VISOKA TEHNIČKA ŠKOLA
STRUKOVNIH STUDIJA SUBOTICA
SZABADKAI MŰSZAKI SZAKFŐISKOLA

Mgr. Boros István
Csikós Pajor Gizella

DISZKRÉT MATEMATIKA

$7\times(15+15+15)$

FELADATOK A GYAKORLATOKHOZ ÉS ÍRÁSBELI VIZSGAFELADATOK

SZABADKA/SUBOTICA 2008

Szakvéleményező
Dr. Takács Márta

A szöveg előkészítése
Mgr. Boros I. és Csikós P.G.
az elektronikus kiadvány
és a nyomtatott változat
műszaki szerkesztője: Mgr. Boros I.

A kiadó nevében: Dr. Matijevics István, igazgató

Példányszám: 150
Nyomda: Biromarket

Opinio magistri probabilis tantum.
Nihil probat qui nimium probat.*

ELŐSZÓ

Ez a »Feladatgyűjtemény Diszkrét Matematikából 7×(15+15+15)« a Szabadkai Műszaki Szakfőiskola elsőéves hallgatói számára készült. A feladatgyűjtemény előtt már megjelent a tankönyv-helyettesítő jegyzet Diszkrét Matematika címen. A jegyzetet a Szakfőiskolánk Programja alapján szerkesztettük. A tantárgy minden akkreditált program szerint tanuló elsőéves hallgatónak alaptantárgy, és az első félév (őszi szemeszter) folyamán hallgatják heti 2 óra előadás és 2 óra táblagyakorlat kereteiben. A Feladatgyűjtemény összeállításakor a szerzők feltételezték, hogy az olvasó az alapvető elméleti ismereteket már elsajátította. Jelen kiadvány elsősorban a gyakorlatokon kidolgozandó feladatokat tartalmazza, valamint a korábbi írásbeli kollokviumokon és vizsgákon kiadott feladatok megoldásait mutatja meg a szokásos megoldásmódnál egy kissé bőségesebb magyarázattal. A feladatok egy részét megoldás nélkül csak kitűztük, úgymond: egy kicsit önállóan is gondolkodjon az olvasó! A grafikus ábrázolás majdnem teljesen kiszorult, mert a táblagyakorlatokon ezt bőségesen pótoljuk. Ez a Feladatgyűjtemény a Jegyzettel együtt tekinthető egésznek, ezért nem mellékeltük a felhasznált irodalom listáját – ez a lista azonos lenne a Jegyzetben közzétett listával. A feladatok megfogalmazása részben azonos a felsorolt forrásokban megtalálható feladatokéval, de több feladat a szerzők által modifikált illetve önállóan megfogalmazott szöveggel jelenik meg.

* A tanító véleménye csak valószínűleg igaz.
Semmit sem bizonyít, ha túl sokat bizonyít.

A Feladatgyűjtemény **hét** fejezetre tagolódik.
Mindegyik fejezet két részből áll:

0. A GYAKORLATOKON KIDOLGOZANDÓ FELADATOK
(A feladatokat Csikós Pajor Gizella válogatta),

1. MEGOLDOTT ÍRÁSBELI FELADATOK
(Válogatás és megoldások Mgr. Boros István)

A megoldott vizsgafeladatok mindegyike után felkínáltunk egy nem megoldott feladatot is (ha ezekkel probléma adódik, forduljon a hallgató szerzőkhöz). Lapozzák, olvassák a Feladatgyűjteményt (és a Jegyzetet is) az előszó felett a jobb felső sarokban álló mottó szellemében. Észrevételeiket és megjegyzéseiket személyesen és elektronikus levélben is közölhetik az alábbi címeken:
iboros@vts.su.ac.yu vagy cspelli@vts.su.ac.yu

Szabadka, 2008. szeptembere

7×(15+15+15)

TARTALOM

7 fejezet
15 gyakorló feladat
15 megoldott írásbeli vizsgafeladat
15 feladat önálló gyakorlásra:

1. POLINOMOK

1.0. GYAKORLÓ FELADATOK

1.0.1. Feladat:

Határozzuk meg a $P(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ és $Q(x)=x^2-3x+1$ polinomok hányadosát..

Megoldás:

$$\begin{array}{l}
\left(2x^4-3x^3+4x^2-5x+6\right):\left(x^2-3x+1\right)=2x^2+3x+11 \\
\underline{\pm 2x^4 \mp 6x^3 \pm 2x^2} \\
\qquad 3x^3+2x^2-5x+6 \\
\qquad \underline{\pm 3x^3 \mp 9x^2 \pm 3x \qquad} \\
\qquad\qquad 11x^2-8x+6 \\
\qquad\quad \underline{\mp 11x^2 \mp 33x \pm 11} \\
\qquad\qquad\qquad 25x-5
\end{array}$$

A két polinom hányadosát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{P_4(x)}{Q_2(x)}=2x^2+3x+11+\frac{25x-5}{x^2-3x+1}\ .$$

1.0.2. Feladat:

Határozzuk meg a $P(x)=x^3-3x^2-x-1$ és $Q(x)=3x^2-2x+1$ polinomok hányadosát.

Megoldás:

$$\left(x^3-3x^2-x-1\right):\left(3x^2-2x+1\right)=\frac{x}{3}-\frac{7}{9}$$

$$\frac{\pm x^3 \mp \frac{2x^2}{3} \pm \frac{x}{3}}{}$$

$$-\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1$$

$$\frac{\mp \frac{7}{3}x^2 \pm \frac{14}{9}x \mp \frac{7}{9}}{}$$

$$-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$$

A két polinom hányadosát tehát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{P_3(x)}{Q_2(x)}=\frac{x}{3}-\frac{7}{9}+\frac{-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}}{3x^2-2x+1}\;.$$

1.0.3. Feladat:

Írjuk fel azt a harmadfokú $P(x)$ polinomot, amelyre teljesülnek a következő feltételek: $P(0)=2,\ P(-1)=-2,\ P(-2)=1,\ P(1)=3$.

Megoldás:

A harmadfokú polinom általános alakja $P_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Helyettesítsük be a polinomba az x változó adott értékeit. Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$P_3(0)=d$$
$$P_3(-1)=-a+b-c+d$$
$$P_3(1)=a+b+c+d$$
$$P_3(-2)=-8a+4b-2c+d\quad.$$

Ebből viszont a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & & & & & & & d & = & 2 \\ - & a & + & b & - & c & + & d & = & -2 \\ & a & + & b & + & c & + & d & = & 3 \\ - & 8a & + & 4b & - & 2c & + & d & = & 1 \\ \hline - & a & + & b & - & c & = & -4 & & \\ & a & + & b & + & c & = & 1 & & \\ - & 8a & + & 4b & - & 2c & = & -1 & & \\ \hline \end{array}$$

Az első két egyenlet összeadásával kapjuk, hogy : $b = -\frac{3}{2}$.

Ebből következik továbbá, hogy:

$$\begin{array}{l} a + c = \frac{5}{2} \\ -8a - 2c = 5 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2a + 2c = 5 \\ -8a - 2c = 5 \\ \hline \end{array},$$

ahonnan $-6a = 10$. Az a együttható értéke tehát $-\frac{5}{3}$, továbbá $c = \frac{25}{6}$.

Így a keresett harmadfokú polinom a következőképpen írható fel: $P_3(x) = -\frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{6}x + 2$.

1.0.4. Feladat:

Számítsuk ki az a, b, c valós együtthatókat a $P(x)$ polinomban úgy, hogy az osztható legyen az $x-1$ és $x+2$ binomokkal, $x-4$-gyel való osztás esetén pedig 18 legyen a maradék, ha:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Megoldás:

A Bezout-tétel alapján következik, hogy:

$$(x-1) \mid P(x) \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b + c = 0$$

$$(x+2) \mid P(x) \Rightarrow P(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 4a - 2b + c = 0$$

$$P(4) = 18 \Rightarrow 64 + 16a + 4b + c = 18$$

Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & -1 \\ 4a & - & 2b & + & c & = & 8 \\ 16a & + & 4b & + & c & = & -46 \end{array} \quad \Rightarrow \quad c=-1-a-b$$

$$4a-2b-1-a-b=8$$

$$16a+4b-1-a-b=-46$$

$$3a-3b=9$$

$$15a+3b=-45$$

$$a-b=3$$

$$5a+b=-15$$

$$6a=-12 \;\Rightarrow\; a=-2 \;\Rightarrow\; b=-5 \;\Rightarrow\; c=6$$

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ a keresett harmadfokú polinom.

1.0.5. Feladat:

Határozzuk meg a p,q,r,s valós együtthatókat a

$$P_4(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$$

polinomban úgy, hogy az osztható legyen a $x+2,\ x+4,\ x-3$ binomokkal, $x+1$-gyel való osztás esetén pedig 24 legyen a maradék.

Megoldás:

A Bezout-tétel alapján következik, hogy:

$$(x+2)\,|\,P(x) \;\Rightarrow\; P(-2)=s-2r+4q-8p+16=0$$

$$(x+4)\,|\,P(x) \;\Rightarrow\; P(-4)=s-4r+16q-64p+256=0$$

$$(x-3)\,|\,P(x) \;\Rightarrow\; P(3)=s+3r+9q+27p+81=0$$

$$P(-1)=s-r+q-p+1=24 \quad \Rightarrow \quad s=23+p-q+r$$

Helyettesítsük be az s változót a többi egyenletbe. Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -7p & + & 3q & - & r & = & -39 \\ -63p & + & 15q & - & 3r & = & -279 \\ 28p & + & 8q & + & 4r & = & -104 \end{array} \Rightarrow r = 39 - 7p + 3q$$

$$-63p + 15q - 117 + 21p - 9q = -279$$
$$28p + 8q + 156 - 28p + 12q = -104$$

$$\begin{array}{rcrcr} -42p & + & 6q & = & -162 \\ & & 20q & = & -260 \end{array} \Rightarrow q = -13$$

$$\Rightarrow p = 2 \Rightarrow r = -14 \Rightarrow s = 24.$$

Tehát a kresett $P(x)$ polinom: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$.

1.0.6. Feladat:

Keressük meg a $P(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ polinom összes gyökét, majd botsuk tényezőkre a valós számok halmaza felett.

Megoldás:

A $P(x)$ polinom hatodfokú, ami azt jelenti, hogy összesen 6 gyöke van amelyek közül valamelyik esetleg lehet többszörös gyök is. Ha létezik egész gyök, akkor az a 4 szabad tag osztója kell legyen, tehát a $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ számok között kereshetjük őket. A Horner-séma segítségével gyorsan és könnyen leellenőrizhetjük, az felsorolt számok közül melyik gyöke az adott polinomnak:

	1	0	-6	-4	9	12	4	
1	1	1	-5	-9	0	12	16	$\Rightarrow$ az 1 nem gyök

	1	0	-6	-4	9	12	4	
-1	1	-1	-5	1	8	4	0	$\Rightarrow$ a -1 egyszeres gyök

	1	-1	-5	1	8	4	
-1	1	-2	-3	4	4	0	$\Rightarrow$ a -1 kétszeres gyök

	1	-2	-3	4	4	
-1	1	-3	0	4	0	$\Rightarrow$ a -1 háromszoros gyök

	1	-3	0	4	
-1	1	-4	4	0	$\Rightarrow$ a -1 négyszeres gyök

A gyökök ismeretében a $P(x)$ polinomot a következőképpen írhatjuk fel:

$$P(x) = (x+1)^4 (x^2 - 4x + 4).$$

Ebből könnyen belátható, hogy a tényezőkre bontott alak az R halmaz felett:

$$P(x) = (x+1)^4 (x-2)^2 .$$

1.0.7. Feladat:

Határozzuk meg az adott polinom racionális gyökeit:

$$P(x) = x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8.$$

Megoldás:

A hatodfokú polinomnak összesen 6 gyöke van, amelyek közül nem kell mind valós legyen, a valósak közül pedig nem kell mind racionális legyen. Az egész és tört gyököket (tehát a racionálisokat) az előző feladathoz hasonlóan kereshetjük a Horner-sémával:

	1	-6	11	-1	-18	20	-8	
1	1	-5	6	5	-13	7	-1	$\Rightarrow$ az 1 nem gyök

	1	-6	11	-1	-18	20	-8	
-1	1	-7	18	-19	1	19	-27	$\Rightarrow$ a -1 nem gyök

	1	-6	11	-1	-18	20	-8	
2	1	-4	3	5	-8	4	0	$\Rightarrow$ a 2 egyszeres gyök

Az első gyök ($x_1 = 2$) meghatározása után az adott polinomot felírhatjuk a következő tényezős alakban:

$$P(x) = (x-2)\left(x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 8x + 4\right).$$

A továbbiakban a kapott ötödfokú polinom gyökeit keressük. Mivel a 2 lehet többszörös gyök is, még egyszer számolunk vele a sémában:

	1	-4	3	5	-8	4	
2	1	-2	-1	3	-2	0	$\Rightarrow$ a 2 kétszeres gyök

Ezért a polinom a $P(x) = (x-2)^2\left(x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2\right)$ alakban is írható. Most a negyedfokú polinom gyökeit keressük, azzal hogy még mindig fennállhat az a lehetőség is, hogy a 2 háromszoros gyök. Ellenőrizzük le:

	1	-2	-1	3	-2	
2	1	0	-1	1	0	$\Rightarrow$ a 2 háromszoros gyök

Ezekután a polinom felírható $P(x) = (x-2)^3\left(x^3 - x + 1\right)$ alakban is. A továbbiakban tehát az $x^3 - x + 1$ harmadfokú polinom gyökeit keressük. Ennek vagy három valós, vagy egy valós és két komplex gyöke van, de mindenféleképpen létezik még egy valós gyök. Ez a valós gyök lehet akár racionális, akár irracionális szám is. Ha racionális lenne, akkor az csak az 1 vagy a -1 lehetne (a szabad tag osztói), de ezeket már a korábbi Horner-sémákkal kizártuk. Ezek alapján kimondhatjuk, hogy nincs több racionális gyök. A feladat megoldása ezzel befejeződött, mert csak a racionális gyököket kellett meghatároznunk, ezek pedig az $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ számok. Az utolsóként felírható tényezős alak:

$$P(x) = (x-2)^3\left(x^3 - x + 1\right).$$

1.0.8. Feladat:

Határozzuk meg a valós a paraméter értékét a $P_4(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + a$ polinomban úgy, hogy az egyik gyöke az $x_1 = 2 + i$ komplex szám legyen. Az így kapott polinomot bontsuk tényezőkre a valós számok halmaza felett.

Megoldás:

Az adott polinom együtthatói valós számok, ezért ha

$$x_1 = 2 + i \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 - i .$$

Felírható tehát, hogy:

$$P_4(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_2(x)$$

$$P_4(x) = (x - 2 - i)(x - 2 + i)P_2(x)$$

$$P_4(x) = (x^2 - 4x + 5)P_2(x) \quad \Rightarrow \quad P_2(x) = P_4(x) : (x^2 - 4x + 5).$$

$$\begin{array}{l}
(x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + a) : (x^2 - 4x + 5) = x^2 - 2x + 1 \\
\underline{\pm x^4 \mp 4x^3 \pm 5x^2} \\
\qquad -2x^3 + 9x^2 - 14x + a \\
\qquad \underline{\mp 2x^3 \pm 8x^2 \mp 10x} \\
\qquad\qquad\qquad x^2 - 4x + a \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\pm x^2 \mp 4x \pm 5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a - 5
\end{array}$$

A $P_4(x)$ polinom maradék nélkül osztható az $(x^2 - 4x + 5)$ polinommal, ezért $a - 5 = 0$ kell legyen, ahonnan $a = 5$. A polinom tényezőkre bontott alakja pedig $P_4(x) = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 2x + 1)$, illetve:

$$P_4(x) = (x^2 - 4x + 5)(x - 1)^2 .$$

1.0.9. Feladat:

A $P(x)$ polinom $x-1, x-2$ és $x+1$-gyel való osztásánál a maradékok rendre $2, 3$ és 6. Határozzuk meg a $P(x)$ polinomnak ezek szorzatával, az $(x-1)(x-2)(x+1)$-gyel történő osztásának maradékát.

Megoldás:

Az $(x-1)(x-2)(x+1)$ osztó egy harmadfokú polinom, ami azt jelenti, hogy a vele történő osztás maradéka legfeljebb egy másodfokú polinom lehet, vagyis felírható az $R(x)=ax^2+bx+c$ alakban. Érvényes tvábbá, hogy:

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x+1)Q(x)+R(x),$$

illetve

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c.$$

Vegyük észre, hogy innen:

$$P(1)=0\cdot Q(x)+a+b+c=a+b+c$$
$$P(2)=0\cdot Q(x)+4a+2b+c=4a+2b+c$$
$$P(-1)=0\cdot Q(x)+a-b+c=a-b+c.$$

Másrészt a feladat feltételei és a Bezout-tétel alapján igaz, hogy $P(1)=2,\ P(2)=3,\ P(-1)=6$. Ezért a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 2 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 3 \\ a & - & b & + & c & = & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow\quad 2a+2c=8 \Rightarrow a+c=4 \quad\Rightarrow\quad c=4-a$$

$$a+b+4-a=2 \quad\Rightarrow\quad b=-2 \quad\Rightarrow\quad a=1 \quad\Rightarrow\quad c=3.$$

Ez azt jelenti, hogy a $P(x)$ polinom $(x-1)(x-2)(x+1)$ történő osztásakor a maradék $R(x)=x^2-2x+3$.

1.0.10. Feladat:

Az $x^3 - 7x + \lambda = 0$ egyenletben határozzuk meg a valós λ paraméter értékeit úgy, hogy az egyik gyök a másiknak kétszerese legyen.

Megoldás:

A megoldásban a harmadfokú egyenletre vonatkozó Viete-képleteket fogjuk alkalmazni, amelyek a gyökök és az együtthatók közötti öszefüggéseket adják meg:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}, \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

A mi esetünkben $P_3(x) = x^3 - 7x + \lambda = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, ami azt jelenti, hogy az $a_3 = 1,\ a_2 = 0,\ a_1 = -7,\ a_0 = \lambda$, és tudjuk még hogy $x_1 = 2x_2$. Ha ezeket behelyettesítjük a Viete-képletekbe, akkor a következő nemlineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -3x_2 \\ &x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2x_2^2 + 3x_2x_3 = -7 \\ &x_1x_2x_3 = 2x_2^2x_3 = -\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2x_2^2 - 9x_2^2 = -7 \quad \Rightarrow \quad -7x_2^2 = -7 \quad \Rightarrow \quad x_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \pm 1 \\ &2x_2^2(-3x_2) = -\lambda \quad \Rightarrow \quad -6x_2^3 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad 6x_2^3 = \lambda \end{aligned}$$

Ha $x_2 = 1 \Rightarrow \lambda = 6$, a polinom pedig: $P(x) = x^3 - 7x + 6$ és $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3$.

Ha $x_2 = -1 \Rightarrow \lambda = -6$, a polinom pedig $P(x) = x^3 - 7x + 6$ és $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$.

1.0.11. Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy a $P_{2n}(x)=(x-1)^{2n}-x^{2n}+2x-1$ polinom minden x érték esetén osztható a $Q(x)=2x^3-3x^2+x$ polinommal.

Megoldás:

Elegendő megmutatni, hogy a $Q(x)$ polinom minden gyöke egyúttal a $P_{2n}(x)$ polinomnak is gyöke. A $Q(x)$ polinom gyökei:

$$Q(x)=0$$
$$2x^3-3x^2+x=0$$
$$x(2x^2-3x+1)=0 \quad \Rightarrow$$
$$x_1=0,\quad x_{2/3}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} \quad \Rightarrow \quad x_2=1,\quad x_3=\frac{1}{2}.$$

Mutassuk meg, hogy a 0, 1, $\frac{1}{2}$ számok a $P_{2n}(x)$ polinomnak is gyökei:.

$$P_{2n}(0)=(-1)^{2n}-0+0-1=1-1=0$$

$$P_{2n}(1)=(1-1)^{2n}-1^{2n}+2\cdot1-1=0-1+2+1=0$$

$$P_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-1\right)^{2n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+2\cdot\frac{1}{2}-1=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+1-1=\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}=0$$

Ezzel megmutattuk, hogy a $Q(x)$ polinom minden gyöke a $P_{2n}(x)$ polinomnak is gyöke, tehát a $P_{2n}(x)$ polinom osztható a $Q(x)$ polinommal.

1.0.12. Feladat:

Az $f(x)=\dfrac{5x-2}{x^2+x-2}$ racionális törtfüggvényt bontsuk fel elemi résztörtek összegére.

Megoldás:

Az x^2+x-2 nevező valós gyökei az $x_1=1,\ x_2=-2$ számok, ezért felírhatjuk, hogy:

$$f(x)=\frac{5x-2}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \quad /\cdot(x-1)(x+2)$$

$$5x-2=A(x+2)+B(x-1)$$
$$5x-2=Ax+2A+Bx-B$$
$$5x-2=x(A+B)+2A-B$$

Az utolsó egyenlet bal és jobb oldalán a megfelelő együtthatók kiegyenlítésével a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$A+B=5$$
$$\underline{2A-B=-2}$$
$$3A=3 \quad \Rightarrow \quad A=1 \quad \wedge \quad B=4\,.$$

A keresett felbontás tehát $f(x)=\dfrac{5x-2}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{x+2}$.

1.0.13. Feladat:

Bontsuk elemi résztörtek összegére az $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-4x+4}$ racionális törtfüggvényt..

Megoldás:

Az x^2-4x+4 nevező az $(x-2)$ binom négyzete, így:

$$f(x)=\frac{2x-3}{x^2-4x+4}=\frac{2x-3}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}\qquad /\cdot(x-2)^2$$

$$2x-3=A(x-2)+B$$
$$2x-3=Ax-2A+B$$

Innen következik, hogy $A=2\quad\wedge\quad -2A+B=-3\quad\Rightarrow\quad B=1$.

A keresett felbontás tehát: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-4x+4}=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

1.0.14. Feladat:

Az $f(x)=\dfrac{5x^2+7x+6}{x^3+3x^2-4}$ racionális törtfüggvényt bontsuk fel parciális (elemi) résztörtek összegére.

Megoldás:

A Horner-séma segítségével könnyen megkaphatók az x^3+3x^2-4 polinom gyökei. $x_1=1$, $x_2=x_3=-2$, mert:

	1	3	0	-4		
1	1	4	4	0	$\Rightarrow$	$x_1=1$

$$x^3+3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)=(x-1)(x+2)^2\quad\Rightarrow\quad x_{2/3}=-2.$$

Ekkor az elemi résztörtekre való bontás a következőképpen néz ki:

$$f(x)=\frac{5x^2+7x+6}{x^3+3x^2-4}=\frac{5x^2+7x+6}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$5x^2+7x+6=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)$$

$$x=1 \Rightarrow 18=9A \Rightarrow A=2$$

$$x=-2 \Rightarrow 12=-3C \Rightarrow C=-4$$

$$x=0 \Rightarrow 6=4A-2B-C=8-2B+4=12-2B \Rightarrow B=3.$$

A keresett felbontás tehát: $f(x)=\dfrac{5x^2+7x+6}{x^3+3x^2-4}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{4}{(x+2)^2}$.

1.0.15. Feladat:

Bontsuk elemi résztörtek összegére az adott $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+3}{x^4+2x^3+4x^2+3x+2}$ racionális törtfüggvényt.

Megoldás:

A nevező egy olyan negyedfokú polinom, amelynek nincsenek valós gyökei (ellenőrizzék le a Horner-séma segítségével). A négy gyök tehát két konjugált komplex számpár. Ekkor a nevező felbontható két másodfokú polinom szorzatára:

$$x^4+2x^3+4x^2+3x+2=(x^2+ax+2)(x^2+bx+1)$$

$$x^4+2x^3+4x^2+3x+2=$$

$$=x^4+ax^3+2x^2+bx^3+abx^2+ax+x^2+2bx+2\ .$$

Innen:

$$a+b=2 \Rightarrow a=2-b$$

$$3+ab=4$$

$$a+2b=3 \Rightarrow 2-b+2b=3 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=1\ .$$

Következik, hogy:

$$x^4+2x^3+4x^2+3x+2=(x^2+x+2)(x^2+x+1).$$

Ekkor:

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+3}{x^4+2x^3+4x^2+3x+2}=\frac{2x^2+2x+3}{\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+x+1\right)}=$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2+x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$2x^2+2x+3=(Ax+B)\left(x^2+x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+x+2\right)$$

$$2x^2+2x+3=Ax^3+Ax^2+Ax+Bx^2+Bx+B+$$

$$+Cx^3+Cx^2+2Cx+Dx^2+Dx+2D$$

$$2x^2+2x+3=(A+C)x^3+(A+B+C+D)x^2+$$

$$+(A+B+2C+D)x+B+2D$$

A megfelelő együtthatók kiegyenlítésével, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$A+C=0 \quad\Rightarrow\quad C=-A$$

$$A+B+C+D=2$$

$$A+B+2C+D=2$$

$$\underline{B+2D=3 \quad\Rightarrow\quad B=3-2D}$$

$$A+3-2D-A+D=2$$

$$\underline{A+3-2D+2(-A)+D=2}$$

$$-D=-1 \quad\Rightarrow\quad D=1 \quad\Rightarrow\quad B=1$$

$$\underline{-A-D=-1 \quad\Rightarrow\quad -A-1=-1 \quad\Rightarrow\quad A=0 \quad\Rightarrow\quad C=0}$$

A keresett felbontás:

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+3}{x^4+2x^3+4x^2+3x+2}=\frac{1}{x^2+x+2}+\frac{1}{x^2+x+1}\ .$$

1.1. ÍRÁSBELI VIZSGAFELADATOK

1.1.1. Feladat

Bontsa törzstényezők szorzatára a valós számhalmaz felett az alábbi polinomot:

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \ ,$$

Megoldás:

Ismert tény, hogy az egész együtthatójú polinomok racionális gyökeinek számlálója a szabad tag, míg a nevezője a vezéregyüttható tényezői között keresendők. Normalizált polinomról lévén szó, a racionális gyökök (ha léteznek) akkor a ±1, ±2, ±3, ±6 számok között vannak. A Horner-elrendezéssel megállapítjuk, hogy a gyökök: +1, –2 és +3, a valós felbontás tehát:

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x^2 + 1).$$

Gyakorló feladat

Bontsa törzstényezők szorzatára a valós számhalmaz felett az

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$$

polinomot, ha tudjuk hogy létezik legalább egy többszörös valós gyöke.

1.1.2. Feladat

Bontsa törzstényezők szorzatára a valós számhalmaz felett az alábbi polinomot:

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 13x^2 + 8x - 2 \ ,$$

Megoldás:

Az előző feladatban már említett tény miatt a gyököket a ±1, ±2 számok között keressük. A Horner-elrendezéssel megállapítjuk, hogy az egyetlen valós gyök: +1 (méghozzá háromszoros!), így a valós tényezőkre bontás a következő:

$$P(x) = (x-1)^3\,(x^2 - 2x + 2).$$

Gyakorló feladat

Bontsa törzstényezők szorzatára a valós számhalmaz felett a $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 9x - 18$ polinomot.

1.1.3. Feladat

Határozza meg azt az ötödfokú normalizált polinomot, amelyről ismert, hogy az egyik komplex gyöke $z_1 = 2+2i$, a valós gyökök között pedig a 2 egyszeres, míg az 1 kétszeres gyök.

Megoldás:

Mivel $z_1 = 2+2i$ az egyik komplex gyök, ezért $z_2 = 2-2i$ is gyök, tehát a polinom osztható az alábbi kifejezéssel:

$$(z - z_1)(z - z_1) = z^2 - 4z + 8.$$

Ha a 2 egyszeres gyök, akkor a polinom osztható $(z-2)$ vel, és végül, mivel az 1 kétszeres gyök, a polinom osztható $(z-1)^2$-nel. Ezek a tények az alábbi következtetésre vezetnek:

$$P_5(z) = (z^2 - 4z + 8)\,(z-2)\,(z-1)^2 =$$

$$= z^5 - 8z^4 + 29z^3 - 54z^2 + 48z - 16.$$

Gyakorló feladat

Határozza meg a negyedfokú valós együtthatójú $P(x)$ normalizált polinom gyökeit, ha a polinom osztható x^2+1 polinommal, és ha $P(1+i)=-4+7i$.

1.1.4.

Feladat

a) Írja fel azt a valós együtthatójú negyedfokú $\boldsymbol{P}(x)$ polinomot, amelynek gyökei $x_1=2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2+3i$. (Vajon felsoroltuk-e a polinom minden gyökét?)

b) Bontsa elemi résztörtekre a $\boldsymbol{Q}(x)/\boldsymbol{P}(x)$ racionális törtfüggvényt, ahol $\boldsymbol{Q}(x) = 8x^3 - 46x^2 + 125x - 157$.

Megoldás:

a) A felsorolt gyökök mellet van még egy: $x_4 = 2 - 3i$. A polinom gyöktényezős alakja tehát:

$$\boldsymbol{P}(x) = (x-2)(x-3)(x^2-4x+13) = x^4 - 9x^3 + 39x^2 - 89x + 78.$$

b) $$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{8x^3-46x^2+125x-157}{x^4-9x^3+39x^2-89x+78} =$$

$$= \frac{8x^3-46x^2+125x-157}{(x-2)(x-3)(x^2-4x+13)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+13}.$$

Innen következik: A=3, B=2, C=3 és D=2.

A feladat megoldása pedig:

$$R(x) = \frac{8x^3-46x^2+125x-157}{x^4-9x^3+39x^2-89x+78} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3} + \frac{3x+2}{x^2-4x+13}.$$

Gyakorló feladat

Bontsa elemi résztörtekre az $f(x)=\dfrac{4x^3-2x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$ racionális törtfüggvényt.

1.1.5. Feladat

Igazolja, hogy $P_{2n}=(x^2+x-1)^{2n}+(x^2-x+1)^{2n}-2$ polinom osztható $Q(x)=x^2-x$ polinommal.

Megoldás:

A bizonyításhoz elegendő megmutatni, hogy $Q(x)$ polinom gyökei egyben a $P_{2n}(x)$ polinomnak is a gyökei.
Mivel $Q(x)=x^2-x = x(x-1)$, ezért $Q(x)$ gyökei: $x_1=0$ és $x_2=1$.

Közvetlenül ellenőrizhető:

$P_{2n}(0)=(0^2+0-1)^{2n}+(0^2-0-1)^{2n}-2=0$, és
$P_{2n}(1)=(1^2+1-1)^{2n}+(1^2-1-1)^{2n}-2=1+1-2=0$.

Gyakorló feladat

Igazolja, hogy $P(x)=x(x^{n-1}-na^{n-1})+a^n(n-1)$ polinom osztható $(x-a)^2$ polinommal, ahol a tetszőleges valós szám, n pedig a természetes számok halmazához tartozik.

1.1.6. Feladat

A $2x^3-x^2-7x+\lambda=0$ egyenlet két gyökének összege 1. Határozza meg λ értékét és oldja meg az egyenletet.

Megoldás:

Viète szabályi alapján $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{2}$, a feladat kikötése alapján pedig $x_1 + x_2 = 1$. Következik: $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Alkalmazzuk a Horner sémát x_3 gyökre hogy meghatározzuk a maradékot, amelynek értéke 0 kell hogy legyen. Ez a maradék $\lambda + 3$, vagyis $\lambda + 3 = 0$, innen $\lambda = -3$.

A gyöktényezős felírás tehát:

$$2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 2x^3 - x^2 - 7x - 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 - 2x - 6\right).$$

Az x_1 és x_2 gyökök az alábbi egyenletből következnek:

$$2x^2 - 2x - 6 = 0\text{:}\quad x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+48}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Gyakorló feladat

Oldja meg az egyenletrendszert a komplex számhalmazon az ismeretlen z_1 és z_2 komplex számokra ha $\mathrm{Im}(z_2) = -\frac{6+\sqrt{6}}{2}$:

$$z_1 + \overline{z_2} = 1 + 2i, \qquad 2 + i\,z_1 + \frac{z_2}{i} = 0.$$

1.1.7.

Feladat

Bontsa elemi résztörtekre az $f(x)$ racionális törtfüggvényt:

$$f(x) = \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

Megoldás:

A nevező gyöktényezős alakja:

$$x^4 - 2x + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2\,(x + 1)^2,$$

tehát:
$$\frac{x}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}\,.$$

A közös nevezővel, $x^4 - 2x + 1$ polinommal való szorzás után a következő egyenlőség adódik:

$$x = A\,(x - 1)\,(x + 1)^2 + B\,(x + 1)^2 + C\,(x - 1)^2\,(x + 1) + D\,(x - 1)^2.$$

Nem nehéz belátni, hogy $x = 1$ esetén $B = \frac{1}{4}$ következik, illetve $x = -1$ esetén $D = \frac{1}{4}$ adódik. Bármely más valós érték x helyére való behelyettesítése után (például $x = 0$ és $x = 2$) még két egyenletet nyerünk A-ra és C-re:

$$\left.\begin{aligned} A - C &= \frac{1}{2} \\ 3A + C &= -\frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ A = \frac{1}{12},\ C = -\frac{5}{12}.$$

A végső felbontás tehát:

$$\frac{x}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{5}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right).$$

Gyakorló feladat

Bontsa elemi résztörtekre az $f(x) = \dfrac{4x}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}$ racionális törtfüggvényt.

1.1.8.

Feladat

Határozza meg a $P(x) = x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ polinom együtthatóit, ha ismert, hogy $P(x)$ osztásakor $(x + 1)$ polinommal, a maradék 38, $(x - 2)$ osztó esetén a maradék 5, a gyökök összege 4, ugyanezen gyökök szorzata pedig 13.

Megoldás:

Alkalmazzuk Bèzout tételét:

$$P(-1) = 1 - a + b - c + d = 38, \text{ és}$$

$$P(2) = 16 + 8a + 4b + 2c + d = 5.$$

Vegyük észre, hogy a Viète szabályokból (a gyökök összege) közvetlenül következik $a = -4$, míg a gyökök szorzata $d = 13$.

Innen két egyenlet adódik két ismeretlennel:

$$b - c = 20 \text{ és } 2b + c = 4.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $b = 8$ és $c = -12$.

A keresett polinom tehát: $P(x) = x^4 - 4\,x^3 + 8\,x^2 - 12\,x + 13$.

Gyakorló feladat

Adott a $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + a$ polinom.

a) Határozza meg *a* paraméter értékét, ha az egyik gyök $x_1 = -i$.

b) Bontsa gyöktényezős alakra a polinomot $\boldsymbol{R}$ halmazon.

c) Bontsa gyöktényezős alakra a polinomot $\boldsymbol{C}$ halmazon.

1.1.9.

Feladat

Bontsa elemi résztörtekre a $R(x)$ racionális törtfüggvényt, ha a $P(x)$ polinom az előző (1.1.8.) feladatból ismert:

$$R(x) = \frac{P(x)}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}.$$

Megoldás:

Osszuk el $P(x)$ polinomot $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ polinommal. (alkalmazzuk Euklidész eljárását), a nyert hányados (az egész rész): $x - 1$, és a maradék $3x^2 - 4x + 7$.

Bontsuk gyöktényezős alakra $Q(x)$ polinomot is!.

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = x^2 (x - 3) + 2 (x - 3) = (x - 3)(x^2 + 2)$.

Az utolsó fázisban meghatározzuk A, B és C értékét:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = x - 1 + \frac{3x^2 - 4x + 7}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6} =$$

$$= x - 1 + \frac{3x^2 - 4x + 7}{(x-3)(x^2+2)} = x + 1 + \frac{A}{x-3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}.$$

A határozatlan együtthatók módszerét alkalmazva a törtrészre (elkülönítettük az egész részt):

$$\frac{3x^2 - 4x + 7}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 7 = x^2 (A + B) + x(C - 3B) + (2A - 3C).$$

Kiegyenlítve az azonos hatványú tagok együtthatóit az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$A + B = 3, \quad C - 3B = -4, \quad 2A - 3C = 7.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $A = 2$, $B = 1$ és $C = -1$.

Innen már egyszerű felírni az $R(x)$ törtfüggvény teljes elemi résztörtekre való bontását:

$$R(x) = x + 1 + \frac{2}{x-3} + \frac{x-1}{x^2+2}.$$

Gyakorló feladat

Bontsa elemi résztörtekre az $Q(x) = \dfrac{2x^2 + x + 2}{x^3 - 8}$ racionális törtfüggvényt.

1.1.10. Feladat

Adott a $P_4(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$ polinom.

a) Határozza meg *a, b* és *c* együtthatókat úgy, hogy a polinom osztható legyen $(x + 1)$ és $(x - 1)$ binommal is, valamint $(x - 2)$ -vel való osztás után a maradék 18.

b) Bontsa gyöktényezők szorzatára a polinomot ***R*** halmazon.

Megoldás:

Az $(x + 1)$-gyel való oszthatóságból következik, hogy a helyettesítési érték $x=-1$-re: $P_4(-1) = (-1)^4 + a\,(-1)^3 + b\,(-1)^2 + c\,(-1) + 2 = 0$. Innen következik az első egyenlet: $-a + b - c + 3 = 0$.

Hasonló gondolatmenettel: az $(x - 1)$-gyel való oszthatóságból $P_4(1) = 0$ következik, tehát $a + b + c + 3 = 0$.

A harmadik egyenlet Bèzout tételéből következik: $P_4(2) = 18$, és innen a harmadik egyenlet: $8a + 4b + 2c + 18 = 18$.

Az egyenletrendszer megoldásai: $a = 2$, $b = -3$, $c = -2$:

$$P_4(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2 = P_4(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + -2x + 2\,.$$

Ha elosztjuk a polinomot előbb $(x + 1)$, majd $(x – 1)$ binommal, akkor a következőt nyerjük:

$$P_4(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 2x - 2)\,.$$

A még ismeretlen két gyököt már könnyű meghatározni:

$$x_{3/4} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}\,.$$

A polinom teljes tényezőkre bontása a következő:

$$P_4(x) = (x-1)(x+1)(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})\,.$$

Gyakorló feladat

$P(x)$ polinom maradékai $(x–1)$, $(x–2)$ és $(x+1)$ binomokkal sorban 2, 3 és 6. Határozza meg a maradékot, ha $P(x)$ polinomot $(x–1)(x–2)(x+1)$ szorzattal osztjuk.

1.1.11. Feladat

$P(x)$ polinom $(x+1)$-gyel való osztásakor a maradék 4, $(x–1)$-gyel való osztásakor a maradék 6, míg $(x–2)$-vel való osztáskor a maradék 13. Határozza meg a maradékot, ha $P(x)$ polinomot $(x+1)$ $(x–1)$ $(x–2)$ polinommal osztjuk el..

Megoldás:

Valamely polinom más polinommal való osztásakor a maradék legalább 1-gyel alacsonyabb fokú mint az osztó. Tehát ha valamely $P(x)$ polinomot egy harmadfokú $(x+1)(x–1)(x–2)$ polinommal, osztjuk el, akkor a maradék legfeljebb másodfokú polinom:

Legyen ez a maradék $R(x) = ax^2 + bx + c$, vagyis:

$$P(x) = (x+1)\,(x-1)\,(x-2)Q(x) + R(x). \qquad (*)$$

Bèzout tétele alapján a $P(x)$ polinom $(x-\alpha)$ binommal való osztásakor a maradék a polinom $x=\alpha$ helyen nyert $P(\alpha)$ helyettesítési értéke. Következik:

$$P(-1) = 4,\ P(1) = 6 \text{ és } P(2) = 13.$$

A (*)-gal jelölt egyenlőségből adódik:

$$R(-1) = 4,\ R(1) = 6 \text{ és } R(2) = 13.$$

Az innen nyert egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned} a - b + c &= 4 \\ a + b + c &= 6 \\ 4a + 2b + c &= 13 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, vagyis a keresett maradék: $R(x) = 2x^2 + x + 3$.

Gyakorló feladat

Határozza meg a $P(x)$ polinom ismeretlen együtthatóit, ha a polinom osztható $(x-1)$ és $(x+2)$ binomokkal de $(x+1)$-gyel való osztás után a maradék 24.

$$P(x) = x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + 24.$$

1.1.12. Feladat

Határozzuk meg $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok legnagyobb közös osztóját (LKO) ha:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \text{ és } Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

Megoldás:

Alkalmazzuk az Euklideszi algoritmust:

$$\begin{array}{l} (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = x \\ \underline{-(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x \qquad)} \\ \qquad\qquad x^2 + 2x + 1 \end{array}$$

$$(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \cdot x + (x^2 + 2x + 1)$$

$$\begin{array}{l} (x^3 + 2x^2 + 2x + 1) : (x^2 + 2x + 1) = x + 1 \\ \underline{-(x^3 + 2x^2 + x \quad)} \\ \qquad\qquad x + 1 \end{array}$$

$$(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x + 1) + (x + 1)$$

$$\begin{array}{l} (x^2 + 2x + 1) : (x + 1) = x + 1 \\ \underline{-(x^2 + 2x + 1)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$(x^2 + 2x + 1) = \boxed{(x + 1)} \cdot (x + 1) + 0 \Rightarrow$$
$$LKO : (x + 1)$$

Gyakorló feladat

Ismeretes, hogy $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ polinomnak vannak többszörös valós gyökei. Bontsuk gyöktényezős alakra a polinomot a valós számok halmazán.

1.1.13.

