

MŰSZAKI FŐISKOLA
SZABADKA

mr. Rozgonyi Endre

MECHANIKA
első rész
STATIKA

SZABADKA, 2001.

TARTALOM

1. BEVEZETÉS	1
2. ALAPFOGALMAK, ALAPTÉTELEK	3
2.1. A mechanikus mozgás és nyugalmi állapot	3
2.2. Tér és idő	3
2.3. A test fogalma a mechanikában	3
2.4. Alapmozgások	4
2.5. Mechanikai hatás	4
2.5.1. Az első mechanikai hatás-erő	5
2.5.2. A második mechanikai hatás-erőpár és nyomatéka	6
2.6. Az erő vetületei	7
2.6.1. Az erő vetítése tengelyre	7
2.6.2. Az erő analitikai alakja	9
3. VEKTOR STATIKA	10
3.1. A statika alaptételei (aksziómái)	10
3.2. Kényszerek és reakcióik	13
3.2.1. Sima felület-támasztás	13
3.2.2. Nyújthatatlan kötél	13
3.2.3. Hengeres csukló	14
3.2.4. Görgős hengeres csukló	14
3.2.5. Gömbcsukló	15
3.2.6. Befogás	15
3.2.7. Vezető	16
3.2.8. Súlytalan rúd	16
3.3. Erők összeadása	16
3.3.1. Közös támadáspontú erők összeadása	16
3.3.2. Erő két komponensre bontása	17
3.3.3. Két egyirányú párhuzamos erő eredője	17
3.3.4. Két ellentétes irányú párhuzamos erő eredője	18
3.3.5. Kitérő erők eredője	18
3.3.6. Közös ponton átmenő síkbeli erőrendszer eredője	19
3.3.7. Egyensúly	20
3.3.8. Statikailag határozott és határozatlan feladat	21
3.4. Erőpárok összeadása	24
3.4.1. Erőpárok egyensúlya	25
3.5. Az erő pontra számított nyomatéka	26
3.5.1. Hogyan változik az erő pontra számított nyomatéka a nyomatéki pont változásával?	26
3.5.2. Mi a különbség az erőpár és az erő forgatóhatása között?	27
3.6. Általános síkban ható erő és erőpárrendszer	27
3.6.1. Varignon féle téoréma	30
3.6.2. Síkbeli merev testek egyensúlya	34
3.7. Az erő tengelyre számított nyomatéka	38
3.8. Általános térbeli erő és erőpárrendszer	40
3.8.1. Általános térbeli erő és erőpárrendszer invariánsai	44
3.8.2. Varignon féle téoréma	45
3.8.3. Térbeli merev testek egyensúlya	51
3.9. Merev test súlypontja	51

3.9.1. A súlypont bizonyítása.....	51
3.9.2. A merev test súlypontjának meghatározása.....	52
3.9.3. Homogén testek súlypontjai.....	53
3.9.4. Homogén felület súlypontja.....	54
3.9.5. Homogén vonal súlypontja.....	54
3.9.6. Néhány példa súlypont meghatározására.....	54
3.9.7. Pappus - Guldin tételek.....	57
4. TARTÓSZERKEZETEK.....	61
4.1. Megoszló terhelés.....	61
4.2. Lineáris tartók.....	62
4.3. Tartók.....	62
4.4. Hajlító nyomaték, csavarónyomaték, rúd irányú és nyíró erő.....	63
4.5. Példák tartók terhelésére.....	68
4.5.1. Tartó függőleges erővel terhelve.....	68
4.5.2. Tartó erőpárral terhelve.....	70
4.5.3. Tartó amelyre két erőpár hat.....	71
4.5.4. Tartó egyenletesen megoszló terheléssel terhelve.....	71
4.5.5. Tartó háromszög alakú megoszló terheléssel terhelve.....	73
4.5.6. Befogott tartó a végén koncentrált erővel terhelve.....	74
4.5.7. Befogott tartó egyenletesen megoszló terheléssel terhelve.....	75
4.6. Rácsos szerkezetek.....	81
4.6.1. Csomóponti módszer.....	82
4.6.2. Az átmetsző módszer (Ritter-féle módszer).....	85
4.7. Kötél (láncgörbe).....	86
4.7.1. Láncgörbe koncentrált erőkkel terhelve.....	86
4.7.2. Megoszló terheléssel terhelt köté.....	88
4.7.3. Parabolikus láncgörbe.....	90
4.7.4. Közöséges láncgörbe.....	91
5. NEMIDEÁLIS TÁMASZOK.....	94
5.1. Csúszósúrlódás.....	94
5.2. A súrlódási kúp.....	95
5.3. Kötésúrlódás.....	99
5.4. Gördülőellenállás (gördülési súrlódás).....	101
6. ANALITIKUS STATIKA.....	103
6.1. Az általános (generalizált) koordináta és a szabadságfok fogalma.....	103
6.1.1. Példák generalizált koordináták meghatározására.....	104
6.2. A virtuális elmozdulás és elfordulás fogalma.....	107
6.3. Virtuális munka.....	108
6.3.1. Erő virtuális munkája.....	108
6.3.2. Erőpár virtuális munkája.....	110
6.4. Ideális támaszok.....	110
6.5. Generalizált erők.....	112
6.6. A virtuális munka elve.....	113
6.7. Az egyensúlyi helyzet stabilitása.....	122
7. IRODALOM.....	126

1.BEVEZETÉS

A mechanika a fizika egy része, amely az anyagi testek egymásközi *mechanikai hatásával* illetve a *mechanikus mozgásokkal* foglalkozik.

Mechanikai hatás alatt értendő a testek olyan kölcsönhatása, amellyel mozgást vagy alakváltozást fejtenek ki, illetve amellyel egy test egy másik test mozgását korlátozza.

A műszaki gyakorlatban az u.n. *klasszikus mechanika* törvényeit tanulmányozzák (olyan jelenségeket, amelyek sebessége csekély a fénysebességhez képest - $3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$), ezeknek a törvényeknek alapjait még Isaac Newton fektette le híres művében *A természettudományok matematikai alapjai (PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA - 1687. évben.)*

Már az idők kezdete óta az ember, fennmaradása érdekében, izomerejét igyekezett helyettesíteni vagy pótolni valamilyen műszaki szerkezettel, megoldással. Kezdve a kőbaltától, a primitív örlő és fonó eszközökön keresztül, különböző szerszámokra és emelőszerkezetekre is szüksége volt, de szállítóeszközöket is használt mind szárazföldön mind vizen. Az ember, ezeken az eszközökön keresztül szerzett tapasztalatai alapján, meg szeretne vona érteni, valamint megmagyarázni a mozgás és az egyensúly törvényszerűségeit. Így alakult ki tulajdonképpen a mechanika, mint az ember életének egy meghatározó eleme az életért való harcban.

A "mechanika" mint elnevezés a *μηχανη* Görög szóból ered, amely mai értelemben szekreztet - konstrukciót, gépet illetve találmányt jelent. A mechanikának mint tudománynak, alapjait még az ó Görögök fektették le, mégpedig a legrégebb ágával a *statikával*. *Arkhimédész* Szirakúzából (i.e. 287-212) elsőnek alkotta meg az emelő törvényét, a folyadékok felhajtó erejét, sőt a csavar felfedezését is neki tulajdonítják. *Héron* (kb. i.e. 120-ban) kibővítette az emelő törvényét, megalkotta az ék a csavar és a fogaskerék törvényszerűségeit. Az Alekszandriai iskola letűnésével a 7. században, hosszú megtorpanás tapasztalható a mechanika de az egész tudomány terén.

A középkor második felében, a gazdasági viszonyok javulásával párhuzamosan, új műszaki felfedezések is kezdődnek: a 9. században megalkották a vizimalmot, a 14. században megjelenik a puskapor amelyet Kinából importálnak és a 15. században felfedezik a könyvnyomtatást is.

Az újkorban, miután felfedezték Amerikát, a termelés fokozása érdekében sokféle probléma adódik főként a mechanika és az asztronómia területéről, amelyekre a tudománynak kell megtalálnia a megoldást. A tengerhajózás mind nagyobb hajók építését követeli meg, amelyeket igen precízen kell navigálni is. A bányászat fejlődésével fűróberendezéseket, emelőszerkezeteket, vízpumpákat valamint a bányák szellőztetését kellett megoldani, amely komoly problémákat vetett fel, többek között a mechanikának.

A technika de a tudományok fejlődésének, mint ahogy az általában lenni szokott, a hadiipar a mozgató rugója. A tűzfegyverek megjelenésével elkezdődött a gázok mozgásainak tanulmányozása, a hatás és ellenhatás vizsgálata, valamint az anyagok szilárdsági vizsgálata. Így a 16. és a 17. században a mechanika erőteljesen fejlődött. Abban az időben élt *Leonardo da Vinci* (1452-1519), *Kopernikusz* (1473-1543), *Galilei Galileo* (1564-1642) és mások. Úgy tartják, hogy Galilei a klasszikus mechanika megalapítója. Ő alkalmazott elsőnek kísérleti kutatásokat és definiálta a szabadesés törvényét, a lejtő mozgástörvényét, amelyekből a mechanika egyik alaptételét vezette le a *tehetetlenség elvét*. A mechanika fejlődésének legnagyobb lendületet *Isaac Newton* (1643-1727) adott, elődeinek tudását egységesítve *A természettudományok matematikai alapjai* művében a testek mozgáselméletét fejtette ki, amellyel megalapozta a mechanikának mint tudománynak az alapjait, amelyet éppen ezért még *Newtoni illetve klasszikus mechanikának* is szokás nevezni.

Newton volt az, aki a mechanikában bevezette az integrál és differenciál számítást és ezzel új távlatokat nyitott mind a matematikusok, mind a fizikusok részére a mechanika problémáinak megoldásában.

Komoly előrehaladást jelentett sok tudós munkája ezen a téren, melyek közül jelentősek az ismert matematikusok és fizikusok mint **Huygens, Bernoulli, Euler** munkái.

A mechanika fejlődéséhez a 18. században igen jelentősen hozzájárultak **Lagrange, Laplace, D'Alambert, Poisson, Hamilton** és mások munkáikkal.

A 19. században az ipar jelentős fejlődésével, az elméleti mechanika alapján kifejlődött a gyakorlati mechanika az u.n. **műszaki mechanika**, amelynek ismerete a mérnöki gyakorlatban elengedhetetlen, és tulajdonképpen ezt a mechanikát tanítják minden műszaki képzés során.

A műszaki mechanika fejlődésében jelentős szerepet vállaltak **Hooke, Navier, Coulomb, Coriolis, Maxwell, Jung** és még sokan mások.

A 20. században **Einstein** megalkotja reletivitáselméletét, amely némileg átformálta a klasszikus mechanika törvényeit olyan mozgások esetén, amelyeknek sebessége közelít a fény sebességéhez.

A vizsgálendő objektumtól függően a mechanika felosztható:

- szilárd testek mechanikájára,
- folyadékok mechanikájára,
- gázok mechanikájára.

A szilárd testek mechanikájának egyik része a **merev test mechanikája**, amely tovább felosztható:

STATIKÁRA, amely az egyensúlyi helyzetek törvényszerűségeivel foglalkozik, vagyis a nyugalmi állapottal mint a mozgás különleges esetével, illetve azokkal a szabályokkal melyekkel az erőket és az erőpárokat egyszerűsíteni lehet. A statikában előforduló mennyiségek az **erő** és a **hosszúság**.

KINEMATIKÁRA, amely a testek mozgásaival foglalkozik, figyelmen kívül hagyva azokat az okokat amelyek a mozgást előidézték. A testek mozgásait adott geometriaia körülmények között, az idő függvényében tárgyalja. A kinematikában előforduló mennyiségek a **hosszúság** és az **idő**.

DINAMIKÁRA, amely a testek mozgásait tanulmányozza és az erőket amelyek a testre hatnak, figyelembe véve a test **tömegét** is. A dinamikában előforduló mennyiségek a **hosszúság, idő, erő** és a **tömeg**.

2. ALAPFOGALMAK, ALAPTÉTELEK

2.1. A MECHANIKUS MOZGÁS ÉS NYUGALMI ÁLLAPOT

Egy test mozog-e, vagy nyugalmi állapotban van, csak úgy állapítható meg ha ismert a test helyzetének időbeli változása. A térben egy test helyzetének változását csak egy másik térbeli test helyzetéhez képest lehet érzékelni. Tehát minimum két test jelenléte szükséges, ha ez nem adott, akkor u.n. "üres" térről van szó, amelyben a mozgás vagy a nyugalmi állapot nem érzékelhető.

Amikor a vizsgált test helyzete nem változik egy másik test helyzetéhez képest, akkor a vizsgált test statikus egyensúlyi állapotban van a másik testhez képest.

Az a test amelyhez képest a mozgás illetve a nyugalmi állapot viszonyítható az az **abszolút nyugvó test**.

Amennyiben az a test is mozog amelyhez képest egy másik test mozgása a vizsgálat tárgya, abban az esetben **a vizsgált test relatív mozgást végez, illetve relatív nyugalmi állapotban van.**

Testek helyett a statikában **koordináta rendszerek** használatosak, amelyek lehetnek:

- **abszolút nyugvó koordináta rendszer,**
- **mozgó koordináta rendszer.**

2.2. TÉR ÉS IDŐ

Mindennemű mechanikus mozgás a térben történik, az idő függvényében.

A tér is, az idő is az anyagi világ megnyilvánulásai.

A mozgások az **euklídeszi háromdimenziós térben** definiáltak, amely homogén (minden pontjában azonos tulajdonságú), izotróp (minden irányban azonos tulajdonságú) és folytonos.

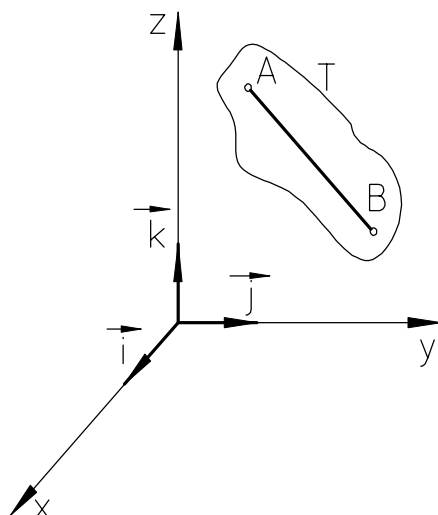
Minden vizsgálatra ebben a térben, vonatkoznak az Euklídeszi geometria módszerei:

- a hosszúság mérésének mértékegység a méter [m],
- az idő mérésére pedig a szekundum [s] vagy [sec] szolgál.

A mechanikában az idő abszolút és univerzális, nem függ a mozgásoktól és a test térbeli helyzetétől, mindig pozitív mennyiség amely állandóan növekszik.

Bármennyi időpillanat jele t a kezdő időpillanat jele (amelyben a mozgás elkezdődött) t_0 .

2.3. A TEST FOGALMA A MECHANIKÁBAN



2.1. ábra. Descart-féle koordináta rendszer

A mechanika jelenségeinek tanulmányozására rendszerint a **Descartes** féle háromdimenziós koordináta rendszer használatos (2.1. ábra). Ennek egységvektorai $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (ortjai) a következő összefüggést adják:

$$\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$$

A (T) test a tér egy része, amely folytonosan ki van töltve szilárd anyaggal. Minden testnek van tömege, amely mindig pozitív mennyiség.

A valós világban előforduló testek ellenben mind alakíthatók, és mivel alakjuk és köbtartalmuk változó ezek a **szilárd testek**. A szilárd testek esetében bármely távolság $AB \neq const$.

Ideális esetben, amennyiben egy test sem alakját sem köbtartalmát nem változtatja, tehát bármely távolság $AB = const$, ilyen a **merev test**.

A mechanikában igen sűrűn előfordul, hogy az **anyagi pont** mozgása a vizsgálat tárgya, vagyis olyan testé amelynek méretei elhanyagolhatóan kicsinyek, csak tömege létezik.

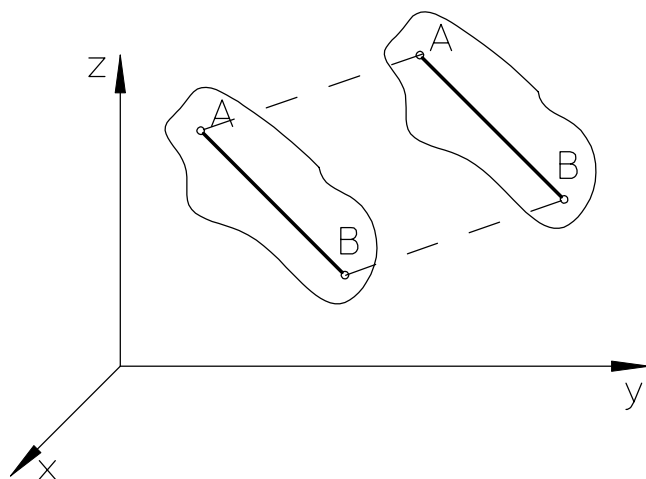
A mozgások viszonyát tekintve, a testek mozoghatnak:

- **szabadon**, amennyiben a helyzetváltoztatás szabadon történik (eldobott labda),
- **kötötten - kényszerpályán**, amikor a test mozgása valamivel korlátozott (labda az asztalon, ahol az asztal képezi a kötöttséget).

2.4. ALAPMOZGÁSOK

Egy test bármely mozgása két alapmozgás összetevőjeként határozható meg, ezek a **haladó mozgás (transzláció)** és a **tengely körüli forgás**.

A **transzláció** olyan mozgás, amelynek folyamán minden gondolatbeli vonal (AB) a mozgás tartama alatt állandóan párhuzamos marad kezdeti helyzetével, mind ahogy azt a 2.2. ábra mutatja.



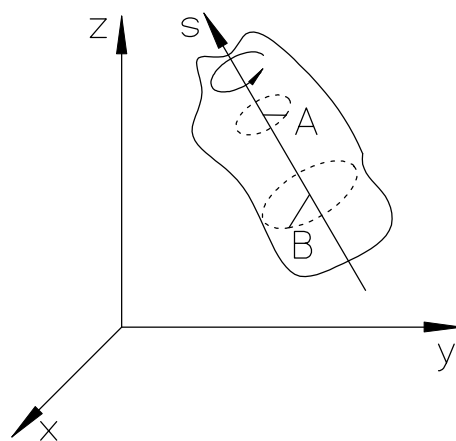
2.2. ábra. Haladó mozgás (transzláció)

helyezkednek el nyugalomban vannak, a többi pont viszont koncentrikus körökön mozog az adott nyugvó tengely körül, ahogy az a 2.3. ábrán látható.

Amennyiben a mozgás iránya, a forgástengely pozitív irányából nézve ellentétes irányú az óra járásával, akkor ez a pozitív forgásirány (2.3. ábra).

A **forgás** a másik alapmozgás a térben, egy s tengely körül, amely ugyancsak lehet állandó helyzetű vagy mozgó a térben.

A test azon pontjai amelyek az s tengelyen



2.3. ábra. Forgó mozgás

2.5. MECHANIKAI HATÁS

Mechanikai hatás alatt a testek olyan egymáshatása értendő, amely mozgásváltoztatáshoz, nyugalmi helyzet változtatáshoz illetve alakváltoztatáshoz vezet.

Mechanikai hatás kiváltható (2.4. ábra):

- **közvetlen érintkezéssel**, mint pl. két test T_1 és T_2 ütközése,

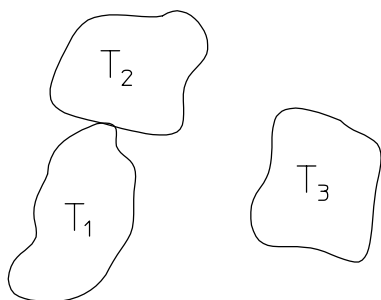
- **közvetlen érintkezés nélkül**, mint pl. a T_2 és T_3 valamint a T_1 és a T_3 bolygóké.

A kiváltott mozgás (pl. $T_1 \rightarrow T_2$ vagy $T_3 \rightarrow T_2$) amely nyugalmi állapotból indul különféle lehet.

Külön feltételek mellett a kiváltott mozgás lehet:

- **haladó (transzláció)**, pl. a jégkorong mozgása miután azt a bottal megütötték. Ezt a mozgást **erő** váltja ki.

- **forgás álló tengely körül**, pl. bűgőcsiga, amelynek a mozgása **erőpárral** váltható ki úgy, hogy azt újjunkkal megpördítjük.



2.4. ábra. Mechanikai hatás

2.5.1. AZ ELSŐ MECHANIKAI HATÁS \Rightarrow ERŐ

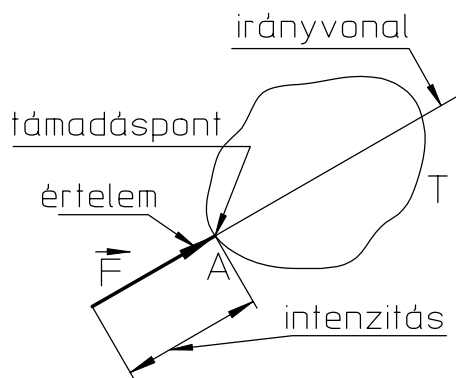
Erővel olyan mechanikai hatás váltható ki, amely egy nyugvó test esetén annak **haladó** mozgását idézi elő.

Az erő vektormennyiség, amelynek hatása egyértelműen meghatározható:

- **irányával és irányítottságával,**
- **intenzitásával (nagyságával),**
- **támadáspontjával.**

A kiváltott mozgás iránya megegyezik az erő irányával és irányítottságával. Mint például, a föld vonzóereje, amely mindennemű testre függőleges irányban hat. Két sima golyó esetében amelyek felületükkel érintkeznek, az itt jelentkező nyomás iránya a felületek érintőirányában hat az érintkezési pontban.

Az erő nagysága (intenzitása) az egységnyi erő viszonyával egyenlő. A statikában az egységnyi erő mértékegysége a **Newton** [N].



2.5. ábra. Erő

A testek mozgásának tanulmányozásakor legtöbbször ezekre több erő hat **erőrendszert** alkotva (S_1 a 2.6. ábrán), amely N erőből áll \vec{F}_1 től \vec{F}_N -ig. Ha ez az erőrendszer amely a merev testre hat helyettesíthető egy másik erőrendszerrel oly módon, hogy a vizsgált test mozgása illetve nyugalni helyzete változatlan marad (S_2 az \vec{F}_1^*, \vec{F}_2^* erőkkel 2.6. ábra), akkor ez a két erőrendszer **ekvivalens (egyenértékű)**. Amennyiben az adott erőrendszer egyetlen erővel egyenértékű, ennek a helyettesítő erőnek a neve **az erőrendszer eredője** (S_3 a 2.6. ábrán). Az eredő \vec{F}_r olyan erő, amely egyedül helyettesíti az egész erőrendszer hatását a merev testre.

Egy erő hatását kifejezheti egyetlen pontban, az ilyen erő a **koncentrált** erő, illetve felületen amikor **megoszló (kontinuális)** erőkről van szó. A merev test egyensúlyi helyzetének tanulmányozásakor a megoszló erők mindenkor helyettesíthetők koncentrált erővel (eredővel), amelynek hatása egyenértékű a megoszló erőkkel. Azon erő amely mozgást vált ki **aktív erő** pl. a föld vonzóereje, elektromágneses erő, gravitáció stb. Olyan erők viszont amelyek nem válthatnak ki mozgást, sőt a mozgást gátolják **passzív erők** pl. surlódóerő és a különböző támaszok reakciói.

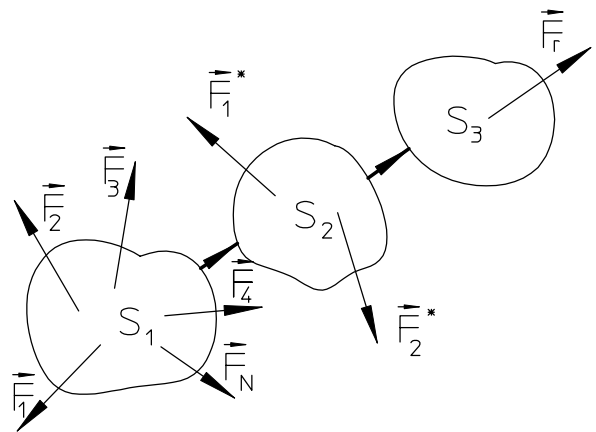
Az erők hatásukat tekintve lehetnek külső illetve belső erők. **Külső erő** az az erő, amely egy másik test hatása által jön létre, és ezekkel az erőkkel foglalkozik a statika. **Belső erők** egy ugyanazon testben képződnek annak részecskéi egymáshatásától, és ezekkel a szilárdságtan valamint a kontínuummechanika foglalkozik.

A **támadáspont** az a pont amelyben az erő mechanikus hatást fejt ki (A pont). Az erő támadáspontján halad keresztül az erő **irányvonala**. Mindezek a jellemző tulajdonságok a 2.5. ábrán láthatók.

A fent említettek alapján megállapítható, hogy az erő összesen négy adattal jellemezhető, ezek:

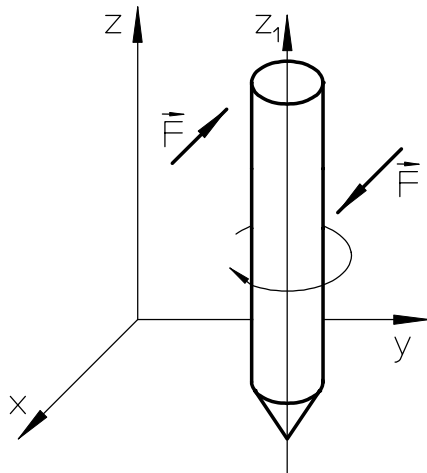
1. **irány,**
2. **értélem (irányítás),**
3. **nagyság (intenzitás),**
4. **támadáspont**

Az erőt \vec{F} vektorral szokás jelölni, amely mindenkor a támadásponton halad keresztül, tehát nem szabad vektor, és **tilos párhuzamosan elmozdítani**.



2.6. ábra. Egyenértékű (ekvivalens) erőrendszer

2.5.2. A MÁSODIK MECHANIKAI HATÁS \Rightarrow ERŐPÁR ÉS NYOMATÉKA



2.7. ábra. Erőpár

Az **erőpár** olyan mechanikai hatás, amely **kizárólag forgató hatást** kelt, és a merev testet egy mozdulatlan forgástengely körül igyekszik elfordítani. Ennél a hatásnál a testre két egyenlő nagyságú, párhuzamos hatásvonalú és ellentétes értelmű egy síkban ható erő hat, amely a forgástengelyre merőleges, mint ahogy azt a 2.7. ábra szemlélteti.

Az erőpár három tulajdonsággal jellemezhető:

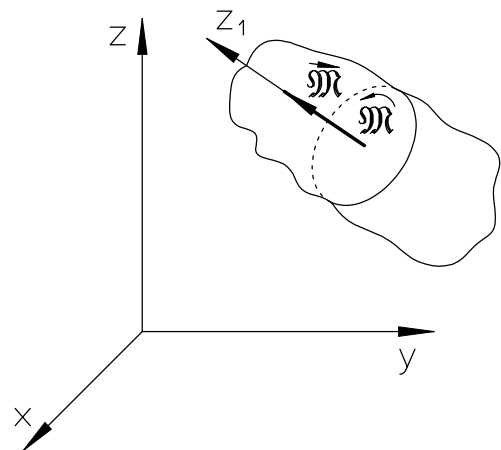
1. **forgástengellyel,**
2. **forgásiránnyal,**
3. **forgatóhatással.**

A forgástengely mindig merőleges arra a síkra, amelyben az erők hatnak. A forgásirány az az irány, amelyben az erőpár a testet megfordítani igyekszik a tengely körül. A forgatóhatás az erőpár **nyomatéka** amely az erőpár intenzitását, mértékét

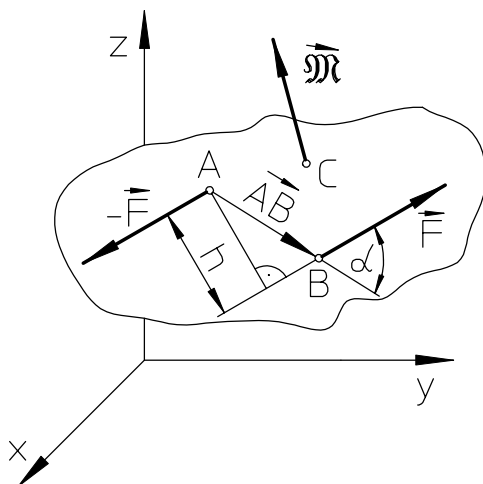
fejezi ki, mértékegysége a [Nm].

Az erőpár mechanikai hatása (terhelése) is kifejezhető mint vektormennyiség az \vec{M} vektorral, amelyet **az erőpár vektorának (erőpár tengelyértékének)** hívnak. Ennek a vektornak a nagysága egyenlő az erőpár nyomatékával. Iránya megegyezik az erőpár tengelyének irányával. Irányítása (nyila) megadja a forgás értelmét. Abba az irányba mutat amelyből a nyíllal szembenézve a forgás pozitív értelmű (az óramutató járásával ellentétes irány) 2.8. ábra.

Az **erőpár** hatása egy merev testre bemutatatható **erők nyomatékával**, amelyeknek hatása egyenértékű az erőpárral. Az erőpár nem tekinthető két független erő véletlen kombinációjának, hanem mint egy statikai egész, amely éppen olyan alapfogalma a statikának mint az erő. Az erőpárt két párhuzamos erő alkotja melyeknek nagysága megegyezik, de ellentétes az értelmük \vec{F} és $-\vec{F}$, valamint egy síkban **az erőpár síkjában** helyezkednek el. Az erők közti legrövidebb távolság az erők hatásvonalára merőleges vonal (h), amely az **erőpár karja**. Az erők támadáspontjai az A és B pontok, mint az a 2.9. ábrán látható. Az **erőpár nyomatékának nagysága (intenzitása)** $M = F \cdot h$. Az erőpár vektora \vec{M} merőleges az erőpár síkjára, és kiszámítható az \vec{AB} vektor (vagy bármely más vektor, amely az erők hatásvonalán elhelyezkedő tetszőleges két pontot köt össze) és az erőpár \vec{F} vektorának vektoriális szorzataként.



2.8. ábra. Az erőpár vektora



2.9. ábra. Erők alkotta erőpár

Az erőpár vektora \vec{M} merőleges az erőpár síkjára, és kiszámítható az \vec{AB} vektor (vagy bármely más vektor, amely az erők hatásvonalán elhelyezkedő tetszőleges két pontot köt össze) és az erőpár \vec{F} vektorának vektoriális szorzataként.

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}. \quad (2.1)$$

Ennek a vektoriális szorzatnak nagysága $AB \cdot F \cdot \sin \alpha$, ahol α az \vec{AB} és \vec{F} vektorok között bezárt szög 2.9. ábra.

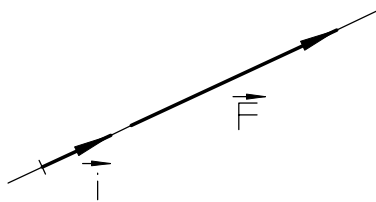
Az ábráról látszik, hogy $AB \cdot \sin \alpha = h$ tulajdonképpen az erőpár karja, amelyből következik, hogy a vektoriális szorzat (2.1) nagysága $M = F \cdot h$. Az erőpár vektora \vec{M} nem ponthoz kötött vektor, így az erőpár síkjának bármely (C) pontjában megadható. Az erre vonatkozó bizonyítás a következőkben lesz tárgyalva.

Az előzőekben, mint az erők nyomatékaiként tárgyalt erőpár alapján leszögezhető, **hogy minden erőpár bemutatható végtelen sok különböző erő nyomatékaiként, amelyek az erőpár síkjában hatnak.** Két különböző nagyságú (intenzitású) ellentétes irányú párhuzamos erőnek, amelyek közös síkban helyezkednek el, tehát erőpárt képeznek, választható olyan erőpár kar, hogy nyomatékaik megegyezzenek. Különböző erők nyomatékai, amelyek helyettesíthetik ugyanannak az erőpárnak nyomatékát, amennyiben szilárd testre (olyan testre amely alakítható) hatnak, különbözőképpen deformálják azt. Ezért ki kell hangsúlyozni, hogy **egy erőpár csak abban az esetben helyettesíthető ekvivalens (egyenértékű) erőpárral** ha hatása kizárólag **merev testre** vonatkozik.

2.6. AZ ERŐ VETÜLETEI

Az \vec{F} erő vektor, és gyakran meg kell határozni a koordináta rendszer tengelyeire vett ortogonális vetületeit. Mivel az \vec{M} erőpár úgyszintén vektor, vetítése megegyezik az erő vetítésével, így külön nem szükséges tárgyalni.

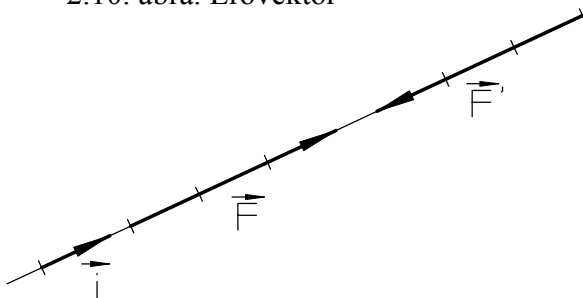
2.6.1. AZ ERŐ VETÍTÉSE TENGELERE



2.10. ábra. Erővektor

Ha az \vec{F} erő irányvonalában egy \vec{i} egységvektor lesz felvéve (2.10. ábra), az \vec{F} erővektor felírható mint $\vec{F} = F_i \cdot \vec{i}$ ahol F_i az \vec{F} erő **algebrai értéke**, vagyis nagysága.

Ha F_i pozitív, az erő iránya megegyezik az \vec{i} irányával. Ha F_i negatív ($-F_i$) az erő iránya ellentétes az \vec{i} egységvektor irányával.



2.11. ábra. Az erő nagysága és iránya

Például:

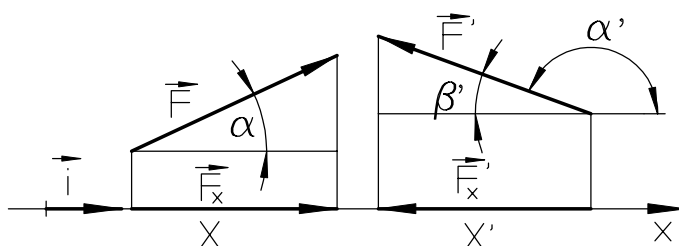
$\vec{F} = 3\vec{i}$ az erő iránya megegyezik az \vec{i} irányával,
 $\vec{F}' = -3\vec{i}$ az erő ellentétes irányú mint az \vec{i} .

Az **erő nagysága (intenzitása)** egyenlő az erő algebrai értékének abszolút nagyságával $F = |F_i|$,

mint azt a 2.11. ábra szemlélteti.

Az erő vetülete tengelyre, amely ugyanabban a síkban helyezkedik el, szintén vektor. Vetülete megkapható az \vec{F} vektor végpontjainak ortogonális vetületeként (2.12. ábra). A vetület felírható $\vec{F}_x = X \cdot \vec{i}$ alakban, ahol X az \vec{F} vektor x tengelyre képzett **vetületének algebrai értéke**.

Az \vec{F} erőnek az x tengelyre vett vetületének algebrai értéke tehát a következő:



2.12. ábra. Az erő vetülete azonos síkban levő tengelyre

$$F_x = X = F \cdot \cos \alpha,$$

Az erő vetülete pozitív ha hajlásszöge hegyesszög.

Az \vec{F}' erő esetében:

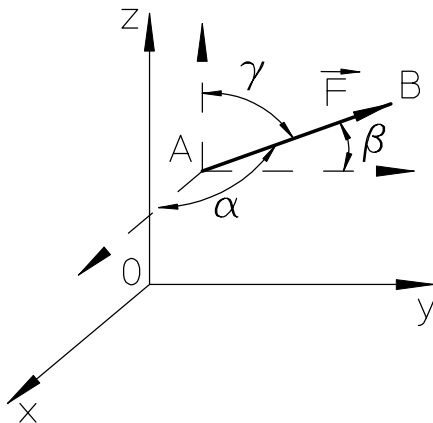
$$F'_x = X' = F' \cos \alpha' = -F' \cdot \cos \beta'.$$

Vetülete negatív, mivel tompa szöget zár be.

Térbeli erő esetében, annak vetítését mindhárom koordináta tengelyre (x,y,z) el kell végezni és definiálni kell mindhárom ortogonális vetületét.

A rendelkezésre álló adatoktól függően, amelyekkel az erő térbeli helyzete adott, a vetületei kétféleképpen határozhatók meg.

1. Eset, amikor ismert az F erő nagysága (algebrai értéke) és az α, β, γ szögek amelyeket a koordináta tengelyekkel bezár. Ekkor az erő ortogonális vetületeinek nagyságai (vetületeinek algebrai értékei) 2.13. ábra, egyenlőek:



2.13. ábra. Térbeli erő vetületei

$$\begin{aligned} F_x = X &= F \cdot \cos \alpha, \\ F_y = Y &= F \cdot \cos \beta, \\ F_z = Z &= F \cdot \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Az α, β, γ szögek nem függetlenek, mert felírható:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.3)$$

Amiből az következik, hogy az erő tengelyirányú vetületeinek meghatározásához elegendő három független adatot ismerni.

Az α, β, γ szögek kiszámíthatók az erő irányvonalán elhelyezkedő két A és B pont koordinátaiból is, a következő

összefüggések alapján:

$$\cos \alpha = \frac{x_B - x_A}{AB}, \quad \cos \beta = \frac{y_B - y_A}{AB}, \quad \cos \gamma = \frac{z_B - z_A}{AB},$$

ahol az AB távolság

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

2. Eset, amikor a vetítéshez az \vec{F} erőn áthaladó és az xOy síkra merőleges π segédsík előnyös (2.14. ábra). Ekkor az ismert δ szög alapján meghatározható az F erő \vec{F}_{xy} és \vec{F}_z vetülete:

$$F_{xy} = F \cdot \cos \delta,$$

$$Z = F \cdot \sin \delta.$$

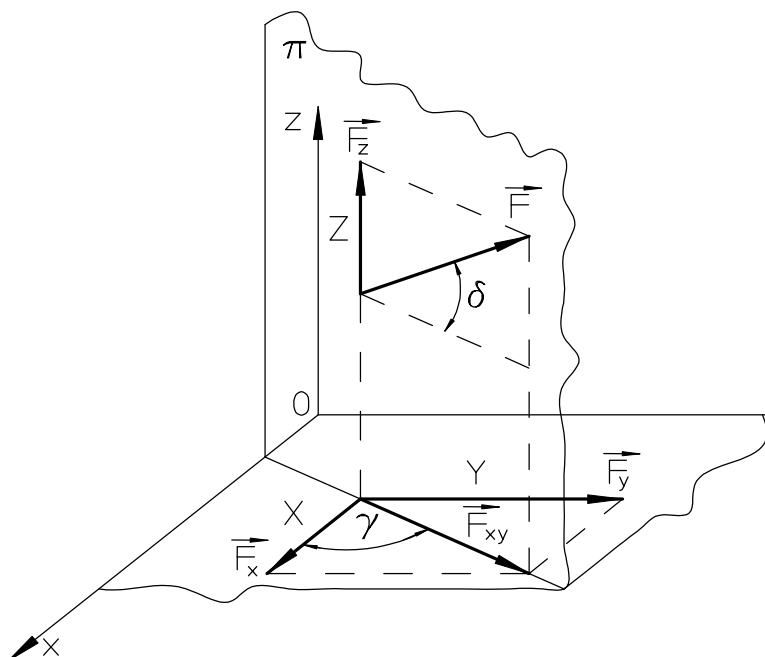
Majd az ismert γ szög alapján a többi tengelyirányú vetülete is:

$$\begin{aligned} F_x = X &= F_{xy} \cdot \cos \gamma = F \cdot \cos \delta \cdot \cos \gamma, \\ F_y = Y &= F_{xy} \cdot \sin \gamma = F \cdot \cos \delta \cdot \sin \gamma, \\ F_z = Z &= F \cdot \sin \delta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ha az erő vetületeinek algebrai értékei ismertek, akkor az erő vektorát a következő összefüggés adja:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}. \quad (2.5)$$

Megegyezés szerint az erő tengelyirányú ortogonális vetületei



2.14. ábra. Térbeli erő közvetett vetítése

alatt annak algebrai értékei értendőek (X, Y, Z, F_x, F_y, F_z) amely elégséges is, hiszen a koordináta tengelyek által egyértelműen meghatározott ezeknek a vektoroknak nagyságuk, értelmük és irányuk.

2.6.2. AZ ERŐ ANALITIKAI ALAKJA

A feladat ebben az esetben az erő vetítésével ellentétes. Az erő ismert F_x, F_y, F_z ortogonális vetületei alapján meg kell határozni az erő nagyságát és térbeli helyzetét.

A (2.2) összefüggés négyzetre emelésével, valamint összeadásával a (2.3) összefüggést figyelembe véve az erő nagysága:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (2.6)$$

Íránykoszinuszai a (2.2) összefüggés alapján:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \cos \gamma = \frac{F_z}{F}. \quad (2.7)$$

Az így meghatározott térbeli vektorok párhuzamos vektorok halmazát adják.

Egy bizonyos erő vektorának meghatározásához ismerni kell annak támadáspontját is.

Amennyiben erőpár vektoráról van szó, azt a fenti összefüggések egyértelműen megadják, mivel az erőpár vektora szabad vektor.

Ha az erő síkban helyezkedik el, ezek az összefüggések valamennyivel egyszerűbbek, alakjuk a következő:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (2.8)$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \cos \beta = \frac{F_y}{F}. \quad (2.9)$$

3. VEKTOR STATIKA

Olyan problémák tárgyalása esetén, amelyek során egy test alakváltozása a terhelésekhez képest elhanyagolható, az ilyen test **merev testnek** tekinthető. Az ilyen problémák **statikailag meghatározott** problémák, melyekben az ismeretlenek száma megegyezik a **statikai egyensúlyi egyenletek** számával.

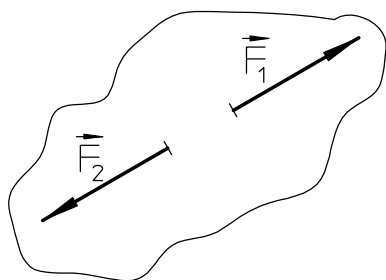
A vektor statika alapvető problémaköréi a következők:

1. A testre ható erő és erőpár-rendszer helyettesítése egyszerűbb alakkal,
2. A test egyensúlyi helyzeteinek vizsgálata, miközben erők és erőpárok hatnak rá.

A statika kizárólag statikailag meghatározott esetekkel foglalkozik.

3.1. A STATIKA ALAPTÉTELEI (AKSZIÓMÁI)

A statika néhány alaptételen - aksziómán alapszik, amelyeket fizikai megfigyelések és nagyszámú kísérleti tapasztalás előzött meg. **Akszióma v. alaptétel** az olyan igazság, amely matematikailag nem bizonyítható. Minden más matematikailag is bizonyítható igazság neve, amelyek az aksziómákból levezethetők a **teoréma**.

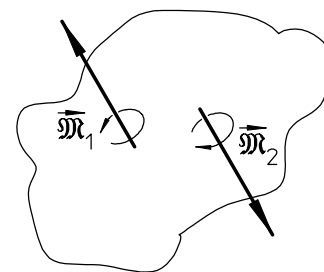


3.1. ábra. A test egyensúlyi helyzete két erő hatására

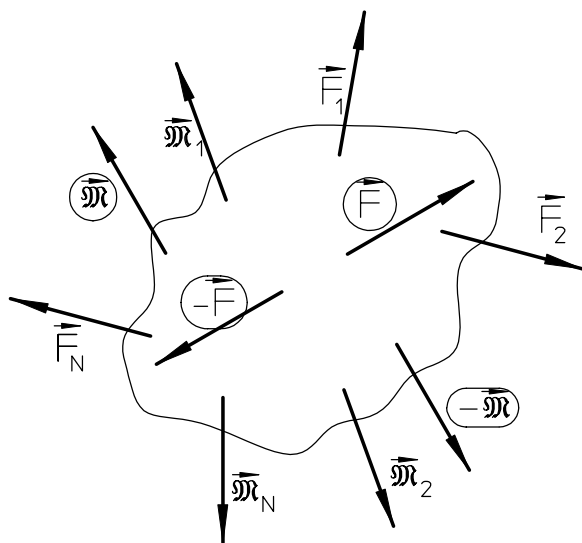
1. akszióma. Ha egy szabad merev testre két erő hat (3.1. ábra), akkor a test csak abban az esetben marad egyensúlyban ha a két erő hatásvonala közös, nagysága azonos és értelme ellentétes, vagyis $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Ez az alaptétel egyúttal a legegyszerűbb erőrendszer definíciója is, amely még képes a merev testet egyensúlyban tartani. Ez a két erő az u.n. **egyensúlyi erő**. Az olyan szabad merev test amelyre egy erő hat nem maradhat egyensúlyban.

2. akszióma. Ha egy szabad merev testre két erőpár hat (3.2. ábra), akkor a test csak abban az esetben marad egyensúlyban, ha ezek az erőpárok párhuzamosak egymással, egyenlő nagyságúak és ellentétes értelműek, illetve $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$.



