathrm{I}=9\int\frac{dt}{t}-2\int\frac{dz}{z}=9\ln|t|-2\ln|z|+c$$

illetve

$$\mathrm{I}=9\ln|x-2|-2\ln|x-1|+c$$

a feladat megoldása pedig

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+9\ln|x-2|-2\ln|x-1|+c.$$

163. Példa: Számítsuk ki az $\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=\int\frac{1-3x}{2(x^2-2x+1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1-3x}{(x-1)^2}dx$

Az integrálandó függvény valódi tört függvény, ezért csak a parciális összeadandókra való bontást kell elvégeznünk:

$$\frac{1-3x}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$$
$$1-3x=A(x-1)+B$$

$$1-3x = Ax - A + B$$

innen a megfelelő együtthatók kiegyenlítésével kiszámíthatjuk A és B értékét,

$$\begin{aligned} A \quad &= -3 \\ -A+B &= 1 \\ \hline B &= -2 \\ A &= -3 \end{aligned}$$

Parciális összeadandókra bontás után tehát a következő integrált kell megoldanunk:

$$\int \frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{-3}{x-1}dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2}dx\right)$$

$$\int \frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx = \frac{-3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \left| \begin{matrix} x-1=t \\ dx=dt \end{matrix} \right|$$

$$\int \frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{3}{2}\ln|t| - \frac{t^{-1}}{-1} + c = -\frac{3}{2}\ln|t| + \frac{1}{t} + c$$

$$\int \frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2}\ln|x-1| + c.$$

164. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Az integrálandó függvény nevezője nem bontható fel elsőfokú tényezők szorzatára, mert az $x^2-2x+5=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D=-16<0$, így az egyenletnek nincsenek valós megoldásai. Ilyenkor írjuk fel a nevezőt kanonikus alakban, majd megfelelő helyettesítés bevezetésével oldjuk meg az integrált.

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{x+3}{(x^2-2x+1)-1+5}dx = \int \frac{x+3}{(x-1)^2+4}dx = \left| \begin{matrix} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t+4}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t+8}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+4} + 4\int \frac{dt}{t^2+4} = \left| \begin{matrix} t^2+4=z \\ 2tdt=dz \end{matrix} \right| =$$

a helyettesítést az első integrálban fogjuk alkalmazni, a másodikat kiemeléssel alapintegrálra vezetjük vissza,

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} + \frac{4}{4}\int \frac{dt}{\frac{t^2}{4}+1} = \frac{1}{2}\ln|z| + \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = \left| \begin{matrix} \frac{t}{2}=s \\ dt=2ds \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\ln|t^2+4| + \int \frac{2ds}{s^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+4| + 2\operatorname{arctg} s + c = \frac{1}{2}\ln|t^2+4| + 2\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|(x-1)^2+4| + 2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c$$

a megoldás tehát

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right| + 2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c.$$

165. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{1}{2x^2-3x+11}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Az integrálandó függvény nevezőjének nincsenek valós gyökei, mert a $2x^2-3x+11=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D=-79<0$. Az adott függvény ezért nem bontható parciális összeadandókra, hanem hasonlóan kell eljárnunk mint az előző feladatban.

$$\int \frac{1}{2x^2-3x+11}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{11}{2}} = \left|\begin{matrix} x-\frac{3}{4}=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{79}{16}} = \frac{1}{2\cdot\frac{79}{16}}\int \frac{dt}{\frac{16t^2}{79}+1} = \frac{8}{79}\int \frac{dt}{\left(\frac{4t}{\sqrt{79}}\right)^2+1} = \left|\begin{matrix} \frac{4t}{\sqrt{79}}=z \\ dt=\frac{\sqrt{79}}{4}dz \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{8}{79}\cdot\frac{\sqrt{79}}{4}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}z + c = \frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{4t}{\sqrt{79}} + c =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{4\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{79}} + c = \frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{79}} + c$$

a megoldás tehát

$$\int \frac{1}{2x^2-3x+11}dx = \frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\sqrt{79}}x-\frac{3}{\sqrt{79}}\right) + c.$$

166. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Az integrálandó tört függvény valódi tört, mert a számlálója egy negyedfokú polinóm a nevezője pedig egy ötödfokú polinóm. A nevezőben található x^2+2x+2 másodfokú trinóm nem bontható lineáris tényezők szorzatára, az integrálandó függvényt tehát ilyen alakban kell parciális összeadandókra bontanunk.

$$\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=A(x^2+2x+2)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+2x+2)+$$
$$+(Dx+E)(x+1)$$

$$4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=A(x^4+4x^2+4+4x^3+4x^2+8x)+$$
$$+(Bx+C)(x^3+2x^2+2x+x^2+2x+2)+(Dx+E)(x+1)$$

$$4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=A(x^4+4x^3+8x^2+8x+4)+(Bx+C)(x^3+3x^2+4x+2)+$$
$$+(Dx+E)(x+1)$$

$$4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=A(x^4+4x^3+8x^2+8x+4)+B(x^4+3x^3+4x^2+2x)+$$
$$+C(x^3+3x^2+4x+2)+D(x^2+x)+E(x+1)$$

$$4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=(A+B)x^4+(4A+3B+C)x^3+(8A+4B+3C+D)x^2+$$
$$+(8A+2B+4C+D+E)x+(4A+2C+E)$$

a megfelelő hatványok együtthatóinak kiegyenlítésével kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
&A+B &&=4 \quad \Rightarrow B=4-A\\
&4A+3B+C &&=15\\
&8A+4B+3C+D &&=30\\
&8A+2B+4C+D+E &&=25\\
&4A+2C \qquad +E &&=9 \quad \Rightarrow E=9-4A-2C
\end{aligned}$$

B-t és E-t a másik három egyenletbe helyettesítve három ismeretlenes egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned}
&4A+12-3A+C=15\\
&8A+16-4A+3C+D=30\\
&8A+8-2A+4C+D+9-4A-2C=25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A+C=3 \qquad \Rightarrow C=3-A\\
&4A+3C+D=14\\
&2A+2C+D=8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&4A+9-3A+D=14\\
&2A+6-2A+D=8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A+D=5\\
&D=2
\end{aligned}$$

innen pedig $D=2$, $A=3$, $C=0$, $B=1$, $E=-3$. Az integrálandó függvény parciális összeadandókra bontott alakja tehát:

$$\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}=\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x^2+2x+2}+\frac{2x-3}{(x^2+2x+2)^2}$$

a keresett integrál pedig

$$\mathbf{I}=\int\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}dx=\int\frac{3}{x+1}dx+\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{2x-3}{(x^2+2x+2)^2}dx$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}dx=\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3$$

ahol $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$-mal jelöltük sorban a jobb oldali integrálokat. Oldjuk meg most ezeket.

$$\mathbf{I}_1=\int\frac{3}{x+1}dx=3\ln|x+1|+c_1$$

$$\mathbf{I}_2=\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$$

vezessük be az első integrálban az $\left|\begin{matrix}x^2+2x+2=t\\(2x+2)dx=dt\end{matrix}\right|$ helyettesítést, ekkor

$$\mathbf{I}_2=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\left|\begin{matrix}x+1=z\\dx=dz\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\ln|t|-\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2}\ln|t|-\operatorname{arctg}z+c_2$$

$$\mathbf{I}_2=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|-\operatorname{arctg}(x+1)+c_2$$

$$\mathbf{I}_3=\int\frac{2x-3}{(x^2+2x+2)^2}dx=\int\frac{2x+2-5}{(x^2+2x+2)^2}dx=\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx-5\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

az első integrálban alkalmazzuk ugyanazt a helyettesítést mint az $\mathbf{I}_2$ integrál esetében, ekkor

$$\mathbf{I}_3=\int\frac{dt}{t^2}-5\int\frac{dx}{((x+1)^2+1)^2}=\left|\begin{matrix}x+1=z\\dx=dz\end{matrix}\right|=\frac{t^{-1}}{-1}-5\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{t}-5\int\frac{1+z^2-z^2}{(z^2+1)^2}dz$$

$$I_3=-\frac{1}{x^2+2x+2}-5\int\frac{dz}{z^2+1}+5\int\frac{z^2}{(z^2+1)^2}dz=\frac{-1}{x^2+2x+2}-5\operatorname{arctg}z+5\int\frac{z\cdot zdz}{(z^2+1)^2}$$

az utolsó integrált parciális integrálással oldhatjuk meg analóg módon mint a 159. példában

$$I_3=\frac{-1}{x^2+2x+2}-5\operatorname{arctg}(x+1)+5\cdot\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}z-\frac{z}{1+z^2}\right)+c_3$$

$$I_3=\frac{-1}{x^2+2x+2}-5\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5(x+1)}{2(x^2+2x+2)}+c_3$$

$$I_3=-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x+7}{2(x^2+2x+2)}+c_3$$

Ezeket az eredményeket az eredeti integrálba helyettesítve kapjuk, hogy:

$$I=3\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|-\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x+7}{2(x^2+2x+2)}+c_1+c_2+c_3$$

összevonva pedig:

$$I=3\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|-\frac{7}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x+7}{2(x^2+2x+2)}+c.$$

FELADATOK:

211. Feladat: Számítsuk ki az $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ **határozatlan integrált.**

212. Feladat: Számítsuk ki az $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ **határozatlan integrált.**

213. Feladat: Számítsuk ki az $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$ **határozatlan integrált.**

214. Feladat: Számítsuk ki az $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$ **határozatlan integrált.**

215. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ határozatlan integrált.

216. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$ határozatlan integrált.

217. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{x^3+1}$ határozatlan integrált.

218. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$ határozatlan integrált.

219. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$ határozatlan integrált.

220. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$ határozatlan integrált.

7.4. Irracionális függvények integrálása

Az irracionális függvények integrálját megfelelő helyettesítésekkel racionális integrálokra vezethetjük vissza. Különböző típusú irracionális integrálokban más-más helyettesítést kell alkalmaznunk ahhoz, hogy az integrálandó függvényt átvezessük racionálisba. Az irracionális függvények integrálását típusonként fogjuk feldolgozni azzal, hogy minden egyes esetben megadjuk a megfelelő helyettesítést, majd egy-két példán keresztül illusztráljuk.

Az $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots\right]dx$ *típusú irracionális integrálokat, ahol R racionális függvény,* $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ *pedig egész számok, az* $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ *helyettesítéssel oldhatjuk meg, ahol n a* $q_1, q_2, \ldots$ *számok legkisebb közös többszöröse.*

167. Példa: Számítsuk ki az $\int x\cdot\sqrt[3]{4+3x}\,dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Az intgerálandó függvény olyan típusú irracionális függvény, amely besorolható a fenti típusba, így:

$$\mathrm{I}=\int x\cdot\sqrt[3]{4+3x}\,dx=\left|\begin{array}{c}4+3x=t^3\ \Rightarrow\ x=\dfrac{t^3-4}{3}\\ 3dx=3t^2dt\\ dx=t^2dt\end{array}\right|=\int\frac{t^3-4}{3}\cdot\sqrt[3]{t^3}\cdot t^2dt=\frac{1}{3}\int t^3\left(t^3-4\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int t^6dt-\frac{4}{3}\int t^3dt=\frac{1}{3}\frac{t^7}{7}-\frac{4}{3}\frac{t^4}{4}+c=\frac{t^7}{21}-\frac{t^4}{3}+c=\frac{t^4}{3}\left(\frac{t^3}{7}-1\right)+c=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(4+3x)^4}}{3}\left(\frac{4+3x}{7}-1\right)+c=\frac{(4+3x)\sqrt[3]{4+3x}}{3}\left(\frac{3x-3}{7}\right)+c$$

a megoldás tehát:

$$\mathrm{I}=\int x\cdot\sqrt[3]{4+3x}\,dx=\frac{(x-1)(4+3x)\sqrt[3]{4+3x}}{7}+c.$$

168. Példa: Számítsuk ki az $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int\frac{dx}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{4}}}$,

ebből pedig jól látható, hogy az adott integrál besorolható a fenti típusú irracionális integrál alakba. Alkalmazzuk a megadott helyettesítést, és ekkor:

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int\frac{dx}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{4}}}=\left|\begin{array}{c}2x-1=t^4\\ 2dx=4t^3dt\\ dx=2t^3dt\end{array}\right|=\int\frac{2t^3dt}{t^2-t}=2\int\frac{t^2dt}{t-1}$$

az irracionális integrált racionális integrálra vezettük vissza. A racionális intgerált az előző fejezetben feldolgozottak alapján oldjuk meg. Bontsuk az integrálandó függvényt egész részre és valódi tört részre:

$$\frac{t^2}{t-1}=\frac{t^2-1+1}{t-1}=t+1+\frac{1}{t-1}$$

ekkor:

$$\mathrm{I}=2\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=2\int t\,dt+2\int dt+2\int\frac{dt}{t-1}=\left|\begin{array}{c}t-1=z\\ dt=dz\end{array}\right|$$

a helyettesítést az utolsó integrálban alkalmazzuk. A helyettesítés és integrálás után:

$$\mathbf{I} = 2\frac{t^2}{2} + 2t + 2\int\frac{dz}{z} = t^2 + 2t + 2\ln|z| + c = t^2 + 2t + 2\ln|t-1| + c$$

térjünk most vissza az x változóra:

$$\mathbf{I} = \int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \sqrt[4]{(2x-1)^2} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}-1\right| + c$$

$$\mathbf{I} = \int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + \ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2 + c.$$

169. Példa: Számítsuk ki az $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Alkalmazzuk a megadott helyettesítést:

$$\mathbf{I} = \int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \left|\begin{array}{l} \frac{x-1}{x+1} = t^2 \\ x = \frac{t^2+1}{1-t^2} \\ dx = \frac{4tdt}{(1-t^2)^2} \end{array}\right| = \int\frac{t^2+1}{1-t^2}\cdot\sqrt{t^2}\cdot\frac{4tdt}{(1-t^2)^2}$$

$$\mathbf{I} = 4\int\frac{t^4+t^2}{(1-t^2)^3}dt = 4\int\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}dt$$

Az így kapott racionális integrál valódi tört függvény integrálja, bontsuk tehát parciális összeadandókra:

$$\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3} = \frac{A}{(1-t)} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1-t)^3} + \frac{D}{(1+t)} + \frac{E}{(1+t)^2} + \frac{F}{(1+t)^3}$$

$$t^4+t^2 = A(1-t)^2(1+t)^3 + B(1-t)(1+t)^3 + C(1+t)^3 + D(1+t)^2(1-t)^3 + E(1+t)(1-t)^3 + F(1-t)^3$$

az egyenlőség minden $t \in R$ esetén fennál, így:

ha $t = 1$ akkor

$2 = 8C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4}$

ha $t = -1$ akkor

$2 = 8F \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{4}$

ha $t = 0$ akkor

$0 = A + B + \frac{1}{4} + D + E + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad A + B + D + E = -\frac{1}{2}$

ha $t = 2$ akkor

$$16+4=27A-27B+\frac{27}{4}-9D-3E-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 27A-27B-9D-3E=\frac{27}{2}$$

ha $t=-2$ akkor

$$16+4=-9A-3B-\frac{1}{4}+27D-27E+\frac{27}{4} \quad \Rightarrow \quad -9A-3B+27D-27E=\frac{27}{2}$$

ha $t=3$ akkor

$$81+9=256A-128B+16-128D-32E-2 \quad \Rightarrow \quad 256A-128B-128D-32E=76$$

a kapott egyenletekből összeállítjuk az

$$\begin{aligned}
&A+B+D+E=-\frac{1}{2}\\
&27A-27B-9D-3E=\frac{27}{2}\\
&-9A-3B+27D-27E=\frac{27}{2}\\
&\underline{256A-128B-128D-32E=76}
\end{aligned}$$

egyenletrendszert, amely megoldása: $A=D=\frac{1}{8}$, $B=E=-\frac{3}{8}$, $C=F=\frac{1}{4}$. A parciális összeadandókra bontás tehát a következőképpen alakul:

$$\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}=\frac{1}{8(1-t)}-\frac{3}{8(1-t)^2}+\frac{1}{4(1-t)^3}+\frac{1}{8(1+t)}-\frac{3}{8(1+t)^2}+\frac{1}{4(1+t)^3}$$

ennek integrálja pedig:

$$\mathbf{I}=\int\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}dt=\int\frac{dt}{8(1-t)}-\int\frac{3dt}{8(1-t)^2}+\int\frac{dt}{4(1-t)^3}+\int\frac{dt}{8(1+t)}-\int\frac{3dt}{8(1+t)^2}+\int\frac{dt}{4(1+t)^3}$$

$$\mathbf{I}=\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3+\mathbf{I}_4-\mathbf{I}_5+\mathbf{I}_6$$

ahol

$$\mathbf{I}_1=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{1-t}=-\frac{1}{8}\ln|1-t|+c_1$$

$$\mathbf{I}_2=\frac{3}{8}\int\frac{dt}{(1-t)^2}=\left|\begin{matrix}1-t=z\\ dt=-dz\end{matrix}\right|=-\frac{3}{8}\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{3}{8}\cdot\frac{z^{-1}}{-1}+c_2=\frac{3}{8z}+c_2=\frac{3}{8(1-t)}+c_2$$

$$\mathbf{I}_3=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t)^3}=\left|\begin{matrix}1-t=z\\ dt=-dz\end{matrix}\right|=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{z^{-2}}{-2}+c_3=\frac{1}{8z^2}+c_3=\frac{1}{8(1-t)^2}+c_3$$

$$\mathbf{I}_4=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{1+t}=\frac{1}{8}\ln|1+t|+c_4$$

$$\mathbf{I}_5=\frac{3}{8}\int\frac{dt}{(1+t)^2}=\left|\begin{matrix}1+t=z\\ dt=dz\end{matrix}\right|=\frac{3}{8}\int\frac{dz}{z^2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{z^{-1}}{-1}+c_5=-\frac{3}{8z}+c_5=-\frac{3}{8(1+t)}+c_5$$

$$\mathbf{I}_6=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t)^3}=\left|\begin{matrix}1+t=z\\ dt=dz\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{z^{-2}}{-2}+c_6=-\frac{1}{8z^2}+c_6=-\frac{1}{8(1+t)^2}+c_6$$

összegezve a részintegrálokat:

$$\mathbf{I}=-\frac{1}{8}\ln|1-t|+c_1-\frac{3}{8(1-t)}-c_2+\frac{1}{8(1-t)^2}+c_3+\frac{1}{8}\ln|1+t|+c_4+\frac{3}{8(1+t)}-c_5-\frac{1}{8(1+t)^2}+c_6$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1-t}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)+c$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{3}{8}\cdot\frac{1-t-1-t}{1-t^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{(1+t)^2-(1-t)^2}{(1-t^2)^2}+c$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{3}{8}\cdot\frac{-2t}{1-t^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1+2t+t^2-1+2t-t^2}{(1-t^2)^2}+c$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{3}{4}\cdot\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{(1-t^2)^2}+c$$

térjünk vissza az x változóra:

$$\mathbf{I}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right|-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\frac{x-1}{x+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)^2}+c$$

majd rendezzük el a kifejezést. Ekkor az eredeti integrál megoldását kapjuk:

$$I=\frac{1}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{3\sqrt{x^2-1}}{8}+\frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{8}+c$$

$$I=\frac{1}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{\sqrt{x^2-1}}{8}(x+1-3)+c$$

$$I=\frac{1}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{(x-2)\sqrt{x^2-1}}{8}+c.$$

FELADATOK:

221. Feladat: Oldjuk meg az $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$ **határozatlan integrált.**

222. Feladat: Oldjuk meg az $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ **határozatlan integrált.**

223. Feladat: Oldjuk meg az $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ **határozatlan integrált.**

224. Feladat: Oldjuk meg az $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$ **határozatlan integrált.**

225. Feladat: Oldjuk meg az $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$ **határozatlan integrált.**

Az $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ *típusú irracionális integrálokat, ahol* m,n,p *racionális (tört) számok, binom intgeráloknak nevezzük, és a következő három esetben a megadott helyettesítésekkel oldhatjuk meg:*

1. *ha* $p\in Z$ *akkor az előző típusra vezetődik vissza*
2. *ha* $\frac{m+1}{n}\in Z$ *akkor alkalmazzuk az* $a+bx^n=t^s$ *helyettesítést, ahol* s *a* p *tört nevezője*
3. *ha* $\frac{m+1}{n}+p\in Z$ *akkor alkalmazzuk az* $ax^{-n}+b=t^s$ *helyettesítést, ahol* s *a* p *tört nevezője.*

170. Példa: Oldjuk meg az $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$, tehát $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$.

Ellenőrizzük most le, hogy a három eset közül melyiket elégítik ke ezek a számok:

1. $p=\frac{1}{3}\notin Z$, az első eset nem alkalmazható
2. $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2\in Z$, alkalmazhatjuk tehát a második esetet:

$$\mathrm{I}=\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{c} 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3 \\ x=\left(t^3-1\right)^4 \\ dx=12\left(t^3-1\right)^3t^2dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt[3]{t^3}}{\left(t^3-1\right)^2}12\left(t^3-1\right)^3t^2dt = 12\int t^3\left(t^3-1\right)dt$$

$$\mathrm{I}=12\int t^6dt-12\int t^3dt = 12\frac{t^7}{7}-12\frac{t^4}{4}+c = t^4\left(\frac{12}{7}t^3-3\right)+c$$

térjünk vissza az eredeti x változóra:

$$\mathrm{I}=\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4\left(\frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)-3\right)+c=\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,\frac{12+12\sqrt[4]{x}-21}{7}+c$$

$$\mathrm{I}=\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,\frac{12\sqrt[4]{x}-9}{7}+c=\frac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+c.$$

171. Példa: Oldjuk meg az $\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}$ határozatlan integrált.

Megoldás: $\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}} = \int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-\frac{5}{3}}dx$, tehát $m=-2$, $n=3$, $p=-\frac{5}{3}$.

Ellenőrizzük most le, hogy a három eset közül melyiket elégítik ke ezek a számok:

1. $p=-\frac{5}{3}\notin Z$, az első eset nem alkalmazható,

2. $\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3}\notin Z$, a második eset sem alkalmazható,

3. $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{6}{3}=-2\in Z$, alkalmazhatjuk tehát a harmadik esetet:

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}=\left|\begin{array}{c}2x^{-3}+1=t^3\\ x=\sqrt[3]{\frac{2}{t^3-1}}\\ dx=-\frac{t^2}{\left(t^3-1\right)}\sqrt[3]{\frac{2}{t^3-1}}dt\end{array}\right|=\int\frac{-\frac{t^2}{\left(t^3-1\right)}\sqrt[3]{\frac{2}{t^3-1}}dt}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{t^3-1}\right)^2}\left(2+\frac{2}{t^3-1}\right)^{\frac{5}{3}}}$$

$$\mathrm{I}=-\int\frac{\frac{t^2}{t^3-1}dt}{\sqrt[3]{\frac{2}{t^3-1}}\left(\frac{2t^3}{t^3-1}\right)^{\frac{5}{3}}}=-\int\frac{\frac{t^2}{t^3-1}dt}{\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^5}\,t^5}{\sqrt[3]{t^3-1}\sqrt[3]{\left(t^3-1\right)^5}}}=-\int\frac{\frac{t^2}{t^3-1}dt}{\frac{4t^5}{\left(t^3-1\right)^2}}=-\frac{1}{4}\int\frac{t^3-1}{t^3}dt$$

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{t^3}\right)dt=-\frac{1}{4}\int dt+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+c=-\frac{t}{4}-\frac{1}{8t^2}+c.$$

térjünk vissza az eredeti x változóra, ekkor:

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{2}{x^3}+1}-\frac{1}{8\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x^3}+1\right)^2}}+c=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt[3]{2+x^3}}{x}-\frac{x^2}{8\cdot\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+c$$

$$\mathrm{I}=-\frac{2\left(2+x^3\right)+x^3}{8x\cdot\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+c=-\frac{4+3x^3}{8x\cdot\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+c.$$

FELADATOK:

226. Feladat: Oldjuk meg az $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$ határozatlan intgerált.

227. Feladat: Oldjuk meg az $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ határozatlan intgerált.

228. Feladat: Oldjuk meg az $\int\frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}$ határozatlan intgerált.

229. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^5}}$ határozatlan intgerált.

230. Feladat: Oldjuk meg az $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$ határozatlan intgerált.

Az $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ típusú határozatlan intgerálokat, ahol $P_n(x)$ n-ed fokú polinóm, az $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ képlettel oldhatjuk meg. A $Q_{n-1}(x)$ polinóm együtthatóit és a λ számot oly módon tudjuk meghatározni, hogy differenciáljuk az adott egyenletet, majd kiegyenlítjük a megfelelő hatványok együtthatóit.