Feladat

Határozzuk meg m és n valós paramétereket úgy, hogy *P(x)* polinom osztható legyen *Q(x)* polinommal majd határozzuk meg hányadosukat is!

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 17x^2 + mx + n, \quad Q(x) = 2x^2 - x - 6.$$

Megoldás:

A megoldás több módon is elvégezhető. Az egyik út az Euklideszi algoritmus alkalmazását követi (lásd a 1.0.1. feladatot), majd megköveteljük, hogy a maradék 0 legyen. Mivel a maradék legfeljebb elsőfokú polinom (az osztó másodfokú!), így mindkét együtthatónak el kell tűnnie. Ez két egyenletet eredményez *m* és *n* paraméterekre. Az olvasóra bízzuk ennek az útnak a végigjárását.

Most egy másik eljárást mutatunk be:

Bontsuk törzstényezőkre $Q(x)$ polinomot:

$$Q(x) = 2x^2 - x - 6 = 2(z-2) \cdot \left(x + \frac{3}{2} \right).$$

Felismerjük $Q(x)$ polinom gyökeit. Az oszthatóság miatt ezek a számok gyökei magának $P(x)$ polinomnak is! Tehát fennáll:

$$P(2) = 0 \text{ és } P\left(-\frac{3}{2} \right) = 0.$$

Ezekből a tényekből is két egyenlet következi *m* és *n* ismeretlenekre:

$$\begin{aligned} 2m + n &= -4 \\ 3m - 2n &= -90. \end{aligned}$$

A megoldások: $m = -14$ és $n = 24$, tehát a keresett polinom:

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 14x + 24.$$

Gyakorló feladat

a) Határozza meg *a* paramétert úgy, hogy $x = -1$ legalább kétszeres gyöke legyen $P(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinomnak.

b) Ossza el a kapott $P(x)$ polinomot $x - 2$ binommal.

1.1.14. Feladat

Határozza meg a és b paramétereket úgy hogy a $p(x)$polinomnak az x=1 legalább kétszeres gyöke legyen!

$$p(x) = x^5 + 4x^4 - 18x^3 + ax^2 + bx + 6$$

Megoldás:

Ismeretes, hogy a polinom k-szoros gyöke egyúttal a polinom deriváltjának (k–1)-szeres gyöke. (A deriváltak nem ezen tanfolyam részét képezik, de a polinom deriváltjának definícióját megadtuk a jegyzetben).

Ezek szerint: $p(1) = 0$, vagyis $p(1) = 1 + 4 - 18 + a + b + 6 = 0$.

Ugyanakkor is $p'(1) = 0$.

Mivel a polinom deriváltja:

$$p'(x) = 5x^4 + 16x^3 - 54x^2 + 2ax + b\,,$$

ezért:

$$p'(1) = 5 + 16 - 54 + 2a + b = 0\,.$$

A felsorolt tényekből két egyenlet következik a-ra és b-re:

$$a + b = 7$$
$$2a + b = 33,$$

a megoldások: a = 26 és b = –19.

A fentiekből következik a válasz, a keresett polinom:

$$p(x) = x^5 + 4x^4 - 18x^3 + 26x^2 - 19x + 6\,.$$

Gyakorló feladat

Határozza meg azt az ötödfokú normalizált valós együtthatójú polinomot amelynek az 1 kétszeres gyöke, az i komplex szám egyszeres gyöke, míg $(x+1)$-gyel való osztás után a maradéka 8.

1.1.15. Feladat

Határozza meg m és n paraméterek értékét úgy, hogy

$$S(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3 \quad \text{és} \quad T(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$$

polinomok közös gyöke kétszeres gyöke legyen $P(x)$ polinomnak:

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + mx^2 - 6x + n, \quad (m, n \in \boldsymbol{R}).$$

Megoldás:

Euklideszi algoritmussal (a legnagyobb közös osztó meghatározásával), vagy a racionális gyökök megkeresésével is megállapítható: az adott két polinom közös gyöke: $x = 3$. Helyettesítsük ezt $P(x)$ polinomba majd $P\,'(x)$ polinomba is: $P'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 9x^2 + 2mx - 6$. A behelyettesítésekkel a következő egyenletek adódnak:

$$9m + n = 99, \quad 6m - 60 = 0. \text{ Megoldás: } m=10,\ n=9$$

A másik mód kikerüli a derivált alkalmazását. Elosztjuk $P(x)$ polinomot $(x - 3)$ binommal és kiegyenlítjük 0-val. (ez az első egyenlet). Most elosztjuk a hányadost is $(x - 3)$ binommal, és ezt is kiegyenlítjük 0-val. (második egyenlet). A két megoldási eljárás teljesen egyenértékű.

Gyakorló feladat

Határozza meg a harmadfokú, valós együtthatójú $p(x)$ polinom gyökeit, ha: $p(-i) = -3 - 3i$ és $p(1 - i) = -2 - 4i$.

2. KOMPLEX SZÁMOK

2.0. GYAKORLÓ FELADATOK

2.0.1. Feladat:

Számítsuk ki az $A=\sqrt{-36}-\sqrt{-16}-\sqrt{-64}+\sqrt{-49}$ értéket.

Megoldás:

$$A=\sqrt{-1\cdot 36}-\sqrt{-1\cdot 16}-\sqrt{-1\cdot 64}+\sqrt{-1\cdot 49}=6i-4i-8i+7i=i\,.$$

2.0.2. Feladat:

Legyenek $z_1=4+3i$, $z_2=-5+2i$.

Számítsuk ki mennyi ekkor z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Megoldás:

$$z_1+z_2=(4+3i)+(-5+2i)=4-5+3i+2i=-1+5i\,,$$
$$z_1-z_2=(4+3i)-(-5+2i)=4+5+3i-2i=9+i\,,$$
$$z_1\cdot z_2=(4+3i)\cdot(-5+2i)=-20+8i-15i+6i^2=$$
$$=-20-6-7i=-26-7i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4+3i}{-5+2i}=\frac{4+3i}{-5+2i}\cdot\frac{-5-2i}{-5-2i}=\frac{-20-8i-15i-6i^2}{25-4i^2}=$$
$$=\frac{-20+6-22i}{25+4}=-\frac{14}{29}-\frac{22}{29}i.$$

2.0.3. Feladat:

Határozzuk meg az i^7, i^{60}, i^{53} értékeket..

Megoldás:

$$i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$
$$i^{60} = i^{4 \cdot 15} = \left(i^4\right)^{15} = 1^{15} = 1$$
$$i^{53} = i^{4 \cdot 13+1} = \left(i^4\right)^{13} \cdot i = (1)^{13} \cdot i = i$$

2.0.4. Feladat:

Számítsuk ki mennyi $\dfrac{2+i}{2-i} + \dfrac{2-i}{2+i} + i^{24} + i^{33} + i^{47}$.

Megoldás:

$$\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} + i^{24} + i^{33} + i^{47} =$$
$$= \frac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{(2-i)\cdot(2+i)} + i^{4 \cdot 15} + i^{4 \cdot 8+1} + i^{4 \cdot 11+3} =$$
$$= \frac{4+4i+i^2+4-4i+i^2}{4-i^2} + \left(i^4\right)^{15} + \left(i^4\right)^8 \cdot i + \left(i^4\right)^{11} \cdot i^3 =$$
$$= \frac{6}{5} + 1 + i + (-i) = 2\frac{1}{5}.$$

2.0.5. Feladat:

Ha $z = 1+i$ határozzuk meg a $\dfrac{z-\overline{z}}{1+z \cdot \overline{z}}$ kifejezés értékét.

Megoldás:

Ha $z = 1 + i$ akkor $\bar{z} = 1 - i$. Következik, hogy:

$$\frac{z-\bar{z}}{1+z\cdot\bar{z}} = \frac{1+i-(1-i)}{1-(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1+i-1+i}{1-\left(1-i^2\right)} = \frac{2i}{1-2} = \frac{2i}{-1} = -2i\,.$$

2.0.6. Feladat:

Ha $z_1 = 2 - 3i$ határozzuk meg az ismeretlen z komplex számot algebrai alakban úgy, hogy érvénes legyen:

$$\operatorname{Re}(zz_1) = 18 \ \wedge \ \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z_1}\right) = \frac{1}{13}\,.$$

Megoldás:

Legyen a keresett komplex szám algebrai alakja $z = x + iy$.
Ekkor:

$$zz_1 = (x+iy)\cdot(2-3i) = 2x - 3ix + 2iy - 3i^2y =$$

$$= 2x + 3y + i(2y - 3x)$$

$$\operatorname{Re}(zz_1) = 2x + 3y$$

$$\frac{\bar{z}}{z_1} = \frac{x-iy}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2x-2iy+3ix-3i^2y}{4-9i^2} = \frac{2x+3y+i(3x-2y)}{13}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z_1}\right) = \frac{3x-2y}{13}$$

A feladat feltételei szerint $2x + 3y = 18 \ \wedge \ \frac{3x-2y}{13} = \frac{1}{13}$, vagyis $2x + 3y = 18 \ \wedge \ 3x - 2y = 1$. Az egyenletrendszer megoldásával kapjuk, hogy $x = 3 \ \wedge \ y = 4$.

A keresett komplex szám algebrai alakja tehát $z = 3 + 4i$.

2.0.7. Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4=1$.

Megoldás:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4=\left(\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^2\right)^2+\left(\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^2\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1+2i\sqrt{7}+7i^2}{4}\right)^2+\left(\frac{1-2i\sqrt{7}+7i^2}{4}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{2i\sqrt{7}-6}{4}\right)^2+\left(\frac{-2i\sqrt{7}-6}{4}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{i\sqrt{7}-3}{2}\right)^2+\left(\frac{-i\sqrt{7}-3}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{7i^2-6i\sqrt{7}+9}{4}+\frac{7i^2+6i\sqrt{7}+9}{4}=$$

$$=\frac{2-6i\sqrt{7}}{4}+\frac{2+6i\sqrt{7}}{4}=\frac{2-6i\sqrt{7}+2+6i\sqrt{7}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

2.0.8. Feladat:

Határozzuk meg azt a z komplex számot algebrai alakban amelyre érvényes, hogy $|z|+z=2+i$.

Megoldás:

Ha a z komplex szám $z=x+iy$ algebrai alakban adott, akkor a modulusa $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Ezért az adott egyenletet felírhatjuk a következő alakban is:

$$\sqrt{x^2+y^2}+x+iy=2+i$$
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)+iy=2+i$$

Mivel két komplex szám akkor és csakis akkor egyenlő ha megegyeznek a valós és imagináris részeik is, ezért ezek kiegyenlítésével a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\sqrt{x^2+y^2}+x=2 \;\wedge\; y=1.$$

Helyettesítsük be $y=1$ értéket az első egyenletbe, ekkor:

$$\sqrt{x^2+1}+x=2 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+1}=2-x$$

$$\Rightarrow\; x^2+1=4-4x+x^2 \;\Rightarrow\; 4x=3 \;\Rightarrow\; x=\frac{3}{4}$$

A keresett komplex szám algebrai alakja $z=\frac{3}{4}+i$.

2.0.9. Feladat:

Ha $z\in C$ oldjuk meg a következő másodfokú egyenletet:

$$z^2+4z-4-6i=0.$$

Megoldás:

$$z_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4(-4-6i)}}{2},$$

$$z_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+16+24i}}{2},$$

$$z_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{32+24i}}{2}.$$

A $\sqrt{32+24i}$ algebrai alakban a következőképpen számítható ki:

$$\sqrt{32+24i}=a+bi \Rightarrow 32+24i=a^2+2abi+b^2i^2=a^2-b^2+2abi$$

$$\left(a^2-b^2=32 \wedge 2ab=24\right) \Rightarrow \left(a^2-b^2=32 \wedge b=\frac{12}{a}\right)$$

$$a^2-\frac{144}{a^2}=32$$

$$a^4-32a^2-144=0$$

$$a^2{}_{1/2}=\frac{32\pm\sqrt{1024+576}}{2}=\frac{32\pm 40}{2}$$

$$a^2=-4 \quad \vee \quad a^2=36$$

$$a_1=6,\ a_2=-6 \Rightarrow b_1=2,\ b_2=-2$$

$$\sqrt{32+24i}=\pm(6+2i)$$

Most folytathatjuk a megkezdett számítást: $z_{1/2}=\dfrac{-4\pm(6+2i)}{2}$,

$$z_1=\frac{-4+6+2i}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i\,,$$

$$z_2=\frac{-4-6-2i}{2}=\frac{-10-2i}{2}=-5-i\,.$$

2.0.10. Feladat:

Az $n\in N$ természetes szám különböző értékeire számítsuk ki az $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ kifejezés értékeit.

Megoldás:

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}=\frac{(1+i)^{n-2}\cdot(1+i)^2}{(1-i)^{n-2}}=$$

$$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{n-2}\cdot(1+i)^2=\left(\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^{n-2}\cdot\left(1+2i+i^2\right)=$$

$$= \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2} \right)^{n-2} \cdot (2i) = \left(\frac{2i}{2} \right)^{n-2} \cdot 2i = i^{n-2} \cdot 2i = 2i^{n-1} =$$

$$= \begin{cases} 2 & za \quad n-1 = 4k \Rightarrow n = 4k+1 \\ 2i & za \quad n-1 = 4k+1 \Rightarrow n = 4k+2 \\ -2 & za \quad n-1 = 4k+2 \Rightarrow n = 4k+3 \\ -2i & za \quad n-1 = 4k+3 \Rightarrow n = 4k \end{cases}.$$

2.0.11. Feladat:

A következő komplex számokat ábrázoljuk a komplex síkban, majd írjuk fel a trigonometrikus és exponenciális alakjukat:

$$z_1 = 3, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = -4, \quad z_4 = -i,$$

$$z_5 = 1+i, \quad z_6 = -1+i, \quad z_7 = -1-i, \quad z_8 = 1-i,$$

$$z_9 = \sqrt{3}+i, \quad z_{10} = -\sqrt{3}+i, \quad z_{11} = -\sqrt{3}-i, \quad z_{12} = \sqrt{3}-i,$$

$$z_{13} = 1+i\sqrt{3}, \quad z_{14} = -1+i\sqrt{3}, \quad z_{15} = -1-i\sqrt{3}, \quad z_{16} = -1+i\sqrt{3}.$$

Megoldás:

$$z_1 = 3 \Rightarrow \rho_1 = 3 \wedge \varphi_1 = 0^\circ = 0$$

$$z_1 = 3 = 3(\cos 0 + i \sin 0) = 3e^{i0}$$

$$z_2 = 2i \Rightarrow \rho_2 = 2 \wedge \varphi_2 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

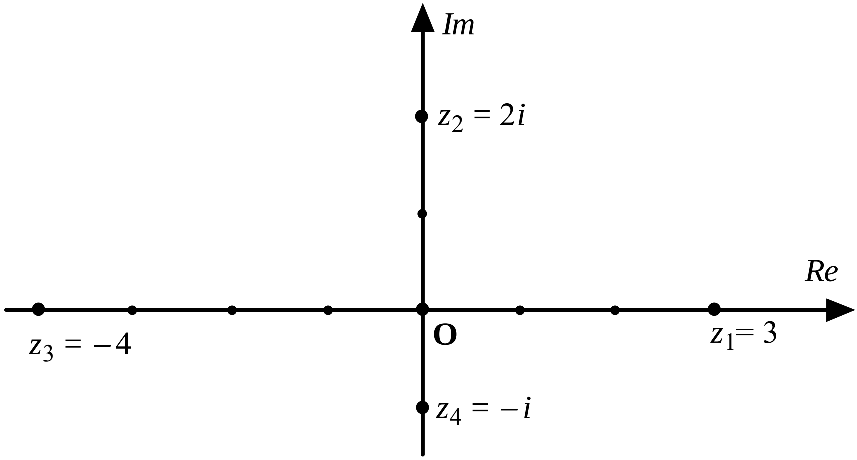
$$z_2 = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_3 = -4 \Rightarrow \rho_3 = 4 \wedge \varphi_3 = 180^\circ = \pi$$

$$z_3 = -4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4e^{i\pi}$$

$$z_4 = -i \Rightarrow \rho_3 = 1 \wedge \varphi_3 = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$$

$$z_4 = -i = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} \right) = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$



z_1, z_2, z_3 és z_4 komplex számok

$$z_5 = 1 + i \Rightarrow \rho_5 = \sqrt{2} \wedge \varphi_5 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$z_5 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_6 = -1 + i \Rightarrow \rho_6 = \sqrt{2} \wedge \varphi_6 = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

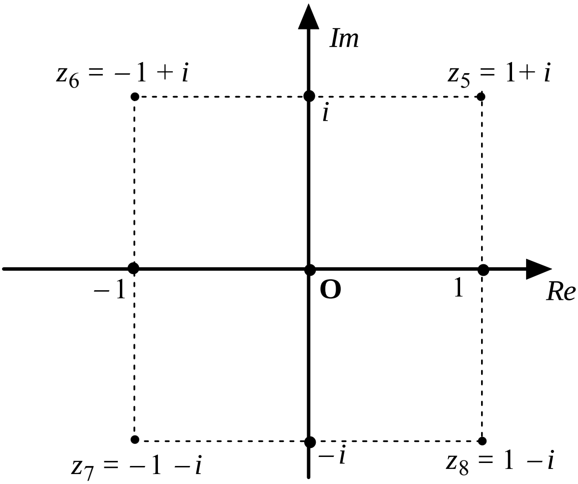
$$z_6 = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_7 = -1 - i \Rightarrow \rho_7 = \sqrt{2} \wedge \varphi_7 = 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$$

$$z_7 = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_8 = 1 - i \Rightarrow \rho_8 = \sqrt{2} \wedge \varphi_8 = 315^\circ = \frac{7\pi}{4}$$

$$z_8 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$$



z_5, z_6, z_7 és z_8 komplex számok

$$z_9 = \sqrt{3} + i \Rightarrow \rho_9 = 2 \wedge \varphi_9 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$z_9 = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_{10} = -\sqrt{3} + i \Rightarrow \rho_{10} = 2 \wedge \varphi_{10} = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$$

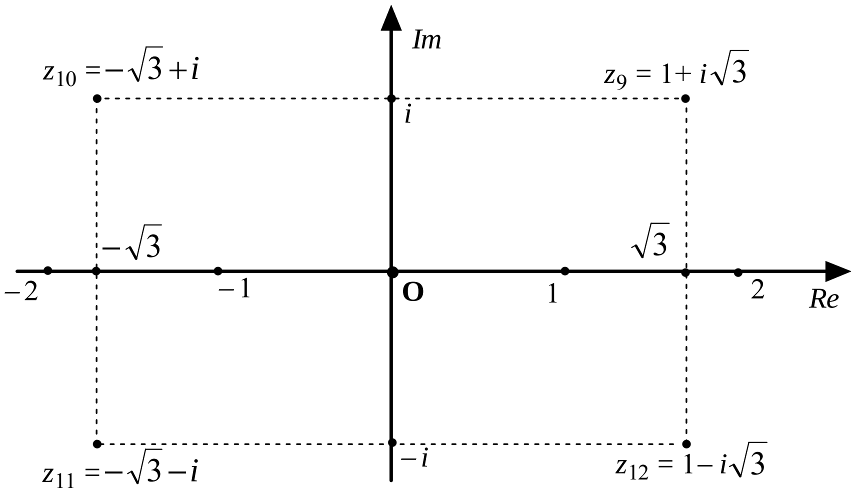
$$z_{10} = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_{11} = -\sqrt{3} - i \Rightarrow \rho_{11} = 2 \wedge \varphi_{11} = 210^\circ = \frac{7\pi}{6}$$

$$z_{11} = -\sqrt{3} - i \Rightarrow \rho_{11} = 2 \wedge \varphi_{11} = 210^\circ = \frac{7\pi}{6}$$

$$z_{12}=\sqrt{3}-i \;\Rightarrow\; \rho_{12}=2 \;\wedge\; \varphi_{12}=330^\circ=\frac{11\pi}{6}$$

$$z_{12}=\sqrt{3}-i \;\Rightarrow\; \rho_{1}=2 \;\wedge\; \varphi_{1}=330^\circ=\frac{11\pi}{6}$$



z_9, z_{10}, z_{11} és z_{12} komplex számok

$$z_{13}=1+i\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \rho_{13}=2 \;\wedge\; \varphi_{13}=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

$$z_{13}=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_{14}=-1+i\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \rho_{14}=2 \;\wedge\; \varphi_{14}=120^\circ=\frac{2\pi}{3}$$

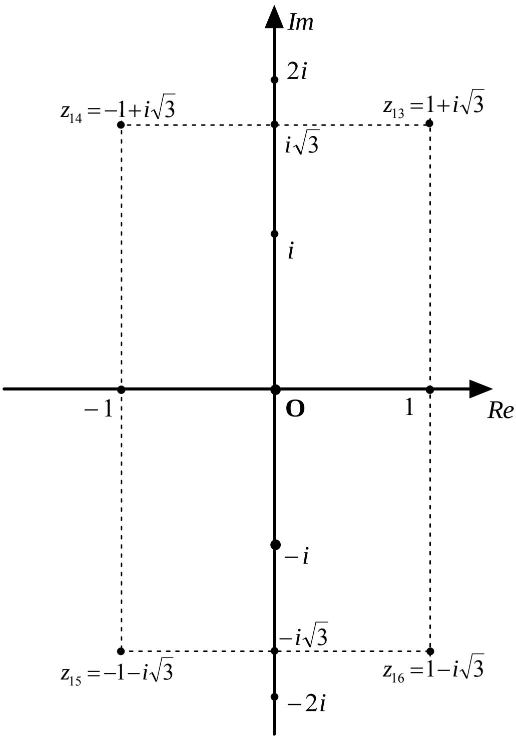
$$z_{14}=-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_{15}=-1-i\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \rho_{15}=2 \;\wedge\; \varphi_{1}=240^\circ=\frac{4\pi}{3}$$

$$z_{15}=-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$z_{16} = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow \rho_{16} = 2 \wedge \varphi_{16} = 300^\circ = \frac{5\pi}{3}$$

$$z_{16} = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$



z_{13}, z_{14}, z_{15} és z_{16} komplex számok

2.0.12. Feladat:

Oldjuk meg a $z^3 - 125 = 0$ egyenletet.

Megoldás:

Fejezzük ki a z változót az adott egyenletből:

$z^3 = 125 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[3]{125}$.

Ábrázoljuk a 125 számot a komplex síkban és írjuk fel trigonometrikus alakban:

$$125 = 125(\cos 0 + i\sin 0) \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{125}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)$$

$$k=0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = 5(\cos 0 + i\sin 0) = 5(1+i0) = 5,$$

$$k=1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$k=2 \quad \Rightarrow \quad z_2 = 5\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 5\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Az adott egyenlet gyökei adják a megoldáshalmazt:

$$\mathbf{M} = \left\{5,\ 5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ 5\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

2.0.13. Feladat:

Számítsuk ki mennyi $\sqrt[5]{2+2i\sqrt{3}}$.

Megoldás:

Írjuk fel a $z = 2+2i\sqrt{3}$ kopmlex számot trigonometrikus alakban:

$$\rho = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4 \quad \text{i}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

Ezért a keresett trigonometrikus alak:

$$z = 2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

A Moavre-képletek szerint:

$$\sqrt[5]{2+2i\sqrt{3}} = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi/3 + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\pi/3 + 2k\pi}{5}\right).$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right) = \sqrt[5]{4}\, e^{i\frac{\pi}{15}},$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi/3 + 2\pi}{15} + i\sin\frac{\pi/3 + 2\pi}{15}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right) = \sqrt[5]{4}\, e^{i\frac{7\pi}{15}},$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad z_2 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi/3 + 4\pi}{15} + i\sin\frac{\pi/3 + 4\pi}{15}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right) = \sqrt[5]{4}\, e^{i\frac{13\pi}{15}},$$

$$k = 3 \quad \Rightarrow \quad z_3 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi/3 + 6\pi}{15} + i\sin\frac{\pi/3 + 6\pi}{15}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right) = \sqrt[5]{4}\, e^{i\frac{19\pi}{15}},$$

$$k = 4 \quad \Rightarrow \quad z_4 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi/3 + 8\pi}{15} + i\sin\frac{\pi/3 + 8\pi}{15}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right) = \sqrt[5]{4}\, e^{i\frac{25\pi}{15}}.$$

2.0.14. Feladat:

Határozzuk meg a $z=\left(\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}\right)^{2000}$ komplex szám valós és imaginária részét.

Megoldás:

$$z=\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}\right)^{2000}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{2000}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2000}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{2000}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}\left(\frac{2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}\right)^{2000}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{2000}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2000}=$$

$$=\cos\frac{500\pi}{3}+i\sin\frac{500\pi}{3}=\cos\left(166\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(166\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(z)=-\frac{1}{2}\quad\wedge\quad\operatorname{Im}(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

2.0.15. Feladat:

Adott a $z_1 = 1 + i$ kopmlex szám. Határozzuk meg a z_2, z_3, z_4 számokat a komplex síkban úgy, hogy ezek a z_1 számmal együtt egy olyan négyzet csúcsai legyenek amely átlóinak metszéspontja a koordináta rendszer középpontjába esik.

Megoldás:

Ábrázoljuk a komplex síkban a z_1 csúcsot, és szerkesszük meg a kersett négyzetet. A z_2 csúcsot a z_1 csúcs $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ szöggel való rotálásával kapjuk, a z_3 csúcsot a z_2 csúcs $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ szöggel való rotálásával kapjuk, a z_4 csúcsot a z_3 csúcs $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ szöggel való rotálásával kapjuk. Minden csúcs távolsága a koordinátarendszer középpontjától ugyanakkora és $\rho = \sqrt{2}$-vel egyenlő. A $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ szöggel való elforgatást elérhetjük oly módon, hogy az adott komplex számot szorozzuk az $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$ komplex számmal. Így:

$z_2 = z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = (1+i) \cdot i = i + i^2 = -1 + i$ a második keresett csúcs,

$z_3 = z_2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = (-1+i) \cdot i = -i + i^2 = -1 - i$ a harmadik keresett csúcs, és

$z_4 = z_3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = (-1-i) \cdot i = -i - i^2 = 1 - i$ a négyzet negyedik csúcsa.

2.1. ÍRÁSBELI VIZSGAFELADATOK

2.1.1. Feladat

Határozza meg a $P_5(x)$ polinom gyökeit! Ha z_1 és z_2 a polinom két komplex gyöke, határozza meg $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ értékét is.

$$P_5(x)= z^5 - 8z^4 + 29z^3 - 54z^2 + 48z - 16 .$$

Megoldás:

Könnyen belátható, hogy az 1 szám a polinom kétszeres gyöke, míg a 2 egyszeres valós gyök.

Tényezőkre bontással $P_5(z)=(z^2 - 4z + 8) (z - 2) (z - 1)^2$ adódik. A komplex gyökök kiszámításával $z_1 = 2+2i$ és $z_2 = 2-2i$ számokat nyerjük A keresett hányados a következő:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{2+2i}{2-2i}\right| = \left|\frac{(2+2i)^2}{(2-2i)(2+2i)}\right| = \left|\frac{8i}{8}\right| = 1 .$$

Gyakorló feladat

Írja fel gyöktényezős formában $P(x)$ polinomot a valós számok halmazán. Határozza meg az a paraméter értékét, ha a polinom egyik komplex gyöke $2+i$.

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + a .$$

2.1.2.

Feladat

Oldja meg az $x^4 - a = 0$ egyenletet, ha $a = -8-8i$.

Megoldás

Mivel $|a|=\sqrt{64+64} = 2^{7/2}$ és $arg(a)$=arctg(1)=5π/4, a megoldások a következő komplex gyökvonás eredményei: $x = \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{2^{7/2} e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)}}$ ha $k = 0, 1, 2, 3$:

$$x_0 = 2^{7/8} e^{i\frac{5\pi}{16}} = 2^{7/8}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right),$$

$$x_1 = 2^{7/8} e^{i\frac{13\pi}{16}} = 2^{7/8}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right),$$

$$x_2 = 2^{7/8} e^{i\frac{21\pi}{16}} = 2^{7/8}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right),$$

$$x_3 = 2^{7/8} e^{i\frac{29\pi}{16}} = 2^{7/8}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}\right)$$

Gyakorló feladat

a) Határozza meg $P(x) = x^3 + a^2 x + 10a^3$ mindegyik gyökét, ha ismert az egyik gyök: $x_1 = a(1+2i)$.

b) Számítsa ki $x_1^{10}+x_2^{10}$ értékét, ha x_1 és x_2 a polinom komplex gyökei, valamint adott $a = \sqrt{5}$.

2.1.3.

Feladat

a) Oldja meg az $x^4 - a = 0$ egyenletet, ha $a = -8-8\sqrt{3}\,i$.

b) Rajzolja meg a komplex számsíkon a megoldásokat.

Megoldás

a) Mivel $|a|=\sqrt{64+3\cdot 64}=16$ és $arg(a)$=arctg$\sqrt{3}$=4π/3, így a gyökök a következő komplex gyökvonás eredményei:

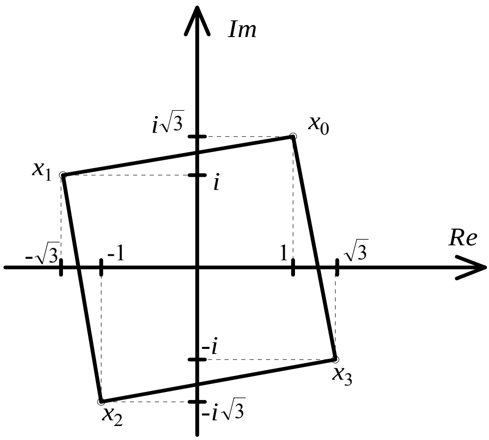
$$x=\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{16e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)}} \quad \text{ha } k = 0, 1, 2, 3:$$

$$x_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$$

$$x_1=2e^{i\frac{5\pi}{6}}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i$$

$$x_2=2e^{i\frac{4\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-i\sqrt{3}$$

b) A megoldások grafikus ábrázolása:



Gyakorló feladat

Oldja meg az $z^3-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^3=0$ egyenletet és rajzolja meg a komplex számsíkon a megoldásokat.

2.1.4.

Feladat

Adva van a $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}(1-i)}$ komplex szám. Adja meg a z^{2006} komplex számot algebrai alakban!

Megoldás

A komplex számot exponenciális alakjában alkalmazzuk:

$\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ és $1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

Ezért e $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}(1-i)}=\dfrac{2e^{-\frac{\pi}{6}i}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)}=e^{\frac{\pi}{12}i}$.

Következik: $z^{2006}=\left(e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^{2006}=e^{\frac{2006\pi}{12}i}=e^{\left(166\pi+\frac{7\pi}{6}\right)i}=e^{\frac{7\pi}{6}i}=$

$=\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

Gyakorló feladat

Ha $z^3=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, akkor mennyi z^{1998}?

2.1.5.

Feladat

Adva van a $z=\dfrac{2+2i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$ komplex szám .

Algebrai alakjában állítsa elő a z^{2005} komplex számot!

Megoldás:

A komplex számot exponenciális alakjában alkalmazzuk:

$2+2i=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ és $\sqrt{2}-i\sqrt{6}=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

Ezért: $z=\dfrac{2+2i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}}=e^{\frac{7\pi}{12}i}$.

Következik: $z^{2005}=\left(e^{\frac{7\pi}{12}i}\right)^{2006}=e^{\frac{14042\pi}{12}i}=e^{\left(1170\pi+\frac{2\pi}{12}\right)i}=e^{\frac{\pi}{6}i}=$

$=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

Gyakorló feladat

Adott a komplex számok $x_k=\left(\dfrac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^k+\left(\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^k$ sorozata.

Határozza meg a sorozat 2004. és 2006. tagját.

2.1.6.

Feladat

Számítsa ki az alábbi komplex számokat:

a) $\left(\dfrac{i\sqrt{2}-\sqrt{2}}{i\sqrt{3}-1}\right)^{2004}=$ b) $\left(\dfrac{i\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+i}\right)^{2004}=$

Megoldás:

a) $\left(\dfrac{i\sqrt{2}-\sqrt{2}}{i\sqrt{3}-1}\right)^{2004}=\left(\dfrac{2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right)^{2004}=\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2004}=e^{i\pi\cdot 167}=e^{i\pi}=-1$.

b) $$\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+i}\right)^{2004} = \left(\frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{2004} = \left(e^{i\frac{3\pi}{6}}\right)^{2004} = e^{i\pi\cdot 1002} = e^{0} = 1$$

Gyakorló feladat

Számítsa ki az alábbi komplex számokat:

a) $$\left(\frac{i-\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}}\right)^{2004} =$$ b) $$\left(\frac{i\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}}\right)^{2004} =$$

2.1.7.

Feladat

Számítsa ki az alábbi komplex számokat:

a) $w = \sqrt[3]{i} =$ b) $u = \sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}} =$ c) $b = \sqrt[6]{729} =$

Megoldás:

a) $$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)} =$$

$$= \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}.$$

$$w_0 = \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

$$w_1 = \cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

$$w_2 = \cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

b) $$\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right)} =$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right).$$

$$u_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right).$$

$$u_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

$$u_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right).$$

$$u_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

c) $$\sqrt[6]{729}=\sqrt[6]{729(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)}=3\left(\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}\right).$$

$$b_0=3(\cos 0+i\sin 0)=3.$$

$$b_1=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

$$b_2=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

$$b_3=3(\cos\pi+i\sin\pi)=-3.$$

$$b_4=3\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

$$b_5=3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

Gyakorló feladat

Számítsa ki az alábbi komplex számokat:

a) $z=\sqrt[3]{-i}=$ b) $v=\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}=$ c) $a=\sqrt[6]{-64}=$

2.1.8.

Feladat

Határozza meg azokat a komplex számokat, amelyekre teljesül:

$$\begin{vmatrix} z^2 & -1 & 1 \\ i & 2i & z \\ 0 & z & 0 \end{vmatrix} = (z-2)i\,.$$

Megoldás:

A determináns kiszámítása után az alábbi egyenlet adódik:

$-z^4 + z\,i = (\,z - 2)i$, egyszerűsítve: $z^4 = 2i$.

Végezzük el a gyökvonást!

$$z = \sqrt[4]{2i} = \sqrt[4]{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)}\,.$$

A megoldások:

$$z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)\right) \text{ za } k = 0,\ 1,\ 2 \text{ és } 3.$$

Gyakorló feladat

Határozza meg a z komplex szám valós és imaginárius részét:

$$z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{-16}.$$

2.1.9.

Feladat

Határozza meg z komplex számot ha $\left|\dfrac{z}{z+1}\right| = 1 \quad \wedge \quad \dfrac{z}{\overline{z}} = i\,.$

Megoldás:

Alkalmazzuk a $z = x + iy$ jelölést. A $\frac{z}{\bar{z}} = i$ egyenlőség következménye:

$$z = i\bar{z} \Rightarrow x + iy = i(x - iy) \Rightarrow x + iy = y + ix \Rightarrow x = y,$$

illetve: $z = x + ix = x\,(1 + i\,)$.

A másik feltételből:

$$\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{x+xi}{(x+1)+ix}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x+ix)(x+1-ix)}{(x+1)^2+x^2}\right| = \left|\frac{(2x^2+x)+ix}{2x^2+2x+1}\right| = 1 .$$

Az utolsó egyenlet négyzetre emelése után:

$$(2x^2 + x)^2 + x^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2,$$

vagyis:

$$4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x+1)(2x^2 + 2x + 1) = 0 .$$

Ennek az egyenletnek egyetlen valós gyöke van:

$x = -\frac{1}{2}$, tehát a keresett komplex szám $z = -\frac{1}{2}(1+i)$.

Gyakorló feladat

Határozza meg z és a $\sqrt[3]{z}$ komplex számokat ha $|z - i| = \mathrm{Im}(z)$, valamint $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)$.

2.1.10.

Feladat

Határozza meg $Re(\,z\,)$ és $Im(\,z\,)$ számokat, ha:

$$i\,z^2 - 2(3+2i)z + 14 - 5i = 0 .$$

Megoldás:

Tekintsük az egyenletet „közönséges másodfokú egyenlet”-nek Az egyenlet diszkriminánsát jelölje D :

$$D=\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{4(3+2i)^2-4i(14-5i)}=\sqrt{-8i}\,.$$

Keressük az $u=x+iy=\sqrt{-8i}$ komplex számot. Négyzetre emelés után az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$x^2-y^2=0,\text{ és } 2xy=-8.$$

Mivel x és y csakis valós számok lehetnek, így a megoldások: $x_1=2$, $y_1=-2$ és $x_2=-2$, $y_2=2$.

Innen következik:

$$\sqrt{-8i}=\pm(2-2i).$$

A feladat megoldását: $z_{1/2}=\dfrac{2(3+2i)\pm(2-2i)}{2i}$ adja, tehát.

$$z_1=1-4i,\quad z_2=3-2i.$$

Gyakorló feladat

Oldja meg az egyenletet: $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$.

2.1.11.

Feladat

Számítsa ki $z=\left(2-\dfrac{1-5\sqrt{3}\,i}{3}\right)^{16}$ értékét. Írja fel algebrai alakban is.

Megoldás:

$$z=\left(2-\frac{1-5\sqrt{3}\,i}{3}\right)^{16}=\left(\frac{5}{3}+\frac{5\sqrt{3}\,i}{3}\right)^{16}=\left(\frac{5}{3}\right)^{16}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{16}.$$

A komplex számot trigonometriai alakjában alkalmazzuk.

Az abszolút értéke $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, argumentuma a $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ szög. Következik:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{16} = 2^{16}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{16} = 2^{16}\left(\cos\frac{16\pi}{3} + i\sin\frac{16\pi}{3}\right).$$

„Elvetjük” a teljes fordulatokat (2π egész szorzatait):

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{16} = 2^{16}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2^{16}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{5}{3}\right)^{16} 2^{16}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right).$$

―――――――――――――

Gyakorló feladat

Számítsa ki: $\left(\dfrac{3}{1+i} + \dfrac{1+i}{2i}\right)^{16}$.

2.1.12.

Feladat

Adva van $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 2 + i$ két komplex szám.

Határozza meg z komplex számot, ha $\operatorname{Re}\left(z \cdot \bar{z}_1\right) = -1$ és $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{z_2}\right) = \dfrac{3}{5}$.

―――――――――

Megoldás:

Ha $z = x + iy$ akkor $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(3-2i) = (3x+2y) + i(3y-2x)$.

A feladat kikötése szerint $\operatorname{Re}\left(z \cdot \bar{z}_1\right) = -1 = 3x + 2y$.

Szemléljük: $\dfrac{z}{z_2} = \dfrac{x+iy}{2+i} = \dfrac{x+iy}{2+i} \cdot \dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{(2x+y)+i(2y-x)}{4+1}$.

A feladat kikötése szerint $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{z_2}\right) = \dfrac{3}{5} = \dfrac{2y - x}{5}$.

Innen adódik a következő egyenletrendszer: $\begin{aligned} 3x + 2y &= -1 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$.

A rendszer megoldása: $x = -1$, $y = 1$.
A feladat megoldása: $z = -1 + i$.

——————————————
Gyakorló feladat

Ha $f(z) = \dfrac{7 - z}{1 - z^2}$, igazolja $|z| = 2|f(z)|$ amennyiben $z = 1+2i$.

2.1.13.

Feladat

Számítsa ki az $u^2 = 3 - 4i$ komplex szám algebrai alakját!

—————————
Megoldás:

Legyen $u = x + iy$. Így $u^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = 3 - 4i$. A komplex számok egyenlőségét alkalmazva a következő egyenletrendszert nyerjük:

$$x^2 - y^2 = 3,$$
$$2xy = -4.$$

A második egyenletből kifejezzük x ismeretlent:

$$x = -\frac{2}{y}.$$

A kapott kifejezést behelyettesítjük az első egyenletbe :

$$\frac{4}{y^2} - y^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^4 + 3y^2 - 4 = 0.$$

Csak a valós megoldásokat fogadjuk el ezen bikvadratikus egyenlet gyökei közül : $y_{1/2}^2 = 1$, és elvetjük az $y_{3/4}^2 = -4$ lehetőséget.

Tehát: $y = \pm 1$, illetve $x = \mp 2$.

A keresett komplex számok $u_{1/2} = \pm(2 - i)$.

Gyakorló feladat

Oldja meg az egyenletet: $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$.

2.1.14.

Feladat:

Adva van a $z_1=-\sqrt{3}+i$ komplex szám. Adjon meg még öt komplex számot algebrai alakban, ha a hat szám z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 és z_6 együtt egy szabályos hatszög csúcspontjait adják, amelynek a középpontja az origó.

Megoldás:

A csúcspontokat sorban, az előző csúcspont 60°-os, illetve $\frac{\pi}{3}$-os szöggel való elforgatásával nyerjük amit az egyik egységgyökkel való szorzás valósít meg. Az egységgyök argumentuma $\frac{\pi}{3}$:

$$u_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right).$$

Most sorban megszorozzuk az újabb és újabb csúcspontokat:

$$z_2=z_1\cdot u_0=\left(-\sqrt{3}+i\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}-i\,,$$

$$z_3=z_2\cdot u_0=\left(-\sqrt{3}-i\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=-2i\,,$$

$$z_4=z_3\cdot u_0=-2i\cdot\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-i\,,$$

$$z_5=z_4\cdot u_0=\left(\sqrt{3}-i\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+i\,,$$

$$z_6=z_5\cdot u_0=\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=2i\,.$$

Gyakorló feladat

Adott a $z_1 = 1 + i$ komplex szám. Határozza meg z_2 és z_3 komplex számok algebrai alakját úgy, hogy a három szám z_1, z_2 és z_3 egy szabályos háromszög csúcspontjait adják, amelynek a középpontja az origó.