3.2. ábra. A test egyensúlyi helyzete két erőpár hatására

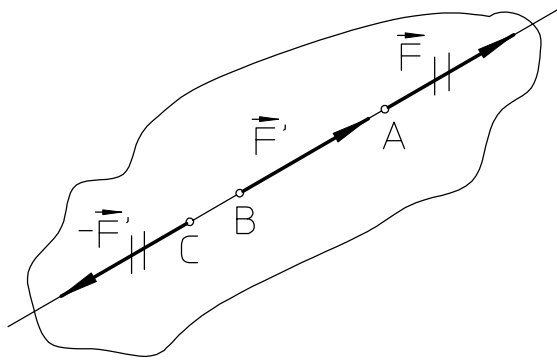


3.3. ábra. Erő illetve erőpár rendszer mechanikai hatása merev testre

Ily módon ez az alaptétel a legegyszerűbb testre ható erőpárrendszer definíciója is, amely még képes a merev testet egyensúlyban tartani, és ennek neve az **egyensúlyi erőpár**.

Az olyan szabad merev test amelyre csak egy erőpár hat, nem lehet egyensúlyban.

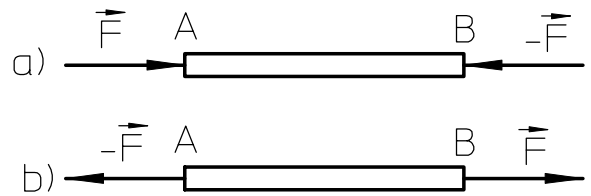
3. akszióma. Merev testre ható erő illetve erőpár rendszer (3.3. ábra) **mechanikai hatása változatlan marad, hozzáadva két egyensúlyi erőt** ($\vec{F}, -\vec{F}$), **vagy egyensúlyi erőpárt** ($\vec{M}, -\vec{M}$). Tehát, két erő illetve erőpár rendszer egyenértékű, ha legkevesebb két egyensúlyi erővel ($\vec{F}, -\vec{F}$) vagy erőpárral ($\vec{M}, -\vec{M}$) különbözik.



3.4. ábra. Erő eltolása

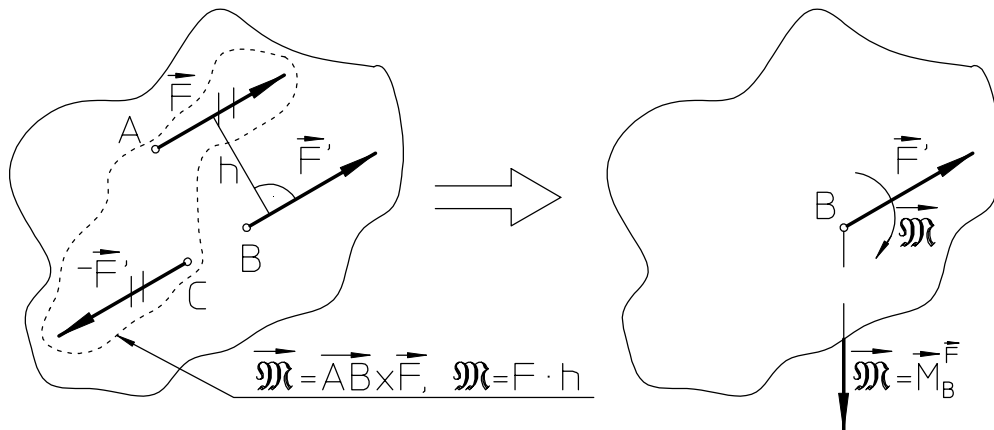
A 3. aksióma első következménye. Ha a merev testre az A pontban \vec{F} erő hat (3.4. ábra), hozzáadva két egyensúlyi erőt $-\vec{F}'$ (C pont) és \vec{F}' (B pont) ugyanabban az irányvonalban, és ha ezeknek az erőknek nagysága egyforma, $|\vec{F}|=|\vec{F}'|$ akkor két erő (\vec{F} az A pontban és $-\vec{F}'$ a C pontban) elhagyható, mert ezek egyensúlyi erők. Ezután a testre csak egy erő hat \vec{F}' a B pontban. Ebből következik, hogy az **erő amely egy merev testre hat eltolható hatásvonalára mentén anélkül hogy mechanikai hatása változna. Az erő tehát elmozdítható vektor** - vektor amely egyeneshez kötött. Fontos ellenben megjegyezni, hogy ez **csak merev testre érvényes**.

Nem merev testek esetében (olyan testek amelyek alakíthatók), a rájuk ható erő nem tolható el hatásvonalán, mivel ezáltal változik a terhelés módja, mint ahogy az a 3.5. ábrán látszik. Az a) esetben az egyensúlyban levő rud **nyomott**. A b) esetben amikor az erők elmozdultak az egyensúlyi állapot megmaradt, de a rud **húzásra** van terhelve.



3.5. ábra. Szilárd testre ható erők

A 3. aksióma második következménye.



3.6. ábra. Erő párhuzamos áthelyezése

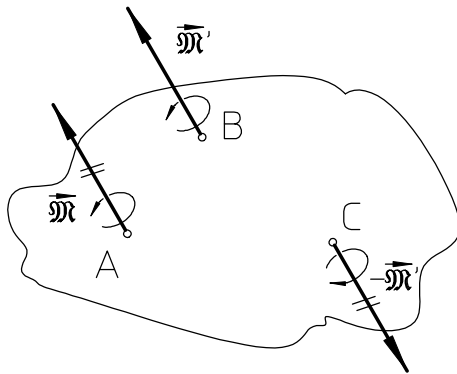
Ha egy merev test A pontjában \vec{F} erő hat, **párhuzamosan** hozzáadva két egyensúlyi erőt \vec{F}' (B pont) és $-\vec{F}'$ (C pont), melyeknek nagysága $|\vec{F}|$ és $|\vec{F}'|$ egyenlő $|\vec{F}|=|\vec{F}'|$ (3.6. ábra), ekkor az \vec{F} és $-\vec{F}'$ erőpárt alkot $\vec{M} = \vec{B}\vec{A} \times \vec{F}$, melynek nyomatéka $M = F \cdot h$. Az erőpár nyomatéka a h kartól függ. Tehát az A pontban ható erő helyett, a testre egy párhuzamosan eltolt \vec{F}' erő hat a B pontban és egy \vec{M} erőpár. Ez a folyamat az **erő adott pontra való redukálása (áthelyezése)**.

Tehát, ha a merev testre az A pontban \vec{F} erő hat, az párhuzamosan bármely B pontba áthelyezhető, de az erő hatásához egy $(\vec{M} = \vec{B}\vec{A} \times \vec{F})$ erőpár hatását kell hozzáadni, amelynek nyomatéka $M = F \cdot h$. Ez a nyomaték az \vec{F} erő B pontra számított nyomatéka, amelynek jele $\vec{M}_B^{\vec{F}}$.

Ugyanakkor ez azt is jelenti, hogy a merev test A pontjában ható \vec{F} erőnek egy másik B pontra, amely nincs az erő irányvonalán kettős hatása van:

- az \vec{F} erő a B pontban a test haladó mozgására hat,
- az \vec{M} erőpár hatása forgató hatás, a B pontban elhelyezkedő erőpár tengelye körül.

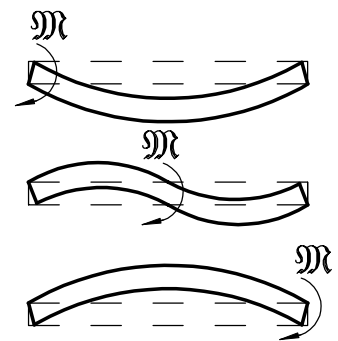
Ez az erőpár, mivel az A pontban ható \vec{F} erő B pontba való áthelyezésének (redukálásának) következménye, és az \vec{F} erő összhatásának csak a forgatóhatását képezi, enek az \vec{F} erő B **pontra számított nyomatéka** a neve, jelölése $\vec{M}_B^{\vec{F}} = \vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$. A B pont a **nyomatéki pont**.



3.7. ábra. Erőpár párhuzamos áthelyezése

A 3. aksióma harmadik következménye. Ha egy merev test A pontjában \vec{M} erőpár hat (3.7. ábra), anélkül hogy hatása megváltozna, két párhuzamos egyensúlyi erőpár $-\vec{M}'$ és \vec{M}' a B és C pontokban hozzáadható. Amennyiben ezeknek nyomatékai egyenlők $M' = M$, a $-\vec{M}'$ és az \vec{M} (az A és C pontban) elhagyhatók így megmarad az \vec{M}' a B pontban.

Ebből az a következtetés vonható le, hogy az **erőpár párhuzamosan áthelyezhető a térben anélkül, hogy mechanikai hatása a merev**

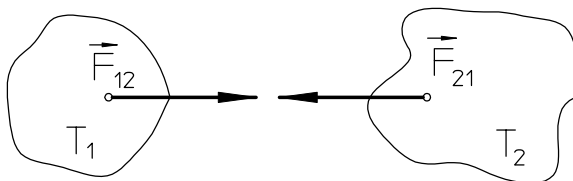


3.8. ábra. Erőpár hatása szilárd testre

testre változna. Ezért az erőpár **szabad vektor**.

Szilárd test esetében az erőpár áthelyezése tilos, mert ezzel változna a terhelés módja és a test alakváltozása is 3.8. ábra.

4. aksióma. **Két testnek egymásra gyakorolt kölcsönhatása mindig egyenlő nagyságú és irányú de ellentétes értelmű.** Ez a hatás érvényes mind erő mind erőpár, de együttes hatásuk esetén is. Ez azonos Newton harmadik (a dinamika) alaptételével, a hatás és ellenhatás törvényével.



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Az \vec{F}_{12} és $-\vec{F}_{21}$ erők **nem egyensúlyi erők**, mivel két különálló T_1 i T_2 testre hatnak 3.9. ábra.

3.9. ábra. Két test kölcsönhatása

5. aksióma. **Bármely szilárd test, ha erőrendszer vagy erőpárrendszer hatására egyensúlyban van, akkor egyensúlyban marad merev állapotban is.**

Ennek fordítottja nem érvényes, vagyis ha egy merev test egyensúlyban van, ez az egyensúlyi állapot szilárd (képlékeny) testre nem vonatkozik.

Ez a tétel a megmerevítés (szolidifikáció) elve, és gyakran előfordul a mechanikában.

6. aksióma. **Minden kötött (szabad mozgásában korlátozott) merev test szabadnak tekinthető, ha a kényszerek (amelyek szabad mozgásában korlátozzák) hatása megfelelő reakcióerőkkel helyettesíthetők.**

Olyan statikai feladatok megoldásánál amelyekben kényszerek fordulnak elő, mindig ezt a tételt kell alkalmazni.

3.2. KÉNYSZEREK ÉS REAKCIÓIK

Minden mozgásában korlátozott test kötött test, és a testet amely mozgásában korlátozza kényszernek szokás nevezni.

A test és a kényszer egymásrahatása azonos nagyságú és irányú, de értelmük ellentétes.

A kényszer hatása a **kényszer-reakció**, amely lehet:

- erő,
- erőpár,
- erő és erőpár együttes.

A kényszerek reakciói passzív természetűek - a test mozgását akadályozzák, vagyis azt kiváltani sem tudják.

A kényszerek karakterisztikus reakcióinak meghatározása mechanikai feladatok megoldásánál az egyik kulcsfontosságú művelet.

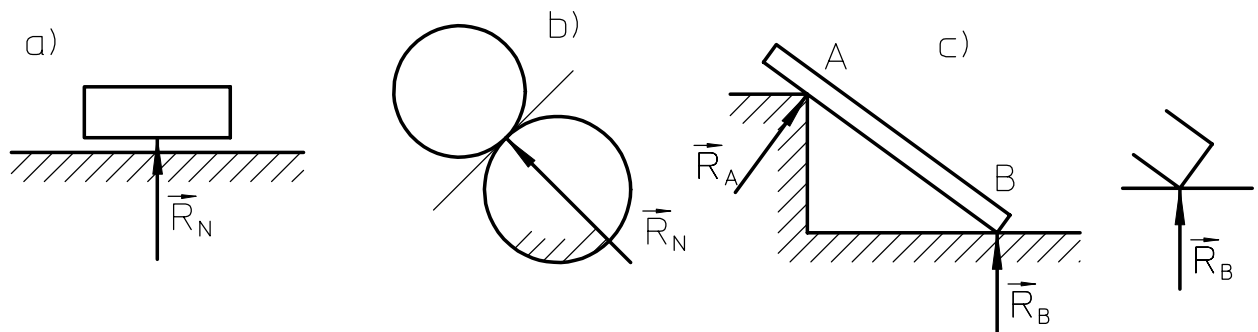
Mindenegy kényszerre pontosan meg kell határozni reakciójának formáját, irányát, míg értelme az egyensúlyi egyenletekből következik.

A továbbiakban bemutatásra kerülnek a leggyakoribb kényszerek reakciói.

3.2.1. SIMA FELÜLET- TÁMASZTÁS

Sima felületként a statikában az ideálisan sima, tehát súrlódásmentes felület értendő, amely semmiféle ellenállást (erőt) nem tanúsít a felületén csúszó testtel szemben.

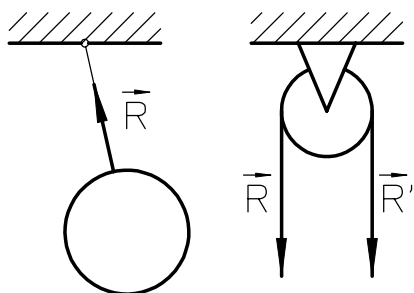
Az ilyen felület reakciója \vec{R}_N , amely a kontaktusban levő testek felületének közös pontjában hat, iránya az érintkező felszínnek normálisába esik. Az érintkezési pont a reakcióerő támadáspontja.



3.10. ábra. Sima felület-támasztás reakciója

A 3.10. ábrán néhány támasztás látható. Az a) alatt a sima felületek támasza, a b) alatt görbe felületek támasza, a c) alatt rúd támasza látható. A rúd vége egy pontban támaszkodik (B), így csak a vízszintes felületnek van érintője, ahogy az a kinagyított részleten látszik.

3.2.2. NYÚJTHATATLAN KÖTÉL



3.11. ábra. Nyújthatatlan köté

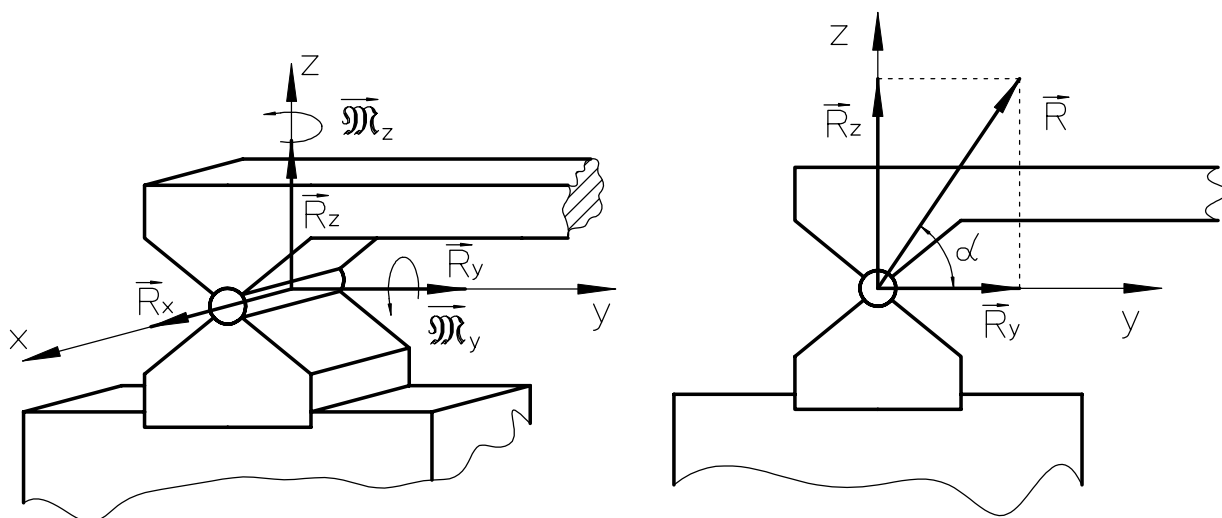
Mechanikai szempontból a köté könnyű (súlytalan), ideálisan hajlítható és nyújthatatlan.

A köté csak húzásra terhelhető, így \vec{R} reakciója mindig kötéirányban hat, a felfüggesztési pont felé 3.11. ábra.

Ha a köté sima súrlódásmentes keréken van átvetve, a reakcióerők egyenlők ($\vec{R} = \vec{R}'$), és a köté szárai irányában hatnak.

3.2.3. HENGERES CSUKLÓ


A hengeres csukló 3.12. ábra, két test hengeres csappal összekapcsolt együttese. Az ilyen támasz a csap tengelye (x tengely), körüli forgást engedélyezi, a másik két tengely (y és z) irányban ellenben elmozdulást és elfordulást is akadályoz.



3.12. ábra. Hengeres csukló

Térbeli erőrendszer hatására a támasz reakciói $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ erők, valamint \vec{M}_y, \vec{M}_z erőpárok.

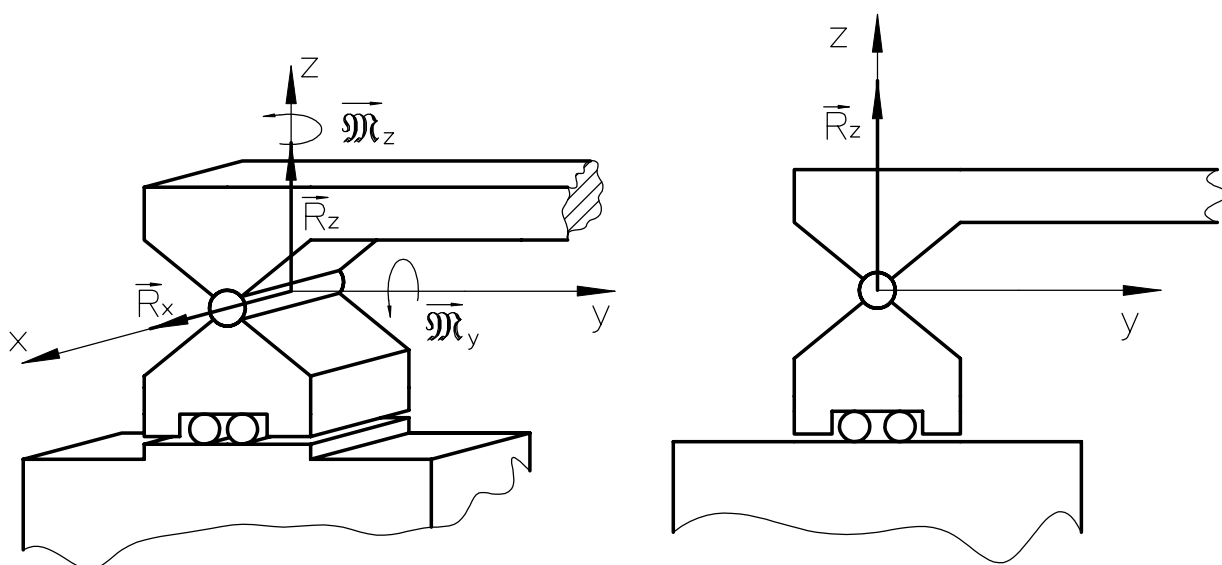
Síkbeli erőrendszer esetén (amely a csap tengelyére merőleges) a hengeres csukló hatása az \vec{R}_y, \vec{R}_z erőkkel, illetve ezek eredőjévé \vec{R} helyettesíthető, amely az y tengelyhez α szöget zár be.

A hengeres csukló szimbóluma, jelölése: 

3.2.4. GÖRGŐS HENGERES CSUKLÓ

A görgős hengeres csukló 3.13. ábra, az x -tengely körüli forgással egyidőben görgőkön elmozdulhat az y -tengely irányában is. Ez a támasz gátolja az x és z irányban való elmozdulást, valamint az y és z irányú elfordulást.

Térbeli erőrendszer esetén a támasz reakciói az \vec{R}_x, \vec{R}_z erők, és \vec{M}_y, \vec{M}_z erőpárok.



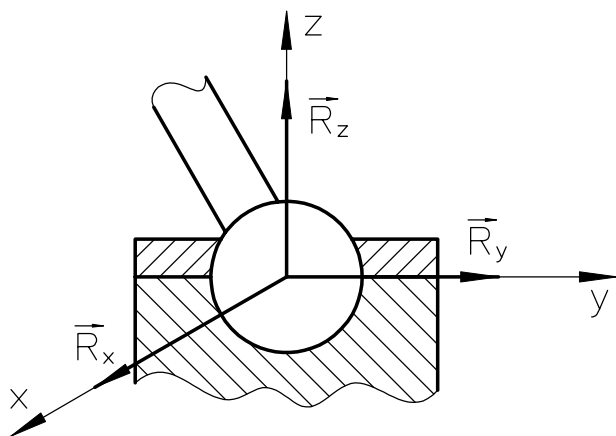
3.13. ábra. Görgős hengeres csukló

Síkbeli erőrendszer hatására a görgős hengeres csukló hatását \vec{R}_z reakcióerő helyettesíti.

A görgős hengeres csukló szimbóluma:



3.2.5. GÖMBCSUKLÓ



A gömbcsukló egy térbeli pontot rögzít, amely egyik koordináta tengely irányában sem mozdulhat el 3.14. ábra.

Az ilyen támasz reakciói $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ erők a koordináta tengelyek irányában.

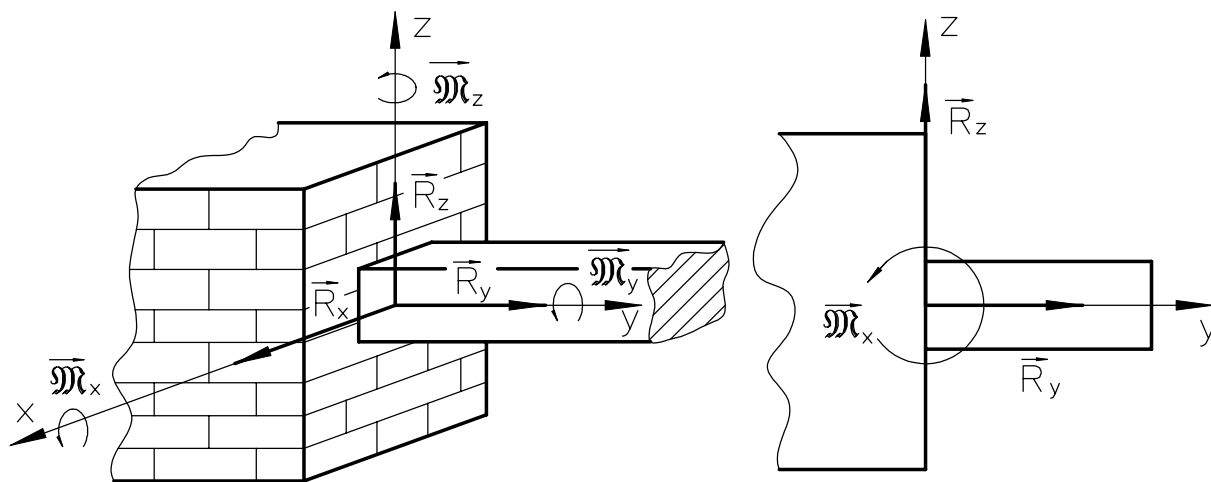
A gömbcsukló szimbóluma:



3.14. ábra. Gömbcsukló

3.2.6. BEFOGÁS

A befogás tulajdonképpen egy mereven befalazott rúd, de egy tartóra hegesztett rúd is lehet, mint ahogy azt a 3.15. ábra szemlélteti. Az ilyen támasz mindenirányú elmozdulást és elfordulást akadályoz.

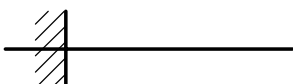


3.15. ábra. Befogás

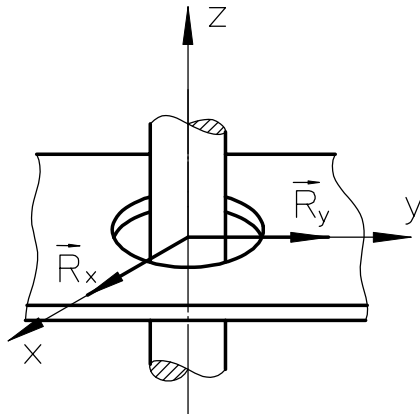
Térbeli erőrendszerrel terhelve, a támasz reakciói az $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ erők, és $\vec{M}_x, \vec{M}_y, \vec{M}_z$ erőpárok.

Síkbeli eők esetén, amelyek a befogás síkjában hatnak, a támasz hatása \vec{R}_x, \vec{R}_y erőkkel és \vec{M}_x erőpárral helyettesíthető.

A befogás szimbóluma:



3.2.7. VEZETŐ



3.16. ábra. Vezető

Rúd amely egy vékony lapban fúrt lyukon halad keresztül, melyeknek egymásközti érintkezése a lap síkjában elhelyezkedő vonalnak tekinthető a **vezető** 3.16. ábra. A vezető a rúd síkbeli elmozdulását akadályozza.

A vezetőt két \vec{R}_x, \vec{R}_y erő helyettesíti.

A

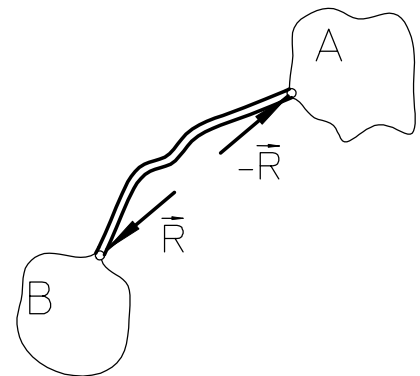
vezető  szimbóluma:

3.2.8. SÚLYTALAN RÚD

Súlytalan rúdnak tekinthető az olyan rúd, amelynek tömege elhanyagolhatóan kicsi a szerkezet többi eleméhez képest.

A végein csuklókkal kapcsolt súlytalan rúd (A és B pontok) mint támasz reakciója a $-\vec{R}, \vec{R}$ erők, amelyek a rúd végpontjait összekötő egyenes vonalában hatnak.

Ezeknek az erőknek hatásvonalára megegyezik, nagyságuk egyenlő, de ellentétes értelmű 3.17. ábra. Ha a rúd egyenes, ezek az erők a rúd tengelyében hatnak.



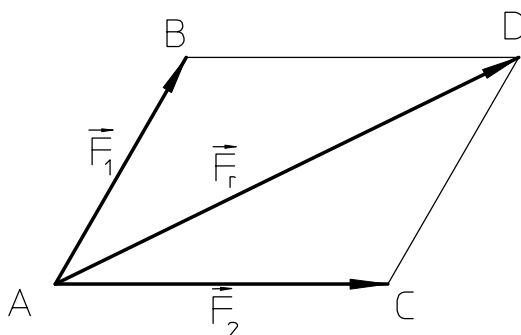
3.17. ábra. Súlytalan rúd

3.3. ERŐK ÖSSZEADÁSA

A mechanika egyik alapproblémája az erők összeadása.

Mivel az erők elmozdítható vektorok (az erő irányvonalában), két erő vagy egy síkban helyezkedik el, vagy térben kitér. A síkbeli erők vagy párhuzamosak, vagy közös támadáspontúak, mivel a nem párhuzamos síkbeli erők mindig eltolhatók irányvonaluk mentén egy közös pontig.

3.3.1. KÖZÖS TÁMADÁSPONTÚ ERŐK ÖSSZEADÁSA



3.18. ábra. Közös támadáspontú erők összeadása

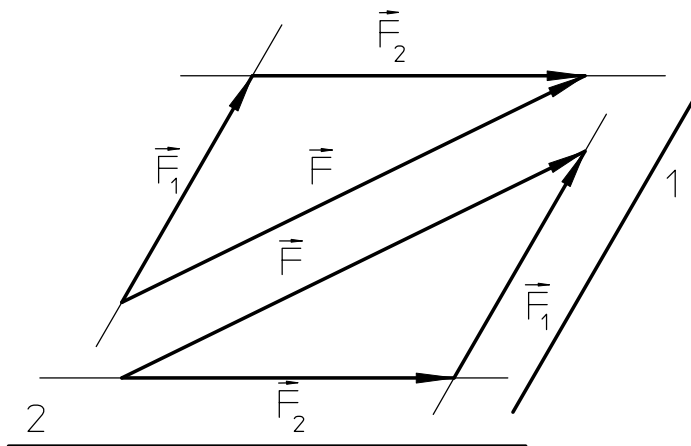
Közös támadáspontú két erő \vec{F}_1, \vec{F}_2 3.18. ábra összeadására a vektorok összeadása érvényes. Eredőjük az \vec{F}_r vektor, amely nagyságát a két erőből rajzolt paralelogramm (ABDC) átlója (AD) adja.

Az eredő \vec{F}_r a két \vec{F}_1 és \vec{F}_2 vektor mértani, vagy vektoriális összege, amelyre érvényes:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (3.1)$$

Ugyanez az összeg megkapható az ABD vagy ACD háromszögekből is az u.n. erőháromszögből is. Az eredő meghatározására ezt a módszert sűrűn alkalmazzák, a szinusz és koszinusztételek felhasználásával az ABC vagy ACD háromszögekre.

3.3.2. ERŐ KÉT KOMPONENSRE BONTÁSA



3.19. ábra. Erő két komponensre bontása

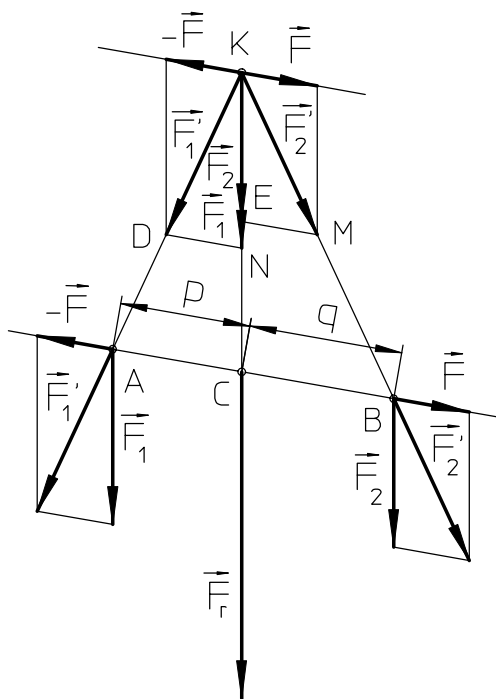
Az \vec{F} erő felbontásának az 1. és 2.-es irányban, amelyek ugyanabban a síkban vannak (3.19. ábra), következő a módja: Az adott \vec{F} erő végeiből az 1. és 2.-es iránnyal húzott párhuzamosok mindjárt a keresett \vec{F}_1 és \vec{F}_2 komponenseket adják. A műveleti sorrend, vagyis hogy az erő melyik végétől kezdődik a felbontás lényegtelen, mint az a 3.19. ábrán látható.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

PÁRHUZAMOS ERŐ EREDŐJE

3.3.3. KÉT EGYIRÁNYÚ

Adva van két párhuzamos \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erő, melyeknek támadáspontjai az A és B pontokban vannak (3.20. ábra). Mivel közös támadáspontjuk nincs, közvetlenül nem adhatók össze, ezért az AB irányban az A és B pontban két egyensúlyi erő \vec{F} és $-\vec{F}$ hozzáadásával az eredeti erők hatása nem változik (a 3. aksióma szerint). Összeadva ezeket az eredeti \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erőkkel, az összeg az \vec{F}'_1 és \vec{F}'_2 rezultánsokat eredményezi, amelyek



3.20. ábra. Két egyirányú párhuzamos erő eredője

hatásvonalukon eltolva közös K pontban metszik egymást. Ebben a K pontban ismét ugyanannak a két egyensúlyi erőnek \vec{F} és $-\vec{F}$ hozzáadásával melyek az AB iránnyal párhuzamos irányban vannak, az \vec{F}'_1 és \vec{F}'_2 eredők felbonthatók az eredeti \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erőkre. Az \vec{F} és $-\vec{F}$ egyensúlyi erők elhagyhatók (3. aksióma) és így megmarad az eredeti \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erő, amelyek mivel egyirányú (kolineáris) erők, algebrai értékükkel összeadhatók. Az eredő párhuzamos az \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erők irányával, és az AB irányt a C pontban metszi.

Az eredő nagysága (intenzitása) egyenlő:

$$\boxed{F_r = F_1 + F_2}. \quad (3.2)$$

Az eredő helyzete az $\triangle ACK$ és $\triangle DNK$ háromszögek, valamint a $\triangle BCK$ és $\triangle MEK$ háromszögek hasonlóságából adódik (3.20. ábra), amelyek alapján felírható:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{KC}{p}; \frac{F_2}{F} = \frac{KC}{q} \Rightarrow p \cdot F_1 = q \cdot F_2. \quad (3.3)$$

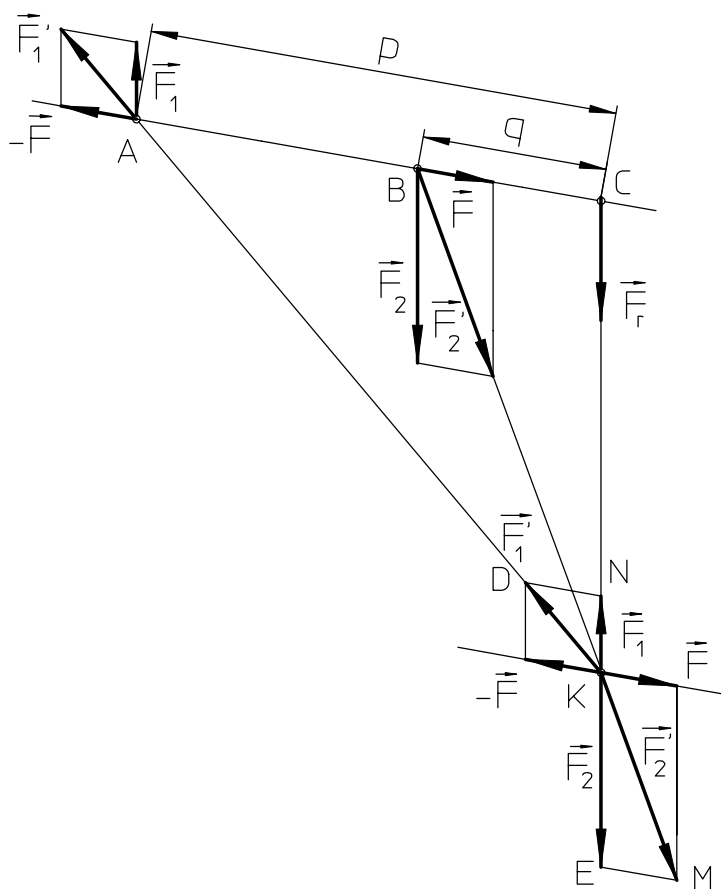
Figyelembe véve a (3.2) összefüggést:

$$\frac{F_1}{q} = \frac{F_2}{p} = \frac{F_r}{AB}. \quad (3.4)$$

Igy az eredő helyzete egyértelműen meghatározott az eredetileg ismert A és B ponthoz viszonyítva. **Fontos itt megjegyezni, hogy a párhuzamos erőknek mindig van eredője.**

3.3.4. KÉT ELLENTÉTES IRÁNYÚ PÁRHUZAMOS ERŐ EREDŐJE

Adva van két párhuzamos, ellentétes irányú erő melyek nagysága különböző és fennáll az $\vec{F}_2 > \vec{F}_1$ összegűgégés (3.21. ábra). Az erők összeadásának folyamata megegyezik az előbbi pontban



leírtakkal, és a 3.21. ábra alapján követhető, mivel a jelölések megegyeznek a 3.20. ábrán használtakkal.

Az erők eredője egyenlő:

$$\boxed{F_r = F_2 - F_1}. \quad (3.5)$$

Az eredő az AB irányt a C pontban metszi, amely a nagyobb intenzitású erő oldalán van, az AB távolságon kívül, ugyanabban az arányban mint az előbbi példában (3.4).

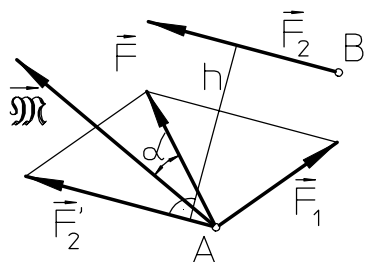
Két ellentétes irányú párhuzamos erő csak akkor adható össze, ha különböző nagyságúak, tehát $F_1 \neq F_2$, mert ha nagyságuk azonos, $F_1 = F_2$ ekkor erőpárt alkotnak, melynek nyomatéka $M = F \cdot h$.

Ez világosan látható a 3.21. ábrán, mert ha az erők egyenlőek, a C pont a végtelenbe esik és az eredő értéke $F_r = 0$. Az ilyen erők egymásközi

3.21. ábra. Két ellentétes irányú párhuzamos erő eredője
távolsága az erőpár karja h .

3.3.5. KITÉRŐ ERŐK EREDŐJE

Az \vec{F}_1 és \vec{F}_2 térben kitérő hatásvonalú erőknek (3.22. ábra) neve **erőkereszt**. Ilyen erők összeadásánál, első lépésként az \vec{F}_2 erőt a B pontból az A pontba kell redukálni (áthelyezni). Redukálással az erőt hatásvonalával párhuzamosan át kell helyezni az új pontba (A pont), ahol $F'_2 = F_2$ (mindkét erő nagysága megegyezik), és az \vec{F}'_2 erő hatásához hozzá kell adni egy erőpár hatását is, vagyis az \vec{F}_2 erő B pontból A pontra számított nyomatékát,



$$\vec{M} = \vec{M}_A^{\vec{F}} = \vec{AB} \times \vec{F}_2.$$

Az \vec{F}_1 és \vec{F}'_2 erőket az A pontban össze lehet adni, eredőjük:

3.22. ábra. Kitérő erők

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}'_2.$$

Két kitérő erő általános esetben, helyettesíthető az \vec{F} erő vektorával és az \vec{M} erőpár vektorával az A pontban, amelyek egymásközt α szöget zárnak be (3.22. ábra). Ennek az \vec{F} és \vec{M} vektorokból álló vektorkettősnek neve az **erőcsavar (torzer)**.

Tehát az erőkereszt és az erőcsavar egymásközt ekvivalensek.

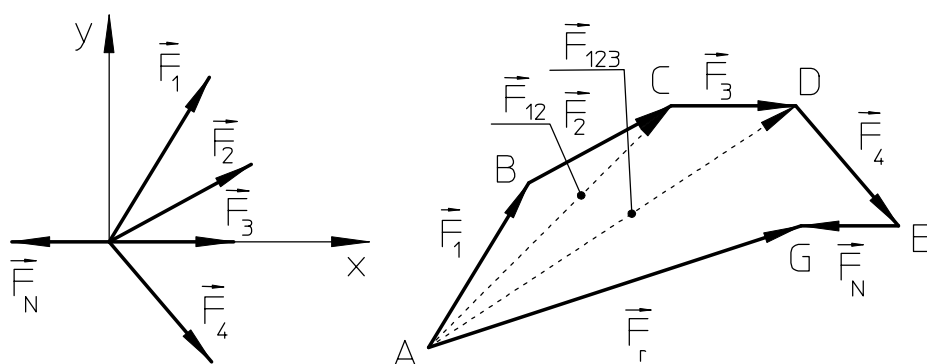
Két erő összeadását összefoglalva:

Két erő nem adható össze, illetve nem helyettesíthető eredővel a következő esetekben:

1. Ha párhuzamosak, egyenlő nagyságúak és ellentétes értelműek - ekkor **ERŐPÁRT** alkotnak,
2. Ha térben kitérnek, **ERŐKERESZTET** alkotva amellyel az **ERŐCSAVAR** ekvivalens.

3.3.6. KÖZÖS PONTON ÁTMENŐ SÍKBELI ERŐRENDSZER EREDŐJE

A közös síkba eső, egy pontban ható $\vec{F}_1 \dots \vec{F}_N$ erők (3.23. ábra) eredője meghatározható vektorok összeadásával. Az erők páronként is összeadhatók, pl. az A pontban először az \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erők,



3.23. ábra. Egy pontban ható síkbeli erőrendszer

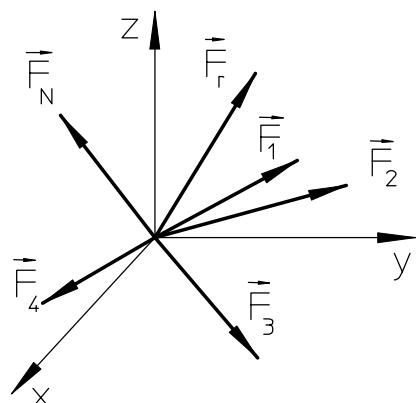
melyeknek eredője $\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, amelyhez \vec{F}_3 adható hozzá, és így tovább az utolsó erőig. Az így folyamatosan ugyanabban az irányban hozzáadott erők eredményként az $ABCDEG$ sokszöget adják, melynek neve

vektorsokszög.

Ha az utolsó (\vec{F}_N) erő vége nem esik egybe az első (\vec{F}_1) erő kezdetével akkor a **vektorsokszög nyitott**. Ebben az esetben az első erő kezdetét az utolsó erő végpontjával összekötő erő (vektor) az **erőrendszer eredője** (\vec{F}_r), 3.23. ábra.

Vektorsokszög szerkesztésénél fontos arra figyelni, hogy az erők (vektorok) nyilfolyama egy tetszőleges pontból kiindulva folytonos legyen, ugyanabba az irányba mutasson, míg az eredő (\vec{F}_r) nyila az adott erők nyilfolyamával ellentétes. Az eredő vektora a vektorsokszög záróoldala, nyila az első vektor kezdőpontjától az utolsó vektor végpontja felé mutat.

Egy pontban ható síkbeli erőrendszer eredője meghatározható:



3.24. ábra. Egy pontban ható térbeli erőrendszer

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (3.6)$$

Az egy pontban ható erőrendszernek mindig van eredője.

Az eredő nagysága nem függ az erők összeadásának sorrendjétől, illetve az adott erők felmérésének sorrendje közömbös.

Térbeli erőrendszer esetén (3.24. ábra) a vektorsokszög egy térbeli alakzat. Az ilyen erőrendszer eredője ugyancsak a (3.6) összefüggés alapján határozható meg.

Az egy pontban ható erők vektorként való összeadása mellett (vektorsokszög szerkesztésével), erre **analitikus (skaláris)** módszer is használatos. A térbeli erőrendszer eredőjének

számítása kizárólag analitikusan lehetséges, mivel a térbeli vektorsokszög szerkesztése nehézkes.

Az **analitikus összeadás** első lépésében az erők vetületeit kell meghatározni (2.2) összefüggés szerint olyan koordináta rendszer tengelyeire, amelynek kezdőpontja $Oxyz$ az erők támadáspontjába esik 3.24. ábra, majd az erők vetületei összeadhatók. A (3.6) egyenlet analitikus alakja tehát:

$$\boxed{F_{rx} = \sum_{i=1}^N F_{ix}}, \quad \boxed{F_{ry} = \sum_{i=1}^N F_{iy}}, \quad \boxed{F_{rz} = \sum_{i=1}^N F_{iz}}. \quad (3.7)$$

ahol:

- F_{rx}, F_{ry}, F_{rz} az eredő vetületei a koordináta tengelyekre,
- F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} az i -edik erő vetületei a koordináta tengelyekre.

Az eredő nagysága (intenzitása) a (2.6) szerint egyenlő:

$$\boxed{F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2 + F_{rz}^2}}. \quad (3.8)$$

Az eredő helyzete a koordináta tengelyekkel bezárt szögekkel adott, amelyeknek koszinuszai a (2.7) szerint:

$$\boxed{\cos \alpha_r = \frac{F_{rx}}{F_r}}, \quad \boxed{\cos \beta_r = \frac{F_{ry}}{F_r}}, \quad \boxed{\cos \gamma_r = \frac{F_{rz}}{F_r}}. \quad (3.9)$$

3.3.7. EGYENSÚLY

Amennyiben a közös támadáspontú erők **egyensúlyban** vannak, akkor ezeknek az erőknek eredője egyenlő nullával $\vec{F}_r = 0$, tehát a haladó mozgást kiváltó ok megszűnt. Az egyensúlyi feltétel kifejezhető geometriai alakban, illetve analitikus egyenletekkel.

Az egyensúlyi felétel **geometriai alakja** azt jelenti, hogy a **vektorsokszög zárt**, tehát az utolsó erő végpontja az első erő kezdőpontjával egybeesik.

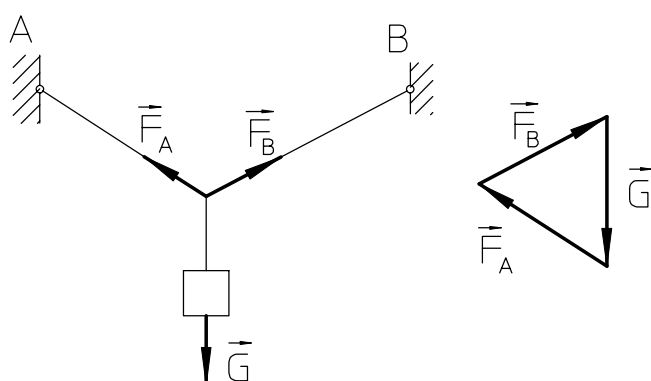
Az egyensúlyi felétel **analitikus alakja** egyensúlyi egyenletekkel definiált a (3.7) és (3.8) alapján, mivel $\vec{F}_r = 0$, az **egyensúlyi egyenletek**:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N F_{ix} = 0}, \quad \boxed{\sum_{i=1}^N F_{iy} = 0}, \quad \boxed{\sum_{i=1}^N F_{iz} = 0}. \quad (3.10)$$

A (3.10) egyenletek az egyensúlyi feltétel analitikus (skaláris) alakjai, mely így szól: **a közös támadáspontú térbeli erőrendszer egyensúlyának feltétele, hogy az erők koordináta tengelyekre számított vetületeinek összege egyenlő legyen nullával.**

Ebből a három algebrai egyenletből, három ismeretlen határozható meg.

