LQR

Linear Quadratic Regulator

A pólusáthelyezés, sajátérték elhelyezés alternatívájaként egy megoldás, ami optimalizálja a következő költségfüggvényt:

$\underline{x} = \underline{x}(t) \in R^n$
$\underline{u} = \underline{u}(t) \in R^r$
$Q \in R^{n \times n}$
$R \in R^{r \times r}$

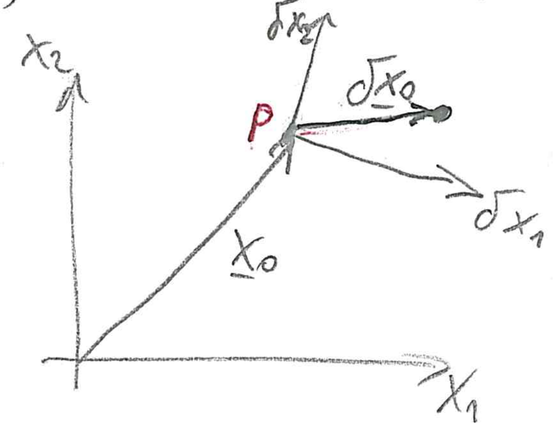
$$\boxed{J = \int_0^\infty \left(\delta \underline{x}^T(t) \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \delta \underline{x}(t) + \delta \underline{u}^T(t) \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \delta \underline{u}(t) \right) dt}$$

x(t) és u(t) valójában egy ideális (elvárt) trajektóriától való eltérést jelölnek, vagyis

$$\underbrace{\delta x(t)}_{\text{eltérés}} = \underbrace{x(t)}_{\text{megvalósított}} - \underbrace{\bar{x}(t)}_{\text{nominális}} \quad ; \quad \delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$$

$$\delta y(t) = y(t) - \bar{y}(t)$$

Pálya mentén való perturbáció.



P – munkapont

A megfelelő koordinátarendszer origó választásával

$\bar{x} = \bar{u} = \bar{y} = 0$ választható.

Egyszerűbb jelölés miatt a továbbiakban jelölje:

$$x = \delta \underline{x}(t) \quad ; \quad u = \delta \underline{u}(t) \quad \text{és} \quad y = \delta y(t)$$

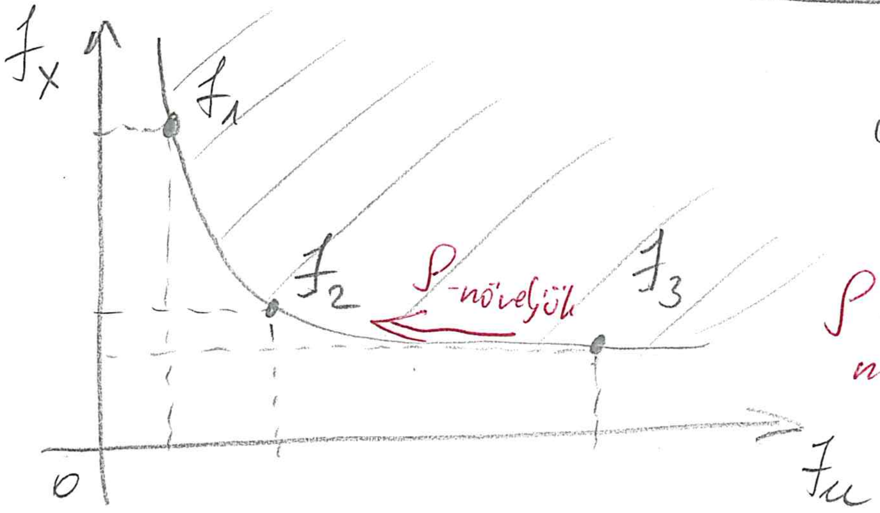
Vagyis nincs alapjel, minden a hibára értendő.

$Q = Q^T \geq \emptyset$; $R = R^T > \emptyset$ Megválasztása:

$$\underbrace{J_x = \int_0^\infty (x^T \cdot Q \cdot x)\,dt}_{\text{A pályakövetési hiba energiája}} \; ; \; \underbrace{J_u = \int_0^\infty (u^T R u)\,dt}_{\text{A felhasznált energia négyzete}}$$

R és Q megadják az egyes vektorelemek jelentőségét, súlyát.

$$\boxed{J = J_x + \rho \cdot J_u}$$



Optimális megoldás J_2

ρ-növelésével nagyobb jelentőséget adunk az energiafelhasználás minimalizálásának.

Feladat: határozzuk meg a teljes állapot-visszacsatolás erősítési mátrixát, úgy, hogy a J költségfüggvényt optimáljuk.

$$u = -K \cdot x \quad ; \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x.$$

Feltétel: • $(A - BK)$ – stabil!

• Az (A, B) teljesen irányítható!

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\,dt \longrightarrow \min!$$

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + x^T K^T R K x)\,dt = \int_0^\infty \underbrace{x^T (Q + K^T R K) x}_{u>0}\,dt.$$

$V = x^T \cdot P \cdot x$ – Ljapunov függvény $P^T = P > \emptyset$

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad ; \quad \frac{dV}{dt} < \emptyset \text{ a feltétel}$$

$$u = x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x}$$

$$= -x^T \left((A - BK)^T \cdot P + P (A - BK) \right) x.$$

$$(A - BK)^T \cdot P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K).$$

Legyen:

$$R = T^T \cdot T$$

$$(A^T - K^T B^T) P + P(A - BK) + Q + K^T \cdot T^T \cdot T \cdot K = 0$$

$$A^T P + P \cdot A + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - \quad (1)$$

$$- P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

J minimalizálásának feladata átalakul a következő négyzetes alak minimalizálására:

$$x^T [T \cdot K - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] x.$$

A fenti négyzetes alak nem negatív, a minimális megoldás ezért egyenlő $\emptyset$-val, vagyis:

$$T \cdot K = (T^T)^{-1} \cdot B^T \cdot P$$

A keresett $K = T^{-1} (T^T)^{-1} \cdot B^T P$

$$\boxed{K = R^{-1} B^T P.}$$

K meghatározása után ① ből a további elemek:

$$\boxed{A^T P + P \cdot A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0}$$

Riccati egyenlet

Megoldást ad a Matlab "lqr" függvénye.
Központi kérdés Q és R megválasztása.