2.1.15.

Feladat

Számítsa ki: $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}$.

Megoldás:

Vezessük be a $z = \cos\frac{\pi}{11} + i\sin\frac{\pi}{11}$ számot és számítsuk ki a következő $\boldsymbol{Z}$ összeget:

$$\boldsymbol{Z} = z + z^3 + z^5 + z^7 + z^9 = z\frac{\left(z^2\right)^5 - 1}{z^2 - 1}.$$

Észrevesszük, hogy ez egy geometriai sorozat első öt tagjának az összege, a sorozat hányadosa z^2. Megállapítjuk a következőket is:

$$z^{11} = \cos 11\frac{\pi}{11} + i\sin 11\frac{\pi}{11} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Az összeg további alakítgatásával az alábbi egyenlőség adódik:

$$\boldsymbol{Z} = z\frac{\left(z^2\right)^5 - 1}{z^2 - 1} = \frac{z^{11} - z}{z^2 - 1} = \frac{-1 - z}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{1 - z}.$$

Bővítsük a törtet az $1 - \overline{z}$ -vel (figyeljük meg milyen szám z !):

Mivel $(1 - z)(1 - \overline{z}) = 1 - z - \overline{z} + z \cdot \overline{z} = 2 - 2\cos\frac{\pi}{11}$:

$$Z=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}}=-\frac{1-\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{11}\right)}=\frac{1}{2}+i\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{11}\right)}.$$

Különítsük el a valós valamint az imaginárius részeket

$$Re(\mathbf{Z})=\left(\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}\right),$$

$$Im(\mathbf{Z})=\left(\sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{5\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}+\sin\frac{9\pi}{11}\right).$$

Azonnal látható, hogy két feladatot oldottunk meg egy időben.

A valós részek egyenlőségéből következik

$$\left(\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}\right)=\frac{1}{2}.$$

Az imaginárius részek egyenlőségének „hozadéka”:

$$\left(\sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{5\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}+\sin\frac{9\pi}{11}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{11}\right)}.$$

Gyakorló feladat

Igazolja az alábbi egyenlőséget:

$$\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{2}.$$

3. VEKTORALGEBRA

3.0. GYAKORLÓ FELADATOK

3.0.1. Feladat:

Adottak az $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ és $\vec{b} = (3,3,-4)$ vektorok. Határozzuk meg a következő vektorokat és intenzitásokat:

$$2\vec{a},\quad -\frac{3}{2}\vec{b},\quad \vec{a}+\vec{b},\quad 3\vec{a}-2\vec{b}\ ,\quad |\vec{a}|,\quad |\vec{b}|.$$

Megoldás:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\ ,\quad \vec{b} = (3,3,-4) = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}\ ,$$

$$2\vec{a} = 2\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\right) = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k} = (4,-6,10),$$

$$-\frac{3}{2}\vec{b} = -\frac{3}{2}\left(3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}\right) = -\frac{9}{2}\vec{i} - \frac{9}{2}\vec{j} + 6\vec{k} = \left(-\frac{9}{2},\ -\frac{9}{2},\ 6\right),$$

$$\vec{a}+\vec{b} = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\right) + \left(3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}\right) = 5\vec{i} + \vec{k} = (5,0,1),$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\right) - 2\left(3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}\right) =$$

$$= 6\vec{i} - 9\vec{j} + 15\vec{k} - 6\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k} = -15\vec{j} + 23\vec{k},$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}\ ,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34}\ .$$

3.0.2. Feladat:

Számítsuk ki az $\vec{a}=(4,-3,1)$ és $\vec{b}=(5,-2,-3)$ vektorok skaláris szorzatát.

Megoldás:

$$\vec{a}\circ\vec{b}=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b=4\cdot 5+(-3)\cdot(-2)+1\cdot(-3)=20+6-3=23.$$

3.0.3. Feladat:

Adottak az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok: $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$ és $\vec{c}=4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$. Számítsuk ki mennyi $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}$.

Megoldás:

$$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}=(-1,-1,2),$$

$$\vec{c}=4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}=(4,-2,-3),$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 2\\ 4 & -2 & -3\end{vmatrix}=7\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}=(7,5,6).$$

3.0.4. Feladat:

Számítsuk ki az $\vec{a}=(-2,2,-1)$ és $\vec{b}=(-6,3,6)$ vektorok által bezárt szög nagyságát.

Megoldás:

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

$$\vec{a}\circ\vec{b} = 12+6-6 = 12,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{36+9+36} = \sqrt{81} = 9,$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{3\cdot 9} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{4}{9} \approx 63^\circ 36' 44''.$$

3.0.5. Feladat:

Határozzuk meg mekkora az $\vec{a} = (5,2,5)$ vektornak a $\vec{b} = (2,-1,2)$ vektorra vetett merőleges vetületének hossza..

Megoldás:

$$\cos\alpha = \frac{pr\left(\vec{a}_{\vec{b}}\right)}{|\vec{a}|} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha =$$

$$= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\frac{pr\left(\vec{a}_{\vec{b}}\right)}{|\vec{a}|} = |\vec{b}|\cdot pr\left(\vec{a}_{\vec{b}}\right)$$

$$pr\left(\vec{a}_{\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{10-2+10}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{18}{3} = 6.$$

3.0.6. Feladat:

Határozzukk meg az $\vec{a} = \vec{p}+2\vec{q}$ és $\vec{b} = \vec{p}-\vec{q}$ vektorok skaláris szorzatát ha $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = \sqrt{2}$ és $\angle(\vec{p},\vec{q}) = 45^\circ$.

Megoldás:

$$\vec{a}\circ\vec{b} = (\vec{p}+2\vec{q})\circ(\vec{p}-\vec{q}) = \vec{p}\circ\vec{p}-\vec{p}\circ\vec{q}+2\vec{q}\circ\vec{p}-2\vec{q}\circ\vec{q} =$$

$$= \vec{p}\circ\vec{p}+\vec{q}\circ\vec{p}-2\vec{q}\circ\vec{q} =$$

$$= |\vec{p}|^2 \cdot \cos 0^\circ + |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos 45^\circ - 2|\vec{q}|^2 \cdot \cos 0^\circ =$$
$$= 9 \cdot 1 + 3\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12 - 4 = 8.$$

3.0.7. Feladat:

Számítsuk ki az $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ vektor hosszát ha tudjuk, hogy:

$$|\vec{p}| = 2,\ |\vec{q}| = 3,\ \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}.$$

Megoldás:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{(\vec{p} - 2\vec{q}) \circ (\vec{p} - 2\vec{q})} = \sqrt{\vec{p} \circ \vec{p} - 4\vec{p} \circ \vec{q} + 4\vec{q} \circ \vec{q}} =$$
$$= \sqrt{|\vec{p}|^2 - 4|\vec{p}||\vec{q}|\cos\frac{\pi}{3} + 4|\vec{q}|^2} = \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 9} = .$$
$$= \sqrt{4 - 12 + 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

3.0.8. Feladat:

Legyenek az $A(2,4,5)$, $B(-3,2,2)$, $C(-1,0,3)$ pontok egy háromszög csúcspontjai. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű.

Megoldás:

Azt kell megmutatnunk, hogy a háromszög egyik belső szöge 90°.
Figyeljük meg a következő oldalvektorokat: $\overrightarrow{CA} = (3,4,2)$ és $\overrightarrow{CB} = (-2,2,-1)$. Azt a szöget, amelyet ezek a vektorok zárnak be, a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}.$$

$$\cos\gamma = \frac{-6+8-2}{\sqrt{9+16+4}\cdot\sqrt{4+4+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arccos 0 = 90^\circ,$$

ami egyben azt is jelenti, hogy a háromszög derékszögű, mert a C csúcsnál levő szög derékszög.

3.0.9. Feladat:

Adottak az $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ és $D(-5,-4,8)$ pontok. Számítsuk ki annak a tetraédernek a térfogatát, amelynek a csúcspontjai a megadott pontok, majd annak a testmagasságnak a hosszát, amely az ABC csúcsok által meghatározott alaplaphoz tartozik.

Megoldás:

A térfogatot az egy csúcsból kiinduló három vektor felett kifeszített parelelepipedon térfogatának hatodrészeként számíthatjuk ki. Legyen a három egy csúcsból kiinduló vektor az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2,-2,-3),$$
$$\overrightarrow{AC} = (4,0,6),$$
$$\overrightarrow{AD} = (-7,-7,7).$$

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\circ\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(84+84+56+84) = \frac{308}{6} = \frac{154}{3}.$$

A magasságot a térfogatból is kiszámíthatjuk, ha felírjuk hogy:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H_{ABC} \quad \Rightarrow \quad H_{ABC} = \frac{3V}{B}.$$

Az alaplap (bázis) az ABC háromszög, melynek a területét a következő képlettel számítjuk:

$$B = P_{ABC} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{144 + 576 + 64} = \sqrt{784} = 28,$$

$$B = \frac{28}{2} = 14 \qquad \Rightarrow \qquad H_{ABC} = \frac{3V}{B} = \frac{154}{14} = 11.$$

3.0.10. Feladat:

Számítsuk ki annak a szögnek a nagyságát, amelyet az $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ és $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$ vektorok felett kifeszített paralelogramma átlói zárnak be ha tudjuk, hogy: $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$ és $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

Megoldás:

Az egyik átló az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ oldalvektorok összege, a másik pedig a különbségük:

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 5\vec{m} + 2\vec{n} + \vec{m} - 3\vec{n} = 6\vec{m} - \vec{n},$$

$$\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = 5\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{m} + 3\vec{n} = 4\vec{m} + 5\vec{n},$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{d}_1 \circ \vec{d}_2}{\left|\vec{d}_1\right| \cdot \left|\vec{d}_2\right|},$$

$$\vec{d}_1 \circ \vec{d}_2 = (6\vec{m}-\vec{n}) \circ (4\vec{m}+5\vec{n}) =$$
$$= 24\vec{m}\circ\vec{m} + 26\vec{m}\circ\vec{n} - 5\vec{n}\circ\vec{n} =$$
$$= 24|\vec{m}|^2 + 26|\vec{m}||\vec{n}|\cos\frac{\pi}{4} - 5|\vec{n}|^2 =$$
$$= 24\cdot 8 + 26\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\cdot 9 =$$
$$= 192 + 156 - 45 = 303,$$

$$\left|\vec{d}_1\right| = \sqrt{\vec{d}_1\circ\vec{d}_1} = \sqrt{(6\vec{m}-\vec{n})\circ(6\vec{m}-\vec{n})} =$$
$$= \sqrt{36\vec{m}\circ\vec{m} - 12\vec{m}\circ\vec{n} + \vec{n}\circ\vec{n}} =$$
$$= \sqrt{36\cdot 8 - 12\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 9} =$$
$$= \sqrt{288 - 72 + 9} = \sqrt{225} = 15,$$

$$\left|\vec{d}_2\right| = \sqrt{\vec{d}_2\circ\vec{d}_2} = \sqrt{(4\vec{m}+5\vec{n})\circ(4\vec{m}+5\vec{n})} =$$
$$= \sqrt{16\vec{m}\circ\vec{m} + 40\vec{m}\circ\vec{n} + 25\vec{n}\circ\vec{n}} =$$
$$= \sqrt{16\cdot 8 + 40\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 25\cdot 9} =$$
$$= \sqrt{128 + 240 + 225} = \sqrt{593},$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{d}_1\circ\vec{d}_2}{\left|\vec{d}_1\right|\cdot\left|\vec{d}_2\right|} = \frac{303}{15\sqrt{593}} \approx 0{,}8295$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = \arccos\frac{303}{15\sqrt{593}} \approx 33^\circ 57' 4''$$

Az átlók tehát megközelítőleg $33^\circ 57' 4''$ szöget zárnak be.

3.0.11. Feladat:

Számítsuk ki az $\vec{a}=12\vec{n}-3\vec{m}-4\vec{p}$ vektor $\vec{b}=(\vec{m}-2\vec{n})\times(\vec{m}+3\vec{n}-4\vec{p})$ vektorra vetett merőleges vetületének hosszát, ha $\vec{m},\vec{n},\ \vec{p}$ vektorok kölcsönösen merőleges egységvektorok amelyek az adott sorrendben jobb forgású triédert alkotnak.

Megoldás:

A feladat feltételei szerint:

$$|\vec{m}|=|\vec{n}|=|\vec{p}|=1 \quad \wedge \quad \angle(\vec{m},\vec{n})=\angle(\vec{m},\vec{p})=\angle(\vec{n},\vec{p})=90^\circ .$$

A $\vec{b}$ vektor egyszerűbb alakját megkaphatjuk, ha rendezzük a megadott alakot:

$$\vec{b}=(\vec{m}-2\vec{n})\times(\vec{m}+3\vec{n}-4\vec{p})=$$
$$=\vec{m}\times\vec{m}+3\vec{m}\times\vec{n}-4\vec{m}\times\vec{p}-2\vec{n}\times\vec{m}-6\vec{n}\times\vec{n}+8\vec{n}\times\vec{p},$$

$$\vec{b}=0+3\vec{m}\times\vec{n}-4\vec{m}\times\vec{p}+2\vec{m}\times\vec{n}+0+8\vec{n}\times\vec{p}=$$
$$=5\vec{m}\times\vec{n}-4\vec{m}\times\vec{p}+8\vec{n}\times\vec{p}=$$
$$=5\vec{p}-4(-\vec{n})+8\vec{m}=8\vec{m}+4\vec{n}+5\vec{p}.$$

$$pr\left(\vec{a}_{\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{(12\vec{n}-3\vec{m}-4\vec{p})\circ(8\vec{m}+4\vec{n}+5\vec{p})}{|8\vec{m}+4\vec{n}+5\vec{p}|}=$$
$$=\frac{48\vec{n}\circ\vec{n}-24\vec{m}\circ\vec{m}-20\vec{p}\circ\vec{p}}{\sqrt{64+16+25}}$$

A számlálóban csak a fenti összeadandók maradnak meg, mert a többi merőleges vektorok skaláris szorzata, ezek pedig nullával egyenlők:

$$pr\left(\vec{a}_{\vec{b}}\right)=\frac{48\cdot1-24\cdot1-20\cdot1}{\sqrt{105}}=\frac{4}{\sqrt{105}}.$$

3.0.12. Feladat:

Legyenek $\vec{a}=(1,2\alpha,1)$, $\vec{b}=(2,\alpha,\alpha)$ és $\vec{c}=(3\alpha,2,-\alpha)$ egy tetraéder élvektorai.

a) α függvényében számítsuk ki a tetraéder térfogatát.

b) Határozzuk meg az α paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorok komplanárisak legyenek.

c) Az α paraméter kapott értékére bontsuk fel az $\vec{a}$ vektort a $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok mentén.

Megoldás:

a) $$V_{gúla}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\circ\vec{c}\right| ,$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\circ\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 2\alpha & 1\\ 2 & \alpha & \alpha\\ 3\alpha & 2 & -\alpha\end{vmatrix}=6\alpha^3-2\alpha+4 ,$$

$$V_{gúla}=\frac{1}{6}\left|6\alpha^3-2\alpha+4\right| .$$

b) Ha $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorok komplanárisak $\Rightarrow$ $V_{hasáb}=0$, vagyis $6\alpha^3-2\alpha+4=0$.

-1	6	0	-2	4	
	6	-6	4	0	$\Rightarrow \alpha_1=-1$

$$6\alpha^3-2\alpha+4=(\alpha+1)\left(6\alpha^2-6\alpha+4\right)=0 ,$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{2/3}=\frac{6\pm\sqrt{36-96}}{12}\notin R$$

vagyis az egyedüli valós gyök az $\alpha_1=-1$, ez pedig azt jelenti, hogy az adott vektorok $\alpha=-1$ paraméterérték esetén lesznek komplanárisak.

c) $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$,

$(1,-2,1) = x(2,-1,-1) + y(-3,2,1)$,

$(1,-2,1) = (2x,-x,-x) + (-3y,2y,y)$,

$(1,-2,1) = (2x-3y,-x+2y,-x+y)$.

Egyenlítsük ki a megfelelő együtthatókat. Ekkor a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} 2x-3y&=1 \\ -x+2y&=-2 \\ -x+y&=1 \quad \Rightarrow \quad y=x+1 \end{aligned}$$

$$-x+2x+2=-2 \quad \Rightarrow \quad x=-4 \quad \Rightarrow \quad y=-3$$

A keresett felbontás tehát: $\vec{a} = -4\vec{b} - 3\vec{c}$.

3.0.13. Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy az $\vec{a} = (-1,3,2)$, $\vec{b} = (-2,-3,4)$ és $\vec{c} = (-3,12,6)$ vektorok komplanárisak, majd keressük meg a köztük fennálló lineáris összefüggést.

Megoldás:

A vektorok akkor komplanárisak, ha a vegyes szorzatuk nullával egyenlő. Számítsuk ki ezért az adott vektorok vegyes szorzatát:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18-36-48-18+24+36=0,$$

ez azt jelenti, hogy az adott vektorok komplanárisak. Három komplanáris (egy síkhoz tartozó) vektor mindig lineárisan függő, amely összefüggést a következő lineáris egyenletből számíthatunk ki:

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0 .$$

$$x(-1,3,2) + y(-2,-3,4) + z(-3,12,6) = (0,0,0)$$

$$-x - 2y - 3z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2y - 3z$$

$$3x - 3y + 12z = 0$$

$$2x + 4y + 6z = 0$$

$$-x - 2y - 3z = 0$$

$$x - y + 4z = 0$$

$$-3y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 3y \quad \Rightarrow \quad x = -11y$$

Válasszuk például az $y = 1$ értéket, ekkor $z = 3$ és $x = -11$, vagyis az adott vektorok között fennálló lineáris összefüggés:

$$-11\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = 11\vec{a} - 3\vec{c} .$$

3.0.14. Feladat:

Adottak az $\vec{a} = (\ln(p-2),-2,6)$, $\vec{b} = (p,-2,5)$ és $\vec{c} = (0,-1,3)$ vektorok. Határozzuk meg a valós p paraméter értékét úgy, hogy az adott vektorok komplanárisak legyenek.

Megoldás:

Három vektor komplanáris, ha a vegyes szorzatuk nulla.

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = \begin{vmatrix} \ln(p-2) & -2 & 6 \\ p & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$=-6\ln(p-2)-6p+5\ln(p-2)+6p=$$
$$=-\ln(p-2)=0.$$

$$\ln(p-2)=0 \quad\Rightarrow\quad p-2=e^0=1 \quad\Rightarrow\quad p=3.$$

Az adott vektorok $p=3$ paraméterérték esetén lesznek komplanárisak.

3.0.15. Feladat:

Adottak a következő vektorok:

$\vec{a}=(0,2p,p)$, $\vec{b}=(2,2,1)$, $\vec{c}=(-1,-2,-1)$, $\vec{d}=(-3p,-2p,-p)$.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $\vec{a}-\vec{d}$ és $\vec{b}-\vec{c}$ vektorok kollineárisak.

b) Határozzuk meg a valós p paraméter értékét úgy, hogy

$$(\vec{a}-\vec{b})\circ\vec{c}=\vec{a}\circ\vec{c}+p \text{ legyen.}$$

Megoldás:

a) Két vektor kollineáris, ha pl. $\vec{v}_1=k\vec{v}_2$. Mivel

$$\vec{a}-\vec{d}=(3p,4p,2p)$$
$$\vec{b}-\vec{c}=(3,4,2)$$

Könnyen belátható, hogy $\vec{a}-\vec{d}=p(\vec{b}-\vec{c})$ ami azt jelenti, hogy az adott vektorok kollineárisak.

b) $$(\vec{a}-\vec{b})\circ\vec{c}=\vec{a}\circ\vec{c}+p,$$

$$(-2,2p-2,p-1)\circ(-1,-2,-1)=(0,2p,p)\circ(-1,-2,-1)+p,$$

$$2-4p+4-p+1=-4p-p+p,$$
$$-5p+7=-4p,$$
$$p=7.$$

A keresett paraméterérték tehát a $p=7$.

3.1. ÍRÁSBELI VIZSGAFELADATOK

3.1.1. Feladat

Számítsa ki az ABC háromszög belső szögeinek koszinuszát ha: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{m} - 6\vec{n}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{m} + 7\vec{n}$, ahol $\vec{m}, \vec{n}$ vektorok kölcsönösen merőleges egységvektorok

---

Megoldás:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{40}{\sqrt{40}\sqrt{50}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{mert:}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (6\vec{n} - 2\vec{m})(\vec{m} + 7\vec{n}) = 42 - 2 = 40,$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(6\vec{n} - 2\vec{m})(6\vec{n} - 2\vec{m})} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40},$$

hasonló módon: $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{50}$.

mivel a harmadik oldal $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\vec{m} + \vec{n}$, következik:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| = 0 \;\Rightarrow\; \cos\alpha = 0,$$

vagyis ez a háromszög derékszögű háromszög.

Ily módon $\cos\gamma = \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Gyakorló feladat

Számítsa ki az $ABCD$ paralelogramma belső szögeinek, valamint az átlók által közbezárt szög koszinuszát, ha $\overrightarrow{AB} = 2\vec{m} - 6\vec{n}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{m} + 7\vec{n}$, ahol $\vec{m}, \vec{n}$ vektorok kölcsönösen merőleges egységvektorok

3.1.2. Feladat

Adott három vektor $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (3,2,1)$, $\vec{c} = (1,1,1)$. Igazolja, hogy $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ vektor egysíkú $\vec{a}, \vec{b}$ vektorokkal. Bontsa $\vec{d}$ vektort $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal párhuzamos komponensek összegére.

Megoldás:

Rövidebb változat:
A kettős vektoriális szorzat a következőket adja:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \circ \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \circ \vec{c}) \cdot \vec{a} = 6\vec{b} - 6\vec{a}\,.$$

Közvetlenül látható $\vec{d}$ egysíkúsága $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal, valamint leolvasható a kért komponensek szerinti felbontás is.

A másik változat:

Kiszámítandó $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 8, -4)$,

és $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (12, 0 -12)$ vektor, majd megoldandó az $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=(12,0-12)$ vektoregyenlet. Ez utóbbi egyenlet megoldásai: $\alpha=-6$ és $\beta=6$, vagyis $\vec{d}=-6\vec{a}+6\vec{b}$.

Gyakorló feladat

Adott négy pont: $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, -3, -1)$ és $D(1, -2, -1)$. Határozza meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorokra merőleges $\vec{a}_0$ egységvektort

3.1.3. Feladat

Számítsa ki az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokra szerkesztett paralelogramma területét, ha $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{q}-2\vec{p}$, ahol $\vec{p}$, $\vec{q}$ egységvektorok és az általuk közbezárt szög $\frac{\pi}{6}$.

Megoldás:

A vektoriális szorzat definíciójából következik, hogy két vektor vektoriális szorzatának hossza számszerűleg a vektorokra szerkesztett paralelogramma P területével egyenlő. Ezek szerint:

$$P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|(\vec{p}-2\vec{q})\times(\vec{q}-2\vec{p})\right|= \\ =\left|\vec{p}\times\vec{q}-2\vec{p}\times\vec{p}-2\vec{q}\times\vec{q}+4\vec{q}\times\vec{p}\right|.$$

A vektoriális szorzat tulajdonságainak alkalmazásával nyerjük az alábbi egyenlőséget is (párhuzamos vektorok vektoriális szorzata eltűnik és a tényezők sorrendjének felcserélése előjelváltást okoz):

$$P=\left|\vec{p}\times\vec{q}-4\vec{p}\times\vec{q}\right|=3\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|=3\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\sin(\angle\vec{p},\vec{q})= \\ =3\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}.$$

Gyakorló feladat

Számítsa ki az $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$, és $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$ vektorokra szerkesztett paralelogramma átlói által közbezárt szöget, ha $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$ és $|\vec{n}| = 3$, valamint $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \pi/4$.

3.1.4. Feladat

Adott három vektor: $\vec{a} = (k, 1, 4)$, $\vec{b} = (1, -2, 0)$, $\vec{c} = (3, -3, 4k)$.

a) Számítsa ki a vektorokra szerkesztett paralelepipedon V térfogatát.
b) A k szám mely értéke esetén egysíkúak a vektorok?

Megoldás:

Három vektor vegyes szorzatának abszolút értéke a vektorokra szerkesztett paralelepipedon térfogatának mérőszáma. A kiszámított vegyes szorzat $-8k^2 - 4k + 12$. Ha ez a kifejezés a 0 értéket veszi fel, akkor „nincs" térfogat, tehát a vektorok egysíkúak. Ez akkor történik meg, ha $k_1 = 1$ vagy $k_2 = -3/2$.

Gyakorló feladat

Határozza meg m paraméter értékét úgy, hogy $\vec{a} = (m-3, 1, m)$ vektor egyenlő szögeket zárjon be $\vec{b} = (1, 2, 3)$ és $\vec{c} = (2, 1, 11)$ vektorokkal, majd határozza meg $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorokra szerkesztett gúla térfogatát.

3.1.5.

Feladat

Adott az alábbi feltételeket kielégítő három vektor:

$$\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q},\quad \vec{b} = \vec{p} - \vec{q},\quad \vec{c} = -\vec{p} + 2\vec{r};$$
$$|\vec{p}| = 1,\quad |\vec{q}| = 2,\quad |\vec{r}| = 3; \qquad .$$
$$\angle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{4},\quad \angle(\vec{p},\vec{r}) = \frac{\pi}{2},\quad \angle(\vec{q},\vec{r}) = \frac{\pi}{2}.$$

Határozza meg $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorokra szerkesztett hasáb térfogatát.

Megoldás:

Megállapítandó a vektorok vegyes szorzatának abszolút értéke:

$$V = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\circ\vec{c}\right| =$$
$$= \left|\left((2\vec{p}+\vec{q})\times(\vec{p}-\vec{q})\right)\circ(-\vec{p}+2\vec{r})\right| = .$$
$$= \left|6(\vec{p}\times\vec{q})\circ\vec{r}\right|$$

A levezetés közben a vektoriális és a skaláris szozat tulajdonságait alkalmaztuk:

$$\vec{p}\times\vec{p} = 0,\quad \vec{q}\times\vec{q} = 0,\quad (\vec{p}\times\vec{q})\circ\vec{p} = 0.$$

Végül, a keresett térfogat:

$$V = \left|6(\vec{p}\times\vec{q})\circ\vec{r}\right| = 6|\vec{p}\times\vec{q}|\cdot|\vec{r}|\cdot\cos 0 =$$
$$= 6\left(|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\sin(\angle\vec{p},\vec{q})\right)|\vec{r}| = 18\sqrt{2}$$

Gyakorló feladat

Adottak az ABC háromszög oldalvektorai: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$ és $\overrightarrow{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$ ($\vec{a}$ és $\vec{b}$ kölcsönösen merőleges egységvektorok). Határozza meg a háromszög szögeit.

3.1.6. Feladat

Számítsa ki az $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ és $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ vektorokra szerkesztett paralelogramma területét, valamint az *a* oldalához tartozó h_a magasságát.

Megoldás:

A paralelogramma *p* területe számszerűleg a paralelogrammát meghatározó vektorok vektoriális szorzatának a hosszúságával egyenlő. Tehát:

$$p = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \left(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right) \times \left(\vec{i} + \vec{j}\right) \right|.$$

Ismeretes a kölcsönösen merőleges három egységvektor „szorzó táblája”. Alkalmazva ezeket az ismereteket:

$$p = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{i} - \vec{j} \right| = \sqrt{\left(\vec{i} - \vec{j}\right) \circ \left(\vec{i} - \vec{j}\right)} = \sqrt{2}.$$

Más úton ezt a területet a paralelogramma alapjának ($\vec{a}$ vektor hosszúsága), és a hozzá tartozó magasságának h_a szorzataként nyerjük:

$$a = \left| \vec{a} \right| = \sqrt{\left(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right) \circ \left(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right)} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3.$$

Az $a \cdot h_a = p$ egyenlőségből következik: $h_a = \dfrac{p}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Gyakorló feladat

Adott három vektor: $\vec{a}$ =(4, 3, 1), $\vec{b}$ =(5, 0, 2) és $\vec{c}$ =(3, –4, 5). Határozzuk meg a $\vec{c}$ vektor ($\vec{a}$, $\vec{b}$) síkra történő tükrözésével nyert vektort (szimmetrikus vektort).

3.1.7.

Feladat

Adott négy pont: $A(2{,}0{,}0)$, $B(0{,}3{,}0)$, $C(0{,}0{,}6)$, $D(2{,}3{,}8)$.

a) Számítsa ki annak a háromoldalú hasábnak a térfogatát, amelynek az adott pontok szomszédos csúcspontjai (Az élek A-ból indulnak!)

b) Határozza meg a hasáb ötödik és hatodik csúcspontjának a koordinátáit is, ha azok ABC illetve ADC .síkokhoz illeszkednek. (A hasáb két alaplapja az ABD és a CEF háromszög).

Megoldás:

a) A térfogat az egy csúcsból kiinduló él-vektorok vegyes szorzata abszolút értékének a fele. Az A pontból kiinduló vektorok:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2, 3, 0)\,,$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-2, 0, 6) \quad \text{és}$$

$$\overrightarrow{AD} = (0, 3, 8)\,.$$

Vegyes szorzatuk $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AD} = 54$, tehát a térfogat V=27.

b) Legyen az ABC síkhoz illeszkedő negyedik csúcspont E. Mivel $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ is élek, ezért $\overrightarrow{AE}$ csakis az oldal átlója lehet.

A keresett E pont helyvektora tehát:

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) =$$
$$=(2, 0, 0) + (-2, 3, 0) + (-2, 0, 6) =$$
$$= (-2, 3, 6) \;\Rightarrow\; E(-2, 3, 6).$$

Hasonló módon határozzuk meg a hatodik csúcspont, F pont koordinátáit is amely az ADC síkhoz illeszkedik:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right) =$$
$$=(2, 0, 0) + (0, 3, 8) + (-2, 0, 6) = (0, 3, 14)$$
$$\Rightarrow\; F(0, 3, 14).$$

Gyakorló feladat

Adott négy pont: $A(4,1,2)$, $B(1,4,2)$, $C(1,4,5)$ és $D(7,4,5)$, amelyek az $ABCD$ háromoldalú gúla csúcspontjai. T_1 pont az ABD oldal súlypontja, T_2 az ACD lap súlypontja, T_3 a BCD súlypontja és végül T_4 az ABC oldal súlypontja.

Számítsa ki az $ABCD$ és a $T_1T_2T_3T_4$ gúlák térfogatait és határozza meg a két térfogat arányát!

3.1.8.

Feladat

Adott három vektor: $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}, \vec{b} = 3\vec{n} + \vec{p}, \vec{c} = 2\vec{m} + 3\vec{p}$. A vektorok komponenseire fennáll:

$$|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1, |\vec{p}| = 2, \ \angle(\vec{n}, \vec{p}) = 60^\circ,$$

$$\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \angle(\vec{m}, \vec{p}) = 90^\circ.$$

Határozzuk meg $\vec{d}$ vektor hosszát, ahol $\vec{d}$ az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra szerkesztett paralelepipedon egyik átlója.

Megoldás:

Négy átlónk van. Ezek közül az egyik:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2\vec{m} + \vec{n}) + (3\vec{n} + \vec{p}) + (2\vec{m} + 3\vec{p}) = 4\vec{m} + 4\vec{n} + 4\vec{p},$$

a hosszúsága pedig:

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{\vec{d} \circ \vec{d}} = \sqrt{16(\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}) \circ (\vec{m} + \vec{n} + \vec{p})} = \sqrt{1 + 1 + 4 + 2} = 8\sqrt{2},$$

(merőlegesség miatt $\vec{m} \circ \vec{n} = \vec{m} \circ \vec{p} = 0$, míg $\vec{n} \circ \vec{p} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ a közbezárt szög koszinusza miatt).

A többi átló hosszúságát gyakorlatként számítsa ki az olvasó!.

Gyakorló feladat

Vizsgálja ki, egysíkúak-e az alábbi vektorok?
$\vec{a} = 6\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} - \vec{k}$ és $\vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

Határozza meg λ értékét úgy, hogy $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ merőleges legyen $\vec{c}$ vektorra.

3.1.9. Feladat

Adott két vektor $\vec{a} = (1,-1,1)$ és $\vec{b} = (2,0,2)$, valamint két pont $A(1,2,3)$ és $C(4,1,z)$. Határozza meg az $ABCD$ paralelogramma területét, ha oldalai *párhuzamosak* $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal.

Megoldás:

A paralelogramma oldalainak az adott vektorokkal való párhuzamossága miatt felírható:

$\overrightarrow{AC} = k\vec{a} + l\vec{b}$ =(k, –k, k) + (2l, 0, 2l), valamely k és l számok esetén.

Az adott pontok helyvektoraira felírható:
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, illetve koordináták segítségével ugyanez:

$$(1,2,2) + (k + 2l, -k, k + 2l) = (4,1,z) .$$

A megfelelő koordináták egyenlőségéből következik:

$$k = 1,\ l = 1,\ z = 3.$$

Ezek a számok azt jelentik, hogy $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

$$\text{Mivel } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2,0,2) ,$$

a paralelogramma területe pedig a vektoriális szorzat hosszúságának a számértéke, tehát:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

———————————

Gyakorló feladat

Mekkora szöget zár be $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektor, ha $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ és $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ vektorok kölcsönösen merőlegesek?

3.1.10.

Feladat

Határozza meg $\vec{a} = 3\vec{m} - 12\vec{n} + 4\vec{p}$ vektor vetületének nagyságát a $\vec{b} = (\vec{m} - 2\vec{n}) \times (\vec{m} + 3\vec{n} - 4\vec{p})$ vektor irányán, ha $\vec{m}, \vec{n}$ és $\vec{p}$ kölcsönösen merőleges egységvektorokból álló jobbsodrású rendszert alkotnak. (Megfigyelni a 3.0.11. feladatot)

———————

Megoldás:

A kölcsönös merőlegesség valamint a „jobbas" elrendezés miatt közönséges koordináta rendszer egységvektorainak tekintjük $\vec{m}, \vec{n}$ és $\vec{p}$ vektorokat:

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{m} & \vec{n} & \vec{p} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{m} + 4\vec{n} + 5\vec{p}\,.$$

Ismert állítás alapján: $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{24-48+20}{\sqrt{64+16+25}} = \dfrac{-4}{\sqrt{105}}\,.$

Gyakorló feladat

Adott három vektor: $\vec{a}$ =(2, –1, 3), $\vec{b}$ =(1, –4, 2) és $\vec{c}$ =(3, 2, –1). Határozza meg ($\vec{a}$, $\vec{b}$) vektorok síkjának a ($\vec{b}$, $\vec{c}$) vektorok síkjával bezárt szögét.

3.1.11.
Feladat

Határozza meg *m* paraméter értékét úgy, hogy $\vec{a}=(m-3,\, 1,\, m)$ vektor egyenlő szöget zárjon be $\vec{b}=(1,2,3)$ és $\vec{c}=(2,1,11)$ vektorokkal

Megoldás:

A szögek egyenlők, ha azok koszinuszai egyenlők. A vektorok skaláris szorzatának felhasználásával:

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=$$

$$=\sqrt{(m-3)^2+1+m^2}\cdot\sqrt{14}\cos\varphi=(m-3)+2+3m$$

$$\vec{a}\circ\vec{c}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\varphi=$$

$$=\sqrt{(m-3)^2+1+m^2}\cdot\sqrt{126}\cos\varphi=2(m-3)+1+11m\,.$$

Ha a két egyenlőség megfelelő oldalait elosztjuk egymással, akkor a $\sqrt{9}=+3$ esetben: m = 8, míg a $\sqrt{9}=-3$ esetet elvetjük, mert a koszinuszok ellenkező előjelűek (igaz, azonos abszolút értékkel). Ezek a szögek kiegészítő szögek – tehát nem egyenlők!

Az m paraméter értéke tehát m = 8.

Gyakorló feladat

Határozza meg k paraméter értékét ha $\vec{a} = (1,\ k+2,\ 3)$ vektor egyenlő szögeket zár be $\vec{b} = (3,\ 4,\ 0)$ és $\vec{c} = (9,\ 0,\ 12)$ vektorokkal.

3.1.12.

Feladat

Adott három vektor: $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (3,2,1)$, $\vec{c} = (1,-2,1)$. Ha a gúla egyik csúcspontja az origóban van, és az innen kiinduló élek pontosan az adott $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorhármas, akkor számítsa ki a $\vec{c}$ vektor csúcspontjából az $\vec{a},\vec{b}$ vektorok síkjára merőleges testmagasságot.

Megoldás:

A gúla tárfogata:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\,.$$

Ha a térfogatot kiszámítására a „szokásos” képletet használjuk (ismerve az alapterületet) kiszámítható a magasság:

$$B = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 2\sqrt{6}\,.$$

Innen a magasság:

$$H = \frac{3V}{B} = \frac{12}{2\sqrt{6}} = \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$

Gyakorló feladat

Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka éle $a = 4$. M pont a felső lap, $A_1B_1C_1D_1$ középpontja, az N pont pedig a BCC_1B_1 oldal középpontja. Határozza meg $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{AN}$ vektorok hosszát és hajlásszögét.

3.1.13.

Feladat

Számítsa ki az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorokra szerkesztett paralelepipedon térfogatát, ha $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p}, \vec{b} = \vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$, $\vec{c} = \vec{m} - \vec{n} + \vec{p}$. és ha az $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ vektorhármas jobbas rendszert alkot, és ha a felettük szerkesztett paralelepipedon térfogata ¼.

Megoldás:

Számítsuk ki először is $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok vegyes szorzatát:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = \left(\left(\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}\right) \times \left(\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}\right)\right) \circ \left(\vec{m} - \vec{n} + \vec{p}\right).$$

A számításokat tagonként végezzük el (alkalmazva a vektoriális szorzat ismert tulajdonságait: párhuzamos vektorok vektoriális szorzata eltűnik, a fordított sorrendű szorzat ellenkező előjelű, valamint a vegyes szorzat esetében: az egysíkú vektorok vegyes szorzata zérus, valamint a tényezők sorrendjének „ciklikus” felcserélése nincs kihatással a szorzatra.).

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} =$$

$$= \left(\vec{m} \times \vec{n} - \vec{m} \times \vec{p} + \vec{n} \times \vec{m} - \vec{n} \times \vec{p} + \vec{p} \times \vec{m} + \vec{p} \times \vec{n}\right) \circ \left(\vec{m} - \vec{n} + \vec{p}\right) =$$

$$= \left(\vec{m} \times \vec{n}\right) \circ \vec{p} + \left(\vec{m} \times \vec{p}\right) \circ \vec{n} + \left(\vec{n} \times \vec{m}\right) \circ \vec{p} -$$

$$- \left(\vec{n} \times \vec{p}\right) \circ \vec{m} - \left(\vec{p} \times \vec{m}\right) \circ \vec{n} + \left(\vec{p} \times \vec{n}\right) \circ \vec{m} =$$

$$=(\vec{m}\times\vec{n})\circ\vec{p}-(\vec{m}\times\vec{n})\circ\vec{p}-(\vec{m}\times\vec{n})\circ\vec{p}-$$
$$-(\vec{m}\times\vec{n})\circ\vec{p}-(\vec{m}\times\vec{n})\circ\vec{p}-(\vec{m}\times\vec{n})\circ\vec{p}=$$
$$=-4(\vec{m}\times\vec{n})\circ\vec{p}$$

A keresett térfogat $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok vegyes szorzatának abszolút értékével egyenlő:

$$V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\circ\vec{c}\right|=4\left|(\vec{m}\times\vec{n})\circ\vec{p}\right|=4\cdot\frac{1}{4}=1,$$

Figyeljük meg: alkalmaztuk a feladatban megadott tényt, vagyis azt, hogy $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ vektorokra szerkesztett paralelepipedon térfogata ¼ .

Gyakorló feladat

Adott két pont $A(1,2,2)$, $B(0,-1,3)$ és $\vec{v}=(1,1,3)$ vektor .

a) Írjuk fel a $\vec{v}$ vektorral párhuzamos két egyenes *a* és *b* egyenleteit *A* illetve *B* ponton keresztül.

b) Írja fel az *a* és *b* két egyenest tartalmazó α sík egyenletét.

3.1.14.

Feladat

Ha adott $\vec{a}=(1,-2,4)$ és $\vec{b}=(4,3,-5)$ vektor, határozza meg $\vec{x}$ vektort úgy, hogy az merőleges legyen az *Ox* tengelyre, valamint teljesíti az $\vec{x}\circ\vec{a}=-3$ és $\vec{x}\circ\vec{b}=8$ kikötéseket is.

Megoldás:

Legyen $\vec{x}=(p, q, r)$. A feladatban kitűzött feltételek szerint a két skaláris szorzatból két egyenlet adódik:

$$p-2q+4r=-3 \quad \text{és} \quad 4p+3q-5r=8.$$

Mivel három ismeretlenünk van, szükséges még egy egyenlet, amelyet $\vec{x}$ vektornak az Ox tengelyre való merőlegességéből származtatunk. A tengely irányvektora $\vec{i}$. Mivel koordinátás formában $\vec{i}$ = (1, 0, 0), ezért a merőlegesség miatt $\vec{x} \circ \vec{i} = 0$. Innen $p = 0$ adódik.