Ha síkbeli erőrendszerről van szó, ennek egyensúlyi feltétele két skaláris egyenlettel megadható:



$$\boxed{\sum_{i=1}^N F_{ix} = 0}, \quad \boxed{\sum_{i=1}^N F_{iy} = 0}. \quad (3.11)$$

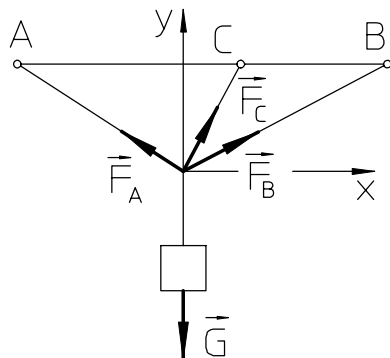
Síkbeli egy pontban ható erők, amelyek egyensúlyban vannak láthatók a 3.25. ábrán. Egy G súlyu test az A és B pontokban van felfüggesztve. Az \vec{F}_A és \vec{F}_B kötelerők egyensúlyban vannak a \vec{G} súllyal.

3.25. ábra. Statikailag határozott feladat

3.3.8 STATIKAILAG HATÁROZOTT ÉS HATÁROZATLAN FELADAT

Egy feladat **statikailag határozott** ha az ismeretlenek száma megegyezik a felírható egyensúlyi egyenletek számával. Ilyen feladat látható a 3.25. ábrán.

Ha az egyenletekben (3.10 és 3.11), szereplő ismeretlenek száma több, mint az egyenletek száma, a feladat **statikailag határozatlan**. A statikailag határozatlan feladatok megoldása a szilárdságtan feladata, ahol a testek alakváltozásait figyelembevéve, azokat szilárd testeknek tekintik.



3.26. ábra. Statikai határozatlanság

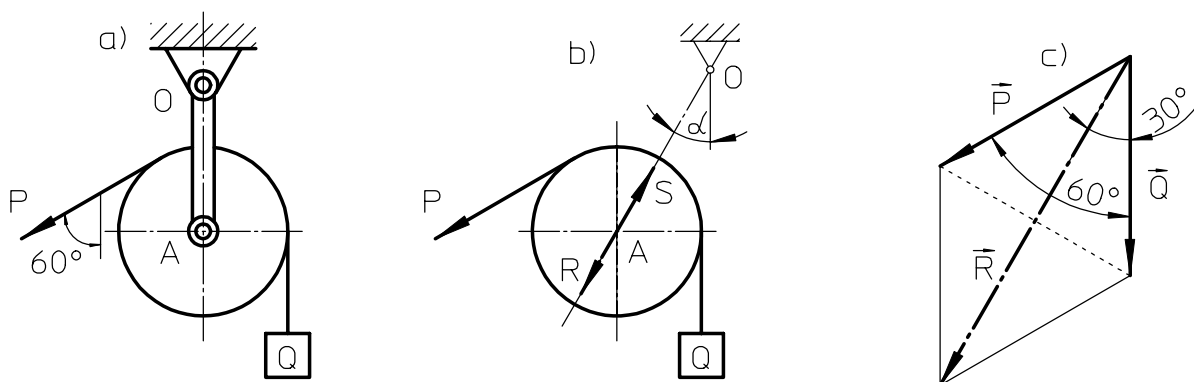
A \vec{G} súlyu test három kötélben függ 3.26. ábra, amelyek egy síkban vannak. Minden kötélben ismeretlen nagyságú $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C$ erő hat, amelyekkel a kötelek helyettesíthetők. Mivel a síkbeli egy pontban ható erőrendszerre két egyensúlyi egyenlet írható fel (3.11), így ez a feladat **statikailag határozatlan**.

A statikai határozatlanság a többletkényszer következménye. A súly egyensúlyi helyzetéhez elegendő két kötél.

3.1. példa

Egy kerékre amely az OA rúd segítségével az O pontban van felerősítve (3.27. ábra), $Q=400$ [kN] súly lett felfüggesztve. A kötél másik végén a P erő hat, amely a vertikális iránnyal 60° -os szöget zár be, és a Q súllyal egyensúlyban van.

Az OA rúd milyen helyzetet fog felvenni, és mekkora lesz a megterhelése?



3.27. ábra. a 3.1. példa illusztrációja

Megoldás: A kerékre a Q és P erők hatnak. A súrlódást elhanyagolva, ezek az erők egyenlők $P=Q$. Ezeken az erőkön kívül a kerékre még az S erő is hat, mint a rúdban fellépő erő, amely a P és Q erők következménye. A P és Q erők, mivel egyformák, eredőjük az erők által bezárt szög felezővonalába esik, tehát a kerék középpontján halad keresztül. Ugyanezen a ponton halad keresztül az S erő is (3.27. b ábra). A P és Q erők eredője, amely ezeknek az erőknek hatását helyettesíti az S erővel egyensúlyban kell hogy legyen, amely tulajdonképpen a rúd terhelése. Tehát, az OA rúd helyzete az S erő irányvonalában lesz, amelynek nagysága megegyezik az eredő R -el. Az R eredő nagysága és iránya grafikusán is meghatározható, vektorsokszög szerkesztésével megfelelő arányban (3.27. c ábra).

Analitikusan, az eredő a P , Q és R erők erőháromszögéből kiszámítható:

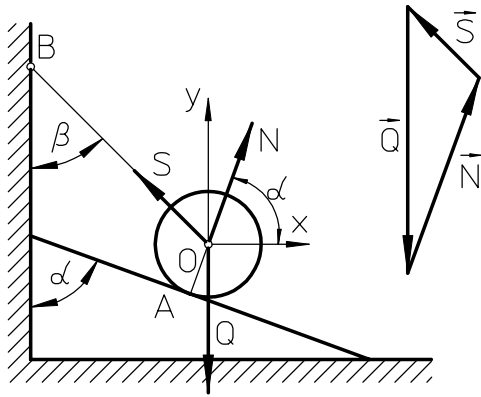
$$\frac{R}{2} = Q \cdot \cos 30^\circ = 400 \cdot \cos 30^\circ = 346,5 [\text{kN}],$$

amiből adódik: $R=S= 693$ [kN].

Az eredő által vertikális irányban bezárt szög 30° , így a rúd helyzete $\alpha=30^\circ$.

3.2. példa

Gömb melynek súlya Q , kötéllel a B pontba van erősítve, az A pontban pedig egy lejtőre támaszkodik 3.28. ábra.



3.28. ábra. A 3.2. példa illusztrációja

Mekkora az A pontban ható reakcióerő és a kötelerő, ha ismert az α és β szög?

Megoldás: Az N erő, amellyel a lejtő a gömbre hat merőleges a lejtő felületére, az S kötelerő pedig kötélirányú. Mindhárom erő Q , N és S támadáspontja a gömb O középpontjába esik. Ebbe a pontba helyezve az xy koordináta rendszert, az N erő α szöget zár be az x tengellyel, az S erő β szöget az y tengellyel. A gömb Q súlya y irányú.

Az erőket levetítve az x és y tengelyekre, az egyensúlyi egyenletek a következő alakban írhatók fel:

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{ix} &= N \cdot \cos \alpha - S \cdot \sin \beta = 0, \\ 2. \sum F_{iy} &= N \cdot \sin \alpha + S \cdot \cos \beta - Q = 0. \end{aligned}$$

Az első egyenletet $\cos \beta$ -val szorozva, a másodikat $\sin \beta$ -val, majd összeadva:

$$N \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) = Q \cdot \sin \beta,$$

amelyből a normális reakcióerő értéke:

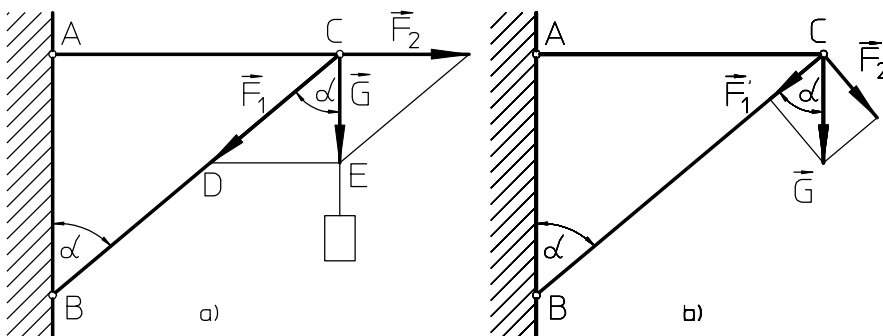
$$N = \frac{Q \cdot \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Behelyettesítve az 1. egyenletbe, a kötelerő nagysága:

$$S = \frac{N \cdot \cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{Q \cdot \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

3.3. példa

Az AC és BC rudak egymásközt, valamint a falhoz csuklókkal kapcsolódnak az A, B és C pontokban. A BAC szög 90° , az $ABC = \alpha$ (3.29. a ábra). A C csuklóban G súlyu teher függ. A rudak súlyát figyelmen kívül hagyva, mekkora a BC rúdban fellépő erő?



3.29. ábra. A 3.3. példa illusztrációja

Megoldás: A \vec{G} erő mindkét rúdra hat, melyeknek reakciói rúdirányúak. A keresett erő meghatározásához a \vec{G} erőt a C pontban AC és BC rúdirányu komponenseire kell bontani. Az \vec{F}_1 komponens a keresett erő. A CED háromszögből felírható:

$$F_1 = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Ugyanabból a háromszögből látszik az is, hogy az AC rúd húzott, a húzóerő nagysága:

$$F_2 = G \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

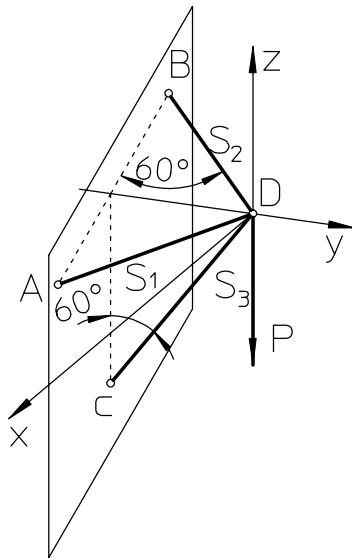
Fontos itt rámutatni egy jellemző hibára amely erők felbontásakor elő szokott fordulni. Ebben a feladatban a BC rúderőt kellett meghatározni. A \vec{G} erő a C pontban (3.29. b ábra) felbontható a BC rúd irányába, valamint az arra merőleges irányba is, ekkor az erők:

$$F_1' = G \cdot \cos \alpha, \quad F_2' = G \cdot \sin \alpha.$$

Az erők felbontása helyes így is, ellenben az \vec{F}_1' erő nem a BC rúdban keresett erő, mivel az \vec{F}_2' erő hatása nem csak az AC rúdra terjed ki. Az \vec{F}_2' erő egyidőben mindkét rúdra hat, tehát a BC rudat is nyomja, ami az \vec{F}_1' kiszámításánál nem lett figyelembevéve. Az adott erőt a támaszok (rudak) irányába kell felbontani, csak ez vezet helyes megoldáshoz.

3.4. példa

Három rúdból álló tartó az A, B, C pontokban egy vertikális falhoz van erősítve, másik végükkel egy gömbcsuklóhoz a D pontban, amelyben $P=1500$ [kN] terhelés hat 3.30. ábra. Az AD és BD rudak vízszintesek. Meghatározni a rúderőket.



3.30. ábra. A 3.4. példa illusztrációja

Megoldás: A D pontba felvett koordináta rendszer tengelyeire kell az ismeretlen S_1 , S_2 és S_3 erőket vetíteni. Ebben a fázisban az erők iránya tetszőlegesen választható.

Az egyensúlyi egyenletek a következők:

$$1. \sum F_{ix} = S_1 \cdot \cos 60^\circ - S_2 \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = S_1 \cdot \sin 60^\circ + S_2 \cdot \sin 60^\circ - S_3 \cdot \sin 60^\circ = 0,$$

$$3. \sum F_{iz} = S_3 \cdot \cos 60^\circ + P = 0.$$

Az első egyenletből:

$$S_1 = S_2,$$

A másodikból:

$$S_1 + S_2 = S_3 = 2S_1.$$

A harmadikból:

$$S_3 = -\frac{P}{\cos 60^\circ} = -\frac{P}{0,5} = -2P = -3000 \text{ [kN]}.$$

A (-) jel az eredményben azt jelenti, hogy az S_3 erő eredetileg választott iránya hamis volt. A CD rúd nyomásra van terhelve nem húzásra.

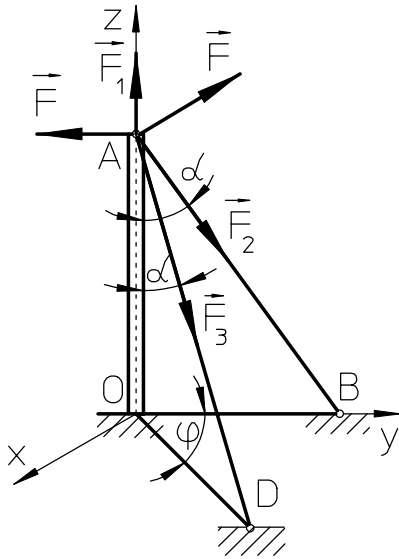
A többi erő nagysága:

$$S_1 = S_2 = \frac{S_3}{2} = 1500 \text{ [kN]}.$$

Az AD és BD rudak tehát húzottak.

3.5. példa

Az OA földbe ásott oszlop az AB és AD kötelekkel ki van kötve, melyek irányai $\alpha=30^\circ$ szöget zárnak be az oszloppal. A két kötel és az oszlop alkotta síkok közötti szög $\varphi=60^\circ$ 3.31. ábra. Az oszlophoz az x és y , tengelyekkel párhuzamosan két telefonkábel csatlakozik, amelyek egyenként $F=100$ [N] húzóerővel feszítettek. Meghatározni az oszlop vertikális terhelését, valamint a kötélerőket, elhanyagolva a kötelek súlyát.



Megoldás: Az erők közös támadáspontja az A pont, amelyben a kábelek húzóereje \vec{F} , a köteleket terhelő \vec{F}_2, \vec{F}_3 erők és az oszlop \vec{F}_1 reakciója hat. Az xyz tengelyekre vetítve az erőket, az egyensúlyi egyenletek:

1. $\sum F_{ix} = -F + F_3 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi = 0,$
2. $\sum F_{iy} = -F + F_2 \cdot \sin \alpha + F_3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi = 0,$
3. $\sum F_{iz} = F_1 - F_2 \cdot \cos \alpha - F_3 \cdot \cos \alpha = 0.$

3.31. ábra. A 3.5. példa illusztrációja

Megoldva az egyenleteket a komponensek:

$$F_1 = F \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad F_2 = F \cdot \frac{1 - \operatorname{ctg} \varphi}{\sin \alpha}, \quad F_3 = \frac{F}{\sin \alpha \cdot \sin \varphi}.$$

Az eredményekből az látszik, ha $\varphi < 45^\circ$ akkor $F_2 < 0$, ami azt jelenti, hogy az erő ellentétes érletmű a rajzon berajzolt iránytól. Mivel a kötel nem terhelhető nyomásra, ezért egymásközi helyzetüket, tehát a φ szöget 45° -nál nagyobbba kell választani.

Figyelembe véve a feladatban szereplő adatokat, az erők nagyságai:

$$F_1 = 273 \text{ [N]}, \quad F_2 = 85 \text{ [N]}, \quad F_3 = 231 \text{ [N]}.$$

3.4. ERŐPÁROK ÖSSZEADÁSA

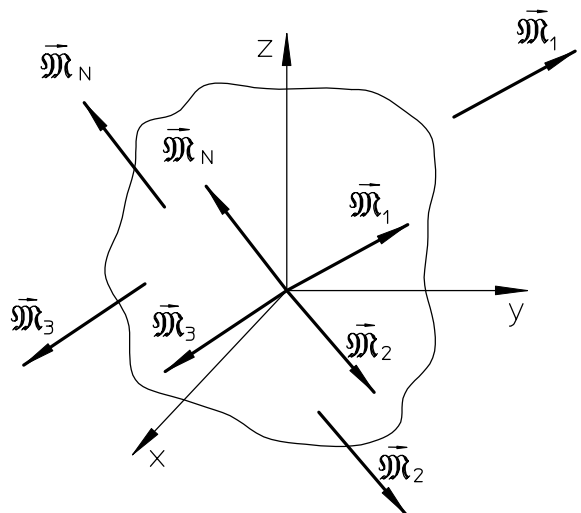
Ha egy merev testre az $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N$ erőpár rendszer hat (3.32. ábra), mivel az erőpár szabad vektor (a 3. aksióma következménye), ezért bármely pontba párhuzamosan áthelyezhető. Ezáltal egy **közös támadáspontú** $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N$ **vektorrendszert képez**, amelynek eredője megegyezik a közös támadáspontú erők eredőjével (3.6), tehát felírható:

$$\vec{M}_r = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i \quad (3.12)$$

ahol:

- \vec{M}_r eredőerőpár

Az erőpárok közös támadáspontjában felvett xyz



3.32. ábra. Erőpárok összeadása

koordináta-rendszer tengelyeire levetítve, a vektoregyenletnek a következő három skaláris egyenlet felel meg:

$$\begin{cases} M_{rx} = \sum_{i=1}^N M_{ix}, \\ M_{ry} = \sum_{i=1}^N M_{iy}, \\ M_{rz} = \sum_{i=1}^N M_{iz}. \end{cases} \quad (3.13)$$

ahol:

- M_{rx}, M_{ry}, M_{rz} az eredőerőpár vetületei a koordináta tengelyekre,
- M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} az i -edik erőpár vetületei a koordináta tengelyekre.

Az eredőerőpár nagysága:

$$M_r = \sqrt{M_{rx}^2 + M_{ry}^2 + M_{rz}^2}. \quad (3.14)$$

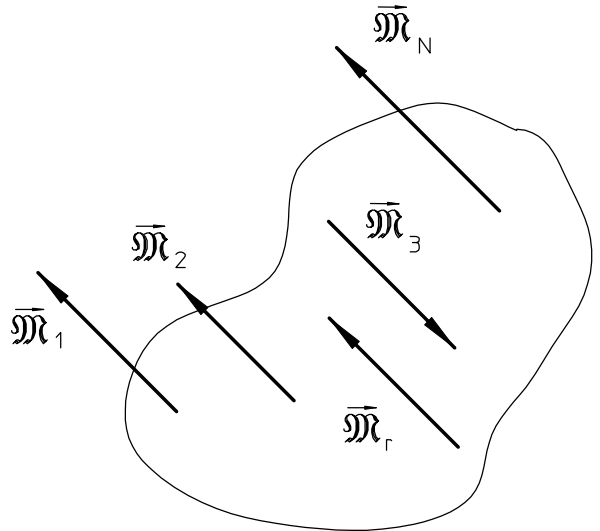
Az eredővektor iránykoszinuszai amelyeket a koordináta tengelyekkel bezár:

$$\begin{cases} \cos \alpha_M = \frac{M_{rx}}{M_r}, \\ \cos \beta_M = \frac{M_{ry}}{M_r}, \\ \cos \gamma_M = \frac{M_{rz}}{M_r}. \end{cases} \quad (3.15)$$

A (3.13), (3.14) és (3.15) egyenletek a merev testre ható erőpárok analitikus összegét adják.

Amennyiben az $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N$ erőpárok párhuzamosak (3.33. ábra), az eredőerőpár kolineáris vektorok összege. Az \vec{M}_r eredő párhuzamos az $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N$ vektorokkal, nagysága egyenlő az egyes erőpárok nyomatékainak algebrai összegével.

$$M_r = \sum_{i=1}^N M_i. \quad (3.16)$$



3.33. ábra. Párhuzamos erőpárrendszer

Ha a merev testre csak $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N$ erőpár-

rendszer hat, az egyensúlyi feltételt az $\vec{M}_r = 0$ adja, ami azt jelenti, hogy a testre ható forgató hatás megszűnt. Ennek kifejezése:

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_i = 0. \quad (3.17)$$

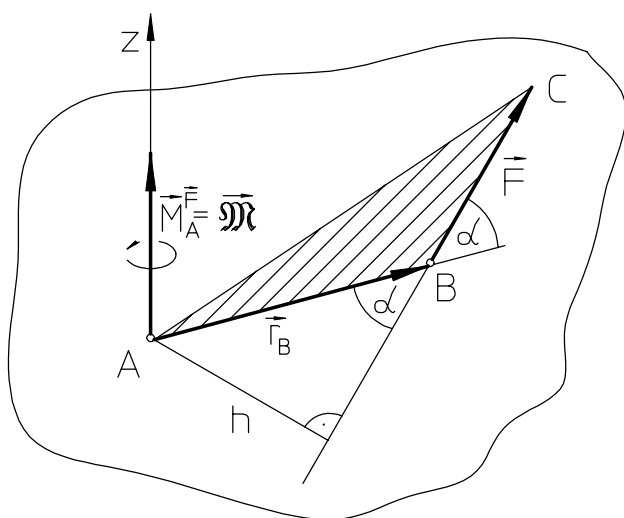
Térbeli $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N$ erőpárrendszer esetén, a vektorok vetületeiből képzett egyensúlyi egyenletek, a következők:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N M_{ix} = 0, \\ \sum_{i=1}^N M_{iy} = 0, \\ \sum_{i=1}^N M_{iz} = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Párhuzamos $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_N$ vektorok esetén az egyensúlyi egyenlet alakja a következő:

$$\sum_{i=1}^N M_i = 0. \quad (3.19)$$

3.5. AZ ERŐ PONTRA SZÁMÍTOTT NYOMATÉKA



3.34. ábra. Az erő pontra számított nyomatéka

Ha egy testre B pontban \vec{F} erő hat, bármely másik (A) ponthoz képest, hatása forgató hatást vált ki, és a testet megfordítani igyekszik, mint ahogy az a 3.34. ábrán látható. A forgatóhatásnak mértéke erőpár, melynek nagyságát az \vec{F} **erőnek A pontra számított nyomatéka** határozza meg. Vektora az \vec{F} erőnek A pontra számított **nyomatékvektora**:

$$\vec{M} = \vec{M}_A^{\vec{F}} = \vec{r}_B \times \vec{F}. \quad (3.20)$$

A (3.20) vektoriális szorzat nagysága:

$$|\vec{M}_A^{\vec{F}}| = r_B \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot h = 2P_{\Delta ABC}, \quad (3.21)$$

ahol:

- r_B az \vec{F} erő hatásvonalán levő bármely B pont távolsága az A ponttól,
- F az \vec{F} erő nagysága,
- α az \vec{F} erő hatásvonalára és r_B között bezárt szög,
- h az erő karja (az A pont legrövidebb távolsága az \vec{F} erő hatásvonalától),
- $P_{\Delta ABC}$ az ABC háromszög területe (sraffozva a 3.34. ábrán).

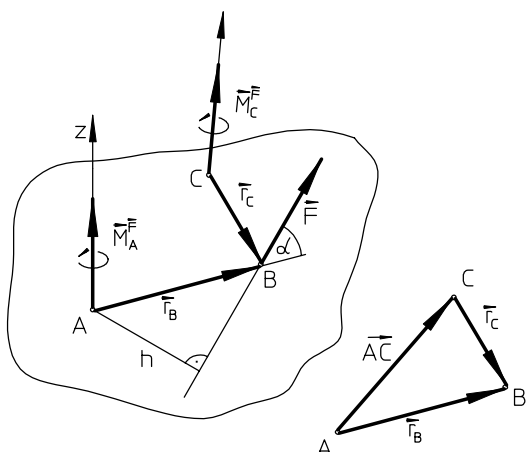
Az \vec{F} erő a testet forgásra készíti a z tengely körül, amely merőleges az erő és az A pont alkotta síkra. A nyomatékvektor a z tengely olyan irányába mutat, amelyből nézve a forgásirány pozitív (a vektor nyilával szembenézve az óramutató járásával ellentétes irány).

Az erő nyomatékának mértékegysége $[Nm]$.

Az erő pontra számított nyomatéka nulla ha:

- az erő egyenlő nullával,
- az erő h karja egyenlő nullával (az erő hatásvonalára a nyomatéki ponton halad keresztül).

3.5.1. HOGYAN VÁLTOZIK AZ ERŐ PONTRA SZÁMÍTOTT NYOMATÉKA A NYOMATÉKI PONT VÁLTOZÁSÁVAL?



3.35. ábra. A nyomatéki pont változása

Megvizsgálva az \vec{F} erő nyomatékát két (A és C) pontra 3.35. ábra, felírhatók a következő összefüggések:

$$\vec{M}_A^{\vec{F}} = \vec{r}_B \times \vec{F}, \quad \vec{M}_C^{\vec{F}} = \vec{r}_C \times \vec{F}, \quad (3.22)$$

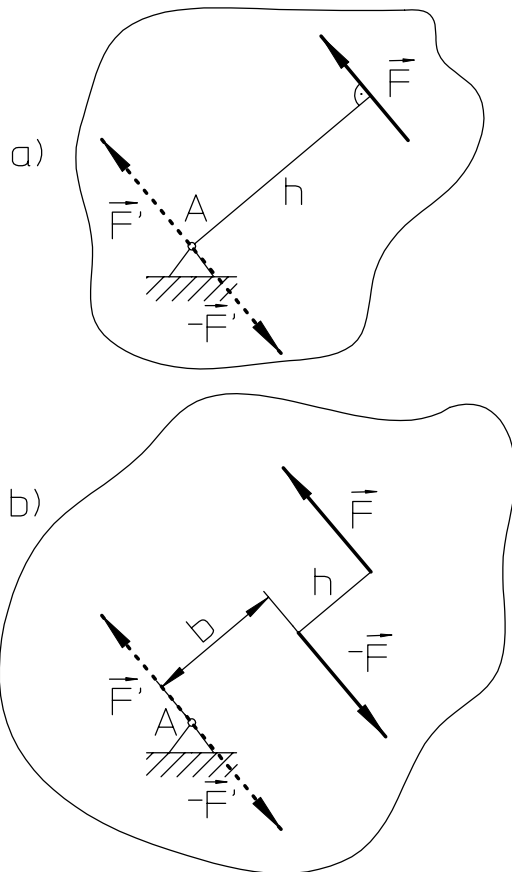
mivel $\vec{r}_B = \vec{AC} + \vec{r}_C$, a fenti összefüggések alakja:

$$\vec{M}_A^{\vec{F}} = (\vec{AC} + \vec{r}_C) \times \vec{F} = \vec{M}_C^{\vec{F}} + \vec{AC} \times \vec{F}. \quad (3.23)$$

A (3.23) összefüggés alapján leszögezhető, hogy **a nyomatéki pont változásával változik az erő pontra számított nyomatéka is.**

A nyomaték nem változna ha az \vec{AC} irány párhuzamos lenne az \vec{F} erő irányával.

3.5.2. MI A KÜLÖNBSÉG AZ ERŐPÁR ÉS AZ ERŐ FORGATÓ HATÁSA KÖZÖTT?



3.36. ábra. Test fordítása erővel és erőpárral
erőpár szabad vektor.

I. Az \vec{F} erő hatása olyan testre amely az A pontban hengeres csuklóval kötött, ahol az erő h távolságra van a támasztól (3.36.a ábra), és a test egy síkban fordulhat el. A 3. aksióma második következményeként az \vec{F} erő A pontban kifejtett hatása kettős:

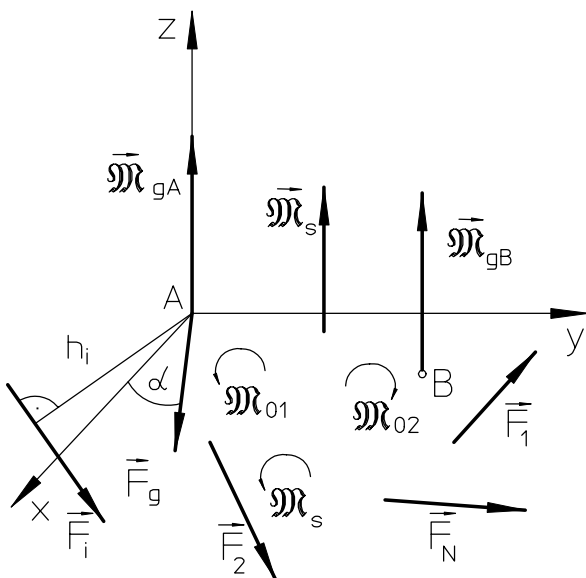
- az \vec{F}' erő, amelynek nagysága megegyezik az \vec{F} erőével, az A **csuklóra nyomást gyakorol**.
- az $M = F \cdot h$ erőpár, amely megegyezik az \vec{F} erő A pontra vett nyomatékával, vagyis $M = M_A^{\vec{F}} = F \cdot h$, **a testet az A pont körüli forgásra készíti.**

II. Az \vec{F} és $-\vec{F}'$ erők alkotta erőpár hatása amelynek $M = F \cdot h$ nyomatéka megegyezik az **I.** pontban tárgyalt erő nyomatékával (3.36.b ábra). Redukálva hatását az A pontra, hozzáadva két \vec{F}' és $-\vec{F}'$ erőt, melyeknek nagysága megegyezik az \vec{F} és $-\vec{F}'$ erőével, az erőpár hatása helyettesíthető két egyensúlyi erővel \vec{F}' és $-\vec{F}'$, az A pontban (amelyek elhagyhatók), valamint két nyomatékkal, melyeknek hatása az A pontra:

$$M_A^{\vec{F}} + M_A^{-\vec{F}'} = F \cdot (b + h) - F \cdot b = F \cdot h = M.$$

A csuklóra nem hat nyomás, csak kizárólag forgató hatás. Együttal leszögezhető, hogy **az erőpár nyomatéka bármely pontra ugyanakkora, vagyis az**

3.6. ÁLTALÁNOS SÍKBAN HATÓ ERŐ ÉS ERŐPÁRRENDSZER



3.37. ábra. Általános síkbeli erő és erőpárrendszer

Adva van az xAy síkban egy $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ erőrendszer és egy M_{01}, M_{02}, \dots erőpárrendszer 3.37. ábra. Az erőpárok algebrai értékeikkel összeadhatók, összehatásuk az M_s erőpár. Az erőpárvektorok $\vec{M}_{01}, \vec{M}_{02}, \dots$ és eredővektoruk \vec{M}_s is merőlegesek az erők xAy síkjára.

A rendszernek egyszerűbb alakot adva, és annak egyensúlyi helyzetét vizsgálva, első lépésként az erőket egy közös pontra kell redukálni. Az erőket A pontra redukálva, minden erőnek az A pontban egy megfelelő párhuzamos \vec{F}'_i erő és egy erőpár felel meg, melynek nagysága (intenzitása):

$$M_i = M_A^{\vec{F}'_i} = F_i \cdot h_i, \quad (3.24)$$

ahol:

- $M_A^{\vec{F}'_i}$ az i -edik erő nyomatéka az erők síkjában,
- F_i az i -edik erő nagysága (intenzitása),
- h_i az i -edik erő karja az A pontra.

Minden így kapott erőpár (az \vec{F}_i erők nyomatékai), az erők síkjában van (xAy sík). Az \vec{M}_i vektorok iránya megfelel az \vec{F}_i erők forgatóhatásának az A ponthoz viszonyítva.

Eredményként a közös A pontban ható \vec{F}_i erőrendszer, és az xAy síkban egy erőpárrendszer adódik.

Az erőpárok az erők A pontra való redukálásából (3.24), és az erőpárok összzhatásából M_s erednek.

A közös pontban ható erőknek mindig van eredője, így azok hatása egyenértékű vektoriális összegükkel (3.6) melynek alakja:

$$\vec{F}_g = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (3.25)$$

Az összeadás mindig analitikusan történik, így a (3.7) től (3.9) összefüggések alapján felírható:

$$\begin{aligned} F_{gx} &= \sum_{i=1}^N F_{ix}, & F_{gy} &= \sum_{i=1}^N F_{iy}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

ahol:

- F_{gx} és F_{gy} a közös pontban ható erők összegének vetületei az x és y koordináta tengelyekre,
- F_{ix} és F_{iy} az i -edik erő vetületei ugyanazokra a koordináta tengelyekre.

Az összeg nagysága (az eredő intenzitása):

$$F_g = \sqrt{F_{gx}^2 + F_{gy}^2}. \quad (3.27)$$

Ennek a vektornak a koordináta tengelyek pozitív irányához mért irányszögei:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_g &= \frac{F_{gx}}{F_g}, & \sin \alpha_g &= \frac{F_{gy}}{F_g}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Az ilyen egy pontban ható erők összege az általános síkbeli erő és erőpárrendszer fővektora.

A másik összeg az erőpárok összege, amely az \vec{F}_i erők A pontra való redukációjából kapott erőpárokból (M_1, M_2, \dots, M_N) és a testre ható erőpárok algebrai összegeként kapott M_s erőpár, melyeknek összege a következő:

$$M_{gA} = \sum_{i=1}^N M_i + M_s = \sum_{i=1}^n M_{A_i}^{\vec{F}_i} + M_s, \quad (3.29)$$

gde su:

- M_{gA} a főerőpár nagysága,
- M_i ($M_{A_i}^{\vec{F}_i}$) erőpárok, amelyek az \vec{F}_i erők A pontra történt redukációjából adódnak,
- M_s az M_{01}, M_{02}, \dots erőpárok összege amely az xAy síkban hat.

A fenti erőpár, minden xAy síkban ható erőpár összege, az általános síkbeli erő és erőpárrendszer főerőpárja.

Ezek szerint ***az általános síkbeli erő és erőrendszer egy ekvivalens rendszerre vezethető le***, amely a ***fővektorból*** \vec{F}_g és ***főerőpárból*** \vec{M}_{gA} tevődik össze. A főerőpárvektor \vec{M}_{gA} merőleges az xAy síkra amelyben az \vec{F}_g fővektor helyezkedik el. Ezek a vektortok ***erőcsavart (torzert)*** alkotnak (3.37. ábra).

Meg kell még jegyezni, hogy amíg az \vec{F}_g fővektor nem függ a redukciós pont helyzetétől (A pont), addig a főerőpár \vec{M}_{gA} csak arra a bizonyos pontra vonatkozik, amelyet az A indexszel meg is kell jelölni. Ha az A pont helyett egy másik redukciós pont az aktuális pl. B pont (3.37. ábra), akkor az erő pontra számított nyomatékának változása értelmében (3.23), a főerőpár is megváltozik a következő összefüggés szerint:

$$M_{gB} = M_{gA} + M_B^{\vec{F}_g}, \quad (3.30)$$

ahol:

- M_{gB} a B pontra számított főerőpár,
- $M_B^{\vec{F}_g}$ az A pontban elhelyezkedő fővektor nyomatéka az új B redukciós pontra ($\vec{AB} \times \vec{F}_g$).

Általános erő és erőpárrendszer síkbeli hatása, redukálva az erőket egy bizonyos pontra, a következő tipikus esetekhez vezethet:

1. Az erők és az erőpárok eredője erőpár.

Ekkor:

$$\vec{F}_g = 0, \quad M_{gA} \neq 0, \quad (3.31)$$

az ilyen erő és erőpárrendszer eredője erőpár, mivel $\vec{F}_g = 0$ és ekkor az $M_B^{\vec{F}_g} = 0$, tehát az erőpár helyzete nem függ a redukciós pont helyzetétől. Ha a test az erő és erőpárhatás előtt nyugalomban volt, a ráhatás következtében egy álló tengely körül fog forogni.

2. Az erőknek és erőpároknak eredője van.

Ebben az esetben két lehetőség jelentkezhet.

2.1. Az eredő áthalad az A redukciós ponton.

Ekkor:

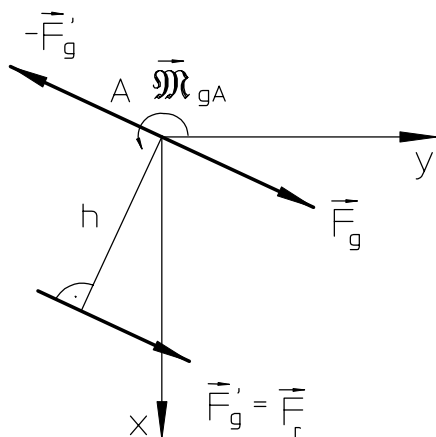
$$\vec{F}_g \neq 0, \quad M_{gA} = 0, \quad (3.32)$$

az ilyen esetben az általános síkbeli erő és erőpárrendszernek eredője van $\vec{F}_r = \vec{F}_g$, amely az A ponton halad keresztül

2.2. Az eredő nem halad át az A redukciós ponton.

Ekkor:

$$\vec{F}_g \neq 0, \quad M_{gA} \neq 0, \quad (3.33)$$



3.38. ábra. Párhuzamosan eltoló eredő

az ilyen általános síkbeli erő és erőpárrendszer egy eredőre vezethető vissza, ellenben az eredő nem halad át az A redukciós ponton.

Az M_{gA} főerőpár az xAy síkban helyettesíthető az \vec{F}_g' és $-\vec{F}_g'$ erőkkel képzett ekvivalens erőpárral, amennyiben fennáll $|F_g'| = |F_g|$. Az erőpár karja meghatározható a két erőpár (a főerőpár és a helyettesítő erőpár) egyenlő nagyságából, amely felírható $M_{gA} = F_g \cdot h$, és ebből az erőpár karja:

$$h = \frac{M_{gA}}{F_g}.$$

Az \vec{F}_g és $-\vec{F}_g'$ erők, A pont (a 3.akszióma szerint), mint

egyensúlyi erők elhagyhatók, és mivel az M_{gA} erőpár helyettesítve van, marad csak egy erő $\vec{F}'_g = \vec{F}_r$, vagyis az **eredő, amely párhuzamosan eltolt a fővektorhoz képest h távolsággal** 3.38. ábra.

Ha az eredő hatásvonala a test súlypontján halad keresztül, és amennyiben a test az erők és erőpárok hatása előtt nyugalomban volt, ezután haladó mozgással fog mozogni.

3. Egyensúly

A síkbeli erő és erőpárrendszer akkor van egyensúlyban, ha megfelel a következő feltételeknek:

$$\vec{F}_g = 0, \quad M_{gA} = 0. \quad (3.34)$$

Ezeknek a feltételeknek érvényeseknek kell lenniök a sík bármely pontjában.

Az egyensúlyi egyenletek analitikus (skaláris) formáit három különböző alakban lehet megadni:

3.1. Az egyensúlyi egyenletek első alakja:

$$\sum_{i=1}^N F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^N F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^N M_A^{\vec{F}_i} + M_s = 0. \quad (3.35)$$

Az első, vagy alapvető alakja az egyensúlyi egyenleteknek azt fejezi ki, hogy az erők vetületeinek összege mindkét koordináta tengelyre egyenlő nullával, valamint minden erő és erőpár nyomatékának összege a sík bármely pontjára számítva egyenlő nullával.

Az első két feltétel azt mutatja, hogy a testnek nincs haladó mozgása, a harmadik meg, hogy nincs forgása.

3.2. Az egyensúlyi egyenletek második alakja:

$$\sum_{i=1}^N M_A^{\vec{F}_i} + M_s = 0, \quad \sum_{i=1}^N M_B^{\vec{F}_i} + M_s = 0, \quad \sum_{i=1}^N F_{ix} = 0. \quad (3.36)$$

Általános síkbeli erő és erőpárrendszer egyensúlyban van, ha minden erő és erőpár nyomatékának összege bármely a síkban levő két A és B pontra egyenlő nullával, valamint az erők x tengelyre vett vetületeinek, amely nem merőleges az AB egyenesre, összege egyenlő nullával.

3.3. Az egyensúlyi egyenletek harmadik alakja:

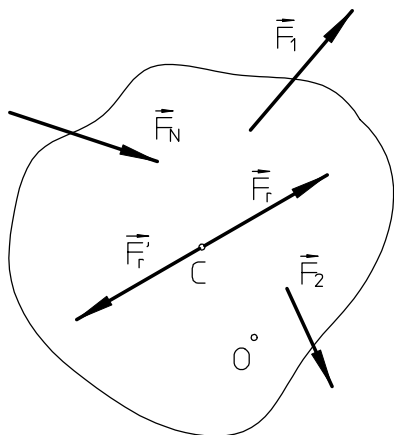
$$\sum_{i=1}^N M_A^{\vec{F}_i} + M_s = 0, \quad \sum_{i=1}^N M_B^{\vec{F}_i} + M_s = 0, \quad \sum_{i=1}^N M_C^{\vec{F}_i} + M_s = 0. \quad (3.37)$$

Általános síkbeli erő és erőpárrendszer egyensúlyban van, ha minden erő és erőpár nyomatékának összege bármely a síkban levő három A, B és C pontra, amelyek nem egy egyenesen fekszenek egyenlő nullával.

Mindhárom alak közül legtöbbet az első használatos, mert ennél semmiféle megkötés nem létezik a koordináta rendszer tengelyeinek és a nyomatéki pont kiválasztásánál.

3.6.1. VARIGNON FÉLE TEORÉMA

Egy merev testre $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ síkbeli erőrendszer támad, amelynek eredője \vec{F}_r a C támadáspontban hat 3.39. ábra. Ugyanabban a pontban hozzáadva egy $\vec{F}'_r = -\vec{F}_r$ erőt az eredő hatásvonalában, az erőrendszer továbbra is egyensúlyban marad (az első aksióma szerint).



3.39. ábra. Általános síkbeli erőrendszer és eredője

Ennek az erőrendszernek (mivel egyensúlyban van), egy tetszőleges O pontra számított főnyomatéka egyenlő nullával, ami kifejezhető a következő összefüggéssel:

$$\sum_{i=1}^N M_O^{\vec{F}_i} + M_O^{\vec{F}_r} = 0. \quad (3.38)$$

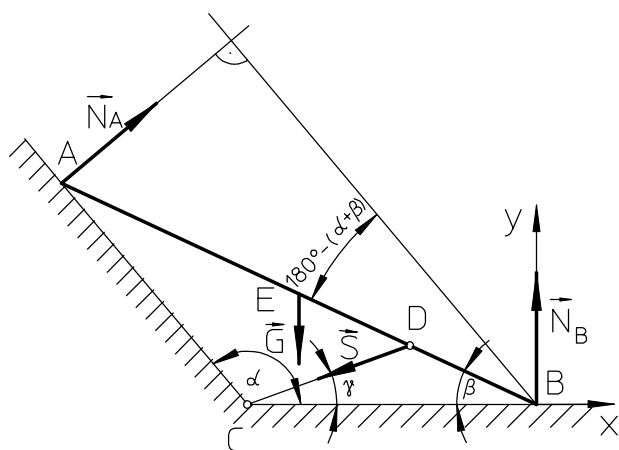
Mivel $M_O^{\vec{F}_r} = -M_O^{\vec{F}_r}$, mert ezeknek az erőknek hatásvonaluk közös és egyenlőek, a (3.38) összefüggés:

$$\boxed{M_O^{\vec{F}_r} = \sum_{i=1}^N M_O^{\vec{F}_i}}. \quad (3.39)$$

Tehát, ha az általános síkbeli erőrendszernek eredője van, érvényes a következő tétel:

Az eredő bármely (O) pontra számított nyomatéka, egyenlő az erőkomponensek nyomatékainak algebrai összegével ugyanarra a nyomatéki pontra. Ez az u.n. VARIGNON TEORÉMA.

Azokban az esetekben hasznos ez a tétel, amikor az erő pontra számított nyomatékát a komponensei nyomatékainak összegeként célszerű kiszámítani.



3.40. ábra. A 3.6. példa illusztrációja

3.6. példa

Az AB rúd, melynek hossza $2l$ súlya G , végeivel síma mozdulatlan felületekre támaszkodik, amelyek α szöget zárnak be. A rúd a vízszinteshez β szöget zár be, és egyensúlyba tartja a CD kötél, amely γ szöget zár be a vízszintessel 3.40. ábra.

Meghatározni az S kötélérőt és az A és B pontok reakcióit.

Megoldás: A rúdra négy erő hat: $\vec{G}, \vec{S}, \vec{N}_A, \vec{N}_B$.