172. Példa: Számítsuk ki az $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$ integrált.

Megoldás: Hozzuk előbb az integrálandó függvényt olyan alakra, mint amilyennek a típus integrálban feltüntettük:

$$\mathbf{I} = \int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2+4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int\frac{x^2(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

$$\mathbf{I} = \int\frac{P_4(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx = Q_3(x)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\mathbf{I} = \int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

differenciáljuk most az egyenletet az x változó szerint, ekkor:

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3ax^2+2bx+c)\sqrt{x^2+4}+(ax^3+bx^2+cx+d)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$

szorozzuk be az egyenletet $\sqrt{x^2+4}$ -gyel:

$$x^4+4x^2 = (3ax^2+2bx+c)(x^2+4)+x(ax^3+bx^2+cx+d)+\lambda$$

$$x^4+4x^2 = 3ax^4+12ax^2+2bx^3+8bx+cx^2+4c+ax^4+bx^3+cx^2+dx+\lambda$$

$$x^4+4x^2=4ax^4+3bx^3+(12a+2c)x^2+(8b+d)x+4c+\lambda$$

a megfelelő együtthatók kiegyenlítésével a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
4a&=1 &&\Rightarrow\quad a=\frac{1}{4}\\
3b&=0 &&\Rightarrow\quad b=0\\
12a+2c&=4 &&\Rightarrow\quad c=\frac{1}{2}\\
8b+d&=0 &&\Rightarrow\quad d=0\\
4c+\lambda&=0 &&\Rightarrow\quad \lambda=-2
\end{aligned}$$

visszatérve az integrálra:

$$\mathrm{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)\sqrt{x^2+4}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)\sqrt{x^2+4}-\frac{2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}=\left|\begin{matrix}\frac{x}{2}=t\\ dx=2dt\end{matrix}\right|$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x(x^2+2)}{4}\sqrt{x^2+4}-\int\frac{2dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x(x^2+2)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x(x^2+2)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}\right|+c$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x(x^2+2)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right|+c$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x(x^2+2)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+2\ln 2+c$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+c_1$$

FELADATOK:

231. Feladat: Oldjuk meg a $\int \frac{x^2 dcx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ **határozatlan integrált.**

232. Feladat: Oldjuk meg a $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ **határozatlan integrált.**

233. Feladat: Oldjuk meg a $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1 + x^2}}$ **határozatlan integrált.**

234. Feladat: Oldjuk meg a $\int x\sqrt{x^2 + 9}\, dx$ **határozatlan integrált.**

235. Feladat: Oldjuk meg a $\int x^2 \sqrt{x^2 - 1}\, dx$ **határozatlan integrált.**

Az $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ *típusú határozatlan integrálokat az* $\frac{1}{x-\alpha} = t$ *helyettesítéssel az előző típusú határozatlan integrálokra vezethetjük vissza.*

173. Példa: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$ **határozatlan integrált.**

Megoldás: A típusintegrálban megadott helyettesítést alkalmazva:

$$\mathbf{I} = \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}} = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{x} = t \\ x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^5} \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} = -\int \frac{dt}{\frac{1}{t^3} \sqrt{\frac{1 - t^2}{t^2}}} = -\int \frac{t^4}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

az előző feladathoz hasonlóan:

$$\int \frac{t^4}{\sqrt{1 - t^2}} dt = (at^3 + bt^2 + ct + d)\sqrt{1 - t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

differenciáljuk le az egyenletet:

$$\frac{t^4}{\sqrt{1 - t^2}} = (3at^2 + 2bt + c)\sqrt{1 - t^2} + (at^3 + bt^2 + ct + d)\frac{-2t}{2\sqrt{1 - t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - t^2}}$$

szorozzunk $\sqrt{1-t^2}$ -nel:

$$t^4 = (3at^2 + 2bt + c)(1-t^2) - t(at^3 + bt^2 + ct + d) + \lambda$$

$$t^4 = 3at^2 + 2bt + c - 3at^4 - 2bt^3 - ct^2 - at^4 - bt^3 - ct^2 - dt + \lambda$$

$$t^4 = -4at^4 - 3bt^3 + (3a - 2c)t^2 + (2b - d)t + c + \lambda$$

ha kiegyenlítjük a megfelelő együtthatókat, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
-4a &= 1 && \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4} \\
-3b &= 0 && \Rightarrow \quad b = 0 \\
3a - 2c &= 0 && \Rightarrow \quad c = -\frac{3}{8} \\
2b - d &= 0 && \Rightarrow \quad d = 0 \\
c + \lambda &= 0 && \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

visszatérve az integrálra:

$$\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \left(-\frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{t}{4}(2t^2 + 3)\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}\arcsin t + c$$

ekkor az eredeti integrál:

$$\mathrm{I} = -\int \frac{t^4\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2t^3 + 3t}{8}\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}\arcsin t + c$$

térjünk vissza az eredeti változóra:

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + c$$

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \frac{2 + 3x^2}{8x^3}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}=\frac{2+3x^2}{8x^4}\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}+c.$$

FELADATOK:

236. Feladat: Számítsuk ki az $\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$ **határozatlan integrált.**

237. Feladat: Számítsuk ki az $\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$ **határozatlan integrált.**

238. Feladat: Számítsuk ki az $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ **határozatlan integrált.**

239. Feladat: Számítsuk ki az $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ **határozatlan integrált.**

240. Feladat: Számítsuk ki az $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$ **határozatlan integrált.**

Az $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ *típusú irracionális integrálokat megoldhatjuk trigonometrikus vagy hiperbolikus helyettesítésekkel is, ha az* ax^2+bx+c *másodfokú trinomot felírjuk vagy négyzetek összegeként vagy négyzetek különbségeként. Ekkor az adott integrál a következő alakok egyikére vezetődik vissza, melyeket a megadott helyettesítésekkel oldhatunk meg:*

1) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ *helyettesítés:* $x=a\sin t$ *vagy:* $x=a\,\mathrm{th}\,t$

2) $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ *helyettesítés:* $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ *vagy:* $x=a\,\mathrm{sh}\,t$

3) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ *helyettesítés:* $x=a\sec t$ *vagy:* $x=a\,\mathrm{ch}\,t$

174. Példa: Oldjuk meg a következő határozatlan integrált $\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Megoldás: Mivel $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$, így a második alakot kaptuk, tehát:

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}=\left|\begin{matrix}x+1=\operatorname{tg}t\\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\operatorname{tg}^2 t\cos^2 t\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}=$$

$$=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\left|\begin{matrix}\sin t=z\\ \cos t dt=dz\end{matrix}\right|=\int\frac{dz}{z^2}=\frac{z^{-1}}{-1}+c=\frac{-1}{z}+c=\frac{-1}{\sin t}+c=\frac{-1}{\sin(\operatorname{arctg}(x+1))}+c=$$

$$=\frac{-1}{\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+1))}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x+1))+1}}}+c=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+c\ .$$

175. Példa: Oldjuk meg a következő határozatlan integrált $\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$.

Megoldás: Az adott integrál az első típusba sorolható, ezért:

$$I=\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{matrix}x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\cos t\,dt}{(\sin^2 t-1)\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\frac{\cos t\,dt}{-\cos^2 t\cos t}=$$

$$-\int\frac{dt}{\cos^2 t}=-\operatorname{tg}t+c=-\operatorname{tg}(\arcsin x)+c=-\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}+c=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}+c=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

FELADATOK:

241. Feladat: Számítsuk ki a $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$ határozatlan integrált.

242. Feladat: Számítsuk ki a $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$ határozatlan integrált.

243. Feladat: Számítsuk ki a $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ határozatlan integrált.

244. Feladat: Számítsuk ki a $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$ határozatlan integrált.

245. Feladat: Számítsuk ki a $\int\sqrt{2+x^2}dx$ határozatlan integrált.

Az $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ *típusú irracionális integrálokat az Euler-féle helyettesítésekkel is megoldhatjuk:*

1) ha ax^2+bx+c *másodfokú trinómnak nincsenek valós gyökei, akkor*

a) $a>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t$

b) $c>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

2) ha $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$, *ahol* α,β *a másodfokú trinóm valós gyökei, akkor* $a(x-\alpha)=(x-\beta)t^2$.

176. Példa: Oldjuk meg a $\int\sqrt{2+x^2}\,dx$ **irracionális integrált Euler helyettesítéssel.**

Megoldás: Az x^2+2 másodfokú trinomnak nincsenek valós gyökei, $a=1>0$, ezért az 1) a) eset helyettesítését alkalmazzuk:

$$\sqrt{2+x^2}=x+t \quad /^2$$

$$2+x^2=x^2+2xt+t^2$$

$$2xt=2-t^2$$

$$x=\frac{2-t^2}{2t}$$

$$dx=-\frac{t^2+2}{2t^2}dt$$

$$\mathrm{I}=-\int\left(\frac{2-t^2}{2t}+t\right)\frac{t^2+2}{2t^2}dt=-\int\frac{2-t^2+2t^2}{2t}\frac{t^2+2}{2t^2}dt=-\int\frac{\left(t^2+2\right)^2}{4t^3}dt=-\int\frac{t^4+4t^2+4}{4t^3}dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{4}{t}+\frac{4}{t^3}\right)dt=-\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+4\ln|t|+4\frac{t^{-2}}{-2}\right)+c=-\frac{t^2}{8}-\ln|t|+\frac{1}{2t^2}+c=$$

$$=-\frac{1}{8}\left(\sqrt{2+x^2}-x\right)^2-\ln\left|\sqrt{2+x^2}-x\right|+\frac{1}{2\left(\sqrt{2+x^2}-x\right)^2}+c=$$

emeljük négyzetre a zárójelben lévő kifejezéseket, ekkor:

$$=\frac{1}{4\left(1+x^2-x\sqrt{2+x^2}\right)}-\frac{1+x^2-x\sqrt{2+x^2}}{4}-\ln\left|\sqrt{2+x^2}-x\right|+c.$$

177. Példa: Oldjuk meg Euler helyettesítéssel az $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$ irracionális integrált.

Megoldás: $-x^2-2x+3=-(x+3)(x-1)$ tényezőkre bontható, tehát a 2) eset helyettesítését kell alkalmaznunk:

$$-(x+3)=(x-1)t^2 \qquad /\cdot(x-1)$$

$$-(x+3)(x-1)=(x-1)^2t^2$$

$$3-2x-x^2=(x-1)^2t^2$$

másrészt az első egyenletből:

$$x+3=t^2-xt$$

$$x+xt^2=t^2-3$$

$$x=\frac{t^2-3}{1+t^2}$$

$$dx=\frac{8t\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Ekkor az adott integrál a következőképen alakul:

$$\mathbf{I}=\int\sqrt{\left(\frac{t^2-3}{1+t^2}-1\right)^2t^2}\,\frac{8t\,dt}{(1+t^2)^2}=\int\frac{t^2-3-1-t^2}{1+t^2}t\frac{8t\,dt}{(1+t^2)^2}=-32\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^3}=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=t & dv=\dfrac{t\,dt}{(1+t^2)^3} \\ du=dt & v=\displaystyle\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)^3}=\frac{-1}{4(1+t^2)^2}\end{matrix}\right|=-32\left(\frac{-t}{4(1+t^2)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}\right)=$$

$$=\frac{8t}{(1+t^2)^2}-8\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{t}{t}=\left|\begin{matrix} u=\dfrac{1}{t} & dv=\dfrac{t\,dt}{(1+t^2)^2} \\ du=-\dfrac{dt}{t^2} & v=\displaystyle\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}=\frac{-1}{2(1+t^2)}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{8t}{(1+t^2)^2}-8\left(\frac{-1}{2t(1+t^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2(1+t^2)}\right)=\frac{8t}{(1+t^2)^2}+\frac{4}{t(1+t^2)}+4\int\frac{dt}{t^2(1+t^2)}=$$

az utolsó integrál racionális integrál, parciális törtekre bontással oldhatjuk meg:

$$=\frac{8t}{(1+t^2)^2}+\frac{4}{t(1+t^2)}+4\int\frac{dt}{t^2}-4\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{8t}{(1+t^2)^2}+\frac{4}{t(1+t^2)}+4\frac{t^{-1}}{-1}-4\operatorname{arctg}t+c=$$

$$=\frac{8t}{(1+t^2)^2}+\frac{4}{t(1+t^2)}-\frac{4}{t}-4\operatorname{arctg}t+c=$$

$$=\frac{8\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}}{\left(1+\frac{x+3}{1-x}\right)^2}+\frac{4}{\left(1+\frac{x+3}{1-x}\right)\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}}-\frac{4}{\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}}+4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}+c=$$

a kifejezés elrendezése után a végső megoldás:

$$=\frac{(1-x)^2}{2}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}-\sqrt{3-2x-x^2}-4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}+c.$$

FELADATOK:

246. Feladat: Számítsuk ki az $\int\sqrt{x^2+5x+6}\,dx$ határozatlan integrált.

247. Feladat: Számítsuk ki az $\int\sqrt{4x^2+6x+1}\,dx$ határozatlan integrált.

248. Feladat: Számítsuk ki az $\int\sqrt{x^2-5x+6}\,dx$ határozatlan integrált.

249. Feladat: Számítsuk ki az $\int\sqrt{4x^2+1}\,dx$ határozatlan integrált.

250. Feladat: Számítsuk ki az $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$ határozatlan integrált.

7.5. Trigonometrikus függvények integrálása

Az $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *típusú trigonometrikus függvények integráljait a következő trigonometrikus helyettesítésekkel:*

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

visszavezethetjük racionális függvények integráljaira.

Ha érvényes, hogy $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ *akkor az előbbi helyettesítések helyett a következőket is alkalmazhatjuk:*

$$\operatorname{tg}x = t$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad .$$

178. Példa: Oldjuk meg az $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ **határozatlan integrált.**

Megoldás: Alkalmazzuk a megadott helyettesítéseket. Ekkor:

$$\mathbf{I} = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c\,.$$

179. Példa: Oldjuk meg az $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$ **határozatlan integrált.**

Megoldás: Alkalmazzuk a $tg\frac{x}{2}=t$ helyettesítést. Ekkor:

$$\mathbf{I}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3}dt=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{2dt}{2\left(t^2+2t+2\right)}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}=\operatorname{arctg}(t+1)+c=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)+c\ .$$

180. Példa: Oldjuk meg az $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$ határozatlan integrált.

Megoldás: Alkalmazzuk a megadott helyettesítéseket:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{8-2t^2}=\int\frac{dt}{4-t^2}=\int\frac{dt}{(2-t)(2+t)}=$$

parciális törtekre bontás után

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{2+t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{2-t}=\frac{1}{4}\ln|2+t|-\frac{1}{4}\ln|2-t|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+c.$$

181. Példa: Oldjuk meg az $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$ határozatlan integrált.

Megoldás: Mivel ez esetben érvényes, hogy $\frac{1}{1+(-\sin x)^2}\equiv\frac{1}{1+\sin^2 x}$ alkalmazhatjuk a második helyettesítést is. Ekkor:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+2t^2}=\int\frac{dt}{1+\left(t\sqrt{2}\right)^2}=\left|\begin{matrix}t\sqrt{2}=z\\ dt=\frac{dz}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{\operatorname{arctg}z}{\sqrt{2}}+c=$$

$$=\frac{\operatorname{arctg}t\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)+c.$$

182. Példa: Oldjuk meg az $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Itt is alkalmazhatjuk a $\mathrm{tg}x = t$ helyettesítést:

$$\mathrm{I} = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx = \int \frac{tgx - 1}{tgx + 2} dx = \int \frac{t-1}{t+2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t-1}{(t+2)(t^2+1)} dt$$

Bontsuk az integrálandó függvényt parciális összeadandókra:

$$\frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 + Ct + 2Bt + 2C}{(t+2)(1+t^2)}$$

Innen: $t - 1 = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+2)$

$$A + B = 0$$

$$2B + C = 1$$

$$A + 2C = -1$$

Ha $t = -2$ akkor az első egyenletből $A = -\frac{3}{5}$, majd az egyenletrendszerből tovább:

$B = \frac{3}{5}$, $C = -\frac{1}{5}$. Most az integrált a következőképpen folytathatjuk:

$$\mathrm{I} = -\frac{3}{5}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{5}\int \frac{3t-1}{t^2+1} dt = -\frac{3}{5}\ln|t+2| + \frac{3}{10}\int \frac{2tdt}{t^2+1} - \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

ha a második összeadandóban bevezetjük a $t^2 + 1 = z$ helyettesítést, akkor $2tdt = dz$ és így:

$$\mathrm{I} = -\frac{3}{5}\ln|t+2| + \frac{3}{10}\ln(t^2+1) - \frac{1}{5}\mathrm{arctg}t + c = -\frac{3}{5}\ln|\mathrm{tg}x + 2| + \frac{3}{10}\ln(\mathrm{tg}^2 x + 1) - \frac{1}{5}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x) + c$$

$$\mathrm{I} = -\frac{3}{5}\ln|\mathrm{tg}x + 2| + \frac{3}{10}\ln(\mathrm{tg}^2 x + 1) - \frac{1}{5}x + c.$$

FELADATOK:

251. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ határozatlan integrált.

252. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$ határozatlan integrált.

253. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$ határozatlan integrált.

254. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$ határozatlan integrált.

255. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$ határozatlan integrált.

256. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$ határozatlan integrált.

257. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}dx$ határozatlan integrált.

258. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$ határozatlan integrált.

259. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$ határozatlan integrált.

260. Feladat: Számítsuk ki az $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx$ határozatlan integrált.

7.6. Exponenciális függvények integrálása

Az $\int R(e^x)dx$ *exponenciális függvények integrálját, ahol R racionális függvény, az:*

$$e^x = t$$
$$e^x dx = dt$$
$$dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

helyettesítéssel visszavezethetjük racionális függvényel integráljára.

183. Példa: Oldjuk meg az $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx$ **határozatlan integrált.**

Megoldás: Legyen: $e^{\frac{x}{2}} = t$,

ekkor: $\frac{x}{2} = \ln t$

$$x = 2\ln t$$
$$dx = \frac{2}{t}dt$$

a helyettesítés bevezetése után a megadott integrál a következőképpen alakul:

$$\mathrm{I} = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t(1+t^2)} \cdot \frac{dt}{t} = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2(1+t^2)}dt$$

Ezt az inregrált a parciális integrálás módszerével oldhatjuk meg:

$$\mathrm{u} = \operatorname{arctg} t \quad , \quad du = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$dv = \frac{dt}{t^2(t^2+1)} \quad , \quad v = \int \frac{dt}{t^2(t^2+1)} = \int \frac{1+t^2-t^2}{t^2(t^2+1)}dt = \int t^2 dt - \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t$$

Ekkor:

$$\mathrm{I}=2\left(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}^2t+\int\frac{dt}{t(1+t^2)}+\int\frac{\operatorname{arctg}t}{1+t^2}dt\right)=2\left(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}^2t+\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2\right)$$

ahol

$$\mathrm{I}_1=\int\frac{dt}{t(1+t^2)}=\int\frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)}dt=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{tdt}{1+t^2}=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

és

$$\mathrm{I}_2=\int\frac{\operatorname{arctg}t}{1+t^2}dt=\left|\begin{array}{c}\operatorname{arctg}t=z\\ \dfrac{dt}{1+t^2}=dz\end{array}\right|=\int zdz=\frac{z^2}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2t$$

Végül:

$$\mathrm{I}=2\left(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}^2t+\ln|t|-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2t\right)+c$$

$$\mathrm{I}=-\frac{2\operatorname{arctg}t}{t}-2\operatorname{arctg}^2t+2\ln|t|-\ln(1+t^2)+\operatorname{arctg}^2t+c$$

$$\mathrm{I}=-\frac{2\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}-\operatorname{arctg}^2e^{\frac{x}{2}}+2\ln\frac{e^x}{1+e^x}+c\,.$$

184. Példa: Oldjuk meg az $\int\frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: A helyettesítés most: $e^x=t$

$x=\ln t$

$dx=\frac{dt}{t}$

Ekkor az adott integrál a következőképpen alakul:

$$\mathbf{I}=\int\frac{e^{3x}-e^{x}}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{t^{3}-t}{t^{2}+1}\cdot\frac{dt}{t}=\int\frac{t^{2}-1}{t^{2}+1}dt=\int\frac{t^{2}+1-2}{t^{2}+1}dt=\int dt-2\int\frac{dt}{t^{2}+1}=t-2\operatorname{arctg}t+c$$

$$\mathbf{I}=e^{x}-2\operatorname{arctg}e^{x}+c.$$

FELADATOK:

261. Feladat: Oldjuk meg az $\int\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}dx$ határozatlan integrált.

262. Feladat: Oldjuk meg az $\int\frac{dx}{e^{x}\sqrt{\left(1+e^{x}\right)^{3}}}$ határozatlan integrált.

263. Feladat: Oldjuk meg az $\int\frac{e^{2x}}{1+e^{x}}dx$ határozatlan integrált.

8. Határozott integrálok

Ha az $f(x)$ függvény integrálható az $[a,b]$ zárt intervallumon, és ezen az intervallumon $F(x)$ a primitív függvénye, akkor a Newton-Leibnitz képlet szerint az $[a,b]$ intervallumon a határozott integrál az:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

formula szerint számítható ki.

185. Példa: Számítsuk ki az $\int_{-1}^{2} x^2 dx$ határozott integrált.

Megoldás: A Newton-Leibnitz képlet szerint:

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

186. Példa: Számítsuk ki az $\int_1^e \ln x dx$ határozott integrált.

Megoldás: A Newton-Leibnitz képlet szerint:

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{vmatrix} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = (e\ln e - 1\ln 1) - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e =$$

$$= e - (e-1) = 1.$$

187. Példa: Számítsuk ki az $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ határozott integrált.

Megoldás: Az $\frac{1}{x^2}$ függvénynek a $[-1,1]$ intervallumban szakadáspontja van, az $x=0$-ban.

Ezért az adott integrált fel kell bontani két összeadandóra:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{-0}\frac{dx}{x^2}+\int_{+0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{-\varepsilon}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty-2=\infty.$$

188.Példa: Számítsuk ki az $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ végtelen határú (improprius) határozott integrált.

Megoldás: Ha az integrál határa végtelen, akkor mindenféleképpen be kell vezetni a határértéket (lim) a végtelen határoknál:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{T\to\infty}\int_{0}^{T}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{T\to\infty}\operatorname{arctg}t\Big|_{0}^{T}=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{arctg}T-\operatorname{arctg}0)=\lim_{T\to\infty}\operatorname{arctg}T=\frac{\pi}{2}.$$

189. Példa: Számítsuk ki az $\int_{1}^{3}\sqrt{x+1}\,dx$ határozott integrált.

Megoldás: Mivel az adott integrált helyettesítéssel kell megoldani, ezért a határokat is meg kell változtatni:

$$\int_{1}^{3}\sqrt{x+1}\,dx=\left|\begin{matrix}x+1=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int_{\sqrt{2}}^{2}t\cdot 2tdt=2\int_{\sqrt{2}}^{2}t^2dt=2\frac{t^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=\frac{2}{3}\left(8-2\sqrt{2}\right)=\frac{4}{3}\left(4-\sqrt{2}\right).$$

FELADATOK:

264. Feladat: Számítsuk ki az $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ **határozott integrált.**

265. Feladat: Számítsuk ki az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ **határozott integrált.**

266. Feladat: Számítsuk ki az $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **határozott integrált.**

267. Feladat: Számítsuk ki az $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ **határozott integrált.**

268. Feladat: Számítsuk ki az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **határozott integrált.**

269. Feladat: Számítsuk ki az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ctgx\,dx$ **határozott integrált.**

270. Feladat: Számítsuk ki az $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$ **határozott integrált.**

8.1. Síkidomok területének kiszámítása

Ha az $[a,b]$ intervallumon integrálható $f(x)$ függvény nemnegatív: $f(x) \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$, akkor

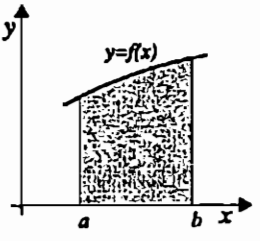
$$\int_a^b f(x)dx$$

az $f(x)$ görbének az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó íve által meghatározott görbevonalú trapéz területét jelenti, míg ha az $[a,b]$ intervallumon $f(x) \leq 0$, akkor az integrál a görbevonalú trapéz területének (-1)-szerese. Ebből és az integrál additív tulajdonságából következik, hogy ha az $f(x)$ függvény felvesz az $[a,b]$ intervallumon pozitív és negatív értékeket is, akkor az integrál értéke az x-tengely fölött és alatt levő területek különbségét adja.

A görbevonalú trapéz területéből kiindulva ki lehet számítani különféle síkidomok területét.

8.1.1. Területszámítás a derékszögű koordináta-rendszerben

Ha $y = f(x) \geq 0$ és folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, akkor annak a görbevonalú trapéznak a területe, melyet az adott görbe, az x-tengely, valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek határolnak:



$$\mathrm{T} = \int_a^b f(x)dx.$$

190. Példa: Határozzuk meg az $y=x^2$ parabola és az $y=x+2$ egyenes által bezárt területet.

Megoldás: Az egyenes és a parabola metszéspontjai $A(-1,1)$ és $B(2,4)$, ezért:

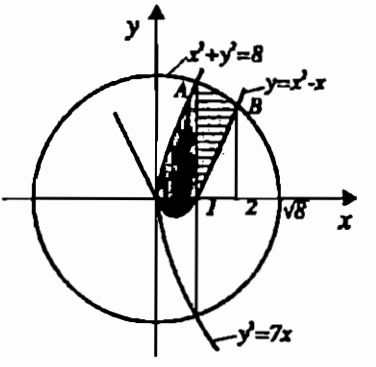
$$T=\int_{-1}^{2}(x+2)dx-\int_{-1}^{2}x^2dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(\frac{4}{2}+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=4.5\ .$$

191. Példa: Határozzuk meg az $y=x^2$ és az $y^2=x$ parabolák által bezárt területet.

Megoldás: Az $y=x^2$ és $y=\pm\sqrt{x}$ parabolák metszéspontjai $A(0,0)$ és $B(1,1)$. A két parabola által bezárt területet úgy kapjuk meg, hogy az $y=+\sqrt{x}$ parabola alatti területből kivonjuk az $y=x^2$ parabola alatti területet. Ekkor:

$$T=\int_{0}^{1}\sqrt{x}dx-\int_{0}^{1}x^2dx=\left(\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ .$$

192. Példa: Számítsuk ki az $x^2+y^2=8$ kör, az $y^2=7x$ és az $y=x^2-x$ parabolák által bezárt területet.



Megoldás: Az $x^2+y^2=8$ kör és az $y^2=7x$ parabola metszéspontja:

$$x^2+7x-8=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\frac{-7\pm 9}{2}$$

$$x=1$$

Az $x^2+y^2=8$ kör és az $y=x^2-x$ parabola metszéspontja:

$$x^2+x^4-2x^3+x^2=8$$

$$x^4-2x^3+2x^2=8$$

$$x=2$$

A keresett területet tehát három részből kell számítani:

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2+\mathbf{T}_3$$

$$\mathbf{T}_1=\int_0^1\sqrt{7x}dx=\sqrt{7}\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{2\sqrt{7}}{3}(1-0)=\frac{2\sqrt{7}}{3},$$

$$\mathbf{T}_2=\int_0^1\left(x^2-x\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6},$$

$$\mathbf{T}_3=\int_1^2\sqrt{8-x^2}dx-\int_1^2\left(x^2-x\right)dx=\left.\left(\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+\frac{8}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{8}}\right)\right|_1^2-\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2=$$

$$=2+4\arcsin\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{1}{2}\sqrt{7}-4\arcsin\frac{1}{\sqrt{8}}-\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2+4\arcsin\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{7}-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{7}{3}+\frac{3}{2}=2+4\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{7}}{2}-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{6}.$$

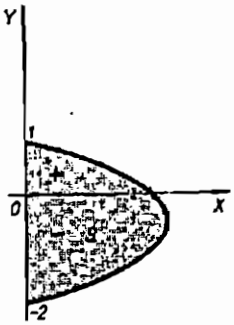
Ekkor:

$$\mathbf{T}=\frac{2\sqrt{7}}{3}+\frac{1}{6}+2+\pi-\frac{\sqrt{7}}{2}-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{6}$$

vagyis

$$\mathbf{T}=\frac{2\sqrt{7}}{3}-\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{4}{3}+\pi-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}\ .$$

193. Példa: Számítsuk ki az $x=2-y-y^2$ görbe és az ordináta tengely (y-tengely) által bezárt területet.



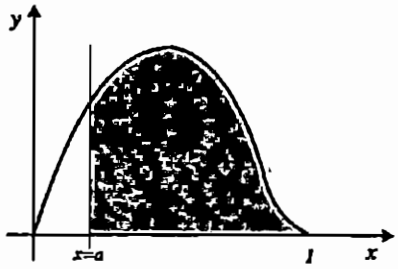
Megoldás: Mivel megcserélődött az x és y változók valamint tengelyek szerepe, a keresett területet $T=\int_a^b f(y)dy$ képlettel számíthatjuk. A parabola és az y-tengely metszéspontja :

$$x=0$$
$$-y^2-y+2=0$$
$$y_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{1\pm3}{-2}$$
$$y_1=-2$$
$$y_2=1$$

Ekkor a keresett terület:

$$\mathbf{T}=\int_{-2}^{1}\left(2-y-y^2\right)dy=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2}=4.5\ .$$

194. Példa: Számítsuk ki az $y=\sqrt{x}\ln^2 x$ görbe, valamint az $x=a$ $(0<a<1)$, $x=1$ és az $y=0$ egyenesek által határolt területet.