Marad két egyenlet:

$$\begin{aligned} -2q + 4r &= -3 \\ 3q - 5r &= 8 \end{aligned}$$

A rendszer megoldásával a feladat megoldását nyertük:

$$\vec{x} = \left(0, \frac{17}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Gyakorló feladat

Határozza meg $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ vektor hosszúságát (intenzitását), ha $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

3.1.15.

Feladat

Adott az $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ és $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ vektor, ahol

$$|\vec{p}| = 2, \ |\vec{q}| = 3, \ \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}.$$

a) Határozza meg az $\vec{a} \circ \vec{b} = ?$ skaláris szorzatot

b) Határozza meg az $\vec{a}, \vec{b}$ vektorokra szerkesztett paralelogramma két átlója közül melyik a hosszabb?

Megoldás:

a) $$\vec{a}\circ\vec{b}=(2\vec{p}+\vec{q})\circ(\vec{p}-3\vec{q})=2|\vec{p}|^2-5\vec{p}\circ\vec{q}-3|\vec{q}|^2=$$
$$=2\cdot 2^2-5\cdot 2\cdot 3\cdot\cos\frac{\pi}{3}-3\cdot 3^2=8-15-27=-34.$$

b) Az átlók: $\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}$, hosszúságuk pedig:
$$\left|\vec{d}\right|=\sqrt{\vec{d}\circ\vec{d}}=\sqrt{\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)\circ\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)}=\sqrt{|\vec{a}|^2\pm 2\vec{a}\circ\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2},$$
$$|\vec{a}|^2=(2\vec{p}+\vec{q})\circ(2\vec{p}+\vec{q})=4|\vec{p}|^2+4\vec{p}\circ\vec{q}+|\vec{q}|^2=16+12+9=37,$$
$$\left|\vec{b}\right|^2=(\vec{p}-3\vec{q})\circ(\vec{p}-3\vec{q})=|\vec{p}|^2-6\vec{p}\circ\vec{q}+9|\vec{q}|^2=4-18+81=67.$$

Mivel $\vec{a}\circ\vec{b}=-34$, ezért a $\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}$ átló a hosszabb, mert
$$\left|\vec{d}_2\right|=\sqrt{\vec{d}_2\circ\vec{d}_2}=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\circ\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\circ\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2}=$$
$$=\sqrt{37+68+67}=\sqrt{172}.$$

A rövidebb átló hossza:
$$\left|\vec{d}_1\right|=\sqrt{\vec{d}_1\circ\vec{d}_1}=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\circ\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\circ\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2}=$$
$$=\sqrt{37-68+67}=\sqrt{36}=6.$$

Gyakorló feladat

Az A (–3, 2, k), B (3, –3, 1) és C (5, k, 2) pontok sorban az $ABCD$ paralelogramma három csúcspontja. Keressük a negyedik csúcspontot $k\neq 0$ esetben úgy hogy $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{14}$ legyen!

4. TÉRBELI KOORDINÁTAGEOMETRIA

4.0. GYAKORLÓ FELADATOK

4.0.1. Feladat:

Adott az $\alpha: 5x-3y+4z-20=0$ sík egyenlete. Vizsgáljuk ki, hogy az $A(5,-1,-2)$, $B(7,0,-6)$, $C(-2,6,12)$ pontok közül melyek illeszkednek az α síkhoz.

Megoldás:

Egy pont akkor tartozik az adott síkhoz, ha koordinátái kielégítik az adott sík egyenletét.

$$A: \quad 5\cdot5-3\cdot(-1)+4\cdot(-2)-20=25+3-8-20=0 \quad \Rightarrow \quad A\in\alpha,$$

$$B: \quad 5\cdot7-3\cdot0+4\cdot(-6)-20=35-0-24-20\neq0 \quad \Rightarrow \quad B\notin\alpha,$$

$$C: \quad 5\cdot(-2)-3\cdot6+4\cdot12-20=-10-18+48-20=0 \quad \Rightarrow \quad C\in\alpha.$$

4.0.2. Feladat:

Adottak az $\vec{a}=(3,2,0)$ és $\vec{b}=(5,4,2)$ vektorok. Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét, amely tartalmazza mindkét vektort és keresztülhalad az $M(-4,0,5)$ ponton.

Megoldás:

Az α sík egyenletét $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ alakban keressük, ahol $\vec{n}_\alpha=(A,B,C)$ a keresett sík normálvektora. A D állandót abból a feltételből határozzuk meg, hogy az M pont az α síkhoz tartozik.

A normálvektort az adott vektorok vektoriális szorzataként keressük:

$$\vec{n}_\alpha=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 0\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix}=4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}=(4,-6,2)=(A,B,C)$$

$$\alpha: 4x-6y+2z+D=0$$

$$M\in\alpha: 4\cdot(-4)-6\cdot 0+2\cdot 5+D=0$$

$$\Rightarrow \quad -16+10+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=6$$

vagyis a keresett sík egyenlete $\underline{\alpha: 4x-6y+2z+6=0}$.

4.0.3. Feladat:

Adottak a $P(1,-5,3)$, $Q(5,-6,0)$, $R(11,-3,2)$ pontok. Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét, amely tartalmazza mindhárom pontot.

Megoldás:

A keresett α sík normálvektorát a síkhoz tartozó két vektor vektoriális szorzataként számítjuk. Legyen ez a két vektor például a $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{PR}$: $\overrightarrow{PQ}=(5,-6,0)-(1,-5,3)=(4,-1,-3)$,

$$\overrightarrow{PR}=(11,-3,2)-(1,-5,3)=(10,2,-1),$$

ekkor

$$\vec{n}_\alpha=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -1 & -3\\ 10 & 2 & -1\end{vmatrix}=7\vec{i}-26\vec{j}+18\vec{k}=(7,-26,18).$$

Most az α sík egyenletét felírhatjuk az $\alpha: 7x - 26y + 18z + D = 0$ alakban, a D állandót pedig kiszámíthatjuk például abból a tényből kiindulva, hogy a Q pont hozzátartozik a keresett síkhoz.

$$Q \in \alpha : 7 \cdot 5 - 26 \cdot (-6) + 18 \cdot 0 + D = 0$$

$$\Rightarrow \quad 35 + 156 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -191$$

tehát a keresett α sík egyenlete $\underline{\alpha : 7x - 26y + 18z - 191 = 0}$.

4.0.4. Feladat:

Vizsgáljuk ki a $P(6,0,4)$, $Q(-2,1,5)$, $R(-3,-1,2)$, $M(-2,1,5)$ pontok komplanaritását. A feladatot sík egyenletének segítségével oldjuk meg.

Megoldás:

Bármelyik három pontra illesztünk egy síkot, például a P, Q, R pontokra, és leellenőrizzük, hogy az M pont hozzátartozik-e vagy sem. A P, Q, R pontokat tartalmazó α sík egyenletét az előző feladathoz hasonlóan írjuk fel.

$$\overrightarrow{PQ} = (-2,1,5) - (6,0,4) = (-8,1,1),$$

$$\overrightarrow{PR} = (-3,-1,2) - (6,0,4) = (-9,-1,-2),$$

$$\vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 25\vec{j} + 17\vec{k} = (-1,-25,17),$$

$$\alpha : -x - 25y + 17z + D = 0,$$

$$P \in \alpha : \ -1 \cdot 6 + 25 \cdot 0 + 17 \cdot 4 + D = 0$$

$$\Rightarrow \quad -6 + 68 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -62$$

$$\alpha:\ -x-25y+17z-62=0\,.$$

Most még azt kell leellenőrizni, hogy az M pont hozzátartozik-e az α síkhoz:

$$M\in\alpha:\ -1\cdot(-2)-25\cdot 1+17\cdot 5-62=$$
$$=2-25+85-62=0 \quad\Rightarrow\quad M\in\alpha$$

ami azt jelenti, hogy az adott pontok komplanárisak, és annak a síknak az egyenlete, amelyhez tartoznak $\underline{\alpha:\ -x-25y+17z-62=0}$.

4.0.5. Feladat:

Adottak az $\alpha: 5x-4y+3z-7=0$ sík és az $M(2,-3,-1)$ pont. Írjuk fel annak a β síknak az egyenletét amely párhuzamos az α síkkal és áthalad az M ponton.

Megoldás:

Ha az α és β síkok párhuzamosak, akkor ugyanaz a normálvektoruk és ez kiolvasható az α sík egyenletéből:

$$\vec{n}_\beta=\vec{n}_\alpha=(5,-4,3).$$

A β sík egyenlete tehát $\beta: 5x-4y+3z+D=0$, a D állandót pedig abból a feltételből határozzuk meg, hogy az M pont hozzátartozik a β síkhoz.

$$M\in\beta: 5\cdot 2-4\cdot(-3)+3\cdot(-1)+D=0$$
$$\Rightarrow\quad 10+12-3+D=0 \quad\Rightarrow\quad D=-19$$

A keresett sík egyenlete $\underline{\beta:\ 5x-4y+3z-19=0}$.

4.0.6. Feladat:

Adottak az $a: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-}{2}=\dfrac{z+1}{0}$ és $b: \dfrac{x+6}{-6}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z}{0}$ egyenesek kanonikus alakban.

a) Vizsgáljuk ki a kölcsönös helyzetüket.
b) Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét amely tartalmazza az a és b egyeneseket.

Megoldás:

a) Az a egyenes irányvektora $\vec{a} = (3,2,0)$, a b egyenesé pedig $\vec{b} = (-6,-4,0)$. Könnyen belátható, hogy $\vec{b} = -2\vec{a}$ ami azt jelenti, hogy az a és b egyenesek párhuzamosak.

b) Az α sík normálvektorát két α síkhoz tartozó nemkollineáris vektor vektoriális szorzataként keressük, tehát ezek nem lehetnek az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok. Az egyiket felhasználhatjuk, de a másik helyett keresnünk kell egy olyan α síkhoz tartozó vektort, amely nem párhuzamos az ismert vektorokkal. Az a és b egyenesek kanonikus egyenleteiből kiolvasható egy-egy pont az adott egyenesekről. Az $l : \dfrac{x - x_0}{l_x} = \dfrac{y - y_0}{l_y} = \dfrac{z - z_0}{l_z}$ egyenes tartalmazza az $L(x_0, y_0, z_0)$ pontot, tehát az a egyenes tartalmazza az $A(1,2,-1)$, a b egyenes pedig a $B(-6,4,0)$ pontot.

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal nemkollineáris vektor lehet például az $\overrightarrow{AB} = (-7,2,1)$ vektor. Ekkor a keresett sík normálvektorát kiszámíthatjuk az $\vec{a}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorok vektoriális szorzataként.

$$\vec{n}_\alpha = \vec{a} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 20\vec{k} = (2,-3,20),$$

$$\alpha : 2x - 3y + 20z + D = 0,$$

$$A \in \alpha : 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 20 \cdot (-1) + D = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 - 6 - 20 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 24,$$

vagyis a keresett α sík egyenlete: $\underline{\alpha : 2x - 3y + 20z + 24 = 0}$.

4.0.7. Feladat:

Adottak az $a: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ és $b: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-6}{2}$ egyenesek.

a) Vizsgáljuk ki a kölcsönös helyzetüket.

b) Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét amely tartalmazza az a és b egyeneseket.

Megoldás:

a) Az a és b egyenesek irányvektorai $\vec{a} = (2,3,1)$ és $\vec{b} = (-1,0,2)$. Ezek nemkollineáris vektorok $(\vec{a} \neq k\vec{b})$, tehát az adott egyenesek nem párhuzamosak. Vagy metszik egymást, vagy kitérők. Ha metszik egymást akkor az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorok (A és B pontok az a és b egyenesekről valók) komplanárisak és ezért a vegyes szorzatuk nulla. Ha kitérők az egyenesek, akkor ez a vegyes szorzat nem nulla.

Adjuk meg először az A és B pontokat. A koordinátáikat az a és b egyenesek egyenleteiből olvashatjuk ki. Ezek az $A(1,2,3)$ és $B(2,5,6)$ pontok. Ekkor az $\overrightarrow{AB} = (2,5,6) - (1,2,3) = (1,3,3)$.

Vizsgáljuk meg most a három vektor vegyes szorzatát:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 3 - 0 - 12 + 9 = 0,$$

ez pedig azt jelenti, hogy az adott vektorok komplanárisak, illetve hogy az egyenesek egy síkban vannak. Így a két egyenes metszi egymást (mivel nem párhuzamosak).

b) Megállapítottuk, hogy az a és b egyenesek egy síkban vannak. Ennek az α síknak a normálvektorát megkaphatjuk, mint két az adott síkhoz tartozó nemkollineáris vektor vektoriális szorzatát. Ezek a vektorok lehetnek például az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok. Számítsuk ki ezt a szorzatot:

$$\vec{n}_\alpha = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k} = (6,-5,3)$$

$$\alpha : 6x - 5y + 3z + D = 0$$

$$A \in \alpha :\ 6\cdot 1 - 5\cdot 2 + 3\cdot 3 + D = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6 - 10 + 9 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -5$$

Az a és b egyeneseket tartalmazó α sík egyenlete tehát:

$$\underline{\alpha : 6x - 5y + 3z - 5 = 0}\,.$$

4.0.8. Feladat:

Adottak az $A(2,1,1)$, $B(0,1,-3)$ és $C(2,1,-5)$ pontok.

a) Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét, amely tartalmazza az adott pontokat.

b) Írjuk fel annak a d egyenesnek az egyenletét amely merőleges erre a síkra, és keresztülhalad a $D(5,1,3)$ ponton.

Megoldás:

a) Határozzuk meg először a keresett sík normálvektorát:

$$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -12\vec{j} = (0,-12,0).$$

Ekkor $\alpha :\ -12y + D = 0$.

Mivel $A \in \alpha : -12\cdot 1 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 12$,

következik, hogy $\alpha :\ -12y + 12 = 0\ \ /:(-12)$, a keresett sík egyenletének legegyszerűbb alakja $\underline{\alpha :\ y - 1 = 0}$.

b) Ha a d egyenes merőleges az α síkra, akkor a $\vec{d}$ irányvektora párhuzamos a sík $\vec{n}_\alpha$ normálvektorával, vagyis $\vec{d}=\vec{n}_\alpha=(0,-12,0)$. Mivel az irányvektor hossza és irányítása nem lényeges (csak az iránya) ezért a $\vec{d}$ vektor lehet a $\vec{d}=(0,1,0)$ vektor is. A d egyenesnek át kell haladnia a megadott $D(5,1,3)$ ponton is, ezért az egyenlete felírható a következő alakban:

$$\underline{d: \frac{x-5}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{0}.}$$

4.0.9. Feladat:

Adottak az $A(2,1,1)$, $B(0,2,3)$ pontok és a $\vec{v}=(2,1,-1)$ vektor.

a) Írjuk fel azoknak az a és b egyeneseknek az egyenletét, amelyek párhuzamosak a $\vec{v}$ vektorral, és rendre áthaladnak az A és B pontokon.

b) Határozzuk meg annak az α síknak az egyenletét, amely tartalmazza a kapott a és b egyeneseket.

Megoldás:

a) A keresett a és b egyenesek egyenletei:

$$a: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1} \quad \text{és} \quad b: \frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}.$$

b) Az α sík normálvektora:

$$\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{AB}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}=(-3,2,-4).$$

$$\alpha:\ -3x+2y-4z+D=0,$$

$$A\in\alpha: -3\cdot 2+2\cdot 1-4\cdot 1+D=0$$

$$\Rightarrow \quad -6+2-4+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=8,$$

ezért a keresett sík egyenlete $\underline{\alpha:\ -3x+2y-4z+8=0}$.

4.0.10. Feladat:

Adottak az $M(1,1,0)$, $N(-1,2,4)$ és $P(2,-1,3)$ pontok. Keressük meg azt a $Q(2,2,k)$ pontot, amely az M, N, P pontokkal meghatározott síkhoz tartozik.

Megoldás:

Keressük meg először az M, N, P pontokkal meghatározott α sík egyenletét, majd számítsuk ki a k paraméter értékét úgy, hogy a Q pont illeszkedjen az α síkhoz.

$$\overrightarrow{MN} = (-2,1,4) = -2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{MP} = (1,-,2,3) = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 10\vec{j} + 3\vec{k} = (11,10,3)$$

$$\alpha : 11x + 10y + 3z + D = 0$$

$$M \in \alpha : 11 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -21$$

$\underline{\alpha : 11x + 10y + 3z - 21 = 0}$ a keresett sík egyenlete.

Ha a Q pont illeszkedik az α síkhoz, akkor a koordinátái kielégítik az egyenletét. Így kapjuk meg a k paraméter értékét:

$$11 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 3 \cdot k - 21 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3k = -21,$$

vagyis $k = -7$, a Q pont koordinátái pedig $\underline{Q(2,2,-7)}$.

4.0.11. Feladat:

Adott három pár párhuzamos sík. Számítsuk ki annak a paralelepipedonnak a térfogatát, amelynek oldallapjai ezekhez a síkokhoz tartoznak:

$$\begin{cases}\alpha_1 : 2x - y = 0 \\ \alpha_2 : 2x - y = 3\end{cases}, \quad \begin{cases}\beta_1 : y - 3z = 1 \\ \beta_2 : y - 3z = 4\end{cases}, \quad \begin{cases}\gamma_1 : x - z = 0 \\ \gamma_2 : x - z = 2\end{cases}.$$

Megoldás:

A paralelepipedon térfogatának kiszámításához ismernünk kell három, egy csúcsból kiinduló élvektort. Legyenek ezeknek a vektoroknak a végpontjai az A, B, C, D pontok, maguk a vektorok pedig az $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vektorok. Ezeknek a csúcspontoknak a koordinátáit megkaphatjuk három olyan sík metszéspontjaként, amelyek a paralelepipedon megfelelő oldalai. Így sorban:

$$\{A\} = \alpha_1 \cap \beta_1 \cap \gamma_1 \qquad \{B\} = \alpha_1 \cap \beta_1 \cap \gamma_2$$
$$\{C\} = \alpha_1 \cap \beta_2 \cap \gamma_1 \qquad \{D\} = \alpha_2 \cap \beta_1 \cap \gamma_1$$

$$A: \begin{array}{l} y = 2x \\ z = x \end{array} \Rightarrow 2x - 3x = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow A(-1,-2,-1),$$

$$B: \begin{array}{l} y = 2x \\ z = x - 2 \end{array} \Rightarrow -3x + 6 = 1 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow B(5,10,3),$$

$$C: \begin{array}{l} y = 2x \\ z = x \end{array} \Rightarrow 2x - 3x = 4 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow C(-4,-8,-4),$$

$$D: \begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ z = x \end{array} \Rightarrow 2x - 3 - 3x = 1 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow D(-4,-11,-4).$$

Határozzuk meg most a négy pont segítségével azt a három élvektort, amelyek például az A csúcsból indulnak ki:

$$\overrightarrow{AB} = (6,12,4) \qquad \overrightarrow{AC} = (-3,-6,-3) \qquad \overrightarrow{AD} = (-3,-9,-3).$$

A paralelepipedon térfogatát a három vektor vegyes szorzatának abszolút értékeként számíthatjuk:

$$V = \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} 6 & 12 & 4 \\ -3 & -6 & -3 \\ -3 & -9 & -3 \end{vmatrix} = \left|-18\right| = 18 .$$

A keresett térfogat tehát $V = 18$.

4.0.12. Feladat:

Az egységnyi élhosszúságú $OABC$ tetraéder az első nyolcadban helyezkedik el, az OAB oldallapja az Oxy síkban fekszik, az A csúcsa pedig az Ox tengelyen van.

a) Határozzuk meg az $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ élvektorokat.

b) Felhasználva az élvektorokat, számítsuk ki a tetraéder felszínét.

c) Írjuk fel az ABC oldallapot tartalmazó sík egyenletét.

Megoldás:

a) A szabályos tetraéder tulajdonságait felhasználva, levezethetjük a csúcspontok koordinátáit:

$$O(0,0,0); \quad A(1,0,0); \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right); \quad C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

A három élvektor, amelyek az O csúcsból indulnak ki:

$$\overrightarrow{OA} = (1,0,0), \quad \overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \overrightarrow{OC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

b) A tetraéder felszíne négy egyenlőoldalú háromszög területéből kapható.

$$F_{OABCtereéder} = 4 \cdot T_{\Delta OAB} = 4 \cdot \frac{\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right|}{2} = 2\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right|,$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}=\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

ezért a keresett felszín: $F_{OABCtetraéder}=2\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right|=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

c) $\alpha=\alpha(A,B,C)$

$$\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{vmatrix}=,$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{j}+\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{k}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$A\in\alpha:\frac{\sqrt{2}}{2}+D=0 \quad\Rightarrow\quad D=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha:\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{6}}{6}y+\frac{\sqrt{3}}{6}z-\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \quad /\cdot 6$$

Így az ABC oldallapot tartalmazó sík egyenlete:

$$\underline{\alpha:3\sqrt{2}x+\sqrt{6}y+\sqrt{3}z-3\sqrt{2}=0}.$$

4.0.13. Feladat:

Adottak az $A(1,6,5)$, $C(11,15,-11)$, $D_1(1,1,1)$ pontok, melyek az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egyenes hasáb csúcsai. Adott az $ABCD$ alaplap $\alpha:3x+2y+3z-30=0$ egyenlete is. (Ellenőrizni, hogy: $A\in\alpha, C\in\alpha$).

a) Határozzuk meg a D csúcs koordinátáit.
b) Számítsuk ki a hasáb térfogatát.
c) Mutassuk meg, hogy ez a hasáb téglatest.

Megoldás:

a) Ellenőrizzük le, hogy $A \in \alpha, C \in \alpha$?

$$A \in \alpha : 3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A \in \alpha,$$
$$C \in \alpha : 3 \cdot 11 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 11 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C \in \alpha,$$
$$p(D, D_1) \perp \alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{n}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = (3,2,3).$$

A D pont a p egyenes döféspontja az α síkon. Ennek kiszámításához írjuk fel a p egyenest paraméteres alakban. Ha a p egyenes egyenletének kanonikus alakját kiegyenlítjük egy paraméterrel (pl. t), és a kapott egyenletekből sorban kifejezzük az x, y, z változókat, megkapjuk az egyenes paraméteres egyenleteit:

$$p : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$$

$$p \cap \alpha : \quad 3(3t+1) + 2(2t+1) + 3(3t+1) - 30 = 0$$
$$9t + 3 + 4t + 2 + 9t + 3 - 30 = 0$$
$$22t - 22 = 0$$
$$t = 1$$

A hasáb keresett csúcsa pedig $D(4,3,4)$.

b) $V = \left|\left(\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}\right) \circ \overrightarrow{DD_1}\right| = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 7 & 12 & -15 \\ -3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 418.$

c) Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ hasáb akkor téglatest, ha az alaplapja téglalap, vagyis $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC}$. Ezeknek a vektoroknak tehát 90°-os szöget kell bezárniuk, vagyis a skaláris szorzatuk 0 kell legyen.

$$\overrightarrow{DA} \circ \overrightarrow{DC} = (-3,3,1) \circ (7,12,-15) = -21 + 36 - 15 = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC} \Rightarrow$ <u>$ABCDA_1B_1C_1D_1$ hasáb téglatest.</u>

4.0.14. Feladat:

Mutassuk meg, hogy az

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{2} \quad \text{és} \quad l_2 : \begin{cases} x-4y+z+2=0 \\ 2y-z+2=0 \end{cases}$$

egyenesek egy síkhoz tartoznak. Írjuk fel ennek a síknak az egyenletét.

Megoldás:

Az l_2 egyenes két sík metszeteként van megadva. Határozzuk meg egyenletének kanonikus alakját is. Ez azt jelenti, hogy az:

$$\begin{array}{l} \alpha : x-4y+z+2=0 \\ \beta : \quad 2y-z+2=0 \\ \hline \end{array}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Az egyenletek összeadásával kapjuk hogy: $x-2y+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=2y-4$,

a második egyenletből pedig $z=2y+2$. Mivel két egyenletünk van három ismeretlennel, ezért az egyik ismeretlent szabadon választhatjuk. Legyen például $y=0$, ekkor $x=-4$ és $z=2$, és így az l_2 egyenes egy pontjának koordinátái $L_2(-4,0,2)$. Az l_1 egyenesen lévő L_1 pont koordinátáit az l_1 egyenes egyenletéből olvassuk ki, és ez az $L_1(1,-2,-3)$ pont. Az l_2 egyenes irányvektorát a normálvektorok vektoriális szorzatából kapjuk:

$$\vec{l}_2 = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (2,1,2).$$

Az l_2 egyenes egyenletének kanonikus alakja $l_2 : \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$.

Ennek az egyenesnek az irányvektora $\vec{l}_2 = (2,1,2)$, az l_1 egyenes irányvektora $\vec{l}_1 = (2,1,2)$. Mivel ezek a vektorok egyenlők ($\vec{l}_2 = \vec{l}_1$) következik, hogy az l_1 és l_2 egyenesek párhuzamosak. Ha két egyenes párhuzamos, akkor egy síkhoz tartoznak, legyen ez a π sík. Határozzuk meg ennek a síknak az egyenletét:

$$\vec{n}_\pi = \vec{l}_1 \times \overrightarrow{L_1L_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} - 20\vec{j} + 9\vec{k} = (1,-20,9),$$

$$\pi: \; x - 20y + 9z + D = 0,$$

$$L_1 \in \pi: \; 1 - 20\cdot(-2) + 9\cdot(-3) + D = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 40 - 27 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -14,$$

Így az l_1 és l_2 egyeneseket tartalmazó sík egyenlete:

$$\underline{\pi: \; x - 20y + 9z - 14 = 0}.$$

4.0.15. Feladat:

Bizonyítsuk be, hogy az

$$l_1: \; \frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{-5} = \frac{z+1}{1} \quad \text{és} \quad l_2: \; \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{7}$$

egyenesek derékszögben metszik egymást, majd írjuk fel annak a síknak az egyenletét amely tartalmazza az adott egyeneseket. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét amely tartalmazza az l_1 és l_2 egyenesek metszéspontját és merőleges mindkét egyenesre.

Megoldás:

Mutassuk meg először azt, hogy az adott egyenesek metszik egymást, vagyis hogy egy síkhoz tartoznak:

$$\vec{l}_1 = (3,-5,1) \qquad L_1(-4,6,-1)$$

$$\vec{l}_2 = (1,2,7) \qquad L_2(-1,1,0)$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{L_1L_2} = (3,-5,1)$$

A vegyes szorzat $\left(\vec{l}_1 \times \vec{l}_2\right) \circ \overrightarrow{L_1 L_2} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

ami azt jelenti, hogy az adott egyenesek egy síkhoz tartoznak, tehát metszik egymást (mivel nem párhuzamosak).

Az egyenesek derékszögben metszik egymást ha az irányvektoraik merőlegesek. Vizsgáljuk ki az irányvektorok skaláris szorzatát:

$$\vec{l}_1 \circ \vec{l}_2 = (3,-5,1) \circ (1,2,7) = 3 - 10 + 7 = 0,$$

ami azt jelenti, hogy a vektorok (ezzel egyidőben az egyenesek is) merőlegesek (tehát derékszögben metszik egymást).

Az adott egyeneseket tartalmazó $\alpha(l_1, l_2)$ sík egyenletét a következő módon írjuk fel:

$$\vec{n}_\alpha = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -37\vec{i} - 20\vec{j} + 11\vec{k} = (-37, -20, 11)$$

$$\alpha: \ -37x - 20y + 11z + D = 0,$$

$$L_2 \in \alpha: \ -37 \cdot (-1) - 20 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + D = 0$$

$$\Rightarrow \quad 37 - 20 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -17,$$

$$\alpha: \ -37x - 20y + 11z - 17 = 0 \qquad / \cdot (-1)$$

A keresett sík egyenlete tehát $\underline{\alpha: \ 37x + 20y - 11z + 17 = 0}$.

Az egyenesek metszéspontját a paraméteres egyenleteik kiegyenlítésével kapjuk:

$$l_1: \ \frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{-5} = \frac{z+1}{1} = t \qquad \Rightarrow \qquad l_1: \begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = -5t + 6 \\ z = t - 1 \end{cases},$$

$$l_2: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{7}=s \quad \Rightarrow \quad l_2: \begin{cases} x=s-1 \\ y=2s+1 \\ z=7s \end{cases},$$

a metszéspontra érvényes, hogy:

$$\begin{aligned} 3t-4&=s-1 \\ -5t+6&=2s+1 \\ t-1&=7s \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t&=7s+1 \\ 3(7s+1)-4&=s-1 \\ 20s&=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad s=0.$$

A metszéspont koordinátái tehát $P(-1,1,0)$. Annak a p egyenesnek az irányvektora, amely áthalad ezen a ponton és merőleges mindkét megadott egyenesre megegyezik az α sík normálvektorával: $\vec{p}=\vec{n}_\alpha=(37,20,-11)$.

A keresett egyenes kanonikus egyenlete: $\underline{p: \frac{x+1}{37}=\frac{y-1}{20}=\frac{z}{-11}}$.

4.1. ÍRÁSBELI VIZSGAFELADATOK

4.1.1. Feladat

Adott három vektor: $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (3,2,1)$, $\vec{c} = (1,1,1)$.

Írja fel a sík egyenletét, ha az illeszkedik a $\vec{c}$ helyvektorú ponthoz, és párhuzamos $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal.

Megoldás:

A sík merőlegesének vektora párhuzamos a következő vektorral:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 8, -4).$$

Illesszünk síkot a $\vec{c}$ helyvektorú ponthoz, $C(1, 1, 1)$-hez, a sík normálvektora pedig legyen $\vec{n} = (1,-2,1)$ (Ez párhuzamos $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorral).

A keresett egyenlet a következő:

$$(x-1) - 2(y-1) + (z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x - 2y + z = 0.}$$

Gyakorló feladat

Adott a sík egyenlete $\alpha : x + 2y - 3z - 4 = 0$:

a) $A(2,1,0)$, $B(1,0,-1)$ és $C(5,-1,6)$ pontok közül melyik illeszkedik α síkhoz?

b) Határozza meg p és q egyenesek P metszéspontját, ha ismertek az egyenesek egyenletei:

$$p:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0} \quad \text{és} \quad q:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{1}$$

c) Ha a P metszéspont az α síkban van, határozza meg a síkra merőleges n egyenes egyenletét amely áthalad a P ponton.

4.1.2. Feladat

Az $ABCD$ paralelogramma három csúcspontja: $A(-3, 2, k)$, $B(3, -3, 1)$ és $C(5, k, 2)$. Határozza meg $k \neq 0$ paramétert úgy, hogy $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{14}$ legyen. Az így meghatározott k-ra számítsa ki D pont koordinátáit és írja fel az $(ABCD)$ sík egyenletét is.

Megoldás:

Az $ABCD$ paralelogramma oldalaira fennáll: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Tehát: $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(5-3)^2 + (k+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{14}$

$\Rightarrow k^2 + 6k = 0$. Mivel $k \neq 0 \Rightarrow k = -6$. D pont helyvektora:
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = (-3, 2, k) + (2, k+3, 1) = (-1, k+5, k+1)$

Ha $k = -6$, akkor D pont koordinátái: $D(-1, -1, -5)$

Az $ABCD$ sík normálvektora :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (16, 8, -8).$$

Válasszuk a vele párhuzamos, de egyszerűbb vektort: $(2, 1, -1)$. Illesszünk síkot D ponthoz ezzel az utóbbi normálvektorral.
A sík egyenlete: $2(x+1) + (y+1) - (z+5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + y - z - 2 = 0$.

Gyakorló feladat

Az $ABCD$ paralelogramma három csúcspontja $A(1,0,4)$; $B(4,1,0)$ és $C(3,-3,2)$. Határozza meg a paralelogramma D csúcspontjának koordinátáit és a paralelogramma átlóinak hajlásszögét.

4.1.3.

Feladat

Három nemkolineáris pont, $A(1, 4,–2)$, $B(7,–3,–1)$ és $C(0, 12,–9)$ meghatározzák az α síkot.

a) Írja fel ennek az α síknak az egyenletét.

b) Írja fel az origón áthaladó, α-ra merőleges p egyenes egyenletét.

c) Határozza meg p egyenes döféspontjának koordinátáit α síkon

Megoldás:

a) Az $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, három ponthoz illeszkedő sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0\text{, feladatunkban:}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z+2 \\ 6 & -7 & 1 \\ -1 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Innen következik α sík egyenlete: $x + y + z – 3 = 0$.

b) A sík $\vec{n} = (1,1,1)$ normálvektora párhuzamos a síkra merőleges egyenes irányvektorával. Ha figyelembe vesszük még azt is, hogy az egyenes illeszkedik az origóhoz, vagyis a $O(0, 0, 0)$ ponthoz, akkor p egyenes egyenlete a következőképpen adódik:

$$p\colon \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}, \text{ egyszerűbben: } x = y = z.$$

c) A p egyenes döféspontjának koordinátáit egyszerű behelyettesítéssel nyerjük. Vegyük a t paramétert: $t = x=y=z$ és ezt helyettesítsük α sík egyenletébe: $3t - 3 = 0$. Innen: $t = 1$.

Tehát a döféspont koordinátái: $P(1, 1, 1)$.

Gyakorló feladat

Adott három pont: $M\,(1, 1, 0)$, $N\,(-1, 2, 4)$ és $P\,(2, -1, 3)$. Határozza meg $Q\,(2, 2, k)$ pont hiányzó koordinátáját úgy, hogy a négy pont egy síkban legyen. Írja fel ennek a síknak az egyenletét!

4.1.4.

Feladat

a) Szemléljük a következő pontokat: $A\,(k+1, -1, -2)$, $B\,(k, 2, k)$, $C\,(2, k+2, k-1)$ és $D\,(5, 0, -6)$. Határozza meg k értékét úgy, hogy a pontok egysíkúak legyenek.

b) Számítsa ki az $ABCD$ négyszög területét a legkisebb abszolút értékű k esetén.

Megoldás:

a) A négy pont egysíkú, ha $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ vektorok egysíkúak. Ez akkor igaz, ha a vektorok vegyes szorzata eltűnik. Mivel

$$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 3,\ k+2),\ \overrightarrow{AC}=(1-k,\ k+3,\ k+1),\ \overrightarrow{AD}=(4-k,\ 1,\ -4),$$

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & k+2 \\ 1-k & k+3 & k+1 \\ 4-k & 1 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=k^3-3k^2-13k+15=(k-1)(k+3)(k-5)=0.$$

Következésképpen, a pontok egysíkúak, ha

$$k_1=-3,\ k_2=1 \text{ vagy } k_3=5.$$

b) A legkisebb abszolút értéke $k_2 = 1$ -nek van. A kijelölt koordináták tehát:

$$A(2, -1, -2),\ B(1, 2, 1),\ \mathrm{C}(2, 3, 0) \text{ és } D(5, 0, -6),$$

és a sík amely mindegyikhez illeszkedik (bármely három ponton át felírható az egyenlete):

$$3x - y + 2z - 3 = 0.$$

Gyakorló feladat

Adott négy pont $A(1, 1, 1)$; $B(2, 2k{+}1, 2)$, $C(3, k{+}1, k{+}1.)$ és $D(3k{+}1, 3, 1{-}k)$. Határozzuk meg k értékét úgy, hogy a pontok egysíkúak legyenek. Írjuk fel a hordozósík egyenletét!

4.1.5.
Feladat

$K(4, 1, 4)$ pont a középpontja annak a szabályos hatszögnek, amelynek két szomszédos csúcspontja $A(3, 1, 5)$ és $B(3, 2, 4)$.

a) Határozza meg a hiányzó négy csúcspont koordinátáit,

b) Írja fel a hatszög síkjának egyenletét, valamint a K ponton áthaladó, és erre az α síkra merőleges egyenes egyenletét.

Megoldás:

a) Jelöljük a hatszöget *ABCDEF* betűkkel. Ha K pont a hatszög középpontja, akkor K pont az AD valamint a BE átlók felezőpontja is. Kiszámítható, tehát: $D(5\ 1, 3)$ és $E(5, 0, 4)$. Mivel a *DEFK* négyszög paralelogramma, így $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{KF} = (0, -1,\ 1)$.

F helyvektorára teljesül: $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KF} = (4,0,5)$, ami egyúttal F pont koordinátáit is adja. Végül C pont az EC átló másik végpontja, az átló felezőpontja szintén K, tehát $C(4, 2, 3)$ adódik.

b) Határozzuk meg ABK sík egyenletét:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z - 9 = 0$$

Megállapítjuk, hogy a sík normálvektora egyúttal a síkra merőleges egyenesek irányvektora: $\vec{n} = (1,1,1)$ Ha a K-hoz illeszkedő egyenes egyenletét keressük, akkor a következő egyenlet adódik:

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{1}.$$

—————————————
Gyakorló feladat

Adott a p és q egyenes:

$$p: \quad \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-4}, \qquad q: \frac{x-5}{3} = \frac{y-6}{6} = \frac{z-1}{-2}.$$

a) Igazoljuk, hogy a két egyenes egy síkhoz illeszkedik,
b) Számítsuk ki metszéspontjuk koordinátáit,
c) Írjuk fel az egyeneseket tartalmazó sík egyenletét.

4.1.6. Feladat

Az origó a paralelepipedon egyik csúcspontja, a vele szomszédos három csúcspont pedig $A(3,6,–4)$, $B(–4, 7, 0)$ és $C(9, 1, –3)$.

a) Határozza meg a hiányzó négy csúcspont koordinátáit .
b) Írja fel az A, B, C pontokon áthaladó sík egyenletét.

————————
Megoldás:

a) Az adott pontok koordinátái egyúttal a pontok helyvektorának koordinátái is. Két-két vektor a paralelepipedon egy-egy oldallapját határozza meg. Ezek a lapok paralelogrammák, negyedik csúcspontjuk koordinátái (egyúttal helyvektorának koordinátái is) az oldalvektorok összege:

$$(-1,\ 13,\ -4),\ \ (12,\ 7,\ -7) \text{ és } (5,\ 8,\ -3).$$

Végül, a testátló végpontja a hiányzó negyedik csúcspont, ennek koordinátái a három oldalél vektorainak összegeként adódik: (8,14,–7).

b) Az ABC pontokhoz illesztett sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-6 & z+4 \\ -7 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ 21x + 17y - 41z - 329 = 0.$$

Gyakorló feladat

Egysíkúak-e $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$, $C(-1,0,2)$ és $D(5,6,-7)$ pontok? Ha a válasz igen, akkor határozza meg a pontokon áthaladó sík egyenletét.

4.1.7.

Feladat

a) Határozza meg p egyenes merőleges vetületét, p' egyenest az Oxy síkon.

$$p: \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

b) Számítsa ki p és vetülete p' által bezárt szög koszinuszát.

Megoldás:

a) Határozzuk meg p egyenes két tetszőleges pontjának koordinátáit:

$$z = 0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5},\ 0\right).$$

Ez a pont egyúttal a vetülethez is tartozik!

$$x = 0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} 2y - 3z - 5 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(0,\ 1,\ -1)\,.$$

Q pont vetülete $Q'(0,\ 1,\ 0)$.

Az adott p egyenes p' vetülete áthalad P és Q' pontokon. Határozzuk meg a vetület irányvektorát, majd ezzel az irányvektorral írjuk fel a Q' ponthoz illeszkedő egyenes egyenletét:

$$\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP} = \left(-\frac{1}{5},\ -\frac{7}{5},\ 0\right) = -\frac{1}{5}(1,\ 7,\ 0)\,.$$

A leírtakból következik: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z}{0}$ vagy $\begin{cases} 7x - y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$

b) Mivel p egyenes irányvektora:

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (5,\ -7,\ -5)\,,$$

a vetület irányvektora pedig $\overrightarrow{PQ'}$-ból származik: $\vec{p'} = (1,\ 7{,}0)$ tehát:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\overrightarrow{PQ'}}{|\vec{p}|\cdot\left|\overrightarrow{PQ'}\right|} = \frac{-44}{\sqrt{99}\sqrt{50}} = -\frac{2\sqrt{22}}{15}.$$

———————————

Gyakorló feladat

Számítsa ki l_1 és l_2 egyenesek közötti legkisebb távolságot!

$$l_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases},\quad l_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases}.$$

4.1.8.

Feladat

Adott négy pont: $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(4,\ 0,\ 5)$, $C(2,\ 3,\ 1)$ és $D(5,\ 1,\ 3)$.

a) Írja fel p: (AB) egyenes egyenletét,
b) Írja fel q: (CD) egyenes egyenletét.
c) Vizsgálja ki p és q egyenesek kölcsönös helyzetét!
d) Ha létezik közös sík, akkor írja fel annak egyenletét!

Megoldás:

a) p: (AB): $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$,

b) q: (CD): $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

c) Az egyenesek párhuzamossága azonnal felismerhető, mivel irányvektoruk megegyezik.

d) Ezek szerint létezik közös sík! A sík egyenletének meghatározása végett ragadjunk ki két pontot az egyik egyenesről és egy pontot a másikról, de más úton is indulhatunk: határozzuk meg a sík normálvektorát $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok vektoriális szorzataként:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,\ 8,\ 5).$$

Az A ponthoz illesztett sík:

$$2\,(x-1)+8\,(y-2)+5\,(z-3)=0, \text{ vagy } 2\,x+8\,y+5\,z-33=0.$$

Gyakorló feladat

Adott négy pont A, B, C és C: $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(1,\ 2,\ 3)$, $C(2,–3,–1)$, $D(1,–2,–1)$. Határozza meg $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorokra merőleges $\vec{a}_0$ egységvektort.