A 3.40. ábra szerinti koordináta tengelyekre az analitikus egyensúlyi egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum F_{ix} &= N_A \cdot \sin \alpha - S \cdot \cos \gamma = 0, \\ 2. \quad \sum F_{iy} &= -N_A \cdot \cos \alpha + N_B - S \cdot \sin \gamma - G = 0, \\ 3. \quad \sum M_B &= N_A \cdot 2l \cdot \cos(\alpha + \beta) + S \frac{2l \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} + G \cdot l \cdot \cos \beta = 0. \end{aligned}$$

A 3. egyenletet $\sin \alpha$ -val szorozva:

$$2 \cdot N_A \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha + 2 \cdot S \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = -G \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta.$$

Az első egyenletből kifejezve N_A -t és behelyettesítve ebbe az egyenletbe:

$$2 \cdot S \cdot [\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma] = -G \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta,$$

amelyből S :

$$S = -G \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{2 \cdot \cos(\alpha + \beta - \gamma)} = G \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{2 \cdot \sin(\alpha + \beta - \gamma - 90^\circ)}.$$

Az 1. egyenletből az A pont reakciója:

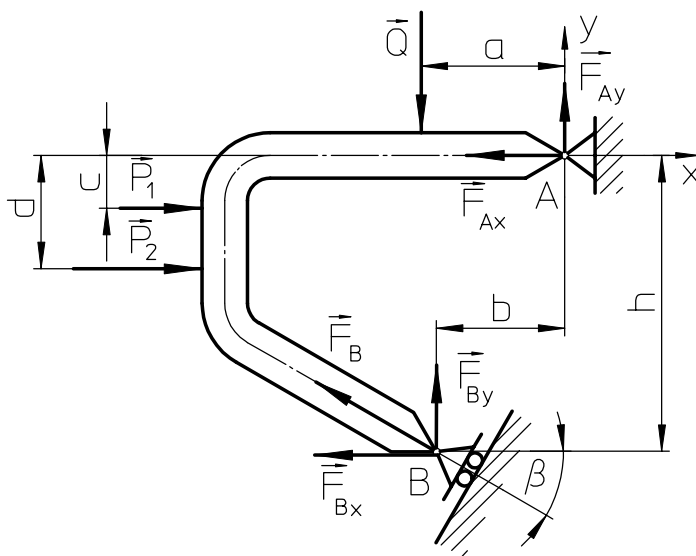
$$N_A = \frac{S \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha} = G \cdot \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{2 \cdot \sin(\alpha + \beta - \gamma - 90^\circ)}.$$

A 2. egyenletből a B pont reakciója:

$$N_B = G + N_A \cdot \cos \alpha + S \cdot \sin \gamma = G + G \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin(\alpha + \beta - \gamma - 90^\circ)},$$

$$N_B = G + G \cdot \frac{\cos \beta \cdot \cos(\alpha - \gamma)}{2 \cdot \sin(\alpha + \beta - \gamma - 90^\circ)}.$$

3.7. példa



3.41. ábra. A 3.7. példa illusztrációja

A keretes tartó, melynek terhelései a 3.41. ábrán láthatók, a Q , P_1 , P_2 terhelések, a β szög, valamint az a , b , c , d és h ismeretében mekkorák támaszainak reakciói?

Megoldás: A keretes tartó sík merev tartóként értelmezhető, amely az A pontban egy álló csuklóhoz a B pontban egy görgős csuklóhoz kapcsolt.

Az A támaszban a reakcióerők F_{Ax} és F_{Ay} , a B ben a támasz reakciója F_B , amely merőleges a felfekvési felületre. Az erők értelme tetszőlegesen választott. A B pontban a reakcióerő komponensei $F_{Bx} = B \cdot \sin \beta$, és $F_{By} = B \cdot \cos \beta$.

Az egyensúlyi egyenletek:

$$1. \sum F_{ix} = -F_{Ax} + P_1 + P_2 - B \cdot \sin \beta = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = B \cdot \cos \beta - Q - F_{Ay} = 0,$$

$$3. \sum M_A = -Q \cdot a - P_1 \cdot c - P_2 \cdot d + B \cdot h \cdot \sin \beta + B \cdot b \cdot \cos \beta = 0.$$

A nyomatéki pont az A pont, hiszen ebben az esetben az F_{Ax} és F_{Ay} komponensek nem szerepelnek a nyomatéki egyenletben. A 3. egyenletből mindjárt következik:

$$F_B = \frac{Q \cdot a + P_1 \cdot c + P_2 \cdot d}{h \cdot \sin \beta + b \cdot \cos \beta},$$

az 1. és 2. egyenletből a többi reakcióerő:

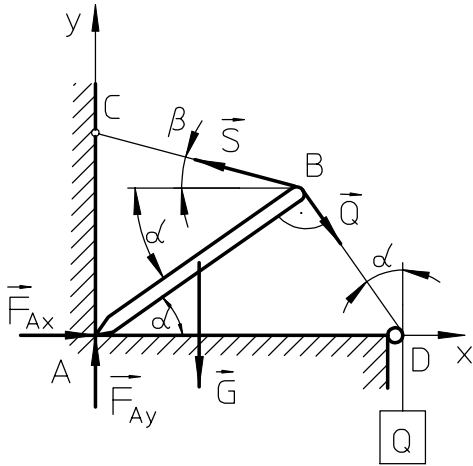
$$F_{Ax} = P_1 + P_2 - B \cdot \sin \beta,$$

$$F_{Ay} = B \cdot \cos \beta - Q.$$

Amennyiben a terhelések számbeli értékeire a reakcióerők pozitívak, a bejelölt irányok helyesek. Ellenkező esetben, a reakcióerők ellentétes értelműek.

3.8. példa

Az AB , G súlyú rúd egyik végével az A pontba támaszkodik (a vízszintes és a függőleges falak találkozásánál). Másik B végéhez kötélszörny van, amelynek egyik vége a C pontban a falhoz van erősítve, másik vége egy D kerék közbeiktatásával Q terhelést visz. A BD kötélszörny merőleges az AB rúdra, mint ahogy az a 3.42. ábrán látható. Meghatározni a Q terhelés súlyát, és az A pontban a reakciókat, ha adva van a BC kötélerő, a rúd súlya G és az α és β szögek.



Megoldás: Az AB rúdra a következő erők hatnak: a rúd közepén annak súlya G és az S erő, amelyeknek irányuk, értelmük és nagyságuk ismert, ezenkívül a Q erő, az F_{Ax} és F_{Ay} erő (a falak reakciói), amelyeknek csak irányuk ismert.

A Q , F_{Ax} és F_{Ay} erők a következő egyensúlyi egyenletek- ből határozhatók meg:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0.$$

Az erőket vízszintes tengelyre vetítve, az első egyenlet:

$$1. \sum F_{ix} = -S \cdot \cos \beta + F_{Ax} + Q \cdot \sin \alpha = 0.$$

3.42. ábra. A 3.8. példa illusztrációja

A rúd hosszát l -el jelölve, a második egyenlet:

$$2. \sum M_A = \frac{1}{2} G \cdot l \cdot \cos \alpha + Q \cdot l - S \cdot l \cdot \sin(\alpha + \beta) = 0,$$

vagy

$$\frac{1}{2} G \cdot \cos \alpha + Q - S \cdot \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

A B pontra a nyomatéki egyenlet

$$3. \sum M_B = -\frac{1}{2} G \cdot l \cdot \cos \alpha + F_{Ay} \cdot l \cdot \cos \alpha - F_{Ax} \cdot l \cdot \sin \alpha = 0,$$

vagy

$$\frac{1}{2} G \cdot \cos \alpha + F_{Ay} \cdot \cos \alpha - F_{Ax} \cdot \sin \alpha = 0.$$

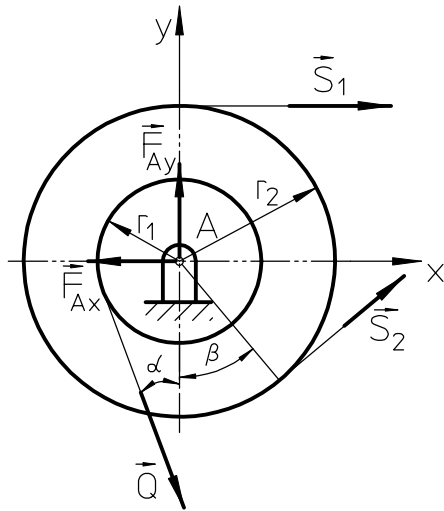
Ezeknek az egyenleteknek megoldásaként három ismeretlen határozható meg, ezek Q , F_{Ax} és F_{Ay} :

$$Q = S \cdot \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} G \cdot \cos \alpha,$$

$$F_{Ax} = \left[S \cdot \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} G \cdot \sin \alpha \right] \cdot \cos \alpha,$$

$$F_{Ay} = S \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} G (1 + \sin^2 \alpha).$$

3.9. példa



3.43. ábra. A 3.9. példa illusztrációja

A 3.43. ábrán bemutatott szíjhajtású hajtómű a Q terhelés emelésére szolgál. Mekkora Q teher emelhető fel ezzel a szerkezettel, és mekkora az A pontban a reakcióerő, ha ismertek:

$$\begin{aligned} S_1 &= 350 \text{ [kN]}, & r_2 &= 1,5 \text{ [m]}, \\ S_2 &= 150 \text{ [kN]}, & \alpha &= 15^\circ, \\ r_1 &= 0,5 \text{ [m]}, & \beta &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Megoldás: A szíjtárcsára S_1 és S_2 erők hatnak (irányuk, értelmük és nagyságuk ismert), a Q erő (csak iránya ismert) és az A pont reakciói (ismeretlen az irányuk, értelmük és nagyságuk). Az A pontban ható erő komponensei F_{Ax} és F_{Ay} .

Az egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{ix} &= -F_{Ax} + Q \cdot \sin \alpha + S_1 + S_2 \cdot \cos \beta = 0, \\ 2. \sum F_{iy} &= F_{Ay} - Q \cdot \cos \alpha + S_2 \cdot \sin \beta = 0, \\ 3. \sum M &= -Q \cdot r_1 + S_1 \cdot r_2 - S_2 \cdot r_2 = 0. \end{aligned}$$

A 3. egyenletből Q értéke:

$$Q = 600 \text{ [kN]}.$$

Ezt behelyettesítve az 1. és 2. egyenletekbe:

$$F_{Ax} = 635 \text{ [kN]}, \quad F_{Ay} = 505 \text{ [kN]},$$

az A pontban a reakcióerő értéke:

$$F_A = \sqrt{635^2 + 505^2} = 810 \text{ [kN]},$$

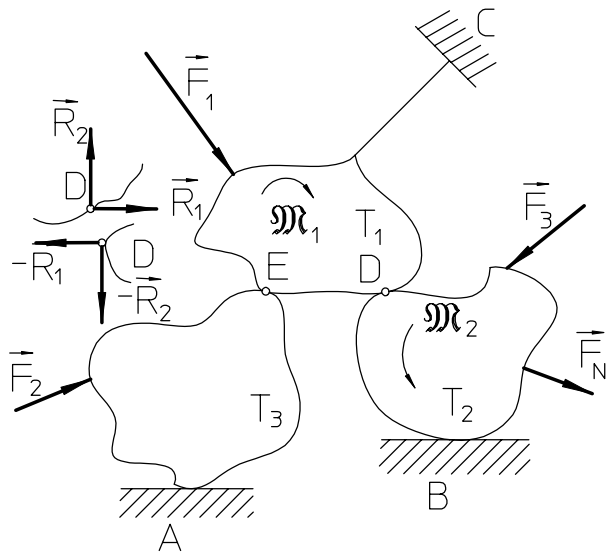
iránya:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{505}{635} = 0,795 \Rightarrow \varphi = 38^\circ 30'.$$

3.6.2. SÍKBELI MEREV TESTEK EGYENSÚLYA

Adott a T_1, T_2, T_3 merev testek rendszere, amelyekre síkbeli $\vec{F}_1 \dots \vec{F}_N$ erő és M_1, M_2 erőpárrendszer hat. A testek támaszai $A \div E$ pontok, a 3.44. ábra szerint. A D és E támaszok **belső**, az A, B, C pontokban viszont **külső** támaszok.

Az egyensúlyi feltételek megadhatók **az egész rendszerre** és **külön minden testre**, és pedig $3(k+1)$ feltétellel, ahol k a testek számát jelöli. Ezekből az egyenletekből csak annyit kell felírni, amennyi az ismeretlenek száma. Az egyensúlyi feltételek meghatározásakor két eset lehetséges:

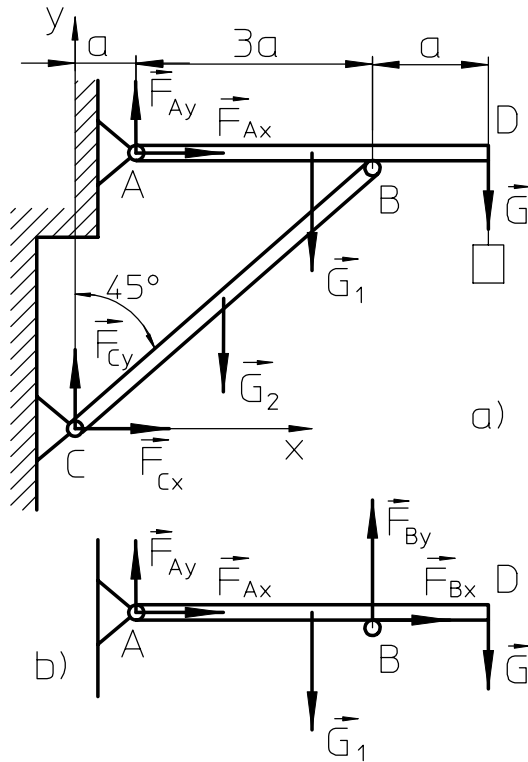


3.44. ábra. Síkbeli merev testek egyensúlya

1. Az egyensúlyi feltételek meghatározása az egész rendszerre, a külső támaszok felszabadítása.
2. Az egyensúlyi helyzetek meghatározása csak valamelyik testre, ekkor a test minden külső és belső támaszainak reakcióit figyelembe kell venni (3.44. ábrán a D pont)

3.10. példa

Az AD rúd melynek súlya $G_1 = 15 \text{ [N]}$ a függőleges falhoz A csuklóval van felerősítve, míg a másik CB rúd melynek súlya $G_2 = 12 \text{ [N]}$ a C végével csuklósan csatlakozik a függőleges falhoz, a B végével ismét csuklósan az AD rúddhoz (a távolságok a 3.45. ábrán adóttak). Az AD rúd végére $G = 30 \text{ [N]}$ terhelés hat. Meghatározni az A és C csuklók reakcióit.



3.45. ábra. A 3.10. példa illusztrációja

Megoldás: Minden külső támasztól megszabadulva, először az egész szerkezet egyensúlyának vizsgálata célszerű. Erre az adott $\vec{G}, \vec{G}_1, \vec{G}_2$ erők, valamint a csuklók $\vec{F}_{Ax}, \vec{F}_{Ay}, \vec{F}_{Cx}, \vec{F}_{Cy}$ reakciói hatnak. Az egyensúlyi egyenletek:

1. $\sum F_{ix} = F_{Ax} + F_{Cx} = 0,$
2. $\sum F_{iy} = F_{Ay} + F_{Cy} - G_1 - G_2 - G = 0,$
3. $\sum M_A = F_{Cx} \cdot 4a - F_{Cy} \cdot a - G_2 \cdot a - G_1 \cdot 2a - G \cdot 4a = 0.$

A három egyenlet négy ismeretlent tartalmaz ($F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Cx}, F_{Cy}$) erők. Hogy a feladat megoldható legyen szükség van még egy egyensúlyi egyenletre, amely a különválasztott AD rúd egyensúlyi egyenlete (3.45. b ábra). Erre a rúdra a \vec{G}, \vec{G}_1 erők, valamint az $\vec{F}_{Ax}, \vec{F}_{Ay}, \vec{F}_{Bx}, \vec{F}_{By}$ reakciók hatnak. A negyedik egyensúlyi egyenlet a B pontra felírt nyomatéki egyenlet, amelyben az F_{Bx} és F_{By}

reakciók nem szerepelnek, ennek alakja:

$$4. \sum M_B = -F_{Ay} \cdot 3a + G_1 \cdot a - G \cdot a = 0.$$

Az egyenletek megoldásával (az utolsóval kezdve), az ismeretlen erők nagyságai:

$$\begin{aligned} F_{Ay} &= \frac{1}{3}(G_1 - G) = -5 \text{ [N]}; & F_{Cy} &= \frac{2}{3}G_1 + G_2 + \frac{4}{3}G = 62 \text{ [N]}; \\ F_{Cx} &= \frac{2}{3}G_1 + \frac{1}{2}G_2 + \frac{4}{3}G = 56 \text{ [N]}; & F_{Ax} &= -F_{Cx} = -56 \text{ [N]}. \end{aligned}$$

Az eredményekből látszik, hogy az $\vec{F}_{Ax}, \vec{F}_{Ay}$ erők iránya ellentétes a rajzon feltüntetetté.

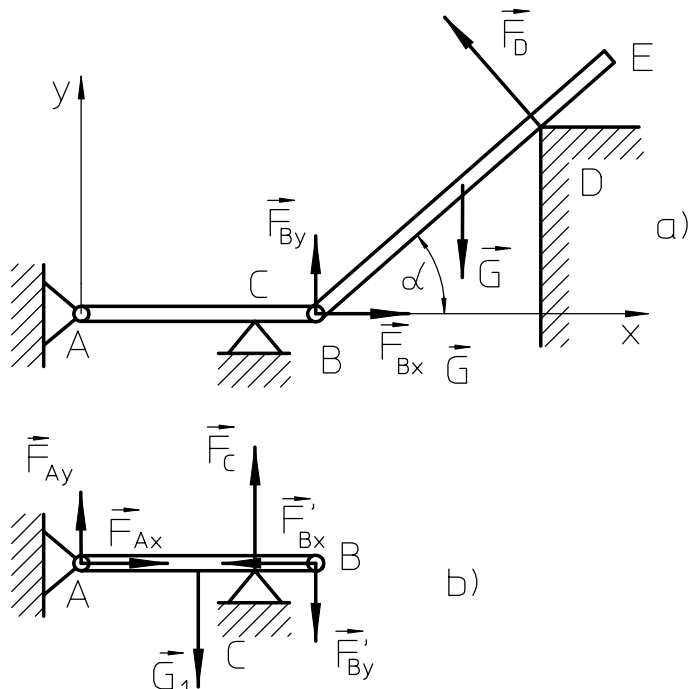
A B csukló reakcióerői, amennyiben kellenek, meghatározhatók az AD rúdra ható erők x és y tengelyre való vetítésével, amelyeknek nagyságai: $F_{Bx} = -F_{Ax}; F_{By} = G_1 + G - F_{Ay} = 50 \text{ [N]}$.

Az egyenletek megoldásánál, minden erőt a következő egyenletbe olyan előjellel kell behelyettesíteni amilyennel az előző egyenletben megoldásként megjelentek. Pl. az utolsó egyenletbe az F_{Ay} értékére -5 [N] , és nem 5 [N] .

Ugyanúgy, nem minden alkalommal fontos minden egyensúlyi egyenletet sem felírni. Ha a feladatban nem kell minden támasz reakcióerőit meghatározni, akkor olyan egyensúlyi egyenletek felállítása a célszerű, amelyekben annak a támasznak reakciói nem szerepelnek. Ebben a feladatban ez alkalmazva is lett, mivel az AD rúd egyensúlyi egyenlete a B nyomatéki pont volt.

3.11. példa

A vízszintes AB gerenda, melynek súlya $G_1 = 20 \text{ [N]}$, az A csuklóval függőleges falhoz kapcsolódik, C pontban egy görgős csuklóra támaszkodik (3.46 a) ábra. A gerenda B végéhez csuklósan egy másik BE gerenda csatlakozik, melynek súlya $G = 40 \text{ [N]}$, amely a D pontban fel van támasztva. Érvényes a következő összefüggés $\overline{CB} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ és $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{BE}$; az α szög $\alpha = 45^\circ$. Meghatározni a támaszok reakcióit.



3.46. ábra. A 3.11. példa illusztrációja

$$F_{Bx} = \frac{3}{8} G \cdot \sin 2\alpha = 15 \text{ [N]},$$

Medoldás: A rendszert két részre célszerű osztani, és a BE rúd, valamint az AB rúd egyensúlyát vizsgálni. A BE rudat szabad testnek tekintve (3.46. a ábra), a rá ható erők a \vec{G} és a támaszok reakciói $\vec{F}_D, \vec{F}_{Bx}, \vec{F}_{By}$. Megjelölve $\overline{BE} = a$ és felírva az egyensúlyi egyenleteket az említett erőkre:

$$1. \sum F_{ix} = F_{Bx} - F_D \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = F_{By} - G + F_D \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$3. \sum M_B = F_D \cdot \frac{2}{3}a - G \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha = 0.$$

Az egyenletek megoldásával:

$$F_D = \frac{3}{4} G \cdot \cos \alpha = 21,2 \text{ [N]},$$

$$F_{By} = G \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \alpha \right) = 25 \text{ [N]}.$$

Az AB rudat (gerendát) szabad testnek tekintve rá a \vec{G}_1 erő, a külső támaszok $\vec{F}_C, \vec{F}_{Ax}, \vec{F}_{Ay}$ reakciói és a BE rúd $\vec{F}'_{Bx}, \vec{F}'_{By}$ hatása a B csuklón érvényesül (3.46. b ábra). Az $(\vec{F}'_{Bx}, \vec{F}'_{By})$ erők értelme a 4. aksióma szerint ellentétes irányú mint az $\vec{F}_{Bx}, \vec{F}_{By}$ erők, de nagyságuk (intenzitásuk) ugyanaz. Bevezetve az $\overline{AB} = b$ jelölést, felírva az egyensúlyi egyenleteket, azok alakjai:

$$1. \sum F_{ix} = F_{Ax} - F'_{Bx} = 0,$$

$$2. \sum M_A = -F'_{By} \cdot b + F_C \cdot \frac{2}{3}b - G_1 \cdot \frac{b}{2} = 0,$$

$$3. \sum M_C = -F_{Ay} \cdot \frac{2}{3}b + G_1 \cdot \frac{b}{6} - F'_{By} \cdot \frac{b}{3} = 0.$$

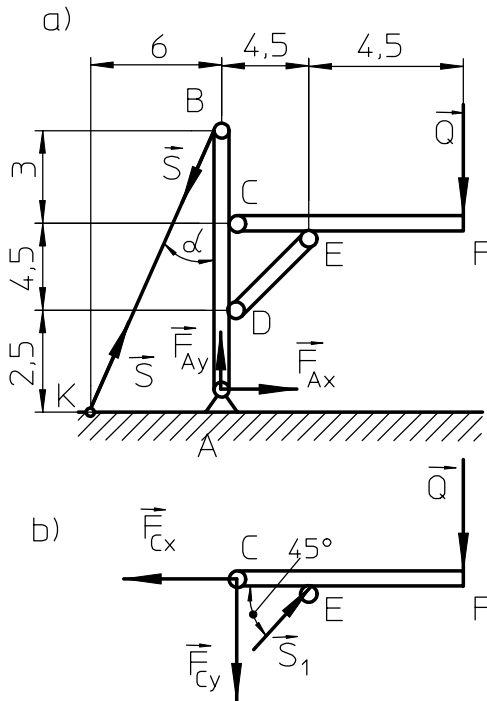
Mivel a B csuklóban fellépő erőkre érvényes $F'_{Bx} = F_{Bx}$; $F'_{By} = F_{By}$, az egyenletek megoldásaként az erők értékei:

$$F_{Ax} = F_{Bx} = 15 \text{ [N]}; \quad F_{Ay} = \frac{1}{4} G_1 - \frac{1}{2} F_{By} = -7,5 \text{ [N]}; \quad F_C = \frac{3}{4} G_1 + \frac{3}{2} F_{By} = 52,5 \text{ [N]}.$$

Minden reakcióerő a rajzszerinti értelmű, kivéve az \vec{F}_{Ay} -t amely lefelé hat.

3.12. példa

Egy mechanikai rendszerre a 3.47. ábra szerint, amelyre \vec{Q} erő hat, meg kell határozni a támaszok reakcióit, valamint a CF rúdra ható erőket. A \vec{Q} súly nagysága $2,5 \text{ [kN]}$, a rudak súlya elhanyagolható.



3.47. ábra. A 3.12. példa illusztrációja

Megoldás: Az egész szerkezetre felírt egyensúlyi egyenletek alapján az A és K támaszok reakciói meghatározhatók, ezután a kiválasztott CF rúd egyensúlyából annak reakciói.

Az egész rendszerre felírt egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum F_{ix} &= -S \cdot \sin \alpha + F_{Ax} = 0, \\ 2. \quad \sum F_{iy} &= Q + S \cdot \cos \alpha - F_{Ay} = 0, \\ 3. \quad \sum M_A &= Q \cdot \overline{CF} - S \cdot \overline{AB} \cdot \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

A 3.47.a) ábra alapján:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\overline{AK}}{\overline{BK}} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 10^2}} = \frac{6}{11,67}, \\ \cos \alpha &= \frac{10}{11,67}, \end{aligned}$$

a (3.) egyenletből a BK kötél erő:

$$S = 4,37 \text{ [kN]},$$

a (2.) ből:

$$F_{Ay} = Q + S \cdot \frac{10}{11,67} = 2,5 + 3,75 = 6,25 \text{ [kN]},$$

míg végül az (1.) ből:

$$F_{Ax} = 2,25 \text{ [kN]}.$$

Az A pont reakciója:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = 6,65 \text{ [kN]}.$$

A CF rúd egyensúlyi egyenletei (3.47.b ábra):

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum F_{ix} &= -F_{Cx} + S_1 \cdot \cos 45^\circ = 0, \\ 2. \quad \sum F_{iy} &= S_1 \cdot \sin 45^\circ - Q - F_{Cy} = 0, \\ 3. \quad \sum M_C &= Q \cdot \overline{CF} - S_1 \cdot \overline{CE} \cdot \sin 45^\circ = 0. \end{aligned}$$

A (3.) egyenletből az E csukló reakciója:

$$S_1 = \frac{Q \cdot \overline{CF}}{\overline{CE} \cdot \sin 45^\circ} = \frac{2,5 \cdot 9}{4,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 7,07 \text{ [kN]},$$

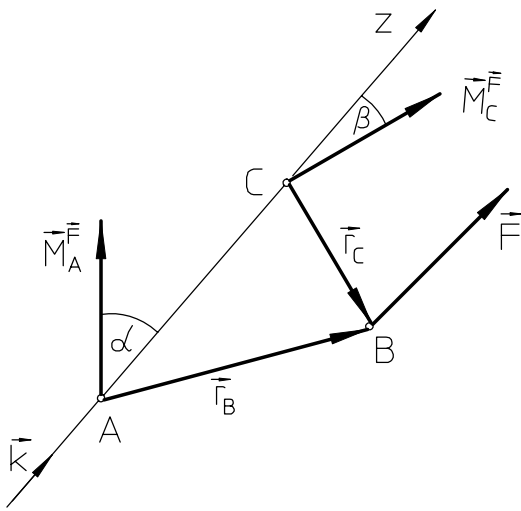
ezután a (2.) és (1.) egyenletből a C csukló reakciói:

$$F_{Cx} = S_1 \cdot \cos 45^\circ = 5 \text{ [kN]}, \quad F_{Cy} = S_1 \cdot \sin 45^\circ - Q = 2,5 \text{ [kN]},$$

ahonnan az össz reakcióerő:

$$F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = 5,6 \text{ [kN]}.$$

3.7. AZ ERŐ TENGELYRE SZÁMÍTOTT NYOMATÉKA



3.48. ábra. Az erő tengelyre számított nyomatéka

egységvektorral) az egyenlet alakja:

$$\vec{M}_A^F \cdot \vec{k} = \vec{M}_C^F \cdot \vec{k} + \vec{AC} \times \vec{F} \cdot \vec{k},$$

az utolsó tag egyenlő nulával, hiszen az \vec{AC} és \vec{k} vektorok kolineárisak, így az egyenlet alakja:

$$M_A^F \cdot \cos \alpha = M_C^F \cdot \cos \beta.$$

A nyomatékok tengelyirányú vetületei megegyeznek, amiből az következik, hogy **az erő nyomatékának vetülete tengelyre, nem függ a tengelyen felvett nyomatéki pont helyétől.**

Ebből, az erő tengelyre számított nyomatékának definíciója: **Az \vec{F} erő z tengelyre számított nyomatéka egyenlő az erő bármely a z tengely pontjára számított nyomatékvektorának vetületével.**

$$\boxed{M_z^F = M_A^F \cdot \cos \alpha.} \quad (3.40)$$

Az erő tengelyre számított nyomatéka **skaláris mennyiség**, ellentétben a pontra számított nyomatékkal, amely vektormennyiség. Ha a vetület a z tengely pozitív irányába esik, akkor iránya pozitív (a z tengely irányából nézve, a testet az óramutató járásával ellentétes irányba forgatja).

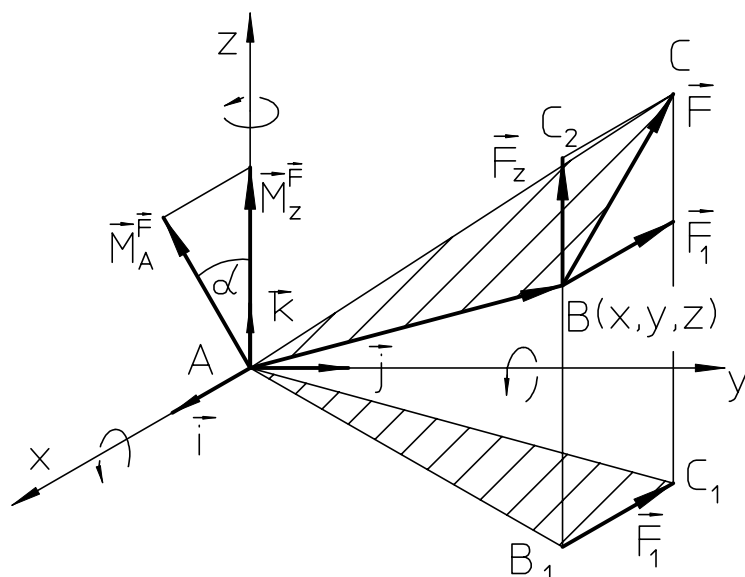
Amennyiben szükséges egy \vec{F} erő nyomatékát bármely térbeli általános helyzetű z tengelyre meghatározni, **a nyomaték értékének a tengely bármely pontjára ugyanakkorának kell lennie.** Alapul véve a z tengelyt melynek egységvektora \vec{k} és az A és C pontokon halad keresztül, a B támadáspontú \vec{F} erő nyomatékai az A és C pontokra 3.48. ábra, következő alakban írhatók fel:

$$\vec{M}_A^F = \vec{r}_B \times \vec{F}, \quad \vec{M}_C^F = \vec{r}_C \times \vec{F}.$$

A nyomatékok egymásközi kapcsolata:

$$\vec{M}_A^F = \vec{M}_C^F + \vec{AC} \times \vec{F}.$$

Levetítve ezt az egyenletet a z tengelyre (szorozva az



3.49. ábra. Erő tengelyre számított nyomatéka

Az \vec{F} erő tengelyre számított nyomatékának analitikus alakja:

Az A pontban felvett merőleges térbeli koordináta rendszerre, ahol a B pontban, amelynek koordinátái (x, y, z) , \vec{F} erő hat 3.49. ábra, az erő A pontra számított nyomatéka az \vec{AB} vektor és az \vec{F} erővektor vektoriális szorzata.

$$\vec{M}_A^{\vec{F}} = \vec{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (y \cdot F_z - z \cdot F_y) + \vec{j} \cdot (z \cdot F_x - x \cdot F_z) + \vec{k} \cdot (x \cdot F_y - y \cdot F_x)$$

(3.41)

Mivel az A pont mindhárom tengelyen fekszik, így az (x, y, z) tengelyekre számított nyomatékok:

$$M_x^{\vec{F}} = y \cdot F_z - z \cdot F_y, \quad (3.42)$$

$$M_y^{\vec{F}} = z \cdot F_x - x \cdot F_z, \quad (3.43)$$

$$M_z^{\vec{F}} = x \cdot F_y - y \cdot F_x, \quad (3.44)$$

ahol:

- x, y, z az erő támadáspontjának koordinátái,
- F_x, F_y, F_z az erő vetületei a koordináta tengelyekre.

Az \vec{F} erőnek ezek az x, y, z tengelyre számított nyomatékai pozitívak, ha a testet a 3.49. ábrán berajzolt irányokban forgatják.

Az \vec{F} erő tengelyre számított nyomatékának geometriai alakja:

Felbontva az \vec{F} erőt két komponensre \vec{F}_1 és \vec{F}_z 3.49. ábra, az \vec{F}_1 erő nagysága az \vec{F} erő xAy (B_1C_1) síkra képzett vetületével egyenlő, az \vec{F}_z erő pedig a z tengelyre (BC_2).

Az erő z tengelyre számított nyomatéka megegyezik az \vec{F}_1 erő A pontra számított nyomatékával (3.21) összefüggés, amely így szól:

$$M_A^{\vec{F}_1} = 2 \cdot P_{\triangle AB_1C_1}$$

Másrésről felírható az \vec{F} erő nyomatéka is az A pontra, mint:

$$M_A^{\vec{F}_1} = 2 \cdot P_{\triangle ABC}$$

Az ismert geometriai tétel szerint a $P_{\triangle AB_1C_1}$ háromszög felülete megegyezik a $P_{\triangle ABC}$ háromszög felületének vetületével. Mindkét felület sraffozott a 3.49. ábrán. Ha ezeknek a felületeknek normálisai α szöget zárnak be, akkor a két sík közötti szög is ugyanaz, amelynek alapján felírható:

$$P_{DAB_1C_1} = P_{DABC} \cdot \cos \alpha, \quad (\alpha \text{ a síkok közti szög}),$$

Amely az előző összefüggések alapján felírható:

$$M_A^{\vec{F}_1} = M_A^{\vec{F}} \cdot \cos \alpha = M_z^{\vec{F}},$$

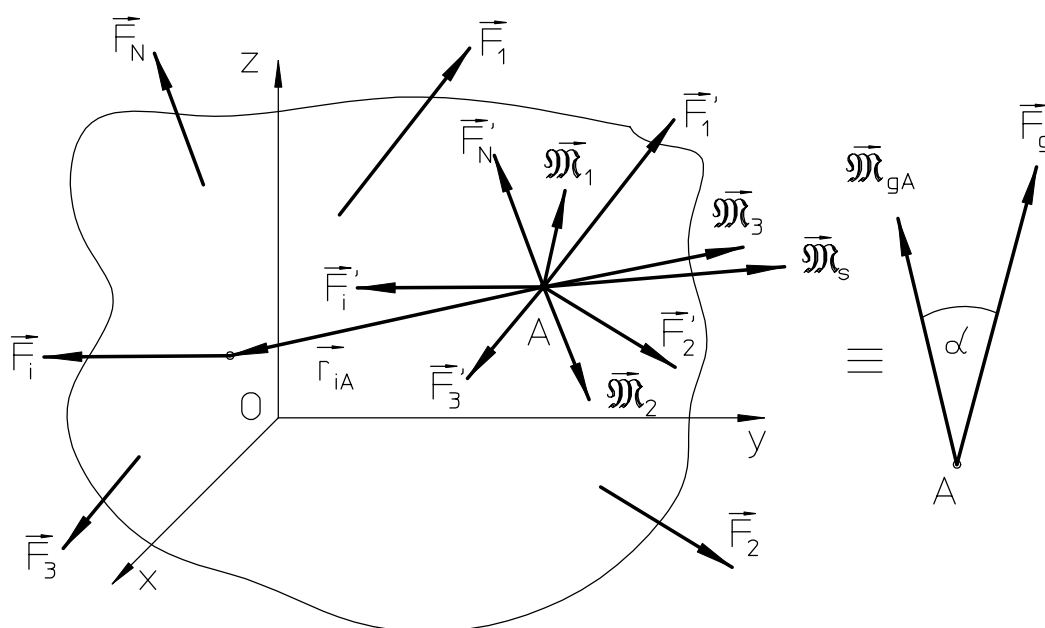
a végső formában:

$$\boxed{M_z^{\vec{F}} = M_A^{\vec{F}_1}}. \quad (3.45)$$

Amely kifejezi, hogy **az erő tengelyre számított nyomatéka egyenlő az erő, tengelyre merőleges síkbani vetületének, vagyis \vec{F}_1 erőnek a z tengely dőléspontjára (A pont) számított nyomatékával.**

3.8. ÁLTALÁNOS TÉRBELI ERŐ ÉS ERŐPÁRRENDSZER

A térbeli $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots \vec{F}_N$ általános erők amelyek a testre hatnak (3.50. ábra), és az $\vec{M}_1, \vec{M}_2 \dots$ általános erőpárrendszer, amelyek mivel szabad vektorok, a tér bármely (A) pontjában vektorilag összeadhatók, és egy \vec{M}_s erőpárvektorral helyettesíthetők. Az adott erőrendszert és az \vec{M}_s erőpárt helyettesíteni kell egy egyszerűbb rendszerrel, és annak egyensúlyi feltételeit megadni.



3.50. ábra. Általános térbeli erő és erőpárrendszer

Ebből a célból az \vec{M}_s erőpárt, és az össz erőt az A pontra célszerű redukálni. Minden erő helyett egy \vec{F}_i az \vec{F}_i erővel párhuzamos erő, és egy \vec{M}_i erőpár adódik, a következő kifejezés szerint:

$$\vec{M}_i = M_A^{\vec{F}_i} = \vec{r}_{iA} \times \vec{F}_i, \quad (3.46)$$

ahol:

- \vec{r}_{iA} az \vec{F}_i erő támadáspontjának helyzetvektora az A ponthoz képest.

Ebből adódóan az A pontban egy közös támadáspontú erő és erőpárrendszer képződik. Az erőpárrendszer az \vec{M}_s erőpárból és az erők redukálásából (3.46) kapott erőpárokból tevődik össze.

Közös támadáspontú erőknek mindig van eredője, így helyettesíthetők a vektoriális összegükkel, melynek alakja:

$$\vec{F}_g = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (3.47)$$

Mivel a térbeli erők legegyszerűbben analitikusan adhatók össze, (3.7) és (3.8) összefüggések, melyeknek alakjai:

$$\boxed{F_{gx} = \sum_{i=1}^N F_{ix}}, \quad \boxed{F_{gy} = \sum_{i=1}^N F_{iy}}, \quad \boxed{F_{gz} = \sum_{i=1}^N F_{iz}}, \quad (3.48)$$

ahol:

- F_{gx}, F_{gy}, F_{gz} az eredő vetületei a koordináta tengelyekre,
- F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} az i -edik erő vetülete a koordináta tengelyekre.

Az eredő intenzitása:

$$\boxed{F_g = \sqrt{F_{gx}^2 + F_{gy}^2 + F_{gz}^2}}, \quad (3.49)$$

az eredővektor és a koordinátatengelyek közti irányszögek koszinuszai:

$$\boxed{\cos \alpha_g = \frac{F_{gx}}{F_g}}, \quad \boxed{\cos \beta_g = \frac{F_{gy}}{F_g}}, \quad \boxed{\cos \gamma_g = \frac{F_{gz}}{F_g}}. \quad (3.50)$$

Az ilyen **egy pontban ható erők összege az általános térbeli erő és erőpárrendszer fővektora.**

A másik összeg, az A pontban ható erőpárok vektoriális összege, amelynek alakja:

$$\vec{M}_{gA} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i + \vec{M}_s = \sum_{i=1}^N \vec{M}_A^{\vec{F}_i} + \vec{M}_s. \quad (3.51)$$

Ugyanennek az összegnek analitikus alakja, a (3.13) és (3.14) összefüggések alapján:

$$\boxed{M_{gAx} = \sum_{i=1}^N M_x^{\vec{F}_i} + M_{sx}}, \quad \boxed{M_{gAy} = \sum_{i=1}^N M_y^{\vec{F}_i} + M_{sy}}, \quad \boxed{M_{gAz} = \sum_{i=1}^N M_z^{\vec{F}_i} + M_{sz}}. \quad (3.52)$$

ahol:

- $M_x^{\vec{F}_i}, M_y^{\vec{F}_i}, M_z^{\vec{F}_i}$ az \vec{F}_i erők x, y, z koordináta tengelyekre számított nyomatékai,
- M_{sx}, M_{sy}, M_{sz} az \vec{M}_s vektor vetületei ugyanazokra a koordináta tengelyekre.

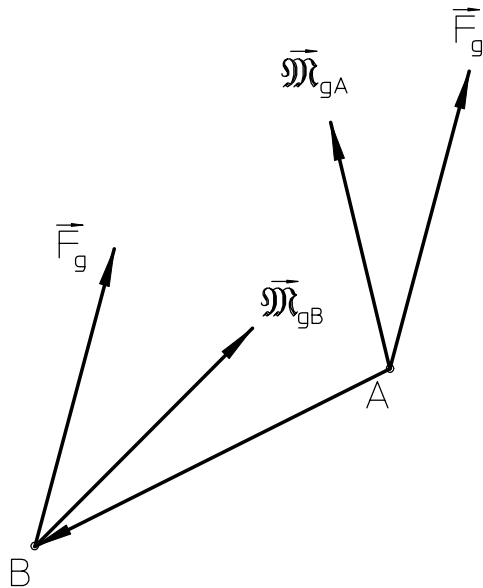
Az erőpárok eredőjének nagysága:

$$\boxed{M_{gA} = \sqrt{M_{gAx}^2 + M_{gAy}^2 + M_{gAz}^2}}. \quad (3.53)$$

és irányszögeinek koszinuszai:

$$\boxed{\cos \alpha_M = \frac{M_{gAx}}{M_{gA}}}, \quad \boxed{\cos \beta_M = \frac{M_{gAy}}{M_{gA}}}, \quad \boxed{\cos \gamma_M = \frac{M_{gAz}}{M_{gA}}}. \quad (3.54)$$

A fenti vektor, minden erőpár összege az A pontban, **az általános térbeli erő és erőpárrendszer főerőpárja.**



3.51. ábra. A redukciópont helyének változtatása

következő esetek:

1. Az erők és erőpárok **erőkeresztet** vagy **dinám**-ot alkotnak.

Ha:

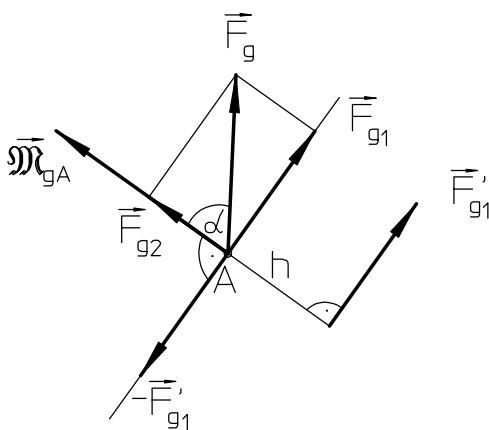
$$\vec{F}_g \neq 0, \quad \vec{M}_{gA} \neq 0, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq \pi / 2, \quad (3.56)$$

ekkor az ilyen általános erő és erőpárrendszer eredője **erőkereszt**, vagy a mechanikában erre használatos külön elnevezés a **dinám**. Az erőkereszt és az erőcsavar közös gyűjtőneve **dinám**, amely az általános erőrendszer eredője.

A kitérő erők eredőjének meghatározásánál, a 3.3.5. fejezetben már szó volt arról, hogy az erőkereszt és az erőcsavar egymásközött ekvivalensek. Ebből kifolyólag, az \vec{F}_g és \vec{M}_{gA} vektorok alkotta erőcsavar mindig visszavezethető megfelelő erőkeresztre.

Ennél a folyamatnál először az \vec{F}_g fővektort két komponensre kell bontani (3.52. ábra), az egyik

(\vec{F}_{g2}) az \vec{M}_{gA} főerőpár irányába, a másik (\vec{F}_{g1}) a főerőpár irányára merőleges irányban kell hogy hasson. A komponensek nagyságai:



3.52. ábra. Erőcsavar felbontása két kitérő erőre

$$F_{g2} = F_g \cdot \cos \alpha, \quad F_{g1} = F_g \cdot \sin \alpha. \quad (3.57)$$

A főerőpárvektor \vec{M}_{gA} a rá merőleges síkban, amelyben az \vec{F}_{g1} erő is hat, helyettesíthető egy vele egyenértékű erőpárral, amelyet a $-\vec{F}'_{g1}$ és \vec{F}'_{g1} erők alkotnak, melyek nagysága úgy választható, hogy évenyesüljön a következő egyenlőség $|\vec{F}'_{g1}| = |\vec{F}_{g1}|$. Ennek az erőpárnak karja h , mivel intenzitása megegyezik az M_{gA} erőpár intenzitásával egyenlő:

$$M_{gA} = F_{g1} \cdot h \Rightarrow h = \frac{M_{gA}}{F_{g1}}.$$

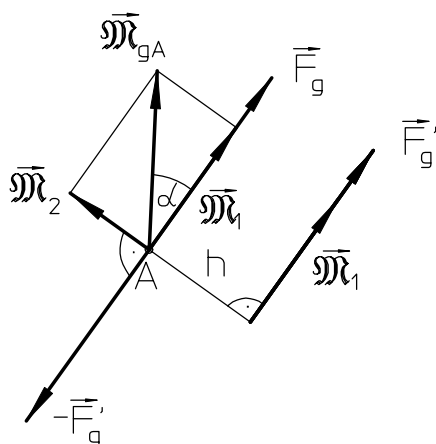
Az \vec{F}_{g1} és $-\vec{F}'_{g1}$ erők a harmadik aksióma szerint elhagyhatók, mivel egyensúlyi erők, és végeredményül marad két kitérő erő az \vec{F}'_{g1} és \vec{F}_{g2} , amelyek erőkeresztet alkotnak.

Az általános térbeli erő és erőpárrendszer redukciójával az A pontra, a rendszer az \vec{F}_g **fővektorra** és az \vec{M}_{gA} **főerőpárra** vezethető le, amelyek egymásközött α szöget zárnak be. Ezek a vektorok **erőcsavart (torzert)** alkotnak, amely ekvivalens (egyenértékű) az egész rendszerrel, mint ahogy az a 3.50. ábrán látható.

Amíg az \vec{F}_g fővektor nem függ az A redukciópont helyzetétől, addig az \vec{M}_{gA} ennek a pontnak függvénye, amelyet az A indexel meg is kell jelölni.