Megoldás: A keresett terület a görbe alatti terület a-tól 1-ig:

$$\mathbf{T}=\int_a^1\sqrt{x}\ln^2 x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x & dv=x^{\frac{1}{2}}dx \\ du=2\ln x\frac{dx}{x} & v=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}dx\end{matrix}\right|=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x\right)\Big|_a^1-\frac{4}{3}\int_a^1\sqrt{x}\ln x dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln x & dv=x^{\frac{1}{2}}dx \\ du=\frac{dx}{x} & v=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{matrix}\right|=\left(0-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x\Big|_a^1-\frac{2}{3}\int_a^1\sqrt{x}dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\left(0-a\sqrt{a}\ln a\right)-\frac{4}{9}x\sqrt{x}\Big|_a^1\right)=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a+\frac{8}{9}a\sqrt{a}\ln a+\frac{16}{27}\left(1-a\sqrt{a}\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a+\frac{8}{9}a\sqrt{a}\ln a+\frac{16}{27}-\frac{16}{27}a\sqrt{a}=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln a\left(\ln a-\frac{4}{3}\right)+\frac{16}{27}\left(1-a\sqrt{a}\right).$$

FELADATOK:

271. Feladat: Számítsuk ki az $y=4x-x^2$ parabola és az apszcisszatengely által bezárt területet.

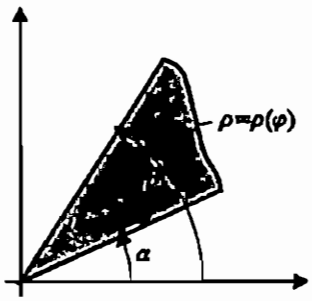
272. Feladat: Számítsuk ki az $y=\ln x$ görbe, az $x=e$ egyenes és az x-tengely által bezárt területet.

273. Feladat: Számítsuk ki az $y^3 = x$ görbe valamint az $y = 1$ és $x = 8$ egyenesek által bezárt területet.

274. Feladat: Számítsuk ki az $y = \frac{x^2}{3}$ és $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ parabolák által bezárt területet.

275. Feladat: Számítsuk ki azoknak a területeknek a mérőszámát amelyekre az $y^2 = 2x$ parabola osztja az $x^2 + y^2 = 8$ kört.

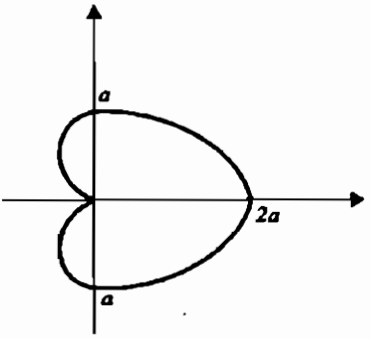
8.1.2. Területszámítás a poláris koordináta-rendszerben



Legyen adott a $\rho = \rho(\varphi)$ görbe, ahol $\alpha \le \varphi \le \beta$, $[\beta - \alpha] \le 2\pi$ a poláris koordináta rendszerben, ahol $\rho = \rho(\varphi)$ folytonos görbe. Annak az OAB görbevonalú háromszögnek a területét, melyet a $\rho = \rho(\varphi)$ görbe valamint a $\varphi = \alpha$ és $\varphi = \beta$ félegyenesek határolnak a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi \quad .$$

195. Példa: Számítsuk ki a $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$ kardioisz által bezárt területet.



Megoldás: A kardioisz egyenlete polárkoordinátákban van megadva, ezért a fent megadott képlettel számíthatjuk az általa bezárt területet:

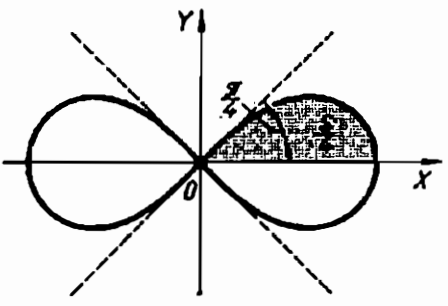
$$\mathbf{T} = 2\mathbf{T}_1 = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi} d\varphi + 2a^2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi + a^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= a^2\varphi\Big|_0^{\pi} + 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = a^2\pi + \frac{a^2}{2}\pi = \frac{3}{2}a^2\pi \ .$$

196. Példa: Határozzuk meg a Bernoulli-lemniszkáta által bezárt területet, ha egyenlete:

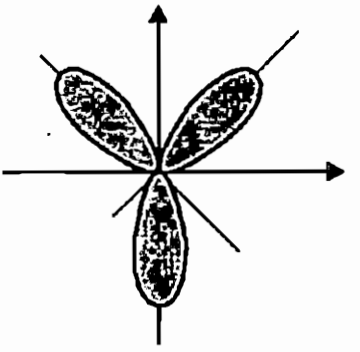
$$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi \ .$$



Megoldás: A görbe szimmetrikussága miatt elegendő a bezárt terület negyedét számítani:

$$T = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = a^2 \ .$$

197. Példa: Határozzuk meg a $\rho = a\sin 3\varphi$, $a \in R$ egyenlettel megadott háromszirmú rózsa területét.



Megoldás: A rózsaszirmok szimmetrikussága miatt, és mivel $\sin 3\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ a keresett terület számítható a következőképpen:

$$T = 3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2\sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi = \frac{3a^2}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{3a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) - \frac{a^2}{8}(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{a^2\pi}{4} - \frac{a^2}{8}\cdot 0 = \frac{a^2\pi}{4} .$$

FELADATOK:

276. Feladat: Számítsuk ki a $\rho = a\cos 2\varphi$ görbe egy szirma által határolt területet.

277. Feladat: Számítsuk ki a $\rho^2 = a^2 \sin 4\varphi$ görbe által bezárt területet.

278. Feladat: Számítsuk ki a $\rho = a \sin 3\varphi$ görbe által bezárt területet.

279. Feladat: Számítsuk ki a $\rho = 2 + \cos\varphi$ görbe által bezárt területet.

280. Feladat: Számítsuk ki a $\rho = \dfrac{2}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, $0 \le \varepsilon < 1$ ellipszis által bezárt területet.

8.1.3. Területszámítás paraméteres alakban

Ha az $y = f(x)$ függvény paraméteres egyenletrendszere $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, ahol $\varphi(t)$, $\psi(t)$ kielégítik a következő feltételeket:

a) $\varphi(t)$ folytonos és differenciálható az $[t_1, t_2]$ zárt intervallumon

b) $\varphi(t)$ monoton növekvő az $[t_1, t_2]$ zárt intervallumon

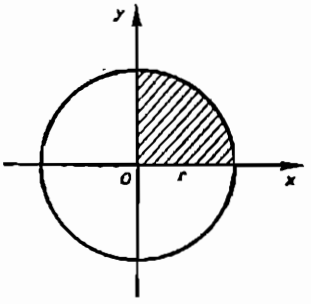
c) $\psi(t)$ folytonos az $[t_1, t_2]$ zárt intervallumon

d) $\psi(t) \ge 0$ minden $t \in [t_1, t_2]$

akkor a paraméteres alakban megadott függvény által bezárt területet a következő képlettel számíthatjuk:

$$\mathbf{T} = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} y \cdot x_t' dt .$$

198. Példa: Az $x^2 + y^2 = r^2$ kör paraméteres egyenletei $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$. Számítsuk ki a negyedkör területét a határozott integrál segítségével.

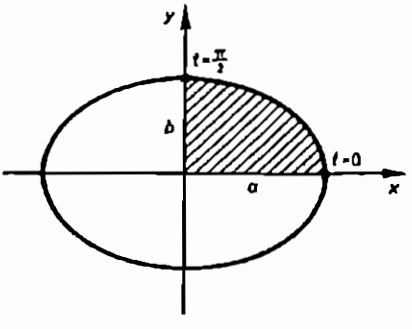


Megoldás: A negyedkör esetében $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, ezért:

$$\mathbf{T} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r\sin t \cdot r(-\sin t)dt = -r^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{r^2}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t dt =$$

$$= \left|\begin{matrix} 2t = z \\ dt = \frac{dz}{2}\end{matrix}\right| = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{r^2}{4}\int_0^{\pi}\cos z dz = \frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{4}\sin z\Big|_0^{\pi} = \frac{r^2\pi}{4} - 0 = \frac{r^2\pi}{4} .$$

199. Példa: A $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ **ellipszis paraméteres egyenletei** $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ **. Határozzuk meg az ellipszis által bezárt területet.**

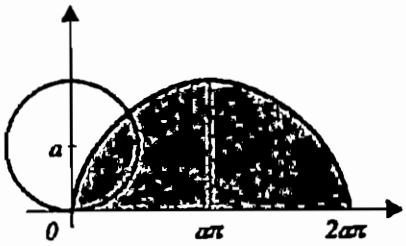


Megoldás: Elegendő az ellipszis területének a negyedét kiszámítani. Ekkor a határok $t_1 = 0$ és $t_2 = \frac{\pi}{2}$, az ellipszis területe pedig:

$$T = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin ta(-\sin t)dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 tdt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\cdot t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt =$$

$$= 2ab\frac{\pi}{2} - 2ab\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi - ab(\sin\pi - \sin 0) = ab\pi \ .$$

200. Példa: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$, $a \in R$ **cikloisz alatt levő területet.**



Megoldás: A határokat a következőképpen határozhatjuk meg:

$t_1 : x = 0,\ y = 0 \Rightarrow t_1 = 0$
$t_2 : x = 2a\pi,\ y = 0 \Rightarrow t_2 = 2\pi$

A keresett terület ekkor:

$$T = \int_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_{0}^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt =$$

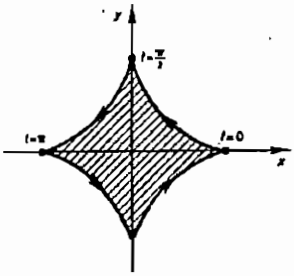
$$= a^2 t\Big|_{0}^{2\pi} - 2a^2\sin t\Big|_{0}^{2\pi} + a^2\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = a^2 2\pi - 2a^2\cdot 0 + \frac{a^2}{2}t\Big|_{0}^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{0}^{2\pi} =$$

$$= 2a^2\pi + \frac{a^2}{2}2\pi + 0 = 3a^2\pi \ .$$

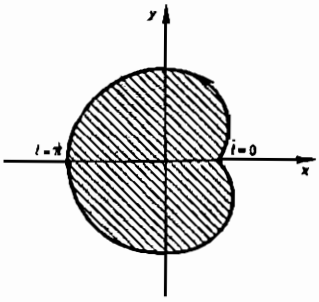
FELADATOK:

281. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ **Descartes-levél egy ágának területét.**

282. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$ **asztroida által bezárt területet.**



283. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = b(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ **kardioisz által bezárt területet.**



284. Feladat: Számítsuk ki az x**-tengely és az** $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ **görbe által határolt síkidom területét.**

285. Feladat: Határozzuk meg az x**-tengely és az** $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-t^2 \end{cases}$ **görbe által bezárt területet.**

8.2. Görbe ívhosszúságának kiszámítása

A határozott integrál másik fontos alkalmazása görbék ívhosszúságának kiszámítása. Ha az $y = f(x)$ függvény $y' = f'(x)$ differenciálhányadosa folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, akkor grafikonjának az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó ívének hossza kiszámítható.

8.2.1. Ívhossz a derékszögű koordináta-rendszerben

A derékszögű koordináta-rendszerben, a fent említett feltételek mellett az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó ív hossza kiszámítható a következő képlettel:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx\,.$$

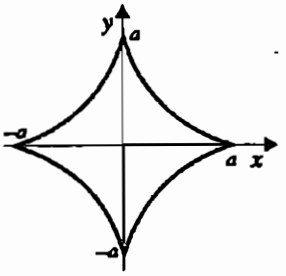
201. Példa: Számítsuk ki az $y = \mathrm{ch}x$ hiperbolikus függvény ívének hosszát a $[0,3]$ intervallumon.

Megoldás: Ha $y = \mathrm{ch}x \Rightarrow y' = \mathrm{sh}x$, és a képlet alapján:

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 x}\,dx = \int_0^3 \sqrt{ch^2 x}\,dx = \int_0^3 \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x\Big|_0^3 = \mathrm{sh}3 - \mathrm{sh}0 = \mathrm{sh}3 = \frac{e^3 - e^{-3}}{2} \approx 10\,.$$

202.Példa: Határozzuk meg az $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ egyenlettel adott asztroisz teljes hosszát.

Megoldás: A szimmetrikusság miatt elegendő a teljes hossz negyedét számolni.



Ha $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, akkor az adott egyenlet differenciálásával a $\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{\frac{1}{3}}y'=0$ egyenletet kapjuk, ahonnan y'-et kifejezve: $y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$. Ekkor az ívhossz:

$$l=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=4a^{1/3}\int_0^a x^{-1/3}dx=4a^{1/3}\left.\frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}}\right|_0^a=$$

$$=6a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-0\right)=6a.$$

FELADATOK:

286. Feladat: Számítsuk ki az $y=\sqrt{x}$ görbeív hosszát, ha $0\le x\le 1$.

287. Feladat: Számítsuk ki az $y=\ln x$ görbeív hosszát, ha $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

288. Feladat: Számítsuk ki az $y=1-\ln\cos x$ görbeív hosszát, ha $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

289. Feladat: Számítsuk ki az $y=2\ln\cos\frac{x}{2}$ görbeív hosszát, ha $0\le x\le 3$.

290. Feladat: Számítsuk ki az $y=e^x$ görbeív hosszát a $(0,1)$ ponttól az $(1,e)$ pontig.

291. Feladat: Számítsuk ki az $y=\ln\sin(x-1)$ görbeív hosszát az $x=1+\frac{\pi}{3}$ ponttól az $x=1+\frac{2\pi}{3}$ pontig.

292. Feladat: Mutassuk meg, hogy az $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ellipszis ívhossza megegyezik az $y=\sin x$ függvény egy hullámának hosszával.

293. Feladat: Határozzuk meg az $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ görbe ívhosszát $y=1$ értéktől $y=e$ értékig.

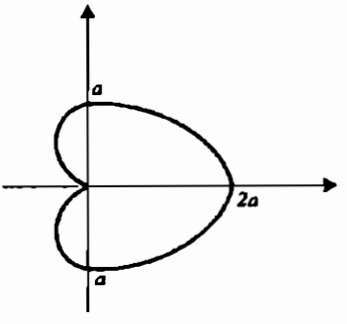
294. Feladat: Számítsuk ki az $y^2=x^3$ görbe origótól a $(4,8)$ pontjáig terjedő ívének hosszát.

8.2.2. Ívhossz a poláris koordináta-rendszerben

Legyen $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$ adott görbe a poláris koordináta rendszerben, melynek az adott intervallumon folytonos a differenciálhányadosa. Ekkor a megfigyelt intervallumhoz tartozó ívének hosszá a következő képlettel számithatjuk:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi\ .$$

203. Példa: Számítsuk ki a $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$ kardioisz ívhosszúságát.



Megoldás: Ha $\rho = a(1+\cos\varphi) \Rightarrow \rho' = -a\sin\varphi$, és a képlet valamint a szimmetrikusság alapján:

$$l = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\frac{1+\cos\varphi}{2}}d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \left|\begin{matrix}\frac{\varphi}{2}=t\\ d\varphi = 2dt\end{matrix}\right| = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot 2dt = 8a\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a(1-0) = 8a.$$

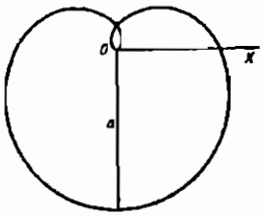
204. Példa: Határozzuk meg a $\rho = e^{a\varphi}$, $a>0$ egyenlettel adott logaritmikus spirál ívének hosszát a koordináta rendszer kezdőpontjától az $A(\rho=1,\varphi=0)$ pontig.

Megoldás: Ha $\rho = 0 \Rightarrow \varphi = -\infty$ és ha $\rho = e^{a\varphi} \Rightarrow \rho' = ae^{a\varphi}$. Ekkor:

$$l = \int_{-\infty}^{0}\sqrt{e^{2a\varphi}+a^2e^{2a\varphi}}\,d\varphi = \lim_{T\to-\infty}\sqrt{1+a^2}\int_T^0 e^{a\varphi}d\varphi = \left|\begin{matrix}a\varphi = t\\ d\varphi = \frac{dt}{a}\end{matrix}\right| = \sqrt{1+a^2}\lim_{T\to-\infty}\int_{aT}^{0}e^t\frac{dt}{a} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\lim_{T\to-\infty}e^t\Big|_{aT}^{0} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\lim_{T\to-\infty}\left(e^0-e^{aT}\right) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(1-e^{-\infty}\right) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

205. Példa: Határozzuk meg a $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ polárkoordinátákkal adott görbe teljes ívhosszát.



Megoldás: A görbe teljes ívét akkor írja le ha φ 0-tól 3π-ig változik. Mivel $\rho' = 3a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$, ezért:

$$l = \int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{3}+\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = a\int_0^{3\pi}\frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\varphi\Big|_0^{3\pi} - \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\cos\frac{2\varphi}{3}\,d\varphi = \frac{a}{2}3\pi - \frac{3a}{4}\sin\frac{2\varphi}{3}\Big|_0^{3\pi} =$$

$$= \frac{3a\pi}{2} - \frac{3a}{4}(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{3a\pi}{2}.$$

FELADATOK:

295. Feladat: Számítsuk ki a $\rho = a\varphi$ egyenlettel megadott Arhimédeszi-spirál első ívének hosszát.

296. Feladat: Számítsuk ki a $\rho = \frac{1}{\varphi}$ egyenlettel adott hiperbolikus spirál ívhosszát a $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ ponttól a $\left(\frac{1}{2},2\right)$ pontig.

297. Feladat: Számítsuk ki az $\varphi = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ görbeív hosszát $\rho = 1$-től $\rho = 3$-ig.

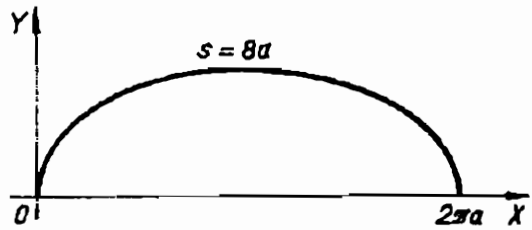
8.2.3. Ívhossz számítás paraméteres alakban

Ha a függvény paraméteres alakban adott: $x=\varphi(t)$ *és* $y=\psi(t)$ *ahol* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *differenciálhányadosai folytonosak a* $[t_1,t_2]$ *intervallumon, akkor a görbe ívének hossza*

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$$

ahol t_1, t_2 *a megfigyelt ív végpontjainak megfelelő paraméterértékek, és* $t_1<t_2$.

206. Példa: Számítsuk ki az $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ **cikloisz egy ívének hosszát.**



Megoldás: Határozzuk meg a paraméteres egyenletek deriváltjait t változó szerint:

$$x=a(t-\sin t)\Rightarrow x_t'=a(1-\cos t)$$

$$y=a(1-\cos t)\Rightarrow y_t'=a\sin t$$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=-4a(-1-1)=8a\ .$$

207. Példa: Határozzuk meg az $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ **paraméteres alakban adott görbe ívhosszát, ha** $0\le t\le 2$, $a>0$.

Megoldás: Határozzuk meg először a deriváltakat:

$$x_t' = at\cos t$$

$$y_t' = at\sin t$$

az ívhossz pedig:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} t\,dt = a\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a}{2}\left(4\pi^2 - 0\right) = 2a\pi^2.$$

FELADATOK:

298. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = 3\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) \\ y = 3\sin t \end{cases}$ **paraméteres alakban adott függvény ívhosszát** $t_1 = \frac{\pi}{2}$ **paraméterértéktől** $t_2 = \frac{2\pi}{3}$ **értékig.**

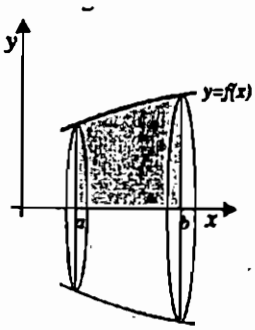
299. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ **paraméteres alakban adott függvény ívhosszát** $t_1 = 0$ **paraméterértéktől** $t_2 = \pi$ **értékig.**

300. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t \\ y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$ **paraméteres alakban adott függvény ívhosszát, ha** $\left(c^2 = a^2 - b^2\ ,\ 0 < b < a\right)$.

8.3. Forgástestek térfogata

Az integrálszámítás felhasználható görbe felületekkel határolt testek térfogatának kiszámítására is. Itt most csak a speciális görbe felületekkel határolt testekkel , az ún. forgástestekkel foglalkozunk.

8.3.1. Forgástestek térfogata a derékszögű koordináta-rendszerben



Legyen $y = f(x)$ folytonos függvény az $[a,b]$ intervallumon. Ha az adott görbével, az $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel, valamint az $[a,b]$ intervallummal határolt görbevonalú trapézt megforgatjuk valamelyik tengely körül, akkor forgástestet kapunk. A kapott forgástestek térfogatát, attól függően, hogy melyik tengely körül forgatunk, a következő képletekkel számíthatjuk ki:

$$\mathbf{V}_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx \quad vagy \quad \mathbf{V}_y = 2\pi \int_a^b xy(x)dx \ .$$

Ha az $y = f(x)$ görbével, az $y = c$, $y = d$ és $x = 0$ egyenesekkel határolt görbevonalú trapézt forgatjuk el az y-tengely körül, akkor a kapott forgástest térfogatát a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$\mathbf{V}_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy.$$

208. Példa: Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amelyet az $y=\sin x$ függvény $0\le x\le\pi$ intervallumához tartozó ívének x-tengely körüli forgatásával kapunk.

Megoldás: Ha a megfelelő képletet alkalmazzuk, akkor a keresett térfogat:

$$V_x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 2x dx\right)=\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos t dt\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi-0]=\frac{\pi^2}{2}.$$

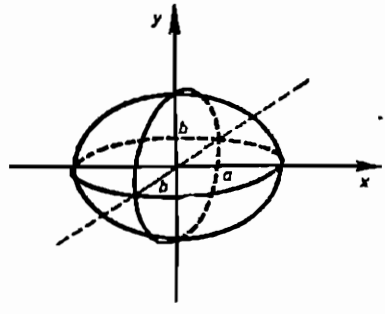
209. Példa: Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amelyet az $y=\sin x$ függvény $0\le x\le\pi$ intervallumához tartozó ívének y-tengely körüli forgatásával kapunk.

Megoldás: Ha a megfelelő képletet alkalmazzuk, akkor a keresett térfogat:

$$V=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x dx=\begin{vmatrix} u=x & dv=\sin x dx \\ du=dx & v=\int\sin dx=-\cos x\end{vmatrix}=2\pi\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx\right)=$$

$$=2\pi\left(-\pi\cos\pi-0+\sin x\Big|_0^{\pi}\right)=2\pi(\pi+0)=2\pi^2.$$

210.Példa: Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis felső ívének az x-tengely körül való megforgatásával előálló forgási ellipszoid térfogatát.

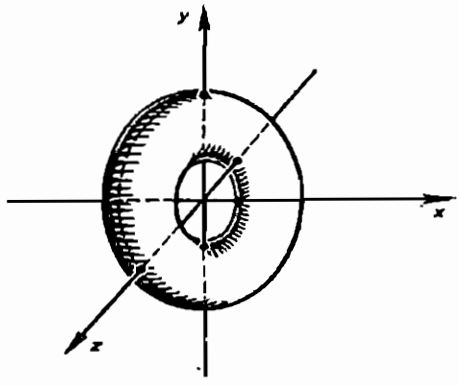


Megoldás: Az ellipszis egyenletéből y-t kifejezve, megkapjuk a képletben szereplő $f(x)$ függvényt: $y = f(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Alkalmazva a megfelelő képletet, a forgási ellipszoid térfogata:

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx = b^2\pi\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{b^2\pi}{a^2}\left(a^2(a+a)-\frac{1}{3}\left(a^3+a^3\right)\right) = \frac{b^2\pi}{a^2}\left(2a^3-\frac{1}{3}2a^3\right) = \frac{b^2\pi}{a^2}\cdot\frac{4}{3}a^3 = \frac{4}{3}ab^2\pi \ .$$

211. Példa: Határozzuk meg annak a tórusznak (gyűrűnek) a térfogatát, amelyet az $x^2+(y-b)^2 \le a^2$ $(b \ge a > 0)$ kör x-tengely körüli forgatásával kapunk.