4.1.9.

Feladat

Igazolja l_1 és l_2 egyenesek egysíkúságát:

$$l_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{2},\quad l_2:\ \begin{cases} x-4y+z+2=0\\ 2y-z+2=0\end{cases}$$

Írja fel a közös hordozó sík egyenletét!

Megoldás:

Először l_2 egyenes irányvektorát határozzuk meg. Ez a vektor a két egymást metsző sík normálvektorainak vektorszorzata:

A normálvektorok: $\vec{n}_1 = (1, -4, 1)$ és $\vec{n}_2 = (0, 2, -1)$.

A vektorszorzat: $\vec{l}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ =(2, 1, 2).

Belátjuk, hogy ez az l_1 egyenes irányvektora is, tehát a két egyenes párhuzamos, következésképpen egy síkhoz illeszkednek.

Válasszunk egy pontot l_2 egyenesen, mondjuk azt amelyikre z értéke eltűnik: $z = 0 \Rightarrow L_2\,(-6, -1, 0)$.

Az l_1 egyenes egy pontja közvetlenül is leolvasható az egyenes egyenletéből: $L_1\,(1, -2, -3)$.

Az egyenesek közös síkjának normálvektora az egyenesek irányvektorainak vektorszorzata:

$$\vec{n} = \vec{l} \times \overrightarrow{L_1L_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (1, -20, 9).$$

Az adott ponthoz illeszkedő, adott normálvektorú sík egyenlete:

$$A\,(x - x_0) + B\,(x - y_0) + C\,(x - z_0) = 0$$

Ha a normálvektor $(A, B, C) = (1, -20, 9)$, és az adott pont pedig $(x_0, y_0, z_0) = (1, -2, -3)$ az sík egyenlete a következő:

$$x - 20\,y + 9\,z - 14 = 0.$$

Gyakorló feladat

Határozza meg az n értékét úgy hogy l_1 és l_2 :egymást metsző egyenesek legyenek. Határozza meg a metszéspontjuk koordinátáit is!

$$l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{n}, \quad l_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3},$$

4.1.10.

Feladat

Adott két egyenes egyenlete:

$$p: \quad \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-4}, \qquad q: \frac{x-5}{3} = \frac{y-6}{6} = \frac{z}{-2}$$

a) Igazolja, hogy ez két <u>kitérő</u> egyenes.
b) Határozza meg a közöttük lévő legkisebb távolságot.
c) Írja fel a sík egyenletét, ha az tartalmazza a p egyenest és párhuzamos q egyenessel.

Megoldás:

Legyen a két egyenes egy-egy pontja $P(-1, 2, -1)$ és $Q(5, 6, 0)$, irányvektoraik $\vec{p} = (-3, 2, -4)$, $\vec{q} = (3, 6, -2)$.

P és Q pontokat a $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (6, 4, 1)$ vektor köti össze.

a) Ezeknek a vektoroknak a vegyes szorzata:

$$(\vec{p} \times \vec{q}) \circ \overrightarrow{PQ} = 24 .$$

Mivel ez nem nulla, igazoltuk ez egyenesek kitérő mivoltát.

b) Most számítsuk ki a közöttük lévő legkisebb távolságot a következő módon:

$$d = \frac{(\vec{p} \times \vec{q}) \circ \overrightarrow{PQ}}{|\vec{p} \times \vec{q}|} .$$

Szükségünk van $\vec{p}\times\vec{q}=(20,-18,-24)$ vektorszorzatra és annak hosszúságára: $|\vec{p}\times\vec{q}|=\sqrt{1300}$.

Innen következik, a legkisebb távolság: $d=\dfrac{24}{\sqrt{1300}}\approx 0{,}666$.

c) A keresett sík normálvektora $\vec{p}\times\vec{q}=(20,-18,-24)$, valamint illeszkedik P ponthoz :

$$20(x+1)-18(y-2)-24(z+1)=0 \Rightarrow 10x-9y-12z+16=0.$$

Gyakorló feladat

Írjuk fel α sík egyenletét $M(1,-2,1)$ ponton át, merőlegesen l egyenesre:

$$l:\ \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}.$$

4.1.11.

Feladat

Igazolja a következő három egyenes egysíkúságát:

$$l_1:\ \frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+10}{6},\qquad l_2:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-14}{-9}=\frac{z-6}{-4},$$

$$l_3:\ \frac{x}{3}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+4}{2}.$$

Bizonyítsa be, hogy a metszéspontjaik egy derékszögű háromszög csúcspontjai. Melyik két egyenes metszéspontjánál van a derékszög?

Megoldás:

Írjuk fel az egyenesek fixpontjaihoz illeszkedő sík egyenletét. A fixpontok a következők: $T_1(-2,-1,-10)$, $T_2(1,14,6)$ és $T_3(0,2,-4)$.

Innen adódik a sík egyenlete:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z+10 \\ 3 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \qquad .$$

$$= (x+2)(90-48)-(y+1)18-32)+(z+10)(9-30)=0$$

Az egyenlet leegyszerűsített alakja: $6x + 2y - 3z - 16 = 0$.

Leolvassuk a sík normálvektorát: $\vec{n} = (6,2,-3)$. Könnyen belátható, hogy ez a vektor merőleges az egyenesek irányvektoraira,

$\vec{p}_1 = (2,3,6)$, $\vec{p}_2 = (1,-9,-4)$, $\vec{p}_3 = (3,-6,2)$ vektorokra,

mert $\vec{n} \circ \vec{p}_1 = \vec{n} \circ \vec{p}_2 = \vec{n} \circ \vec{p}_3 = 0$. Ez azt jelenti, hogy az egyenesek „párhuzamosak” a kapott síkkal, de egy-egy pontjuk a síkban van, tehát az egyenesek egészében a síkhoz illeszkednek!

Másfelől $\vec{p}_1 \circ \vec{p}_3 = 0$, ez pedig az első és a harmadik egyenes egymásra való merőlegességét jelenti, vagyis metszéspontjuknál van a háromszög derékszöge.

———————————

Gyakorló feladat

Határozza meg a $P(1,0,7)$ ponton áthaladó, $3x - y + 2z - 15 = 0$ síkkal párhuzamos és $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$ egyenest metsző egyenes egyenletét..

4.1.12.

Feladat

Adva van $A(1,1,1)$; $B(4,3,7)$, és $C(7,4,3.)$ pont. Hatátozza meg D pont koordinátáit, ha a pont illeszkedik $\sphericalangle BAC$ szög szögfelezőjéhez és az A ponttól való távolsága $\sqrt{170}$.

Megoldás:

A szögfelező irányvektora a szög szárai irányába mutató egységvektorok (vagy egyenlő hosszúságú vektorok) összegével párhuzamos. A szárak irányvektorai:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (6,3,2), \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,2,6).$$

Nem nehéz belátni, hogy ezek egyenlő hosszúságú vektorok, tehát *D* pont helyvektora:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Ebből a vektoregyenlőségből következik a következő skaláris egyenlőség: $\left|\overrightarrow{AD}\right| = k\sqrt{81+25+64} = \sqrt{170}$, ahonnan $k = 1$ adódik..

Most már felírhatók *D* pont koordinátái: $D(10, 6, 9)$.

Gyakorló feladat

Írjuk fel az $M(3, –1, 2)$ ponton áthaladó egyenes egyenletét úgy, hogy merőleges legyen az $x = y = z$ egyenesre.

4.1.13.

Feladat

Adott négy pont: $A(2,3,1)$; $B(4,1,–2)$; $C(6,3,7)$; $D(–5,–4,8)$.

a) Számítsa ki az *ABCD* négyoldalú gúla *ABC* oldalához tartozó magasságát!

b) Írja fel azoknak a kitérő egyeneseknek az egyenleteit, amelyeket (*AB*), illetve (*CD*) pontok határoznak meg. Mekkora ezeknek az egyeneseknek a legkisebb egymás közötti távolsága?

Megoldás:

a) A kérdéses magasság azonos a gúla $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ élei felett szerkesztett paralelepipedon magasságával. Ez lehetővé teszi a számítások következő módon történő elvégzésére:

$$V_{paralelepipedon} = \left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\circ\overrightarrow{AD}\right| = \left\|\begin{matrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{matrix}\right\| = 308.$$

$$B_{paralelepipedon} = \left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \left|\left(-12,\ -24,\ 8\right)\right|\sqrt{144+576+64} = 28$$

$$. \qquad H_{gúla} = H_{paralelepipedon} = \frac{308}{28} = 11.$$

Az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ vektorok koordinátáit *A, B, C* és *D* pontok helyvektorainak különbségeként számítottuk ki.

b) Az (*AB*) és a (*CD*) egyenesek egyenletei:

$$(AB):\ \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{-3}, \qquad (CD):\ \frac{x-6}{11} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-7}{-1}.$$

A legkisebb egymás közötti távolság kiszámítása:

$$d = \left|\frac{\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DC}\right)\circ\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DC}\right|}\right|,\ \left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DC}\right)\circ\overrightarrow{AC} = \left|\begin{matrix} 2 & -2 & -3 \\ 11 & 7 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{matrix}\right| = 308,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DC}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 11 & 7 & -1 \end{matrix}\right\| = \left|\left(23,\ -31,\ 36\right)\right| = \sqrt{2786} \approx 52{,}78...$$

Válasz: $d = \dfrac{308}{\sqrt{2786}} \approx 5{,}83...$

Gyakorló feladat

Egyenletükkel adott három sík:

α: $ax - 3y + 4z = 4$; β: $x + by + cz = 0$; γ: $2x - y + z = d$.

Határozza meg az a, b, c és d paraméterek értékeit úgy, hogy a három sík közös pontja $T(1, 0, 1)$ legyen és teljesüljön: $\beta \perp \gamma$.

4.1.14.

Feladat

Írjuk fel α és β egymásra merőleges síkok egyenleteit, ha mindkét sík illeszkedik $x = y$ és $z = 0$ síkok közös egyeneséhez, azonkívül ismeretes, hogy α áthalad $A(0, 4, 2)$ ponton is.

Megoldás:

$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ és $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ síkok metszésvonalához számtalan sík illeszkedik. Ennek a síkseregnek az egyenlete tetszőleges $\lambda \in \mathbf{R}$.esetén:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0.$$

Feladatunkban ez a síksereg a következő módon jelenik meg:

$$x - y + \lambda z = 0.$$

A keresett síkok, α és β is ehhez a síksereghez tartozik. Mivel az A pontra fennáll $A \in \alpha$, és ez csak $\lambda = 2$ esetén teljesül.

Most már felírható α sík egyenlete: $x - y + 2z = 0$. A sík normálvektora $\vec{n}_\alpha = (1, -1, 2)$. Mivel β sík is a síksereghez tartozik, normálvektora pedig $\vec{n}_\beta = (1, -1, \lambda)$, így α és β merőlegessége miatt a normálvektorok is merőlegesek, vagyis skaláris szorzatuk eltűnik: $\vec{n}_\alpha \circ \vec{n}_\beta = 1 + 1 + 2\lambda = 2(1 + \lambda) = 0$. Tehát $\lambda = -1$, és most már felírható β sík egyenlete: $x - y - z = 0$.

Gyakorló feladat

Írja fel az $M(2, 2, -1)$ és $N(3, -1, 2)$ pontokat tartalmazó sík egyenletét, ha az áthalad alábbi három sík közös pontján is:

$$5x + 3y + 2z - 3 = 0, \quad 2x - 4y + 3z + 7 = 0, \quad 3x + y - 2z + 3 = 0.$$

4.1.15. Feladat

Adott két kitérő egyenes p és q :

$$p: \frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-8}{2}, \qquad q: \frac{x-4}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+9}{-4},$$

a) Írja fel annak a két párhuzamos síknak az egyenleteit, amelyek közül az egyik p, a másik pedig q egyenest tartalmazza.

b) Írja fel a két egyenes közös n merőleges egyenesének egyenletét.

c) Határozza meg A és B pontok koordinátáit ($A = p \cap n$ és $B = q \cap n$) ha azok a közös merőleges egyenesnek az adott egyenesek közé eső szakaszának végpontjai. (Ez a pontpár a két legközelebbi pont az adott egyeneseken).

Megoldás:

Először is a közös merőleges egyenes irányvektorát határozzuk meg. A két egyenes p és q közös merőlegese $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q}$, ahol $\vec{p}$ és $\vec{q}$ az egyenesek irányvektorai. Az irányvektorok koordinátáit az egyenesek egyenleteiből olvassuk ki:

$$\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Válasszuk $\vec{n}$ koordinátáinak: $\vec{n} = (2, 2, 1)$ (Kisebb számokkal dolgozunk, de a fenti vektorral párhuzamos vektort alkalmazunk).

a) Az adott egyeneseket tartalmazó síkok normálvektora pontosan ez a $\vec{n} = (2, 2, 1)$ vektor mert a síkok egymás között párhuzamosak.

Legyen α a *p* egyeneshez illesztett sík. Mivel tartalmazza az egyenest, így tartalmazza mindegyik pontját, tehát *P*(2, –5, 8) pontot is.

$$\alpha: \quad 2(x-2) + 2(y+5) + 1(z-8) = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 2y + z - 2 = 0.$$

Legyen β a *q* egyeneshez illeszkedő sík, tehát tartalmazza az egyenes minden pontját, tehát *Q*(4, 6, –9) pontot is. Ezeket a pontokat könnyen kiemeltük az egyenesek egyenleteiből.

$$\beta: \quad 2(x-4) + 2(y-6) + 1(z+9) = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 2y + z - 11 = 0.$$

b) Most a γ segédsík egyenletét írjuk fel. Ez tartalmazza *p* és *n* egyeneseket (tehát normálvektora párhuzamos $\vec{p} \times \vec{n}$ vektorral).

Mivel $\vec{p} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-6, 3, 6)$, most is „rövidítjük” a vektort. Vegyük a párhuzamos vektort, amelyre teljesül: $\vec{n}_1 \parallel \vec{p} \times \vec{n}$. Így adódik $\vec{n}_1 = (-2, 1, 2)$. A γ sík ezzel a most meghatározott normálvektorral áthalad *P*(2, –5, 8) ponton és tartalmazza *p* egyenest:

$$\gamma: \quad -2(x-2) + 1(y+5) + 2(z-8) = 0 \;\Rightarrow\; -2x + y + 2z - 7 = 0.$$

Az új sík, vagyis γ és *q* egyenes metszéspontja a c) feladatrész egyik keresett pontja. Írjuk át paraméteres alakra *q* egyenes egyenleteit:

$$q: \quad x = t + 4, \qquad y = t + 6, \qquad z = -4t - 9.$$

Behelyettesítve γ sík egyenletébe t = –3 adódik, és ezzel meghatároztuk *B*(1, 3, 3) pont koordinátáit.

A két egyenes p és q közös merőlegese n egyenes, amelynek irányvektora a már ismert $\vec{n} = (2, 2, 1)$ vektor, és áthalad B ponton, tehát $n: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$.

c) A közös merőleges szakasz végpontjai A és B. Közülük B már ismert. Az A pont meghatározásához n egyenes döféspontjára van szükségünk amely a p egyenest tartalmazó síkban van.

Most n egyenes egyenleteit írjuk fel paraméteres alakban:

n: $x = 2t + 1$, $y = 2t + 3$, $z = t + 3$.

Ezt α sík egyenletébe helyettesítve $t = -1$ adódik, amellyel már felírhatók A pont koordinátái: $A(-1, 1, 2)$.

$B(1, 3, 3)$ pontot már korábban meghatároztuk.

Ezzel megoldottuk a feladatot.

Gyakorló feladat

a) Határozza meg az $\dfrac{x-8}{8} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z}{0}$ egyenesen azoknak a pontnak a koordinátáit, amelyek 10 egységre vannak $A(8, 2, 0)$ ponttól.

b) Írja fel a kapott pontokhoz illeszkedő, az adott egyenesre merőleges két sík egyenleteit.

5. MÁTRIXOK ÉS DETERMINÁNSOK

5.0. GYAKORLÓ FELADATOK

5.0.1. Feladat:

Oldjuk meg az $A+2X=3B$ mátrixegyenletet, ha adottak az $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\3&3&-1\\4&1&2\end{bmatrix}$ és $B=\begin{bmatrix}1&3&0\\1&3&-1\\2&1&0\end{bmatrix}$ mátrixok.

Megoldás:

Fejezzük ki az ismeretlen X mátrixot az adott egyenletből:

$$2X=3B-A \quad\Rightarrow\quad X=\frac{1}{2}(3B-A).$$

Számítsuk ki most az X mátrixot:

$$X=\frac{1}{2}(3B-A)=\frac{1}{2}\left(3\begin{bmatrix}1&3&0\\1&3&-1\\2&1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&0\\3&3&-1\\4&1&2\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3&9&0\\3&9&-3\\6&3&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&0\\3&3&-1\\4&1&2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&8&0\\0&6&-2\\2&2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&0\\0&3&-1\\1&1&-1\end{bmatrix}.$$

5.0.2. Feladat:

Számítsuk ki az $A \cdot B$ és $B \cdot A$ szorzatot ha lehetséges, ha:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Az $A_{m\times n}$ mátrixot csakis $B_{n\times p}$ típusú mátrixokkal lehet szorozni, az eredmény pedig egy $C_{m\times p}$ típusú mátrix lesz. Ezek szerint az adott $A_{2\times 4}$ típusú mátrixot szorozhatjuk a $B_{4\times 3}$ típusú mátrixszal, és az eredmény egy $C_{2\times 4}$ típusú mátrix lesz. A fordított sorrendű szorzás nem kivitelezhető, mert ebben az esetben egy $B_{4\times 3}$ mátrixot kellene szorozni $A_{2\times 4}$ mátrixszal, ahol a belső dimenziók nem egyeznek meg. A mátrixok szorzását egyszerűen követhetjük a következő táblázatban:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & 2 & 2 & 5 \\
 & & & & 4 & 3 & 0 \\
 & A \cdot B & & & -1 & 5 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 2 \\
\hline
2 & 1 & 1 & 0 & 7 & 12 & 11 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 17 & 43 & 32
\end{array}$$

A kiszámítható szorzat tehát az $A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 11 \\ 17 & 43 & 32 \end{bmatrix}$.

5.0.3. Feladat:

Számítsuk ki az $A \cdot B$ és $B \cdot A$ szorzatokat, ha adottak az $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ mátrixok.

Megoldás:

Az $A_{1\times 3}$ és $B_{3\times 1}$ mátrixok szorozhatók az $A_{1\times 3} \cdot B_{3\times 1} = C_{1\times 1}$ és a fordított $B_{3\times 1} \cdot A_{1\times 3} = D_{3\times 3}$ sorrendben is. Számítsuk ki ezeket a szorzatokat:

$$
\begin{array}{c|c}
A \cdot B & \begin{array}{c} 5 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \end{array} & 17
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccc}
A \cdot B & 2 & -1 & 3 \\
\hline
5 & 10 & -5 & 15 \\
2 & 4 & -2 & 6 \\
3 & 6 & -3 & 9
\end{array}
$$

A keresett mátrixok tehát

$$
A_{1\times 3} \cdot B_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 17 \end{bmatrix} \text{ és } B_{3\times 1} \cdot A_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 15 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}.
$$

5.0.4. Feladat:

Adottak a $P(x) = x^2 - 3x + 2$ és $Q(x) = x^2 - 2x - 5$ polinomok. Számítsuk ki a $P(A)$ és $Q(A)$ mátrixpolinomokat, ha $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Megoldás:

A $P(A)$ és $Q(A)$ mátrixpolinomokat úgy kapjuk meg, hogy az A mátrixot behelyettesítjük a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomokba az x változó helyére azzal, hogy $2 = 2x^0 = 2A^0 = 2E$ és $-5 = -5x^0 = -5A^0 = -5E$, ahol E az egységmátrix. Ezért:

$$P(A) = A^2 - 3A + 2E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(A) = A^2 - 2A - 5E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

5.0.5. Feladat:

Határozzuk meg az A^n, B^n és C^n mátrixokat $\forall n \in N$ esetén, ha adottak az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad C = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ mátrixok.}$$

Megoldás:

Az A^n, B^n és C^n mátrixokat úgy határozhatjuk meg, ha sorban kiszámítjuk a második, harmadik, negyedik, stb. hatványukat mindaddig, amíg nem tudunk általánosítani az *n*-ik hatványra.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E,$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = E \cdot A = A,$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = E,$$
$$A^5 = A^4 \cdot A = E \cdot A = A,$$

ezért könnyen belátható, hogy $A^n = \begin{cases} A & ha \quad n = 2k+1 \\ E & ha \quad n = 2k \end{cases}$, $\forall k \in N$ esetén.

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = 0 \cdot B = 0,$$

ezért könnyen belátható, hogy $B^n = 0 \quad \forall n \in N \ \wedge \ n > 1$ esetén.

$$C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix},$$

$$C^4 = C^3 \cdot C = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{bmatrix},$$

ezért könnyen belátható, hogy $C^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \quad \forall n \in N$ esetén.

5.0.6. Feladat:

Számítsuk ki a következő determinánsok értékeit:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 8 & -12 & 5 \\ -3 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 12 & -3 & 5 \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Megoldás:

A másodrendű determinánsok értékét úgy számítjuk ki, hogy a főátlón lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlón lévő elemek szorzatát, ezért:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 24 = 30 \cdot$$

A harmadrendű determinánsok értékét számíthatjuk a Sarrus-szabállyal:

$$D_3 = \left|\begin{matrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & -4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & -2 \\ 0 & 6 \\ 3 & 2 \end{matrix} =$$

$$= 5\cdot 6\cdot(-4) + (-2)\cdot 7\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 6\cdot 3 - 5\cdot 7\cdot 2 - (-2)\cdot 0\cdot(-4) =$$

$$= -120 - 42 + 0 - 18 - 70 - 0 = -250.$$

vagy egy sora illetve oszlopa elemei szerinti kifejtéssel (Laplace-szabály):

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot(-38) + 3\cdot(-20) = -190 - 60 = -250.$$

A negyedrendű és ötödrendű determinánsok értékének kiszámítása csakis a sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel történhet (a Sarrus-szabály kizárólag a harmadrendű determinánsokra érvényes). Mielőtt elkezdenénk kifejteni a determinánst valamely sora vagy oszlopa szerint, a kiválasztott sorban (oszlopban) elementáris mátrix-transzformációkkal próbáljunk meg minél több nullaelemet kapni:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 8 & -12 & 5 \\ -3 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 12 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -48 & 69 & -26 \\ 1 & 8 & -12 & 5 \\ 0 & 32 & -35 & 17 \\ 0 & -20 & 45 & -15 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -48 & 69 & -26 \\ 32 & -35 & 17 \\ -20 & 45 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-5)\begin{vmatrix} -48 & 69 & -26 \\ 32 & -35 & 17 \\ 4 & -9 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} -22 & -9 & -26 \\ 15 & 16 & 17 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} -22 & -9 & 40 \\ 15 & 16 & -28 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -9 & 40 \\ 16 & -28 \end{vmatrix} = 5\cdot(252-640) = 5\cdot(-388) = -1940\cdot$$

Hasonlóan oldjuk meg a kifejtést, ha ötödrendű determinánsról van szó:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ -24 & -4 & -4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ -24 & -4 & -4 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 4 \\ -24 & -28 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ -28 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \\ -28 & -32 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -32 & -4 \end{vmatrix} = 16\cdot(16+128) = 16\cdot 144 = 2304.$$

5.0.7. Feladat:

Fejtsük ki a $D = \begin{vmatrix} a & 2a & 3a & 4a \\ 2a & a & 2a & 3a \\ 2a & 2a & a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & a \end{vmatrix}$ determinánst.

Megoldás:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2a & 3a & 4a \\ 2a & a & 2a & 3a \\ 2a & 2a & a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & a \end{vmatrix} = a^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= a^4\cdot\begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -2 & -5 & -6 \\ -2 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -a^4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -a^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -a^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 11 \end{vmatrix} = -a^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = -a^4 \cdot (11+4) = -15a^4.$$

5.0.8. Feladat:

Oldjuk meg az $\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+1 \\ x+1 & x+1 & x+1 \\ x+1 & x+1 & x \end{vmatrix} = 2$ egyenletet.

Megoldás:

Az egyenlet bal oldala determináns alakjában van megadva, ezért ezt ki kell fejteni, hogy klasszikus alakú egyenletet kapjunk.

$$\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+1 \\ x+1 & x+1 & x+1 \\ x+1 & x+1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x+1 & 0 & 0 \\ x+1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+1) \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(x+1) \cdot (-x) = 2$$

$$x^2 + x = 2$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{matrix},$$

az egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \{-2,1\}$.

5.0.9. Feladat:

Határozzuk meg a következő mátrixok rangját:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\-2&-3&3&2\\1&2&5&-1\\-1&-3&2&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&2&-3&2\\5&1&-1&2&-1\\2&-1&1&-3&4\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}.$$

Megoldás:

A mátrix rangja megegyezik a lineárisan független sorok vagy oszlopok maximális számával.

A gyakorlatban úgy határozzuk meg, hogy elementáris mátrixtranszformációkkal lenullázuk az összes lineárisan függő sort (oszlopot). Ezek után a megmaradt nemnulla sorok (oszlopok) jelentik a lineárisan független sorokat (oszlopokat), és az ő számuk adja meg a mátrix rangját.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\-2&-3&3&2\\1&2&5&-1\\-1&-3&2&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-1&7&4\\0&1&3&-2\\0&-2&4&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-1&7&4\\0&0&10&2\\0&0&-10&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-1&7&4\\0&0&10&2\\0&0&0&-1\end{bmatrix},$$

ezért $rang(A)=4$.

$$B=\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&-2&10&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

ezért $rang(B)=2$.

$$C=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&2&-3&2\\5&1&-1&2&-1\\2&-1&1&-3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\-1&-4&4&-5&0\\7&2&-2&3&0\\-6&-5&5&-7&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -26 & 26 & -32 & 0 \\ 0 & 19 & -19 & 23 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{16}{13} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{23}{19} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{16}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{247} & 0 \end{bmatrix},$$

ezért $rang(C) = 4$.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ezért $rang(D) = 3$.

5.0.10. Feladat:

Diszkutáljuk az $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & t-7 & -3 \\ -1 & t-4 & t^2-3t \end{bmatrix}$ mátrix rangját a valós t paraméter értékeitől függően.

Megoldás:

Ha $\det A \neq 0$ akkor az A mátrix rangja 3.
Ha $\det A = 0$ akkor az A mátrix rangja kisebb mint 3.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & t-7 & -3 \\ -1 & t-4 & t^2-3t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & t-1 & -1 \\ 0 & t-1 & t^2-3t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ t-1 & t^2-3t+1 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t^2-3t+2 \end{vmatrix}=(t-1)(t^2-3t+2)=0\,.$$

$$t-1=0 \quad \vee \quad t^2-3t+2=0 \quad \Rightarrow$$
$$t_1=1,\quad t_{2/3}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{cases} t_2=2 \\ t_3=1 \end{cases}.$$

Diszkusszió:

1) $(\forall t\in R)(t\neq 1 \;\wedge\; t\neq 2) \Rightarrow rang(A)=3\,.$

2) Ha $t=1 \Rightarrow rang(A)=2$ mert ekkor

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

amely mátrixnak két lineárisan független sora van.

3) Ha $t=2 \Rightarrow rang(A)=2$ mert ekkor

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ennek a mátrixnak is két lineárisan független sora van.

5.0.11. Feladat:

Határozzuk meg az $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

Megoldás:

Ha az A mátrix reguláris ($detA \neq 0$), akkor létezik inverz mátrixa, és ezt az $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} \cdot adjA$ képlettel számíthatjuk. Határozzuk meg először a $detA$ értékét, majd az $adjA$ adjungált mátrixot.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2,$$

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T,$$

ahol A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó kofaktor, és:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

A kofaktorok segítségével írjuk fel az adjungált mátrixot:

$$adjA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az inverz mátrix pedig:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Az inverz mátrix pontosságát leellenőrizhetjük az $A^{-1} \cdot A = E$ feltételből.

$A^{-1} \cdot A$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
$-\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$	$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = E$

5.0.12. Feladat:

Oldjuk meg az $AX = B$ mátrixegyenletet az ismeretlen X mátrixra nézve, ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Fejezzük ki az adott mátrixegyenletből az ismeretlen X mátrixot:

$$A^{-1} \cdot \backslash \qquad AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Az A mátrix inverzét már az előző feladatban meghatároztuk. A továbbiakban az $X = A^{-1}B$ mátrixot kell kiszámítanunk:

$$
\begin{array}{c|c}
X = A^{-1}B & \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\
\hline
-\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} & -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Az adott mátrixegyenlet megoldása tehát az $X = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ mátrix.

5.0.13. Feladat:

Oldjuk meg az $XA = B$ mátrixegyenletet az ismeretlen X mátrixra nézve, ha adottak az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 6 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ mátrixok.}$$

Megoldás:

Fejezzük ki az adott mátrixegyenletből az ismeretlen X mátrixot:

$$XA = B \quad / \cdot A^{-1}$$

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$\underline{X = BA^{-1}}$$

Először az A^{-1} inverz mátrixot kell tehát meghatároznunk.

$$detA=\begin{vmatrix}1&3&0\\2&1&2\\1&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-5&2\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&2\\1&1\end{vmatrix}=-7,$$

$$adjA=\begin{bmatrix}-7&0&7\\-3&1&-1\\6&-2&-5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-7&-3&6\\0&1&-2\\7&-1&-5\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-7&-3&6\\0&1&-2\\7&-1&-5\end{bmatrix}.$$

$X=BA^{-1}$	$-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-7&-3&6\\0&1&-2\\7&-1&-5\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}2&7&1\\6&9&5\\3&5&3\end{bmatrix}$	$-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-7&0&-7\\-7&-14&-7\\0&-7&-7\end{bmatrix}$

A keresett megoldás az $X=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ mátrix.

5.0.14. Feladat:

Oldjuk meg az $AX=B$ mátrixegyenletet az ismeretlen X mátrixra nézve, ha $A=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&-2&1\\2&-1&1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-5&-4&-3\\-1&-2&-3\\5&7&9\end{bmatrix}$.

Megoldás:

Fejezzük ki az adott mátrixegyenletből az ismeretlen X mátrixot:

$$A^{-1} \cdot \backslash \qquad AX = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$EX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Először az A^{-1} inverz mátrixot kell meghatároznunk:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 2 = -6,$$

$$adjA = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

a keresett X mátrix tehát az

$$\begin{array}{c|c} X = A^{-1}B & \begin{bmatrix} -5 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \\ \hline -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} & -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & -12 & -18 \\ -24 & -30 & -36 \\ -42 & -48 & -54 \end{bmatrix} \end{array}$$

vagyis $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

5.0.15. Feladat:

Oldjuk meg a következő mátrix egyenletrendszert:

$$AX = BA$$
$$YA = BA$$

ha adottak az $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -4 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixok.

Megoldás:

Fejezzük ki az adott egyenletekből az X és Y mátrixokat:

$$AX = BA \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}BA \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}BA$$
$$YA = BA \quad \Rightarrow \quad YAA^{-1} = BAA^{-1} \quad \Rightarrow \quad Y = BE = B$$

Az egyik ismeretlent mindjárt megkaptuk, ez az

$$Y = B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -4 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az ismeretlen $X = A^{-1}BA$ mátrix kiszámításához először az A^{-1} inverz mátrixot kell meghatároznunk.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 30 + 8 - 8 - 15 = 15.$$

$$adjA = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 6 \\ 5 & 10 & 0 \\ -2 & 11 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 7 & 10 & 11 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 7 & 10 & 11 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az $X = A^{-1}BA$ mátrixszorzatot két lépésben számítjuk. Az első szorzás:

$$\begin{array}{c|c} B\cdot A & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -4 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 13 & 1 & 15 \\ 39 & -9 & 39 \\ -6 & 6 & -26 \end{bmatrix} \end{array}$$

és a második lépés:

$$\begin{array}{c|c} X = A^{-1}B\cdot A & \begin{bmatrix} 13 & 1 & 15 \\ 39 & -9 & 39 \\ -6 & 6 & -26 \end{bmatrix} \\ \hline \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 7 & 10 & 11 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 155 & -61 & 187 \\ 415 & -17 & 209 \\ 60 & 24 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

A megadott egyenletrendszer másik megoldása tehát az:

$$X = \begin{bmatrix} 155/15 & -61/15 & 187/15 \\ 415/15 & -17/15 & 209/15 \\ 60/15 & 24/15 & 17/15 \end{bmatrix} \text{ mátrix,}$$

egyszerűsítés után pedig

$$X = \begin{bmatrix} 31/3 & -61/15 & 187/15 \\ 83/3 & -17/15 & 209/15 \\ 4 & 8/5 & 17/15 \end{bmatrix}.$$

5.1. ÍRÁSBELI VIZSGAFELADATOK

5.1.1 Feladat

Számítsa ki a D determináns értékét: $D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & -7 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & -8 \end{vmatrix}$.

Megoldás:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & -7 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & -8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 16 & -4 & 9 \\ 0 & -17 & 5 & -20 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 12 & -167 \\ 0 & 0 & -12 & 167 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 12 & -167 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

A determináns értéke 0, mert a negyedik sor mindegyik eleme 0!

Gyakorló feladat

Számítsa ki az alábbi determinánsok érékét:

a) $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 3 & -8 & 7 & 2 \\ -5 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & -8 & -5 \end{vmatrix}$, b) $D=\begin{bmatrix} 2 & -4x+2 & 5 & -1 \\ 2 & -8 & 3 & 4 \\ -1 & -2x-6 & 3 & 3 \\ 1 & x-4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5.1.2. Feladat

Oldja meg az $XA + E = A + 2B$ mátrixegyenletet az ismeretlen X mátrixra nézve, ha adott a következő két mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Készítsünk megoldástervet:

$$XA + E = A + 2B \Rightarrow XA = A + 2B - E \Rightarrow X = (A + 2B - E)\cdot A^{-1}.$$

A meglévő mátrixok felhasználásával valósítsuk meg ezt a tervet! Mindenek előtt határozzuk meg A^{-1} mátrixot (ha ez a mátrix nem létezik, akkor a feladatnak nincs megoldása)

$$det(A) = 2,\ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ A + 2B - E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Végül végezzük el a jobboldali szorzást A^{-1} mátrixszal!

$$X = (A + 2B - E)\cdot A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gyakorló feladat

Oldja meg az $XA = BA^{-1}B$ mátrixegyenletet, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.1.3.

Feladat

Oldja meg a $AX - E = A + B$ mátrixegyenletet az ismeretlen X mátrixra nézve, ha adott a következő két mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Vizsgálja meg az előző megoldott feladat megoldásmódját. Vegye figyelembe azt a tényt is, hogy a mátrixok szorzása nem kommutatív, és ezért most balról szorzunk A^{-1} mátrixszal.

$$AX - E = A + B \Rightarrow AX = A + B + E \Rightarrow X = A^{-1}(A + B + E).$$

Mivel $det(A) = 1$, ezért: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A + B + E = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gyakorló feladat

Oldja meg az $AX = BA^{-1}B$ mátrixegyenletet, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.1.4.
Feladat

Adott $P(x)$ polinom és A mátrix. Számítsa ki $P(A)$ értékét!

$$P(x)=x^2+5x+7, \qquad A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Megoldás:

$$P(A)=A^2+5A+7E=$$

$$=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ 5 & -5 & 10 \\ 10 & 5 & -5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Gyakorló feladat

Adott $P(x)$ polinom és A mátrix. Számítsa ki $P(A)$ értékét!

a) $$P(x)=5x^2-4x+3, \quad A=\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) $$P(x)=-4x^2+5x+3, \qquad A=\begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5.1.5.

Feladat

Oldja meg az $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0$ egyenletet.

Megoldás:

Első lépés – kivonjuk az első sort minden következő sorból:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

.

A második lépés – Laplace kifejtési tételének alkalmazása. A tételt az első oszlopra vonatkoztatjuk:

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$$

Mivel átlós determinánst nyertünk, a determináns értéke az átlón lévő elemek szorzataként adódik: $-x\,(1-x)\,(2-x)\,(3-x) = 0$.

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Gyakorló feladat

Oldja meg az egyenleteket:

a) $\begin{vmatrix} 2x & x+1 & 3x \\ 2x+3 & x & 3x-1 \\ -2x & -x-1 & -3x+2 \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} x-6 & x-1 & x+3 \\ x+1 & x+3 & x-5 \\ x & x-4 & x \end{vmatrix} = -108$.

5.1.6. Feladat

Oldja meg a mátrix-egyenletrendszert X és Y ismeretlen mátrixokra nézve, ha adottak A, B és E mátrixok:

$$AX + Y = 0; \qquad X + BY = E, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A helyettesítés módszerét alkalmazzuk.

Az első egyenletből: $Y = -AX$. Ha behelyettesítjük a második egyenletbe, akkor a következő adódik: $X - BAX = E$. Most, úgymond „kiemeljük a zárójel mögé” X mátrixot:

$$(E - BA)X = E.$$

Vezessük be a $C = E - BA$ jelölést. Ezzel a jelöléssel a megoldás: $X = C^{-1}$ és $Y = -A\,C^{-1}$.

Most már csak a megfelelő számítási technikák elvégzése maradt hátra:

$$C = E - BA = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = X, \quad Y = -AX = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Gyakorló feladat

Oldja meg az $ABX=C$ mátrixegyenletet, ahol X az ismeretlen mátrix, A és B pedig két adott mátrix:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix},\quad B=A^T,\ C=\begin{bmatrix}6\\ 2\end{bmatrix}.$$

5.1.7.

Feladat

Adott a $q(x)=2+x-x^2$ trinom. Bizonyítsa, hogy két azonos rendű tetszőleges négyzetes mátrix, A és B esetén fennáll a következő egyenlőség.: $B^{-1}q(A)B=q(B^{-1}AB)$.

Amennyiben az elméleti bizonyítás sikertelen, akkor A és B mátrixokkal végezzen el egy gyakorlati próbát:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} q(B^{-1}AB) &= 2E+(B^{-1}AB)-(B^{-1}AB)(B^{-1}AB)=\\ &= 2E+(B^{-1}AB)-B^{-1}A(BB^{-1})AB=\\ &= 2E+(B^{-1}AB)-B^{-1}A^2B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{-1}q(A)B &= B^{-1}(2E+A-A^2)B=\\ &=2B^{-1}B+B^{-1}AB-B^{-1}A^2B=\\ &=2E+(B^{-1}AB)-B^{-1}A^2B. \end{aligned}$$

Következmény: $q(B^{-1}AB)=B^{-1}q(A)B$.

(Konkrét mátrixok esetén egyszerű mátrixműveleteket kell elvégezni, ezt az olvasóra marad).

Gyakorló feladat

Adott az A mátrix. Igazolja, hogy minden n>2 természetes szám esetén teljesül $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$ (E a harmadrendű egységmátrix).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.1.8.

Feladat

Számítsa ki a $\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & a+3b \\ -a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix}$ determinánst!.

Megoldás:

A második, a harmadik és a negyedik oszlop elemeit rendre hozzáadjuk az első oszlop megfelelő elemeihez:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & a+3b \\ -a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+6b & a+b & a+2b & a+3b \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix} =$$

$$= (4a+6b)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \end{vmatrix}.$$

A végül nyert determináns átlós, így értéke az átlós elemek szorzatával egyenlő, vagyis $\Delta = 2a^3(2a + 3b)$.

Gyakorló feladat

Adott két mátrix: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Határozza meg A^{-1} mátrixot!
b) Számítsa ki $C = A^{-1} \cdot B$ mátrixot.

5.1.9.
Feladat

Oldja meg az $AX + B = CX + D$ mátrixegyenletet, ahol X az ismeretlen mátrix, A, B, C és D pedig négy adott mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$AX + B = CX + D \Rightarrow (A - C)X = D - B.$ Az $M = A - C$ és $N = D - B$ jelölésekkel egyenletünk az $MX = N$ alakot veszi fel. Innen következik a megoldás: $X = M^{-1} N$.

$$M = A - C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$N = D - B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$det(M) = -1/4 \text{ és } M^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tehát } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gyakorló feladat

Oldja meg az $YP + Q = YR + S$ mátrixegyenletet, ahol Y az ismeretlen mátrix, P, Q, R és S pedig négy adott mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}.$$

5.1.10.

Feladat

a) Vizsgálja ki $A(t)$ mátrix rangjának t paramétertől való függőségét (diszkusszió).

b) Oldja meg a $8(X+3E)^{-1}=A(3)$ mátrixegyenletet.

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & t-7 & -3 \\ -1 & t-4 & t^2-3t \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

a)

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & t-7 & -3 \\ -1 & t-4 & t^2-3t \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & t-1 & 11 \\ 0 & t-1 & t^2-3t+7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & t-1 & 11 \\ 0 & 0 & t^2-3t-4 \end{bmatrix}$$

(Először is az első sor kétszeresét hozzáadtuk a második sorhoz, illetve az első sor elemeit csak hozzáadtuk a harmadik sor elemeihez. A második lépésben a második sort kivontuk a harmadik sorból.)