Ha az A pont helyett a B pont lesz kiválasztva redukciós ponttá (3.51. ábra), a fővektor megváltozik, új értéke:

Ugyanez az \vec{F}_g és \vec{M}_{gA} alkotta erőcsavar (torzer) dinámra is felbontható. Ekkor az \vec{M}_{gA} főerőpárvektort kell két komponensre osztani (3.53. ábra) olymódon, hogy az \vec{M}_1 a fővektor \vec{F}_g irányában, a másik \vec{M}_2 az erre merőleges irányban hasson. A komponensek nagyságai:



$$M_1 = M_{gA} \cdot \cos \alpha, \quad M_2 = M_{gA} \cdot \sin \alpha. \quad (3.58)$$

A főerőpár \vec{M}_2 komponense egy vele egyenértékű erőpárral helyettesíthető melyeket a $-\vec{F}'_g$ és \vec{F}'_g erők alkotnak (abban a síkban amelyben a fővektor van), az erők nagysága $|\vec{F}'_g| = |\vec{F}_g|$. Mivel a két erőpár nagysága azonos, a $-\vec{F}'_g$ és \vec{F}'_g erők alkotta erőpár karja:

$$M_2 = F_g \cdot h \Rightarrow h = \frac{M_2}{F_g}.$$

3.53. ábra. Dinám

Az F_g és $-F'_g$ erők, mint egyensúlyi erők elhagyhatók a 3. aksióma szerint. A megmaradt \vec{M}_1 erőpár, mivel szabad vektor, párhuzamosan eltolható az \vec{F}'_g erő hatásvonalába. Eredményként marad az \vec{F}'_g és \vec{M}_1 kolineáris (egyirányú) vektorok alkotta erőcsavar. Az ilyen egyirányú vektorok alkotta erőcsavar neve **dinám**.

Az \vec{F}'_g és \vec{M}_1 , vektorok hatásvonalába egybeeső egyenes, amely nem halad át az A ponton a **dinám tengelye**, vagy az általános térbeli erő és erőpárrendszer **centrális tengelye**.

Az olyan szabad test amelyre dinám hat csavarvonalban mozog. Tulajdonképpen haladó mozgást végez a dinám tengelye irányában, amellyel egyidőben forog is ugyanazon tengely körül.

2. Az erők és erőpárok **erőpárt** alkotnak.

Ez az eset fennáll, ha:

$$\vec{F}_g = 0, \quad \vec{M}_{gA} \neq 0. \quad (3.59)$$

Az ilyen erő és erőpárrendszer, mivel a fővektor $\vec{F}_g = 0$, egyetlen erőpárra redukálható, amely nem függ a redukciós pont helyzetétől.

Ilyen erők és erőpárok hatása esetén a test egy álló tengely körül forog.

3. Az erőknek és erőpároknak **eredőjük** van.

Ebben az esetben két lehetőség kínálkozik:

3.1. Az eredő áthalad a redukciós ponton.

Amennyiben:

$$\vec{F}_g \neq 0, \quad \vec{M}_{gA} = 0. \quad (3.60)$$

Az általános térbeli erő és erőpárrendszer az $\vec{F}_r = \vec{F}_g$ eredőre redukálható, melynek támadáspontja az A pontban van.

3.2. Az eredő nem halad át a redukciós ponton.

Ebben az esetben az erőcsavar (torzer) elemensei az \vec{F}_g fővektor és az \vec{M}_{gA} főerőpár, amelyek az A pontban egymásra merőlegesek. Mivel $\alpha = 90^\circ$, így $M_1 = 0$ az $M_2 = M_{gA}$, és az **egész rendszer egy $\vec{F}_r = \vec{F}_g$ eredőre vezethető vissza, amely a fővektorhoz képest párhuzamosan eltolt irányban helyezkedik el a $h = M_{gA} / F_g$ távolsággal** a 3.53. ábra szerint.

4. Egyensúly.

Egy test akkor van egyensúlyban, ha minden erő és erőpár mechanikai hatása egyenlő nullával.

Ennek feltétele:

$$\vec{F}_g = 0, \quad \vec{M}_{gA} = 0. \quad (3.61)$$

vagy analitikus alakban:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^N F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^N F_{iz} = 0}, \quad (3.62)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^N M_x^{\vec{F}_i} + M_{sx} = 0, \quad \sum_{i=1}^N M_y^{\vec{F}_i} + M_{sy} = 0, \quad \sum_{i=1}^N M_z^{\vec{F}_i} + M_{sz} = 0}.$$

Ez azt jelenti, hogy az általános térbeli erő és erőpárrendszernek **hat skaláris egyensúlyi egyenlete van.**

3.8.1. ÁLTALÁNOS TÉRBELI ERŐ ÉS ERŐPÁRRENDSZER INVARIÁNSAI

Az invariáns olyan mennyiség, amely erő és erőpárrendszer redukálásakor (egyszerűbb alakra változtatásakor) nem függ a redukciós pont helyétől.

Legtöbbször mint a rendszer **első invariánsa** a **fővektor** \vec{F}_g **nagysága (intenzitása)** szerepel. A fővektor nagysága, mint az az előző fejezetekből látszik, nem függ a redukciós pont helyzetétől. Az első invariáns nagysága:

$$\boxed{I_1 = F_g = \sqrt{F_{gx}^2 + F_{gy}^2 + F_{gz}^2}}. \quad (3.63)$$

A főerőpárok közti összefüggés két különböző A és B pontra felírható:

$$\vec{M}_{gB} = \vec{M}_{gA} + \vec{AB} \times \vec{F}_g.$$

A fenti összefüggés mindkét oldala skalárisan szorozva az \vec{F}_g fővektorral:

$$\vec{M}_{gB} \cdot \vec{F}_g = \vec{M}_{gA} \cdot \vec{F}_g + (\vec{AB} \times \vec{F}_g) \cdot \vec{F}_g.$$

Az $(\vec{AB} \times \vec{F}_g) \cdot \vec{F}_g$ vegyes szorzat értéke nulla, mert az $\vec{AB} \times \vec{F}_g$ és \vec{F}_g vektorok egymásközt merőlegesek. Ebből következik, hogy az \vec{M}_{gA} főerőpárvektor és az \vec{F}_g fővektor skaláris szorzata nem függ a redukciópont helyzetétől. Így a rendszer **második invariánsa a fővektor és a főerőpárvektor skaláris szorzata.**

$$\boxed{I_2 = \vec{M}_{gA} \cdot \vec{F}_g}. \quad (3.64)$$

A fenti invariáns kifejezhető másképpen is, a skaláris szorzat definíciója alapján:

$$I_2 = M_{gA} \cdot F_g \cdot \cos \alpha,$$

ahol az α szög a két \vec{M}_{gA} és \vec{F}_g vektor közt bezárt szög.

Mivel a fővektor nagysága a rendszer első invariánsa (I_1), ebből következik:

$$M_{gA} \cdot \cos \alpha = \frac{I_2}{I_1},$$

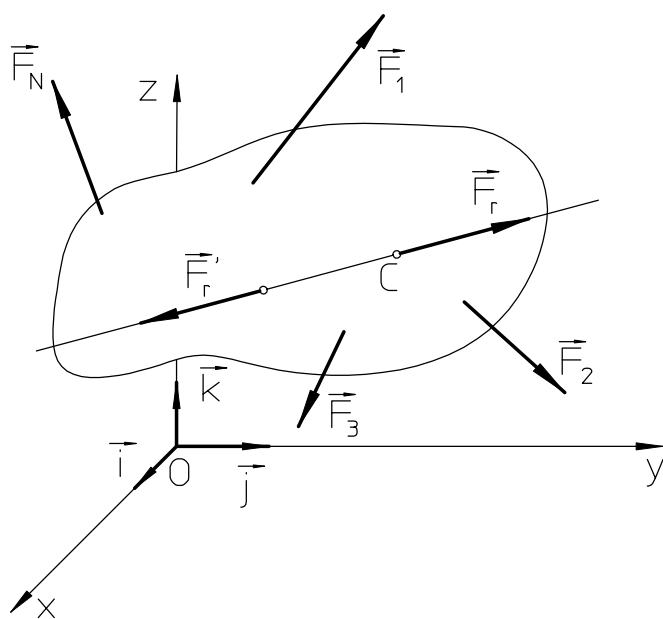
amely nem függ a redukciós pont helyétől. A (3.58) összefüggés alapján az $M_{gA} \cdot \cos \alpha$ szorzat az M_I dinám nyomatéka, így ennek alapján felírható:

$$M_1 = \frac{I_2}{I_1}. \quad (3.65)$$

Összefoglalva, a *térbeli erők és erőpárok invariánsai* a következők:

- *A fővektor nagysága (intenzitása),*
- *A főerőpár vetülete a fővektor irányvonalára, vagy a dinám nyomatéka.*

3.8.2. VARIGNON FÉLE TEORÉMA



3.54. ábra. Varignon féle tétel
($\vec{F}'_r = -\vec{F}_r$), következik:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}'_r} = -\vec{M}_O^{\vec{F}_r}$$

És az előző egyenlet végső alakja:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_r} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O^{\vec{F}_i}. \quad (3.67)$$

Ennek alapján megfogalmazható a *Varignon féle tétel*, amely *pontra számított nyomatékok esetén* így szól: *Az eredő nyomatéka bármely O pontra, megegyezik az erőkomponensek nyomatékainak ugyanarra a pontra számított vektoriális összegével.*

Az egyenletet levetítve egy tengelyre, amely ezen a ponton halad keresztül (z tengely):

$$M_z^{\vec{F}_r} = \sum_{i=1}^N M_z^{\vec{F}_i}, \quad (3.68)$$

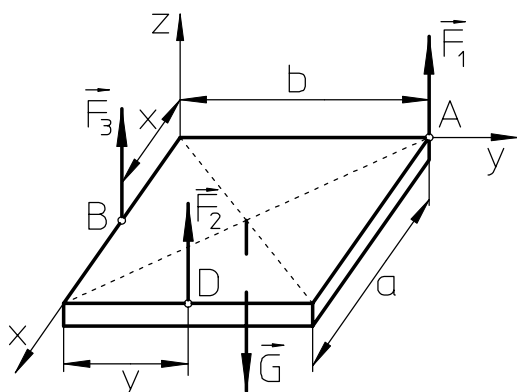
amely a *Varignon féle tételre számított nyomatékok esetére* szól:

Az eredő nyomatéka bármely z tengelyre, egyenlő az erőkomponensek nyomatékainak algebrai összegével.

Feladatok megoldásakor a Varignon féle tétel gyakran használatos, különösen akkor, ha az erő pontra, illetve tengelyre számított nyomatékát a komponensei nyomatékaiból könnyebb meghatározni.

3.13. példa.

Az a és b méretű négyzetes lapot, melynek súlya \vec{G} (3.55. ábra) három munkás tart egyensúlyban, amelyek közül az egyik az A pontnál levő sarkot tarja. Milyen távolságokon kell tartania a másik két munkásnak a lapot a B és D pontokban, hogy mindhármuk ugyanakkora terhelést vigyen?



3.55. ábra. A 3.13. példa illusztrációja

Megoldás: A lapot szabad merev testnek tekintve, melyre négy párhuzamos erő hat ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ amelyekkel a munkások tartják és a lap \vec{G} súlya) meg kell határozni egyensúlyi helyzetét. Mivel a lap vízszintes, a 3.55. ábrán felvett koordináta rendszere az egyensúlyi egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum F_z &= F_1 + F_2 + F_3 - G = 0, \\ 2. \quad \sum M_x &= F_1 \cdot b + F_2 \cdot y - G \frac{b}{2} = 0, \\ 3. \quad \sum M_y &= -F_2 \cdot a - F_3 \cdot x + G \frac{a}{2} = 0. \end{aligned}$$

A feladat szerint $F_1 = F_2 = F_3 = F$, az első egyenletből $G = 3F$, behelyettesítve a másik két egyenletbe, F -el egyszerűsítve az eredmény:

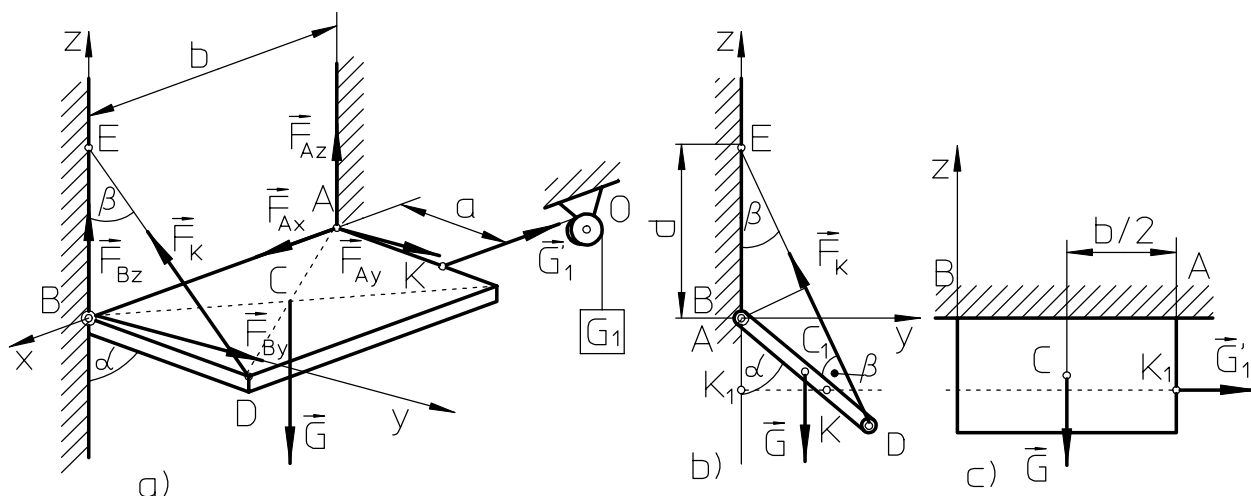
$$b + y = \frac{3}{2}b, \quad a + x = \frac{3}{2}a.$$

Innen:

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}.$$

3.14. példa.

A $\vec{G} = 12 \text{ [N]}$ súlyú négyzetes tartó, amely az AB tengelyével az A ponban gömbcsuklóval a B pontban vezetővel van felerősítve, a függőleges iránnyal $\alpha = 60^\circ$ -os szöget zár be 3.56. a) ábra. A tartót két kötél tartja egyensúlyban. Az egyik a DE , a másik pedig az O pontban egy keréken vezet keresztül végén egy $\vec{G}_1 = 20 \text{ [N]}$ súlyú terheléssel. A KO irány az AB iránnyal párhuzamos. Adva van még: $BD = BE$, $AK = a = 0,4 \text{ [m]}$, $AB = b = 1 \text{ [m]}$. Meghatározni a DE kötélerőt, valamint az A és B támaszok reakcióit.



3.56. ábra. A 3.14. példa illusztrációja

Megoldás: A tartó szabad merev testnek tekinthető, miután a támaszok hatása reakcióerőkkel helyettesített. A B pontban felvett x, y, z koordináta rendszer szerint, az \vec{F}_K erő az y és z tengelyeket

szeli, ami leegyszerűsíti a nyomatéki egyenleteket. Az ábra szerint berajzolva az aktív erőket amelyek a tartóra hatnak, valamint a támaszok reakcióit, felírhatók az egyensúlyi egyenletek: Egyes erők tengelyekre számított nyomatékainak egyértelmű kiszámításához, az ábrán a tartó vetületei is fel lettek tüntetve 3.56.b) és c) ábrák.

A 3.56. b) ábrán a tartó Bxy síkra vetített képe látható az x tengely irányából nézve. Bevezetve a következő jelöléseket: β szög, $BD = BE = d$, a \vec{G} erő karja a B ponthoz viszonyítva egyenlő $BC_1 \cdot \sin \alpha = d/2 \cdot \sin \alpha$. Az \vec{F}_K erő karja ugyanarra a pontra $BE \cdot \sin \beta = d \cdot \sin \beta$.

A 3.56. c) ábrán a tartó Bxz síkra vetített képe látható az y tengely irányából nézve. A \vec{G} erő karja a B ponthoz $1/2 \cdot AB = 1/2 \cdot b$, míg a \vec{G}_1 erő karja ugyanahhoz a ponthoz viszonyítva AK_1 , vagyis $AK \cdot \cos \alpha$, illetve $a \cdot \cos \alpha$.

Mivel a \vec{G}_1 és \vec{G} erők egymásközt egyenlők, az egyensúlyi egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum F_{ix} &= -G_1 + F_{Ax} = 0, \\ 2. \quad \sum F_{iy} &= -F_K \cdot \sin \beta + F_{Ay} + F_{By} = 0, \\ 3. \quad \sum F_{iz} &= -G + F_K \cdot \cos \beta + F_{Az} + F_{Bz} = 0, \\ 4. \quad \sum M_x &= -G \frac{d}{2} \sin \alpha + F_K \cdot d \cdot \sin \beta = 0, \\ 5. \quad \sum M_y &= -G \frac{d}{2} + G_1 \cdot a \cdot \cos \alpha + F_{Az} \cdot b = 0, \\ 6. \quad \sum M_z &= G_1 \cdot a \cdot \sin \alpha - F_{Ay} \cdot b = 0. \end{aligned}$$

A geometriai összefüggésekből adódóan $\beta = \alpha/2 = 30^\circ$, éa az 1. 4. 5. és 6. egyenletekből:

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= G_1 = 20 \text{ [N]}, & F_K &= G \frac{\sin \alpha}{2 \cdot \sin \beta} \approx 10,4 \text{ [N]}, \\ F_{Az} &= \frac{1}{2} G - \frac{a}{b} G_1 \cdot \cos \alpha = 2 \text{ [N]}, & F_{Ay} &= \frac{a}{b} G_1 \cdot \sin \alpha \approx 6,9 \text{ [N]}. \end{aligned}$$

Behelyettesítve ezeket az értékeket a 2. és 3. egyenletbe következik:

$$F_{By} = F_K \cdot \sin \beta - F_{Ay} = -1,7 \text{ [N]}, \quad F_{Bz} = G_1 - F_K \cdot \cos \beta - F_{Az} = 1 \text{ [N]}.$$

3.15. példa.

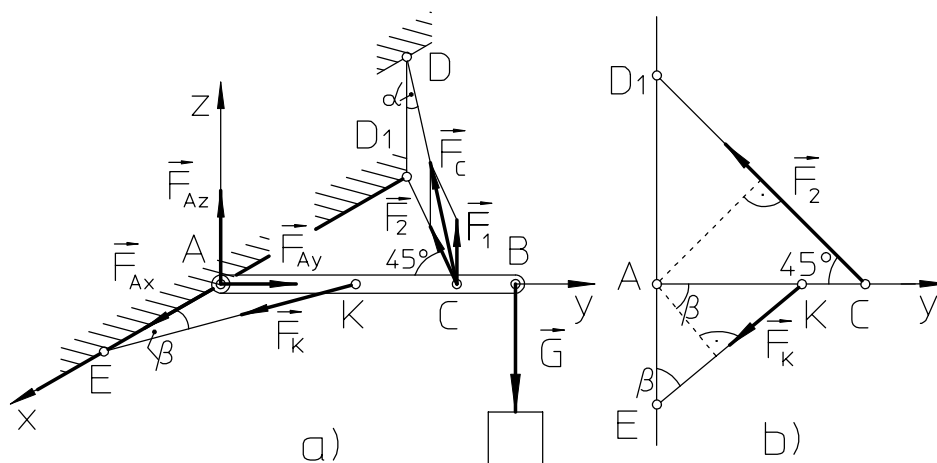
Az AB vízszintes rúd az A pontban gömbcsuklóval van felerősítve egy függőleges falhoz. A KE és CD kötelek segítségével egyensúlyban van, 3.57a) ábra. A rúd B végét $\vec{G} = 36 \text{ [N]}$ súly terheli. Meghatározni az A csukló reakcióit és a kötélerőket, ha adottak: $AB=a=0,8 \text{ [m]}$, $AC=AD_1=b=0,6 \text{ [m]}$, $AK=1/2a$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. A rúd súlya elhanyagolható.

Megoldás: A támaszok felszámolásával (helyettesítve őket reakcióikkal), a rúd szabad merev testnek tekinthető, amelynek egyensúlyi helyzetét kell vizsgálni.

A rúdra a \vec{G} súlyerő és az $\vec{F}_K, \vec{F}_C, \vec{F}_{Ax}, \vec{F}_{Ay}, \vec{F}_{Az}$ reakcióerők hatnak. Az ábraszerinti koordináta tengelyekre célszerű az erők nyomatékait kiszámolni. Mivel minden erő metszi az y tengelyt, így erre a tengelyre az erők nyomatéka nulla. Az \vec{F}_C erő nyomatékához az erőt előbb \vec{F}_1 és \vec{F}_2 komponenseire kell bontani ($F_1 = F_C \cdot \cos \alpha$, $F_2 = F_C \cdot \sin \alpha$), majd a Varignon tételt alkalmazni.

Ennek az erőnek tengelyekre számított nyomatékai a következők: : $M_x^{\vec{F}_C} = M_x^{\vec{F}_1}$, mert $M_x^{\vec{F}_2} = 0$, $M_z^{\vec{F}_C} = M_z^{\vec{F}_2}$, mert $M_z^{\vec{F}_1} = 0$.

A 3.57.b) ábrán az erőrendszer Axy síkbeli vetülete látszik, amely megkönnyíti a z tengely irányú nyomatékok felállítását.



3.57. ábra. A 3.15. példa illusztrációja

A rendszer egyensúlyi egyenletei:

1. $\sum F_{ix} = F_K \cdot \cos \beta - F_C \cdot \sin \alpha \cdot \sin 45^\circ + F_{Ax} = 0,$
2. $\sum F_{iy} = -F_K \cdot \sin \beta - F_C \cdot \sin \alpha \cdot \cos 45^\circ + F_{Ay} = 0,$
3. $\sum F_{iz} = -G + F_C \cdot \cos \alpha + F_{Az} = 0,$
4. $\sum M_x = -G \cdot a + F_C \cdot b \cdot \cos \alpha = 0,$
5. $\sum M_y = -F_K \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \beta + F_C \cdot b \cdot \sin 45^\circ = 0.$

az egyenletek megoldásával az egyes erők nagyságai:

$$F_C \approx 55,4 [N], \quad F_K \approx 58,8 [N],$$

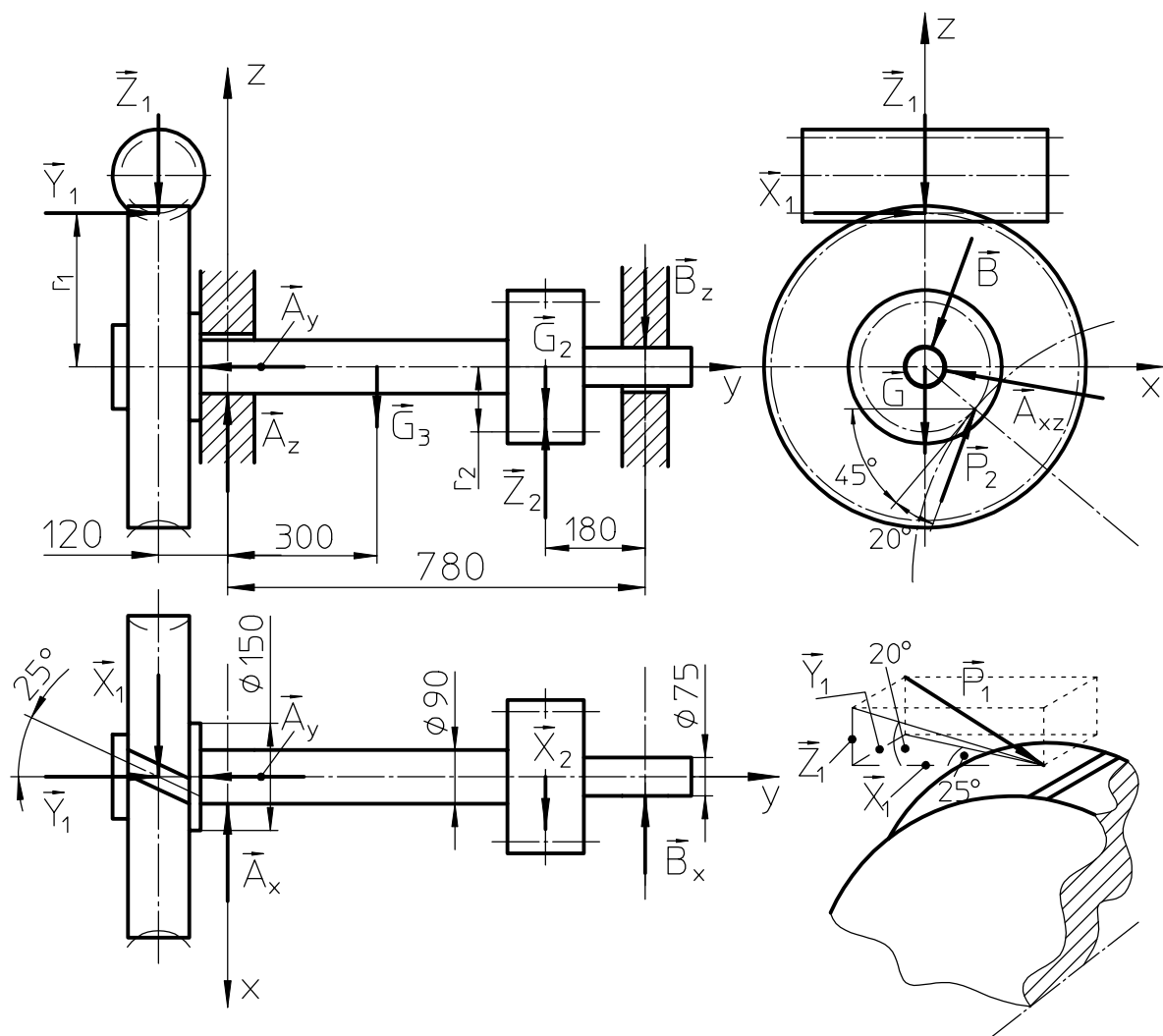
$$F_{Ax} \approx -9,8 [N], \quad F_{Ay} \approx 70,5 [N], \quad F_{Az} = -12 [N].$$

Az \vec{F}_{Ax} és \vec{F}_{Az} erők irányai a rajzon feltüntetett irányokkal ellentétesek.

3.16. példa.

A 3.58. ábrán látható hajtómű tengelye, amelynek baloldalán csigahajtás, jobboldalán fogaskerék-hajtás van, $M = 150 [kNm]$ nyomatékot kell átvinnie. Mekkora az A és B csapágyak terhelései?

Adottak $r_1 = 240 [mm]$, $r_2 = 140 [mm]$, $G_1 = 65 [kN]$ (a csigakerék súlya), $G_2 = 46 [kN]$ (a fogaskerék súlya), $G_3 = 52 [kN]$ (a tengely súlya). A surlódást figyelmen kívül kell hagyni. A csigakerék fogainak hajlásszöge 25° , a fogaskerekének érintőszöge $\beta = 20^\circ$.



3.58. ábra. A 3.16. példa illusztrációja

Megoldás: Legelőször a P_1 erő komponenseit kell ismerni, amelyek a csiga és a csigakerék fogain hatnak. A P_1 erő merőleges a fogak felületére, hiszen nincs surlódás.

A csigakerék peremén ható erő:

$$X_1 = \frac{M}{r_1} = \frac{15000 \text{ kNcm}}{24 \text{ cm}} = 625 [\text{kN}].$$

A P_1 erő másik két komponense az ábra alapján, figyelembe véve az $\alpha = 25^\circ$ -os szöveget:

$$Y_1 = X_1 \cdot \tan 25^\circ = 291 [\text{kN}],$$

illetve a $\beta = 20^\circ$:

$$Z_1 = X_1 \cdot \tan 20^\circ = 625 \cdot \tan 20^\circ = 227 [\text{kN}].$$

A P_2 erő a fogaskerék fogainak érintőirányában hat (az érintőszög 20°) a csapágyakban jelentkező reakcióerőket a térbeli erőrendszer hat egyensúlyi egyenletéből lehet meghatározni.

1. A $\sum M_y = 0$ -ból következik:

$$P_2 = \frac{X_1 \cdot r_1}{r_2 \cdot \cos 20^\circ} = 1140 [\text{kN}].$$

A P_2 erő komponensei az ábra alapján meghatározhatók:

$$X_2 = P_2 \cdot \cos(45^\circ + 20^\circ) = 1140 \cdot \cos 65^\circ = 482 \text{ [kN]},$$

$$Y_2 = 0,$$

$$Z_2 = P_2 \cdot \sin 65^\circ = 1033 \text{ [kN]}.$$

2. A $\Sigma M_z = 0$ -ból meghatározható a jobboldali csapágyszint reakciója:

$$-B_x \cdot 78 + X_2 \cdot 60 - X_1 \cdot 12 = 0 \quad \Rightarrow B_x = 275 \text{ [kN]}.$$

3. A $\Sigma M_x = 0$ -ból ugyanannak a csapágyszint függőleges reakciója:

$$B_z \cdot 78 - (Z_2 - G_2) \cdot 60 + G_3 \cdot 30 - (Z_1 + G_1) \cdot 12 = 0 \quad \Rightarrow B_z = 784 \text{ [kN]}.$$

4. A $\Sigma Y = 0$ -ból megkapható a baloldali csapágyszint tengelyirányú reakciója:

$$Y_1 - A_y = 0 \quad \Rightarrow A_y = Y_1 = 291 \text{ [kN]}.$$

5. A $\Sigma Z = 0$ a baloldali csapágyszint reakciójának függőleges komponensét adja:

$$A_z - B_z - G_1 - G_3 - Z_1 + Z_2 = 0 \quad \Rightarrow A_z = 141 \text{ [kN]}.$$

6. A $\Sigma X = 0$ -ból meghatározható ugyanennek a csapágyszint vízszintes reakciókomponense:

$$-A_x - B_x + X_1 + X_2 = 0 \quad \Rightarrow A_x = 832 \text{ [kN]}.$$

A jobb oldali csapágyszint csak radiális terheléssel lehet terhelni, tengelyirányú erőt nem vihet át, így:

$$B_y = 0.$$

A baloldali csapágyszint radiális terhelésének nagysága (az A_x és A_z komponensek összege):

$$A_{xz} = \sqrt{A_x^2 + A_z^2} = \sqrt{832^2 + 141^2} = 844 \text{ [kN]}.$$

Ennek iránya:

$$\cos \gamma = \frac{A_x}{A_{xz}} = \frac{832}{844} = 0,986 \quad \Rightarrow \gamma = 9^\circ 40'.$$

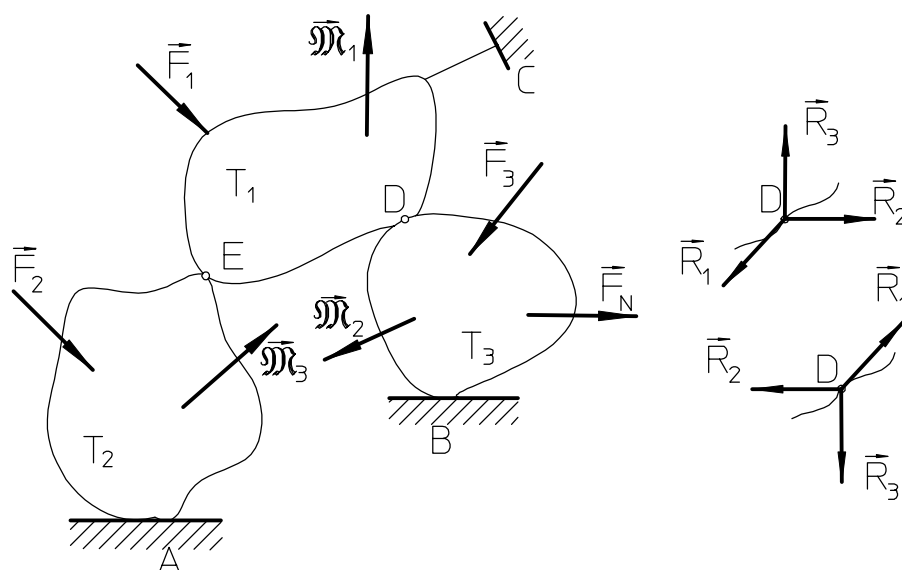
A jobboldali csapágyszint reakciója:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = \sqrt{275^2 + 784^2} = 831 \text{ [kN]},$$

és ennek iránya:

$$\cos \delta = \frac{B_x}{B} = \frac{275}{831} = 0,331 \quad \Rightarrow \delta = 70^\circ 30'.$$

3.8.3. TÉRBELI MEREV TESTEK EGYENSÚLYA



3.59. ábra. Térbeli merev testek

Adott a T_1 , T_2 , T_3 merev testek rendszere, amelyek szabad mozgását az A , B , C , D , E pontokban támaszok akadályozzák és térbeli erő és erőpárrendszer terhel, 3.59. ábra. Az egyensúlyi helyzetek meghatározhatók:

- az egész rendszere,
- mindenegyes testre külön külön.

Az ábrán bemutatott testek esetében a D és E pontokban a támaszok belső támaszok, a többi (A, B, C) pontban külsők.

Térbeli rendszernek $6(k+1)$ egyensúlyi feltétel felel meg, ahol k a testek számát jelenti. Mindezek az egyenletek nem függetlenek, így a konkrét esettől függően annyi egyenletet kell felírni, ahány az ismeretlenek száma.

Az egyensúlyi feltételek meghatározásakor, ha azok az **egész rendszerre vonatkoznak, kizárólag a külső támaszokat** (A, B, C) **kell felszabadítani**. Ha **csak egy test** egyensúlyi feltételeit kell meghatározni, akkor **minden a testre ható belső, és külső** támaszt fel kell szabadítani. A belső támaszok felszabadításakor figyelmesen kell eljárni, ugyanis nem szabad kihagyni a szomszédos testekre ható reakciókat sem, D pont a 3.59. ábrán.

3.9. MEREV TEST SÚLYPONTJA

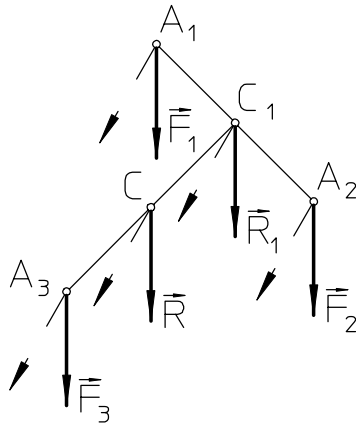
Minden merev test számtalan kis részecskéből áll. Mindenegyes részecskére hatással van a föld vonzóereje, párhuzamos erőket képezve. Bárhogyan is forduljon a test, az erők nagysága állandó marad. Ezeknek az erőknek eredője (a párhuzamos erőknek mindig van eredőjük) a **test súlypontja**.

A test súlypontja az a pont, amelyen keresztülhalad a test súlyának hatásvonal a test bármely térbeli helyzetében a földhöz képest. A test súlypontjának helyzete állandó.

3.9.1. A SÚLYPONT BIZONYÍTÁSA

A test három A_1 , A_2 , A_3 részecskéjére az $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ párhuzamos erők hatnak a 3.60. ábra szerint. Összeadva az \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erőket eredőjük $R_1 = F_1 + F_2$.

Az A_1 pont az erők támadáspontját összekötő vonalon helyezkedik el, a C_1 pontban, amely a következő összefüggésből határozható meg:



3.60. ábra. A súlypont bizonyítása

$$A_1 C_1 = A_1 A_2 \cdot \frac{F_2}{R_1}. \quad (3.69)$$

Az \vec{R}_1 erő szintén párhuzamos az \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erőkkel.

Összeadva az \vec{R}_1 és \vec{F}_3 erőket, az eredő $R = F_1 + F_2 + F_3$, és $C_1 C$ helyzetét a következő összefüggés adja:

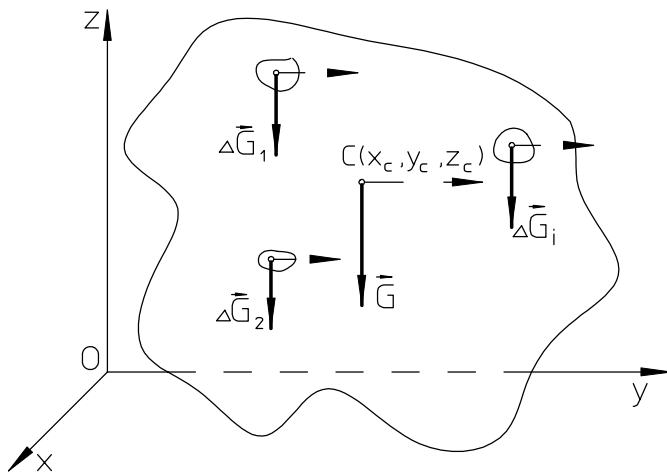
$$C_1 C = C_1 A_3 \cdot \frac{F_3}{R}. \quad (3.70)$$

Hasonló módon meghatározható a nagysága és támadáspontja számtalan párhuzamos erő eredőjének. Alapjában véve leszögezhetők a következő végkövetkeztetések:

- Bármilyen számú párhuzamos erőnek az eredője velük párhuzamos, és értelme ugyanaz.
- Az eredő nagysága megegyezik az erők algebrai összegével.
- Az eredő támadáspontja a párhuzamos erők összeadásán alapszik.

A C pont helyzete nem változik akkor sem, ha az erők bármilyen szög alatt elfordulnak, hiszen azok ugyanúgy párhuzamosak maradnak. A 3.60. ábrán ezeknek az erőknek új hatásvonala szaggatott vonallal van bejelölve. Az \vec{R}_1 eredő ugyanúgy párhuzamos az \vec{F}_1 és \vec{F}_2 komponensekkel, helyzete a C_1 pont, amely ugyancsak a (3.69) összefüggésből következik. Megismételve ugyanezt az \vec{R}_1 és \vec{F}_3 erőkre leszögezhető, hogy ha minden erő ugyanolyan szögben fordul el támadáspontja körül, akkor az eredő is ugyanolyan szögben fordul el C támadáspontja körül anélkül, hogy változna nagysága. A C pont amely az eredő hatásvonalán helyezkedik el, de ugyanakkor az elfordított erőrendszer eredőjének hatásvonalára is ezen a ponton halad keresztül, a **merev test súlypontja**.

3.9.2. A MEREV TEST SÚLYPONTJÁNAK MEGHATÁROZÁSA



3.61. ábra. A merev test súlypontja

Egy merev test $D\vec{G}_i$ részecskéinek súlyai alapján 3.61. ábra, felírható az egész test súlya mint részecskéi súlyainak összege:

$$G = \sum D\vec{G}_i. \quad (3.71)$$

A test súlyának támadáspontja a test C súlypontjában van, amelynek koordinátái x_c , y_c és z_c . A C pont helyzetének meghatározására a Varignon féle tétele (3.68) felhasználható, amely erre a párhuzamos erőrendszerre alkalmazható. Az erőkomponensek a test részecskéinek súlyai $\vec{F}_i = D\vec{G}_i$, az x_i , y_i , z_i súlypontjaik koordinátái, amelyeknek eredője a test súlya $\vec{F}_r = \vec{G}$. A Varignon féle tétel

$M_y^{\vec{F}_r} = \sum M_y^{\vec{F}_i}$, vonatkoztatva az y tengelyre, amelyből következik:

$$G \cdot x_c = \sum D\vec{G}_i \cdot x_i,$$

illetve:

$$x_c = \frac{\sum DG_i \cdot x_i}{G}.$$

A nyomatéki egyenletet felállíva az x tengelyre:

$$G \cdot y_c = \sum DG_i \cdot y_i,$$

illetve:

$$y_c = \frac{\sum DG_i \cdot y_i}{G}.$$

A súlypont z_c koordinátájának meghatározásához az erőket 90° -al el kell fordítani (szaggatottan bejelölve a 3.61. ábrán), mivel bizonyított, hogy a súlypont helyzete nem változik az elfordított erőrendszeré sem, a Varignon tételt alkalmazva a z tengelyre:

$$G \cdot z_c = \sum DG_i \cdot z_i,$$

illetve:

$$z_c = \frac{\sum DG_i \cdot z_i}{G}.$$

Míg végül a merev test súlypontja a következő összefüggésekből határozható meg:

$$\boxed{x_c = \frac{\sum DG_i \cdot x_i}{G}}, \quad \boxed{y_c = \frac{\sum DG_i \cdot y_i}{G}}, \quad \boxed{z_c = \frac{\sum DG_i \cdot z_i}{G}}, \quad (3.72)$$

ahol:

- x_c, y_c, z_c a test súlypontjának koordinátái,
- ΔG_i a test részecskéinek (részeinek) súlyai,
- x_i, y_i, z_i a test részecskéi (részei) súlypontjainak koordinátái,
- G az egész test súlya.

Fontos itt megjegyezni, hogy egy test súlypontja egy mértani pont, amely magában a testben, de a test kontúrjain kívül is elhelyezkedhet.

3.9.3. HOMOGEN TESTEK SÚLYPONTJAI

A homogén testek fajsúlya γ a test minden pontjában azonos, tehát felírható:

$$G = \gamma \cdot V \quad \text{és} \quad DG_i = \gamma \cdot DV_i,$$

ahol:

- V a test térfogata ($V = \sum V_i$),
- ΔV_i a részecskék (részek) térfogata.

Behelyettesítve a(3.72) kifejezésekbe egyszerűsítve γ -val, a homogén test súlypontjának koordinátái:

$$\boxed{x_c = \frac{\sum DV_i \cdot x_i}{V}}, \quad \boxed{y_c = \frac{\sum DV_i \cdot y_i}{V}}, \quad \boxed{z_c = \frac{\sum DV_i \cdot z_i}{V}}, \quad (3.73)$$

Amelynek alapján, **a test súlypontjának helyzete kizárólag geometriai alakjától függ súlyától nem, így a test V térfogatának súlypontjaként ismert.**

3.9.4. HOMOGEN FELÜLET SÚLYPONTJA

Ha egy test valamelyik kiterjedése elhanyagolhatóan kicsiny a másik két kiterjedéséhez képest, a test felületnek tekinthető. A felület súlypontjának helyzete meghatározható:

$$\boxed{x_c = \frac{\sum DA_i \cdot x_i}{A}}, \quad \boxed{y_c = \frac{\sum DA_i \cdot y_i}{A}}, \quad \boxed{z_c = \frac{\sum DA_i \cdot z_i}{A}}, \quad (3.74)$$

ahol:

- ΔA_i a részfelületek felületei,
- A az egész felület felülete ($A = \sum A_i$).

3.9.5. HOMOGEN VONAL SÚLYPONTJA

Vonalnak tekinthető az olyan test, melynek két kiterjedése elhanyagolhatóan kicsiny. A vonal súlypontjának koordinátáit a következő összefüggések adják:

$$\boxed{x_c = \frac{\sum DL_i \cdot x_i}{L}}, \quad \boxed{y_c = \frac{\sum DL_i \cdot y_i}{L}}, \quad \boxed{z_c = \frac{\sum DL_i \cdot z_i}{L}}, \quad (3.75)$$

ahol:

- ΔL_i a vonal részeinek hosszai,
- L az egész vonal hossza ($L = \sum L_i$).

A részecskéket elaprózva (elemi tömegponttá) akkor a (3.73) - (3.76) kifejezésekben az összeg integrállal helyettesíthető, melyek alakjai:

$$\begin{aligned} \sum DV_i \cdot x_i &\Rightarrow \int_{(V)} x \cdot dV && \text{- térintegrál,} \\ \sum DA_i \cdot x_i &\Rightarrow \int_{(A)} x \cdot dA && \text{- felületintegrál,} \\ \sum DL_i \cdot x_i &\Rightarrow \int_{(L)} x \cdot dL && \text{- vonalintegrál.} \end{aligned}$$

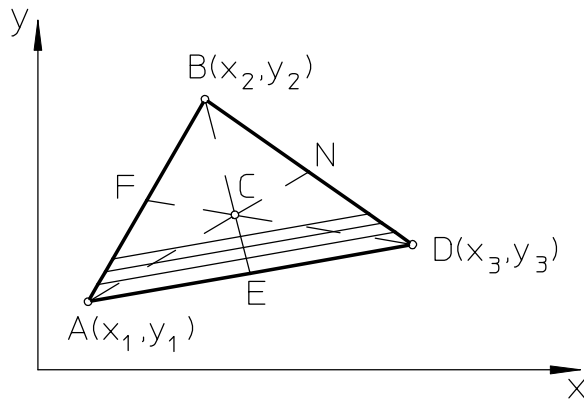
Ha a homogén testek alakja szimmetrikus, a szimetriából adódó előnyök, súlypont számításánál jól kihasználhatók. Ha a testnek szimetriásíkja van, a súlypont abban a síkban helyezkedik el. Amennyiben két szimetriásíkkal rendelkezik, vagyis szimmetria tengellyel, a súlypont azon a tengelyen lesz. Azok a testek amelyeknek három szimetriásíkjuk van, tehát szimetriapontjuk, súlypontjuk is abban a pontban lesz.

3.9.6. NÉHÁNY PÉLDA SÚLYPONT MEGHATÁROZÁSÁRA

Háromszög

Az ABD háromszög felületét csíkokra osztva a 3.62. ábra szerint, amelyek párhuzamosak az AD oldallal, a csíkok súlypontjai az EB vonalon fekszenek, ahol E pont az AD vonal felezőpontja. Hasonlóképpen határozhatók meg az N és F pontok is. A háromszög szemközti csúcaival összekötve a kapott pontokat, megkaphatók az (EB, NA, FD) felezővonalak, amelyeknek metszéspontjában található a C súlypont.