Megoldás: A tórusz térfogatát úgy kaphatjuk meg, hogy a felső félkörív által leírt forgástest térfogatából kivonjuk az alsó félkörív által leírt forgástest térfogatát. A felső félkörív egyenlete: $y = \sqrt{a^2-x^2}+b$, míg az alsó félkörív egyenlete: $y = -\sqrt{a^2-x^2}+b$. Mivel a forgatás az x-tengely körül történik, így a megfelelő képletből adódik, hogy:

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a}\left[\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right]dx =$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}\left(b^2+2b\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2-b^2+2b\sqrt{a^2-x^2}-a^2+x^2\right)dx=\pi\int_{-a}^{a}4b\sqrt{a^2-x^2}=$$

$$=4b\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\ dx=a\cos tdt\end{matrix}\right|=4ab\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cos tdt=4a^2b\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=$$

$$=4a^2b\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2a^2b\pi\left(t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt\right)=2a^2b\pi\left(2\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=2a^2b\pi\left(\pi+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin(-\pi)\right)=2a^2b\pi\cdot\pi=2a^2b\pi^2.$$

FELADATOK:

301. Feladat: **Határozzuk meg az $y=ax-x^2$ $(a>0)$ parabola és az x-tengely által bezárt terület x-tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát.**

302. Feladat: **Határozzuk meg az $y^2=x^3$ parabola, az x-tengely és az $x=1$ egyenes által bezárt terület x-tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát.**

303. Feladat: **Határozzuk meg az $y=e^x$ görbe, valamint az x-tengely és az y-tengely által bezárt terület x-tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát.**

304. Feladat: **Határozzuk meg az $y=e^x$ görbe, valamint az x-tengely és az y-tengely által bezárt terület y-tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát.**

305. Feladat: **Határozzuk meg az $y^2=4ax$ görbe valamint az $x=a$ egyenes által bezárt terület y-tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát.**

8.3.2. Forgástestek térfogata polárkoordinátákban

Legyen $\rho = \rho(\varphi)$ görbe nemnegatív és legyen folytonos a differenciálhányadosa az $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ intervallumon. Ha a $\rho = \rho(\varphi)$ görbe valamint a $\varphi = \alpha$ és $\varphi = \beta$ félegyenesek által határolt görbevonalú háromszöget megforgatjuk a polártengely körül, akkor a kapott forgástest térfogatát a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$\mathbf{V} = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin\varphi d\varphi .$$

212. Példa: Számítsuk ki annak a forgástestnek a térfogatát amelyet a $\rho = a\sin 2\varphi$ görbe polártengely körüli forgatásával kapunk.

Megoldás: A fenti képlet alapján:

$$\mathbf{V} = 2\cdot\frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^3\varphi\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\cos^3\varphi d\varphi = \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\cos^2\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4\varphi - \sin^6\varphi\right)\cos\varphi d\varphi = \begin{vmatrix} \sin\varphi = t \\ co\varphi d\varphi = dt \end{vmatrix} = \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^1 \left(t^4 - t^6\right)dt = \frac{32}{3}\pi a^3 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{32}{3}\pi a^3 \frac{7-5}{35} = \frac{32}{3}\pi a^3 \frac{2}{35} = \frac{64}{105}\pi a^3 .$$

213. Példa: Számítsuk ki a $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ egyenlettel adott kardioisz polártengely körüli forgatásával előállt test térfogatát.

Megoldás: Az előző példához hasonlóan:

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}8(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi=\left|\begin{matrix}1+\cos\varphi=t\\-\sin\varphi d\varphi=dt\end{matrix}\right|=-\frac{16}{3}\pi\int_2^0 t^3dt=-\frac{16}{3}\pi\frac{t^4}{4}\Bigg|_2^0=$$

$$=-\frac{4}{3}\pi\cdot(0-16)=\frac{64}{3}\pi.$$

FELADATOK:

306. Feladat: Határozzuk meg a $\rho=a(1+\cos\varphi)$ egyenlettel adott kardioisz polártengely körüli megforgatásával előálló forgástest térfogatát.

307. Feladat: Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet a $\rho=a\cos^2\varphi$ görbe polártengely körüli forgatásával kapunk.

8.3.3. Forgástestek térfogata paraméteres alakban

Ha az $y=f(x)$ függvény paraméteres egyenletrendszere $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, ahol $\varphi(t)$, $\psi(t)$ kielégítik a következő feltételeket:

a) $\varphi(t)$ folytonos és differenciálható az $[t_1,t_2]$ zárt intervallumon

b) $\varphi(t)$ monoton növekvő az $[t_1,t_2]$ zárt intervallumon

c) $\psi(t)$ folytonos az $[t_1,t_2]$ zárt intervallumon

d) $\psi(t)\geq 0$ minden $t\in[t_1,t_2]$

akkor ha a paraméteres alakban megadott függvényt megforgatjuk az x-tengely körül, a kapott forgástest térfogatát a követező képlettel számíthatjuk:

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2}\psi^2(t)\varphi'(t)dt=\pi\int_{t_1}^{t_2}y^2\cdot x_t'dt.$$

214. Példa: Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $\begin{cases} x = \mathrm{sh}t \\ y = \mathrm{ch}t \end{cases}$ **paraméteres egyenlettel adott hiperbola** x**-tengely körüli forgatásával kapunk, a** $0 \le t \le 2$ **intervallumon.**

Megoldás: Alkalmazzuk a fent megadott képletet:

$$\mathbf{V} = \pi \int_0^2 y^2(t) x_t' dt = \pi \int_0^2 \mathrm{ch}^2 t \cdot \mathrm{ch}t dt = \pi \int_0^2 \left(1 + \mathrm{sh}^2 t\right) \mathrm{ch}t dt = \pi \int_0^2 \mathrm{ch}t dt + \pi \int_0^2 \mathrm{sh}^2 t \mathrm{ch}t dt =$$

$$= \pi \mathrm{sh}t \Big|_0^2 + \pi \int_0^2 \mathrm{sh}^2 t \mathrm{ch}t dt = \begin{vmatrix} \mathrm{sh}t = u \\ \mathrm{ch}t dt = du \end{vmatrix} = \pi(\mathrm{sh}2 - \mathrm{sh}0) + \pi \int_{\mathrm{sh}0}^{\mathrm{sh}2} u^2 du = \pi \mathrm{sh}2 + \pi \frac{u^3}{3} \Bigg|_{\mathrm{sh}0}^{\mathrm{sh}2} =$$

$$= \pi \mathrm{sh}2 + \frac{\pi}{3}\left(\mathrm{sh}^3 2 - \mathrm{sh}^3 0\right) = \pi \mathrm{sh}2 + \frac{\pi}{3} \mathrm{sh}^3 2 \approx \pi \cdot 3.63 + \frac{\pi}{3} 3.63^3 \approx 61.6$$

mert:

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{így} \quad \mathrm{sh}2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \approx 3.63 \quad \text{és} \quad \mathrm{sh}0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 .$$

215. Példa: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$ **cikloisznak az** x**-tengely körül való megforgatásakor keletkező forgástest térfogatát.**

Megoldás: Mivel $x_t' = r(1 - \cos t)$, így:

$$\mathbf{V} = \pi \int_0^{2\pi} [r(1 - \cos t)]^2 r(1 - \cos t) dt = r^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = r^3 \pi \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt =$$

$$= r^3 \pi \left(\mathbf{I}_1 - 3\mathbf{I}_2 + 3\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4\right)$$

Integráljunk tagonként:

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = (2\pi - 0) = 2\pi ,$$

$$\mathbf{I}_2 = \int_0^{2\pi} \cos t dt = \sin t\Big|_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0 ,$$

$$\mathbf{I}_3 = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t dt = \left| \begin{matrix} 2t = u \\ dt = \frac{du}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \cos u du =$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi + \frac{1}{4} \sin u\Big|_0^{4\pi} = \pi + \frac{1}{4}(\sin 4\pi - \sin 0) = \pi + 0 = \pi ,$$

$$\mathbf{I}_4 = \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \cos t dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \cos t dt = \left| \begin{matrix} \sin t = u \\ \cos t dt = du \end{matrix} \right| = \int_0^0 (1 - u^2) du = 0 ,$$

Ekkor a keresett térfogat:

$$\mathbf{V} = r^3 \pi (2\pi - 3 \cdot 0 + 3 \cdot \pi - 0) = r^3 \pi \cdot 5\pi = 5 r^3 \pi^2 .$$

216. Példa: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, $(0 \le t \le \pi)$ **asztroidaív körülforgatásából származó forgástest térfogatát.**

Megoldás: Alkalmazzuk a megadott képletet:

$$\mathbf{V} = \pi \int_0^{\pi} \sin^6 t \cdot 3\cos^2 t(-\sin t) dt = -3\pi \int_0^{\pi} (\sin^2 t)^3 \cos^2 t \sin t dt = -3\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t \sin t dt =$$

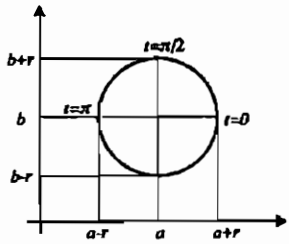
$$= \left| \begin{matrix} \cos t = u \\ -\sin t dt = du \end{matrix} \right| = 3\pi \int_1^{-1} (1 - u^2)^3 u^2 du = 3\pi \int_1^{-1} (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) u^2 du =$$

$$=3\pi\int_{1}^{-1}\left(u^2-3u^4+3u^6-u^8\right)du=3\pi\left(\frac{u^3}{3}-3\frac{u^5}{5}+3\frac{u^7}{7}-\frac{u^9}{9}\right)\Bigg|_{1}^{-1}=$$

$$=3\pi\left(\frac{-1}{3}+\frac{3}{5}-\frac{3}{7}+\frac{1}{9}\right)-3\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right)=3\pi\left(\frac{-2}{3}+\frac{6}{5}-\frac{6}{7}+\frac{2}{9}\right)=3\pi\frac{-32}{315}=-\frac{32}{105}\pi.$$

A negatív előjel azért van, mert a paraméter növekedésének irányában az abszcissza csökken.

217. Példa: Határozzuk meg az $\begin{cases} x=a+r\cos t \\ y=b+r\sin t \end{cases}$ **paraméteres egyenletekkel adott kör** x**-tengely körüli forgatásával keletkezett tórusz térfogatát.**



Megoldás: Mivel $x_t'=-r\sin t$, így a megadott képlet alapján:

$$\mathbf{V}=-\pi\int_{0}^{\pi}(b+r\sin t)^2(-r\sin t)dt-\pi\int_{\pi}^{2\pi}(b+r\sin t)^2(-r\sin t)dt=$$

$$=r\pi\int_{0}^{\pi}\left(b^2+2rb\sin t+r^2\sin^2 t\right)\sin t\,dt+r\pi\int_{\pi}^{2\pi}\left(b^2+2rb\sin t+r^2\sin^2 t\right)\sin t\,dt=$$

$$=r\pi\int_{0}^{\pi}\left(b^2\sin t+2rb\frac{1-\cos 2t}{2}+r^2\left(1-\cos^2 t\right)\sin t\right)dt+$$

$$+r\pi\int_{\pi}^{2\pi}\left(b^2\sin t+2rb\frac{1-\cos 2t}{2}+r^2\left(1-\cos^2 t\right)\sin t\right)dt=$$

$$=-r\pi b^2\cos t\Big|_0^{\pi}+r^2\pi bt\Big|_0^{\pi}-\frac{r^2\pi b}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi}-r^3\pi\cos t\Big|_0^{\pi}+\frac{r^3\pi}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\pi}-$$

$$-r\pi b^2\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi}+r^2\pi bt\Big|_{\pi}^{2\pi}-\frac{r^2\pi b}{2}\sin 2t\Big|_{\pi}^{2\pi}-r^3\pi\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi}+\frac{r^3\pi}{3}\cos^3 t\Big|_{\pi}^{2\pi}=$$

$$=-r\pi b^2(-1-1)+r^2\pi b\pi-\frac{r^2\pi b}{2}\cdot 0-r^3\pi(-1-1)+\frac{r^3\pi}{3}(-1-1)-r\pi b^2(1+1)+r^2\pi b\pi-$$

$$-\frac{r^2\pi b}{2}\cdot 0-r^3\pi(1+1)+\frac{r^3\pi}{3}(1+1)=$$

$$=2r\pi b^2+r^2\pi^2 b+2r^3\pi-\frac{2r^3\pi}{3}-2r\pi b^2+r^2\pi^2 b-2r^3\pi+\frac{2r^3\pi}{3}=2br^2\pi^2\,.$$

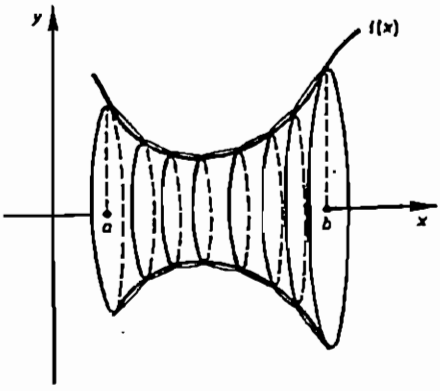
FELADATOK:

308. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x=t^2+\ln t \\ y=t^2-\ln t \end{cases}$, $(1\le t\le e)$ **görbeív** x**-tengely körül való forgatásával előálló forgástest térfogatát.**

309. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x=\cos t+\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} \\ y=\sin t \end{cases}$, $\left(\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ **görbeív** x**-tengely körül való forgatásával előálló forgástest térfogatát.**

8.4. Forgástestek palástjának felszíne

Ha az $y = f(x)$ görbeívet $(a \le x \le b)$ az x-tengely körül megforgatjuk, akkor a görbe egy forgástest palástját írja le. Ennek felszíne kiszámítható a határozott integrál segítségével. Ha az $y = f(x)$ függvény differenciálhányadosa az $[a,b]$ intrevallumon folytonos, akkor az így előálló forgástest palástjának felszíne az eddig említett mindhárom alakban megadható.



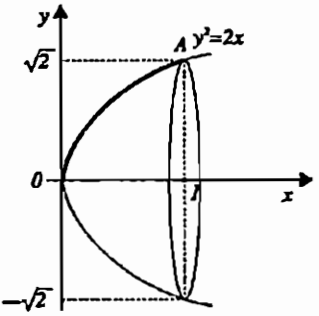
8.4.1. Forgástest palástjának felszíne a derékszögű koordináta-rendszerben

Ha az $y = f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon nemnegatív és folytonos a differenciálhányadosa, akkor a görbeív x-tengely körül való megforgtásával előálló forgástest palástjának felszínét az

$$F = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

képlettel számíthatjuk ki.

218. Példa: Számítsuk ki az $1m$ mély és $D=2\sqrt{2}m$ átmérőjű parabolikus tükör palástjának felszínét.



Megoldás: Ha $D=2\sqrt{2}m$ akkor az $A(1,\sqrt{2})$ pont a parabola pontja, vagyis a parabola egyenlete:

$y^2=2px$

$2=2\cdot p\cdot 1 \Rightarrow p=1$

tehát a parabola egyenlete amelyet meg kell forgatni az x-tengely körül: $y^2=2x$.

Innen $y=\pm\sqrt{2x}$, de elegendő a pozitív előjelű ágat megforgatni.

Ekkor: $y'=\sqrt{2}\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

A keresett palást felszíne tehát:

$$\mathbf{F}=2\pi\int_0^1\sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=2\pi\int_0^1\sqrt{2x}\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}dx=2\pi\int_0^1\sqrt{2x+1}dx=\left|\begin{matrix}2x+1=t\\ dx=\frac{dt}{2}\end{matrix}\right|=2\pi\int_1^3\sqrt{t}\frac{dt}{2}=$$

$$=\pi\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^3=\frac{2\pi}{3}t\sqrt{t}\Bigg|_1^3=\frac{2\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)m^2.$$

219. Példa: Határozzuk meg az $x^2+(y-b)^2=a^2$ kör x-tengely körüli forgatásával előálló tórusz felszínét, ha $b>a$.

Megoldás: Fejezzük ki az adott egyenletből explicit az y változót:

$$x^2+(y-b)^2=a^2$$

$$y-b=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y=b\pm\sqrt{a^2-x^2} \quad \Rightarrow \quad y'=\pm\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\mp\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Ekkor a keresett felszín:

$$\mathbf{F}=2\cdot 2\pi\int_0^a\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx+2\cdot 2\pi\int_0^a\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx=$$

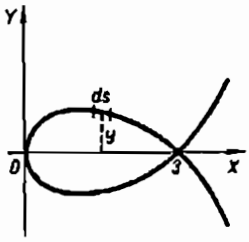
$$=4\pi\int_0^a\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+4\pi\int_0^a\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=4\pi\int_0^a\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}}+a+\frac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}}-a\right)dx=8ab\pi\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{8ab\pi}{a}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{a}=t\\ dx=adt\end{array}\right|=8b\pi\int_0^1\frac{adt}{\sqrt{1-t^2}}=8ab\pi\arcsin t\Big|_0^1=8ab\pi(\arcsin 1-\arcsin 0)=$$

$$=8ab\pi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=4ab\pi^2\ .$$

220. Példa: Határozzuk meg a $9y^2=x(3-x)^2$ görbe által bezárt hurok x-tengely körül való megforgatásával előálló forgástest palástjának felszínét.



Megoldás: A hurok a $0 \le x \le 3$ intervallumon keletkezik, felső ágának egyenlete:

$$y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+(y')^2} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$

Ekkor a keresett felszín:

$$\mathbf{F} = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{\pi}{3}\int_0^3 (2x - x^2 + 3)dx = \frac{\pi}{3}\left(x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{\pi}{3}(9-9+9) = 3\pi .$$

FELADATOK:

310. Feladat: Számítsuk ki az $y = \sqrt{x}$, $1 \le x \le 4$ görbeívnek az x-tengely körül való megforgatásakor előálló forgástest palástjának felszínét.

311. Feladat: Számítsuk ki az $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ görbeívnek az x-tengely körül való megforgatásakor előálló forgástest palástjának felszínét.

312. Feladat: Számítsuk ki az $y = \mathrm{tg}x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ görbeívnek az x-tengely körül való megforgatásakor előálló forgástest palástjának felszínét.

313. Feladat: Számítsuk ki az $y = e^{-x}$, $0 \le x \le +\infty$ görbeívnek az x-tengely körül való megforgatásakor előálló forgástest palástjának felszínét.

314. Feladat: Számítsuk ki az $y = a\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, $0 \le x \le a$ görbeívnek az x-tengely körül való megforgatásakor előálló forgástest palástjának felszínét.

8.4.2. Forgástest palástjának felszíne a poláris koordináta-rendszerben

Ha a $\rho = \rho(\varphi)$ polárkoordinátákkal adott görbe $\varphi \in [\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ intervallumhoz tartozó ívét megforgatjuk a polártengely körül, akkor az előálló forgástest palástjának felszínét kiszámíthatjuk a

$$F = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} \sin \varphi d\varphi$$

képlettel, ha a $\rho = \rho(\varphi)$ függvénynek folytonos a differenciálhányadosa az $[a, b]$ zárt intervallumon.

221. Példa: Számítsuk ki az R sugarú gömb felszínét.

Megoldás: A poláris koordináta-rendszerben a kör egyenlete $\rho = R$. Ha ezt a kört megforgatjuk a polártengely körül, R sugarú gömböt kapunk. A fenti képlet alapján, ennek felszíne a következőképen számítható ki:

$$F = 2\pi \int_0^{\pi} R\sqrt{R^2 + 0} \sin \varphi d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} R^2 \sin \varphi d\varphi = 2R^2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = -2R^2\pi \cos \varphi \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -2R^2\pi(-1-1) = 4R^2\pi.$$

FELADATOK:

315. Feladat: Határozzuk meg a $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ polárkoordinátákkal adott görbe polártengely körül való megforgatásával előálló forgástest palástjának felszínét.

316. Feladat: Határozzuk meg a $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$ polárkoordinátákkal adott görbe polártengely körül való megforgatásával előálló forgástest palástjának felszínét.

8.4.3. Forgástest palástjának felszíne paraméteres alakban

Legyen adott az $y = f(x)$ *függvény paraméteres egyenleteivel:* $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$.

Forgassuk meg az adott függvényt az x-tengely körül, a következő feltételek mellett:

a) az $x = \varphi(t)$ *függvénynek pozitív és folytonos az első differenciálhányadosa a* $[t_1, t_2]$ *intervallumon*

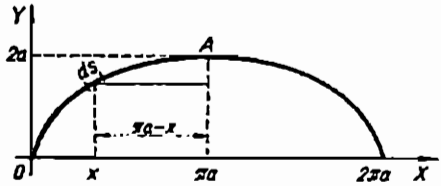
b) az $y = \psi(t)$ *függvény nemnegatív és folytonos az első differenciálhányadosa a* $t \in [t_1, t_2]$ *intervallumon,*

akkor az előálló forgástest palástjának felszínét az

$$\mathbf{F} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$$

képlet alapján számíthatjuk ki.

222. Példa: Határozzuk meg az $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ **cikloisz egy ívének az** x**-tengely körül való megforgatásakor előálló forgástest palástjának felszínét.**



Megoldás:

$x = a(t - \sin t) \Rightarrow x' = a(1 - \cos t)$

$y = a(1 - \cos t) \Rightarrow y' = a \sin t$

Ekkor a képlet alapján a keresett felszín:

$$F = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2a^2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = 2a^2\pi\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\,dt =$$

$$= 4a^2\pi \int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \left|\begin{matrix}\cos\frac{t}{2} = u \\ -\sin\frac{t}{2}dt = 2du\end{matrix}\right| = -16a^2\pi\int_1^{-1}(1-u^2)\,du = -16a^2\pi\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^{-1} = -16a^2\pi\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) =$$

$$-16a^2\pi\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{3}a^2\pi\ .$$

FELADATOK:

317. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = e^t\sin t \\ y = e^t\cos t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ **görbeívnek az** x**-tengely körül való megforgatásakor előálló forgástest palástjának felszínét.**

318. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = \cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} \\ y = \sin t \end{cases}$, $\frac{\pi}{2} \le t \le t_0$ **görbeívnek az** x**-tengely körül való megforgatásakor előálló forgástest palástjának felszínét.**

319. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$, $0 \le x \le 2\pi$ **cikloisz egy ívének az** x**-tengely körül való megforgatásakor előálló forgástest palástjának felszínét.**

320. Feladat: Számítsuk ki az $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ **kardioisz** x**-tengely körül való megforgatásakor előálló forgástest palástjának felszínét.**

Ezekből $d^2z = (2+2\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2 = (2+2\lambda)(dx^2+dy^2)$.

Vizsgáljuk most meg ennek a differenciálnak az előjelét az A és B pontokban:

$d^2z_{(A)} = (2+2)(dx^2+dy^2) = 4(dx^2+dy^2) > 0$ $\Rightarrow$ az $A(3,-4)$ pontban a függvénynek feltételes minimuma van,

$d^2z_{(B)} = (2-6)(dx^2+dy^2) = -4(dx^2+dy^2) < 0$ $\Rightarrow$ a $B(-3,4)$ pontban a függvénynek feltételes maximuma van.

A feltételes minimum és maximum értékek:

$z_{\min}(3,-4) = 9+16-36-64 = -75$

és

$z_{\min}(-3,4) = 9+16+36+64 = 125$.

FELADATOK:

366. Feladat: Keressük meg a $z(x,y) = x^2 - y^2$ függvény szélső értékeit az $x^2+y^2 \le 4$ körön.

367. Feladat: Keressük meg a $z(x,y) = a\cos^2 x + b\cos^2 y$ függvény szélső értékeit az $y = x + \frac{\pi}{4}$ feltétel mellett.

368. Feladat: Keressük meg a $z(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ függvény szélső értékeit az $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ feltétel mellett.

369. Feladat: Keressük meg a $z(x,y) = xy$ függvény szélső értékeit az $x+y=1$ feltétel mellett.

370. Feladat: Keressük meg a $z(x,y) = x^2+y^2$ függvény szélső értékeit az $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ feltétel mellett.

10. Differenciálegyenletek

A természetben bizonyos fizikai problémák megoldása matematikai szempontból egy-egy függvény meghatározását teszi szükségessé. Ez akkor lehetséges, ha az ismeretlen függvényre fel tudunk írni egy olyan egyenletet, amelyet annak ke kell elégítenie. Az ilyen egyenletekben szerepelhetnek az ismeretlen függvényen kívül az ismeretlen függvény differenciálhányadosai, a független változó és konstansok. Az ilyen egyenleteket *differenciálegyenleteknek* nevezzük. Ha meghatározzuk egy ilyen differenciálegyenlet megoldását, abban még szerepelhet egy tetszőlegesen választható konstans, amelynek monden értéke mellett olyan függvényt kapunk, amely a differenciálegyenletet kielégíti. Az ilyen megoldást a differenciálegyenlet *általános megoldásának* nevezzük, a konstans különböző értékeihez tartozó megoldásokat pedig *partikuláris megoldásoknak.* Lehetnek a differenciálegyenletnek olyan megoldásai is, amelyek nem kaphatók meg az általános megoldásból. Ezeket *szinguláris megoldásoknak* nevezzük.

Az olyan differenciálegyenleteket amelyekben az ismeretlen függvénynek csak az első differenciálhányadosa szerepel, *elsőrendű differenciálegyenleteknek* nevezzük, míg azokat a differenciálegyenleteket amelyekben az ismeretlen függvény második differenciálhányadosa is szerepel, *másodrendű differenciálegyenleteknek* nevezzük.

A következőkben a legegyszerűbb első- és másodrendű differenciálegyenletek általános megoldásának meghatározásával ismerkedünk meg. Mivel a kiragadott differenciálegyenletekkel elsősorban a differenciál- és integrálszámítás egy további alkalmazási területét kívánjuk bemutatni, és távolról sem akarjuk a differenciálegyenletek elméletét kifejteni, ezért eltekintünk attól, hogy a megoldások során alkalmazott műveletek jogosságánal pontos feltételeit megfogalmazzuk. Mindig feltételezni fogjuk, hogy ezek a feltételek teljesülnek. Ezt megtehetjük azért is, mert egy differenciálegyenlet megoldásának helyességéről behelyettesítéssel minden esetben nagyon könnyen meggyőződhetünk.

Definíció: *Az* $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ *egyenletet ahol F megadott függvény,* $y = y(x)$ *pedig a keresett ismeretlen függvény (x a független változó), differenciálegyenletnek nevezzük. Azt az* $y = y(x)$ *függvényt, amely a saját deriváltjaival kielégíti az adott egyenletet, a differenciálegyenlet megoldásának nevezzük. Ha a megoldás* $\phi(x, y) = 0$ *implicit alakban adott, akkor leginkább az adott differenciálegyenlet integráljának nevezzük.*

10.1. Elsőrendű differenciálegyenletek

Az elsőrendű differenciálegyenletben az ismertlen függvény (y), *annak első differenciálhányadosa* $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$, *a független változó* (x) *és konstansok szerepelhetnek, ezért általánosan felvehető*

$$F(x, y, y') = 0$$

alakban. Ha ebből az egyenletből kifejezzük y'*-et, akkor az elsőrendű differenciálegyenlet explicit alakját kapjuk:*

$$y' = f(x, y),$$

amelyben y'*-et* $\frac{dy}{dx}$*-el helyettesítve*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

alakra is hozhatjuk a differenciálegyenletet. A felsorolt alakok közül mindig azt használjuk, amelyik a mogoldás szempontjából előnyösebb számunkra.

10.1.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Általános alak: $y' = f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$

Megoldás: *Szétválasztjuk a tényezőket az egyenlet két különböző oldalára változók szerint, majd mindkét oldalt integráljuk:* $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int \frac{dx}{f_1(x)}$.