A $t^2 - 3t - 4 = 0$ egyenlet megoldásai $t_1 = -1$ és $t_2 = 4$.

Ha t paraméter ezen értékek valamelyikét veszi fel, a mátrix rangja 2, mert harmadik sora 0.

A t paraméter minden más értékére (tehát $t \neq -1$ és $t \neq 4$) a mátrix rangja 3.

b) Vezessük be az $A(3)=B$ jelölést. Mátrixegyenletünk megoldásának folyamata ezzel a jelöléssel a következő:

$$(X + 3E)^{-1} = B/8 \Rightarrow 8E = B(X + 3E) \Rightarrow 8E = BX + 3B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BX = 8E - 3B \Rightarrow X = B^{-1}(8E - 3B) = 8B^{-1} - 3E.$$

Konkrét számítások alapján a következő értékeket nyerjük:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 8E - 3B = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -21 \\ 6 & 20 & 9 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix},$$

$$det(B) = -8, \quad B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 7 & -19 \\ -3 & -7 & 11 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$X = 8B^{-1} - 3E = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -19 \\ -3 & -10 & 11 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Gyakorló feladat

Végezzük el A mátrix rangjának diszkusszióját az a paramétertől függően:

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & -3a & 3a^3 \\ a & 3a & -3a \\ a & -3a^2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.1.11.

Feladat

Számítsa ki φ(A) értékét, ha $\varphi(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ és $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

Megoldás:

A kifejezés mátrixos formája: $\varphi\,(A) = (E + A)\,(E - A)^{-1}$,

$$E + A = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix},\ E - A = \begin{bmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix},$$

$$|E - A| = -4,\ \left(E - A\right)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(A) = \begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

Gyakorló feladat

a) Számítsa ki φ(A) értékét, ha $\varphi(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ és $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

b) Oldja meg a mátrixegyenletet az ismeretlen X mátrixra általános esetben is, majd konkrétan is ha adott A és B mátrix:

$$(X + B)\,(A^{-1} X B + B)^{-1} = A$$

5.1.12.

Feladat

Adott az $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ mátrix.

Igazolja, hogy az adott A mátrixra minden $n\in\mathrm{N}$ számra teljesül: $A^n = n\,2^{n-1}A-(n-1)\,2^n E$, ($E$ a harmadrendű egységmátrix). A bizonyítás eredményét felhasználva határozza meg A^{-1} mátrixot szokásos invertálási eljárás kikerülésével.

Megoldás:

Számítsuk ki A^2 és A^3 mátrixokat:

$$A^2=\begin{bmatrix}8 & 4 & -4\\ 0 & 4 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{bmatrix} \text{ és } A^3=\begin{bmatrix}20 & 12 & -12\\ 0 & 8 & 0\\ 12 & 12 & -4\end{bmatrix}.$$

Az adott formulát ellenőrizzük $n = 2$ esetben: $A^2 = 4(A - E\,)$. Ha az $n = 3$ esetet ellenőrizzük, akkor $A^3 = 4(3A - 4E\,)$ adódik, stb...

A korrekt bizonyítás matematikai indukcióval történik, de ezt most kihagyjuk. Elfogadjuk, hogy a formula állítása igaz minden n természetes számra.

Az inverz mátrix meghatározása a szokásos invertálási eljárás nélkül is lehetséges a következő módon:

Szorozzuk meg A^{-1} mátrixszal az $A^2 = 4(A - E\,) = 4A - 4E$ egyenlőséget. A szorzás után $A = 4E - 4\,A^{-1}$ adódik, és innen következik:

$$A^{-1} = E-\frac{1}{4}A=\begin{bmatrix}1/4 & -1/4 & 1/4\\ 0 & 1/2 & 0\\ -1/4 & -1/4 & 3/4\end{bmatrix}.$$

Gyakorló feladat

A négyzetes mátrix „nilpotens”, ha létezik olyan k természetes szám, amelyre teljesül $A^k = 0$. (Itt 0 a nulla mátrix). Bizonyítsa, hogy a k-ad rendű nilpotens mátrixra teljesül (E a megfelelő egységmátrix):

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{k-1}.$$

5.1.13.

Feladat

Határozza meg azokat az a valós számokat, amelyekre A mátrix determinánsa eltűnik ($det(A)$=0).

$$A=\begin{bmatrix} a^2-1 & a-1 & 2 & 1 \\ a^2-1 & 2a-2 & 2 & a+1 \\ a^2-1 & a-1 & a^2+a+3 & 2 \\ a^2-1 & a-1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$det(A)=\begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & 2 & 1 \\ a^2-1 & 2a-2 & 2 & a+1 \\ a^2-1 & a-1 & a^2+a+3 & 2 \\ a^2-1 & a-1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(a^2-1\right)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & a^2+a+3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ezt a lépést a determináns egy-egy sorából való közös tényező kiemelésével tettük meg. $det(A)=|A|=$

$$=\left(a^2-1\right)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a^2+a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\left(a^2-1\right)(a-1)\left(a^2+a+1\right).$$

A második lépésben az első vízszintes sort kivontuk a többi sorokból. Mivel átlós determinánshoz jutottunk, a végső érték úgymond „magától adódik”.

Belátjuk, hogy a $det(A) = 0$ egyenletnek valós megoldása csak $(a+1)=0$ és $(a-1)=0$ esetén van, tehát $a = \pm 1$. A determináns harmadik tényezője csak komplex gyökökkel rendelkezik

Gyakorló feladat

Végezze el A mátrix rangjának diszkusszióját az a paramétertől függően, majd az $a = 1$ esetben oldja meg az $AX=B$ mátrixegyenletet.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a-1 & a+2 \\ a & a^2 & a^2+2a \\ a-2 & a^2-3a+2 & a^2+a-3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5.1.14.

Feladat

Oldja meg az $ABX = 4X - 2C$ mátrixegyenletet az ismeretlen X mátrixra ha adott A, B és C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Megállapítjuk, hogy $A \cdot B$ mátrixszorzat (ebben a sorrendben!) egy 3×3 típusú mátrix. Rendezzük az egyenletet a következő formára:

$$4EX - ABX = 2C, \text{ továbbá: } (4E - AB)X = 2C.$$

Az utóbbi lépésben megjelent a 3×3 -as típusú E egységmátrix. A zárójelben lévő mátrix-kifejezést jelölje D. Ily módon egyenletünk elsődleges formája a $DX = 2C$ alakra transzformálódik..

$$D = 4E - AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

(Az AB szorzatot már korábban kiszámítottuk.)

Mátrixegyenletünk megoldása:

$X = 2\,D^{-1}\,C$ (amennyiben létezik D^{-1}).

Számítsuk ki D determinánsát és inverzét!

$$det(D) = -16, \quad D^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -4 & -28 & 12 \\ 4 & 12 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

következik: $$X = 2\,D^{-1}\,C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Gyakorló feladat

Írjuk fel mindazoknak a másodrendű, nem-nulla elemekkel rendelkező négyzetes mátrixoknak az általános alakját, amelyek négyzete a O nulla mátrix. Írjon fel egy konkrét példát is!

5.1.15.

Feladat

Határozza meg A mátrix determinánsát:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & .... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & .... & 1 \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ 1 & 1 & 1 & .... & 0 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Alkalmazzuk a Laplace-féle kifejtési tételt az első oszlop elemei szerint. Összesen n összeadandót nyerünk, közülük az első értéke 0, a többiek mindegyike egy n–1-ed rendű, $(–1)^{i+1}$ előjelű determináns amely az eredeti determinánsból származik az első oszlop és az i-edik sor kihagyásával. A determinánsok mindegyikének első sora és i–1-edik oszlopa csupa egyesekből áll (i = 2, 3, ... , n).

Vizsgáljuk meg a második sor első eleméhez tartozó, majd a harmadik sor első eleméhez tartozó minort. Mindkettő (n–1)-ed rendű determináns:

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & .... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & .... & 1 \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ 1 & 1 & 1 & .... & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 0 & -1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & .... & 0 \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & 0 & .... & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+1} \cdot (-1)^{n-2} = (-1)^{n+1}.$$

$$(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & .... & 1 \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ 1 & 1 & 1 & .... & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ -1 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & .... & 0 \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & 0 & .... & -1 \end{vmatrix}$$

Ezt az utolsó determinánst az első és a második oszlop felcserélésével az i=2 esetben látott determinánsra vezethetjük vissza (előjel váltás!). Tehát:

$$=(-1)^{3+1}\cdot(-1)\cdot(-1)^{n-2}=(-1)^{n+3}=(-1)^{n+1}.$$

Nem-teljes indukcióval azt a következtetést vonjuk le, hogy mindegyik a kifejtés minden nem-nulla tagja ugyanaz: $(-1)^{n+1}$. Mivel (n–1) összeadandónk van, ezért:

$$det(A)= (-1)^{n+1}\cdot(n-1).$$

———————————

Gyakorló feladat

Végezzük el az előző feladat konkretizálását! Ha hatodrendű determinánsunk van, értéke –5, a hetedrendű determináns értéke +6, vagy a nyolcadrendű determináns értéke –7 kellene hogy legyen. Ellenőrizzük!

6. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

6.0. GYAKORLÓ FELADATOK

6.0.1. Feladat:

Inverz mátrix segítségével oldjuk meg az adott egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 6y & + & 3z & = & -1\,. \end{array}$$

Megoldás:

Az adott egyenletrendszer felírható mátrixegyenlet formájában a következőképpen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ha ezeket a mátrixokat sorban megnevezzük A, X, B mátrixoknak, akkor az egyenletrendszer felírható $AX = B$ mátrixegyenlet formájában, ahonnan $X = A^{-1}B$. Meg kell tehát határoznunk az A^{-1} inverz mátrixot. Számítsuk ki először a $detA$ értékét, majd az $adjA$ mátrixot.

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 3 + (-1) + (-12) - 1 - (-6) - (-6) = 1,$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -13 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -13 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

a keresett inverz mátrix tehát

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -13 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

az X mátrix pedig

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -13 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ami azt jelenti, hogy az eredeti egyenletrendszer megoldása az $(x, y, z) = (-1,1,2)$ rendezett hármas.

6.0.2. Feladat:

Inverz mátrix segítségével oldjuk meg az adott egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & & & + & z & = & a \\ & - & 7y & + & 3z & = & b \\ x & - & y & + & z & = & c\,. \end{array}$$

Megoldás:

Az adott egyenletrendszer felírható mátrixegyenlet formájában a következőképpen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Ha ezeket a mátrixokat sorban megnevezzük A, X, B mátrixoknak, akkor az egyenletrendszer felírható $AX = B$

mátrixegyenlet formájában, ahonnan $X = A^{-1}B$. Meg kell tehát határoznunk az A^{-1} inverz mátrixot. Számítsuk ki először a $detA$ értékét, majd az $adjA$ mátrixot.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 + 7 + 6 = -1,$$

$$adjA = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & -6 & -14 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & -6 \\ 7 & 2 & -14 \end{bmatrix},$$

a keresett inverz mátrix tehát

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -3 & -1 & 6 \\ -7 & -2 & 14 \end{bmatrix},$$

az X mátrix pedig

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -3 & -1 & 6 \\ -7 & -2 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a + b - 7c \\ -3a - b + 6c \\ -7a - 2b + 14c \end{bmatrix},$$

ami azt jelenti, hogy az adott egyenletrendszer megoldása

$$x = 4a + b - 7c, \quad y = -3a - b + 6c, \quad z = -7a - 2b + 14c,$$

illetve az

$$(x, y, z) = (4a + b - 7c, \ -3a - b + 6c, \ -7a - 2b + 14c)$$

rendezett hármas.

6.0.3. Feladat:

A Cramer-szabály (determinánsok) segítségével oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & y & - & 2z & = & 1 \\ -3x & + & y & - & z & = & -6\,. \end{array}$$

Megoldás:

Az egyenletrendszerek Cramer-szabállyal történő megoldásakor meg kell határoznunk a D, Dx, Dy, Dz determinánsokat, amelyekből az $x=\dfrac{Dx}{D}$, $y=\dfrac{Dy}{D}$, $z=\dfrac{Dz}{D}$ képletek segítségével kiszámíthatjuk az x, y, z megoldásokat. A rendszer D determinánsa:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1+6+2-3+2+2=10\,,$$

míg az x, y, z változókhoz tartozó Dx, Dy, Dz determinánsokat oly módon kapjuk a D determinánsból, hogy azt az oszlopot amely az adott változóra vonatkozik lecseréljük a szabad tagok oszlopával. Így ezek a determinánsok sorban a:

$$Dx=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4+12+1-6+8+1=20\,,$$

$$Dy=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{vmatrix}=-1+24-12+3-12+8=10\,,$$

$$Dz=\begin{vmatrix}1&1&4\\2&-1&1\\-3&1&-6\end{vmatrix}=6-3+8-12-1+12=10$$

determinánsok. A fenti képleteket alkalmazva az egyenletrendszer megoldása:

$$x=\frac{20}{10}=2,\quad y=\frac{10}{10}=1,\quad z=\frac{10}{10}=1,\text{ vagyis }(x,y,z)=(2{,}1{,}1).$$

6.0.4. Feladat:

A Cramer-szabály segítségével oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccccc}x&+&4y&+&3z&-&4t&=&13\\2x&+&2y&+&5z&+&t&=&12\\3x&+&4y&+&z&+&2t&=&7\\x&+&2y&+&5z&+&t&=&13\,.\end{array}$$

Megoldás:

Számítsuk ki sorban a szükséges determinánsok értékeit:

$$D=\begin{vmatrix}1&4&3&-4\\2&2&5&1\\3&4&1&2\\1&2&5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-6&-1&9\\3&-8&-8&14\\1&-2&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&-1&9\\-8&-8&14\\-2&2&5\end{vmatrix}=108$$

$$Dx=\begin{vmatrix}13&4&3&-4\\12&2&5&1\\7&4&1&2\\13&2&5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}65&12&23&0\\-1&0&0&0\\-19&0&-9&0\\13&2&5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}65&12&23\\-1&0&0\\-19&0&-9\end{vmatrix}=-108,$$

$$Dy=\begin{vmatrix}1&13&3&-4\\2&12&5&1\\3&7&1&2\\1&13&5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-14&-1&9\\3&-32&-8&14\\1&0&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-14&-1&9\\-32&-8&14\\0&2&5\end{vmatrix}=216,$$

$$Dz=\begin{vmatrix}1&4&13&-4\\2&2&12&1\\3&4&7&2\\1&2&13&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-6&-14&9\\3&-8&-32&14\\1&-2&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&-14&9\\-8&-32&14\\-2&0&5\end{vmatrix}=216,$$

$$Dt=\begin{vmatrix}1&4&3&13\\2&2&5&12\\3&4&1&7\\1&2&5&13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-6&-1&-14\\3&-8&-8&-32\\1&-2&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&-1&-14\\-8&-8&-32\\-2&2&0\end{vmatrix}=0,$$

ekkor az x, y, z, t ismeretlenek értékei sorban:

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{-108}{108}=-1,\quad y=\frac{Dy}{D}=\frac{216}{108}=2,$$

$$z=\frac{Dz}{D}=\frac{216}{108}=2,\qquad t=\frac{Dt}{t}=\frac{0}{108}=0,$$

a megoldás pedig az $(x, y, z, t)=(-1,2,2,0)$ rendezett négyes.

6.0.5. Feladat:

A Gauss-féle eliminációs módszerrel oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x&+&y&-&z&-&t&=&0\\ 2x&+&3y&+&4z&-&3t&=&6\\ 3x&-&2y&-&2z&+&3t&=&2\\ -2x&+&4y&+&z&+&2t&=&5. \end{array}$$

Megoldás:

A rövidebb írásmód érdekében az elementáris transzformációkat nem az egész egyenletrendszeren, hanem csak a bővített mátrixán alkalmazzuk:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 31 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & -37 & 6 & -31 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 31 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & -223 & 0 & -223 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x+1-1-1=0 \\ y+6-1=6 \\ 31+t=32 \\ -223z=-223 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ t=1 \\ z=1 \end{array}$$

a megoldás tehát az $(x, y, z, t) = (1,1,1,1)$ rendezett négyes.

6.0.6. Feladat:

A Gauss-eliminációs módszerrel oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & 3z & + & t & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & 2t & = & 3 \\ -3x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 3 \\ -x & - & y & + & z & - & 2t & = & -3\,. \end{array}$$

Megoldás:

Végezzük el az elemi transzformációkat a bővített mátrixon:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & -8 & 6 & 6 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 14 & 22 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & -13 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & -13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} x+2-3+1=1 \\ y-2-1=-2 \\ 4+7t=11 \\ -2z=-2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x=1 \\ y=1 \\ t=1 \\ z=1 \end{array}$$

a megoldás tehát az $(x,y,z,t)=(1,1,1,1)$ rendezett négyes.

6.0.7. Feladat:

A Gauss-eliminációs módszerrel oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ 5x & - & y & - & 10z & = & 9\,. \end{array}$$

Megoldás:

Végezzük el az elemi transzformációkat az egyenletrendszer bővített mátrixán:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -10 & 9 \end{array}\right] \neq 3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & -20 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow 0 \neq 3.$$

Az adott egyenletrendszer tehát ellentmondásos, nincs megoldása.

6.0.8. Feladat:

A Gauss-eliminációs módszerrel oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 5 \\ 5x & - & y & + & 5z & = & 9\,. \end{array}$$

Megoldás:

Végezzük el az elemi transzformációkat az egyenletrendszer bővített mátrixán:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} x - y + 2z = 2 \\ 4y - 5z = -1 \\ 0 = 0 \end{array}$$

Az utolsó egyenlet azonosság, így nem ad semmilyen információt a megoldással kapcsolatosan. A három ismeretlen meghatározásához így két egyenletünk maradt, ami azt jelenti, hogy valamelyik ismeretlent (mindegy, hogy melyiket) paraméterként kell bevezetni. Legyen például a $z = p$, ekkor a második egyenletből $4y - 5p = -1$ és így $y = \frac{5p-1}{4}$, az első egyenletből pedig $x - \frac{5p-1}{4} + 2p = 2$ és ekkor $x = \frac{7-3p}{4}$. Ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszer egyszeresen határozatlan (egy szabadságfokú). A megoldást az $(x, z, y) = \left(\frac{7-3p}{4}, \frac{5p-1}{4}, p \right)$ rendezett hármassal adjuk meg, ahol $p \in R$.

6.0.9. Feladat:

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 7y & - & 6z & + & t & = & -1 \\ 3x & + & 5z & - & 4y & + & 2t & = & -1 \\ 9x & + & 4z & - & 2y & + & 7t & = & -2\,. \end{array}$$

Megoldás:

Ez az egyenletrendszer négy ismeretlent és három egyenletet tartalmaz, ami azt jelenti, hogy nem lehet határozott. Vagy határozatlan, vagy ellentmondásos. Az egyenletrendszer mátrixa 3×4 típusú, ami azt jelenti, hogy se determinánsa se inverz mátrixa nincs, tehát nem alkalmazható a megoldásban sem az inverz mátrixok módszere, sem a

Cramer-szabály. Így a Gauss-féle eliminációs módszert kell alkalmaznunk.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & -6 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -4 & 2 & -1 \\ 9 & 4 & -2 & 7 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & -6 & 1 & -1 \\ -1 & -9 & 8 & 0 & 1 \\ -5 & -45 & 40 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & -6 & 1 & -1 \\ -1 & -9 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az utolsó nulla sor azt jelenti, hogy a harmadik egyenlet lineárisan függ az első kettőtől, és így a négy ismeretlen meghatározásához csak két lineárisan független egyenletünk maradt. A másik két ismeretlen helyett paramétereket kell bevezetnünk. Válasszuk például, hogy $x = \alpha,\ y = \beta$. Ekkor a második sorból kapjuk hogy $-\alpha - 9\beta + 8z = 1$, ahonnan $z = \frac{1+\alpha+9\beta}{8}$ a harmadik ismeretlen. Az első egyenletből pedig a $2\alpha + 7\beta - 6\cdot\frac{1+\alpha+9\beta}{8} + t = -1$ feltételt kapjuk, ahonnan a negyedik ismeretlen a $t = -\frac{1+5\alpha+\beta}{4}$. Az egyenletrendszer megoldását most a következő rendezett négyessel írhatjuk fel:

$$(x, y, z, t) = \left(\alpha, \beta, \frac{1+\alpha+9\beta}{8}, -\frac{1+5\alpha+\beta}{4}\right), \text{ ahol } \alpha, \beta \in R.$$

6.0.10. Feladat:

Oldjuk meg a következő homogén egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2z & + & 2y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 3z & = & 0\,. \end{array}$$

Megoldás:

Az egyenletrendszert homogénnek nevezzük, ha minden szabad tagja nullával egyenlő. Ha ezt az egyenletrendszert a determinánsok módszerével oldjuk, akkor nyilvánvaló, hogy minden ismeretlen determinánsa nulla, ugyanis mindegyik tartalmaz egy nulla-oszlopot, vagyis $Dx = Dy = Dz = 0$. Mivel érvényesek az $x = \frac{Dx}{D} = \frac{0}{D}$, $y = \frac{Dy}{D} = \frac{0}{D}$, $z = \frac{Dz}{D} = \frac{0}{D}$ formulák, láthatjuk, hogy az x, y, z ismeretlenek csak a $D \neq 0$ feltétel mellett értelmezettek, és ekkor $x = y = z = 0$. Az ilyen $(x, y, z) = (0,0,0)$ megoldást triviális megoldásnak nevezzük. Ha pedig a $D = 0$, akkor a hányadosok nem értelmezettek, a $D \cdot x = Dx,\ \ D \cdot y = Dy,\ \ D \cdot z = Dz$ egyenletek pedig $0 \cdot x = 0,\ \ 0 \cdot y = 0,\ \ 0 \cdot z = 0$ alakot öltenek, melyeknek számtalan sok megoldásuk van, tehát $x \in R,\ y \in R,\ z \in R$. Ebben az esetben az egyenletrendszer határozatlan. Ha a határozatlan megoldásokat is ki kell számítanunk, akkor a Gauss-féle eliminációs módszerrel kaphatunk paraméteres alakot a megoldásokra. Ennél az egyenletrendszernél:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1\,,$$

a rendszer határozott, egyetlen megoldása a triviális megoldás, mert:

$x = \frac{0}{-1} = 0$, $y = \frac{0}{-1} = 0$, $z = \frac{0}{-1} = 0$, így $(x, y, z) = (0,0,0)$ a megoldás.

6.0.11. Feladat:

Oldjuk meg a következő homogén egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0\,. \end{array}$$

Megoldás:

Számítsuk ki először a rendszer determinánsát, ettől függ ugyanis, hogy a rendszer határozott-e, vagy határozatlan:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ez azt jelenti, hogy az adott egyenletrendszer határozatlan, a megoldást tehát a Gauss-féle eliminációs módszerrel kell keresnünk. Írjuk fel a rendszer bővített mátrixát, és végezzük el a sorain az elemi transzformációkat:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Az utolsó sornak megfelelő egyenletből semmit sem tudunk kiszámolni, a harmadik sornak megfelelő $1\cdot z=0$ egyenletből $z=0$, a második sorból kapjuk hogy $-1\cdot y=0$ illetve $y=0$, és az első egyenletből $x+2y+z+t=0$. Ha ebbe az egyenletbe behelyettesítjük az $y=0$ és $z=0$ kiszámított értékeket, akkor az $x+t=0$ egyenletet kapjuk, amelyben két ismeretlen szerepel. Ha az egyik ismeretlent paraméternek válasszuk, például legyen $x=p$, akkor a másik, a $t=-p$. Az egyenletrendszer megoldását megadhatjuk a következő rendezett négyessel: $(x,y,z,t)=(p,0,0,-p)$ ahol $p\in R$.

6.0.12. Feladat:

A valós a paraméter értékeitől függően diszkutáljuk a következő egyenletrendszer megoldásait:

$$\begin{array}{ccccccc}(a+1)x & - & 3y & + & z & = & -1\\ ax & + & y & + & z & = & 6\\ 3x & + & y & - & 2z & = & -1\end{array}.$$

Megoldás:

A Cramer-szabályból, ahol az x,y,z ismeretleneket az $x=\dfrac{Dx}{D}$ stb. hányadosokból számítjuk, megállapítható hogy az egyenletrendszer csak akkor nem határozott, amikor ezek az osztások nem értelmezettek, vagyis ha $D=0$. Ezért vizsgáljuk meg mindig elsőnek a rendszer determinánsát, milyen paraméter értékekre lenne nulla:

$$D=\begin{vmatrix} a+1 & -3 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-2a-2-9+a-3-a-1-6a=-8a-15\,.$$

Számítsuk most ki, milyen a paraméter értékekre lesz a determináns nulla:

$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad -8a-15=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-\frac{15}{8}$, tehát a hányadosok nem értelmezettek az $a=-\frac{15}{8}$ érték esetén.

Diszkússzió:

1) $(\forall a \in R)\left(a \neq -\frac{15}{8}\right) \quad \Rightarrow \quad D \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ a rendszer határozott.

2) Ha $a=-\frac{15}{8} \quad \Rightarrow \quad$ a rendszer ellentmondásos.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7/8 & -3 & 1 & -1 \\ -15/8 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -7/8 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 7 \\ 5/4 & -5 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -7/8 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & -20 & 0 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -7/8 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad 0 \neq 23.$$

6.0.13. Feladat:

A valós a paraméter értékeitől függően diszkutáljuk és oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & ay & + & z & = & 5 \\ 5x & - & y & + & 5az & = & 9\,. \end{array}$$

Megoldás:

Vizsgáljuk ki először a rendszer determinánsát:

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & a & 1\\ 5 & -1 & 5a\end{vmatrix}=5a^2-5-6-10a+1+15a=$$

$$=5a^2+5a-10=5\left(a^2+a-2\right).$$

Számítsuk ki a valós a paraméter mely értékére lesz a determináns nullával egyenlő
:

$$\begin{aligned}D=0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2+a-2=0\\ &\Leftrightarrow \quad (a-1)(a+2)=0\\ &\Leftrightarrow \quad a_1=1\ ,\ \ a_2=-2.\end{aligned}$$

<u>Diszkússzió:</u>

1) $(\forall a\in R)(a\neq 1\ \wedge\ a\neq -2)\ \Rightarrow\ D\neq 0\ \Rightarrow$ a rendszer határozott. Ezt a határozott megoldást vagy a Cramer-szabály vagy a Gauss-féle eliminációs módszer segítségével határozhatjuk meg. A nagyobb egyenletrendszerek esetében kerüljük a magasabb rendű determinánsok számítását, de ebben az esetben könnyen alkalmazható:

$$D=5(a-1)(a+2),$$

$$Dx=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 1\\ 9 & -1 & 5a\end{vmatrix}=10a^2-9-10-18a+2+25a=$$

$$=10a^2+7a-17=10(a-1)\left(a+\frac{17}{10}\right)=(a-1)(10a+17),$$

$$Dy=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 1\\ 5 & 9 & 5a\end{vmatrix}=25a+10+54-50-9-30a=$$

$$=5-5a=-5(a-1)\ ,$$

$$Dz=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & a & 5\\ 5 & -1 & 9\end{vmatrix}=9a-25-6-10a+5+27=1-a\ ,$$

ezért:

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{(a-1)(10a+17)}{5(a-1)(a+2)}=\frac{10a+17}{5(a+2)},$$

$$y=\frac{Dy}{D}=\frac{-5(a-1)}{5(a-1)(a+2)}=\frac{-1}{a+2},$$

$$z=\frac{Dz}{D}=\frac{1-a}{5(a-1)(a+2)}=\frac{-1}{5(a+2)},$$

vagyis a megoldás a következő rendezett hármas:

$$(x,y,z)=\left(\frac{10a+17}{5(a+2)},\frac{-1}{a+2},\frac{-1}{5(a+2)}\right)\ \text{ahol}\ \ a\in R\setminus\{-2,1\}.$$

2) Ha $a=1$ $\Rightarrow$ a rendszer egyszeresen határozatlan.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 5\\ 5 & -1 & 5 & 9\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 4 & -5 & -1\\ 0 & 4 & -5 & -1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 4 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

a második sorból következik, hogy $4y-5z=-1$, ha ebben az egyenletben azt választjuk pl. hogy $z=p$ a paraméter, akkor $y=\frac{5p-1}{4}$ következik. Az első egyenletből: $x-y+2z=2$ pedig az:

$$x=2+\frac{5p-1}{4}-2p=\frac{8+5p-1-8p}{4}=\frac{7-3p}{4},$$

összefüggés következik, vagyis a megoldás az

$$(x,y,z)=\left(\frac{7-3p}{4},\frac{5p-1}{4},p\right)$$

rendezett hármas, ahol $p\in R$.

3) Ha $a=-2$ $\Rightarrow$ a rendszer ellentmondásos.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 1 & 5\\ 5 & -1 & -10 & 9\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -5 & -1\\ 0 & 4 & -20 & -1\end{array}\right]\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right]\Rightarrow\ 0\neq 3.$$

6.0.14. Feladat:

A valós m paraméter értékeitől függően diszkutáljuk a következő egyenletrendszer megoldásait:

$$\begin{array}{ccccccc}(m-1)x & & & + & z & = & 0\\ (m+1)x & - & my & - & z & = & -1\\ & & y & + & mz & = & 1\,.\end{array}$$

Megoldás:

Vizsgáljuk ki először, hogy a valós m paraméter mely értékeire lesz a rendszer determinánsa nulla:

$$D=\begin{vmatrix} m-1 & 0 & 1 \\ m+1 & -m & -1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m-1 & 0 & 1 \\ m+1 & 0 & m^2-1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ m+1 & m^2-1 \end{vmatrix}=$$

$$=(m+1)-(m-1)(m^2-1)=$$

$$=(m+1)-(m-1)^2(m+1)=(m+1)\left(1-(m-1)^2\right)=$$

$$=(m+1)(2m-m^2)=m(m+1)(2-m)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1=0,\ m_2=-1,\ m_3=2.$$

Diszkússzió:

1) $(\forall m\in R)(m_1\neq 0 \ \wedge\ m_2\neq -1 \ \wedge\ m_3\neq 2) \quad\Rightarrow\quad$ a rendszer határozott.

2) Ha $m=0 \quad\Rightarrow\quad$ a rendszer ellentmondásos.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\Rightarrow\ 0\neq -1.$$

3) Ha $m=-1 \quad\Rightarrow\quad$ a rendszer ellentmondásos.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]\Rightarrow\ 0\neq 2.$$

4) Ha $m=2 \quad \Rightarrow \quad$ a rendszer ellentmondásos.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow 0 \neq 1.$$

6.0.15. Feladat:

A valós m paraméter értékeitől függően diszkutáljuk és a határozatlan esetben oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccccc} mx & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & my & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & mt & = & 0\,. \end{array}$$

Megoldás:

Vizsgáljuk ki a rendszer determinánsát:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1-m & m-1 & 0 & 0 \\ 1-m & 0 & m-1 & 0 \\ 1-m^2 & 1-m & 1-m & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1-m & m-1 & 0 \\ 1-m & 0 & m-1 \\ 1-m^2 & 1-m & 1-m \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1-m & 0 & 0 \\ 1-m & 1-m & m-1 \\ 1-m^2 & 2-m-m^2 & 1-m \end{vmatrix} =$$

$$=-1(1-m)\begin{vmatrix} 1-m & m-1 \\ 2-m-m^2 & 1-m \end{vmatrix}=$$

$$=(m-1)\begin{vmatrix} 1-m & 0 \\ 2-m-m^2 & 3-2m-m^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(m-1)(1-m)\left(3-2m-m^2\right)=$$
$$=(m-1)^2\left(m^2+2m-3\right)=$$
$$=(m-1)^2(m+3)(m-1)=$$
$$=(m-1)^3(m+3).$$

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-1)^3(m+3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1=1,\ m_2=-3\,.$$

Diszkússzió:

1) $(\forall m \in R)(m \neq 1 \ \wedge \ m \neq -3) \quad \Rightarrow \quad$ a rendszer határozott.

2) Ha $m=1 \quad \Rightarrow \quad$ a rendszer háromszorosan határozatlan (három szabadságfokkal).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

Ebben az esetben három ismeretlent kell paraméternek választani, legyenek ezek az $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$. Ekkor az $x+y+z+t=0$ első egyenletből $t=-\alpha-\beta-\gamma$, a megoldás tehát az

$$(x, z, y, t) = (\alpha, \beta, \gamma, -\alpha-\beta-\gamma)$$

rendezett négyes, ahol $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

3) Ha $m = -3$ $\Rightarrow$ a rendszer egyszeresen határozatlan (egy szabadságfokkal).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -3x + y + z + t = 0 \\ &\Rightarrow \quad x - z = 0 \\ &\Rightarrow \quad x - y = 0 \\ &\Rightarrow \quad 0 = 0 \end{aligned}$$

Legyen $x = p$, akkor a második és harmadik egyenletekből következik, hogy $y = z = p$, az első egyenletből pedig $t = p$, vagyis a megoldás az $(x, y, z, t) = (p, p, p, p)$ rendezett négyes, ahol $p \in R$.

6.1. ÍRÁSBELI VIZSGAFELADATOK

6.1.1. Feladat

Vizsgálja ki az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát a Gauss-féle eliminációs módszer alkalmazásával. Határozatlanság esetén adja meg az általános megoldást, határozottság esetén oldja meg az egyenletrendszert, ellentmondásos rendszernél mutasson rá, hol az ellentmondás!

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & u & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & u & = & 9 \\ x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & 12 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & + & 2u & = & 15 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & + & 4u & = & 21 \end{array}$$

Megoldás:

Induljunk el a rendszer bővített mátrixának felírásával. Az első lépésben „megsemmisítjük” az első oszlop elemeit a másodiktól ötödik sorig, az első sor egyesével: az első sor –2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, majd az első sort egyszerűen kivonjuk a harmadik sorból, végül az első sor –3-szorosát a negyedik és az ötödik sorhoz is hozzáadjuk.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 15 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim$$

A második körben először második sort szorozzuk –1-gyel, majd ezt az egyest felhasználva „megsemmisítjük" a második oszlop elemeit a harmadik, negyedik és ötödik sorban: az első ciklusban alkalmazott szorzás-hozzáadás technikájával a mátrix negyedik sora teljesen megsemmisül.

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Azonnal belátható, hogy a harmadik ciklusban a harmadik sor megsemmisíti az ötödik sort. Mindössze három nem-nulla sorunk marad. Ez a három sor három független egyenletet jelent, vagyis a rendszer megoldható. A rendszer mátrixának és bővített mátrixának a rangja is 3. Mivel az ismeretlenek száma 4, így a rendszer határozatlan 4–3=1 szabadságfokkal. Most a mátrixos formából visszatérünk az egyenletek skaláris alakjára:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & u & = & 6 \\ & & y & - & z & + & u & = & 3 \\ & & & & z & + & u & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

Válasszuk az u ismeretlent szabad paraméternek, ezek után a többi ismeretlen kiszámítható ennek a paraméternek a függvényében:

$$z = 3 - u,$$
$$y = 3 + z - u = 3 + 3 - u - u = 6 - 2u,$$
$$x = 6 - y - z - u = -3 + 2u.$$

Az általános megoldás az alábbi rendezett négyes (illetve: rendezett négyesek lineáris kombinációja) formájában jegyezhető le:

$$(x, y, z, u) = (-3 + 2u,\ 6-2u,\ 3-u,\ u) =$$
$$= (-3, 6, 3, 0) + u\,(2, -2, -1, 1).$$

Gyakorló feladat

Vizsgálja ki az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát a Gauss-féle eliminációs módszer alkalmazásával. Határozatlanság esetén adja meg az általános megoldást, határozottság esetén oldja meg az egyenletrendszert, ellentmondásos rendszernél mutasson rá, hol az ellentmondás!

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & u & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & u & = & 12 \\ x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & 9 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & + & 4u & = & 15 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & + & 2u & = & 18 \end{array}$$

6.1.2. Feladat

Vizsgálja ki az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát a Gauss-féle eliminációs módszer alkalmazásával. Határozatlanság esetén adja meg az általános megoldást, határozottság esetén oldja meg az egyenletrendszert, ellentmondásos rendszernél mutasson rá, hol az ellentmondás!

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & u & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & u & = & 9 \\ x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & 12 \\ 2x & + & y & + & 2z & + & u & = & 8 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & + & 4u & = & 21 \end{array}.$$

Megoldás:

A bővített mátrixon elvégzett elemi mátrix-transzformációk után, elhagyva a nulla-sorokat az alábbi állapot adódik:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 21 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Azonnal belátható, hogy a bővített mátrix rangja és a rendszer mátrixának rangja is 4, tehát a rendszer megoldható. Ugyanakkor, az ismeretlenek száma is 4, tehát nincs „szabadságfok”, vagyis a rendszer határozott.

A megoldást, részben az 1. feladatban alkalmazott technika alkalmazásával nyerjük. Az utolsó egyenletből $u = 2$, majd behelyettesítéssel a harmadik egyenletbe $z = 1$ adódik, ugyanígy a második egyenletből $y = 2$, és végül az első egyenletből $x = 1$. Rendezett négyes formájában felírva a megoldás:

$$(1, 2, 1, 2).$$

Gyakorló feladat

Vizsgálja ki az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát a Gauss-féle eliminációs módszer alkalmazásával. Határozatlanság esetén adja meg az általános megoldást, határozottság esetén oldja meg az egyenletrendszert, ellentmondásos rendszernél mutasson rá, hol az ellentmondás!

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & u & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & u & = & 12 \\ x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & 9 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & + & 2u & = & 18 \\ 2x & + & y & + & 2z & + & u & = & 10 \end{array}.$$

6.1.3.

Feladat

Vizsgálja ki az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát a Gauss-féle eliminációs módszer alkalmazásával. Határozatlanság esetén adja meg az általános megoldást, határozottság esetén oldja meg az egyenletrendszert, ellentmondásos rendszernél mutasson rá, hol az ellentmondás!

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & u & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & 4u & = & 16 \\ x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & 11 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & + & 4u & = & 16 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & + & 5u & = & 22 \end{array}$$

Megoldás:

A bővített mátrixon elvégzett elemi mátrix-transzformációk után, elhagyva a nulla-sorokat az alábbi állapot adódik:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 16 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 22 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Teljesen azonos technikát alkalmaztunk, mint az tanulmányozott feladatok megoldásakor. Kizárólag elemi mátrix-transzformációkat alkalmaztunk és a „megsemmisített" sorokat elhagytuk Igaz itt csak egy sor maradt el, ám egy sorban a rendszer mátrixának elemei eltűntek, de a szabad tag megmaradt! Pontosan ez jelenti a rendszer megoldhatatlanságát. Ha egyenletek formájában írjuk fel ezt a mátrixot, akkor mit jelent az utolsó egyenlet: „ $0 = -1$ ”? Természetesen ez értelmetlenség. Matematikailag: a bővített mátrix rangja 4, a rendszer mátrixának rangja 3 és a Kronecker–Capelli-féle tétel alapján ez azt jelenti, hogy a rendszernek **nincs megoldása.**

Gyakorló feladat

Vizsgálja ki az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát a Gauss-féle eliminációs módszer alkalmazásával. Határozatlanság esetén adja meg az általános megoldást, határozottság esetén oldja meg az egyenletrendszert, ellentmondásos rendszernél mutasson rá, hol az ellentmondás!

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & u & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & u & = & 12 \\ x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & 9 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 5u & = & 10 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & + & 4u & = & 15 \end{array}.$$

6.1.4. Feladat

Gauss-módszerrel oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{array}$$

Megoldás:

Induljunk el az első egyenletnek a többi egyenletekből való egyszerű kivonásával:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_4 &= -2 \\ 4x_4 &= 4. \end{aligned}$$

A második és harmadik egyenletből is $x_4 = 1$ adódik. Visszatérve az első egyenletbe, egyetlen háromismeretlenes egyenlet marad: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Ez két szabadságfokot jelent. A három ismeretlen közül bármelyik kettőt szabadon választhatjuk, de a harmadik ismeretlent ezzel már meghatároztuk.

Ha a választásunk $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, akkor $x_1 = 2\alpha - \beta$.

Az általános megoldás: $(2\alpha - \beta,\ \alpha,\ \beta,\ 1)$
vagy: $\alpha\,(2, 1, 0, 0) + \beta\,(-1, 0, 1, 0) + (0, 0, 0, 1)$.

Gyakorló feladat

Vizsgálja ki az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát a Gauss-féle eliminációs módszer alkalmazásával.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= -1 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

6.1.5. Feladat

Végezze el az alábbi egyenletrendszer diszkusszióját az a paraméter függvényében. (Hogyan függ az egyenletrendszer megoldhatósága az a paraméter értékeitől?)

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 4 \\ 2x + ay + 4z &= 5 \\ 5x + y - 3az &= 9. \end{aligned}$$

Megoldás:

A rendszer determinánsa: $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & a & 4 \\ 5 & 1 & -3a \end{vmatrix} = -9a^2 + 17a + 26.$

A determináns eltűnik, ha $a_1 = -1$, vagy ha $a_2 = \dfrac{26}{9}$.

a) A rendszer határozott a paraméter minden valós értéke esetén, kivéve a fent kiszámított két számot!

b) Ám mi van akkor, ha mégis $a_1 = -1$? Vegyük észre, hogy a harmadik sor egyenlő az első két sor összegével, tehát így, azok kivonásával a harmadik sor „megsemmisíthető”

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Következmény: a rendszer megoldható, mert a bővített mátrix rangra és a rendszer mátrixának a rangja is 2, de ez 1 szabadságfokot hagy! Keressük az általános megoldást. Végezzünk el még két lépést az elemi mátrix-transzformációk közül:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & -7 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Válasszuk tetszőlegesen a z ismeretlent, majd a második egyenletből $y = 2z - 1$ következik, és végül az első egyenletből adódik: $x = -3y + 5z - 1 = 2 - z$.