Az AEF és ADB háromszögek hasonlóságából következik:



3.62. ábra. A háromszög súlypontja

$$\frac{EF}{BD} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{2},$$

az EFC és BDC hasonlóságából:

$$\frac{EC}{CB} = \frac{EF}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EC}{CB} = \frac{1}{2}; CB = 2 \cdot EC,$$

a 3.62. ábra alapján, illetve behelyettesítve a CB értékét:

$$EB = EC + CB = EC + 2 \cdot EC = 3 \cdot EC,$$

illetve:

$$\boxed{EC = \frac{1}{3} EB.} \quad (3.76)$$

A csúcspontok $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $D(x_3, y_3)$, koordinátáinak ismeretében, a súlypont koordinátái:

$$\boxed{x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}}, \quad \boxed{y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}}. \quad (3.77)$$

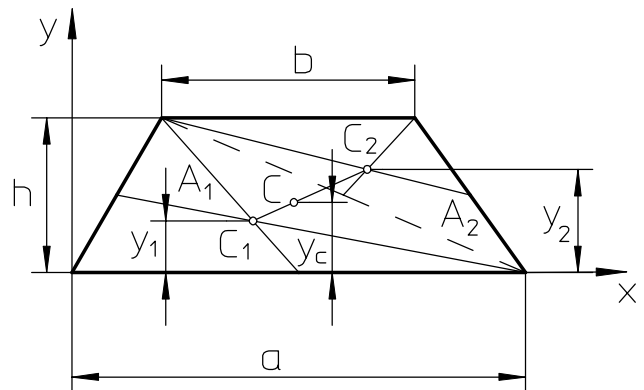
Trapéz

A 3.63. ábra szerinti trapéz két A_1 és A_2 háromszögre osztva, melyeknek felületeik:

$$A_1 = \frac{a \cdot h}{2}, \quad A_2 = \frac{b \cdot h}{2},$$

súlypontjaik helyzete:

$$y_1 = \frac{1}{3} h, \quad y_2 = \frac{2}{3} h.$$



3.63. ábra. A trapéz súlypontja

A trapéz súlypontja a (3.74) alapján:

$$y_c = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{a \cdot h}{2} \cdot \frac{1}{3} h + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3} h}{\frac{h}{2} (a + b)} = \frac{\frac{h}{6} (a + 2b)}{\frac{1}{2} (a + b)},$$

végző formában:

$$\boxed{y_c = \frac{h(a + 2b)}{3(a + b)}}. \quad (3.78)$$

Körív súlypontja

Az AB körív, melynek sugara r , központi szöge 2α 3.64. ábra, súlypontjának helye a körív szimmetriatengelyén van (y tengely).

Az tengelytől Φ szögre elhelyezkedő elementáris dL ívnek, melynek megfelel a $d\Phi$ szög, súlypontja:

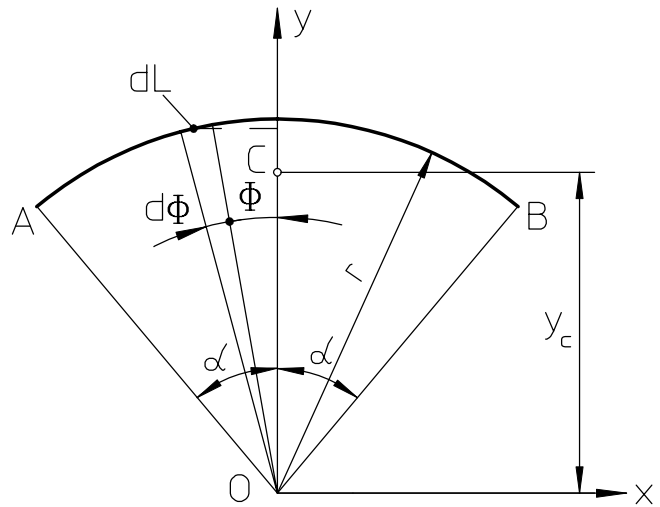
$$y_c = r \cdot \cos \Phi.$$

Mivel az elementáris ív hossza $dL = r \cdot d\Phi$, az egész ívé $L = 2 \cdot r \cdot \alpha$, a súlypontjának koordinátája a (3.75) figyelembe vételével, integrál alakban:

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot dL = \frac{1}{2 \cdot r \cdot \alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} r \cdot \cos \Phi \cdot r \cdot d\Phi = \\ &= \frac{r}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \Phi \cdot d\Phi = \frac{r}{2\alpha} [\sin \alpha - \sin(-\alpha)] = \\ &= \frac{r}{2\alpha} 2 \cdot \sin \alpha, \end{aligned}$$

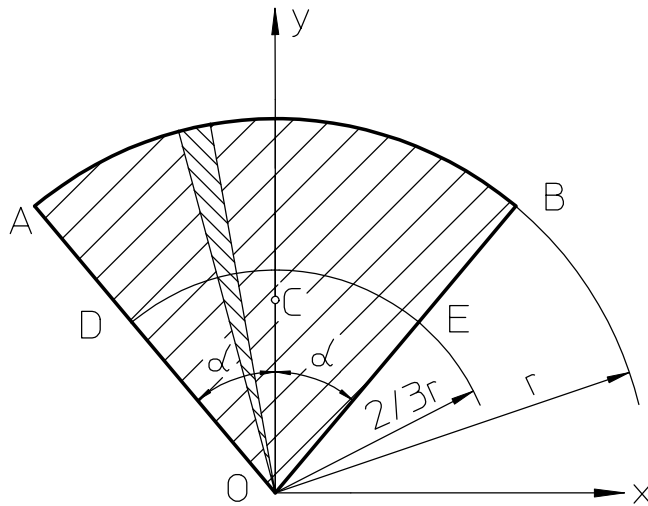
végleges alakban:

$$y_c = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (3.79)$$



3.64. ábra. Körív súlypontja

Körcikk súlypontja



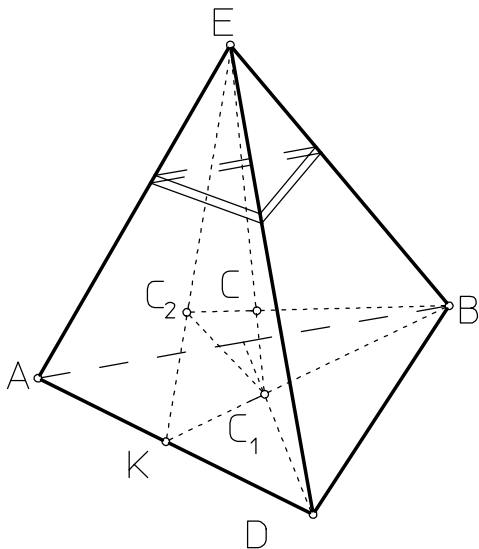
3.65. ábra. Körcikk súlypontja

Az AOB körcikk, melynek sugara r központi szöge 2α , 3.65. ábra, mivel szimmetrikus, éppúgy mint az előző esetben, súlypontja a szimmetriatengelyén y helyezkedik el.

Felosztva felületét cikkekre, minél apróbbak ezek, annál jobban hasonlítanak háromszögekre, amelyeknek súlypontjai a DE íven vannak, $2/3 \cdot r$ távolságra. Így az OAB körcikk súlypontja megegyezik a DE körív súlypontjával, amely a (3.79) kifejezéssel adott, és a körcikk súlypontja:

$$y_c = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (3.80)$$

Háromszögalapú gúla súlypontja



3.66. ábra. Gúla súlypontja

Az $ABDE$ háromszögalapú gúlát 3.66. ábra, az ABD alapjával párhuzamos háromszögalakú síkokra osztva, ezeknek súlypontjai az EC_1 vonalon vannak, amely a gúla E csúcsát, és az alapháromszög súlypontját (C_1 pont) összekötő egyenes. Ezen a vonalon kell a gúla súlypontjának is lennie. Hasonló felosztással meghatározható a BC_2 egyenes is, amely a B csúcspontot köti össze a szembelevő ADE oldal súlypontjával. A gúla C súlypontja ennek a két egyenesnek metszéspontjában van. A C_1C_2 egyenes párhuzamos az EB éllel, mivel a C_1 és C_2 pontok arányosan osztják az EK és BK egyeneseket ($C_1K = BK/3$; $C_2K = EK/3$). A C_1CC_2 és ECB háromszögek hasonlóságából, valamint a $C_1C_2 : BE = KC_1 : KB = 1/3$ arányból következik:

$$\frac{CC_1}{CE} = \frac{C_1C_2}{BE} = \frac{1}{3} \Rightarrow CC_1 = \frac{1}{3}CE,$$

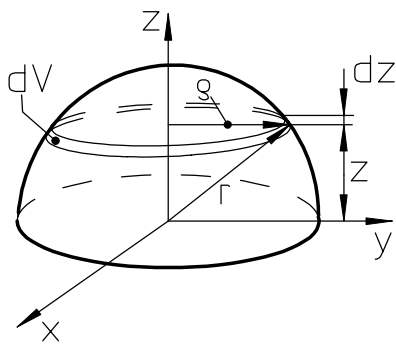
a 3.66. ábra alapján:

$$C_1E = CC_1 + CE = CC_1 + 3CC_1 = 4CC_1,$$

végül:

$$\boxed{CC_1 = \frac{1}{4} C_1E.} \quad (3.81)$$

Félgömb súlypontja



Az r sugarú félgömb súlypontja a z tengelyen helyezkedik el 3.67. ábra. Két párhuzamos síkkal metszve, melyeknek távolsága dz , a félgömb alapjától z távolságban, a következő elementáris köbtartalom adódik:

$$dV = \rho^2 \cdot \pi \cdot dz, \text{ amely, mivel } \rho^2 = r^2 - z^2 \text{ egyenlő:}$$

$$dV = (r^2 - z^2) \cdot \pi \cdot dz.$$

3.67. ábra. Félgömb súlypontja

Ennek az elemensnek súlypontja z távolságra fekszik. Mivel a félgömb köbtartalma $V = 2/3 \cdot \pi \cdot r^3$, a (3.73) kifejezés alapján a félgömb súlypontjának helyzete:

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{V} \int_V z \cdot dV = \frac{1}{V} \int_0^r z(r^2 - z^2) \cdot \pi \cdot dz = \frac{\pi}{V} \int_0^r (z \cdot r^2 - z^3) \cdot dz =, \\ &= \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 3}{2 \cdot \pi \cdot r^3} \int_0^r z \cdot dz - \frac{\pi \cdot 3}{2 \cdot \pi \cdot r^3} \int_0^r z^3 \cdot dz = \frac{3}{2r} \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 - \frac{3}{2r^3} \cdot \frac{r^4}{4} =, \\ &= \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}r = \frac{3}{8}r, \end{aligned}$$

végül:

$$\boxed{z_c = \frac{3}{8} \cdot r.} \quad (3.82)$$

3.9.7. PAPPUS - GULDIN TÉTELEK

Ezeknek a tételeknek segítségével forgástestek, (amelyek görbe vonal, illetve felület tengely körüli forgásával keletkeznek) felülete, illetve köbtartalma meghatározható.

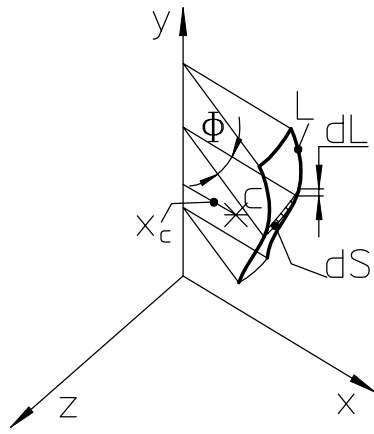
A forgástest felületének tétele

Ismert L hosszúságú görbe vonal elforgatásával forgástest kapható 3.68. ábra. A vonal dL eleme Φ szöggel elfordulva a következő felületet eredményezi:

$$ds = x \cdot \Phi \cdot dL,$$

ahol:

- x a dL elem súlypontjának távolsága az y tengelytől.



3.68. ábra. Forgástest felülete

Az egész L görbe elfordulva Φ szöggel a következő felületet adja:

$$S = F \int_L x \cdot dL,$$

figyelembe véve a (3.75) kifejezést:

$$\int_L x \cdot dL = x_c \cdot L,$$

ahol:

- x_c az L vonal súlypontjának távolsága az y tengelytől.

A keresett S felület:

$$S = F \cdot x_c \cdot L, \quad (3.83)$$

az első Pappus-Guldin tételt fejezi ki, amely így szól:

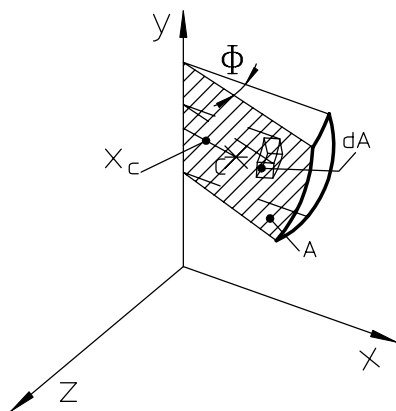
A forgástest felülete, amely egy ismert hosszúságú görbe vonal y tengely körül Φ szöggel történő elforgatásával keletkezett, egyenlő a vonal hosszának és súlypontja által leírt ívhossznak szorzatával.

Egy egész körre számítva amikor $\Phi = 2\pi$, a teljes forgástest felülete:

$$S = 2\pi \cdot x_c \cdot L. \quad (3.84)$$

A tétel használható görbe vonal súlypontjának kiszámításakor is, ha ismert annak forgásfelülete.

A forgástest köbtartalmának tétele



3.69. ábra. A forgástest köbtartalma

Az A felület elforgatásával az y tengely körül forgástest kapható 3.69. ábra. Ennek elemi köbtartalma dV , amely a dA elemi felület Φ szöggel történő elforgatásával keletkezett, egyenlő:

$$dV = F \cdot x \cdot dA,$$

ahol:

- x a dA felület súlypontjának távolsága az y tengelytől.

A forgástest köbtartalma, amely az A felület elforgatásával keletkezik:

$$V = F \int_A x \cdot dA.$$

Mivel:

$$\int_A x \cdot dA = x_c \cdot A,$$

ahol:

- x_c az A felület súlypontjának távolsága az y tengelytől.

A forgástest teljes V köbtartalma:

$$V = F \cdot x_c \cdot A, \quad (3.85)$$

a második Pappus-Guldin tételt fejezi ki, amely így szól:

A forgástest köbtartalma, amely egy felület y tengely körüli elforgatásával keletkezett, egyenlő a felület és a felület súlypontja által leírt ív hosszának szorzatával.

Ha a felület egy egész kört fordul, ekkor $\Phi = 2 \cdot \pi$, és a zárt forgástest köbtartalmának nagysága:

$$V = 2\pi \cdot x_c \cdot A. \quad (3.86)$$

Ismert köbtartalmú forgástest esetében, a tétellel meghatározható annak a felületnek súlypontja, amelynek elforgatásával keletkezett a forgástest.

3.17. példa.

Meghatározni a 3.70. ábrán bemutatott homogén lap súlypontjának koordinátáit. (a méretek cm-ben)

Megoldás: A felületet három egyszerű felületre (téglalapra) célszerű felosztani, ezután meghatározni felületét, majd mindegyik részfelületnek súlypontját a felvett koordináta rendszeren belül.

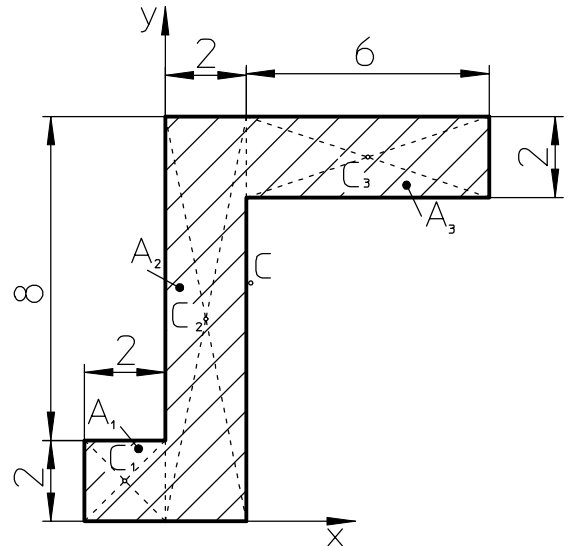
A lap össz felülete:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 4 + 20 + 12 = 36 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

Súlypontjának helyzete:

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = 2,11 \text{ [cm]},$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5,88 \text{ [cm]}.$$



3.70. ábra. A 3.17. példa illusztrációja

A felület súlypontja kívül esik a felület kontúrján, mint ahogy az az ábráról látszik is, ez nem hiba, mert a súlypont csak egy geometriai (elképzel) pont, amely a felületen kívülre is eshet.

3.18. példa.

Meghatározni a 3.71. ábrán bemutatott sík merev lap súlypontját.

Megoldás: A bemutatott lapot ismét részeire kell bontani, ezek: félkör alakú gyűrű, három téglalap és egy háromszög. A részfelületek felületei, az ábrán bejelölt méretek alapján:

$$F_1 = \frac{1}{2} \pi \cdot r_1^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 3,5^2 = 19,24 \text{ [cm}^2\text{]},$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \pi \cdot r_2^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 2,0^2 = 6,28 \text{ [cm}^2\text{]},$$

$$F_3 = 1,5 \cdot 5,5 = 8,25 \text{ [cm}^2\text{]},$$

$$F_4 = 2,0 \cdot 3,0 = 6,0 \text{ [cm}^2\text{]},$$

4. TARTÓSZERKEZETEK

A **tartószerkezetek** olyan konstrukciók, amelyek erők és erőpárok igénybevételének vannak kitéve.

A tartószerkezetek feloszthatók:

- kötelekre,
- rúdszerkezetekre, amelyek lehetnek:
 - rácsos szerkezetek,
 - tartók - rudak (tengelyek, gerendák).

A statika feladata olyan módszerek kidolgozása, amelyek segítségével az erőkkel és erőpárokkal megterhelt tartószerkezetek bármely keresztmetszetében ki lehet számítani annak terhelését. Az aktív erők és erőpárok hatása mellett, mindenképpen figyelembe kell venni minden támasz reakcióját is.

A tartószerkezetek vizsgálatának tárgya alapvetően két egyensúlyi feltétel lehet:

- az egész tartószerkezet egyensúlya,
- a tartószerkezet egy részének egyensúlya, amely a tartószerkezet két részre való elválasztásával (gondolatban) keletkezik.

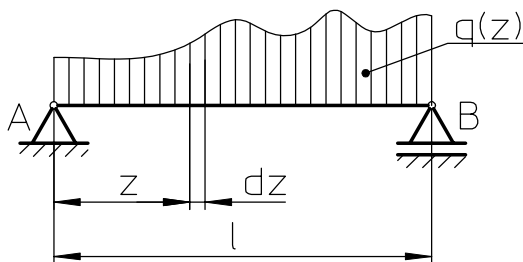
Ezeknek a problémáknak megoldására az egyensúlyi feltételek szolgálnak.

A tartószerkezetek terhelhetők:

- erőpárokkal,
- koncentrált erőkkel (erők amelyek egy pontban hatnak),
- megoszló erőkkel (erők amelyek felületen, illetve vonalon hatnak).

4.1. MEGOSZLÓ TERHELÉS

A megoszló terhelés (4.1. ábra), a tartószerkezet felületén, vagy annak vonalában hat. A terhelés kifejezhető a **megoszlás függvényével** $q(z)$, ahol z -a tartó hosszában mért koordináta. Az egyensúlyi feltételek meghatározásakor a megoszló terhelést (megoszló erőrendszert) egyetlen koncentrált erővel kell helyettesíteni, amely a terhelés súlypontjában hat, a (4.1) összefüggés szerint.



4.1. ábra. Megoszló terhelés

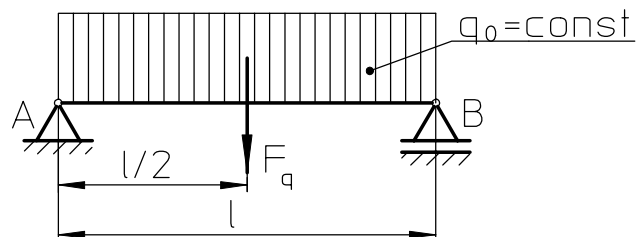
$$F_q = \int_0^l q(z) dz. \quad (4.1)$$

Ez a koncentrált erő a megoszló terhelés terhelési ábrájának felületével egyenlő (ezzel ekvivalens).

Ha a terhelés egyenletesen megoszló (4.2. ábra.), a megoszlás függvénye konstans ($q_0 = \text{const}$), a terhelést helyettesítő erőt a (4.2) összefüggés adja.

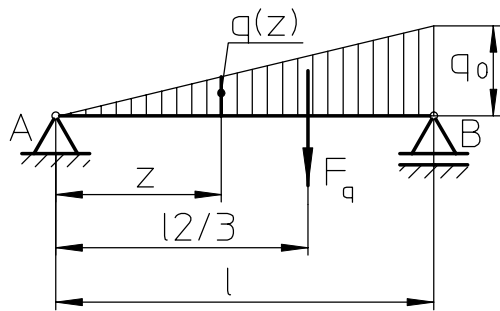
$$F_q = q_0 \cdot l. \quad (4.2)$$

A koncentrált erő, a tartó hosszának felénél ($l/2$) hat 4.2. ábra. A terhelés neve még **négyszög alakú terhelés**.



4.2. ábra. Egyenletesen megoszló (négyyszög alakú) terhelés

Amennyiben a megoszló terhelés **háromszög alakú** (4.3. ábra.), a megoszlás függvénye lineárisan változó a (4.3) alapján.



$$q(z) = \frac{q_0 \cdot z}{l}, \quad (4.3)$$

ahol:

- q_0 - a megoszló terhelés maximális értéke.

A megoszló terhelést helyettesítő koncentrált erő nagysága:

$$F_q = \frac{q_0 \cdot l}{2}, \quad (4.4)$$

és a súlypont távolságában hat:

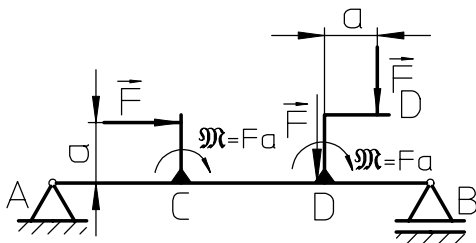
$$z = \frac{2}{3} \cdot l. \quad (4.5)$$

4.2. LINEÁRIS TARTÓK

A legegyszerűbb tartó a lineáris tartó, amelynek eleme a **rúd**. A rúd alapvető tulajdonságai:

- a terhelés nagyságához képest a rúd súlya elhanyagolható,
- a rúd keresztmetszetének méretei elhanyagolhatók, így csak a hosszmérete mérvadó.

A terhelések módjától és alakjától függően, a tartók lehetnek síkbeli vagy térbeli tartók. A síkbeli tartó a terheléssel megegyező síkban helyezkedik el, míg a térbeli tartó lehet háromdimenziós alakú, de ugyanúgy lehet síkbeli tartó is, ha térbeli erő és erőpárrendszer terheli.

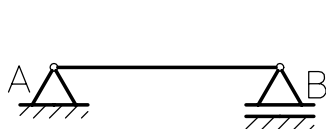


A tartó terhelhető **közvetlenül**, ha az erők és erőpárok magára a tartóra hatnak, vagy **közvetetten** amikor a tartóra szerelt rúd van kitéve terhelésnek 4.4. ábra. A 4.4. ábrán bemutatott terhelések u.n. horizontális (C) és vertikális (D) excentrikus terhelések. Az ilyen terheléseket mindenkor helyettesíteni kell egyenértékű erőkkel vagy erőpárokkal abban a pontban amelyben a tartóra szerelt rúd van.

4.4. ábra. Közvetetten terhelt tartó

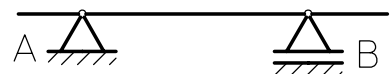
4.3. TARTÓK

A tartók, olyan lineáris szerkezetek, amelyek egy vagy több rúdból vannak összeerősítve. A támaszoktól függően, valamint a rudak kapcsolatától a következő alaptípusok ismertek:

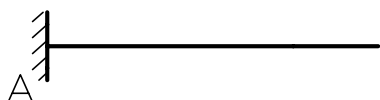


Kéttámaszú tartó (4.5. ábra). Az egyszerű tartó két végén (egyiken rögzített csuklóban, másikon görgős csuklóban) támaszkodó vízszintes prizmatikus rúd, amely a rúd síkjában van megterhelve.

4.5. ábra. Kéttámaszú tartó **Konzolos tartó** (4.6. ábra). A konzolos tartó kéttámaszú tartó, amely nem a végein támaszkodik. A támaszkodás helyén túlnyúló rész a konzol, amely lehet egyoldali, vagy kétoldali.



4.6. ábra. Konzolos tartó

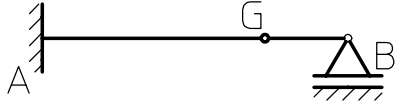


4.7. ábra. Befogott tartó

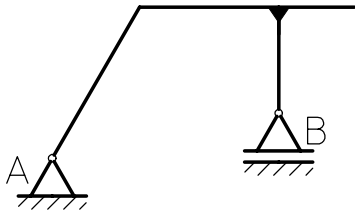
Befogott tartó (4.7. ábra).

Az olyan rúd amely egyik végén befogással rögzített, befogott tartó.

Gerber-tartó (4.8. ábra). A Gerber-tartó több helyen alátámasztott egyenes rúdból áll, amelyek csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz. A rudakat összekapcsoló csukló a Gerber-csukló, amelyben a rudak szabadon elfordulhatnak. A Gerber-tartót a csuklóban elemeire választva kéttámaszú, konzolos, vagy befogott tartó kapható.



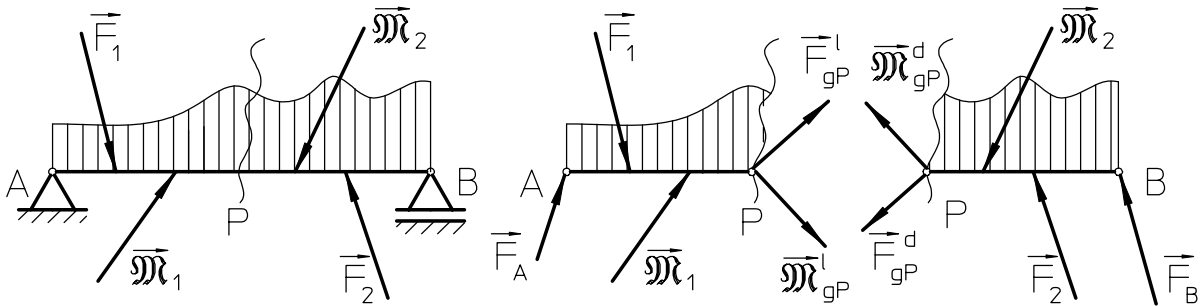
4.8. ábra. Gereber-tartó



4.9. ábra. Keret

Keret vagy ráma (4.9. ábra). A keret állhat egy törtvonalú rúdból, vagy több rúd kapcsolatából. A rudak mereven kapcsolódhatnak egymáshoz (hegesztéssel), vagy Gerber-csuklókkal. A keretet részre bontva kéttámaszú, konzolos, vagy befogott rúd kapható.

4.4. HAJLÍTÓ NYOMATÉK, CSAVARÓNYOMATÉK, RÚDIRÁNYÚ ÉS NYÍRÓ ERŐ



4.10. A tartó terhelései

Az erőkkel és erőpárokkal megterhelt tartót (4.10. ábra), P pontban két részre kell metszeni (csak képzeletben), hogy a vizsgált keresztmetszetben megállapíthatók legyenek a rúd terhelései.

A képzeletbeli elmetzés előtt az erőket és erőpárokat tilos támadáspontjukból elmozdítani, a megoszló terheléseket sem szabad koncentrált erőkkel helyettesíteni.

Az elvágás helyén P pont, mivel mindkét rész egyensúlyban van, a terheléseket (a fővektort és főerőpárt) vagy a baloldali, vagy a jobboldali részre kell meghatározni.

A baloldali erőcsavar elemei:

$$\vec{F}_{gP}^l = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^l, \quad \vec{M}_{gP}^l = \vec{M}^l + \sum_{i=1}^N \vec{M}_{iP}^l, \quad (4.6)$$

ahol:

- \vec{F}_i^l a tartó baloldalán ható erők,
- \vec{M}^l a tartó baloldalán ható erőpárok,
- \vec{M}_{iP}^l az \vec{F}_i^l erők P pontra számított nyomatékai.

A jobboldali erőcsavar elemei:

$$\vec{F}_{gP}^d = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^d, \quad \vec{M}_{gP}^d = \vec{M}^d + \sum_{i=1}^N \vec{M}_{iP}^d, \quad (4.7)$$

ahol:

- \vec{F}_i^d a tartó jobboldalán ható erők,

- \vec{M}^d a tartó jobboldalán ható erőpárok,
- \vec{M}_{ip}^d az \vec{F}_i^d erők P pontra számított nyomatékai.

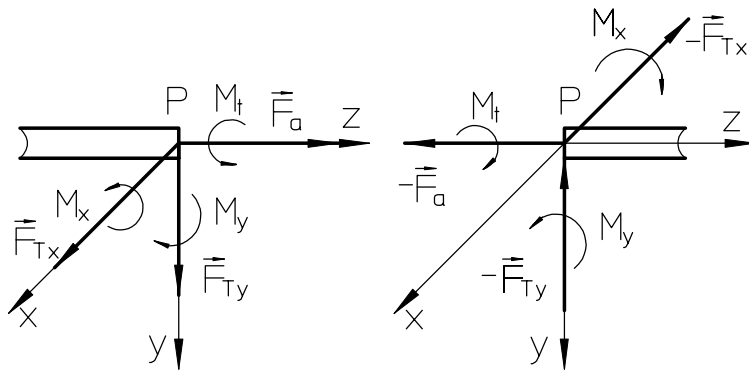
A P pontban a baloldali, és a jobboldali erőcsavar elemei közötti összefüggés a következő:

$$\vec{F}_{gP}^l = -\vec{F}_{gP}^d, \quad \vec{M}_{gP}^l = -\vec{M}_{gP}^d. \quad (4.8)$$

A fenti összefüggések meghatározásakor figyelembe kell venni a következőket:

1. Az \vec{M}^l és \vec{M}^d erőpárok a P metszetben számított **erőpárok eredőjét** jelentik a **metszettől balra, vagy jobbra** számítva (az erőpárok algebrai összegét).
2. Mivel fontos, hogy a terhelések kiszámítása a P pontban független legyen attól, hogy a tartó baloldaláról, vagy jobboldaláról lettek-e meghatározva, ezért a **baloldali erők és erőpárok értelmét ellentétesnek kell venni a jobboldalához képest**.

A P pontba helyezve egy térbeli koordináta rendszert oly módon, hogy a z tengely a tartó tengelyébe essen, az y tengely a tartó függőleges síkjába, az x a vízszintes síkjába (4.11. ábra), és levetítve a tengelyekre az erőcsavar minden akotóelemét, a következő komponensek adódnak:



4.11. ábra. Az erőcsavar elemei a P pontban

A fővektor komponense a tartó tengelyirányába (z tengely) a **rúd irányú (aksziális) erő** F_a .

A fővektor másik két komponense az x és y tengelyek irányába a **nyíró (transzverzális) erők** F_{Tx} és F_{Ty} .

A főerőpár komponensei az x és y tengelyek irányába a **hajlító nyomatékok** M_x és M_y .

A főerőpár komponense a tartó tengelyéhez viszonyítva (z tengely) a **csavaró nyomaték** M_t .

A (4.8) összefüggést levetítve a tengelyekre:

$$F_{Tx} = F_{gPx}^l = -F_{gPx}^d, \quad F_{Ty} = F_{gPy}^l = -F_{gPy}^d, \quad F_{Tz} = F_{gPz}^l = -F_{gPz}^d, \quad (4.9)$$

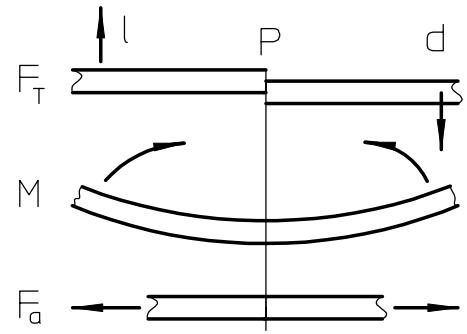
$$M_x = M_{gPx}^l = -M_{gPx}^d, \quad M_y = M_{gPy}^l = -M_{gPy}^d, \quad M_z = M_{gPz}^l = -M_{gPz}^d,$$

Az igénybevételek tulajdonságai a P metszetben:

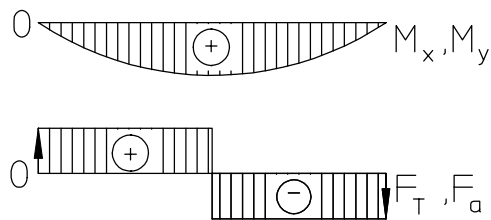
1. A **nyíró erő nagysága** az x vagy y tengely irányában, a tartó P metszetében, megkapható az **erők vetületeinek algebrai összegeként** a metszettől **balra vagy jobbra**.
2. A **rúd irányú erő nagysága** a P metszetben, egyenlő **minden erő, a rúd tengelyére vett vetületének algebrai összegével** a metszettől **balra vagy jobbra**.
3. A **hajlító nyomaték** egyenlő az x vagy y tengelyre számított **össz erő és erőpár nyomatékainak algebrai összegével** a P metszettől **balra vagy jobbra**.
4. A **csavaró nyomaték** nagysága az **össz erő és erőpár csavaró nyomatékainak algebrai összegével** egyenlő a tartó tengelyére számítva a P metszettől **balra vagy jobbra**.
5. A (4.9) alapján is látható, hogy az **erők, nyomatékok, erőpárok pozitív irányai** a P metszetben **balról, illetve jobbról ellentétes irányítottak**.

Az igénybevételek irányainak meghatározása:

A nyíró erő (F_T) pozitív iránya, a hajlító nyomaték (M), és a rúdírányú erő (F_a) pozitív irányai a 4.12. ábrán láthatók. A pozitív irányú nyíró erő, a metszet felületét lefelé igyekszik csúsztatni. A pozitív irányú hajlító nyomaték a rúd végeit felfelé görbíti. Míg végül, a pozitív irányú rúdírányú erő a rudat nyújtja. A csavarónyomaték pozitív iránya tetszőlegesen választható.



4.12. ábra. Az igénybevételek pozitív irányai



4.13. ábra. Igénybevételi ábrák

Az igénybevétel-
ket (rúdírányú erő,

nyíró erő és hajlító
nyomaték) a tartó egyes pontjaiban, **igénybevételi ábrákkal**

szokás bemutatni, **megfelelő arányban rajzolva**. A **hajlító nyomaték pozitív értékeit** a nullvonalról **lefelé**, a **nyíróerők pozitív értékeit viszont** a nullvonalról **felfelé** kell felrajzolni, 4.13. ábra.

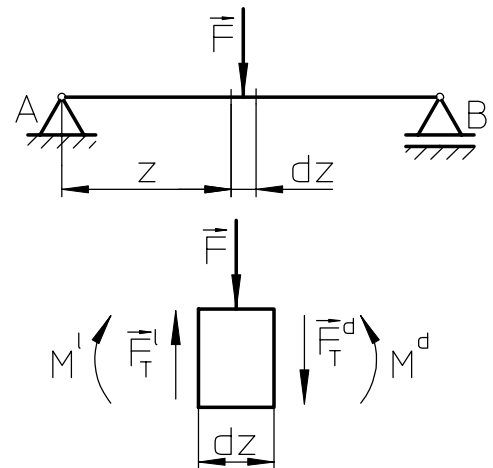
Koncentrált erővel

terhelt tartó:

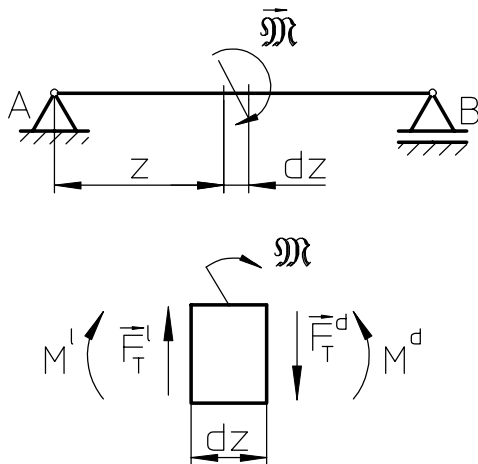
A tartónak az \vec{F} erő közelében kivágott elemén (4.14. ábra), mindkét eltávolított fél nyíróereje hat. Az elemi tartó baloldalán F_T^l , a jobb oldalán F_T^d . Mivel a kivágott elemens egyensúlyban van, felírható:

$$F_T^l - F - F_T^d = 0 \Rightarrow F_T^l - F_T^d = F, \quad (4.10)$$

amelyből megállapítható: **A nyíróerő változása abban a pontban, ahol a tartóra külső koncentrált erő hat ugrásszerű. Ugyanez vonatkozik a tartóra ható rúdírányú erő esetében is.**



4.14. ábra. Koncentrált erővel megterhelt tartó



4.15. ábra. Erőpár hatása

- $F_T^l \cdot dz \approx 0$ a többi valós értékhez képest.

Erőpárral terhelt tartó:

Az erőpár hatását is egy kivágott tartóelemen célszerű bemutatni a megterhelés pontjában 4.15. ábra. Az elemi tartó egyensúlyi egyenletének (minden erő és erőpár nyomatéka egyenlő nullával) alakja következő:

$$M^l + M + F_T^l \cdot dz - M^d = 0, \quad (4.11)$$

ahol:

- M^l baloldali hajlító nyomaték,
- M^d jobboldali hajlító nyomaték,
- M a tartóra ható erőpár,

Végleges alakban:

$$M^l - M^d = -M, \quad (4.12)$$

amelyből megállapítható: **A hajlító nyomaték változása abban a pontban, ahol a tartóra erőpár hat ugrásszerű. Ugyanez vonatkozik a csavarónyomaték z tengely körüli hatására is.**

Megoszló erővel terhelt tartó:

A tartó dz hosszúságú kivágott elemén, amelyre $q(z)$ megoszló terhelés hat 4.16. ábra szerint, az egyensúlyi egyenletek alakjai:

$$1. \sum_{i=1}^N F_i = F_T - (F_T + dF_T) - q(z) \cdot dz = 0, \quad (4.13)$$

$$2. \sum_{i=1}^N M = M - (M + dM) + F_T \cdot dz - q(z) \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} = 0, \quad (4.14)$$

ahol:

- F_T és M nyíró erő és hajlító nyomaték az elemi tartó baloldalán,
- $F_T + dF_T$ és $M + dM$ nyíró erő és hajlító nyomaték az elemi tartó jobboldalán,
- $q(z) \cdot dz$ a megoszló terhelés hatása.

A fenti (4.13) és (4.14) egyenletek megoldásaként, elhagyva a másodrendű kis értéket $q(z) \cdot (dz)^2/2$:

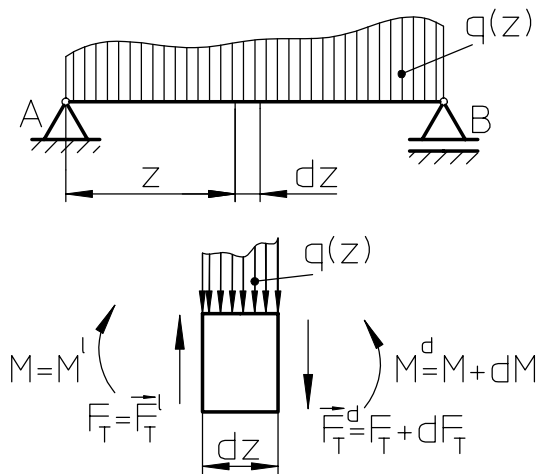
$$1. -dF_T - q(z) \cdot dz = 0 \Rightarrow \frac{dF_T}{dz} = -q(z), \quad (4.15)$$

$$2. -dM + F_T \cdot dz = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dz} = F_T, \quad (4.16)$$

míg végül:

$$\boxed{\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dF_T}{dz} = -q(z)}. \quad (4.17)$$

A nyíróerő egyenlő a hajlítónyomaték, rúd tengelyirányában vett koordináta szerinti, első differenciálhányadosával.



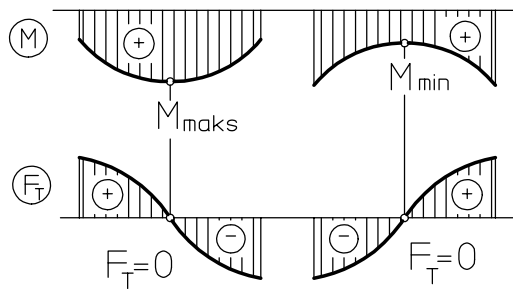
4.16. ábra. Megoszló erővel terhelt tartó

Például, az egyenletesen megoszló terhelés esetén ($q_0 = \text{const}$), és ha kezdeti értéként ($z = 0$) $F_T = 0$ és $M = 0$, a (4.15) és (4.16) kifejezések integrálásával a következő összefüggés kapható:

$$F_T = -q_0 \cdot z, \quad M = -q_0 \cdot \frac{z^2}{2}. \quad (4.18)$$

Háromszög alakú terhelés esetén, amelynek terheléseloszlása (4.3) szerint $q(z) = \frac{q_0}{l} \cdot z$, következik:

$$F_T = -q_0 \cdot \frac{z^2}{2 \cdot l}, \quad M = -q_0 \cdot \frac{z^3}{6 \cdot l}. \quad (4.19)$$



4.17. ábra. A nyíró erő és a hajlító nyomaték kapcsolata

Mindebből arra lehet következtetni, hogy a **megoszló terheléssel terhelt tartó bármely keresztmetszetében a nyíró erő és a hajlító nyomaték között összefüggés van.**

Az összefüggések a következők:

1. Ha a hajlító nyomaték növekszik $dM/dz > 0$, a nyíró erő pozitív. $F_T > 0$.
2. Ha a hajlító nyomaték csökken $dM/dz < 0$, a nyíró erő negatív előjelű $F_T < 0$.

3. Ha a hajlító nyomatéknak extrém értéke van $dM/dz = 0$, a nyíró erő értéke nulla $F_T = 0$. Mindez a 4.17. ábrán jól látható.

Amennyiben a tartóra megoszló terhelés nem hat ($q(z) = 0$), a nyíró erő konstans ($F_T = \text{const}$) a hajlító nyomaték M értéke lineárisan változik.

Ha a tartóra nem hat nyíró erő ($F_T = 0$), abban az esetben a hajlító nyomaték konstans ($M = \text{const}$).

Feladatok megoldásának menete:

Minden egyes tartó vizsgálatakor meg kell határozni:

1. A támaszok reakcióit,
2. A tartó karakterisztikus pontjaiban ható nyíró és rúdírnyú erőket, hajlító és csavaró nyomatékokat, valamint lerajzolni ezek igénybevételi ábráit.
3. A nyíró és rúdírnyú erők, valamint a hajlító és csavaró nyomatékok maximális értékeit.

Mindezek a vizsgálatok néhány lépésben történnek a következők szerint:

1. A támaszok kiküszöbölése, helyettesítve hatásukat megfelelő reakcióerőkkel. A reakcióerőket a tartóra ható síkbeli, vagy térbeli erő és erőpárrendszer egyensúlyi egyenleteinek megoldása adja, amelyek a tartó konstrukciójától (alakjától), vagy a rá ható terhelésektől függenek.

2. A Gerber-féle tartó esetében, a tartót a Gerber-csuklóban szétválasztva, újabb egyensúlyi feltétel kapható. A G csuklóra felírva az össz erő nyomatékának algebrai összegét a tartó bal illetve jobb oldalára ennek értéke egyenlő nullával.

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_G^l = 0, \quad \text{vagy} \quad \sum_{i=1}^N \vec{M}_G^d = 0.$$

Ezeknek az újabb egyenleteknek a segítségével, a szokásos egyensúlyi egyenletek mellett, minden reakcióerő meghatározható.

3. A következő lépésben, a tartó minden karakterisztikus pontjában (amelyben koncentrált erő, illetve erőpár hat), meg kell határozni minden terhelés nagyságát (nyíró és rúdírnyú erő, valamint hajlító és csavaró nyomaték). Megoszló terheléssel terhelt tartó esetében, a megoszló terhelés hatását kell meghatározni két karakterisztikus pont közötti tartományban. Az igénybevételi ábrákat megfelelő arányban kell ezután felrajzolni, figyelembevéve azok előjeleit.

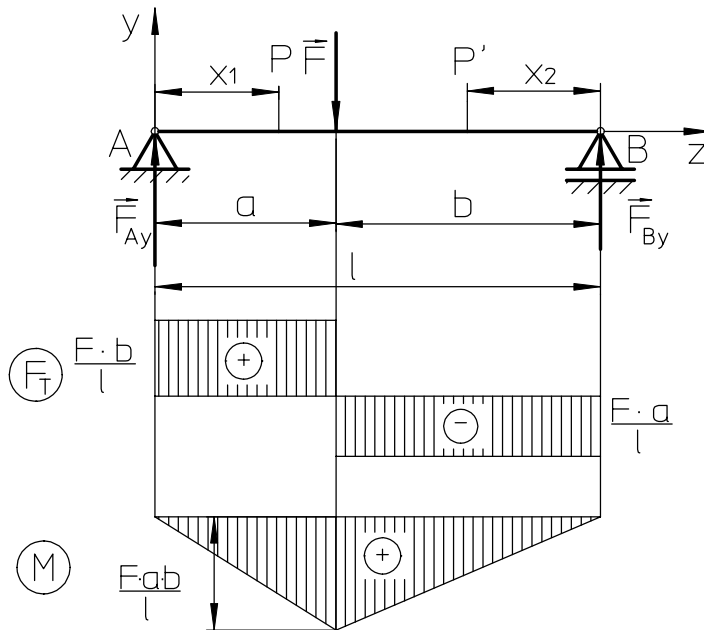
4. A felrajzolt igénybevételi ábrákról, az egyes igénybevételek maximális értékei közvetlenül leolvashatók. Amennyiben az igénybevételek maximális értékei a tartó azon részén találhatók, amelyen megoszló terhelés hat, abban az esetben ezeket analitikusan kell meghatározni a (4.17) kifejezés segítségével.