251. Példa: Határozzuk meg az $yy' - x = 0$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

Megoldás: Rendezzük át az adott egyenletet, majd alkalmazzuk az $y' = \frac{dy}{dx}$ helyettesítést.

$$yy' = x$$

$$y\frac{dy}{dx} = x$$

válasszuk szét a változókat az egyenlet két különböző oldalára:

$$ydy = xdx$$

integráljuk most mindkét oldalt:

$$\int y dy = \int x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 = x^2 + 2c$$

ebből y explicit kifejezhető, tehát az adott differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{1/2} = \pm\sqrt{x^2 + c_1} \quad .$$

252. Példa: Határozzuk meg az $y(x^2-1)y' = -x(y^2-1)$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Vezessük be először az $y' = \frac{dy}{dx}$ helyettesítést. Ekkor:

$$y(x^2-1)\frac{dy}{dx} = -x(y^2-1)$$

válasszuk szét a változókat az egyenlet két különböző oldalára:

$$\frac{y}{y^2-1}dy = -\frac{x}{(x^2-1)}dx$$

integráljuk most mindkét oldalt:

$$\int \frac{y}{y^2-1}dy = -\int \frac{x}{x^2-1}dx$$

$$y^2 - 1 = t \qquad x^2 - 1 = z$$

$$2ydy = dt \qquad 2xdx = dz$$

$$ydy = \frac{dt}{2} \qquad xdx = \frac{dz}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}$$

$$\int \frac{dt}{t} = -\int \frac{dz}{z}$$

$$\ln|t| = -\ln|z| + \ln c$$

$$\ln|y^2-1| = \ln\frac{c}{|x^2-1|}$$

$$|y^2-1| = \frac{c}{|x^2-1|}$$

innen az adott differenciálegyenlet általános megoldása implicit alakban:

$$\left|y^2-1\right|\left|x^2-1\right|=c.$$

253. Példa: Határozzuk meg az $y'=\dfrac{-x-xy}{y+xy}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Vezessük be az $y'=\dfrac{dy}{dx}$ helyettesítést és bontsuk tényezőkre az egyenlet jobb oldalát:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x(1+y)}{y(1+x)}$$

válasszuk szét a változókat:

$$\frac{ydy}{1+y}=-\frac{xdx}{1+x}$$

integráljuk most az egyenletet:

$$\int\frac{ydy}{1+y}=-\int\frac{xdx}{1+x}$$

innen

$$\int\frac{y+1-1}{1+y}dy=-\int\frac{x+1-1}{1+x}dx$$

$$\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=-\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\int dy-\int\frac{dy}{1+y}=-\int dx+\int\frac{dx}{1+x}$$

ebből kapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y-\ln|1+y|=-x+\ln|1+x|+c$$

vagy más elrendezésben:

$$y+x-c=\ln|1+x|+\ln|1+y|.$$

254. Példa: Határozzuk meg az $y'^2+y^2-1=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Ebből a differenciálegyenletből előbb ki kell fejezni y'-et:

$$y'^2 = 1 - y^2$$

$$y' = \pm\sqrt{1-y^2}$$

most vezessük be az $y' = \frac{dy}{dx}$ helyettesítést:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y^2}$$

válasszuk szét a változókat:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx$$

integráljuk most az egyenletet:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm \int dx$$

oldjuk meg az integrálokat:

$$\arcsin y = \pm x + c$$

fejezzük ki ebből explicit az y függvényt, illetve a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y_{1/2} = \sin(c \pm x).$$

255. Példa: Határozzuk meg az $\mathrm{tg}x \sin^2 y dx + \cos^2 x \mathrm{ctg} y dy = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Rendezzük el az adott egyenletet:

$$\mathrm{tg}x \sin^2 y dx = -\cos^2 x \mathrm{ctg} y dy$$

$$\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x} dx = -\frac{\mathrm{ctg}y}{\sin^2 y} dy$$

$$\int \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{\mathrm{ctg}y}{\sin^2 y} dy$$

$$\mathrm{tg}x = t \qquad \mathrm{ctg}y = z$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt \qquad \frac{-dy}{\sin^2 y} = dz$$

$$\int t dt = \int z dz$$

$$\frac{t^2}{2} + c = \frac{z^2}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2 x + 2c = \mathrm{ctg}^2 y$$

a differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + c_1 .$$

256. Példa: Határozzuk meg az $y - xy' = a(1 + x^2 y')$ differenciálegyenlet azon partikuláris megoldását amely kielégíti az $y(1) = 1$ kezdeti feltételt.

Megoldás: Határozzuk meg előbb az egyenlet általános megoldását:

$$y - xy' = a + ax^2 y'$$

$$y - a = y'(ax^2 + x)$$

$$y - a = \frac{dy}{dx}(ax^2 + x)$$

$$\frac{dx}{ax^2 + x} = \frac{dy}{y - a}$$

$$\int \frac{dy}{y - a} = \int \frac{dx}{x(ax + 1)}$$

a bal oldali integrál egyszerű helyettesítéssel oldható meg, és $\ln|y - a|$-val egyenlő, míg a jobb oldali integrál racionális függvény integrálja, és parciális törtekre bontással lehet megoldani:

$$\frac{1}{x(ax+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{ax+1}$$

$$1 = A(ax+1) + Bx$$

$$1 = Aax + A + Bx$$

$$1 = (Aa + B)x + A$$

$$Aa + B = 0$$

$$A = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -a$$

$$\frac{1}{x(ax+1)} = \frac{1}{x} - \frac{a}{ax+1}$$

folytassuk most az integrálást:

$$\ln|y - a| = \int \frac{dx}{x} - a\int \frac{dx}{ax+1}$$

$$ax + 1 = t$$

$$adx = dt$$

$$\ln|y-a| = \ln|x| - \int \frac{dt}{t}$$

$$\ln|y-a| = \ln|x| - \ln|t| + \ln c$$

$$\ln|y-a| = \ln\left|\frac{cx}{t}\right|$$

innen az egyenlet általános megoldása:

$$y-a = \frac{cx}{ax+1}$$

$$y = \frac{cx}{ax+1} + a.$$

A keresett partikuláris megoldást úgy kapjuk meg, hogy az általános megoldásba behelyettesítjük a kezdeti feltételt, meghatározzuk az ismeretlen c állandó értékét, és azt visszahelyettesítjük az általános megoldásba:

$$1 = \frac{c}{a+1} + a$$

$$c = (1-a)(a+1)$$

$$c = 1-a^2$$

illetve a differenciálegyenlet partikuláris megoldása:

$$y = \frac{(1-a^2)x}{ax+1} + a.$$

FELADATOK:

371. Feladat: Határozzuk meg az $y(x+1)dy - x^3(y+1)dx = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

372. Feladat: Határozzuk meg az $yy' = x^2y + 4y - x^2 - 4$ differenciálegyenlet általános megoldását.

373. Feladat: Határozzuk meg az $\sqrt{25-x^2} \cdot \cos^2 y \cdot y' = 1$ differenciálegyenlet általános megoldását.

374. Feladat: Határozzuk meg az $(2e^{2x} - 3e^x + 1)(2y+4)y' = (2y^2 + 8y)(3 - 4e^x)$ differenciálegyenlet általános megoldását.

375. Feladat: Határozzuk meg az $y' = xy - y + 2x - 2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

376. Feladat: Határozzuk meg az $x^2(1-y)y' + y^2 + xy^2 = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

377. Feladat: Határozzuk meg az $\sin \ln y = \frac{xy}{(x^2+1)y'}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

378. Feladat: Határozzuk meg az $xy' + y = 2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

379. Feladat: Határozzuk meg az $e^y(y'+1) = 1$ differenciálegyenlet általános megoldását.

380. Feladat: Határozzuk meg a $2y' \arcsin y = \sqrt{1-y^2}$ differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely kielégíti az $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ kezdeti feltételt.

381. Feladat: Határozzuk meg a $2y = xy'(x^2+1)$ differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely kielégíti az $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 2$ feltételt.

382. Feladat: Határozzuk meg a $(1+e^x)\cdot y \cdot y' = e^x$ differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely kielégíti az $x = 0$, $y = 1$ kezdeti feltételt.

383. Feladat: Határozzuk meg a $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$ differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely kielégíti az $x = 0$, $y = 1$ kezdeti feltételt.

384. Feladat: Határozzuk meg a $y' \sin x = y \ln y$ differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely kielégíti az $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$ kezdeti feltételt.

385. Feladat: Határozzuk meg a $e^y(y'+1) = 1$ differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely kielégíti az $y(0) = \ln 2$ kezdeti feltételt.

10.1.2. Homogén differenciálegyenletek

Általános alak: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Megoldás: $\frac{y}{x} = t \quad \Rightarrow \quad y = xt \quad \Rightarrow \quad y' = t + xt'$

helyettesítéssel visszavezethető szétválasztható differenciálegyenletre.

257. Példa: Határozzuk meg az $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az egyenlet nem szétválasztható a $\sqrt{x^2 + y^2}$ kifejezés miatt. Megmutatható viszont, hogy *homogén* típusú ha elosztjuk az egyenletet x-el:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad / : x$$

ekkor

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}},$$

illetve

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

amely alakból látszik, hogy az egyenlet *homogén* típusú. Vezessük be tehát a fent megadott helyettesítéseket, majd rendezzük az így kapott egyenletet:

$$t + xt' = t + \sqrt{1 + t^2}$$

$$xt' = \sqrt{1 + t^2}$$

$$x\frac{dt}{dx} = \sqrt{1 + t^2}$$

ez az egyenlet már szétválasztható változójú:

$$\frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

mindkét oldalon táblázati integrál szerepel:

$$\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| = \ln|x| + \ln c$$

$$\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| = \ln|cx|$$

$$t+\sqrt{1+t^2} = cx$$

térjünk vissza az eredeti változókra:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = cx$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = cx$$

$$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = cx$$

ahonnan x-szel szorozva az egyenletet megkaphatjuk az általános megoldást:

$$y+\sqrt{x^2+y^2} = cx^2.$$

258. Példa: Határozzuk meg az $(x^2+y^2)y' = 2xy$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az egyenlet homogén, mert az (x^2+y^2) nem választható szét:

$$(x^2+y^2)y' = 2xy$$

$$\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)y' = 2\frac{y}{x}$$

$$\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)y' = 2\frac{y}{x}$$

$$(1+t^2)(t+xt') = 2t$$

$$xt' = \frac{2t}{1+t^2}-t$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{2t-t-t^3}{1+t^2}$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$$

$$\frac{1+t^2}{t(1-t)(1+t)}dt=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1+t^2}{t(1-t)(1+t)}dt=\int\frac{dx}{x}$$

A bal oldali integrált parciális összeadandókra bontással lehet megoldani:

$$\frac{1+t^2}{t(1-t)(1+t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1-t}+\frac{C}{1+t}$$

$$1+t^2=A(1-t^2)+Bt(1+t)+Ct(1-t)$$

$$1+t^2=A-At^2+Bt+Bt^2+Ct-Ct^2$$

$$1+t^2=(-A+B-C)t^2+(B+C)t+A$$

innen:

$$-A+B-C=1$$

$$B+C=0 \quad\Rightarrow\quad C=-B$$

$$A=1$$

$$-1+B+B=1$$

$$2B=2$$

$$B=1 \quad\Rightarrow\quad C=-1$$

A parciális felbontás tehát $\frac{1+t^2}{t(1-t)(1+t)}=\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}$, az integrálást tehát a következőképpen folytathatjuk:

$$\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{1-t}-\int\frac{dt}{1+t}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|t|-\ln|1-t|-\ln|1+t|=\ln|x|+\ln c$$

$$\ln\left|\frac{t}{1-t^2}\right|=\ln|cx|$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}=cx$$

$$\frac{yx^2}{x(x^2-y^2)}=cx$$

innen az általános megoldás:

$$y=c(x^2-y^2).$$

259. Példa: Határozzuk meg az $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Könnyen megmutatható, hogy az egyenlet *homogén* típusú:

$$xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x}\ln\frac{x+y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

a helyettesítés tehát:

$$\frac{y}{x} = t \quad \Rightarrow \quad y' = t + xt'$$

$$t + xt' = t + (1+t)\ln(1+t)$$

$$x\frac{dt}{dx} = (1+t)\ln(1+t)$$

$$\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln(1+t) = z$$

$$\frac{dt}{1+t} = dz$$

$$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln c$$

$$z = cx$$

$$\ln(1+t) = cx$$

$$1 + \frac{y}{x} = e^{cx}$$

innen pedig az általános megoldás:

$$y = x\left(e^{cx} - 1\right).$$

260. Példa: Mutassuk meg, hogy a $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$ differenciálegyenlet az $y = z^m$ helyettesítéssel homogén differenciálegyenletre vezethető vissza, majd határozzuk meg az általános megoldását.

Megoldás: Ha $y = z^m$ akkor $y' = m z^{m-1} z'$, az egyenlet a helyettesítés után tehát a következőképpen alakul:

$$2x^4 z^m m z^{m-1} z' + z^{4m} = 4x^6$$

$$2mx^4 z^{2m-1} z' = 4x^6 - z^{4m}$$

$$z' = \frac{4x^6 - z^{4m}}{2mx^4 z^{2m-1}}$$

$$z' = \frac{2}{m}\frac{x^2}{z^{2m-1}} - \frac{1}{2m}\frac{z^{2m+1}}{x^4}$$

ahhoz, hogy az egyenlet *homogén* típusú legyen, teljesülnie kell a következő két feltételnek:

$2m - 1 = 2$

$2m + 1 = 4$

$$2m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow y = z^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y^2 = z^3.$$

Az $m = \frac{3}{2}$ értékre az egyenlet a következőképpen alakul:

$$z' = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}\right)^4$$

ahonnan lekövetkeztethető, hogy az egyenlet valóban *homogén* típusú. A helyettesítés:

$$\frac{z}{x} = t \Rightarrow z = t + xt'$$

$$t + xt' = \frac{4}{3t^2} - \frac{t^4}{3}$$

$$xt' = \frac{4 - t^6 - 3t^3}{3t^2}$$

$$x\frac{dt}{dx} = -\frac{t^6 + 3t^3 - 4}{3t^2}$$

$$\frac{3t^2}{t^6 + 3t^3 - 4}dt = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{3t^2}{t^6 + 3t^3 - 4}dt = -\int \frac{dx}{x}$$

$$t^3 = s$$

$$3t^2 dt = ds$$

$$\int \frac{dz}{s^2 + 3s - 4} = -\ln|x| + \ln c$$

$$\int \frac{dz}{(s-1)(s+4)} = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

Parciális törtekre bontással megmutatható, hogy $\frac{1}{(s-1)(s+4)} = \frac{1}{5(s-1)} - \frac{1}{5(s+4)}$, tehát:

$$\frac{1}{5}\int \frac{dz}{s-1} - \frac{1}{5}\int \frac{dz}{s+4} = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\frac{1}{5}\ln\left|\frac{s-1}{s+4}\right| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\frac{t^3-1}{t^3+1} = \left(\frac{c}{x}\right)^5$$

$$\frac{\frac{z^3}{x^3}-1}{\frac{z^3}{x^3}+4} = \frac{c_1}{x^5}$$

$$\frac{z^3-x^3}{z^3+4x^3}\cdot x^5 = c_1$$

Térjünk vissza az $y^2 = z^3$ helyettesítésre:

$$x^5 \cdot \frac{y^2-x^3}{y^2+4x^3} = c_1$$

az adott egyenlet általános megoldása.

FELADATOK:

386. Feladat: Határozzuk meg az $(x-y)ydx - x^2dy = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldását.

387. Feladat: Határozzuk meg az $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ homogén differenciálegyenlet általános megoldását.

389. Feladat: Határozzuk meg az $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ homogén differenciálegyenlet általános megoldását.

390. Feladat: Határozzuk meg az $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ **homogén differenciálegyenlet általános megoldását.**

392. Feladat: Határozzuk meg az $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}$ **homogén differenciálegyenlet általános megoldását.**

393. Feladat: Határozzuk meg az $xy' = y(1 - \ln y + \ln x)$ **homogén differenciálegyenlet általános megoldását.**

394. Feladat: Határozzuk meg az $xy' \cos\frac{y}{x} + x - y\cos\frac{y}{x} = 0$ **homogén differenciálegyenlet általános megoldását.**

395. Feladat: Határozzuk meg az $y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ **homogén differenciálegyenlet általános megoldását.**

396. Feladat: Határozzuk meg az $8y + 10x + (5y + 7x)y' = 0$ **homogén differenciálegyenlet általános megoldását.**

397. Feladat: Határozzuk meg az $xy^2 y' = x^3 + y^3$ **homogén differenciálegyenlet általános megoldását.**

398. Feladat: Határozzuk meg az $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$ **homogén differenciálegyenlet általános megoldását.**

399. Feladat: Határozzuk meg az $y' = \frac{x}{2\sqrt{x^2 - y^2}}$ **homogén differenciálegyenlet általános megoldását.**

400. Feladat: Határozzuk meg az $(x^2 + 2xy)y' = y^2 - 2xy$ **homogén differenciálegyenlet általános megoldását.**

10.1.3. Homogénre visszavezethető differenciálegyenletek

Általános alak: $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$

Megoldás: *Ha* $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax+by=t$ *helyettesítéssel visszavezethető szétválasztható differenciálegyenletre.*

Ha $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} x=u+\alpha \\ y=v+\beta \end{matrix}$ *helyettesítéssel visszavezethető homogén differenciálegyenletre, ahol az* α *és* β *értékeket úgy választjuk, hogy a szabad tagokat eliminájuk.*

261. Példa: Határozzuk meg a $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

Megoldás: Mutassuk meg, hogy az adott differenciálegyenlet felírható az adott általános alakban:

$$(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$$

$$\frac{2x+y+1}{4x+2y-3}=\frac{dy}{dx}$$

$$y'=\frac{2x+y+1}{4x+2y-3}.$$

Számítsuk ki most a megadott determinánst:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4-4=0 \Rightarrow 2x+y=t \Rightarrow y=t-2x \Rightarrow y'=t'-2.$$

Vezessük be a helyettesítéseket:

$$t'-2=\frac{t+1}{2t-3}$$

$$t'=\frac{t+1+4t-6}{2t-3}$$

$$t'=\frac{5t-5}{2t-3}$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{5t-5}{2t-3}.$$

Ebből az alakból már látszik, hogy az egyenlet szétválasztható változók szerint:

$$\frac{2t-3}{5(t-1)}dt = dx$$

$$\int \frac{2t-3}{t-1}dt = 5\int dx$$

$$\int \frac{2t-2-1}{t-1}dt = 5x+c$$

$$\int 2dt - \int \frac{dt}{t-1} = 5x+c$$

$$2t - \ln|t-1| = 5x+c\,.$$

Térjünk vissza az eredeti változókra:

$$2(2x+y) - \ln|2x+y-1| = 5x+c$$

$$4x+2y-5x-\ln|2x+y-1| = c$$

ahonnan az eredeti differenciálegyenlet keresett általános megoldása:

$$2y-x-\ln|2x+y-1| = c\,.$$

262. Példa: Határozzuk meg az $y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Ellenőrizzük le a determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x+y=t \quad \Rightarrow \quad y=t-x \quad \Rightarrow \quad y'=t'-1\,.$$

A helyettesítések után:

$$t'-1 = \frac{1-3t}{1+t}$$

$$t' = \frac{1-3t+1+t}{1+t}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2-2t}{1+t}$$

$$\frac{1+t}{1-t}dt = 2dx$$

$$\int \frac{1-t+2t-2+2}{1-t}dt = 2\int dx$$

$$\int \left(1-2+\frac{2}{1-t}\right)dt = 2x+c$$

$$\int -dt + 2\int \frac{dt}{1-t} = 2x + c$$

$$-t - 2\ln|1-t| = 2x + c.$$

Térjünk vissza az eredeti változókra:

$$-x - y - 2\ln|1 - x - y| = 2x + c$$

ahonnan az általános megoldás:

$$3x + y + 2\ln|1 - x - y| = c.$$

263. Példa: Határozzuk meg az $(x+4y)y' = 2x+3y-5$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Fejezzük ki az egyenletből y'-et:

$$y' = \frac{2x+3y-5}{x+4y}$$

Számítsuk ki a determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8-3 = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = u+\alpha \\ y = v+\beta \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad y' = v' \quad , \quad \begin{matrix} y = y(x) \\ v = v(u) \end{matrix} \quad .$$

Vezessük be az adott helyettesítéseket:

$$v' = \frac{2u+2\alpha+3v+3\beta-5}{u+\alpha+4v+4\beta}$$

$$v' = \frac{2u+3v+2\alpha+3\beta-5}{u+4v+\alpha+4\beta},$$

ahol az α és β értékeket úgy kell megválasztani, hogy eliminájuk a szabad tagokat, tehát:

$$2\alpha + 3\beta - 5 = 0$$
$$\alpha + 4\beta = 0$$

$$2\alpha + 3\beta = 5$$
$$-2\alpha - 8\beta = 0$$

$$-5\beta = 5$$

$$\beta = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4$$

a helyettesítés tehát: $\begin{matrix} x = u+4 & \Rightarrow & u = x-4 \\ y = v-1 & \Rightarrow & v = y+1 \end{matrix}$,

a differenciálegyenlet a továbbiakban pedig a következőképpen alakul:

$$v' = \frac{2u + 3v \ /:u}{u + 4v \ /:u}$$

$$v' = \frac{2 + 3\frac{v}{u}}{1 + 4\frac{v}{u}}$$

ez pedig v és u szerint *homogén* differenciálegyenlet, ami azt jelenti, hogy a megfelelő helyettesítések:

$$\frac{v}{u} = t \quad \Rightarrow \quad v = ut \quad \Rightarrow \quad v' = t + ut'.$$

Vezessük be ezeket a helyettesítéseket a differenciálegyenletbe:

$$t + ut' = \frac{2 + 3t}{1 + 4t}$$

$$u\frac{dt}{du} = \frac{2 + 3t - t - 4t^2}{1 + 4t}$$

$$\frac{1 + 4t}{-4t^2 + 2t + 2}dt = \frac{du}{u}$$

$$\frac{1 + 4t}{-4\left(t^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right)}dt = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{1 + 4t}{(t-1)(t+0.5)}dt = -4\int \frac{du}{u}.$$

A bal oldali integrál racionális függvény integrálja, tehát parciális összeadandókra kell bontani:

$$\frac{1 + 4t}{(t-1)\left(t + \frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t + \frac{1}{2}}$$

$$1 + 4t = A\left(t + \frac{1}{2}\right) + B(t-1)$$

$$1 + 4t = At + \frac{A}{2} + Bt - B$$

$$1 + 4t = (A + B)t + \frac{A}{2} - B$$

innen pedig:

$$A+B=4$$

$$\frac{A}{2}-B=1$$

$$\frac{3}{2}A=5 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad B=\frac{2}{3}$$

az integrál tehát szétbontható:

$$\frac{10}{3}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t+0.5}=-4\ln|u|+\ln c$$

$$\frac{10}{3}\ln|t-1|+\frac{2}{3}\ln|t+0.5|=\ln\left|\frac{c}{u^4}\right|$$

$$5\ln|t-1|+\ln|t+0.5|=\frac{3}{2}\ln\left|\frac{c}{u^4}\right|$$

$$\ln\left|(t-1)^5(t+0.5)\right|=\ln\left|\frac{c_1}{u^6}\right|$$

$$(t-1)^5(t+0.5)=\frac{c_1}{u^6}$$

térjünk vissza a $t=\frac{v}{u}$ változókra, ekkor:

$$\left(\frac{v}{u}-1\right)^5\left(\frac{v}{u}+0.5\right)=\frac{c_1}{u^6}$$

$$\frac{(v-u)^5}{u^5}\cdot\frac{v+0.5u}{u}=\frac{c_1}{u^6}$$

$$(v-u)^5\left(v+\frac{1}{2}u\right)=c_1$$

$$(y+1-x+4)^5\left(y+1+\frac{1}{2}x-2\right)=c_1$$

az általános megoldás tehát:

$$(y-x+5)^5\left(\frac{1}{2}x+y-1\right)=c_1$$

$$(y-x+5)^5\left(\frac{x+2y-2}{2}\right)=c_1$$

$$(y-x+5)^5(x+2y-2)=2c_1$$

illetve:

$$(y-x+5)^5(x+2y-2)=c_2\ .$$

FELADATOK:

401. Feladat: Határozzuk meg az $(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

402. Feladat: Határozzuk meg az $y'=\dfrac{4x-y+7}{2x+y-1}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

403. Feladat: Határozzuk meg az $y'=\dfrac{x+7y+2}{3x+5y+6}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

404. Feladat: Határozzuk meg az $y'=\dfrac{7x-5y+45}{9x+21y+3}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

405. Feladat: Határozzuk meg az $y'=-\dfrac{8x+y+25}{7x-16y+140}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

406. Feladat: Határozzuk meg az $y'=\dfrac{y^2}{(x+y-1)^2}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

407. Feladat: Határozzuk meg az $x^2y'=(2x-y+1)^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

408. Feladat: Határozzuk meg az $y'=-\dfrac{x+y-1}{2x+2y-3}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

409. Feladat: Határozzuk meg az $y'=-\dfrac{2x+y+1}{4x+2y-1}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

410. Feladat: Határozzuk meg az $(x+y)^2y'=(x+y+2)^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

10.1.4. Lineáris differenciálegyenletek

Általános alak: $y' + p(x)y = q(x)$

Megoldás: *1. Képlettel:* $y = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$.

2. Helyettesítéssel: $y = uv$.

3. A constans variációjának módszerével.

265. Példa: Határozzuk meg az $(1-x^2)y' + xy - 1 = 0$ differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldását, amely keresztülhalad a $(0,1)$ ponton.