Az általános megoldás tehát:

$$(x, y, z) = (2 - z, 2z - 1, z) = (2, -1, 0) + z(-1, 2, 1).$$

c) Most megvizsgáljuk, mi van akkor, ha $a_2 = \dfrac{26}{9}$.

A bővített mátrix és a rendszer mátrixának nem egyezik!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 26/9 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & -26/3 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 18 & 26 & 36 & 45 \\ 15 & 3 & -26 & 27 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ebben az esetben az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Gyakorló feladat

Végezze el az alábbi egyenletrendszer diszkusszióját az *a* paraméter függvényében. (Hogyan függ az egyenletrendszer megoldhatósága az *a* paraméter értékeitől?)

$$\begin{aligned} x + ay \quad -a\,z - (a-1)\,u &= 1 \\ (a-1)x + ay + (a-1)\,z \quad - u &= 2 \\ \underline{(a-1)x + ay \quad - z - (a-1)u = 1}&. \end{aligned}$$

6.1.6.

Feladat

Végezze el az alábbi egyenletrendszer diszkusszióját az *a* paraméter függvényében. (Hogyan függ az egyenletrendszer megoldhatósága az *a* paraméter értékeitől?)

$$\begin{aligned} 2x \quad - y - a\,z &= 1 \\ 4x - (a+1)\,y - 2\,z &= 2a \\ \underline{(3a-1)x \quad - y \quad - z = a}&. \end{aligned}$$

Megoldás:

A rendszer determinánsa:

$$D(a)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -a \\ 4 & -(a+1) & -2 \\ (3a-1) & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3a^3-2a^2+13a-8\,.$$

A nyert polinom racionális gyökeit keresve megállapítjuk, hogy $D(1) = 0$, és ez lehetővé teszi a következő felbontást:

$$-3a^3-2a^2+13a-8=(a-1)(-3a^2-5a+8)=-3(a-1)^2\left(a+\frac{8}{3}\right).$$

$$D(a)=0 \Leftrightarrow a=1 \vee a=-\frac{8}{3}.$$

Először is leszögezzük, hogy a rendszer határozott a minden olyan értékére amelyre $D(a) \neq 0$. Vizsgáljuk ki mi történik a $D(a) = 0$ esetekben.

a) Ha $a = 1$ a rendszer határozatlan kétszeres szabadságfokkal:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Az történt, hogy a Gauss-módszerrel „megsemmisítettünk” két sort is, és mindössze egy egyenlet maradt: $2x-y-z=1$. Ha x és y ismeretleneket szabadon választjuk, akkor $z = 2x-y-1$, adódik, és így az általános megoldás:

$$(x, y, z) = (x, y, 2x-y-1) = x\,(1, 0, 2) + y\,(0, 1, -1) + (0, 0, -1).$$

b) Ha $a=-\frac{8}{3}$ az egyenletrendszer nem megoldható, mert a bővített mátrix rangja nagyobb a rendszer mátrixának rangjánál:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & \frac{8}{3} & 1 \\ 4 & -2 & -2 & -\frac{16}{3} \\ 2 & -1 & -1 & -\frac{8}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -18 & 37 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Gyakorló feladat

Végezze el az $\boldsymbol{S}$ egyenletrendszer diszkusszióját k paraméter függvényében.

$$\boldsymbol{S}: \quad \begin{aligned} 3k\,x + (3k-7)\,y + (k-5)\,z &= k-1 \\ 4k\,x + (5k-7)\,y + (2k-5)\,z &= k-1 \\ (2k-1)\,x + (4k-1)\,y + 2k\,z &= k+1 \end{aligned}$$

6.1.7. Feladat

Végezze el az egyenletrendszer diszkussziójának az a paraméter függvényében.

$$\begin{aligned} a\,x + y + z &= 1 \\ x + a\,y + z &= a \\ x + y + a\,z &= a^2. \end{aligned}$$

Megoldás:

A rendszer determinánsa: $D(a) = (a-1)^2(a+2)$.

a) Ha $a \neq 1$ és $a \neq -2$ az rendszer határozott, és a megoldása:

$$x = -\frac{a+1}{a+2}, \quad y = \frac{1}{a+2}, \quad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

b) Ha $a = -2$ nem létezik megoldás – a rendszer ellentmondásos.

c) Ha $a = 1$ a rendszer határozatlan, a szabadságfoka 2. Vizsgálja meg az egyenletrendszert ha behelyettesíti az $a = 1$ értéket. Csak egy egyenlet adódik, és ez: $x + y + z = 1$.

Határozza meg az általános megoldást az előző feladatban bemutatott módon!

Gyakorló feladat

Végezze el az egyenletrendszer diszkusszióját a és c paraméterektől függően.

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x + cy + z &= 3 \\ x + 2cy + z &= 4. \end{aligned}$$

6.1.8.

Feladat

Végezze el az egyenletrendszer diszkusszióját a paramétertől függően. Határozatlanság esetén adja meg az általános megoldást!

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ 2x + y + 2az &= 6 \\ -x - y - az &= -4 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2a \\ -1 & -1 & -a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = (a-1)(a+1).$$

Ha $a = 1$ a rendszer határozatlan. A szabadságfok 1. Az általános megoldás: $(2-\lambda, 2, \lambda)$.

Ha $a = -1$, akkor a rendszernek nincs megoldása.

Gyakorló feladat

Végezze el az egyenletrendszer diszkusszióját a két paramétertől függően. Ha létezik valamilyen megoldás, azt is számítsa ki.

$$\begin{aligned} x &+ 2y &- 3z &= a \\ x &+ 3y &- 3z &= 2 \\ 2x &+ by &- 6z &= 1 \end{aligned}$$

6.1.9.

Feladat

Végezze el az egyenletrendszer diszkusszióját a paramétertől függően. Határozatlanság esetén adja meg az általános megoldást!

$$\begin{aligned} 2ax - 3y &= 3 - a \\ 3x - 2y &= -1 \\ 4x - ay &= -2. \end{aligned}$$

Megoldás:

Észrevesszük, hogy ez kétismeretlenes egyenletrendszer. Kiszámítható a bővített mátrix determinánsa:

$$\left|\begin{array}{cc:c} 2a & -3 & 3-a \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2-a & -1 \end{array}\right| = a^2 - 9a + 18.$$

Mit kezdjünk ezzel a determinánssal?

Ha ez a determináns nem nulla, akkor a bővített mátrix rangja 3, de a rendszer mátrixának rangja (2 ismeretlenünk van!) legfeljebb 2. Tehát, ha ez a determináns 0, akkor az egyenletrendszer megoldható. Ez az eset áll fenn, ha $a = 3$ és ha $a = 6$.

A műveletek közvetlen elvégzése után a következő megoldások adódnak:

Ha a =3 a megoldások $x = 1$ és $y = 1$, vagyis (1, 1).
Ha a =6 a megoldások $x = –1/5$ és $y = 1/5$, vagyis (–1/5, 1/5).
Egyébként, tehát ha $a \neq 3$ és $a \neq 6$ nincs megoldás.

Gyakorló feladat

Végezze el az egyenletrendszer diszkusszióját k paraméter függvényében.

$$\begin{aligned}(4k-1)x + 2ky + (2k-1)z &= k+1\\ (5k-7)x + (2k-5)y + 4kz &= 0\\ (3k-7)x + (k-5)y + 3kz &= k-1.\end{aligned}$$

6.1.10.

Feladat

Az alábbi megoldott feladatsor követelményei:

Végezze el az egyenletrendszer megoldhatóságának vizsgálatát (diszkusszióját) a és b paraméterektől függően.

A válaszok mindegyik egyenletrendszerrel kapcsolatban közvetlenül a feladat mellett állnak. Ellenőrizze ezeket a válaszokat és keresse meg az esetleges általános vagy konkrét megoldásokat!

Az egyenletrendszer	A megoldás:
A. $\begin{aligned}3x + ay + z &= 11\\ x - y + 2z &= 7\\ 2x + 3y - z &= b\end{aligned}$	$\Delta = 5a - 10, \Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a = 2.$ $a = 2 \wedge b = 4 \Rightarrow$ a rendszer határozatlan, $a = 2 \wedge b \neq 4 \Rightarrow$ a rendszer ellentmondásos, $a \neq 2 \Rightarrow$ a rendszer határozott minden b-re.
B. $\begin{aligned}2x + 3y - z &= b\\ x + y + 2z &= 9\\ ax + 4y + z &= 13\end{aligned}$	$\Delta = 7a - 21, \Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a = 3.$ $a = 3 \wedge b = 4 \Rightarrow$ a rendszer határozatlan, $a = 3 \wedge b \neq 4 \Rightarrow$ a rendszer ellentmondásos, $a \neq 3 \Rightarrow$ a rendszer határozott minden b-re.
C. $\begin{aligned}4x + y + az &= 3\\ -x + 2y + z &= 3\\ 3x + 3y - z &= b\end{aligned}$	$\Delta = -9a - 18, \Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a = -2.$ $a = -2 \wedge b = 6 \Rightarrow$ a rendszer határozatlan, $a = -2 \wedge b \neq 6 \Rightarrow$ a rendszer ellentmondásos, $a \neq -2 \Rightarrow$ a rendszer határozott minden b-re.

D.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & ay & + & z & = & 11 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 7 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & b \end{array}$$

$\Delta = 5a - 15, \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0 \Leftrightarrow a = 3.$
$a = 3 \wedge b = 4 \Rightarrow$ a rendszer határozatlan,
$a = 3 \wedge b \neq 4 \Rightarrow$ a rendszer ellentmondásos,
$a \neq 3 \Rightarrow$ a rendszer határozott minden b-re.

E.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ ax & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 4x & + & 3y & + & z & = & b \end{array}$$

$\Delta = -5a + 5, \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0 \Leftrightarrow a = 1.$
$a = 1 \wedge b = 13 \Rightarrow$ a rendszer határozatlan,
$a = 1 \wedge b \neq 13 \Rightarrow$ a rendszer ellentmondásos,
$a \neq 1 \Rightarrow$ a rendszer határozott minden b-re.

F.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & = & b \\ 3x & + & 3y & + & az & = & 6 \end{array}$$

$\Delta = -9a - 9, \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0 \Leftrightarrow a = -1.$
$a = -1 \wedge b = 3 \Rightarrow$ a rendszer határozatlan,
$a = -1 \wedge b \neq 3 \Rightarrow$ a rendszer ellentmondásos,
$a \neq -1 \Rightarrow$ a rendszer határozott minden b-re.

Gyakorló feladat

Végezze el az egyenletrendszer diszkusszióját a két paramétertől függően. Ha létezik valamilyen megoldás, azt is számítsa ki.

A.
$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & - & 4z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 4x & + & 2y & - & 3z & = & b \end{array}$$

B.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 3z & = & b \\ x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ x & - & y & + & az & = & 14 \end{array}$$

6.1.11. Feladat

Végezze el az $\mathcal{S}$ egyenletrendszer diszkusszióját k paramétertől függően.

$$\mathcal{S}: \quad \begin{array}{lllll} (1+k)x & +y & +z & +u & =1 \\ x & +(1+k)y & +z & +u & =k \\ x & +y & +(1+k)z & +u & =k^2 \\ x & +y & +z & +(1+k)u & =k^3 \end{array}$$

Megoldás:

A rendszer determinánsa $\Delta = k^3(4+k)$. Azonnal megállapítható: $k \neq 0$ és $k \neq -4$ esetén a rendszer teljesen meghatározott (gyakorlatként számítsa ki ezt a megoldást).

Vizsgáljuk ki a $k = 0$ esetet. Belátható, hogy ekkor csak egy egyenlet létezik: $x + y + z + u = 1$, és ez 3 szabadságfokkal rendelkező meghatározatlanságot jelent. Ha szabadon választjuk y, z és u ismeretleneket, akkor az általános megoldás: $(1-y-z-u,\ y,\ z,\ u)$.

Most a $k = -4$ esetet vizsgáljuk a rendszer bővített mátrixán:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -27 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{array}\right].$$

A lépést mindegyik vízszintes sornak a negyedik sorhoz való hozzáadásával tettük meg. Azonnal kiviláglik a rendszer ellentmondássossága, tehát nem létezik megoldás.

Gyakorló feladat

Végezze el az egyenletrendszer diszkusszióját a két paramétertől függően. Ha létezik valamilyen megoldás, azt is számítsa ki..

$$\begin{array}{rrrl} px & +qy & +z & =1 \\ x & +pqy & +z & =q \\ x & +qy & +pz & =1 \end{array}$$

6.1.12.

Feladat

Végezze el az egyenletrendszer p szerinti diszkusszióját.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
(p-3)x & + & y & - & z & = & 0\\
-2x & + & (2p-4)y & - & 2z & = & 0\\
(p-2)x & + & 2y & & & = & 0
\end{array}$$

Megoldás:

A rendszer determinánsa: $D = 2(p-1)(p-2)$.
Minden $p \neq 1$ és $p \neq 2$ esetén a rendszer meghatározott..

A $p = 1$ esetben a rendszer mátrixa:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megállapítjuk az 1-szeres szabadságfokú határozatlanságot. Válasszuk tetszőlegesen: $y = k$, akkor a többi ismeretlenre $x = 2k$ és $z = -3k$ adódik. Az általános megoldás: $(2k, k, -3k) = k(2, 1, -3)$.

A $p = 2$ esetben a rendszer mátrixa:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Szintén 1 szabadságfokú határozatlan rendszert kapunk. Igaz, feltétlenül $y = 0$, de szabadon választható például $x = k$, és így $z = -k$ adódik, tehát az általános megoldás: $(k, 0, -k) = k(1, 0, -1)$.

Gyakorló feladat

Határozza meg k paraméter értékeit úgy, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen! (Diszkusszió!)

$$kx+(k-5)y=5,\quad 4x+(k+4)y=k+8,\ (4-k)x-3y=k+3\,.$$

6.1.13.

Feladat

Végezze el az egyenletrendszer diszkusszióját a két paramétertől (a és b) függően. Határozatlanság esetén adja meg az általános megoldást.

$$\begin{aligned} x \quad &+2y \quad -3z \quad = a \\ x \quad &+3y \quad -3z \quad = 2 \\ 2x \quad &+by \quad -6z \quad = 1 \end{aligned}$$

Megoldás:

A b paramétertől függetlenül a rendszer determinánsa 0. (Az első és a harmadik oszlop elemei arányosak). Ezek szerit a rendszer sohasem lesz meghatározott. Vizsgáljuk a bővített mátrixot:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & b & -6 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & 0 & 2-a \\ 0 & b-4 & 0 & 1-2a \end{array}\right].$$

A lépést az első vízszintes sornak a második sorból való kivonásával, valamint az első sor kétszeresének a harmadik sorból történő kivonásával végeztük el..

Azonnal megállapítható, hogy az ellentmondásosság csak úgy kerülhető el, ha a második egyenletből nyert y = 2 – a kielégíti a harmadik egyenletet is, vagyis teljesülnie kell a következő feltételnek:

$$(b-4)(2-\mathrm{a}) = 1 - 2a.$$

Ez a feltétel egyenértékű az alábbi követelményekkel (ezeket a követelményeket is az előbbi feltételből nyertük *a* illetve *b* explicit kiszámításával:

$$a = \frac{9-2b}{6-b} \quad \text{vagy} \quad b = \frac{9-6a}{2-a}$$

1. Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor ez a követelmény teljesül! Ez azt jelenti, hogy a harmadik egyenlet eltűnik. Az első két egyenletből pedig a következők adódnak:

$$x + 2y - 3z = a \quad \text{és} \quad y = 2 - a,$$

ami a rendszer 1 szabadságfokú határozatlanságát jelenti. Válasszuk tetszőlegesen z ismeretlent, ekkor $x = 3a + 3z - 4$.

Az általános megoldás:

$$(3a + 3z - 4, \quad 2 - a, \quad z\ ).$$

2. Ha a kitűzött feltétel nem teljesül, vagyis ha

$$(b-4)(2-\mathrm{a}) \neq 1 - 2a,$$

akkor az adott egyenletrendszer ellentmondásos (nincs megoldása).

Gyakorló feladat

Végezze el az egyenletrendszer *a* szerinti diszkusszióját.

$$2\,x + 3\,y - 4\,z = 1$$

$$a\,x + 2\,y + 2\,z = 5$$

$$\underline{3\,x + 5ay - 2\,z = 6}.$$

6.1.14.

Feladat

Létezik-e megoldása az alábbi egyenletrendszernek? Ha igen, akkor határozza meg ezt a megoldást!

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1\\
3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1\\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1\\
5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \phantom{{}-x_4} &= 2
\end{aligned}
$$

Megoldás:

A rendszer bővített mátrixára alkalmazzuk a Gauss-féle módszert:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & -1 & 1\\
3 & 2 & 1 & -1 & 1\\
2 & 3 & 1 & 1 & 1\\
2 & 2 & 2 & -1 & 1\\
5 & 5 & 2 & 0 & 2
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & -1 & 1\\
0 & -4 & -8 & 2 & -2\\
0 & -1 & -5 & 3 & -1\\
0 & -2 & -4 & 1 & -1\\
0 & -5 & -13 & 5 & -3
\end{array}\right]
\sim
$$

$$
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & -1 & 1\\
0 & 1 & 5 & -3 & 1\\
0 & 2 & 4 & -1 & 1\\
\cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{-1} & \cancel{1}\\
0 & 5 & 13 & -5 & 3
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & -1 & 1\\
0 & 1 & 5 & -3 & 1\\
0 & 0 & -6 & 5 & -1\\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{12} & \cancel{10} & \cancel{2}
\end{array}\right]
$$

A megsemmisülő sorok elhagyása után (ezeket a sorokat áthóztuk) belátjuk, hogy a rendszer mátrixának és a bővített mátrixnak is 3 a rangja. Ez 1 szabadságfokú határozatlanságot jelent, mert az ismeretlenek száma 4.

Válasszuk $x_4 = k$ értéket szabadon. A „maradék" egyenletrendszer formája ezen választás után a következő:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 - k \\ x_2 + 5x_3 &= 1 + 3k \\ 6x_3 &= 1 + 5k. \end{aligned}$$

Nem okoz különösebb gondot az általános megoldás meghatározása:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1+5k}{6}, \frac{1-7k}{6}, \frac{1+5k}{6}, k\right) =$$

$$= \frac{1}{6}((1, 1, 1, 0) + k(5, -7, 5, 1)).$$

Gyakorló feladat

Végezze el az egyenletrendszer a szerinti diszkusszióját.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + \mathrm{a}y - 2z &= 1 \\ 3x + 3y + \mathrm{a}z &= 7. \end{aligned}$$

6.1.15.

Feladat

Végezze el az egyenletrendszer a, b és c szerinti diszkusszióját.

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z &= a^3 \\ x + by + b^2z &= b^3 \\ x + cy + c^2z &= c^3 \end{aligned}$$

Megoldás:

Feltételezzük, hogy a, b és c számokra teljesülnek a következő kikötések:

$$a \neq b\,,\ a \neq c\,,\ b \neq c \text{ i } a \cdot b \cdot c \neq 0.$$

Könnyű „felfedezni”, hogy ezeket a feltételeket kell felállítani, mert azonnal kitűnik két egyenlet azonossága akár $a = b$, vagy $a = c$, vagy $b = c$. Ugyanígy, ha a paraméterek valamelyike 0 értékű, azonnal „megkurtítja” az illető egyenletet.

Most a Cramer szabályt alkalmazzuk, figyelembe véve a kitűzött feltételeket.

A rendszer determinánsa:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b).$$

A Δ_x determináns:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot c\cdot \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot c\cdot \Delta\,.$$

Erre az utóbbi következtetésre a determinánsok tulajdonságainak ismeretében a, b és c számok „kiemelése”, valamint az oszlopok helyének felcserélése után jutottunk.

Most Δ_y kiszámítása következik:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & b^2-a^2 \\ 0 & c^3-a^3 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} b^2+ab+a^2 & b+a \\ c^2+ac+a^2 & c+a \end{vmatrix}.$$

Ha a második oszlopot a-val szorozzuk és így kivonjuk az első oszlopból, majd ezután az első vízszintes sort kivonjuk a másodikból, akkor következő módon folytatódik a számítás:

$$\Delta_y = (b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} b^2 & b+a \\ c^2 & c+a \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} b^2 & b+a \\ c^2-b^2 & c-b \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)\cdot\begin{vmatrix} b^2 & b+a \\ c+b & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)\cdot(-ac-ab-bc).$$

Végül kiszámítjuk Δ_z determinánst is:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c^2+ac-b^2-ab \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)\cdot(a+b+c).$$

Mindezen számítások végső következtetéseként (természetesen. a kitűzött feltételek tiszteletben tartása esetén) az adott egyenletrendszer megoldásához jutunk:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=a\cdot b\cdot c\,,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-\left(ac+ab+bc\right),\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=a+b+c\,.$$

A megoldás ismeretében már nem nehéz megvizsgálni azokat az eseteket, amikor a feltételek nem teljesülnek. Legyen például pontosan egy paraméter értéke 0, a másik kettő nem nulla, valamint egymástól is különböző! Legyen például $a\neq b$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ és $c = 0$. Ebben az esetben a megoldás $x = 0$, $y = -ab$, $z = a + b$. Az olvasó egyedül is kivizsgálhatja azokat az eseteket, amikor $a = 0$ vagy $b = 0$.

Azonnal észrevehető két egyenlet azonossága, ha valamely két paraméter egyenlő. Ha csak két paraméter egyenlő, és a harmadiknak más értéke van, akkor csak két egyenletünk van. Ez 1 szabadságfokú határozatlanságot jelent. Ha $a = b = c \neq 0$ akkor csak egy egyenletünk van, ami 2 szabadságfokú határozatlanságot jelent.

Gyakorló feladat

Végezze el az egyenletrendszer diszkusszióját α, m, n i p paraméterekre, majd azokban az esetekben, amikor létezik megoldás, adja meg a megoldást is.

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha x & + & y & + & z & = & m\\
x & + & \alpha y & + & z & = & n\\
x & + & y & + & \alpha z & = & p
\end{array}$$

7. LINEÁRIS VEKTORTEREK

7.0. GYAKORLÓ FELADATOK

7.0.1. Feladat:

Adottak az $\vec{a}=(2,3,5)$, $\vec{b}=(-4,5,0)$, $\vec{c}=(-2,8,-3)$ vektorok az R^3 vektortérben. Írjuk fel a lineáris kombinációjukat.

Megoldás:

Az adott vektorok lineáris kombinációja a $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}$ kifejezés, ahol $\lambda_i \in R$, $(i=1,2,3)$, vagy felírható az $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ alakban, ahol $x,y,z \in R$. A keresett lineáris kombináció tehát a következő kifejezés:

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=\lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-4\\5\\0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}-2\\8\\-3\end{bmatrix}.$$

7.0.2. Feladat:

Vizsgáljuk ki az előző feladatban megadott vektorok lineáris függőségét vagy függetlenségét:

$$\vec{a}=(2,3,5),\ \vec{b}=(-4,5,0),\ \vec{c}=(-2,8,-3).$$

Megoldás:

A lineáris függőséget a lineáris kombináció segítségével vizsgálhatjuk ki. Ha a $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=\vec{0}$ vektoregyenletnek csak triviális $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ megoldása van, akkor az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, ha pedig a triviális megoldáson kívül van más megoldása is, akkor a vektorok lineárisan összefüggőek. Ennek kivizsgálásához az említett vektoregyenletből származó lineáris homogén egyenletrendszert kell megoldani.

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0},$$

$$\lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}-4\\5\\0\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}-2\\8\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\\5\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\lambda_2\\5\lambda_2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\lambda_3\\8\lambda_3\\-3\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3\\3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3\\5\lambda_1 - 3\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2\lambda_1 & - & 4\lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \\ 5\lambda_1 & & & - & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}.$$

Vizsgáljuk ki a kapott rendszer determinánsát:

$$D = \begin{vmatrix}2 & -4 & -2\\3 & 5 & 8\\5 & 0 & -3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\3 & 11 & 11\\5 & 10 & 2\end{vmatrix} = 2(22-110) \neq 0,$$

ez pedig azt jelenti, hogy a rendszer határozott, csak egy megoldása van, ami csakis a triviális megoldás lehet. Ezért $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, vagyis az adott vektorok lineárisan függetlenek.

7.0.3. Feladat:

Vizsgáljuk ki az adott vektorok lineáris összefüggését:

$$\vec{a} = (2,3,5),\ \vec{b} = (-4,5,0),\ \vec{c} = (-2,8,5).$$

Megoldás:

Hasonlóan járunk el, mint az előző két feladatban, az adott vektorok lineáris kombinációját kiegyenlítjük a nulla-vektorral, majd megoldjuk az ennek megfelelő lineáris homogén egyenletrendszert:

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0},$$

$$\lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}-4\\5\\0\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}-2\\8\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2\lambda_1 & - & 4\lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \\ 5\lambda_1 & & & + & 5\lambda_3 & = & 0 \end{array},$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 11 \\ 5 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

mert a determináns két oszlopa megegyezik. Mivel a determináns értéke nulla, így a triviálison kívül léteznek még más megoldások is, ami azt jelenti, hogy a megadott vektorok lineáris függőek.

7.0.4. Feladat:

Keressük meg az adott vektorok közötti lineáris összefüggést:

$$\vec{a} = (2,3,5),\ \vec{b} = (-4,5,0),\ \vec{c} = (-2,8,5).$$

Megoldás:

A megadott vektorok lineáris függőségét megállapítottuk az előző feladatban. Ha ezt az összefüggést fel akarjuk írni, akkor meg kell találnunk az egyenletrendszer határozatlan megoldásának paraméteres alakját. Ezt a megoldást csakis a Gauss-féle eliminációs módszerrel kereshetjük meg. Írjuk fel a rendszer bővített mátrixát, végezzük el sorain az elemi transzformációkat, majd írjuk fel a megoldást paraméteres alakban:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -9 & -10 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -9 & -10 & 0 \\ 0 & -22 & -22 & 0 \\ 0 & -45 & -45 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -9 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow \lambda_1 + 9\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \Rightarrow 0 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 - 9\lambda_3 + 10\lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 9\lambda_3 - 10\lambda_3 = -\lambda_3$$

A keresett határozatlan megoldás tehát a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-\lambda_3, -\lambda_3, \lambda_3)$ rendezett hármas, ahol $\lambda_3 \in R$. Ha például $\lambda_3 = -1$ akkor az $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0$ lineáris összefüggést kapjuk, ami azt jelenti, hogy például a $\vec{c}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével a $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ alakban fejezhetjük ki.

7.0.5. Feladat:

Határozzuk meg az adott vektorhalmazzal generált V vektortér dimenzióját és minden lehetséges bázisát:

$$A = \left\{ \vec{a} = (2,3,5),\ \vec{b} = (-4,5,0),\ \vec{c} = (-2,8,-3) \right\}.$$

Megoldás:

A második feladatban megállapítottuk, hogy ezek a vektorok lineárisan függetlenek. Ez azt jelenti, hogy az A vektorhalmazban három lineárisan független vektor van, ezért a dimenzió: $dim(V)=3$. Így mindhárom vektor eleme az általuk generált vektortér bázisának, ezért csak egy bázis lehetséges, ez pedig a $B=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ halmaz.

7.0.6. Feladat:

Határozzuk meg annak a V vektortérnek a dimenzióját és bázisát, amelyet az adott halmaz elemei generálnak:

$$A=\{\vec{a}=(2,3,5),\ \vec{b}=(-4,5,0),\ \vec{c}=(-2,8,5)\}.$$

Megoldás:

A negyedik feladatban megállapítottuk, hogy ezek a vektorok lineárisan összefüggőek. A bővített mátrixot a következő alakra transzformáltuk:

$$A\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ebben egy nulla-sorunk van, ez pedig a lineáris függőséget mutatja egy szabadságfokkal, tehát két lineárisan független vektorunk van. Ezért az általuk generált vektortér dimenziója $dim(V)=2$. A vektortér bármelyik bázisába két lineárisan független vektor kell kerüljön, ebben a feladatban ezek lehetnek a $B_1=\{\vec{a},\vec{b}\}$, $B_2=\{\vec{a},\vec{c}\}$ és $B_3=\{\vec{b},\vec{c}\}$ bázisok.

7.0.7. Feladat:

Mutassuk meg, hogy az

$$\vec{a}=(3,3,8,-2),\quad \vec{b}=(2,1,3,0),\quad \vec{c}=(0,-1,0,1),\quad \vec{d}=(-1,-2,2,1)$$

vektorok lineárisan függőek, majd fejezzük ki az $\vec{a}$ vektort a $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektorok segítségével.

Megoldás:

A lineáris függőséget a következő egyenlet megoldásával igazoljuk:

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}+\lambda_4\vec{d}=\vec{0},$$

$$\lambda_1\begin{bmatrix}3\\3\\8\\-2\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+\lambda_4\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\1\end{bmatrix}=\vec{0},$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & - & \lambda_4 & = & 0\\
3\lambda_1 & + & 1\lambda_2 & - & \lambda_3 & - & 2\lambda_4 & = & 0\\
8\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & & & + & 2\lambda_4 & = & 0\\
-2\lambda_1 & + & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0
\end{array},$$

$$D=\begin{vmatrix}3&2&0&-1\\3&1&-1&-2\\8&3&0&2\\-2&0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0&-1\\-3&-3&-1&-2\\14&7&0&2\\1&2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-3&-1\\14&7&0\\1&2&1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-3&-3&-1\\14&7&0\\-2&-1&0\end{vmatrix}=-1(-14+14)=0.$$

Mivel a szabad tagok oszlopa nulla-oszlop, így érvényes, hogy:

$$D_{\lambda_1} = D_{\lambda_2} = D_{\lambda_3} = D_{\lambda_4} = 0\,,$$

és a Cramer-szabályból következik, hogy:

$$\begin{aligned}
D\cdot\lambda_1 = D_{\lambda_1} \quad &\Rightarrow \quad 0\cdot\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \in R\,,\\
D\cdot\lambda_2 = D_{\lambda_2} \quad &\Rightarrow \quad 0\cdot\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 \in R\,,\\
D\cdot\lambda_3 = D_{\lambda_3} \quad &\Rightarrow \quad 0\cdot\lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 \in R\,,\\
D\cdot\lambda_4 = D_{\lambda_4} \quad &\Rightarrow \quad 0\cdot\lambda_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_4 \in R\,.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer tehát határozatlan, a triviális megoldás mellett létezik még számtalan sok megoldás azokban az esetekben, mikor a $\lambda_1 \neq 0 \vee \lambda_2 \neq 0 \vee \lambda_3 \neq 0 \vee \lambda_4 \neq 0$, ami azt mutatja, hogy az adott vektorok lineárisan függőek, tehát az $\vec{a}$ vektor valóban kifejezhető a $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektorok segítségével. Hogy ezt az összefüggést felírhassuk, meg kell oldanunk az $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d}$ vektoregyenletet.

$$\begin{bmatrix}3\\3\\8\\-2\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\1\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc}
2x & & & - & z & = & 3\\
x & - & y & - & 2z & = & 3\\
3x & & & + & 2z & = & 8\\
 & & y & + & z & = & -2\\ \hline
\end{array}\,,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -1 & 3\\1 & -1 & -2 & 3\\3 & 0 & 2 & 8\\0 & 1 & 1 & -2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -1 & 3\\-3 & -1 & 0 & -3\\7 & 0 & 0 & 14\\2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -1 & 3\\-3 & -1 & 0 & -3\\1 & 0 & 0 & 2\\-1 & 0 & 0 & -2\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -1 & 3\\-3 & -1 & 0 & -3\\1 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \begin{array}{l}\Rightarrow \quad 2x - z = 3 \quad \Rightarrow \quad z = 1\\ \Rightarrow \quad -3x - y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = -3\\ \Rightarrow \quad x = 2\\ \Rightarrow \quad 0 = 0\end{array}\,.$$

A keresett összefüggés az $\vec{a}$ és $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektorok között az $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c} + \vec{d}$ vektoregyenlettel írható fel.

7.0.8. Feladat:

Az $A = \{\vec{a} = (1,2,-1,3), \vec{b} = (4,1,0,1), \vec{c} = (6,5,-3,2), \vec{d} = (10,-1,2,-3)\}$ vektorhalmaz a V vektorteret generálja. Határozzuk meg ennek a vektortérnek a dimenzióját, valamint az összes lehetséges bázisát.

Megoldás:

$$dim(V) = rang(A) = lineárisan\ független\ vektorok\ száma\ az\ A\ halmazban$$

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} + \lambda_4\vec{d} = 0 \ ,$$

$$\lambda_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}4\\1\\0\\1\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}6\\5\\-3\\2\end{bmatrix} + \lambda_4\begin{bmatrix}10\\-1\\2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & + & 10\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & - & \lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 & & & - & 3\lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & 0 \end{array} .$$

Mivel ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, számítsuk ki a determinánsát:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 4 & 3 & 12 \\ 0 & -11 & -16 & -33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -7 & -21 \\ 4 & 3 & 12 \\ -11 & -16 & -33 \end{vmatrix} =$$

$$= -7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 12 \\ -11 & -16 & -33 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -11 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

az egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása is, vagyis az adott vektorhalmaz lineárisan függő. Azt, hogy közülük hány vektor lineárisan független, a Gauss-féle eliminációs módszer segítségével határozhatjuk meg.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -21 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & -11 & -16 & -33 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & 11 & 16 & 33 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A bővített mátrix legutolsó alakjában egy nulla-sorunk és három nemnulla-sorunk van, ami azt jelenti, hogy az adott vektorok közül három a lineárisan független, vagyis $rang(A) = 3$ és $dim(V) = 3$.

Hogy meghatározhassuk a lehetséges bázisokat, keressük meg a vektorok közötti lineáris összefüggést:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 + 10\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (2\lambda_4, -3\lambda_4, 0, \lambda_4),\ \lambda_4 \in R.$$

A $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} + \lambda_4\vec{d} = 0$ egyenletet tehát felírhatjuk a következő alakban:

$$2\lambda_4\vec{a} - 3\lambda_4\vec{b} + 0\vec{c} + \lambda_4\vec{d} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_4\left(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{d}\right) = 0 \quad \forall \lambda_4 \in R,$$
$$\Rightarrow \left(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{d}\right) = 0 .$$

A kapott eredmény azt mutatja, hogy az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ vektorok lineárisan függőek, ezért egyik bázisban sem lehetnek benne egyszerre. A $\vec{c}$ vektor független minden más vektortól, ezért minden bázisban benne kell legyen. Mivel a dimenzió 3, minden bázisban három független vektor kell legyen, így az összes lehetséges bázis:

$$B_1 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\},\; B_2 = \{\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\},\; B_3 = \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}.$$

7.0.9. Feladat:

Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix karakterisztikus mátrixát és karakterisztikus polinomját.

Megoldás:

Az A mátrix karakterisztikus mátrixa az $A - \lambda E$ mátrix, a karakterisztikus polinomot pedig a $|A - \lambda E|$ determináns kifejtésével kapjuk. A karakterisztikus mátrix:

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus polinom:

$$P(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\right).$$

7.0.10. Feladat:

Számítsuk ki az $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$ mátrix karakterisztikus gyökeit.

Megoldás:

Az A mátrix karakterisztikus gyökei (nullái) a karakterisztikus egyenletének gyökei (megoldásai). A karakterisztikus egyenletet a karakterisztikus polinom nullával való kiegyenlítésével kapjuk. Keressük meg ezeket a gyököket:

$$|A-\lambda E|=0\,,$$
$$(3-\lambda)\left(\lambda^2-4\right)=0\,,$$
$$(3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2)=0\,,$$
$$3-\lambda=0 \quad \vee \quad \lambda-2=0 \quad \vee \quad \lambda+2=0\,,$$

Ezekből az egyenletekből kapjuk a három karakterisztikus gyököt:

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-2\ .$$

7.0.11. Feladat:

Határozzuk meg az $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$ mátrix karakterisztikus vektorait (invariáns irányait).

Megoldás:

Minden karakterisztikus gyökhöz tartozik egy karakterisztikus vektor. Ezeket a vektorokat az $A\vec{x}_i=\lambda_i\vec{x}_i$ egyenletekből kapjuk.

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow A\vec{x}_1 = 3\vec{x}_1 \Rightarrow A\vec{x}_1 - 3\vec{x}_1 = 0 \Rightarrow (A-3E)\vec{x}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} 0 = 0 \\ -3\beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ -5\beta_1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 \in R \\ \gamma_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \end{array} \Rightarrow \vec{x}_1 = (\alpha_1, 0, 0) = \alpha_1(1,0,0) \ .$$

ha $\alpha_1 = 1$ akkor $\underline{\vec{x}_1 = (1,0,0)}$.

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow A\vec{x}_2 = 2\vec{x}_2 \Rightarrow A\vec{x}_2 - 2\vec{x}_2 = 0 \Rightarrow (A-2E)\vec{x}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \alpha_2 = 0 \\ -2\beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha_2 = 0 \\ \gamma_2 = 2\beta_2 \\ 0 = 0 \end{array} \Rightarrow \vec{x}_2 = (0, \beta_2, 2\beta_2) = \beta_2(0,1,2),$$

$\beta_2 \in R$. Ha $\beta_2 = 1$ akkor $\underline{\vec{x}_2 = (0,1,2)}$.

$$\lambda_3 = -2 \Rightarrow A\vec{x}_3 = -2\vec{x}_3 \Rightarrow A\vec{x}_3 + 2\vec{x}_3 = 0 \Rightarrow (A+2E)\vec{x}_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 5\alpha_3 &= 0 & \alpha_3 &= 0 \\ 2\beta_3+\gamma_3 &= 0 \quad \Rightarrow & \gamma_3 &= -2\beta_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_3 = (0,\beta_3,-2\beta_3) = \beta_3(0,1,-2), \\ 0 &= 0 & 0 &= 0 \end{aligned}$$

$\beta_3 \in R$. Ha $\beta_3 = 1$ akkor $\underline{\vec{x}_3 = (0,1,-2)}$.

7.0.12. Feladat:

Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomját és karakterisztikus gyökeit.

Megoldás:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -26-\lambda & -18 & -27 \\ 21 & 15-\lambda & 21 \\ 12 & 8 & 13-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -18 & -27 \\ 0 & 15-\lambda & 21 \\ \lambda-1 & 8 & 13-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -18 & -27 \\ 0 & 15-\lambda & 21 \\ \lambda-1 & 8 & 13-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -18 & -27 \\ 0 & 15-\lambda & 21 \\ 0 & -10 & -14-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 15-\lambda & 21 \\ -10 & -14-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((15-\lambda)(-14-\lambda)+210\big) =$$

$$= (1-\lambda)\left(-210-15\lambda+14\lambda+\lambda^2+210\right) =$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda\right) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-1) = -\lambda(\lambda-1)^2,$$

A karakterisztikus polinom a $P(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$ polinom.

A karakterisztikus gyököket a karakterisztikus egyenlet megoldásával kapjuk:

$$-\lambda(\lambda-1)^2=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda=0 \;\vee\; (\lambda-1)^2=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1=0 \;\vee\; \lambda_{2/3}=1.$$

Az A mátrixnak tehát két szám a karakterisztikus gyöke, ezek a $\lambda_1=0$ és $\lambda_2=1$ számok.

7.0.13. Feladat:

Határozzuk meg az adott mátrix karakterisztikus vektorait:

$$A=\begin{bmatrix}-26 & -18 & -27\\ 21 & 15 & 21\\ 12 & 8 & 13\end{bmatrix}.$$

Megoldás:

A karakterisztikus vektorokat az $A\vec{x}_i=\lambda_i\vec{x}_i$, $i=1,2$ vektoregyenletek megoldásával kapjuk. A karakterisztikus gyököket az előző feladatból ismerjük, $\lambda_1=0$ és $\lambda_{2/3}=1$.

$$\lambda_1=0 \Rightarrow A\vec{x}_1=0\vec{x}_1 \Rightarrow A\vec{x}_1=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-26 & -18 & -27\\ 21 & 15 & 21\\ 12 & 8 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-26 & -18 & -27 & 0\\ 21 & 15 & 21 & 0\\ 12 & 8 & 13 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-2 & -2 & -1 & 0\\ 21 & 15 & 21 & 0\\ 12 & 8 & 13 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & 1 & 0\\ 7 & 5 & 7 & 0\\ 12 & 8 & 13 & 0\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & -9 & 0 & 0 \\ -14 & -18 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 2\alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ 7\alpha_1 + 9\beta_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} \gamma_1 = -2\alpha_1 + \dfrac{14\alpha_1}{9} = -\dfrac{4\alpha_1}{9} \\ \beta_1 = -\dfrac{7\alpha_1}{9} \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{x}_1 = \left(\alpha_1, -\frac{7\alpha_1}{9}, -\frac{4\alpha_1}{9}\right) = \frac{-\alpha_1}{9}(-9,7,4),$$

$\alpha_1 \in R$, ha pedig $\alpha_1 = -9$ akkor $\underline{\vec{x}_1 = (-9,7,4)}$.