4.5. PÉLDÁK TARTÓK TERHELÉSÉRE

A következő néhány példában, a tartók terheléseinek tipikus esetei lesznek vizsgálva, bemutatva azokat az összefüggéseket, amelyek segítségével az igénybevételek kiszámíthatók.

4.5.1. TARTÓ FÜGGŐLEGES ERŐVEL TERHELVE

A 4.18. ábrán bemutatott kéttámaszú tartóra függőleges \vec{F} erő hat. Első lépésként a támaszok reakcióit kell meghatározni.



4.18. ábra. Tartó függőleges erővel terhelve

1. A támaszok reakciói

Az A pontban (rögzített csukló), felvett koordináta rendszerben általános esetben két erőkomponens hat, ezek \vec{F}_{Ay} és \vec{F}_{Az} , míg a B görgős csuklóban \vec{F}_{By} .

A $\Sigma F_{iz} = 0$ egyensúlyi egyenletből látszik, hogy a z tengely irányában nincs erő, tehát az $\vec{F}_{Az} = 0$. Ez mindjárt az elején is látszott, mivel az aktiv erő csak függőleges irányú, tehát a reakcióerő iránya is csak függőleges lehet, vagyis \vec{F}_{Ay} és \vec{F}_{By} .

A $\Sigma M_B = 0$ alapján felírható:

$$F_{Ay} \cdot l - F \cdot b = 0 \Rightarrow F_{Ay} = \frac{F \cdot b}{l}.$$

A $\Sigma M_A = 0$ -ból következik:

$$-F_{By} \cdot l + F \cdot a = 0 \Rightarrow F_{By} = \frac{F \cdot a}{l}.$$

A kapott eredmények leellenőrizhetők a $\Sigma F_{iy} = 0$ egyensúlyi feltételből, amelynek alapján felírható:

$$F_{Ay} - F + F_{By} = 0 \Rightarrow F_{Ay} + F_{By} = F, \text{ behelyettesítve az erők értékeit:}$$

$$\frac{F \cdot b}{l} + \frac{F \cdot a}{l} = \frac{F(a+b)}{l} = F,$$

amely az egyensúlyi feltételnek eleget tesz.

2. A nyíróerő kiszámítása

A nyíróerő meghatározásakor a tartó baloldaláról mért x_1 távolságban (P pont), a tartónak baloldali részét kell figyelembe venni, mert erre a részre kevesebb erő hat (csak az F_{Ay}).

Az x_1 metszetben a nyíróerő nagysága:

$$F_{T1} = F_{Ay} = \frac{F \cdot b}{l}.$$

Látható, hogy az erő nagysága nem függ az x_1 metszet A ponttól mért távolságától, ami azt jelenti, hogy az erő értéke állandó az a távolságon belül. Igénybevételi ábrája párhuzamos a vízszintes tengellyel.

A tartó jobboldalán jelentkező nyíró erő számításához a tartót P' pontban kell elvágni x_2 távolságra a B ponttól. Ebben az esetben a tartó jobb oldalát kell figyelembe venni, amelyre F_{By} erő hat. A nyíróerő nagysága az x_2 metszetben:

$$F_{T2} = -F_{By} = -\frac{F \cdot a}{l}.$$

Értéke szintén nem függ az x_2 távolságtól és állandó az egész b hosszon. Az igénybevételi ábrája szintén párhuzamos a vízszintes tengellyel.

Megvizsgálva a tartó baloldali részét is az x_2 metszetben, az eredmény ugyanaz:

$$F_{T2} = F_{Ay} - F = -F_{By}, \quad (\text{mert } F_{Ay} + F_{By} = F).$$

A nyíróerő-ábrából látszik, hogy az \vec{F} erő, támadáspontjában ugrásszerűen változik, az ugrás nagysága megegyezik az \vec{F} erő nagyságával.

3. Hajlítónyomaték

A hajlítónyomaték nagysága a P metszetben egyenlő a tartó, metszettől számított baloldalára ható össz függőleges erő nyomatékának összegével:

$$M_1 = F_{Ay} \cdot x_1 = \frac{F \cdot b}{l} \cdot x_1.$$

A függvény kifejezi a hajlítónyomaték változását az a hosszon, az x_1 függvényében, amely **lineáris**. Ha $x_1 > a$, a tartó baloldalára két erő (F_{Ay} és F) hat, így a fenti összefüggés már nem érvényes. Mivel az M_1 hajlítónyomaték lineáris, az x_1 értékeire elég két értéket venni, ezek:

$$x_1 = 0 \Rightarrow M_1 = 0,$$

$$x_1 = a \Rightarrow M_1 = \frac{F \cdot a \cdot b}{l},$$

az utóbbi, a hajlítónyomaték értéke abban a pontban, ahol az \vec{F} erő hat.

A tartó jobboldali részére a hajlítónyomaték függvényének alakja következő:

$$M_2 = F_{By} \cdot x_2 = \frac{F \cdot a}{l} \cdot x_2.$$

Az egyenlet szintén egy egyenes egyenlete, az x_2 különböző értékeire számított hajlítónyomaték:

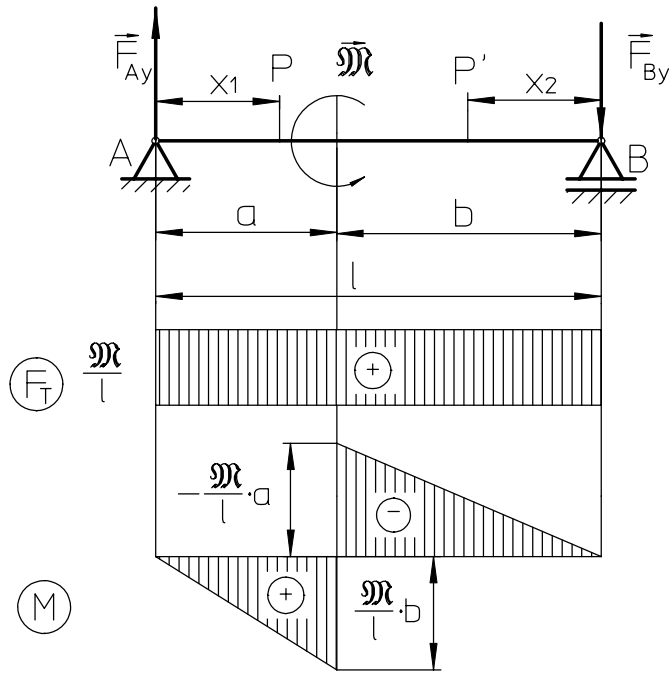
$$x_2 = 0 \Rightarrow M_2 = 0,$$

$$x_2 = b \Rightarrow M_2 = \frac{F \cdot a \cdot b}{l}.$$

A hajlítónyomaték a tartó egész hosszában pozitív, így a hajlítónyomatéki-ábrát a vízszintes tengely alá kell rajzolni 4.18. ábra. Legnagyobb értéke az \vec{F} erő támadáspontjában van, nagysága:

$$M_{\max} = \frac{F \cdot a \cdot b}{l}.$$

4.5.2. TARTÓ ERŐPÁRRAL TERHELVE



4.19. ábra. Tartó amelyre erőpár hat

Tartó, amelyre M nyomatékú erőpár hat látható a 4.19. ábrán.

1. A támaszok reakciói

A rögzített csuklóban a reakcióerő vízszintes komponense szintén nulla. A támaszok reakciói meghatározhatók:

$$\sum M_A = 0 \quad \text{és} \\ \sum M_B = 0,$$

amelyekből:

$$F_{Ay} = F_{By} = \frac{M}{l}.$$

A kapott erők nagysága egyenlő, ellentétes az értelmük, és egy erőpárt alkotnak, amely az adott erőpárral van egyensúlyban.

2. Nyíróerők

A P és P' metszetektől balra, illetve jobbra vizsgálva a tartó egyensúlyát, a nyíróerők nagyságai:

A P metszetben ($0 \leq x_1 \leq a$):

$$F_{T1} = F_{Ay} = \frac{M}{l}.$$

A P' metszetben ($0 \leq x_2 \leq b$):

$$F_{T2} = F_{By} = \frac{M}{l}.$$

3. Hajlítónyomaték

A hajlítónyomatékot ugyancsak a P és P' metszetekben kell meghatározni.

A P metszetben ($0 \leq x_1 \leq a$):

$$M_1 = F_{Ay} \cdot x_1 = \frac{M}{l} \cdot x_1.$$

$$\text{Ha } x_1 = 0 \Rightarrow M_1 = 0,$$

$$\text{és } x_1 = a \Rightarrow M_1 = \frac{M}{l} \cdot a.$$

A P' metszetben ($0 \leq x_2 \leq b$):

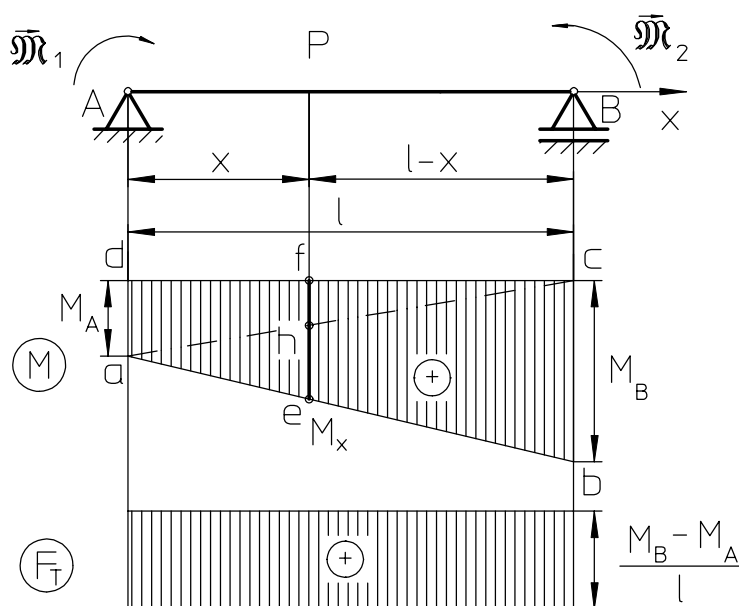
$$M_2 = -F_{By} \cdot x_2 = -\frac{M}{l} \cdot x_2.$$

$$\text{Ha } x_2 = 0 \Rightarrow M_2 = 0,$$

$$\text{és } x_2 = b \Rightarrow M_2 = -\frac{M}{l} \cdot b.$$

Abban a metszetben ahol az erőpár hat, a hajlítónyomaték ugrásszerűen változik az erőpár nagyságával, ahogy az a hajlítónyomatéki ábrán is látható 4.19. ábra.

4.5.3. TARTÓ AMELYRE KÉT ERŐPÁR HAT



4.20. ábra. Két erőpár hatása

Ha egy tartó két végén erőpár hat, melyeknek nomatékai M_1 és M_2 (4.20. ábra), a támaszokban M_A és M_B hajlítónyomatékok hatnak, amelyek nagysága megegyezik az adott erőpárok nyomatékaival. A 1. hajlítónyomatéki ábra szerkesztéséhez a tartó végeiben fel kell rajzolni az $M_A = M_1$ és $M_B = M_2$ hajlító nyomatékokat. A hajlítónyomaték változásának törvényszerűsége (M_x) meghatározható a trapéz alakú ábrából, azt két Δabc és Δacd háromszögre osztva. Mindegyik háromszög az M_1 és M_2 erőpárok nyomatékának hatását adja, így a P pontban, amely x távolságra van, a hajlítónyomaték nagysága:

$$M_x = ef,$$

az ábráról leolvasható:

$$ef = eh + fh.$$

A háromszögek hasonlóságából adódik:

$$fh = M_A \cdot \frac{l-x}{l}, \quad he = M_B \cdot \frac{x}{l},$$

ahonnan:

$$M_x = M_A \cdot \frac{l-x}{l} + M_B \cdot \frac{x}{l}.$$

2. A nyíróerő meghatározása

A nyíróerő a hajlítónyomaték függvényének deriváltjaként meghatározható, amelynek alakja:

$$F_{Tx} = \frac{dM_x}{dx} = \frac{M_B - M_A}{l} = \text{const.}$$

3. A támaszok reakciói

A támaszok reakciói meghatározhatók a következő összefüggésekből:

$$M_{Ay} = \frac{M_B - M_A}{l}, \quad F_{By} = -\frac{M_B - M_A}{l}.$$

4.5.4. TARTÓ EGYENLETESEN MEGOSZLÓ TERHELÉSEL TERHELVE

A 4.21. ábrán látható tartó egyenletes eloszlású megoszló terheléssel van terhelve, amelynek jellemzője ($q_0 = \text{const.}$).

1. A támaszok reakciói

Ebben az esetben szintén nincsenek vízszintes erők, így $\vec{F}_{Ax} = 0$. A terhelés szimmetrikus, ezért az A és B támaszok reakciói egyenlő nagyságúak, értékük:

$$F_{Ay} = F_{By} = \frac{q_0 \cdot l}{2}.$$

2. A nyíróerő eloszlása

A nyíróerőt, mint azt az előző esetekben is, itt is a P metszet vizsgálatával kell meghatározni, amely x távolságra van a tartó bal támaszától. A tartó baloldalát szemlélve a P metszettől, erre az x hosszra ható q_0 megoszló terhelés, és az A pontban ható F_{Ay} reakcióerő hat. A nyíróerő következőként alakul:

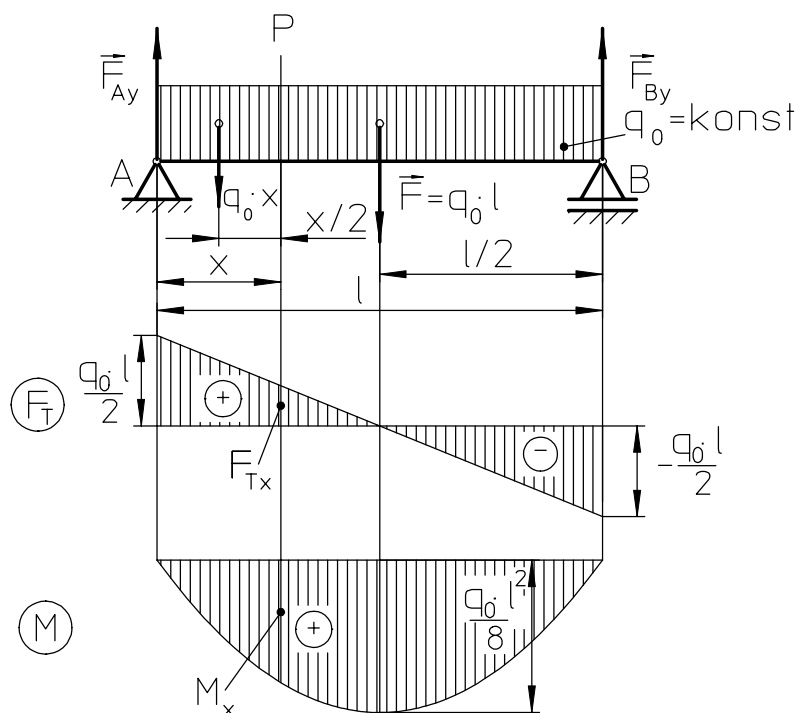
$$F_{Tx} = F_{Ay} - q_0 \cdot x = \frac{q_0 \cdot l}{2} - q_0 \cdot x,$$

vagyis, a nyíróerő változása lineáris függvény. A tartó végein ennek az erőnek nagysága:

$$\text{ha } x = 0 \Rightarrow F_T = \frac{q_0 \cdot l}{2};$$

$$\text{ha } x = l \Rightarrow F_T = -\frac{q_0 \cdot l}{2},$$

ezeknek az értékeknek birtokában megrajzolható a nyíróerő-ábra.



4.21. ábra. Tartó egyenletesen megoszló terheléssel terhelve

3. Hajlítónyomatéki ábra

A hajlítónyomatéki ábra abból az egyensúlyi feltételből kapható meg, amely szerint minden erő nyomatékának összege a levágott tartórészen egyenlő nullával ($\Sigma M = 0$). A tartó levágott részén ható megoszló terhelés súlypontja $x/2$ távolságban van, és ebben a pontban hat a megoszló terhelést helyettesítő koncentrált erő (ennek értéke az x távolságtól függően változik), amelyet figyelembe véve, a hajlítónyomaték nagysága:

$$M_x = F_{Ay} \cdot x - q_0 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q_0 \cdot x^2}{2} = \frac{q_0 \cdot x}{2} (l - x).$$

Ezzel a összefüggéssel kiszámítható a hajlítónyomaték nagysága a tartó bármely metszetében. A hajlítónyomaték változásának törvényszerűsége négyzetes parabola. A hajlítónyomatéki ábra szerkesztéséhez a hajlítónyomaték nagyságát néhány pontban ki kell számolni, ezek:

$$x = 0 \Rightarrow M = 0,$$

$$x = \frac{l}{4} \Rightarrow M = \frac{q_0 \cdot l}{2 \cdot 4} \left(l - \frac{l}{4} \right) = \frac{3 \cdot q_0 \cdot l^2}{32},$$

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow M = \frac{q_0 \cdot l}{4} \left(l - \frac{l}{2} \right) = \frac{q_0 \cdot l^2}{8},$$

$$x = l \Rightarrow M = 0.$$

A hajlítónyomaték M_x függvényének deriváltját kiegyenlítve nullával, meghatározható **eksztrém értékének távolsága** (x_0):

$$\frac{dM}{dx} = \frac{q_0 \cdot l}{2} - \frac{2 \cdot q_0 \cdot x_0}{2} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{l}{2},$$

amely egyúttal a tartó kritikus keresztmetszetének helyét határozza meg.

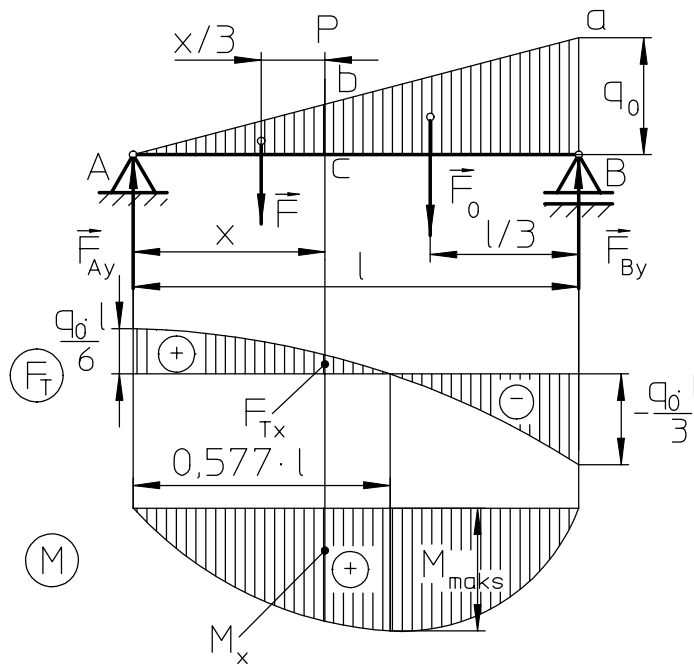
Behelyettesítve az x_0 értékét a hajlítónyomaték függvényébe, megkapható annak **legnagyobb értéke**:

$$\text{za } x_0 = \frac{l}{2} \Rightarrow M_{\max} = \frac{q_0 \cdot x_0}{2} (l - x_0) = \frac{q_0 \cdot l^2}{8}.$$

A **hajlítónyomaték maximális nagysága** mindig abban a metszetben van, **ahol a nyíróerő értéke nulla** $F_T = 0$. Ebben a pontban, a nyíróerő értelme ellentétes irányt vesz fel.

4.5.5. TARTÓ HÁROMSZÖG ALAKÚ MEGOSZLÓ TERHELÉSSSEL TERHELVE

Az olyan tartó amely egyenletesen megoszló háromszögalakú terheléssel van megterhelve, amelynek nagysága lineárisan változik látható a 4.22. ábrán. Ahogy az az előző példákban is látható volt itt is első lépésben a támaszok reakcióit kell meghatározni.



1. A támaszok reakciói

Helyettesítve a megoszló terhelést egy koncentrált erővel, a tartóra F_0 erő hat, a terhelés súlypontjában, amely $l/3$ távolságra van a B támasztól. Az erő nagysága egyenlő a háromszög területével:

$$F_0 = \frac{q_0 \cdot l}{2}.$$

A $\Sigma M = 0$ egyensúlyi feltételből:

$$F_{Ay} = -\frac{\Sigma M_B}{l} = \frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{q_0 \cdot l}{6}.$$

A második $\Sigma F_{iy} = 0$ egyensúlyi feltételből:

$$F_{By} = F_0 - F_{Ay} = \frac{q_0 \cdot l}{2} - \frac{q_0 \cdot l}{6} \Rightarrow F_{By} = \frac{q_0 \cdot l}{3}.$$

4.22. ábra. Tartó háromszög alakú megoszló terheléssel

2. Nyíróerő

A nyíróerő nagyságát a tartó baloldalától, tetszőleges x távolságra vett P pontban kell meghatározni. A metszettől balra az F_{Ay} és az Abc megoszló terhelés hat. A megoszló terhelés q nagyságát a P pontban az ΔAcb és ΔABA háromszögek hasonlóságából kell meghatározni. Az F koncentrált erő amely a tartónak ezen a részén helyettesíti a megoszló terhelést, ennek súlypontjában hat a P ponttól $x/3$ távolságban:

$$q = \frac{q_0 \cdot x}{l}, \quad \text{és} \quad F = \frac{q \cdot x}{l} = \frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot l}.$$

A nyíróerő nagysága a P pontban:

$$F_{Tx} = F_{Ay} - F = \frac{q_0 \cdot l}{6} - \frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot l} = \frac{q_0}{6 \cdot l} (l^2 - 3 \cdot x^2).$$

Az egyenlet a nyíróerő változásának függvényét fejezi ki a tartó hossz tengelyében, amelynek törvényszerűsége négyzetes parabola. A tartó végein a nyíróerő nagysága:

$$x = 0 \Rightarrow F_T = \frac{q_0 \cdot l}{6},$$

$$x = l \Rightarrow F_T = -\frac{q_0 \cdot l}{3}.$$

3. Hajlítónyomaték

A hajlítónyomaték nagysága a P metszetben:

$$M_x = F_{Ay} \cdot x - F \cdot \frac{x}{3} = \frac{q_0 \cdot l \cdot x}{6} - \frac{q_0 \cdot x^3}{6 \cdot l} = \frac{q_0 \cdot x}{6 \cdot l} (l^2 - x^2) = \frac{F_0}{3 \cdot l^2} (l^2 \cdot x - x^3).$$

Az M_x egyenletből látszik, hogy a hajlítónyomaték változásának törvényszerűsége köbös parabola. A hajlítónyomaték M_{max} maximális értékének helyzete (a tartó hosszában mérve) úgy határozható meg, hogy a fenti M_x egyenlet deriváltját ki kell egyenlíteni nullával:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F_0}{l^2} (l^2 - 3 \cdot x_0^2) = 0 \Rightarrow l^2 - 3 \cdot x_0^2 = 0,$$

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot l = 0,577 \cdot l.$$

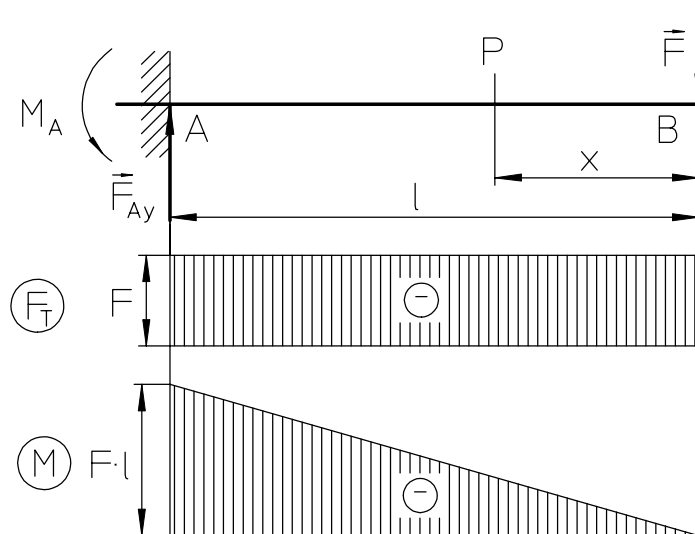
Amiből az látszik, hogy a maximális hajlító nyomaték M_{max} a tartó felétől jobbra helyezkedik el, de a negoszló terhelés súlypontjától balra.

Megjegyzés

Az F_T és M ábrák meghatározásakor sűrűn előforduló hibára kell itt felhívni a figyelmet ami abból áll, hogy a megoszló terhelést egy F_0 koncentrált erővel helyettesítve úgy tekintik, hogy a tartót egy koncentrált erő terheli. **Az ilyen helyettesítés kizárólag a támaszok reakcióinak meghatározásakor engedélyezett, és csak ekkor ad pontos eredményt.**

Az F_T és M ábrák meghatározásánál figyelembe kell venni azt, hogy a tartó különböző metszeteiben a terhelés nem csupán az össz terheléstől függ, hanem annak megoszlásától is. **Amikor a tartó képzeletben két részre van vágva, és az össz megoszló terhelést helyettesítő koncentrált erő eredője F_0 épp a vizsgált tartórészbe esik, azt tilos figyelembe venni, mert hibás eredmény ad. A megoszló terhelés nagyságát újra kell számolni, kizárólag a vizsgált tartórészre.**

4.5.6. BEFOGOTT TARTÓ A VÉGÉN KONCENTRÁLT ERŐVEL TERHELVE



4.23. ábra. Befogott tartó erővel terhelve

és az $x = l \Rightarrow M = -F \cdot l = M_{max}$.

Az AB tartó egyik végén befogva az A pontban, és a szabad B végén egy függőleges koncentrált erővel terhelve a 4.23. ábrán látható. A befogás helyén a támaszt helyettesítő F_{Ay} erő és M_A nyomaték hat.

A nyíróerő és a hajlítónyomaték megoszlása a P metszetben x távolságra:

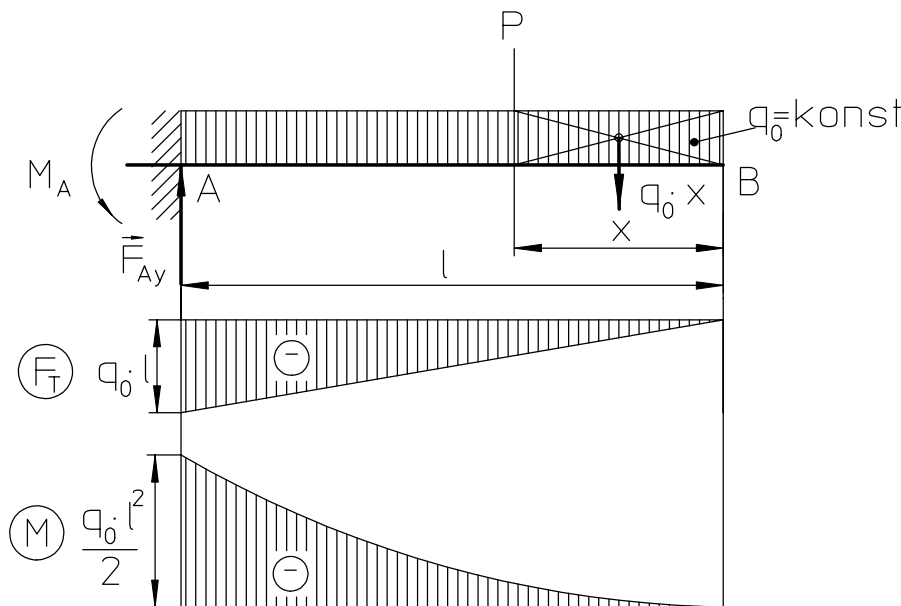
$$F_{Tx} = -F, \quad M_x = -F \cdot x.$$

A nyíróerő nagysága állandó a tartó minden metszetében, így ábrája párhuzamos a vízszintes tengellyel. A hajlítónyomaték változása lineáris, és a tartó végeire számítva értékei:

$$x = 0 \Rightarrow M = 0,$$

4.5.7. BEFOGOTT TARTÓ EGYENLETESEN MEGOSZLÓ TERHELÉSSSEL TERHELVE

Az AB befogott tartó, amely egyenletesen megoszló ($q_0 = konst$) terheléssel terhelt 4.24 ábra, támaszainak reakciói, valamint igénybevételei hasonlóképpen határozhatók meg, mint az az előző példákban is látható volt. A P metszetben:



4.24. ábra. Befogott tartó megoszló négyszög alakú terheléssel terhelve

$$F_{Tx} = -q_0 \cdot x,$$

$$M_x = -q_0 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -q_0 \cdot \frac{x^2}{2}$$

Az első egyenlet a nyíróerő változásának törvényszerűségét mutatja, amely lineáris. Ennek az erőnek nagysága a tartó végeinél:

$$x = 0 \Rightarrow F_T = 0,$$

$$x = l \Rightarrow F_T = F_{T_{\max}} = -q_0 \cdot l$$

A második összefüggés a hajlítónyomaték változását mutatja, amely négyzetes parabola. A hajlítónyomaték maximális értéke a befogás helyén van, nagysága:

$$M_{\max} = -q_0 \cdot \frac{l^2}{2}.$$

A nyíróerő és a hajlítónyomaték igénybevételei ábrái a 4.24. ábrán láthatók.

4.1. példa.

A 4.25. ábrán bemutatott, különféle terhelésekkel megterhelt konzolos tartóra meghatározni támaszainak reakcióit és megszerkeszteni nyíróerő, valamint hajlítónyomatéki ábráját.

A terhelések értékei:

$$\bar{F}_1 = 1,5 [kN]; \quad \bar{F}_2 = 2,5 [kN]; \quad \bar{F}_3 = 2,0 [kN]; \quad q_1 = 0,5 [kN/m]; \quad q_2 = 1,0 [kN/m].$$

Megoldás: Az egyensúlyi egyenletek:

$$1. \sum_{i=1}^N F_{iy} = -F_1 - F_2 - F_3 - q_1 \cdot 4 - q_2 \cdot 3 + F_{Ay} + F_{By} = 0,$$

$$2. \sum M_A = -F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 1 + q_1 \cdot \frac{4^2}{2} + F_3 \cdot 5 + q_2 \cdot 3 \cdot 6,5 - F_{By} \cdot 6 = 0.$$

A második egyenletből:

$$F_{By} = \frac{-1,5 \cdot 2 + 2,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 4^2 / 2 + 2 \cdot 5 + 1,0 \cdot 3 \cdot 6,5}{6} = 5,5 \text{ [kN]}.$$

Behelyettesítve az első egyenletbe:

$$F_{Ay} = 1,5 + 2,5 + 2 + 0,5 \cdot 4 + 1,0 \cdot 3 - 5,5 = 5,5 \text{ [kN]}.$$

Az A csuklóban nincs vízszintes erőkomponens, mivel a tartóra csak függőleges erők hatnak

A hajlítónyomatékokat és a nyíróerőket a tartó karakterisztikus pontjaira ki kell számítani.

A hajlítónyomatékok értékei:

$$M_{F_1} = 0,$$

$$M_A = -F_1 \cdot 2 = -1,5 \cdot 2 = -3 \text{ [kNm]},$$

$$M_{F_2} = -F_1 \cdot 3 + F_{Ay} \cdot 1 - q_1 \cdot \frac{1^2}{2} = -1,5 \cdot 3 + 5,5 \cdot 1 - 0,5 \cdot \frac{1^2}{2} = 0,75 \text{ [kNm]},$$

$$M_{x=4} = -F_1 \cdot 6 + F_{Ay} \cdot 4 - q_1 \cdot \frac{4^2}{2} - F_2 \cdot 3 = -1,5 \cdot 6 + 5,5 \cdot 4 - 0,5 \cdot \frac{4^2}{2} - 2,5 \cdot 3 = 1,5 \text{ [kNm]},$$

$$M_{F_3} = -q_2 \cdot \frac{3^2}{2} + F_{By} \cdot 1 = -1,0 \cdot \frac{3^2}{2} + 5,5 \cdot 1 = 1 \text{ [kNm]},$$

$$M_{F_B} = -q_2 \cdot \frac{2^2}{2} = -1,0 \cdot \frac{2^2}{2} = -2 \text{ [kNm]},$$

$$M_{x=8} = 0.$$

Hasonlóképpen a nyíróerők értékei:

$F_{TF_1}^l = 0$, (az "l" index az erőtol balra, a "d" index az erőtol jobbra)

$$F_{TF_1}^d = F_{TA}^l = F_{TF_1}^l - F_1 = 0 - 1,5 = -1,5 \text{ [kN]},$$

$$F_{TA}^d = F_{TA}^l + F_{Ay} = -1,5 + 5,5 = 4 \text{ [kN]},$$

$$F_{TF_2}^l = F_{TA}^d - q_1 \cdot 1 = 4 - 0,5 \cdot 1 = 3,5 \text{ [kN]},$$

$$F_{TF_2}^d = F_{TF_2}^l - F_2 = 3,5 - 2,5 = 1 \text{ [kN]},$$

$$F_{Tx=4} = F_{TF_2}^d - q_1 \cdot 3 = 1 - 0,5 \cdot 3 = -0,5 \text{ [kN]},$$

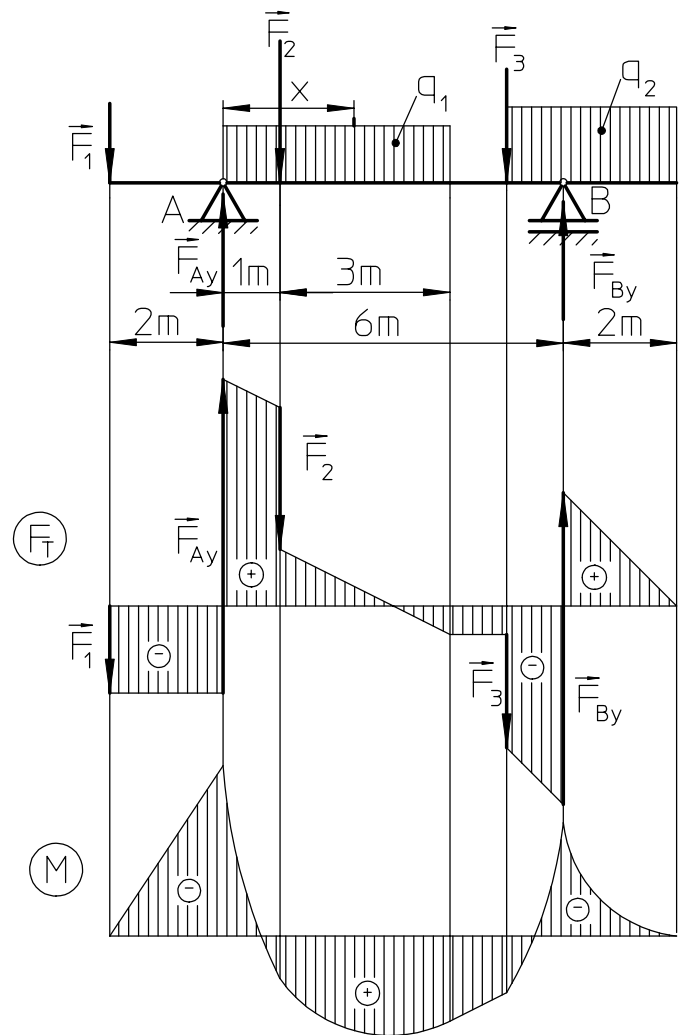
$$F_{TF_3}^l = F_{Tx=4} = -0,5 \text{ [kN]},$$

$$F_{TF_3}^d = F_{TF_3}^l - F_3 = -0,5 - 2 = -2,5 \text{ [kN]},$$

$$F_{FB}^l = F_{TF_3}^d - q_2 \cdot 1 = -2,5 - 1 \cdot 1 = -3,5 \text{ [kN]},$$

$$F_{TB}^d = F_{TB}^l + F_{By} = -3,5 + 5,5 = 2 \text{ [kN]},$$

$$F_{Tx=8} = F_{TB}^d - q_2 \cdot 2 = 2 - 2 = 0 \text{ [kN]}.$$



4.25. ábra. A 4.1. példa illusztrációja

A hajlítónyomaték és a nyíróerő változása

a 4.25. ábrán rajzolt igénybevételi ábrákon láthatók.

A hajlítónyomaték maximális értéke azon a helyen található, ahol a nyíróerő értéke nulla, a tartó azon részén ahol a q_1 megoszló terhelés hat. A hajlítónyomaték ezen a részen a következő törvényszerűség szerint változik:

$$M_x = -F_1 \cdot (2+x) + F_{Ay} \cdot x - F_2 \cdot (x-1) - q_1 \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Az összefüggés x szerinti első deriváltját kiegyenlítve nullával, a maximális hajlítónyomaték helyzete:

$$\frac{dM_x}{dx} = -F_1 + F_{Ay} - F_2 - q_1 \cdot x = 0,$$

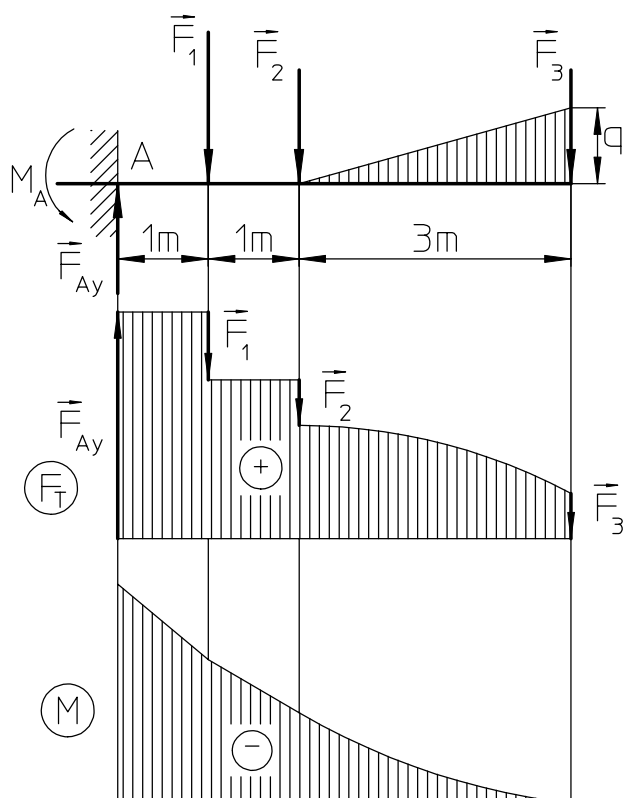
$$x = \frac{-F_1 + F_{Ay} - F_2}{q_1} = \frac{-1,5 + 5,5 - 2,5}{0,5} = 3 [m].$$

A maximális hajlítónyomaték értéke ebben a pontban (behelyettesítve az x értékét):

$$M_{x=3} = M_{\max} = -F_1 \cdot (2+3) + F_{Ay} \cdot 3 - F_2 \cdot (3-1) - q_1 \cdot \frac{3^2}{2} =$$

$$= -1,5 \cdot 5 + 5,5 \cdot 3 - 2,5 \cdot 2 - 0,5 \cdot \frac{3^2}{2} = 1,75 [kNm].$$

4.2. példa.



A 4.26. ábrán bemutatott befogott tartó különféle terheléseire meg kell határozni az A pontban fellépő reakciókat, lerajzolni a nyíróerő és hajlítónyomatéki ábrákat és meghatározni a maximális hajlítónyomaték helyzetét.

A terhelések értékei:

$$\vec{F}_1 = 1,5 [kN]; \quad \vec{F}_2 = 2,5 [kN];$$

$$\vec{F}_3 = 2,0 [kN]; \quad q_1 = 0,5 [kN / m]; \quad q_2 = 1,0 [kN / m]$$

Megoldás:

Erre a tartóra is csupán függőleges erők hatnak, így az A pontban a reakcióerőnek is csak függőleges komponense van. A reakcióerő mellett ebben a pontban M_A nyomaték is hat.

Az egyensúlyi egyenletek:

$$1. \sum_{i=1}^N F_{iz} = -F_1 - F_2 - F_3 + q \cdot \frac{3}{2} + F_{Az} = 0,$$

amelyből:

$$F_{Ay} = 3,0 + 2,0 + 2,0 \cdot \frac{3}{2} = 10 [kN].$$

4.26. ábra. A 4.2. példa illusztrációja

A befogás helyén a hajlítónyomaték:

$$2. \sum M = M_A = -F_1 \cdot 1 - F_2 \cdot 2 - q \frac{3}{2} \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right) - F_3 \cdot 5 =$$

$$= -3,0 \cdot 1 - 2,0 \cdot 2 - 2,0 \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 - 2,0 \cdot 5 = -29 [kNm].$$

A hajlítónyomatékok értékei a többi karakterisztikus metszetben:

$$M_{F_1} = -F_2 \cdot 1 - q \cdot \frac{3}{2} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right) - F_3 \cdot 4 = -2,0 \cdot 1 - 2,0 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 - 2,0 \cdot 4 = -19 \text{ [kNm]},$$

$$M_{F_2} = -q \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - F_3 \cdot 3 = -2,0 \cdot 3 - 2,0 \cdot 3 = -12 \text{ [kNm]},$$

$$M_{F_3} = 0 \text{ [kNm]}.$$

Mindezekből világosan látszik, hogy a hajlítónyomaték maximális értéke a befogás helyén van. A nyíróerők értékei a tartó metszeteiben:

$$F_{TF_3}^d = 0,$$

$$F_{TF_3}^l = F_3 = 2 \text{ [kN]},$$

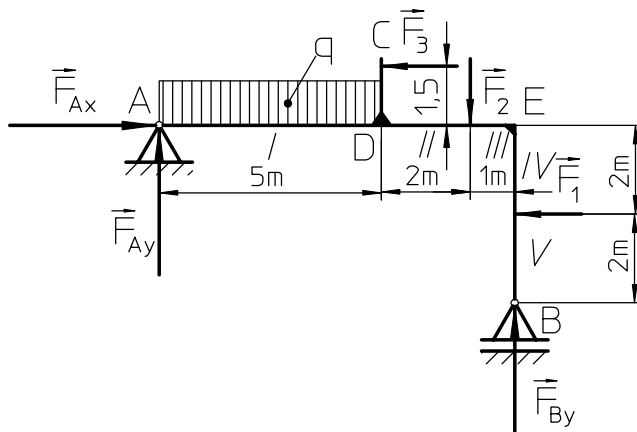
$$F_{TF_2}^d = F_{TF_3}^l + q \cdot \frac{3}{2} = 2,0 + 2,0 \cdot \frac{3}{2} = 5 \text{ [kN]},$$

$$F_{TF_2}^l = F_{TF_2}^d + F_2 = 5,0 + 2,0 = 7 \text{ [kN]},$$

$$F_{TF_1}^l = F_{Ay} = F_{TF_2}^l + F_1 = 7,0 + 3,0 = 10 \text{ [kN]}.$$

A nyíróerők és hajlítónyomatékok fenti értékeivel megrajzolhatók az igénybevételi ábrák.

4.3. példa.



4.27. ábra. A 4.3. példa illusztrációja-terhelt tartó

Meghatározni a támaszok reakcióit, a nyíróerő a rúd irányú erő és a hajlítónyomatéki ábrákat, a 4.27. ábrán bemutatott megterhelt tartóra.

A terhelések értékei:

$$\vec{F}_1 = 5 \text{ [kN]}; \quad \vec{F}_2 = 4 \text{ [kN]};$$

$$\vec{F}_3 = 4 \text{ [kN]}; \quad q = 0,8 \text{ [kNm]}$$

Első lépésben a támaszok reakcióit kell meghatározni. Az A álló csuklóban két reakcióerő lép fel, ezek F_{Ax} és F_{Ay} . A görgős B csuklóban a reakció függőleges F_{By} .