Megoldás: A megoldást keressük meg az *1.* módszerrel, tehát a képlet segítségével. Előbb azonban mutassuk meg, hogy az adott egyenlet lineáris típusú:

$$(1-x^2)y' + xy - 1 = 0 \quad /:(1-x^2)$$

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}.$$

Innen $p(x) = \frac{x}{1-x^2}$ és $q(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Számítsuk ki a képletben szereplő integrálokat:

$$\int p(x)dx = \int \frac{xdx}{1-x^2} = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ xdx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| = \ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int \frac{1}{1-x^2}e^{\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}dx = \int \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t \cdot \cos t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \mathrm{tg}\, t = \mathrm{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

az általános megoldás tehát :

$$y = e^{-\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\left(c + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$y = \sqrt{1-x^2}\left(c + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$y = c\sqrt{1-x^2} + x.$$

A keresett partikuláris megoldást úgy kaphatjuk meg, ha az általános megoldásba behelyettesítjük a kezdeti feltételt, a $(0,1)$ pontot, és kiszámítjuk az ismeretlen c állandó értékét:

$$1 = c\sqrt{1-0}$$

$$c = 1 \quad .$$

A kapott $c = 1$ értéket visszahelyettesítjük az általános megoldásba, így kapjuk meg a keresett partikuláris megoldást:

$$y = x + \sqrt{1-x^2}.$$

266. Példa: Határozzuk meg az $y' + y\cos x = \sin x \cdot \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az adott differenciálegyenlet lineáris típusú, ahol $p(x) = \cos x$ és $q(x) = \sin x \cos x$. Keressük most az általános megoldást a *2.* módszerrel. A helyettesítés tehát: $y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'$. Az egyenlet a következőképpen alakul:

$$u'v + uv' + uv\cos x = \sin x \cos x$$

innen

$$u'v + u(v' + v\cos x) = \sin x \cos x..$$

Válasszuk most a zárójelben levő kifejezést 0-nak (ez egy feltétel a v tényezőre):

$$v' + v\cos x = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -v\cos x \quad .$$

$$\frac{dv}{v} = -\cos x dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x dx$$

$$\ln|v| = -\sin x$$

$$v = e^{-\sin x} \quad ,$$

az első tényező esetében integráláskor nem adunk hozzá c-t, a kapott v kifejezést pedig visszahelyettesítjük az egyenletbe:

$$u'e^{-\sin x} = \sin x \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = e^{\sin x} \sin x \cos x$$

$$du = \sin x \cos x e^{\sin x} dx$$

$$\int du = \int \sin x e^{\sin x} \cos x dx$$

$$\sin x = t$$

$$\cos x dx = dt$$

$$u = \int t e^t dt$$

$$u = t \qquad dv = e^t dt$$

$$du = dt \qquad v = e^t$$

$$u = te^t - \int e^t dt$$

$$u = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + c.$$

Az általános megoldást pedig az $y = uv$ képletből kapjuk. Ebben az esetben:

$$y = e^{-\sin x}\left(\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + c\right)$$

$$y = \sin x - 1 + \frac{c}{e^{\sin x}}.$$

267. Példa: Határozzuk meg az $xy' + y - xe^x = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását a konstans variációjának módszerével.

Megoldás: Mutassuk meg előbb, hogy az egyenlet lineáris típusú:

$$xy' + y - xe^x = 0 \ / : x$$

$$y' + \frac{1}{x} y = e^x.$$

Ez a lineáris differenciálegyenlet inhomogén, mert a jobb oldalon $q(x) = e^x \neq 0$. A megfelelő homogén lineáris differenciálegyenlet:

$$y' + \frac{1}{x} y = 0,$$

innen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln c$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

ebből pedig a homogén lineáris differenciálegyenlet álatalános megoldása:

$$y = \frac{c}{x}.$$

Hogy az inhomogén részt is figyelembe vegyük, a kapott megoldásban a c állandót variáljuk úgy, hogy $c = c(x)$-et veszünk, ekkor $y = \frac{c(x)}{x}$. Visszahelyettesítve az eredeti differenciálegyenletbe:

$$\frac{c'(x)\cdot x - c(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{c(x)}{x} = e^x$$

$$\frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} = e^x$$

$$\frac{c'(x)}{x} = e^x$$

$$c'(x) = xe^x \quad /\cdot dx$$

$$\int c'(x)dx = \int xe^x dx$$

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$
$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$c(x) = xe^x - \int e^x dx$$

$$c(x) = xe^x - e^x + c.$$

Ezt a kifejezést visszahellyettesítve az $y = \frac{c(x)}{x}$ megoldásba, megkapjuk az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y = \frac{xe^x - e^x + c}{x}$$

illetve

$$y = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{c}{x}.$$

FELADATOK:

411. Feladat: Határozzuk meg az $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$, $x \neq -1$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

412. Feladat: Határozzuk meg az $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

413. Feladat: Határozzuk meg az $y' + xy - x = 0$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

414. Feladat: Határozzuk meg az $y' + 2xy = -xe^{-x^2}$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

415. Feladat: Határozzuk meg az $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

416. Feladat: Határozzuk meg az $y' \sin x + \cos x = 1 + y$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

417. Feladat: Határozzuk meg az $y' + y = \sin 2x$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

418. Feladat: Határozzuk meg az $y' + 2y = 5$ **differenciálegyenlet** $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ **kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldását.**

419. Feladat: Határozzuk meg az $y' \cos x + y \sin x = 1$ **differenciálegyenlet** $y(0) = 1$ **kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldását.**

420. Feladat: Határozzuk meg az $y' + \frac{y}{x} + e^x = 0$ **differenciálegyenlet** $y(1) = 0$ **kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldását.**

10.1.5. Bernoulli-féle differenciálegyenletek

Általános alak: $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, $\alpha \in R, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$

Megoldás: *1. Helyettesítéssel:* $y = uv$.

2. $y^{1-\alpha} = z$ *helyettesítéssel visszavezethető lineáris dif.egyenletre.*

268. Példa: Határozzuk meg az $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{x^2}{2y}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az adott differenciálegyenlet *Bernoulli* típusú, ami könnyen megmutatható:

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{x^2}{2}y^{-1}$$

ahol $\alpha = -1$. Oldjuk meg a feladatot az $y = uv$ helyettesítéssel. Ekkor $y' = u'v + uv'$, az egyenlet pedig a következőképpen alakul:

$$u'v + uv' - \frac{1}{2x}uv = \frac{x^2}{2uv}$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{2x}v\right) = \frac{x^2}{2uv}.$$

A *lineáris* differenciálegyenletekhez hasonlóan válasszuk a v tényezőt úgy, hogy

$$v' - \frac{1}{2x}v = 0$$

legyen. Ebből:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln|x|$$

$$v = \sqrt{x}.$$

Helyettesítsük vissza az eredeti egyenletbe:

$$u'\sqrt{x} = \frac{x^2}{2u\sqrt{x}}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x}{2u}$$

$$\int u\,du=\frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$\frac{u^2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{c}{2} \qquad /\cdot 2$$

$$u^2=\frac{x^2}{2}+c$$

$$u=\pm\sqrt{\frac{x^2}{2}+c}\,.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$y=uv$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{x^2}{2}+c}\cdot\sqrt{x}$$

illteve

$$y=\pm\sqrt{x\left(\frac{x^2}{2}+c\right)}.$$

269. Példa: Határozzuk meg a $2xyy'=y^2-2x^3$ differenciálegyenlet $y(1)=2$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását.

Megoldás: Mutassuk meg, hogy az egyenlet *Bernoulli* típusú:

$$2xyy'=y^2-2x^3 \qquad /:2xy$$

$$y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{x^2}{y}$$

$$y'-\frac{1}{2x}y=-x^2y^{-1}$$

innen $\alpha=-1$. Alkalmazzuk most az $y^{1-\alpha}=z$ helyettesítést, ekkor:

$$y^2=z \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{z} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{z'}{2\sqrt{z}}$$

$$\frac{z'}{2\sqrt{z}}-\frac{1}{2x}\sqrt{z}=-\frac{x^2}{\sqrt{z}} \qquad /\cdot 2\sqrt{z}$$

$$z' - \frac{1}{x} z = -2x^2 .$$

Ez az egyenlet z változó szerint *lineáris* differenciálegyenlet. Oldjuk meg pl. a képletek alapján. Ekkor két integrált kell kiszámítanunk:

$$\int p(x)dx = \int \frac{dx}{x} = -\ln|x|,$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx = -2\int x^2 e^{-\ln|x|} dx = -2\int x^2 \frac{1}{x} dx = -2\int x dx = -2\frac{x^2}{2} = -x^2 .$$

Ekkor a *lineáris* differenciálegyenlet általános megoldása:

$$z = e^{\ln|x|}\left(c - x^2\right)$$

$$z = x\left(c - x^2\right),$$

a *Bernoulli-féle* differenciálegyenlet általános megoldása pedig:

$$y^2 = x\left(c - x^2\right),$$

innen

$$y = \pm\sqrt{x\left(c - x^2\right)}.$$

A c állandó értékét a kezdeti feltételből számíthatjuk ki:

$$2 = +\sqrt{1(c-1)}$$

$$4 = c - 1$$

$$c = 5 \quad .$$

A differenciálegyenlet $y(1) = 2$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldása tehát:

$$y = \sqrt{x\left(5 - x^2\right)}.$$

FELADATOK:

421. Feladat: Határozzuk meg az $xy' + y = \frac{\ln x}{y^3}$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

422. Feladat: Határozzuk meg az $5(1+x^2)y' = 2xy + \frac{(1+x^2)^2}{y^4}$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

423. Feladat: Határozzuk meg az $y' - x^3y^3 = xy$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

424. Feladat: Határozzuk meg az $(x^2-1)dy - y(2x-3y)dx = 0$ **differenciálegyenlet általános megoldását.**

425. Feladat: Határozzuk meg az $y' = 4y - xy^2$ **differenciálegyenlet** $x = 0, y = 2$ **kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldását.**

426. Feladat: Határozzuk meg az $y^3(2y' + y) = x$ **differenciálegyenlet** $x = 1, y = 1$ **kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldását.**

427. Feladat: Határozzuk meg az $3y' + y\,\mathrm{ctg}x = \frac{1+\mathrm{ctg}x}{y^2\cos x}$ **differenciálegyenlet** $x = \frac{\pi}{3}, y = 0$ **kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldását.**

428. Feladat: Változó cserével oldjuk meg az $(y^2 - 6x)y' = -2y$ **differenciálegyenletet.**

429. Feladat: Változó cserével oldjuk meg az $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$ **differenciálegyenletet.**

430. Feladat: Változó cserével oldjuk meg az $(x^2 + y^2 + 1)y' + xy = 0$ **differenciálegyenletet.**

Megjegyzés: a változó csere annyit jelent, hogy az x-et tekintjük függő, és az y-t független változónak. Így mivel $y = y(x) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow x' = \frac{dx}{dy} \Rightarrow x = x(y)$.

10.1.6. Egzakt differenciálegyenletek

Általános alak: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ *ahol* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Megoldás: *Keresünk egy olyan* $z = z(x,y)$ *kétváltozós függvényt amelynek a differenciálja* $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *-vel egyenlő.*

270. Példa: Oldjukmeg a $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3 ydy) = 0$ **differenciálegyenletet.**

Megoldás: Az adott egyenlet $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ alakú. Ellenőrizzük le, hogy kielégíti-e az egzakt differenciálegyenlet feltételét.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= x(-8xy) = -18x^2 y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= y(-18x^2) = -18x^2 y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{ a differenciálegyenlet egzakt típusú.}$$

Keresünk tehát egy olyan $z = z(x,y)$ függvényt amelynek a differenciálja :

$$dz = Pdx + Qdy .$$

Mivel egy $z = z(x,y)$ függvény differenciálja $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, ezért:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P \qquad \wedge \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = Q \ .$$

Ez egy parciális differenciálegyenletrendszer, ugyanis:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 9x^2 y^2 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 6x^3 y .$$

Ezt a parciális differenciálegyenletrendszert úgy oldjuk meg, hogy a $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 9x^2 y^2$ egyenletben a z függvényt egyváltozós $z = z(x)$ függvénynek vesszük, az y változót pedig paraméterként kezeljük. Ezt a differenciálegyenletet megoldjuk, majd a megoldásban a c állandót $c(y)$-nak vesszük, és az így kialakult megoldást behelyettesítjük a $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 6x^3 y$

differenciálegyenletbe, amelyet úgyszintén megoldunk. Ebből adódik a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\frac{dz}{dx}=2x-9x^2y^2 \qquad -6yx^3+c'(y)=4y^3-6x^3y$$

$$\int dz=2\int xdx-9y^2\int x^2dx \qquad c'(y)=4y^3$$

$$z=x^2-3y^2x^3+c \qquad \int c'(y)dy=4\int y^3dy$$

$$z=x^2-3y^2x^3+c(y) \qquad c(y)=y^4+c$$

innen tehát

$$z=x^2-3x^3y^2+y^4+c=0$$

vagy

$$x^2-3x^3y^2+y^4=c.$$

271. Példa: Oldjuk meg a $3x^2(1+\ln y)dx-\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy=0$ differenciálegyenletet.

Megoldás: Ellenőriizük le, hogy a differenciálegyenlet egzakt típusú-e:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=3x^2\frac{1}{y}=\frac{3x^2}{y}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&=-\left(-\frac{3x^2}{y}\right)=\frac{3x^2}{y}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$ az egyenlet *egzakt* típusú, a megoldás tehát

egy olyan $z=z(x,y)$ függvény, amelyre $dz=Pdx+Qdy$. Ehhez

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2(1+\ln y) \qquad \wedge \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y+\frac{x^3}{y}$$

kell legyen. Az előző feladathoz hasonlóan:

$$\frac{dz}{dx}=3x^2(1+\ln y) \qquad \frac{x^3}{y}+c'(y)=-2y+\frac{x^3}{y}$$

$$\int dz=3(1+\ln y)\int x^2dx \qquad c'(y)=-2y$$

$$z=(1+\ln y)x^3+c \qquad \int c'(y)dy=-2\int ydy$$

$$z=(1+\ln y)x^3+c(y) \qquad c(y)=-y^2+c$$

innen pedig az általános megoldás:

$$z=(1+\ln y)x^3-y^2+c=0$$

illetve

$$(1+\ln y)x^3-y^2=c.$$

FELADATOK:

431. Feladat: Oldjuk meg a $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$ **differenciálegyenletet.**

432. Feladat: Oldjuk meg a $\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx+\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 dy=0$ **differenciálegyenletet.**

433. Feladat: Oldjuk meg a $(\sin y+y\sin x)dx+(x\cos y-\cos x)dy=0$ **differenciálegyenletet.**

434. Feladat: Oldjuk meg a $\left(5x^4+10xy^3-3y^4\right)dx+\left(15x^2y^2-12xy^3+5y^4\right)dy=0$ **differenciálegyenletet.**

435. Feladat: Oldjuk meg a $\left(xe^y-2y\right)dy+e^y dx=0$ **differenciálegyenletet.**

436. Feladat: Oldjuk meg a $\left(y\cos^2 x-\sin x\right)dy-y\cos x(y\sin x+1)dx=0$ **differenciálegyenletet.**

437. Feladat: Oldjuk meg a $y'e^{-x}\cos y=e^{-x}\sin y-\cos x$ **differenciálegyenletet.**

438. Feladat: Oldjuk meg a $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\cos x\sin y+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sin x\cos y\right)y'=0$ **differenciálegyenletet.**

439. Feladat: Oldjuk meg a $\sqrt{\left(y^2+1\right)^3}dx+\left(y^2+3xy\sqrt{y^2+1}\right)dy=0$ **differenciálegyenletet.**

440. Feladat: Határozzuk meg az $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy=0$ **egzakt differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely az** $x=0, y=-2$ **kezdeti feltételt kielégíti.**

10.1.7. Euler-féle integráló tényező

Általános alak: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ *ahol* $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Megoldás: *Keresünk egy olyan* $\lambda=\lambda(x,y)$ *integráló tényezőt amelyre a* $\lambda P(x,y)dx+\lambda Q(x,y)dy=0$ *egzakt típusú differenciálegyenlet lesz. Ezt a tényezőt Euler-féle integráló tényezőnek nevezzük, és két esetben egy változótól függő tényező lehet, mégpedig:*

1. $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=F(x) \quad\Rightarrow\quad \lambda(x,y)=\lambda(x)$

2. $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=F(y) \quad\Rightarrow\quad \lambda(x,y)=\lambda(y)$

272. Példa: Oldjuk meg a $\left(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$ **differenciálegyenletet.**

Megoldás: Vizsgáljuk ki, egzakt típusú-e a differenciálegyenlet:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x+x^2+y^2\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad \text{az egyenlet nem } \textit{egzakt} \text{ típusú,}$$

keresnünk kell tehát egy olyan $\lambda(x,y)$ tényezőt, amelyre a

$$\lambda(x,y)\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+\lambda(x,y)\left(x^2+y^2\right)dy=0$$

egyenlet *egzakt* típusú lesz. Ez a $\lambda(x,y)$ tényező egyváltozós is lehet, ha a két feltétel közül valamelyiket kielégíti. Ellenőrizük le először az első feltételt:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}\left(2x+x^2+y^2-2x\right)=\frac{1}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)=1=F(x)\quad\Rightarrow\quad \lambda=\lambda(x),$$

tehát kell létezzen egy olyan $\lambda(x)$ integráló tényező, amelyre a

$$\lambda(x)\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+\lambda(x)\left(x^2+y^2\right)dy=0$$

egyenlet *egzakt* típusú lesz. Ebben az egyenletben az új $P(x,y) = \lambda(x)\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)$, az új $Q(x,y) = \lambda(x)(x^2 + y^2)$. Ez az egyenlet *egzakt* típusú, ha

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\lambda(x)(2x + x^2 + y^2) = \lambda'(x)(x^2 + y^2) + \lambda(x)(2x)$$

$$2x\lambda(x) + \lambda(x)(x^2 + y^2) = \lambda'(x)(x^2 + y^2) + 2x\lambda(x)$$

$$\lambda(x)(x^2 + y^2) = \lambda'(x)(x^2 + y^2)$$

$$\lambda(x) = \lambda'(x) \quad /\cdot dx$$

$$\int \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} dx = \int dx$$

$$\lambda(x) = t$$

$$\lambda'(x)dx = dt$$

$$\int \frac{dt}{t} = x$$

$$\ln|t| = x$$

$$t = e^x$$

$$\lambda(x) = e^x$$

az *egzakt* típusú differenciálegyenlet tehát az

$$e^x\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0$$

differenciálegyenlet. Ennek megoldása egy olyan $z = z(x,y)$ függvény, amelynek a differenciálja

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = e^x\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)dy.$$

Ebből

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) \quad \wedge \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x(x^2 + y^2).$$

Oldjuk meg először az első differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)$$

$$\frac{dz}{dx}=e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)$$

$$\int dz=\int e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx$$

$$z=2y\int xe^x dx+y\int x^2e^x dx+\frac{y^3}{3}\int e^x dx$$

$$u=x \quad dv=e^x dx \qquad u=x^2 \quad dv=e^x dx$$
$$du=dx \quad v=e^x \qquad du=2xdx \quad v=e^x$$

$$z=2y\left(xe^x-\int e^x dx\right)+y\left(x^2e^x-2\int xe^x dx\right)+\frac{y^3}{3}e^x$$

$$z=2xye^x-2ye^x+x^2ye^x-2y\left(xe^x-\int e^x dx\right)+\frac{y^3}{3}e^x$$

$$z=2xye^x-2ye^x+x^2ye^x-2xye^x-2ye^x+\frac{y^3}{3}e^x+c$$

$$z=x^2ye^x+\frac{y^3}{3}e^x+c(y)$$

ezt a megoldást kell behelyettesíteni a $\frac{\partial z}{\partial y}=e^x\left(x^2+y^2\right)$ egyenletbe is, ekkor:

$$x^2e^x+y^2e^x+c'(y)=x^2e^x+y^2e^x$$

$$c'(y)=0$$

ez csak akkor lehetséges, ha:

$c(y)=const=c_1$.

A megoldás tehát:

$$z=x^2ye^x+\frac{y^3}{3}e^x+c_1=0,$$

illetve

$$\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)e^x=c_1.$$

273. Példa: Oldjuk meg az $\frac{y}{x}dx+\left(y^3-\ln x\right)dy=0$ differenciálegyenletet.

Megoldás: Vizsgáljuk meg először, *egzakt* típusú-e a differenciálegyenlet:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{x}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$ az egyenle nem *egzakt* típusú. Keresnünk kell tehát egy megfelelő integráló tényezőt. Vizsgáljuk ki, lehet-e ez egyváltozós:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{y^3-\ln x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x\left(y^3-\ln x\right)}\neq F(x)$$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{x}{y}\cdot\frac{2}{x}=\frac{2}{y}=F(y) \quad\Rightarrow\quad \lambda=\lambda(y).$$

Ekkor a

$$\lambda(y)\frac{y}{x}dx+\lambda(y)\left(y^3-\ln x\right)dy=0$$

differenciálegyenlet *egzakt* típusú kell legyen, vagyis:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\lambda'(y)\frac{y}{x}+\lambda(y)\frac{1}{x}=\lambda(y)\cdot\frac{-1}{x}$$

$$\lambda'(y)\frac{y}{x}=-\frac{2}{x}\lambda(y)$$

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)}=-\frac{2}{y}$$

$$\int\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)}dy=-2\int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|\lambda(y)|=-2\ln|y|$$

$$\lambda(y)=y^{-2}=\frac{1}{y^2}.$$

Az integráló tényező tehát a $\lambda(y)=\frac{1}{y^2}$, az *egzakt* típusú differenciálegyenlet pedig :

$$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{x}dx+\frac{1}{y^2}\left(y^3-\ln x\right)dy=0$$

$$\frac{1}{xy}dx+\left(y-\frac{\ln x}{y^2}\right)dy=0.$$

Ennek megoldása egy $z=z(x,y)$ függvény, amelyre

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{xy} \qquad \wedge \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=y-\frac{\ln x}{y^2}.$$

Oldjuk meg előbb az első differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{xy}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{xy}$$

$$\int dz=\frac{1}{y}\int\frac{dx}{x}$$

$$z=\frac{1}{y}\ln|x|+c$$

$$z=\frac{\ln x}{y}+c(y).$$

Helyettesítsük ezt a megoldást a másik differenciálegyenletbe is:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=y-\frac{\ln x}{y^2}$$

$$-\frac{1}{y^2}\ln x+c'(y)=y-\frac{\ln x}{y^2}$$

$$c'(y)=y$$

$$\int c'(y)dy=\int ydy$$

$$c(y)=\frac{y^2}{2}+c_1.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$z=\frac{\ln x}{y}+\frac{y^2}{2}+c_1=0$$

illetve

$$\frac{\ln x}{y}+\frac{y^2}{2}=c_1.$$

FELADATOK:

441. Feladat: Oldjuk meg az $(xy^3-1)dx+x^2y^2dy=0$ **differenciálegyenletet.**

442. Feladat: Oldjuk meg az $(1-xy)dx+(xy-x^2)dy=0$ **differenciálegyenletet.**

443. Feladat: Oldjuk meg az $(x^3+y^4)dx+8xy^3dy=0$ **differenciálegyenletet.**

444. Feladat: Oldjuk meg az $ydx-(x+y)dy=0$ **differenciálegyenletet.**

445. Feladat: Oldjuk meg az $ydx-xdy=0$ **differenciálegyenletet.**

446. Feladat: Oldjuk meg az $y(2x+y^3)dx-x(2x-y^3)dy=0$ **differenciálegyenletet.**

447. Feladat: Oldjuk meg az $xdy+\cos y(\sin y-3x^2\cos y)dx=0$ **differenciálegyenletet.**

448. Feladat: Oldjuk meg az $(x+y^2)dx-2xydy=0$ **differenciálegyenletet.**

449. Feladat: Oldjuk meg az $y(1+xy)dx-xdy=0$ **differenciálegyenletet.**

450. Feladat: Oldjuk meg az $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$ **differenciálegyenletet.**

10.2. Másodrendű (magasabbrendű) differenciálegyenletek

A másodrendű differenciálegyenletek implicit alakja $F(x, y, y', y'') = 0$, általános megoldásában két állandó (constans) szerepel, a partikuláris megoldás meghatározásához pedig két kezdeti feltételre van szükség.

A magasabbrendű (n-edrendű) differenciálegyenletek implicit alakja $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, általános megoldásában n állandó (constans) szerepel, a partikuláris megoldás meghatározásához pedig n kezdeti feltételre van szükség.

A következőkben a másodrendű és magasabbrendű differenciálegyenletek néhány olyan típusát adjuk meg, amelyek integrálás segítségével analitikusan megoldhatók.

10.2.1. Az $y^{(n)} = f(x)$ típusú differenciálegyenletek

Általános alak: $y^{(n)} = f(x)$

Megoldás: *n-szer egymásután integráljuk az adott egyenletet, és minden egyes esetben hozzáadunk egy új constanst.*

274. Példa: Határozuk meg az $y'' = xe^x$ másodrendű differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Mivel $y' = \frac{dy}{dx}$ akkor $y'' = \frac{dy'}{dx}$, és így az adott egyenlet felírható a következő alakban:

$$y'' = xe^x$$

$$\frac{dy'}{dx} = xe^x$$

$$dy' = xe^x dx$$

$$\int dy' = \int xe^x dx$$

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$y' = xe^x - \int e^x dx + c_1$$

$$y' = xe^x - e^x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x - e^x + c_1$$

$$dy = \left(xe^x - e^x + c_1\right)dx$$

$$\int dy = \int xe^x dx - \int e^x dx + c_1 \int dx$$

$$y = xe^x - \int e^x dx - e^x + c_1 x + c_2$$

az általános megoldás tehát:

$$y = xe^x - 2e^x + c_1 x + c_2,$$

$$y = e^x(x-2) + c_1 x + c_2.$$

275. Példa: Határozzuk meg az $y'' = 4\sin 2x$ másodrendű differenciálegyenlet azon partikuláris megoldását, amely kielégíti az $y(0) = 0$ és $y'(0) = 0$ kezdeti feltételeket.

Megoldás: Hasonlóan az előző feladathoz:

$$y'' = 4\sin 2x$$

$$\frac{dy'}{dx} = 4\sin 2x$$

$$\int dy' = 4\int \sin 2x dx$$

$$2x = t$$

$$dx = \frac{dt}{2}$$

$$y' = 2\int \sin t dt$$

$$y' = -2\cos t + c_1$$

$$y' = -2\cos 2x + c_1,$$

ebből az egyenletből számíthatjuk majd ki a c_1 állandót. Másodszori integrálás után:

$$\frac{dy}{dx} = -2\cos 2x + c_1$$

$$\int dy = -2\int \cos 2x dx + c_1 \int dx$$

$$y = -\int \cos t dt + c_1 x + c_2$$

$$y = -\sin t + c_1 x + c_2,$$

az általános megoldás tehát

$$y = -\sin 2x + c_1 x + c_2,$$

mit láthatjuk két ismeretlen állandót c_1-et és c_2-t tartalmaz. A partikuláris megoldásban ezeket konkrétan meg kell határozni, mégpedig az $y'(0)=0$ és $y(0)=0$ kezdeti felételekből:

$$y'(0)=0$$

$$0=-2\cos 0+c_1$$

$$0=-2+c_1$$

$$c_1=2,$$

és

$$0=-\sin 0+2\cdot 0+c_2$$

$$c_2=0 \quad .$$

A partikuláris megoldás tehát:

$$y=2x-\sin 2x.$$

FELADATOK:

451. Feladat: Határozzuk meg az $y''=\frac{1}{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

452. Feladat: Határozzuk meg az $y''=\frac{1}{x}$ differenciálegyenlet partikuláris megoldását $y(1)=0$ és $y'(1)=0$ kezdeti feltételekkel.