Példa: $J = \int_0^\infty (x_1^2 + 2x_2^2 + u_1^2 + u_2^2)\,dt$

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $x(0) = [x_1(0), x_2(0)]^T$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.09621 & 0.01375 \\ 0.01375 & 0.36840 \end{bmatrix}.$$

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot P = \begin{bmatrix} 0.15121 & 1.48735 \\ 0.20617 & 0.39590 \end{bmatrix}$$

$$u_1(t) = -0.15121 \cdot x_1(t) - 1.48735 \cdot x_2(t)$$
$$u_2(t) = -0.20617 \cdot x_1(t) - 0.39590 \cdot x_2(t)$$

Megvalósítási algoritmus:

Modellezés

1. A rendszer matematikai modelljének meghatározása

   $$\dot{x} = f(x,u)$$

2. Meghatározni az elvárt trajektóriumot $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$.

3. Meghatározni Q, R mátrixokat.

OFF-Line

4. A és B mátrixok meghatározása.

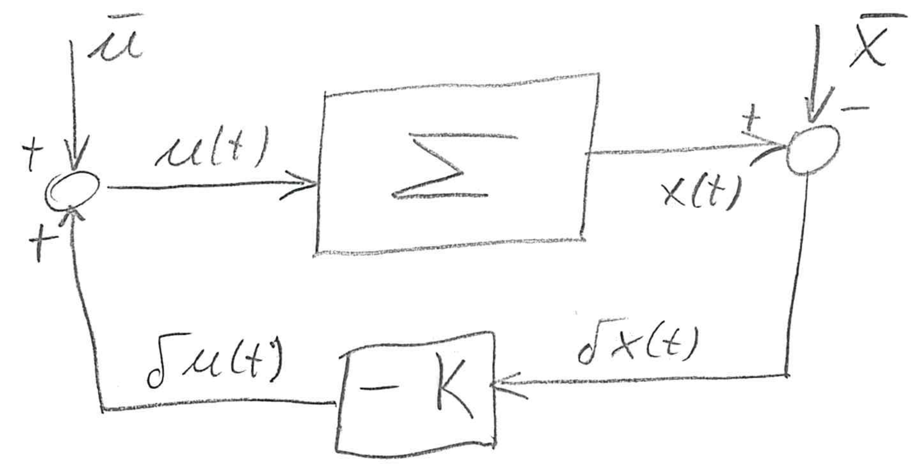
5. P meghatározása

ON-Line

6. $\delta x(t)$ meghatározása

7. $\delta u(t) = -K\delta x$ számítása

8. $u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$ számítása



MIMO LTI diszkrétidejű optimális LQ irányítás

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad ; \quad u_k = -K \cdot x_k$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{\infty} \left(x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i \right) \quad ; \quad \begin{matrix} Q = Q^T \geq 0 \\ R = R^T > 0 \end{matrix}$$

$$J(x_k) = \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{\infty} x_i^T (Q + K^T R K) x_i$$

$$x_{k+1} = (A - BK) x_k = A_c \cdot x_k$$

Bontsuk fel a költségfüggvényt:

$$J(x_k) = \frac{1}{2} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i \right)$$

$$J(x_k) = \frac{1}{2} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right) + J(x_{k+1})$$

Legyen az optimális megoldás $J^*(x_k) = x_k^T P x_k$

A kezdeti feltétel $J(x_k = 0) = 0$

$J^*(x_k)$ – csak a kezdeti feltételtől függ és nem függ a jövőbeni értékektől.

$$x_k^T P x_k = \frac{1}{2} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right) + x_{k+1}^T P x_{k+1}$$

$$\mathcal{J}(x_k) = x_k^T P x_k = \frac{1}{2}\left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k\right) +$$

$$+ (A x_k + B u_k)^T P (A x_k + B u_k) \qquad (2)$$

Minimalizáljuk u_k szerint.

$$0 = \frac{\partial \mathcal{J}(x_k)}{\partial u_k} = x_k^T P x_k = R \cdot u_k + B^T P (A x_k + B u_k)$$

$$(R + B^T P B) u_k = -B^T P A x_k$$

$$u_k = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P A x_k \quad ; \quad u_k = -K \cdot x_k$$

$$\boxed{K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A}$$

$$+ \quad (2)$$

$$x_k^T\left[(A - BK)^T P (A - BK) - P + Q + K^T R K\right] x_k = 0$$

$$(A - BK)^T P (A - BK) - P + Q + K^T R K = 0$$

$$\left[A - B(R + B^T P B)^{-1} B^T P A\right]^T P \left[A - B(R + B^T P B)^{-1} B^T P A\right] -$$

$$- P + Q + \left[(R + B^T P B)^{-1} B^T P A\right]^T R \left[(R + B^T P B)^{-1} B^T P A\right] = \emptyset$$

Amiből következik:

$$\boxed{A^T P A - P + Q - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A = \emptyset}$$

DI RICCATI

Matlab: dlqr(A, B, Q, R)