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1 \Rightarrow A\vec{x}_2 = 1\vec{x}_2 \Rightarrow A\vec{x} - 1\vec{x}_1 = 0 \Rightarrow (A - E)\vec{x}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -27 & -18 & -27 \\ 21 & 14 & 21 \\ 12 & 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -27 & -18 & -27 & 0 \\ 21 & 14 & 21 & 0 \\ 12 & 8 & 12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} 3\alpha_2 + 2\beta_2 + 3\gamma_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \gamma_2 = -\alpha_2 - \dfrac{2\beta_2}{3} \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \Rightarrow \vec{x}_2 = \left(\alpha_2, \beta_2, -\alpha_2 - \frac{2\beta_2}{3}\right),$$

$\alpha_2, \beta_2 \in R$, következik, hogy $\underline{\vec{x}_2 = \alpha_2(1,0,-1) + \beta_2\left(0,1,-\frac{2}{3}\right)}$.

7.0.14. Feladat:

Határozzuk meg az A mátrix minimális polinomját, ha

$$A = \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

A mátrix minimális polinomját úgy kapjuk, hogy a karakterisztikus polinomból kihagyjuk a többszörös tényezőket (gyököket). Így az A mátrix minimális polinomja: $P_{\min}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$.

7.0.15. Feladat:

Felhasználva az adott mátrix minimális polinomját, számítsuk ki az A^{2005} mátrixot, ha:

$$A = \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

A Cayley-Hamilton tétel szerint, minden mátrix kielégíti a saját karakterisztikus polinomját, tehát a minimálpolinomját is. Ezért:

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2 \;\Rightarrow\; P(A) = 0\,,$$

$$P_{\min}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \;\Rightarrow\; P_{\min}(A) = 0 \;\Rightarrow\; A(A - E) = 0 \;\Rightarrow$$

$$A^2 - A = 0 \;\Rightarrow\; A^2 = A\,, \quad A^3 = A^2 A = A \cdot A = A^2 = A\,,$$

$$A^4 = A^3 A = A \cdot A = A^2 = A\,, \ldots\,, A^n = A \;\Rightarrow\; \underline{A^{2005} = A}.$$

7.1. ÍRÁSBELI VIZSGAFELADATOK

7.1.1. Feladat

Adott az $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix a komplex számok halmazán. Határozza meg a mátrix karakterisztikus polinomját és sajátértékeit.

Megoldás:

A karakterisztikus egyenlet a következő: $det(A - \lambda E) = 0$. A karakterisztikus egyenlet megoldási a mátrix sajátértékei:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i & 1+i \\ -i & 2-\lambda & 1 \\ 1-i & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 7\lambda = 0.$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_{2/3} = 3 \pm \sqrt{2}$.

Gyakorló feladat

Határozza meg az A mátrix karakterisztikus polinomját és sajátértékeit ha adott a mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

7.1.2.

Feladat

Legyen az **{ a**, **b**, **c }** vektorhármas a **V** vektortér egy bázisa. Vizsgálja ki, hogy lehet-e az **{ a**+**b**, **a**+**c**, **b**+**c }** vektorhalaz is bázis?

Megoldás:

Szükséges kivizsgálni az új vektorhármas lineáris függetlenségét. Ha függetlenek, akkor a **V** tér bázisát alkothatják. A kérdés tehát a következő: lehet-e α, β és γ számok nemtriviális (legalább egyik nemnulla) értékére a vektorok lineáris kombinációja 0?

$$\alpha\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \beta\,(\mathbf{a}+\mathbf{c}) + \gamma\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\,\mathbf{a} + (\alpha + \gamma\,)\,\mathbf{b} + (\,\beta + \gamma\,)\,\mathbf{c} = 0.$$

A válasz az alábbi homogén egyenletrendszer megoldásából következik:

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha + \gamma = 0, \quad \beta + \gamma + 0,$$

mivel **{ a**, **b**, **c }** vektorok bázist alkotnak, tehát lineáris kombinációjuk csak a triviális esetben tűnik el.

Ha a homogén egyenletrendszer determinánsa nem 0, akkor csak a triviális megoldás létezik, ha az a determináns 0, akkor létezik nemnulla megoldás is, tehát a vektorok összefüggőek lennének, de:

A rendszer determinánsa: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Ez a tény azt jelenti, hogy az **{ a**+**b**, **a**+**c**, **b**+**c }** vektorhármas lineárisan független, tehát a **V** *tér bázisát alkothatják.*

Gyakorló feladat

Határozza meg a feltételeket amelyek teljesülése esetén az alábbi vektorok az R^4 tér bázisát alkothatják.

$$\left\{\left(1+\frac{1}{a},\ 1,\ 1,\ 1\right),\left(1,\ 1+\frac{1}{b},\ 1,\ 1\right),\left(1,\ 1,\ 1+\frac{1}{c},\ 1\right),\left(1,\ 1,\ 1,\ 1+\frac{1}{d}\right)\right\}.$$

7.1.3.

Feladat

Adott az alábbi vektorrendszer:

$\mathbf{W} = \{\ \mathbf{a} = (2,1,3,1),\ \mathbf{b} = (1,2,0,1),\ \mathbf{c} = (-1,1,-3,0),\ \mathbf{d} = (1,5,-3,2)\ \}$.

a) Határozza meg az általuk generált tér dimenziószámát,

b) Állapítsa meg a vektorok között fennálló összefüggéseket,

c) Mely vektorok alkothatják a generált tér bázisát?

Megoldás:

Induljunk ki az $\alpha\ \mathbf{a} + \beta\ \mathbf{b} + \gamma\ \mathbf{c} + \delta\ \mathbf{d} = \mathbf{0}$ összefüggésből. (Vegyük figyelembe, hogy az egyenlőség jobb oldalán a „nullvektor" áll: $\mathbf{0} = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$). Írjuk fel a követelményből származó skaláris egyenleteket:

$$((2\alpha+\beta-\gamma+\delta),(\alpha+2\beta+\gamma+5\delta),(3\alpha-2\gamma-3\delta),(\alpha+\beta+2\delta)) = \mathbf{0} = (0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

A vektorok egyenlőségének definíciójából következik, hogy ez az egyenlőség csak akkor igaz, ha a megfelelő koordináták egyenlők. Ez a kikötés egy lineáris homogén egyenletrendszerhez vezet:

$$\begin{aligned}
2\alpha + \beta - \gamma + \delta &= 0\\
\alpha + 2\beta + \gamma + 5\delta &= 0\\
3\alpha - 2\gamma - 3\delta &= 0\\
\alpha + \beta + 2\delta &= 0.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a rendszer mátrixának oszlopait pontosan az adott vektorok koordinátái alkotják. Oldjuk meg ezt a rendszert!

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Megállapítjuk, hogy a rendszer mátrixának rangja 2, vagyis $dim(\boldsymbol{V}) = 2$ (tehát mindössze két független vektorunk van!). Szűrjük ki, melyek a „felesleges” vektorok (a vektorok között fennálló összefüggések kimutatják, melyek a helyettesíthető vektorok. (Az összefüggések száma = a rendszer vektorainak száma mínusz a lineárisan független vektorok száma). A „maradék” egyenletrendszert leolvassuk a transzformált mátrixról (legyen γ és δ szabadon választott):

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma + 5\delta &= 0 \\ \beta + \gamma + 3\delta &= 0, \end{aligned}$$

következik: $\beta = -\gamma - 3\delta$ és $\alpha = -2\beta - \gamma - 5\delta = 2\gamma + 6\delta - \gamma - 5\delta = \gamma + \delta$.

b) Most felhasználjuk ezt a megoldást és behelyettesítjük az elsődlegesen kitűzött $\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} + \delta\,\mathbf{d} = \mathbf{0}$ lineáris kombinációba:

$$(\gamma + \delta)\,\mathbf{a} + (-\gamma - 3\delta)\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} + \delta\,\mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Rendezzük át az összefüggést γ és δ paraméterek szerint:

$\gamma\,(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}) + \delta\,(\mathbf{a} - 3\,\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \mathbf{0}$, innen következik:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \text{ és } \mathbf{a} - 3\,\mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

(A következtetés azért helyes mert a kiinduló egyenlőség igaz γ és δ minden tetszőlegesen választott értékére, és ez csak úgy teljesülhet, hogy a zárójelben lévő vektorösszegek eltűnnek! Ezek a keresett összefüggések.

c) A felfedezett összefüggések lehetővé teszik, hogy kiszűrjük a többi vektorral kifejezhető valamely két „felesleges” vektort. Például választható bázisként {**a**, **b**}, mert **c** és **d** kifejezhetők a következő módon: **c** = **b** – **a** és **d** = 3 **b** – **a**. Ezek szerint bázis lehet a négy vektor közül bármelyik pár (mert a fennmaradó két vektor már kifejezhető a kiválasztott vektorok lineáris kombinációjaként: {**a** , **b**}, {**a** , **c**}, {**a**, **d**}, {**b** , **c**}, {**b** , **d**}, {**c** , **d**}.

Gyakorló feladat

Igazolja, hogy az $\mathbf{e}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,3)$, $\mathbf{e}_3 = (1,2,3)$ vektorok egy lehetséges bázist alkotnak az R^3 térben. Határozza meg **a** = (6,9,14) vektor koordinátáit erre az új bázisra vonatkozóan .

7.1.4.

Feladat

Adott az alábbi vektorrendszer:

V = **{ p** = (2,1,3,–1), **q** = (–1,1,–3,1), **r** = (4,5,3,–1), **s** = (1,5,–3,1) **}**.

a) Határozza meg az általuk generált tér dimenziószámát,

b) Állapítsa meg a vektorok között fennálló összefüggéseket,

c) Mely vektorok alkothatják a generált tér bázisát?

Megoldás:

Alkalmazzuk az előző feladatban bemutatott megoldási eljárást:

Kiindulunk a $\alpha\,\mathbf{p} + \beta\,\mathbf{q} + \gamma\,\mathbf{r} + \delta\,\mathbf{s} = \mathbf{0}$ kapcsolatból, ami egy homogén lineáris egyenletrendszerhez vezet. A rendszer mátrixának oszlopvektorai azonosak a megadott vektorok koordinátáival. Az egyenletrendszer megoldása folyamán a következő állapot adódik:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) A mátrix rangja, tehát $dim(V)=2$ és a következő megoldáshoz jutunk: Szabadon választjuk például γ és δ számokat, és kiszámítjuk α és β ismeretleneket:

$$\beta = -2\gamma - 3\delta \text{ és } \alpha = -\beta - 5\gamma - 5\delta = 2\gamma + 3\delta - 5\gamma - 5\delta = -3\gamma - 2\delta.$$

b) Most behelyettesítjük ezt a megoldást a kiinduló lineáris kombinációba:

$$(-3\gamma - 2\delta)\,\mathbf{p} + (-2\gamma - 3\delta)\,\mathbf{q} + \gamma\,\mathbf{r} + \delta\,\mathbf{s} =$$
$$= \gamma\,(-3\,\mathbf{p} - 2\,\mathbf{q} + \mathbf{r}) + \delta\,(-2\,\mathbf{p} - 3\,\mathbf{q} + \mathbf{s}) = \mathbf{0},$$

A vektorok között fennálló összefüggések leolvashatók:

$$-3\,\mathbf{p} - 2\,\mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{0} \text{ i } -2\,\mathbf{p} - 3\,\mathbf{q} + \mathbf{s} = \mathbf{0}.$$

c) Bázis lehet az adott vektorhalmaz bármely két vektora:

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}, \{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}, \{\mathbf{p}, \mathbf{s}\}, \{\mathbf{q}, \mathbf{r}\}, \{\mathbf{q}, \mathbf{s}\}, \{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}.$$

Gyakorló feladat

Adott öt vektor: $\mathbf{a}=(1,-2,2,4)$, $\mathbf{b}=(2,-4,6,0)$, $\mathbf{c}=(-4,8,-10,-8)$, $\mathbf{d}=(3,-6,9,0)$ és $\mathbf{e}=(-3,2,-10,5)$. Határozza meg az általuk generált tér dimenziószámát és a halmazból kiválasztható minden lehetséges bázist.

7.1.5.
Feladat

A vektorok $\mathbf{A}=\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ halmaza generálja a $\mathbf{V}$ teret. Határozza meg a tér dimenziószámát és ennek a térnek az adott a halmazból kiválasztható minden bázisát, ha ismertek a vektorok:

$$\mathbf{a} = (1, 2, -1, 3),\ \mathbf{b} = (4, 1, 0, 1),\ \mathbf{c} = (6, 5, -3, 2),\ \mathbf{d} = (10, -1, 2, -3).$$

Megoldás:

Vizsgájuk a vektorok lineáris függetlenségét. A vizsgálat a lineáris kombinációjukra irányul: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Ebből a vektoregyenletből egy lineáris homogén egyenletrendszer adódik. Van-e ennek az egyenletrendszernek nemtriviális megoldása? Lássuk a rendszer mátrixát! A Gauss-algoritmus a következőket eredményezi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 4 & 3 & 12 \\ 0 & -11 & -16 & -33 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & -93 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Azonnal belátható, hogy feltétlenül $\gamma = 0$ (ez **c** vektor minden más vektortól való teljes függetlenségét jelenti), a fennmaradó ismeretlenekre még marad 1 szabadságfok. Válasszuk szabadon a δ számot! Következik $\alpha = 2\delta$ és $\beta = -3\delta$. Megállapítjuk a tér dimenziószámát: $dim(\mathbf{V}) = 3$, és a vektorok között fennálló kapcsolatokat:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = 2\delta\mathbf{a} - 3\delta\,\mathbf{b} + 0\,\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = \delta(\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \mathbf{0}.$$

Mivel választásunk $\delta \neq 0$ (miért?), következik: $\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Ez azt jelenti, hogy az egyenlőségben jelenlévő három vektor nem lehet bázis (összefüggőek!) A bázisnak három eleme van amelyek között mindig jelen van **c** (mert független a többitől). Ezek szerint a lehetséges bázisok az alábbi vektorhármasok:

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}, \{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}, \{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}.$$

Gyakorló feladat

Határozza meg az adott öt vektor által generált tér dimenziószámát és a halmazból kiválasztható minden lehetséges bázist.

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1),\ \mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0),\ \mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1),$$
$$\mathbf{a}_4 = (1, 2, 3, 4),\ \mathbf{a}_5 = (0, 1, 2, 3).$$

7.1.6.

Feladat

Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Az egyetlen sajátérték $x = 2$, azért mert:

$$\det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -(x-2)^3.$$

Ha x=2, akkor az A–xE mátrix az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ~ [1, 1, –1] alakot veszi fel. Innen a sajátvektorok a következő módon származtathatók: a kétszeres szabadságfok miatt válasszuk $x_1 = \alpha$, és $x_2 = \beta$ számokat, és kiszámítjuk x_3 ismeretlent: $x_3 = x_1 + x_2 = \alpha + \beta$.

A sajátvektorok tehát:

$$(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \beta, \alpha + \beta) = \alpha\,(1, 0, 1) + \beta\,(0, 1, 1).$$

Gyakorló feladat

Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}.$$

7.1.7.

Feladat

Határozzuk meg az A mátrix karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátvektorait:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Megoldás:

A karakterisztikus polinom:

$$\det(A–\lambda E\,)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&0\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\0&0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda–1)^3(\lambda+1).$$

Innen kiolvashatók a sajátértékek: $\lambda_1=1$ és $\lambda_2=-1$.

Ha $\lambda_1=1$, akkor háromszoros szabadságfokunk van, mert az $A–\lambda_1 E$ mátrix mindössze egyetlen sorra vezetődik vissza: [0 –1 1 0], és ez egy egyenletet jelent:

$$0x_1 - x_2 + x_3 + 0x_4 = 0.$$

Észrevesszük, hogy eleve x_1 és x_4 bármely értéket felveheti, míg $x_2 = x_3$. Az általános megoldás (vagyis az invariáns al-tereket generáló vektorok) a következők:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_2, x_4) =$$
$$= x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 1, 0) + x_4(0, 0, 0, 1).$$

Ha $\lambda_2=-1$, akkor mindössze 1 szabadságfokunk van és az $A–\lambda_2 E$ mátrix a következő lesz:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Belátható, hogy azon homogén egyenletrendszer megoldása, amelynek ez a mátrixa, a következő: $x_1 = x_4 = 0$, és $x_2 = -x_3$. Most felírjuk az általános megoldást (ahonnan leolvasható a sajátvektor):

$$(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) =(0, x_2 , -x_2, 0) = x_2 (0, 1, -1, 0).$$

Gyakorló feladat

Határozza meg a B mátrix valós sajátértékeit, és az ezekhez a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

7.1.8.

Feladat

Határozza meg az A mátrix által meghatározott lineáris transzformáció karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, és sajátvektorait: .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A karakterisztikus polinom:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+1).$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1$.

Ha $\lambda_1 = 1$ akkor a szabadságfok 3 mert az $A-\lambda_1 E$ mátrix mindössze egyetlen sorra zsugorodik: $[-1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1]$, innen az egyenlet :

$$-1x_1 + 0\, x_2 + 0\, x_3 + 1x_4 = 0.$$

Belátható, hogy x_2 és x_3 ismeretlenek bármely értéket felvehetnek és $x_1 = x_4$. Innen következtetünk az általános megoldásra és az invariáns irányokra (sajátvektorokra):

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_1) =$$
$$= x_1\,(1, 0, 0, 1) + x_2\,(0, 1, 0, 0) + x_3\,(0, 0, 1, 0).$$

Ha $\lambda_2 = -1$ akkor a szabadságfok 1, mert a rendszer mátrixa, $A - \lambda_2 E$ a következő alakot veszi fel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Észrevesszük, hogy a homogén egyenletrendszer megoldása, amelyet a fenti mátrix fejez ki, a következő: $x_2 = x_3 = 0$, és $x_1 = -x_4$. Az általános megoldásból kiolvasható a megfelelő sajátvektor:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 0, 0, -x_1) = x_1\,(1, 0, 0, -1).$$

Gyakorló feladat

a) Adott a vektorok $\mathbb{V} = \{\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\}$ halmaza, amelynek elemei: $\mathbf{v}_1 = (30, 12, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (30, 0, 20)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 12, 20)$. Határozzuk meg a vektorok által generált tér dimenzióját, valamint a generált tér minden lehetséges bázisát a $\mathbb{V}$ elemei között.

b) Adott a vektorok $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3\}$ halmaza, amelynek elemei: $\mathbf{u}_1 = (10, 3, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (10, 0, 7)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 3, 7)$. Határozzuk meg a vektorok által generált tér dimenzióját, valamint a generált tér minden lehetséges bázisát a $\mathbb{U}$ elemei között.

7.1.9.

Feladat

Határozzuk meg az A mátrix karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátvektorait:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

A karakterisztikus polinom:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

Innen kiolvashatók a sajátértékek: $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1$.

a) Ha $\lambda_1 = 1$, akkor a rendszer mátrixa:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

és ebből a következő sajátvektor adódik:

$$v_1 = (\alpha, \alpha, \beta) = \alpha\,(1, 1, 0) + \beta\,(0, 0, 1).$$

b) Ha $\lambda_1 = -1$, akkor a rendszer mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

és ebből a következő sajátvektor adódik:

$$v_2 = (\alpha, -\alpha, 0) = \alpha\,(1, -1\ 0).$$

Gyakorló feladat

(I) Adott a vektorok $\mathbb{V} = \{\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{d}\}$halmaza:

$\mathbf{a} = (7, 9, -5)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (3, 11, 1)$ és $\mathbf{d} = (9, 8, -8)$.

Határozzuk meg:

a) a vektorok által generált tér dimenzióját,
b) a vektorok között fennálló összefüggéseket,
c) a generált tér minden lehetséges bázisát a $\mathbb{V}$ elemei között..

(II) Adott a vektorok $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}\ \mathbf{z}\}$ halmaza:

$\mathbf{u} = (9, -5, 7)$, $\mathbf{v} = (1, 3, -2)$, $\mathbf{w} = (11, 1, 3)$ és $\mathbf{z} = (7, -11, 11)$.

Határozzuk meg :

a) a vektorok által generált tér dimenzióját,
b) a vektorok között fennálló összefüggéseket,
c) a generált tér minden lehetséges bázisát a $\mathbb{U}$ elemei között.

7.1.10.

Feladat

Határozzuk meg a vektorok $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ halmaza által generált $\mathbf{V}$ tér dimenziószámát, ha ismertek a vektorok közötti alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d} + 4\mathbf{e} &= \mathbf{0},\\
\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 3\mathbf{c} + \mathbf{d} + 5\mathbf{e} &= \mathbf{0},\\
-\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 2\mathbf{d} - 2\mathbf{e} &= \mathbf{0},\\
2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + 2\mathbf{c} - \mathbf{d} + 8\mathbf{e} &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Megoldás:

A tér dimenziója a teret generáló vektorhalmazban jelenlévő maximális számú lineárisan független vektorok száma. Világos, ez a vektorhalmaz nem független vektorok sokasága, mert léteznek közöttük összefüggések. Vajon valóban négy összefüggés létezik, esetleg ezek között is van felesleges? Ez a központi kérdés.

Ha mindezek az egyenletek függetlenek egymástól, akkor csak egy vektorunk van, a többiek ennek a vektornak a függvényei. Ha csak egyetlen kapcsolat is eliminálható, az már két független vektort jelent, és így tovább. Megállapítandó tehát, a kapcsolatrendszer mátrixának rangja, a generált tér dimenziója pedig a következő szám: $dim(\mathbf{V}) = 5 - rang(M)$ (5 az adott vektorok száma)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Az elemi mátrix transzformációk sora után eljutunk a független vektorok számához, ez a $rang(M)$ szám. Elimináljuk először az első oszlop elemeit:

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Már belátható, hogy nincs is 5 vektorunk, mert a negyedik összefüggésből $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ adóik, és ez a vektor „nem érdekes”. Továbbá:

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ahonnan belátjuk, hogy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Tehát ez is csak látszólagos „szaporítás” volt. Ez a vektor sem játszik szerepet (nem független!). Nézzük a következményeket: Marad $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$, és a kapcsolatok:

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} + 4\mathbf{e} = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{c} + 2\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

(**b** és **d** vektorok eltűnésével eltűnik a második és a negyedik kapcsolat is, az első és harmadik pedig a fentiekre módosul). A második egyenlőségből:

$$\mathbf{c} = -2\mathbf{e}.$$

Behelyettesítve az első egyenlőségbe:

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} + 4\mathbf{e} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{a} - 2\mathbf{e} + 4\mathbf{e} = \mathbf{0} \;\Rightarrow \mathbf{a} = -2\mathbf{e}.$$

Ezzel megmutattuk azt, hogy a rendszerben mindössze egyetlen független vektor létezik: **e** ! Következik: $dim(\mathbf{V}) = 1$.

Azonos következtetés vonható le így is:

$$dim(\mathbf{V}) = 5 - rang(M) = 5 - 4 = 1,$$

mert azonnal belátható: $rang(M) = 4$.

Megjegyzés: A feladat megoldásában azt bizonyítottuk, hogy az egyetlen független nemnulla vektor **e**, és egyúttal ez a bázis is. De ugyanígy bizonyítható, hogy a bázis egyetlen vektora lehet **a** is, akkor **c** és **e** fejezhető ki **a** vektor függvényeként. Hasonló meggondolással **c** is lehet bázis, akkor **a** és **e** vektorok függenek **c** vektortól.

Gyakorló feladat

Legyen a **V** vektorteret generáló vektorok halmaza **A**, ahol:

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a} = (2, 0, 4, 6),\ \mathbf{b} = (1, 9, 8, 9),\ \mathbf{c} = (3, 0, 6, 9),$$
$$\mathbf{d} = (-1, -3, -8, -9) \text{ i } \mathbf{e} = (-1, 3, 4, 3)\}.$$

Határozza meg **V** tér dimenzióját és az **A** halmaz elemeiből alkotott minden lehetséges bázisát.

7.1.11.

Feladat

Adott a vektorok $\{\mathbf{v}_1 = x + 2,\ \mathbf{v}_2 = 2x^2 - 3x,\ \mathbf{v}_3 = 2x^2 + 7\}$ halmaza. Lehet-e ez a vektorhalmaz a másodfokú polinomok vektorterének bázisa? Ha igen, fejezze ki $\mathbf{v} = 2x^2 - 6x - 9$ vektort a bázisvektorok lineáris kombinációjaként!

Megoldás:

A vektortér bázisa csakis lineárisan független vektorhalmaz lehet. Kialakítjuk az adott vektorok lineáris kombinációját, és keressük a nulla-kombináció nemtriviális kielégíthetőségét.

$$\alpha\,\mathbf{v}_1 + \beta\,\mathbf{v}_2 + \gamma\,\mathbf{v}_3 =$$
$$= \alpha\,(x+2) + \beta\,(2x^2 - 3x) + \gamma\,(2x^2 + 7) =$$
$$= x^2\,(2\beta + 2\gamma) + x\,(\alpha - 3\beta) + (2\alpha + 7\gamma) = 0.$$

A polinom azonosan 0-val egyenlő, ha a polinom együtthatói rendre 0-val egyenlők:

$$2\beta + 2\gamma = 0, \quad \alpha - 3\beta = 0, \quad 2\alpha + 7\gamma = 0.$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer amelynek van nemtriviális megoldása, ha a rendszer determinánsa nulla. Igen, de a determináns nem nulla, mert:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 12 - 14 = -2 \neq 0\,,$$

ami azt jelenti, hogy kizárólag a triviális (0, 0, 0) megoldás létezik, ami az adott vektorok lineáris függetlenségét jelenti. Ezek szerint a vektorok a bázis szerepét is játszhatják. Most keressük meg az adott polinom előállítását a bázisvektorok $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ lineáris kombinációjaként!

$$\mathbf{v} = \varphi\,\mathbf{v}_1 + \lambda\,\mathbf{v}_2 + \mu\,\mathbf{v}_3 =$$
$$= x^2\,(2\lambda + 2\mu) + x\,(\varphi - 3\lambda) + (2\varphi + 7\mu) = 2x^2 - 6x - 9.$$

Innen egy nem homogén lineáris algebrai egyenletrendszer következik:

$$2\lambda + 2\mu = 2, \quad \varphi - 3\lambda = -6, \quad 2\varphi + 7\mu = -9.$$

Nem nehéz belátni, mert a rendszer determinánsát már kiszámítottuk, hogy a φ, λ és μ szerinti determinánsok:

$$\Delta_\varphi = -12, \quad \Delta_\lambda = -8 \;\text{ i }\; \Delta_\mu = 6.$$

Következik: $\varphi = 6$, $\lambda = 4$ és $\mu = -3$, vagyis

$$\mathbf{v} = 6\,\mathbf{v}_1 + 4\,\mathbf{v}_2 - 3\,\mathbf{v}_3\,.$$

Gyakorló feladat

Állítsa elő $\mathbf{v} = x^2 + 5x + 9$ vektort az alábbi vektorok lineáris kombinációjaként: $\mathbf{v}_1 = x^2 - 3$, $\mathbf{v}_2 = 2x + 5$ és $\mathbf{v}_3 = x^2 + x$. Lehetnek $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vektorok a másodfokú polinomok vektorterének bázisa?

7.1.12. Feladat

Melyik lineáris transzformáció képezi le $\mathcal{B}_1=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ bázist $\mathcal{B}_2=(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4)$ bázisra, ha ismertek a következő vektorok:

$\mathbf{e}_1 = (-3,2,-1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (1,-1,1,1)$, $\mathbf{e}_3 = (-1,2,1,1)$, $\mathbf{e}_4 = (-1,-1,0,1)$,
i $\mathbf{i}_1 = (2,1,0,1)$, $\mathbf{i}_2 = (0,1,2,2)$, $\mathbf{i}_3 = (-2,1,1,2)$, $\mathbf{i}_4 = (1,3,1,2)$.

Megoldás:

Ismeretes, a lineáris transzformációt a mátrixa „valósítja” meg. Vegyük figyelembe a következő tényeket is:

(i) A reguláris lineáris transzformáció mátrixa is reguláris. (A mátrix reguláris, ha determinánsa nem nulla).

(ii) A reguláris lineáris transzformáció az *n* elemű lineárisan független vektorok halmazát szintén egy *n* elemű lineárisan független vektorhalmazra képezi le. Ha a kiinduló vektorhalmaz bázis volt, akkor a képek halmaza is bázisként kezelhető!

(iii) Ha rendelkezésünkre áll egy tér két bázisa (két *n* elemű lineárisan független vektorhalmaz, amelyek generálják a teret), akkor létezik olyan reguláris lineáris transzformáció, amely az egyik bázis vektorait éppen a másik bázis vektoraira képezi le.

Jelölje M a transzformáció mátrixát és legyen $M(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$. megjegyezzük még, hogy a rendezett n-esek ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$) jelölése helyettesíthető az oszlopvektoros jelöléssel, és így az $M(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$ egyenlőség felírható a következő formában:

$$M \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Figyeljünk fel arra, hogy baloldalon álló B_1 mátrix oszlopai $\mathcal{B}_1$ bázis vektoraiból állnak, míg a jobboldali B_2 mátrix oszlopait az új $\mathcal{B}_2$ bázis vektorainak koordinátái alkotják. Legyen most még M mátrix ismeretlen. M mátrix meghatározására megoldjuk az $M \cdot B_1 = B_2$ mátrixegyenletet. Az egyenletet jobbról kell szorozni B_1 inverzével.

Az inverz mátrix meghatározásának lépéseit most elhagyjuk, csak a megoldást mutatjuk be. Az olvasó ellenőrizze a leírtakat!

$$|B_1| = -1, \quad B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & 5 \\ 5 & 3 & -9 & 8 \\ -2 & -1 & 4 & -3 \\ -3 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix},$$

$$M = B_2 \cdot B_1^{-1} = -\begin{bmatrix} 7 & 4 & -15 & 12 \\ -3 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -9 & 9 \\ 3 & 2 & -6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Gyakorló feladat

Határozza meg az alábbi vektorokkal generált tér dimenzióját és egyik bázisát:

$\mathbf{e}_1 = (2,1,3,1)$, $\mathbf{e}_2 = (1,2,0,1)$, $\mathbf{e}_3 = (-1,1,-3,0)$.

7.1.13.

Feladat

Adott hat vektor között a következő három összefüggés:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3\,,\ \mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \quad \text{és} \quad \mathbf{b}_3 = -3\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_2.$$

A $\mathcal{B}_1 = \{\, \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 \,\}$ és a $\mathcal{B}_2 = \{\, \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \mathbf{b}_3 \,\}$ vektorhalmaz ugyanazon **V** tér két bázisa. Ismertek **x** vektor koordinátái a $\mathcal{B}_1$ bázisra vonatkozóan: $\mathbf{x}_{(1)} = (1, 1, 1)$. Határozzuk meg **x** koordinátáit $\mathcal{B}_2$ bázisban.

Megoldás:

Az előző feladatban azt a mátrixot kerestük, amely a tér egyik bázisát ugyanezen tér másik bázisára képezi le. Jelen esetben ez a leképezés már eleve adott, mert $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok koordinátáit az „első” bázisra vonatkozóknak tekintjük így: $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1)$, ugyanakkor $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ vektorok az „első” bázisra vonatkozó koordinátái: $\mathbf{b}_1 = (1, 3, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 2, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (-3, -4, 0)$. Felírható tehát az első bázist a második bázisra leképező M mátrix, valamint korábbi megállapításaink alapján kiszámíthatjuk M^{-1} mátrixot is (lévén M reguláris), és ez az inverz mátrix képezi le a második bázis vektorait az első bázis elemeire:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Az inverz mátrixból kiolvashatók $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok koordinátái $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ bázisra vonatkozóan – ezek a koordináták M^{-1} mátrix oszlopai):

$$\mathbf{a}_1 = -4\mathbf{b}_1 - 8\mathbf{b}_2 - 7\mathbf{b}_3\,,\ \mathbf{a}_2 = 3\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3 \quad \text{i} \quad \mathbf{a}_3 = -2\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_2 - 4\mathbf{b}_3.$$

Természetesen, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ bázisvektorokat ebben az „új” bázisban a következő módon fejezzük ki:

$$\mathbf{b}_1 = (1, 0, 0),\ \ \mathbf{b}_2 = (0, 1, 0),\ \ \mathbf{b}_3 = (0, 0, 1),$$

míg $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ vektorok koordinátái a következők:

$$\mathbf{a}_1 = (-4, -8, -7),\ \ \mathbf{a}_2 = (3, 6, 5),\ \ \mathbf{a}_3 = (-2, -5, -4).$$

Mivel $\mathbf{x}$ koordinátái a feladatban az „első” bázisra vonatkoznak, vagyis azok jelentése $\mathbf{x}_{(1)} = (1, 1, 1) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, ezért a második bázisra vonatkozó koordinátákat $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ a második bázisra vonatkozó koordinátáinak behelyettesítésével nyerjük:

$$\mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 =$$

$$= (-4\mathbf{b}_1 - 8\mathbf{b}_2 - 7\mathbf{b}_3) + (3\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3) + (-2\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_2 - 4\mathbf{b}_3),$$

$$\mathbf{x}_{(2)} = -3\mathbf{b}_1 - 7\mathbf{b}_2 - 6\mathbf{b}_3 = (-3, -7, -6).$$

Megjegyzés egy másik megoldási mód alkalmazhatóságáról:

Jelölje $\mathbf{x}$ vektor koordinátáit a második bázisban (ξ_1, ξ_2, ξ_3), tehát:

$$\mathbf{x}_{(2)} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1\mathbf{b}_1 + \xi_2\mathbf{b}_2 + \xi_3\mathbf{b}_3.$$

Alkalmazzuk a feladatban kitűzött lineáris kombinációkat a két bázis vektorainak kapcsolatáról, vagyis $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ bázisnak $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ bázis vektoraival való megadását:

$$\xi_1\mathbf{b}_1 + \xi_2\mathbf{b}_2 + \xi_3\mathbf{b}_3 =$$
$$=\xi_1(\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3) + \xi_2(2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) + \xi_3(-3\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_2).$$

Rendezzük át ezt az egyenlőséget úgy, hogy $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ vektorok lineáris kombinációja legyen:

$$\xi_1\mathbf{b}_1 + \xi_2\mathbf{b}_2 + \xi_3\mathbf{b}_3 =$$
$$= (\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3)\ \mathbf{a}_1 + (3\xi_1 + 2\xi_2 - 4\xi_3)\ \mathbf{a}_2 + (2\xi_1 - \xi_2)\ \mathbf{a}_3.$$

Felfedezzük, hogy a vektorok egyenlősége alapján a fenti azonosság egy lineáris egyenletrendszerhez vezet, mert $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ bázisban csakis egy módon fejezhető ki: $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, tehát teljesülnie kel az alábbi egyenlőségeknek:

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 &= 1, \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 1, \\ 2\xi_1 - \xi_2 \qquad &= 1. \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert (vegyük észre azt is, hogy a rendszer mátrixa a már ismert M mátrix). A megoldás azonos az első módon nyert eredménnyel:

$$\mathbf{x}_{(2)} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (-3, -7, -6).$$

———————————

Gyakorló feladat

Adott a vektorok $\mathbf{V} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ halmaza, ahol ismertek a vektorok koordinátái (valamely bázisra vonatkozóan):

$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 4, 5, 6)$, $\mathbf{a}_4 = (4, 5, 6, 7)$.

Határozza meg vektorhalmaz elemei által generált tér dimenzióját. Állapítsa meg az esetlegesen létező kapcsolatokat ezen vektorok között. Mely vektorok lehetnek a generált tér bázisa?

7.1.14.
Feladat

A vektorok $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ halmaza generálja a $\mathbf{V}$. teret. Határozza meg a tér dimenzióját és a tér minden lehetséges bázisát az $\boldsymbol{A}$ elemei között:

$$\mathbf{a} = (1,\ -2,\ -3,\ 4),\ \mathbf{b} = (3,\ -3,\ -4,\ 6),\ \mathbf{c} = (1,\ 1,\ 2,\ -2),$$
$$\mathbf{d} = (-2,\ 1,\ 1,\ -2),\ \mathbf{e} = (-1,\ 1,\ -1,\ 2).$$

———————

Megoldás:

A vektorok között esetlegesen fennálló kapcsolatokat a koordináták oszlopokba való sorakoztatásával nyert mátrix elemi transzformációi után fedezhetjük fel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Megállapítjuk: a mátrix rangja a generált vektortér dimenziószáma is. Ez a szám 3. Jelölje a vektorok lineáris kombinációjában az együtthatókat α, β, γ, δ és ε. A fenti mátrix ezekre az együtthatókra vonatkoztatott homogén egyenletrendszer mátrixa, tehát 2 szabadságfokunk van (figyeljük meg: 5 ismeretlen mellett a mátrix rangja 3). Következésképpen $\varepsilon = 0$ (ez **e** vektor teljes függetlenségét jelenti – tehát bármely választott bázisban jelen van!). A többi együtthatóval így gazdálkodunk? Szabadon választható legyen γ és δ, úgy $\beta = \delta - \gamma$ és $\alpha = 2\gamma - \delta$ lesz. Most már kifejezhető a vektorok között fennálló lineáris kombináció a következő módon:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} + \varepsilon\mathbf{e} =$$
$$=(2\gamma - \delta)\mathbf{a} + (\delta - \gamma)\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} + 0\mathbf{e} =$$
$$= (2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c})\,\gamma + (-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d})\delta = \mathbf{0}.$$

Felfedezzük a vektorok között fennálló két összefüggést:

$$2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

A lehetséges bázisokat három független vektor alkotja, de feltétlenül közöttük van **e** vektor. Vizsgáljuk meg, hogy a felfedezett kapcsolatok korlátozzák-e a másik két bázisvektor kiválasztásának lehetőségeit. Mivel két vektor közötti kapcsolatot nem mutattunk ki (csak 3 vektor közötti összefüggések ismertek), ezért a fennmaradó két helyre bármelyik vektor pár választható **a**, **b**, **c**, **d** közül. Összesen 6 lehetőség van (4 elem másodosztályú ismétlés nélküli kombinációi):

{ a, **b**, **e }**, **{ a**, **c**, **e }**, **{ a**, **d**, **e }**, **{ b**, **c**, **e }**, **{ b**, **d**, **e }**, **{ c**, **d**, **e }**.

Gyakorló feladat

Adott az alábbi öt vektor:

$\mathbf{a} = (1, -2, 2, 4)$, $\mathbf{b} = (2, -4, 6, 0)$, $\mathbf{c} = (-4, 8, -10, -8)$,

$\mathbf{d} = (3, -6, 9, 0)$, $\mathbf{e} = (-3, 2, -10, 5)$.

Határozza meg a vektorok által generált $\boldsymbol{V}$ tér dimenzióját, valamint a tér lehetséges bázisait az adott vektorok között.

7.1.15.
Feladat

Az **A** lineáris transzformáció $\mathcal{B}_1 = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \}$ bázis vektorait a következő vektorokra képezi le:

$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, 3, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_4 = (0, 1, -1, -1)$.

Lehetnek-e ezek a vektorok bázis? Határozza meg a transzformáció mátrixát, valamint alkalmazza ezt a transzformációt $\mathbf{z} = (3, 3, 1, 1)$ vektorra is.

Megoldás:

A 7.1.13. feladatban alkalmazott eljárást szerint kialakítjuk az adott vektorok koordinátáiból mint oszlopvektorokból a kapcsolatokat vizsgáló mátrixot. Ha a vektorok függetlenek (ha a mátrix rangja 4) akkor bázisként kezelhetők! Jelölje ezt az új bázist $\mathcal{B}_2$, a két bázis, $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ közötti átmenetet biztosító M mátrix pedig a következő:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mivel $det(M) = -2$, bizonyos hogy a $\mathcal{B}_2$ elemei lineárisan függetlenek, tehát lehetnek bázis. Az M mátrix a keresett lineáris transzformáció mátrixa. Mivel $\mathbf{z}$ vektor koordinátáinak jelentése az első bázisra vonatkozik, tehát: **z** =(3, 3, 1, 1) = 3$\mathbf{e}_1$ + 3$\mathbf{e}_2$ + $\mathbf{e}_3$ + $\mathbf{e}_4$, ezért **z** képvektorának koordinátáit a következő módon nyerjük:

$$\mathbf{w} = M \cdot \mathbf{z} = (10, 8, 8, 5).$$

Nyilván **z** és **w** koordinátáit is oszlopvektorként kezeljük:

$$\mathbf{w} = M \cdot \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés: Figyeljük meg, hogy a „történések" a $\mathcal{B}_1$ bázisban zajlanak, a vektorok mindegyikének koordinátái erre a bázisra vonatkoznak. Ha „átmennénk" a második bázisba, tehát ha $\mathcal{B}_2$ vektoraira vonatkoztatott koordinátákat alkalmaznánk **z** és **w** esetében is, akkor a 7.1.13. feladatban leírt módon kellene eljárnunk.

Gyakorló feladat

Adott a vektorok következő halmaza:

W = **{** **a**=(2, 0, 1, 3, –1), **b**=(1, 1, 0, –1, 1),
c=(0, –2, 1, 5, –3), **d**=(1, –3, 2, 9, –5) **}**.

Határozza meg

a) az adott vektorhalmaz által generált tér dimenzióját,

b) a vektorok között fennálló összefüggéseket,

c) a generált tér lehetséges bázisait az adott vektorok között.