453. Feladat: Határozzuk meg az $y''=\frac{1}{x}$ differenciálegyenlet partikuláris megoldását $y(1)=0$ és $y(e)=0$ perem feltételekkel.

454. Feladat: Határozzuk meg az $y''\sin^4 x=\sin 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

455. Feladat: Határozzuk meg az $y'''=\sin x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

10.2.2. Az y-változót nem tartalmazó hiányos differenciálegyenletek

Általános alak: $F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

Megoldás: $y' = p \Rightarrow y'' = p'$, $p = p(x)$ *helyettesítéssel visszavezethető elsőrendű differenciálegyenletre.*

276. Példa: Határozzuk meg az $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Könnyen megállapíthatjuk, hogy ez a differenciálegyenlet hiányos másodrendű differenciálegyenlet, amelyből az y változó hiányzik, ezért alkalmazzuk a megadott helyettesítéseket:

$$y' = p \ , \ y'' = p'$$

$$xp' = p \ln \frac{p}{x}$$

$$p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x},$$

ez pedig egy $p' = f\left(\frac{p}{x}\right)$ homogén típusú elsőrendű differenciálegyenlet. A helyettesítés tehát

$$\frac{p}{x} = t \quad \Rightarrow \quad p' = t + xt'$$

$$t + xt' = t \ln t$$

$$x \frac{dt}{dx} = t \ln t - t$$

$$\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln t - 1 = u$$

$$\frac{dt}{t} = du$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln u = \ln x + \ln c_1$$

$$u = xc_1$$

$$\ln t - 1 = xc_1$$

$$\ln t = 1 + xc_1$$

$$\ln \frac{p}{x} = 1 + xc_1$$

$$\frac{p}{x} = e^{1+xc_1}$$

$$p = xe^{1+xc_1},$$

térjünk most vissza az eredeti változókra:

$$y' = xe^{1+xc_1}$$

$$\int dy = \int xe^{1+xc_1} dx$$

$$u = x \qquad dv = e^{1+xc_1}$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{c_1} \quad e^{1+xc_1}$$

$$y = \frac{1}{c_1} xe^{1+xc_1} - \frac{1}{c_1} \int e^{1+xc_1} dx$$

$$y = \frac{1}{c_1} xe^{1+xc_1} - \frac{1}{c_1^2} e^{1+xc_1} + c_2,$$

az egyenlet általános megoldása tehát

$$y = \frac{e^{1+xc_1}}{c_1} \left(x - \frac{1}{c_1} \right) + c_2 .$$

277. Példa: Htározzuk megaz $xy''' + y'' = x^2$ harmadrendü differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Megállapíthatjuk, hogy az egyenlet hiányos, nem tartalmaz se y se y' változót, de tartalmaz y'' és y'''-at. Ezért az előző példához hasonlóan vezessük be a következő helyettesítéseket:

$$y'' = p \ , \ y''' = p'$$

$$xp' + p = x^2,$$

osszuk el az egyenletet x-el, ekkor:

$$xy''' + y'' = x^2$$

$$y''' + \frac{1}{x} y'' = x .$$

Megállapíthatjuk, hogy a kapott differenciálegyenlet hiányos, méghozzá az y változó hiányzik, ezért bevezethetjük az $y'' = p \quad \Rightarrow \quad y''' = p'$ helyettesítést. Ekkor:

$$p' + \frac{1}{x}p = x,$$

ez pedig p szerint lineáris differenciálegyenlet. Oldjuk meg a $p = uv$ helyettesítéssel.

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = x$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x,$$

innen

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

Helyettesítsünk vissza:

$$\frac{u'}{x} = x$$

$$\frac{du}{dx} = x^2$$

$$\int du = \int x^2 dx$$

$$u = \frac{x^3}{3} + c_1,$$

a lineáris differenciálegyenlet általános megoldása pedig:

$$p = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right),$$

illetve

$$p = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}.$$

Térjünk vissza az eredeti változóra:

$$y'' = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}$$

$$\int y''dx = \frac{1}{3}\int x^2 dx + c_1 \int \frac{dx}{x}$$

$$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + c_1 \ln|x| + c_2,$$

innen pedig

$$\int y'dx = \frac{1}{9}\int x^3 dx + c_1 \int \ln x dx + c_2 \int dx$$

$$u = \ln x \quad dv = dx$$
$$du = \frac{dx}{x} \quad v = x$$

$$y = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^4}{4} + c_1\left(x\ln x - \int dx\right) + c_2 x + c_3,$$

innen pedig az eredeti harmadrendű differenciálegyenlet általános megoldása, amely három állandót (c_1, c_2, c_3) tartalmaz:

$$y = \frac{x^4}{36} + c_1 x(\ln|x| - 1) + c_2 x + c_3.$$

FELADATOK:

456. Feladat: **Határozzuk meg a $(1+x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

457. Feladat: **Határozzuk meg a $y'' + y'\mathrm{tg}x - \sin 2x = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

458. Feladat: **Határozzuk meg a $2xy'y'' = (y')^2 + 1$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

459. Feladat: **Határozzuk meg a $y'' = \frac{y'}{x} + x\sin x$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

460. Feladat: **Határozzuk meg a $y'' + (x-1)y'^3 = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

10.2.3. Az x-változót nem tartalmazó hiányos differenciálegyenletek

Általános alak: $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0\,,\ n \geq 1$

Megoldás: $y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p\frac{dp}{dy}, \qquad p = p(y)$

helyettesítéssel visszavezethető elsőrendű differenciálegyenletre.

278. Példa: Határozzuk meg az $y'' + 2y(y')^3 = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Könnyen belátható, hogy a differenciálegyenlet hiányos, méghozzá az x független változó hiányzik az egyenletből. Alkalmazzuk tehát a megadott helyettesítéseket:

$y' = p \quad , \quad y'' = p\frac{dp}{dy}.$

Ekkor

$$p\frac{dp}{dy} + 2yp^3 = 0 \quad / : p$$

$$\frac{dp}{dy} = -2yp^2$$

$$\int \frac{dp}{p^2} = -2\int y dy$$

$$\frac{p^{-1}}{-1} = -2\frac{y^2}{2} - c_1$$

$$\frac{1}{p} = y^2 + c_1$$

$$p = \frac{1}{y^2 + c_1}.$$

Térjünk vissza az előző változóra,

$$y' = \frac{1}{y^2 + c_1}$$

$$\int (y^2 + c_1) dy = \int dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 y = x + c_2,$$

ahonnan az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása implicit alakban:

$$\frac{y^3}{3}+c_1y-x-c_2=0.$$

279. Példa: Határozzuk meg az $y''+\frac{2(y')^2}{1-y}=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Könnyen belátható, hogy a differenciálegyenlet hiányos, az x független változó hiányzik az egyenletből. Alkalmazzuk tehát a

$$y'=p \quad , \quad y''=p\frac{dp}{dy}.$$

helyettesítéseket. Ekkor:

$$p\frac{dp}{dy}+\frac{2p^2}{1-y}=0$$

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{2p^2}{y-1}$$

$$\int\frac{dp}{p}=2\int\frac{dy}{y-1}$$

$$y-1=t$$

$$dy=dt$$

$$\ln|p|=2\ln|y-1|+\ln c_1$$

$$p=c_1(y-1)^2$$

$$y'=c_1(y-1)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=c_1(y-1)^2$$

$$\int\frac{dy}{(y-1)^2}=c_1\int dx$$

$$y-1=t$$

$$dy=dt$$

$$\frac{t^{-1}}{-1}=c_1x+c_2$$

$$\frac{-1}{y-1}=c_1x+c_2$$

$$1-y=\frac{1}{c_1x+c_2},$$

innen pedig az általános megoldás:

$$y = 1 - \frac{1}{c_1 x + c_2}.$$

FELADATOK:

461. Feladat: **Határozzuk meg az $y' - 1 = y \cdot y''$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

462. Feladat: **Határozzuk meg az $3yy'' - 5(y')^2 = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

463. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' = e^y$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

464. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' = 4y$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

465. Feladat: **Határozzuk meg az $y^3 y'' = 1$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

466. Feladat: **Határozzuk meg az $y(y-1)y'' + y'^2 = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

467. Feladat: **Határozzuk meg az $y''^2 = y'$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

468. Feladat: **Határozzuk meg az $y''(y-1) = 2y'^2$ differenciálegyenlet azon partikuláris megoldását, amely kielégíti az $y(0) = -1$ és $y(1) = 0$ kezdeti feltételeket.**

469. Feladat: **Határozzuk meg az $yy'' + y'^2 - 1 = 0$ differenciálegyenlet azon partikuláris megoldását, amely kielégíti az $y(0) = 1$ és $y'(0) = 0$ peremfeltételeket.**

470. Feladat: **Ábrázoljuk az $y''(y-1) = 2y'^2$ differenciálegyenlet azon partikuláris megoldás-görbéjét, amely átmegy a $P(1,2)$ és a $Q(-1,0)$ pontokon.**

10.2.4. Állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenletek

Általános alak: $y'' + ay' + by = 0$

Megoldás: *A partikuláris megoldásokat* $y_p = e^{rx}$ *alakban keressük. Ha* r_1 *és* r_2 *az* $r^2 + ar + b = 0$ *karakterisztikus egyenlet megoldásai, akkor az adott differenciálegyenlet megoldását a gyökök típusától függően a következő három alak egyikébel írhatjuk fel:*

1. $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ *ha* $r_1 \neq r_2 \in R$

2. $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x}$ *ha* $r_1 = r_2 \in R$

3. $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ *ha* $r_{1/2} = \alpha \pm i\beta \in C$

280. Példa: Határozzuk meg az $y'' - 5y' + 6y = 0$ másodrendű differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az egyenlet eggyütthatói állandók, ezért a fentiek alapján először a karakterisztikus egyenletet oldjuk meg:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$r_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$r_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_{p_1} = e^{3x}$$

$$r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_{p_2} = e^{2x}$$

az egyenlet általános megoldása pedig:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

281. Példa: Határozzuk meg az $y'' + 6y' + 9y = 0$ másodrendű differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Számítsuk ki a karakterisztikus egyenlet gyökeit,

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

$$(r+3)^2=0$$

$$r_{1/2}=-3 \quad \Rightarrow \quad y_{p_1}=y_{p_2}=e^{-3x},$$

a differenciálegyenlet általános megoldását tehát a *2.* típus segitségével a következőképpen írhatjuk fel:

$$y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}.$$

282. Példa: Határozzuk meg az $y''-4y'+13y=0$ másodrendű differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$y''-4y'+13y=0$$

$$r^2-4r+13=0$$

$$r_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_1=2+3i \\ r_2=2-3i \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_{p_{1/2}}=e^{(2+3i)x} \quad \Rightarrow \quad \alpha=2\,,\ \beta=3$$

a komplex gyökök miatt a differenciálegyenlet általános megoldását tehát a fentiek szerint a következőképpen írhatjuk fel:

$$y=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x).$$

A megoldásnak ezt az alakját le is vezethetjük, a következőképpen:

$$y=c_1e^{(2+3i)x}+c_2e^{(2-3i)x}$$

$$y=c_1e^{2x}e^{3ix}+c_2e^{2x}e^{-3ix}$$

$$y=e^{2x}(c_1(\cos 3x+i\sin 3x)+c_2(\cos(-3)x+i\sin(-3x)))$$

$$y=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_1i\sin 3x+c_2\cos 3x-c_2i\sin 3x)$$

$$y=e^{2x}((c_1+c_2)\cos 3x+i(c_1-c_2)\sin 3x)$$

$$y=e^{2x}(c_1'\cos 3x+c_2'\sin 3x).$$

283. Példa: Határozzuk meg az $y'''-3y''+2y'=0$ harmadrendű differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet ez esetben harmadfokú,

$$y'''-3y''+2y'=0$$

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 0$$

$$r\left(r^2 - 3r + 2\right) = 0$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{p_1} = e^{0x} = 1 \qquad\qquad r_{2/3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_{p_2} = e^{2x}$$

$$r_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{p_3} = e^{x}$$

a differenciálegyenlet általános megoldása pedig:

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{x}.$$

284. Példa: Határozzuk meg az $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ harmadrendű differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet ez esetben harmadfokú,

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$$

$$(r-1)^3 = 0$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{p_1} = y_{p_2} = y_{p_3} = e^{x}$$

az egyenlet általános megoldása tehát:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x}.$$

285. Példa: Határozzuk meg az $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ negyedrendű differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet negyedfokú,

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

$$\left(r^2 + 1\right)^2 = 0$$

$$r_{1/2}^2 = -1$$

$$r_{1/2} = i \quad \Rightarrow \quad y_{p_{1/2}} = e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$r_{3/4} = -i \quad \Rightarrow \quad y_{p_{3/4}} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

az egyenlet általános megoldása tehát:

$$y = c_1(\cos x + i \sin x) + c_2 x(\cos x + i \sin x) + c_3(\cos x - i \sin x) + c_4 x(\cos x - i \sin x)$$

$$y=(c_1+c_3)\cos x+(c_2+c_4)x\cos x+(c_1-c_3)i\sin x+(c_2-c_4)ix\sin x$$

$$y=c_1'\cos x+c_2'x\cos x+c_3'\sin x+c_4'x\sin x.$$

FELADATOK:

471. Feladat: Határozzuk meg az $y''-3y'+2y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

472. Feladat: Határozzuk meg az $y''-2y'+y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

473. Feladat: Határozzuk meg az $y''-2y'+2y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

474. Feladat: Határozzuk meg az $y''+4y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

475. Feladat: Határozzuk meg az $y'''+y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

476. Feladat: Határozzuk meg az $y''+6y'+34y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

477. Feladat: Határozzuk meg az $y''-8y'+16y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

478. Feladat: Határozzuk meg az $y''+y'+y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

479.Feladat: Határozzuk meg az $9y''+24y'+16y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

480.Feladat: Határozzuk meg az $y^{IV}+2y'''+y''=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

10.2.5. Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása egyenlő együtthatók módszerével

Általános alak: $y'' + ay' + by = f(x)$

Megoldás: *Az általános megoldást* $y = y_h + y_p$ *alakban keressük, ahol* y_h *a megfelelő homogén differenciálegyenlet általános megoldása, az* y_p *pedig az inhomogén rész partikuláris megoldása. Ha* $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, *akkor a partikuláris megoldás is több összeadandóból áll,* $y_p = \sum_{i=1}^{n} y_{p_i}$. *Ezeket a partikuláris megoldásokat az inhomogén rész alakjától függően meghatározott alakban keressük:*

1. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \quad \Rightarrow \quad y_p = x^p e^{\alpha x} R_N(x)$
2. $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x] \quad \Rightarrow \quad y_p = x^p e^{\alpha x}[R_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x]$

ahol

$$N = \max(n,m) \quad , \quad R_N(x) = \sum_{i=0}^{N} A_i x^{N-i} \quad , \quad S_N(x) = \sum_{i=0}^{N} B_i x^{N-i}$$

és

$p = 0$ *ha* $r_{1/2} \neq \alpha \pm i\beta$ *(ha* $\alpha \pm i\beta$ *nem karakterisztius gyök)*

$p = 1$ *ha* $r_{1/2} = \alpha \pm i\beta$ *(ha* $r_{1/2} = \alpha \pm i\beta$ *egyszeres karakterisztikus gyök)*

$p = 2$ *ha* $r_{1/2} = \alpha \pm i\beta$ *(ha* $r_{1/2} = \alpha \pm i\beta$ *kétszeres karakterisztikus gyök)*.

286. Példa: Határozzuk meg az $y'' - 7y' + 12y = x$ másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldását.

Megoldás: A fentiek alapján $y = y_h + y_p$.Határozzuk meg előbb a homogén rész általános y_h megoldását. A megfelelő homogén egyenlet

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

karakterisztikus egyenlete

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

$$r_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2}$$

$$r_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_{p_1} = e^{4x}$$
$$r_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_{p_2} = e^{3x}$$

a homogén rész általános megoldása tehát:

$$y_h = c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x}.$$

Az inhomogén rész egy tagból áll:

$$f(x) = x = x \cdot e^{0x} = e^{0x} \cdot P_1(x)$$

innen a következő adatok olvashatók ki:

$$n = 1 \ , \ m = 0 \ , \ \alpha = 0 \ , \ \beta = 0$$

ezekből pedig

$$N = \max(0,1) = 1$$

$$\alpha \pm i\beta = 0 \pm i0 = 0 \text{ nem karakterisztikus gyök} \quad \Rightarrow \quad p = 0.$$

A partikuláris megoldást tehát, az *1.* alapján a következő alakban kereshetjük:

$$y_p = x^p e^{\alpha x} R_N(x)$$

$$y_p = x^0 x^{0x} R_1(x)$$

$$y_p = ax + b.$$

Mivel minden partikuláris megoldás kielégíti a saját differenciálegyenletét, így:

$$y_p' = a$$

$$y_p'' = 0$$

és

$$0 - 7a + 12(ax + b) = x$$

kell legyen. Innen:

$$12ax + 12b - 7a = x$$

kiegyenlítve az x változó megfelelő együtthatóit, a következő rendszert kapjuk:

$$12a = 1$$
$$12b - 7a = 0$$

$$a = \frac{1}{12}$$

$$b = \frac{7}{144}$$

az inhomogén rész partikuláris megoldása tehát:

$$y_p = \frac{x}{12} + \frac{7}{144}.$$

Mivel a differenciálegyenlet megoldása a homogén és a partikuláris megoldásokból tevődik össze, így:

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x} + \frac{x}{12} + \frac{7}{144}$$

az egyenlet végleges általános megoldása.

287. Példa: Határozzuk meg az $y'' - y = e^x(x^2 - 1)$ másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Határozzuk meg először a homogén rész általános megoldását:

$$y'' - y = 0$$

$$r^2 - 1 = 0$$

$$r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = -1$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Az inhomogén rész az *1.* típusba sorolható:

$$f(x) = e^x(x^2 - 1) = e^{1x} P_2(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

$$n = 2 \ , \ m = 0 \ , \ \alpha = 1 \ , \ \beta = 0$$

ekkor

$$N = \max(0,2) = 2$$

$$\alpha \pm i\beta = 1 \text{ egyszeres karakterisztikus gyök } \Rightarrow p = 1,$$

ezért a partikuláris megoldást a következő alakban keressük:

$$y_p = x^p e^{\alpha x} R_N(x)$$

$$y_p = xe^x(ax^2 + bx + c)$$

$$y_p = e^x(ax^3 + bx^2 + cx).$$

Az a,b,c eggyütthatókat úgy határozhatjuk meg, hogy a partikuláris megoldást vissza-helyettesítjük a differenciálegyenletbe:

$$y_p' = e^x\left(ax^3 + bx^2 + cx\right) + e^x\left(3ax^2 + 2bx + c\right)$$

$$y_p' = e^x\left(ax^3 + 3ax^2 + bx^2 + 2bx + cx + c\right)$$

$$y_p'' = e^x\left(ax^3 + 3ax^2 + bx^2 + 2bx + cx + c\right) + e^x\left(3ax^2 + 6ax + 2bx + 2b + c\right)$$

$$y_p'' = e^x\left(ax^3 + 6ax^2 + bx^2 + 6ax + 4bx + cx + 2b + 2c\right),$$

ekkor

$$y'' - y = e^x\left(x^2 - 1\right)$$

$$e^x\left(ax^3 + 6ax^2 + bx^2 + 6ax + 4bx + cx + 2b + 2c\right) - e^x\left(ax^3 + bx^2 + cx\right) = e^x\left(x^2 - 1\right),$$

innen

$$6ax^2 + 6ax + 4bx + 2b + 2c = x^2 - 1,$$

ez pedig akkor lehetséges, ha

$6a = 1$

$6a + 4b = 0$

$2b + 2c = -1$

$a = \frac{1}{6}$

$b = -\frac{1}{4}$

$c = -\frac{1}{4}$

vagyis a partikuláris megoldás:

$$y_p = xe^x\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right).$$

A differenciáleggyenlet általános megoldása tehát:

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + xe^x\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right).$$

288. Példa: Határozzuk meg az $y'' - 4y' + 3y = xe^x + \sin^2 x$ másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az $y'' - 4y' + 3y = xe^x + \sin^2 x$ differenciálegyenlet inhomogén része, az $f(x) = xe^x + \sin^2 x$ nem sorolható sem az *1.* sem a *2.* típusba, ezért a $\sin^2 x$-et megfelelő trigonometrikus azonossággal kell helyettesíteni. Ekkor:

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x + \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

vagyis az inhomogén rész három összeadandóból áll:

$$f(x) = f(x)_1 + f(x)_2 + f(x)_3$$

$$f_1(x) = xe^x$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

amelyek közül mindegyiknek megfelel egy partikuláris megoldás, y_{P_1}, y_{P_2}, y_{P_3}. Ekkor $y = y_h + y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3}$. Határozzuk meg először a homogén rész megoldását:

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$r_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$r_1 = 3 \quad , \quad r_2 = 1$$

a homogén rész megoldása tehát:

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^x.$$

Határozzuk meg most sorban a partikuláris megoldásokat:

$$f_1(x) = xe^x = e^{\alpha x} P_n(x) \quad \Rightarrow \quad y_{P_1} = x^p e^{\alpha x} R_N(x)$$

$$n = 1 \ , \ m = 0 \ , \ \alpha = 1 \ , \ \beta = 0$$

ekkor

$$N = \max(1,0) = 1$$

$$\alpha \pm i\beta = 1 \pm i0 = 1 \ \text{ egyszeres karakterisztikus gyök } \quad \Rightarrow \quad p = 1$$

$$y_{P_1} = xe^x R_1(x) = xe^x(ax+b) = e^x(ax^2 + bx)$$

$$y'_{P_1} = e^x(ax^2 + bx) + e^x(2ax + b) = e^x(ax^2 + 2ax + bx + b)$$

$$y''_{P_1} = e^x(ax^2 + 2ax + bx + b) + e^x(2ax + 2a + b) = e^x(ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b).$$

Mivel minden partikuláris megoldás kielégíti a differenciálegyenletet a saját inhomogén részével, ezért:

$$y''_{P_1} - 4y'_{P_1} + 3y_{P_1} = xe^x$$

$$e^x\left(ax^2+4ax+bx+2a+2b\right)-4e^x\left(ax^2+2ax+bx+b\right)+3e^x\left(ax^2+bx\right)=xe^x$$

$$ax^2+4ax+bx+2a+2b-4ax^2-8ax-4bx-4b+3ax^2+3bx=x$$

$$-4ax+2a-2b=x$$

ez akkor lehetséges, ha:

$-4a=1$

$2a-2b=0$

$a=-\frac{1}{4}$

$b=-\frac{1}{4}$

vagyis az első partikuláris megoldás:

$$y_{p_1}=e^x\left(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\right)=-\frac{x}{4}e^x(x+1).$$

Határozzuk meg most a második partikuláris megoldást:

$$f_2(x)=\frac{1}{2}=e^{\alpha x}P_n(x) \quad \Rightarrow \quad y_{p_2}=x^p e^{\alpha x}R_N(x)$$

$$n=0 \ , \ m=0 \ , \ \alpha=0 \ , \ \beta=0$$

$$N=\max(0,0)=0$$

$$\alpha\pm i\beta=0\pm i0=0 \ \text{ nem karakterisztikus gyök } \quad \Rightarrow \quad p=0$$

$$y_{p_2}=x^0e^{0x}R_0(x)=1\cdot 1\cdot c=c$$

$$y'_p=0$$

$$y''_{p_2}=0,$$

továbbá

$$y''_{p_2}-4y'_{p_2}+3y_{p_2}=\frac{1}{2}$$

$$3c=\frac{1}{2}$$

$$c=\frac{1}{6}$$

és

$$y_{p_2}=\frac{1}{6}.$$

Határozzuk meg most a harmadik partikuláris megoldást:

$$f_3(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_{p_3} = x^p e^{\alpha x}\left[R_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x\right]$$

$$n=0 \ , \ m=0 \ , \ \alpha=0 \ , \ \beta=2$$

$$N = \max(0,0) = 0$$

$$\alpha \pm i\beta = 0 \pm 2i = 2i \text{ nem karakterisztikus gyök} \quad \Rightarrow \quad p=0$$

$$y_{p_3} = x^0 e^{0x}\left[R_0(x)\cos 2x + S_0(x)\sin 2x\right] = 1\cdot(d\cos 2x + e\sin 2x)$$

$$y_{p_3} = d\cos 2x + e\sin 2x\,.$$

Innen

$$y'_{p_3} = -2d\sin 2x + 2e\cos 2x$$

$$y''_{p_3} = -4d\cos 2x - 4e\sin 2x\,.$$

Mivel

$$y''_{p_3} - 4y'_{p_3} + 3y_{p_3} = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$-4d\cos 2x - 4e\sin 2x + 8d\sin 2x - 8e\cos 2x + 3d\cos 2x + 3e\sin 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$(8d-e)\sin 2x + (-d-8e)\cos 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

ez pedig csak akkor lehetséges, ha

$$8d - e = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 8d$$

$$-d - 8e = -\frac{1}{2}$$

$$-d - 64d = -\frac{1}{2}$$

$$65d = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{1}{130} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{4}{65}$$

vagyis a harnadik partikuláris megoldás:

$$y_{p_3} = \frac{1}{130}\cos 2x + \frac{4}{65}\sin 2x\,.$$

Az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása pedig:

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x - \frac{x}{4} e^x (x+1) + \frac{1}{6} + \frac{1}{130} \cos 2x + \frac{4}{65} \sin 2x.$$

FELADATOK:

481. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' - 9y = 6\cos 3x$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

482. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' + y' - 6y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

483. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' - 3y' - 10y = 3e^{4x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

484. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' - 5y' + 6y = 2xe^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

485. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' + 2y' + y = x\sin x$ differenciálegyenlet általános megodálsát.**

486. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' + y = x - 4\cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

487. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' - 6y' + 9y = 3x^2 e^{3x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

488. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' + y = x^2 + \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

489. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' - y = (2x+3)e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

490. Feladat: **Határozzuk meg az $y'' - 2y' + y = xe^x$ differenciálegyenlet általános megoldását.**

10.2.6. Változó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenletek

Általános alak: $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

Megoldás: *A megoldást akkor határozhatjuk meg, ha ismeretes a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása: $y_1(x)$. Ekkor ugyanis az $y = z(x) \cdot y_1(x)$ helyettesítéssel a változó együtthatójú differenciálegyenlet visszavezethető állandó együtthatójú differenciálegyenletre.*

289. Példa: Határozzuk meg az $xy'' + 2y' - xy = 0$ változó együtthatójú másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását, ha egy partikuláris megoldása $y_1(x) = \frac{e^x}{x}$.

Megoldás: A partikuláris megoldás felírható az $y_1(x) = \frac{e^x}{x} = x^{-1}e^x$ alakban is. A helyettesítés tehát:

$$y = z \cdot y_1$$

$$y' = z' \cdot y_1 + z \cdot y_1'$$

$$y'' = z'' \cdot y_1 + 2 \cdot z' \cdot y_1' + z \cdot y_1''.$$

Továbbá:

$$y_1 = x^{-1}e^x$$

$$y_1' = -x^{-2}e^x + x^{-1}e^x$$

$$y_1'' = 2x^{-3}e^x - x^{-2}e^x - x^{-2}e^x + x^{-1}e^x = 2x^{-3}e^x + 2x^{-2}e^x + x^{-1}e^x.$$

Vezessük be a differenciálegyenletbe a helyettesítést:

$$xy'' + 2y' - xy = 0 \quad / : x$$

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$$

$$z'' \cdot y_1 + 2 \cdot z' \cdot y_1' + z \cdot y_1'' + \frac{2}{x} \cdot z' \cdot y_1 + \frac{2}{x} \cdot z \cdot y_1' - z \cdot y_1 = 0$$

$$z''y_1 + z'\left(2y_1' + \frac{2}{x}y_1\right) + z\left(y_1'' + \frac{2}{x}y_1' - y_1\right) = 0$$

$$z''\frac{e^x}{x} + z'\left(\frac{2e^x}{x} - \frac{2e^x}{x^2} + \frac{2}{x}\frac{e^x}{x}\right) + z\left(\frac{2e^x}{x^3} - \frac{2e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x} + \frac{2}{x}\frac{e^x}{x} - \frac{2}{x}\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^x}{x}\right) = 0$$

$$\frac{e^x}{x}z'' + \frac{2e^x}{x}z' = 0 \quad /\cdot\frac{x}{e^x}$$

$$z'' + 2z' = 0,$$

ez pedig egy állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet, amelynek a megoldása:

$$r^2 + 2r = 0$$

$$r(r+2) = 0$$

$$r_1 = 0 \ , \ r_2 = -2$$

$$z = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-2x}$$

$$z = c_1 + c_2 e^{-2x}.$$

Mivel a helyettesítés

$$y = z \cdot y_1$$

volt, így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = \frac{e^x}{x}\left(c_1 + c_2 e^{-2x}\right),$$

illetve

$$y = \frac{x_1 e^x}{x} + \frac{c_2 e^{-x}}{x}.$$

290. Példa: Határozzuk meg az $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$ változó együtthatójú másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását, ha egy partikuláris megoldása $y_1(x) = e^x$.

Megoldás: A helyettesítés tehát:

$$y = z \cdot y_1 = ze^x$$

$$y' = z' \cdot y_1 + z \cdot y_1' = (z' + z)e^x$$

$$y'' = z'' \cdot y_1 + 2 \cdot z' \cdot y_1' + z \cdot y_1'' = (z'' + 2z' + z)e^x.$$

Vezessük be a differenciálegyenletbe a helyettesítést:

$$(z'' + 2z' + z)e^x + \frac{x}{1-x}(z' + z)e^x - \frac{1}{1-x}ze^x = 0$$

$$z''+\left(2+\frac{x}{1-x}\right)z'+\left(1+\frac{x}{1-x}-\frac{1}{1-x}\right)z=0$$

$$z''+\left(2+\frac{x}{1-x}\right)z'=0$$

ez viszont egy hiányos másodrendű differenciálegyenlet, a helyettesítés tehát:

$$z'=p\ ,\ z''=p'$$

$$p'=-\frac{2-2x+x}{1-x}p$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{x-2}{1-x}p$$

$$\int\frac{dp}{p}=\int\frac{x-1-1}{1-x}dx=\int\left(-1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$\ln|p|=-x+\ln|x-1|+c$$

$$p=e^{c-x+\ln|x-1|}$$

$$z'=c_1(x-1)e^{-x}$$

$$\int dz=c_1\int(x-1)e^{-x}dx=c_1\int xe^{-x}dx-c_1\int e^{-x}dx$$

$$z=-c_1xe^{-x}+c_2,$$

mivel

$$y=z\cdot e^x$$

így a megoldás

$$y=-c_1x+c_2e^x.$$

FELADATOK:

491. Feladat: Határozzuk meg az $(1+x^2)y''+xy'-y=0$ változó együtthatójú másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását, ha egy partikuláris megoldása $y_1(x)=x$.

492. Feladat: Határozzuk meg az $x^2y''-xy'-3y=0$ változó együtthatójú másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását, ha egy partiku-láris megoldása $y_1(x)=x^3$.

493. Feladat: Határozzuk meg az $xy''-(1+x)y'+y=0$ változó együtthatójú másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását, ha egy partikuláris megoldása $y_1(x)=e^x$.

494. Feladat: Határozzuk meg az $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0$ változó együtthatójú másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását, ha egy partikuláris megoldása $y_1(x)=x$.

10.2.7. Euler-féle differenciálegyenletek

Általános alak: $(x-a)^2y''+a_1(x-a)y'+a_2y=f(x)$

Megoldás: $x-a=e^t \Rightarrow dx=e^t dt \Rightarrow \frac{1}{e^t}=\frac{dt}{dx}$ *helyettesítéssel visszavezethető állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletre, azzal hogy :*

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot{y}e^{-t}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\dot{y}e^{-t}\right)\cdot e^{-t}=e^{-t}\left(\ddot{y}e^{-t}\right)-\dot{y}e^{-t}=e^{-2t}\left(\ddot{y}-\dot{y}\right).$$

291. Példa: Határozzuk meg az $x^2y''+3xy'+y=x^2$ Euler-féle differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Alkalmazzuk a megadott helyettesítéseket:

$$x=e^t$$

$$y'=\dot{y}e^{-t}=\frac{\dot{y}}{x}$$

$$y''=e^{-2t}\left(\ddot{y}-\dot{y}\right)=\frac{\ddot{y}-\dot{y}}{x^2}$$

ekkor

$$x^2\cdot\frac{\ddot{y}-\dot{y}}{x^2}+3x\cdot\frac{\dot{y}}{x}+y=x^2$$

$$\ddot{y}-\dot{y}+3\dot{y}+y=x^2$$

$$\ddot{y}+2\dot{y}+y=e^{2t},$$

ez pedig egy állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet, amelyben $y=y(t)$, ezért:

$$y=y_h+y_p.$$

$$y_h: \quad \ddot{y}+2\dot{y}+y=0$$

$$r^2+2r+1=0$$

$$(r+1)^2=0$$

$$r_1=r_2=-1$$

$$y_h=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}.$$

A partikuláris megoldást az inhomogén rész alapján határozzuk meg, és mivel itt:

$$f(t)=e^{2t}=e^{\alpha t}P_n(t)$$

ezért

$$n=0 \ , \ m=0$$
$$\alpha=2 \ , \ \beta=0$$

amiből

$$N=\max(0,0)=0$$

$$\alpha\pm i\beta=2\pm i0=2 \text{ nem karakterisztikus gyök} \quad \Rightarrow \quad p=0,$$

tehát a partikuláris megoldást

$$y_p=t^pe^{\alpha t}R_N(t)=t^0e^{2t}R_0(t)=Ae^{2t}$$

alakban keressük. Innen

$$\dot{y}_p=2Ae^{2t}$$

$$\ddot{y}_p=4Ae^{2t},$$

visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$4Ae^{2t}+4ae^{2t}+Ae^{2t}=e^{2t}$$

$$9A=1$$

$$A=\frac{1}{9}$$

$$y_p=\frac{1}{9}e^{2t}.$$

Az egyenlet megoldása tehát:

$$y = y_h + y_p$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{e^{2t}}{9}$$

a t változó szerint, az x változó szerint pedig

$$y(x) = c_1 e^{-\ln|x|} + c_2 \ln|x| \cdot e^{-\ln|x|} + \frac{1}{9} e^{2\ln|x|}$$

$$y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 \ln|x| \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{9}\left(e^{\ln|x|}\right)^2,$$

az Euler-egyenlet megoldása tehát

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 \ln|x|}{x} + \frac{x^2}{9}.$$

292. Példa: Határozzuk meg az $x^2 y'' - xy' + y = x$ Euler-féle differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Alkalmazzuk a megadott helyettesítéseket, ekkor

$$x = e^t$$

$$y' = \dot{y} e^{-t} = \frac{\dot{y}}{x}$$

$$y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) = \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{x^2}$$

és

$$x^2 \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{x^2} - x\frac{\dot{y}}{x} + y = x$$

$$\ddot{y} - \dot{y} - \dot{y} + y = e^t$$

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = e^t,$$

ez pedig egy állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet, amelyben $y = y(t)$, ezért:

$$y = y_h + y_p.$$

$$y_h: \quad \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$$

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$(r-1)^2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 1$$

$$y_h = c_1 e^t + c_2 t e^t .$$

A partikuláris megoldást az inhomogén rész alapján határozzuk meg, és mivel itt

$$f(t) = e^t = e^{\alpha t} P_n(t)$$

innen

$$n = 0 \ , \ m = 0$$

$$\alpha = 1 \ , \ \beta = 0$$

akkor pedig

$$N = \max(0,0) = 0$$

$$\alpha \pm i\beta = 1 \pm i0 = 1 \text{ k;tszeres karakterisztikus gyök } \Rightarrow \ p = 2,$$

a partikuláris megoldást tehát az

$$y_p = t^p e^{\alpha t} R_N(t) = t^2 e^t R_0(t) = A t^2 e^t$$

alakban keressük. Ekkor

$$\dot{y}_p = A\left(2te^t + t^2 e^t\right) = e^t\left(2At + At^2\right)$$

$$\ddot{y}_p = 2A\left(e^t + te^t\right) + A\left(2te^t + t^2 e^t\right) = e^t\left(2A + 4At + At^2\right),$$

visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$e^t\left(2A + 4At + At^2\right) - 2e^t\left(2At + At^2\right) + At^2 e^t = e^t$$

innen pedig

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$y_p(t) = \frac{t^2}{2} e^t .$$

Az inhomogén differenciálegyenlet megoldása tehát:

$$y = y_h + y_p$$

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t .$$

Az eredeti Euler-féle differenciálegyenlet x változó szerinti megoldását pedig akkor kapjuk meg, ha visszahelyettesítjük az $x = e^t \ \Rightarrow \ t = \ln|x|$ helyettsítést. Ekkor a megoldás:

$$y(x) = c_1 e^{\ln|x|} + c_2 \ln|x| e^{\ln|x|} + \frac{1}{2} \ln^2|x| e^{\ln|x|},$$

vagyis

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \ln|x| + \frac{1}{2} x \ln^2|x| .$$

293. Példa: Határozzuk meg a $(2x+1)^2 y'' + (4x+2)y' - 4y = x^2$ *ha* $2x+10$ Euler-féle differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A megadott helyettesítés szerint:

$$2x+1 = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln(2x+1)$$

$$x = \frac{e^t - 1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2t} - 2e^t + 1\right)$$

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{2}{2x+1}\dot{y} = 2e^{-t}\dot{y}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{2}{2x+1}\left(-2e^{-t}\dot{y} + 2e^{-t}\ddot{y}\right) = 4e^{-2t}\left(\ddot{y} - \dot{y}\right).$$

A differenciálegyenlet tehát a következőképpen alakul:

$$e^{2t} \cdot 4e^{-2t}\left(\ddot{y} - \dot{y}\right) + 2e^t \cdot 2e^{-t}\dot{y} - 4y = \frac{1}{4}\left(e^{2t} - 2e^t + 1\right)$$

$$4\ddot{y} - 4\dot{y} + 4\dot{y} - 4y = \frac{1}{4}\left(e^{2t} - 2e^t + 1\right)$$

$$\ddot{y} - y = \frac{1}{16}\left(e^{2t} - 2e^t + 1\right)$$

ez pedig egy állandó együtthatójú inhomogén differenciálegyenlet, tehát

$$y = y_h + y_p.$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$\ddot{y} - y = 0$$

$$r^2 - 1 = 0$$

$$r^2 = 1$$

$$r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = -1$$

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Az inhomogén rész három tagból áll $f(t) = \frac{1}{16}e^{2t} - \frac{1}{16}2e^t + \frac{1}{16}$, ezért a partikuláris megoldás is három részből áll: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$. Határozzuk meg ezeket sorrendben:

$$y_{p_1}: \quad f_1(t) = \frac{1}{16}e^{2t} = e^{\alpha t}P_n(t)$$

$$n = 0 \quad , \quad m = 0$$

$$\alpha = 2 \quad , \quad \beta = 0$$

$$N = \max(0,0) = 0$$

$$\alpha \pm i\beta = 2 \pm i0 = 2 \text{ nem karakterisztikus gyök} \quad \Rightarrow \quad p = 0$$

$$y_{p_1} = t^0 e^{2t} R_0(t) = Ae^{2t}$$

$$\dot{y}_{p_1} = 2Ae^{2t}$$

$$\ddot{y}_{p_1} = 4Ae^{2t}$$

$$\ddot{y} - y = \frac{1}{16}e^{2t}$$

$$4Ae^{2t} - Ae^{2t} = \frac{e^{2t}}{16}$$

$$3A = \frac{1}{16}$$

$$A = \frac{1}{48}$$

$$y_{p_1} = \frac{e^{2t}}{48}.$$

$$y_{p_2}: \quad f_2(t) = -\frac{1}{16}e^t = e^{\alpha t}P_n(t)$$

$$n = 0 \ , \ m = 0$$

$$\alpha = 1 \ , \ \beta = 0$$

$$N = \max(0,0) = 0$$

$$\alpha \pm i\beta = 1 \pm i0 = 1 \text{ egyszeres karakterisztikus gyök} \quad \Rightarrow \quad p = 1$$

$$y_{p_2} = t^1 e^t R_0(t) = Ate^t$$

$$\dot{y}_{p_2} = Ae^t + Ate^t$$

$$\ddot{y}_{p_2} = Ae^t + Ae^t + Ate^t = 2Ae^t + Ate^t$$

$$\ddot{y} - y = -\frac{2}{16}e^t$$

$$2Ae^t + Ate^t - Ate^t = -\frac{e^t}{8}$$

$$2A = -\frac{1}{8}$$

innen

$$A = -\frac{1}{16}$$

$$y_{p_2} = -\frac{1}{16}te^t.$$

A harmadik pedig:

$$y_{p_3} = \frac{1}{16} = e^{\alpha t}P_n(t)$$

$$n = 0 \ , \ m = 0$$

$$\alpha = 0 \ , \ \beta = 0$$

$$N = \max(0,0) = 0$$

$$\alpha \pm i\beta = 0 \text{ nem karakterisztikus gyök} \quad \Rightarrow \quad p = 0,$$

innen

$$y_{p_3} = t^0 e^{\alpha t} R_0(t) = A$$

$$\dot{y} = 0$$

$$\ddot{y} = 0$$

$$0 - A = \frac{1}{16}$$

$$A = -\frac{1}{16}$$

$$y_{p_3} = -\frac{1}{16}.$$

A partikuláris megoldás tehát:

$$y_p = \frac{e^{2t}}{48} - \frac{1}{16} t e^t - \frac{1}{16},$$

az eredeti egyenlet megoldása t változóval:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{48} e^{2t} - \frac{1}{16} t e^t - \frac{1}{16},$$

x változó szerint pedig:

$$y(x) = c_1 (2x+1) + \frac{c_2}{2x+1} + \frac{1}{48}(2x+1)^2 - \frac{1}{16}(2x+1)\ln|2x+1| - \frac{1}{16}.$$

FELADATOK:

495. Feladat: Határozzuk meg az $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 1 + x^2$ Euler-féle differenciálegyenlet általános megoldását.

496. Feladat: Határozzuk meg az $x^2 y'' - 3xy' + 3y = x^2$ Euler-féle differenciálegyenlet általános megoldását.

497. Feladat: Határozzuk meg az $4x^2 y'' - 2xy' + 2y = \sqrt{x}$ Euler-féle differenciálegyenlet általános megoldását.

10.2.8. Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása a constansok variációjának módszerével

Általános alak: $y'' + ay' + by = f(x)$

Megoldás: *Ha a megfelelő homogén differenciálegyenlet megoldása* $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ *, akkor a partikuláris megoldást az* $y_p = c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2$ *képlet alapján számíthatjuk ki, ahol a* $c_1(x)$ *és* $c_2(x)$ *függvényeket a*

$$c_1'(x) \cdot y_1 + c_2'(x) \cdot y_2 = 0$$
$$c_1'(x) \cdot y_1' + c_2'(x) \cdot y_2' = f(x)$$

egyenletrendszerből számíthatjuk ki, ha az integrálásnál nem adjuk hozzá az ismeretlen állandót.

294. Példa: Határozzuk meg az $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldását.

Megoldás: Határozzuk meg a homogén egyenlet megoldását:

$$y'' - 2y' + y = 0$$
$$r^2 - 2r + 1 = 0$$
$$(r-1)^2 = 0$$
$$r_1 = r_2 = 1$$
$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

A constansok variációjának módszere szerint, ekkor az y_p partikuláris megoldás

$$y_p = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x.$$

Az ismeretlen $c_1(x)$ és $c_2(x)$ függvényeket a következő egyenletrendszerből határozhatjuk meg:

$$c_1'(x) e^x + c_2'(x) x e^x = 0 \qquad / \cdot (-1)$$
$$c_1'(x) e^x + c_2'(x)(x+1) e^x = \frac{e^x}{x}$$

$$c_2'(x)e^x = \frac{e^x}{x}$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int c_2'(x)dx = \int \frac{dx}{x}$$

$$c_2(x) = \ln|x|.$$

Helyettesítsük vissza az egyenletrendszer első egyenletébe:

$$c_1'(x)e^x + \frac{1}{x}xe^x = 0$$

$$c_1'(x) = -1$$

$$\int c_1'(x)dx = -\int dx$$

$$c_1(x) = -x.$$

A partikuláris megoldás tehát

$$y_p = -xe^x + xe^x \ln|x|,$$

az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása pedig

$$y = c_1e^x + c_2xe^x - xe^x + xe^x \ln|x|.$$

295. Példa: Határozzuk meg az $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$ állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldását.

Megoldás: Az előző feladat megoldásmenetéhez hasonlóan:

$$y_h: \quad y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$r^2 + 3r + 2r = 0$$

$$r_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$r_1 = -1 \ , \ r_2 = -2$$

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$$

ekkor viszont

$$y_p = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}$$

ahonnan

$$c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} = 0$$

$$-c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{1+e^x}$$

$$-c_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{1+e^x}$$

$$c_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

$$\int c_2'(x)dx = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$$

$$c_2(x) = -\int \frac{e^x(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx = -\int e^x dx + \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$c_2(x) = -e^x + \ln(1+e^x).$$

Ugyanakkor az egyenletrendszerből

$$c_1'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}$$

$$\int c_1'(x)dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$c_1(x) = \ln(1+e^x).$$

A partikuláris megoldás ekkor

$$y_p = e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\left(-e^x + \ln(1+e^x)\right),$$

az eredeti differenciálegyenlet megoldása pedig

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-x} + e^{-2x}\ln(1+e^x).$$

FELADATOK:

498. Feladat: **Határozzuk meg az** $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{\cos 2x}$ **állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldását.**

499. Feladat: **Határozzuk meg az** $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}}$ **állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldását.**

500. Feladat: **Határozzuk meg az** $y'' - 6y' + 9y = 3x^2 e^{3x}$ **állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldását.**

IRODALOMJEGYZÉK

1. M.P.Uščumlič, P.M.Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike I. Naučna Knjiga, Beograd, 1980.

2. Demidovič: Zadaci i rešeni primeri iz matematičke analize za fakultete Tehnička Knjiga, Beograd, 1977.

3. Svetozar Kurepa: Matematička analiza I. Tehnička Knjiga, Zagreb, 1977.

4. Grupa autora: Matematika za više tehničke škole Savremena Administracija, Beograd, 1990.

5. Jožef Detki, Franja Ferenci: Matematika I Univerzitet u Novom Sadu, Subotica, 1983.

6. Szerényi Tibor: Analízis Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

7. B.P.Gyemidovics: Matematikai analízis, feladatgyűjtemény Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

8. Stefan Banach: Differenciál és integrálszámítás Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

9. Novković,Rodić,Kovačević: Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I Univerzitet u Novom Sadu Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1998.

10. MonostoryI.,Szeredai E.: Matematika példatár,VIII. kötet, Differenciálegyenletek Budapesti Műszaki egyetem Műegyetemi Kiadó,1998.

HIBAJEGYZÉK

Oldal	A jegyzetben tévesen ez áll	Ez kellene helyette
45	$\ldots=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3x-2+\frac{10}{x}\right)}{x^2\left(5-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x--2+\frac{10}{x}}{5-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{5}=\ldots$	$\ldots=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3x-\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}{x^2\left(5-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}}{5-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{5}=\ldots$
49	$\lim\limits_{x\to-0}\left(e^{-x}+1\right)=e^{-0}+1=\lim\limits_{x\to+0}(x+\lambda)$	$\lim\limits_{x\to-0}(x+\lambda)=e^{-0}+1=\lim\limits_{x\to+0}\left(e^{-x}+1\right)$
53	$(\mathrm{Arth}x)'=-\frac{1}{x^2-1}\qquad(\lvert x\rvert>1)$	$(\mathrm{Arcth}x)'=-\frac{1}{x^2-1}\qquad(\lvert x\rvert>1)$
74	$y''=\frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x^2)}}\neq 0$	$y''=\frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}}\neq 0$
75	$\frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x^2)}}>0\quad\vee\quad\frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x^2)}}<0$	$\frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}}>0\quad\vee\quad\frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}}<0$
87	$\int \mathrm{sh}x\,dx=\mathrm{ch}x\,dx+c$	$\int \mathrm{sh}x\,dx=\mathrm{ch}x+c$
87	$\int \mathrm{ch}x\,dx=\mathrm{sh}x\,dx+c$	$\int \mathrm{ch}x\,dx=\mathrm{sh}x+c$
88	$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}dx$	$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$
88	$\frac{n}{n-1}x^{\frac{n}{n-1}}+c=\frac{n}{n-1}\sqrt[n-1]{x^n}+c=\frac{nx\cdot\sqrt[n-1]{x}}{n-1}+c$	$\frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}}+c=\frac{n}{n-1}\sqrt[n]{x^{n-1}}+c$
91	$\int\frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x+3}=\left\lvert\begin{matrix}\sin^2 x+3=t\\ 2\sin x\cos x\,dx=dt\\ \sin^2 x\,dx=dt\end{matrix}\right\rvert=\ldots$	$\int\frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x+3}=\left\lvert\begin{matrix}\sin^2 x+3=t\\ 2\sin x\cos x\,dx=dt\\ \sin 2x\,dx=dt\end{matrix}\right\rvert=\ldots$
96	$1=A(x+5)+x$	$1=A(x+5)+Bx$
108-9	$I=$	$I'=\qquad I=4I'$
126	$\mathrm{I}=-\frac{2\mathrm{arctg}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}-\mathrm{arctg}^2e^{\frac{x}{2}}+2\ln\frac{e^x}{1+e^x}+c$	$\mathrm{I}=-\frac{2\mathrm{arctg}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}-\mathrm{arctg}^2e^{\frac{x}{2}}+\ln\frac{e^x}{1+e^x}+c$
135	$\ldots=\left\lvert\begin{matrix}u=\ln^2 x & dv=x^{\frac{1}{2}}dx\\ du=2\ln x\frac{dx}{x} & v=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}dx\end{matrix}\right\rvert=\ldots$	$\ldots=\left\lvert\begin{matrix}u=\ln^2 x & dv=x^{\frac{1}{2}}dx\\ du=2\ln x\frac{dx}{x} & v=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{matrix}\right\rvert=\ldots$
177	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{x^2+y^2}$
177	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{x^2+y^2}$
177	$dz=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$	$dz=\frac{x}{x^2+y^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy$
187	illetve $z_{max}\ldots$	illetve $z_{min}\ldots$

HIBAJEGYZÉK – FOLYTATÁS

Oldal	A jegyzetben tévesen ez áll	Ez kellene helyette
200	ke	ki
200	monden	minden
200	attől	attól
200	jogosságánal	jogosságának
194	függvényel	függvények
230	$(2-9xy^2)\,xdx+(4y^2-6x^3ydy)=0$	$(2-9xy^2)\,xdx+(4y^2-6x^3y)\,dy=0$
230	$\frac{\partial P}{\partial y}=x(-8xy)=-18x^2y$	$\frac{\partial P}{\partial y}=x(-18xy)=-18x^2y$
230	$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-6x^3y$	$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^2-6x^3y$
231	$-6yx^3+c'(y)=4y^3-6x^3y$	$-6yx^3+c'(y)=4y^2-6x^3y$
231	$c'(y)=4y^3$	$c'(y)=4y^2$
231	$c(y)=y^4+c$	$c(y)=\frac{4y^3}{3}+c$
231	$z=x^2-3x^3y^2+y^4+c=0$	$z=x^2-3x^3y^2+\frac{4y^3}{3}+c=0$
231	$x^2-3x^3y^2+y^4=c$	$x^2-3x^3y^2+\frac{4y^3}{3}=c$
231	Ellenőriizük	Ellenőrizzük
243	Htározzuk megaz...harmadrendü	Határozzuk meg az...harmadrendű
254	$y_p=x^0x^{0x}R_1(x)$	$y_p=x^0e^{0x}R_1(x)$
259	$\alpha\pm i\beta=0\pm 2i=2i$	$\alpha\pm i\beta=0\pm 2i=\pm 2i$
262	$y=\frac{x_1e^x}{x}+\frac{c_2e^x}{x}$	$y=\frac{c_1e^x}{x}+\frac{c_2e^x}{x}$
267	k,tszeres	kétszeres
268	ha $2x+10$Euler-féle	Euler-féle