A tartó egyensúlyi egyenletei:

$$1. \sum_{i=1}^N F_{ix} = F_{Ax} - F_1 - F_3 = 0,$$

$$2. \sum_{i=1}^N F_{iy} = F_{Ay} + F_{By} - q \cdot 5 - F_2 = 0,$$

$$3. \sum M_A = q \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} - F_3 \cdot 1,5 + F_2 \cdot 7 + F_1 \cdot 2 - F_{By} \cdot 8 = 0.$$

Az egyenletek megoldásaként a támaszok keresett reakciói:

$$F_{Ax} = 5 + 4 = 9 \text{ [kN]},$$

$$F_{By} = \frac{1}{8} \left(0,8 \cdot \frac{25}{2} - 4 \cdot 1,5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 2 \right) = 5,25 \text{ [kN]},$$

$$F_{Ay} = 0,8 \cdot 5 + 4 - 5,25 = 2,75 \text{ [kN]}.$$

Az A pontba a reakcióerő nagysága:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{9^2 + 2,75^2} = 9,41 \text{ [kN]}.$$

A hajlítónyomatékok értékei, a 4.27. ábrán bejelölt I,....V, karakterisztikus pontban:

$$M_I = F_{Ay} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2, \quad (x \text{ az A ponttól számítva})$$

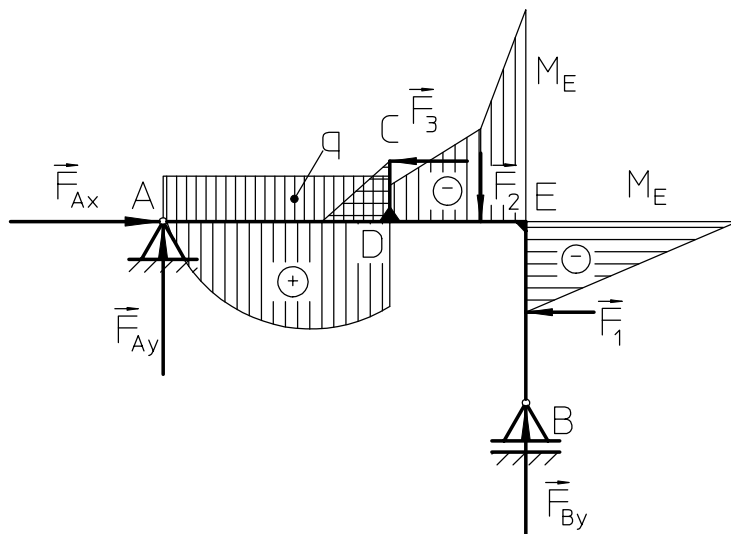
$$M_{II} = F_{Ay} \cdot x - 5q(x - 2,5) - 1,5 \cdot F_3,$$

$$M_{III} = F_{Ay} \cdot x - 5q(x - 2,5) - 1,5 \cdot F_3 - F_2(x - 7),$$

$$M_{IV} = -F_1(x - 2), \quad (x \text{ a B ponttól számítva})$$

$$M_V = 0,$$

$$M_{VI} = F_3 \cdot x, \quad (x \text{ a C ponttól számítva}).$$



4.28. ábra. A 4.3. példa illusztrációja-hajlítónyomatéki ábrák

Az ilyen összetett tartó esetében azt a helyet ahol a maximális hajlítónyomaték hat, vagyis a tartó kritikus keresztmetszetét, legegyszerűbben a megrajzolt igénybevételi ábrák nyújtják. Ezek alapján, ebben a pontban a maximális hajlítónyomaték pontos értékét analitikusan ki kell számolni.

A maximális hajlítónyomaték meghatározható az igénybevételi ábrák rajzolása nélkül is, ekkor az eljárás a következő:

A hajlítónyomaték maximális értéke erre a tartóra vonatkoztatva előfordulhat a következő pontokban, illetve szektorokban:

1. az I szektorban, ahol a megoszló terhelés hat, itt $\frac{dM}{dx} = 0$,
2. a D pontban,
3. az F_2 erő támadáspontjában,
4. az E pontban.

A felsorolt pontokban kiszámítva a hajlítónyomaték értékeit és ezeket összehasonlítva, megkapható a tartó kritikus keresztmetszetének helye:

$$1. M_I = F_{Ay} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2, \quad \frac{dM}{dx} = F_{Ay} - qx = 0, \quad x = \frac{F_{Ay}}{q} = \frac{2,75}{0,8} = 3,44 \text{ [m]}.$$

$$M_{\text{imax}} = F_{Ay} \cdot \frac{F_{Ay}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{F_{Ay}^2}{q^2} = \frac{F_{Ay}^2}{2q}, \quad M_{\text{imax}} = 4,73 \text{ [kNm]}.$$

$$2. M_D^l = F_{Ay} \cdot 5 - \frac{1}{2} q \cdot 5^2 = 13,75 - 10, \quad M_D^l = 3,75 \text{ [kNm]},$$

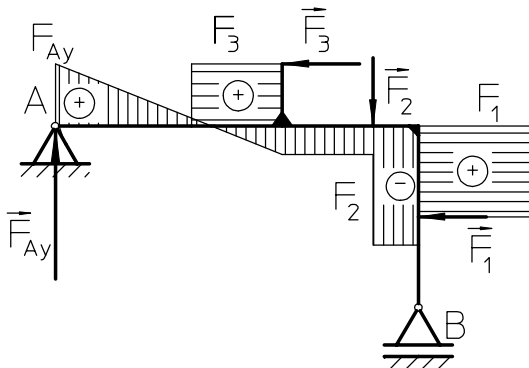
$$M_D^d = M_D^l - F_3 \cdot 1,5 = 3,75 - 6, \quad M_D^d = -2,25 \text{ [kNm]},$$

$$3. M_{F_2} = -F_1 \cdot 2 + 5,25 \cdot 1 = -10 + 5,25, \quad M_{F_2} = -4,75 \text{ [kNm]},$$

$$4. M_E = -F_1 \cdot 2 = -10, \quad M_E = -10 \text{ [kNm]}.$$

Aa eredményekből kitűnik, hogy a hajlítónyomaték legnagyobb értéke az E pontban van, melynek nagysága 10 [kNm].

A nyíróerők a tartó szektoraiban legegyszerűbben úgy definiálhatók mint a hajlítónyomatékok deriváltjai, de a nyíróerők egyenletei is felállíthatók. Az eredményeknek egybevágóaknak kell lenniük:



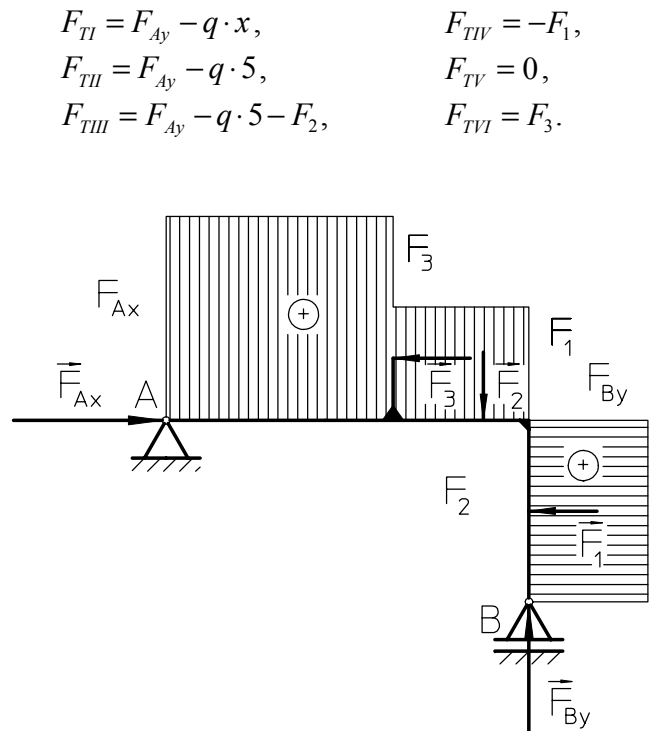
4.29. ábra. A 4.3. példa illusztrációja nyíróerő-ábra

A rúdirányú erők ugyanúgy meghatározhatók:

$$F_{AI} = F_{Ax}, \quad F_{AIII} = F_{Ax} - F_3, \quad F_{AV} = F_{By},$$

$$F_{AII} = F_{Ax} - F_3, \quad F_{AIV} = F_{By}, \quad F_{AVI} = 0.$$

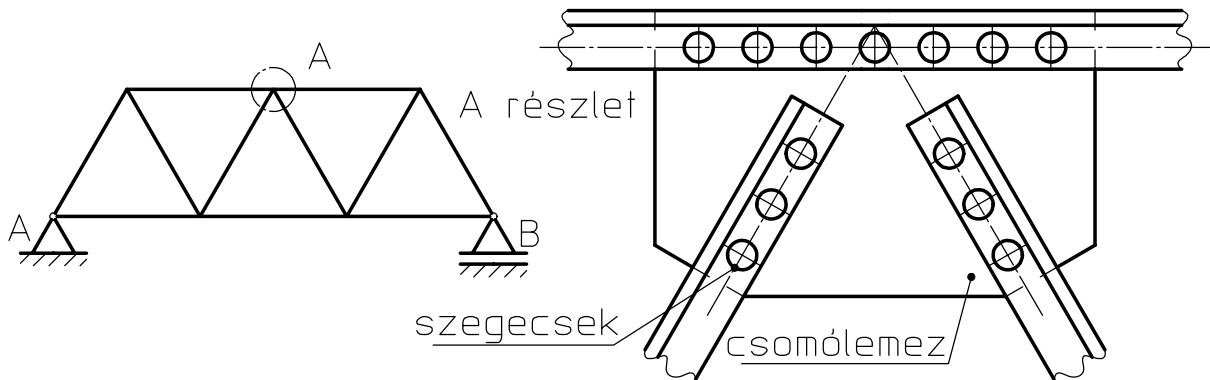
Az egyes igénybevételi ábrák külön - külön lettek bemutatva. A hajlítónyomatéki ábra a 4.28, a nyíróerő- ábra a 4.29, a rúderő-ábra a 4.30. ábrán látható.



4.30. ábra. A 4.3. példa illusztrációja rúderő-ábra

4.6. RÁCSOS SZERKEZETEK

A rácsos szerkezeteket merev rudak alkotják, amelyek egymással szilárdan össze vannak kötve (szegecselve, hegesztve, vagy csavarokkal). A valóságban a rácsos szerkezetek elemei nem mozognak (4.31. ábra), köszönve éppen ezért igen nagy merevségüknek kis súlyukhoz képest, felhasználásuk sokrétű. A rácsos szerkezetek felhasználhatók mint tetőszerkezetek, kisebb fesztávú hidak, emelők, repülőszárnyak, antenntartók, magasfeszültségű távvezetékek stb. oszlopainak kivitelezésére.



4.31. ábra. Rácsos szerkezet

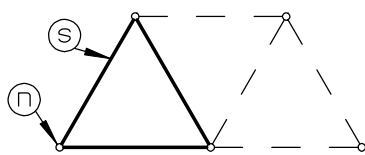
A rácsszerkezet szétválasztásakor csomópontjait erő és erőpárral kell helyettesíteni, ami igen összetett vizsgálatokhoz vezetne. Éppen ezért, mindjárt az első lépésben egyszerűsítésekhez kell folyamodni, amelyek a következők:

1. Az erőpárok mint kis mennyiségek elhanyagolhatók, így **a rudak merev kapcsolata helyett azokat csuklós kötésekként kell venni**. A csuklók csomópontnak tekinthetők, számozásuk római számmal történik, a rudak számozása viszont arab számokkal.
2. A rudak hajlítása is kis mennyiség, amelynek következményeként, **minden rúd hatása helyettesíthető erővel, amely a rúd irányában hat**.

Statikai szempontból nézve, a rácsos szerkezet fogalma alatt, csuklóval összekötött könnyű rudak összessége értendő, amelyekre a csuklóban erők hatnak.

A rácsszerkezet kivitelétől függően lehet:

- síkbeli,
- térbeli rácsszerkezet.



4.32. ábra. Síkbeli rácsszerkezet eleme

A **síkbeli rácsszerkezet** alapeleme a **háromszög**, mert merev rudak esetén alakja változatlan (4.32. ábra). Az ilyen együttes megalkotásához három rúdra és három csomópontra van szükség. További bővítés céljából, két új rudat és egy csomópontot kell a meglévőkhöz hozzárendelni. A síkbeli rácsszerkezet csomópontjainak és rudainak száma közötti összefüggés a következő:

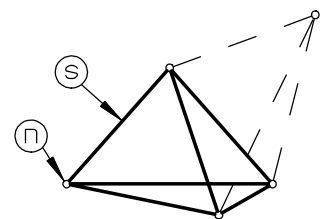
$$S = 3 + 2(n - 3) \quad \text{vagy} \quad S = 2n - 3. \quad (4.20)$$

ahol:

- S a rácsszerkezet rudainak száma,
- n a rácsszerkezet csomópontjainak száma.

A **térbeli rácsszerkezet** alapeleme a **tetraéder**, amelynek alkotóelemei hat rúd és négy csomópont (4.33. ábra). A térbeli rácsszerkezet bővítéséhez újabb három rudat és egy csomópontot kell a meglévőkhöz adni. A térbeli rácsszerkezet elemei közötti összefüggés a következő:

$$S = 6 + 3(n - 4) \quad \text{illetve} \quad S = 3n - 6. \quad (4.21)$$



4.33. ábra. Térbeli rácsszerkezet

A rácsszerkezetek vizsgálatával megoldást kell keresni a következőkre:

1. az egyensúlyban levő rácsszerkezetre meghatározni támaszainak reakcióit,
2. meghatározni a rácsszerkezet egyes rúdjaiban fellépő erőket.

A támaszok reakcióinak meghatározása ugyanúgy történik, mint az eddigiekben tárgyalt tartók esetében, az egyensúlyi feltételek alkalmazásával az egész rácsszerkezetre mint egészre vonatkozóan, attól függően, hogy síkbeli, vagy térbeli a konstrukció.

A rudakban ható erők (rúderők) meghatározására alapvetően két módszer alkalmazása ajánlott, attól függően, hogy a kiválasztott csomópont egyensúlya, vagy a rácsszerkezet egy részének egyensúlya a vizsgálat tárgya. Ezek a módszerek a következők:

1. Csomóponti módszer
2. Átmetsző módszer

4.6.1. CSOMÓPONTI MÓDSZER

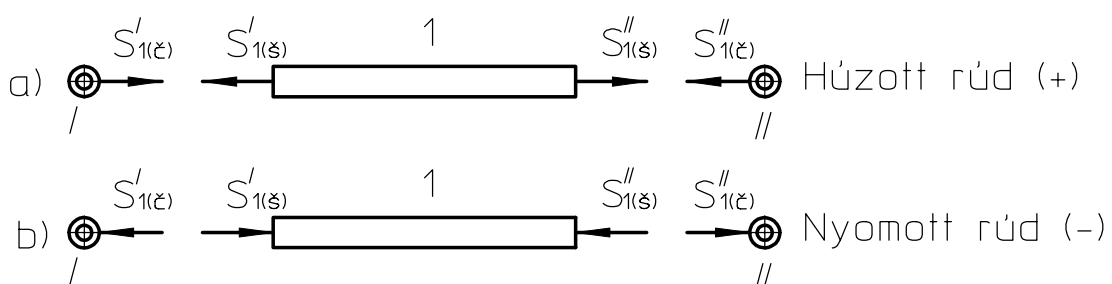
Ez a módszer a kiválasztott csomópont egyensúlyi feltételeit vizsgálja. A kiválasztott csomópontban (amely tetszőleges) a rudak hatását erőkkel kell helyettesíteni. Ezáltal a csomópontban, egy pontban ható erőrendszer hat, amely a rudak hatását helyettesíti. A csomópontokban ható külső erőknek nagyságuk, irányuk, értelmük ismert, a rúderőknek viszont csak irányuk ismeretes. A rúderők nagysága, valamint értelme, az egy pontban ható erők egyensúlyi feltételeiből meghatározhatók.

A **síkbeli** egy pontban ható **erőrendszernek két egyensúlyi** feltétele van ($\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$), a **térbeli erőrendszernek meg három** ($\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$; $\sum F_{iz} = 0$). Az síkbeli rácsszerkezet n számú csomópontjára $2n$, a térbeli rácsszerkezetre viszont $3n$ egyensúlyi egyenlet írható fel. Ezeknek az egyenleteknek segítségével $2n - 3$ rúderő és 3 a támaszokban ható reakcióerő határozható meg síkbeli rácsszerkezet esetén, vagy $3n - 6$ rúderő és 6 reakcióerő térbeli rácsszerkezet esetén.

A megoldás folyamata felosztható néhány lépésre, amelyek a következők:

1. *A tartó (mint egész) támaszaiban fellépő reakciók meghatározása.*
2. *Ki kell választani azt a csomópontot, amelyben síkbeli rácsszerkezet esetén legtöbb kettő, térbeli rácsszerkezet esetén legtöbb három ismeretlen erő hat.*
3. *A kiválasztott csomópontra az egyensúlyi feltételek felírása, amelyekből az ismeretlen erők meghatározhatók.*
4. *A módszert minden rudat helyettesítő erő meghatározásáig folytatni kell.*
5. *A rúderőket ezután táblázatban kell megadni. A húzott rúdban az erő pozitív, a nyomott rúdban fellépő erő negatív előjelű.*

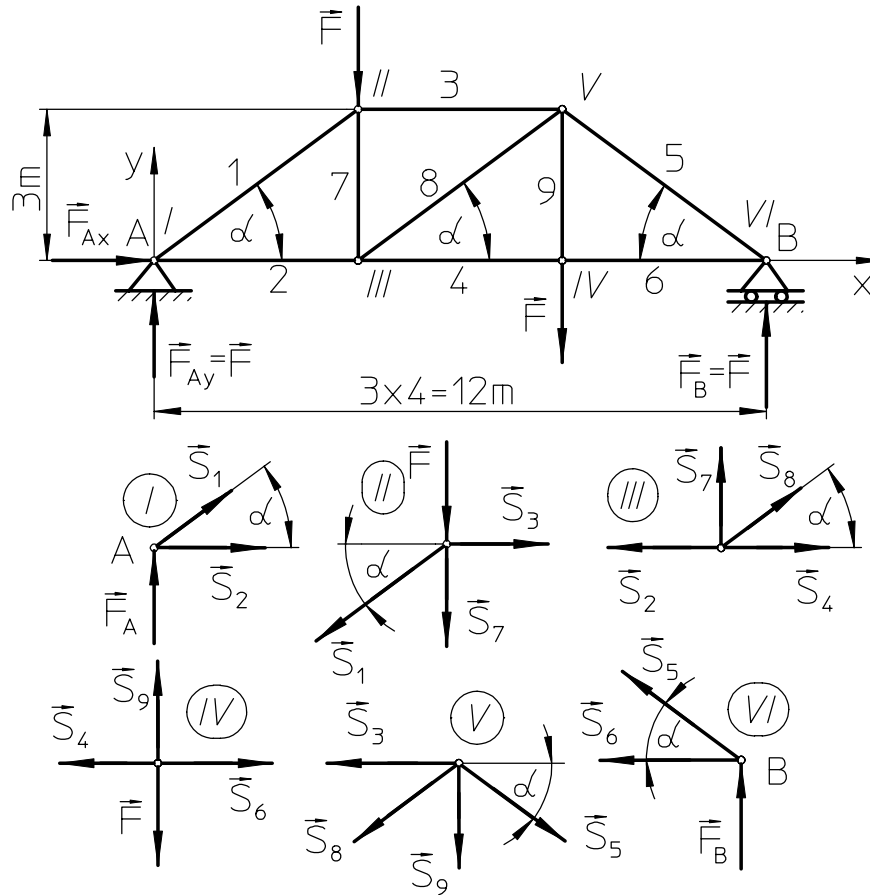
Egy rúd húzott-e, vagy nyomott-e, legkönnyebben megállapítható oly módon, hogyha az erő **értelme a csomópont felé mutat**, a rúd **nyomott**, amennyiben az **értelme a csomópont-tól mutat**, akkor a rúd **húzott**. A húzott rúd (a. alatt) és a nyomott rúd (b. alatt) esetét a 4.34. ábra mutatja. A 4. aksióma szerint a rúd és a csomópont egymáshatása ellentétes értelmű. Az $S_{I(\xi)}$ rúderő, amely az I csomópontra hat ellentétes értelmű attól az erőttől, amellyel a csomópont a rúdra hat $S_{I(\xi)}$. A II csomópontban, a rúd másik végén, ugyanazok az erők hatnak, így a rúd húzásra van megterhelve, tehát előjele pozitív (4.34. a ábra). Ennek ellenkezője, nyomott rúd (negatív előjellel) ugyanazon az ábrán látható b) alatt.



4.34. ábra. A rúderők értelme

4.4. példa.

A 4.35. ábrán látható rácsos szerkezetre, amely függőleges $\vec{F} = 2\text{ [N]}$ erővel van megterhelve, kiszámítani a támaszok reakcióit, és a rúderőket.



4.35. ábra. A 4.4. példa illusztrációja

Megoldás: Első lépésben a rudakat és a csomópontokat (csuklókat) kell megjelölni. A csuklók száma 6 a rudaké 9. Behelyettesítve a (4.20) összefüggésbe: $S = 2n - 3 \Rightarrow 9 = 2 \cdot 6 - 3 = 12 - 3 = 9$, az összefüggés fennáll, tehát a rúdszerkezet stabil.

A konstrukció az A pontban egy álló hengeres csuklóval van támasztva, a B pontban egy görgős csuklóval. A támaszokat helyettesítő reakcióerők az \vec{F}_{Ax} , \vec{F}_{Ay} , \vec{F}_B erők, amelyek az egységes rácsszerkezet egyensúlyi feltételiből meghatározhatók:

$$1. \sum F_{ix} = F_{Ax} = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = F_{Ay} - 2 \cdot F + F_B = 0,$$

$$3. \sum M_A = F_B \cdot 12 - F \cdot 4 - F \cdot 8 = 0,$$

Az első egyenletből látszik, hogy az A pontban vízszintes erőkomponens nincs.

A harmadik egyenletből a B támasz reakciója:

$$F_B = \frac{12 \cdot F}{12} = F = 2\text{ [N]}.$$

A második egyenletből:

$$F_{Ay} = F_A = 2 \cdot F - F_B = 2 \cdot F - F = F = 2 [N].$$

Az α szög, amelyet a ferde rudak bezárnak az $A I III$ háromszögből:

$$AD = 4 [m], \quad CD = 3 [m], \quad AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{16+9} = 5 [m].$$

$$\sin \alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{5}.$$

A rúderők meghatározásához az érthetőség kedvéért, az egyes csuklókat ajánlatos külön lerajzolni a rájuk ható mind külső, mind rúderőkkel együtt. Az egyes csuklók különválasztásakor, a rúderők iránya ismert, mivel megegyezik az egyes rudak irányával, értelmük ellenben tetszőleges. A rúderők feltételezett értelme a csukló-tól lett felvéve, vagyis minden rúd húzásra terhelt (4.35. ábra).

Az I. csukló kiválasztása. Az I csuklóban \vec{F}_A, \vec{S}_1 és \vec{S}_2 közös támadáspontú erők hatnak. Az \vec{S}_1 és \vec{S}_2 erők iránya amellyel a csuklóra hatnak ismertek (a rudak irányai), nagyságuk és értelmük ellenben nem ismert. Mivel az I csukló egyensúlyban van, felírhatók az egy ponban ható síkbeli erők egyensúlyi egyenletei, melyeknek alakjai:

$$1. \sum F_{ix} = 0 \Rightarrow S_2 + S_1 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = 0 \Rightarrow F_A + S_1 \cdot \sin \alpha = 0,$$

Az egyenletek megoldásával:

$$S_1 = -\frac{F}{\sin \alpha} = -\frac{5}{3} \cdot 2 = -3,33 [N],$$

$$S_2 = -S_1 \cdot \cos \alpha = \frac{5}{3} \cdot F \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{3} \cdot 2 = 2,66 [N].$$

Az \vec{S}_1 erő értelme ellentétes a feltételezettől, az erő a csuklót nyomja, amiből következik, hogy az I. rúd nyomott. Az \vec{S}_2 erő értelme a csukló-tól hat, így a 2. rúd húzott.

II. csukló Ebben a csuklóban az \vec{F} és \vec{S}_1 ismert erők, és az \vec{S}_3 és \vec{S}_7 ismeretlen erők hatnak. Az egyensúlyi feltételekből következik:

$$1. \sum F_{ix} = 0 \Rightarrow -S_1 \cdot \cos \alpha + S_3 = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = 0 \Rightarrow -F - S_1 \cdot \sin \alpha - S_7 = 0,$$

Az első egyenletből:

$$S_3 = S_1 \cdot \cos \alpha = -F \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \cdot 2 = -2,66 [N],$$

A másodikból:

$$S_7 = F + S_1 \cdot \sin \alpha = F - \frac{F}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = F - F = 0.$$

A 3. rúd nyomott, míg a 7. rúdnak nincs terhelése.

III. csukló Mivel a 7. rúdban nincs rúderő $S_7 = 0$, az S_2 és S_4 erőknek az y tengely irányába nincs összetevőjük, tehát $S_8 = 0$:

$$1. \sum F_{iy} = 0 \Rightarrow S_8 \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow S_8 = 0,$$

$$2. \sum F_{ix} = 0 \Rightarrow S_4 - S_2 = 0 \Rightarrow S_4 = S_2 = 2,66 [N].$$

A 4. rúd húzott.

IV. csukló Mivel minden erő egyensúlyban van, közvetlenül felírható:

$$S_9 = F = 2 \text{ [N]} \text{ a 9. rúd húzott,}$$

$$S_6 = S_4 = 2,66 \text{ [N]} \text{ a 6. rúd szintén húzott.}$$

V. csukló Ebben a csuklóban ismertek az $S_9 = F = 2 \text{ [N]}$, $S_8 = 0$ és $S_3 = -2,66 \text{ [N]}$ erők. Az x tengelyre felírt egyensúlyi egyenletekből következik:

$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow S_5 \cdot \cos \alpha - S_3 = 0 \Rightarrow S_5 = S_3 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3} \cdot F \cdot \frac{5}{4} = -\frac{5}{3} \cdot F = -3,33 \text{ [N]}.$$

Az 5. rúd nyomott, hiszen a rúderő a csukló felé hat (a feltételezettel ellenkező irányban).

Az utolsó csuklóban minden erő ismert, így az egyensúlyi egyenletek a kapott eredmények ellenőrzésére szolgálhatnak.

Az eredmények áttekinthető formában táblázatba foglalva:

A rudak sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9
húzott rúd (+)		2,66		2,66		2,66	0	0	2
nyomott rúd (-)	3,33		2,66		3,33				

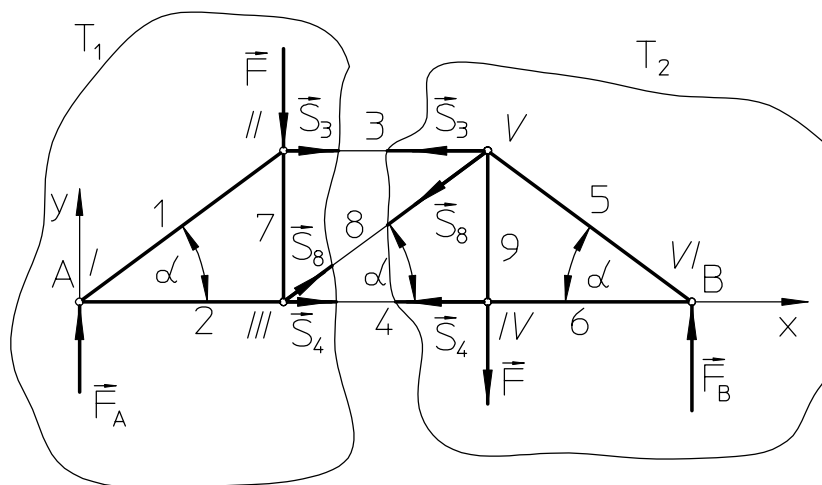
4.6.2. AZ ÁTMETSZŐ MÓDSZER (RITTER-FÉLE MÓDSZER)

Ennél a módszernél a rácsszerkezetet két részre kell bontani, képzetben azokat a rudakat kell átvágni, amelyeknek rúderőit meg kell határozni. Az átvágott rudak hatását rúderőkkel kell helyettesíteni a rudak irányában, húzott rúderőt feltételezve. Az így kapott két testre, felírva ezek egyensúlyi egyenleteit, a rúderők meghatározhatók. Mivel a síkbeli erőrendszernek három egyensúlyi egyenlete van, a síkbeli rácsszerkezetnek három ismeretlen rúderejét lehet ily módon meghatározni, vagyis mindössze három rudat szabad átvágni. A térbeli rácsszerkezet esetében az ismeretlen erők száma hat.

A síkbeli rácsszerkezet átmetsző módszerrel történő megoldásakor, az egyensúlyi egyenletek (3.37) alakja a legalkalmasabb, amely három különálló pontra felírt nyomatéki egyenletből áll.

Függetlenül a módszertől, a rúderőknek mindkét esetben meg kell egyezniük.

4.5. példa.



4.36. ábra. A 4.5. példa illusztrációja

Meghatározni a 3, 4 és 8 rúderőket a 4.4. példában feladott rácisos szerkezetre, átmetsző módszerrel.

Megoldás: A rácsszerkezetet két merev T_1 és T_2 testre kell bontani (4.36. ábra), a 3., 4., 8. rudak átvágásával. A két test kölcsönhatása az \vec{S}_3 , \vec{S}_4 , \vec{S}_8 rúderőkkel helyettesíthető. Az erők irányai ismertek, értelmüket úgy kell megválasztani, hogy a rúderők pozitívak legyenek.

A T_2 test egyensúlyi egyenletei a következők:

$$1. \sum M_{II} = F \cdot 4 - F_B \cdot 8 + S_8 \cdot \sin \alpha \cdot 4 + S_4 \cdot 3 = 0,$$

$$2. \sum M_V = S_4 \cdot 3 - F_B \cdot 4 = 0,$$

$$3. \sum M_{IV} = -S_3 \cdot 3 - S_8 \cdot \cos \alpha \cdot 3 - F_B \cdot 4 = 0.$$

A második egyenletből:

$$S_4 = \frac{4}{3} \cdot F_B = \frac{4}{3} \cdot 2 = 2,66 [N],$$

Az elsőből:

$$S_8 = \frac{F_B \cdot 8 - S_4 \cdot 3 - F \cdot 4}{4 \cdot \sin \alpha} = \frac{4F - \frac{4}{3}F \cdot 3}{4 \cdot \frac{3}{5}} = 0,$$

Míg végül a harmadikból:

$$S_3 = \frac{-S_8 \cdot \cos \alpha - F_B \cdot 4}{3} = -\frac{4}{3} \cdot F = -\frac{4}{3} \cdot 2 = -2,66 [N].$$

Az eredmény, összehasonlítva az előző csomóponti módszert ugyanaz.

A rácsszerkezet többi rúdjaiban fellépő erők meghatározására, ezt a módszert többször meg kell ismételni, másik rudak átmetszésével.

Ezen analitikus módszerek mellett, létezik grafikus módszer is (Cremona - erőterv), amely kizárólag síkbeli rácsszerkezetek megoldására alkalmas, így alkalmazása is korlátozott.

4.7. KÖTÉL (LÁNCGÖRBE)

Az olyan kötélt vagy láncot, amely ideálisan hajlékony, hossza állandó (nyújthatatlan), végeinél fel van erősítve és terhelés hat rá a **lánCGörbe**. Láncgörbének tekinthetők a függőhidak sodronyai, magas tornyok és antennák biztosítására szolgáló drótkötelek is. Ha az ideálisan hajlékony kötélt vagy szíjat, amely két pontban fel van függesztve és egész hosszában egyenletesen megoszló terhelés hat rá, hosszanti tengelye a terheléstől függően meggömbösül és egyensúlyi helyzetében **lánCGörbét** alkot. A láncgörbék alakja a terhelés módjától (eloszlásától) függ, és alapjában véve két típusa ismeretes:

1. láncgörbe amelyre koncentrált erők hatnak (véges számú, gömbcsuklókkal kapcsolódó rudak láncolata),
2. megoszló terheléssel terhelt láncgörbe (kötél).

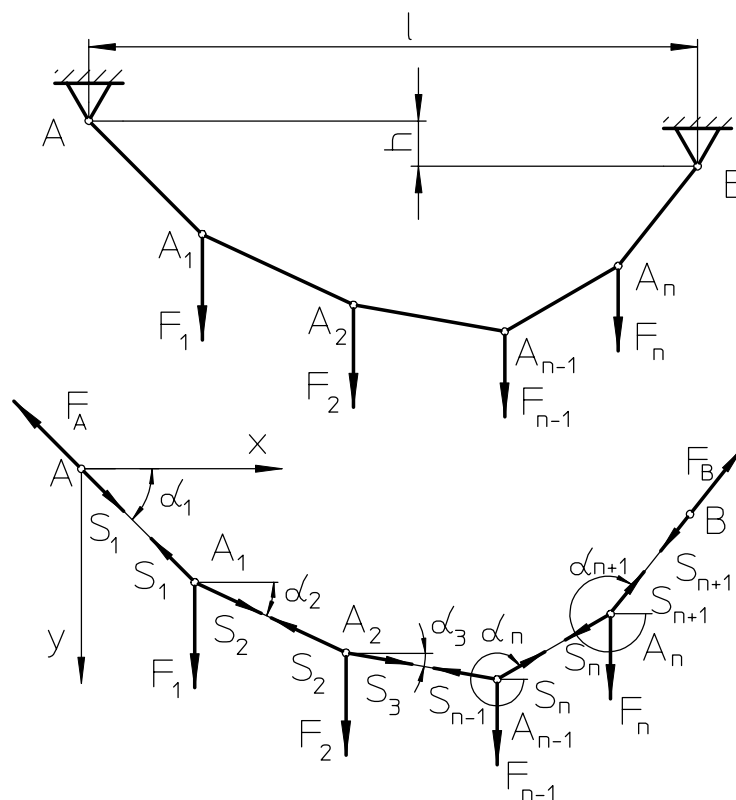
A láncgörbe egyensúlyi feltételének felállításakor meghatározhatók:

1. hosszanti tengelyének alakja,
2. a kötéltben fellépő belső erők eloszlása a láncgörbe mentén.

4.7.1. LÁNCGÖRBE KONCENTRÁLT ERŐKKEL TERHELVE

Az olyan kötélt, amely végeinél az A és B pontokban fel van függesztve, és amelyre az A_1, A_2, \dots, A_N pontokban koncentrált $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ erők hatnak, amelyeknek távolságai az A vagy B pontoktól ismertek 4.37. ábra, meg kell határozni egyensúlyi alakját, és a belső erők eloszlását. A felfüggesztési (A és B) pontok vízszintes távolsága l a láncgörbe fesztávolsága, a felfüggesztési pontok függőleges távolsága ebben az esetben h .

Mivel a kötélsúly elhanyagolható a terhelés nagyságához viszonyítva, az erők A_i támadáspontjai közötti kötélszakasz (láncszakasz) feszes és egyenes alakot vesz fel. A kötelet helyettesítve kötélirányú erőkkel, minden A_i pontban közös támadáspontú erők hatnak. Mivel a kötélminden pontja egyensúlyban van, egyensúlyi helyzetének, és a kötélerők meghatározásához elegendő az A_i pontokban ható erők egyensúlyát vizsgálni. Az Axy koordináta rendszerben, a kötélszakaszok az x tengely pozitív szárával bezárt α_i szögeivel, minden A_i pontban közös támadáspontú erők hatnak, melyeknek komponensei \vec{F}_i , \vec{S}_i és \vec{S}_{i+1} (4.37. ábra), és egyensúlyi egyenleteik:



4.37. ábra. Kötél koncentrált erőkkel terhelve

$$\text{az } i=1. \quad \sum F_{ix} = S_2 \cdot \cos \alpha_2 - S_1 \cdot \cos \alpha_1 = 0, \quad (4.22)$$

$$(A_1) \quad \sum F_{iy} = F_1 + S_2 \cdot \sin \alpha_2 - S_1 \cdot \sin \alpha_1 = 0. \quad (4.23)$$

$$\text{az } i=2. \quad \sum F_{ix} = S_3 \cdot \cos \alpha_3 - S_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0, \quad (4.24)$$

$$(A_2) \quad \sum F_{iy} = F_2 + S_3 \cdot \sin \alpha_3 - S_2 \cdot \sin \alpha_2 = 0. \quad (4.25)$$

$$\text{az } i=n \quad \sum F_{ix} = S_{n+1} \cdot \cos \alpha_{n+1} - S_n \cdot \cos \alpha_n = 0, \quad (4.26)$$

$$(A_n) \quad \sum F_{iy} = F_n + S_{n+1} \cdot \sin \alpha_{n+1} - S_n \cdot \sin \alpha_n = 0. \quad (4.27)$$

A láncgörbére összesen $2n$ egyensúlyi egyenlet írható fel, amelyben az ismeretlenek száma $2n+2$. Az ismeretlenek az $n+1$ belső erők az S_i pontokban, ugyanannyi ismeretlen α_i szög alatt. Az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ szögek két geometriai összefüggést elégítenek ki, ezek:

$$\sum a_i \cdot \cos \alpha_i = l, \quad \text{és} \quad \sum a_i \cdot \sin \alpha_i = h, \quad (4.28)$$

ahol:

- a_i az i -edik szakasz hossza,
- l a kötél fesztávolsága,
- h a felfüggesztési pontok magasságkülönbsége.

Mindebből következik, hogy az egyensúlyi egyenletek, és a geometriai összefüggések segítségével, meghatározható minden ismeretlen.

A támaszok reakciói az első \vec{S}_1 és az utolsó \vec{S}_{n+1} erőnek felelnek meg.

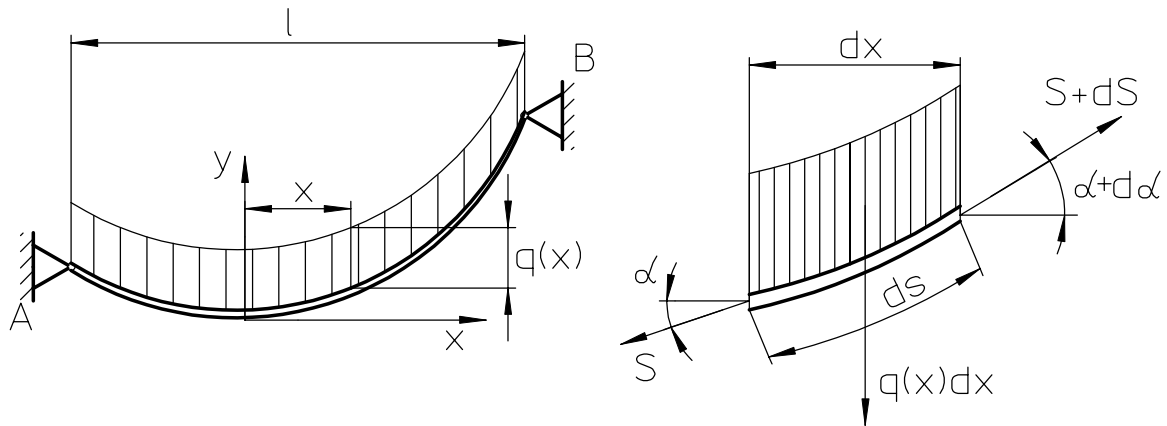
Az x tengelyre felírt egyensúlyi egyenlethől következik, hogy a szakaszokban ható erők vízszintes vetületei egyenlők, és egyenlők a reakcióerők vízszintes vetületeivel:

$$F_{Ax} = F_{Bx} = S_1 \cdot \cos \alpha_1 = S_2 \cdot \cos \alpha_2 = \dots = S_{n+1} \cdot \cos \alpha_{n+1} \quad (4.29)$$

Az y tengelyre felírt egyensúlyi egyenletekből a szakaszokban ható erők függőleges komponensei határozhatók meg ($S_i \cdot \sin \alpha_i$), amely annál nagyobb, minél nagyobb a szakasz hajlásszöge az x tengelyhez viszonyítva. Mivel a szakasz-erők vízszintes összetevői egyenlők, nagyobb függőleges erő értékére a szakaszban ható eredőerő nagysága is nagyobb.

4.7.2. MEGOSZLÓ TERHELÉSEL TERHELT KÖTÉL

Az l fesztávolságú kötélre, amely az A és B pontokban van felfüggesztve, és egyenletesen megoszló terheléssel terhelt (amely lehet a lánc, vagy magasfeszültségű vezeték súlya is), meg kell határozni az egyensúlyi alakját, és a kötél metszetében ébredő belső erőket.



4.38. ábra. Egyenletesen megoszló terheléssel terhelt kötél

A koordináta rendszert a kötél lemélyebb pontjába helyezve 4.38. ábra, a kivágott elemi kötélre, amelynek hossza ds , az S , $S+dS$, valamint $q(x) \cdot dx$ erők hatnak, ahol $dx = ds \cdot \cos \alpha$. Mivel a kötél hossza kicsiny (elemi kötélhossz), a rá ható erők egy pontban ható erőkként tekinthetők, amelyeknek egyensúlyi egyenletei a következők:

$$\sum F_{ix} = -S \cdot \cos \alpha + (S + dS) \cdot \cos(\alpha + d\alpha) = 0, \quad (4.30)$$

$$\sum F_{iy} = -S \cdot \sin \alpha + (S + dS) \cdot \sin(\alpha + d\alpha) - q(x) \cdot dx = 0. \quad (4.31)$$

Az α és $\alpha + d\alpha$ szögek alatt belső erők hatnak. A trigonometikus függvényeket sorba fejtve, és a felsőbb rendű kicsiny mennyiségeket elhagyva:

$$\cos(\alpha + d\alpha) \approx \cos \alpha - d\alpha \sin \alpha, \quad (4.32)$$

$$\sin(\alpha + d\alpha) \approx \sin \alpha + d\alpha \cos \alpha. \quad (4.33)$$

Behelyettesítve a (4.32)-öt a (4.30)-ba és ismét elhagyva a másodrendű kicsiny mennyiségeket:

$$-S \cdot \cos \alpha + (S + dS) \cdot (\cos \alpha + d\alpha \sin \alpha) = -S \cdot \cos \alpha + S \cdot \cos \alpha - S \cdot d\alpha \sin \alpha + dS \cdot \cos \alpha =$$

$$d(S \cdot \cos \alpha) = 0. \quad (4.34)$$

Ebből az egyenletből:

$$S \cdot \cos \alpha = S_0 = \text{const}, \quad (4.35)$$

a kötélen bármely metszetében, a húzóerő vízszintes vetülete állandó, nagysága S_0 . A kötélen legmélyebb pontjában O pont, az erő nagysága S_0 (mert itt $\alpha = 0$), míg a többi metszetben a belső erő nagysága:

$$S = \frac{S_0}{\cos \alpha} \quad (4.36)$$

A második egyenlet ($\sum F_{iy}$) alakja:

$$d(S \cdot \sin \alpha) = q(x) dx \quad (4.37)$$

Behelyettesítve a (4.36)-ot a (4.37)-be:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{S_0}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha \right) = \frac{d}{dx} (S_0 \cdot \tan \alpha) = q(x), \quad (4.38)$$

miel:

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \quad (4.39)$$

az egyenlet végső alakja:

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q(x)}{S_0}}. \quad (4.40)$$

ahol:

- $q(x)$ a kötélen megoszló terhelése,
- S_0 a kötélerő vízszintes összetevője, amelynek értéke állandó.

A (4.40) egyenlet olyan láncgörbe differenciálegyenlete, amely egyenletesen megoszló terheléssel terhelt. A láncgörbe egyenletét a fenti differenciálegyenlet kétszeri integrálásával lehet megkapni. Az integrálási állandók meghatározása a kezdeti értékekből adódna.

A láncgörbe paraméterei a következők:

- **belógás** f amely a felfüggesztési pontok és a legmélyebb pont közötti távolság,
- **hossz** L amely az egyik felfüggesztési pont és a legmélyebb pont, valamint ettől a ponttól a másik felfüggesztési pontig mért kötélnagyság összege.

$$L = S_A + S_B. \quad (4.41)$$

Mivel a kötélen elemi ds ívhossza:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}, \quad (4.42)$$

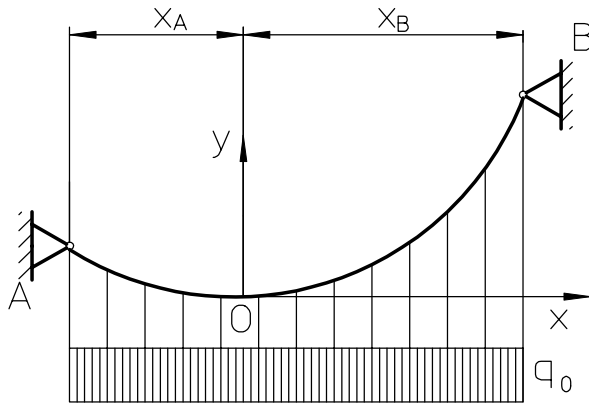
a láncgörbe hossza:

$$L = \int_{x(A)}^{x(B)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx, \quad (4.43)$$

ahol:

- $x(A)$; $x(B)$ a láncgörbe felfüggesztési pontjainak vízszintes koordinátái.

4.7.3. PARABOLIKUS LÁNCGÖRBE



Az olyan kötél, amely egyenletesen megoszló q_0 terheléssel va terhelve a vízszintes vetülete mentén (4.39. ábra) parabolikus láncgömbét alkot. Ilyen alakja van a függőhidak tartóköteleinek, amelyek végeikkel a pillérekhez vannak erősítve, és az ezekre felfüggesztett függőleges kötelek viszik a vízszintes hídplatót.

Alapvető feladatként, ennek a láncgömbének kell meghatározni az egyenletét.

Mivel a q_0 megoszló terhelés állandó, a (4.40) differenciálegyenlet alakja:

4.39. ábra. Parabolikus láncgörbe

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q_0}{S_0}. \quad (4.44)$$

Integrálás után:

$$y = \frac{q_0}{S_0} \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2, \quad (4.45)$$

ahol:

- C_1 és C_2 integrálási állandók.

A láncgörbe legmélyebb pontjában felvett koordináta rendszerre vonatkoztatva:

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0. \quad (4.46)$$

A (4.46) összefüggések határértékek, amelyek alapján az integrálási állandók értékei:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0. \quad (4.47)$$

Behelyettesítve a(4.45) összefüggésbe, a láncgörbe egyensúlyi alakja:

$$y = \frac{q_0}{S_0} \cdot \frac{x^2}{2}. \quad (4.48)$$

A kapott egyenlet négyzetes parabola egyenlete, ezért is nevezik az ilyen láncgömbét parabolikusnak.

Mivel:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{q_0}{S_0} \cdot x, \quad \text{és} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad (4.49)$$

a láncgörbe tetszőleges metszetében a (4.36) összefüggés alapján az erő nagysága:

$$S = S_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{S_0} \cdot x \right)^2}. \quad (4.50)$$

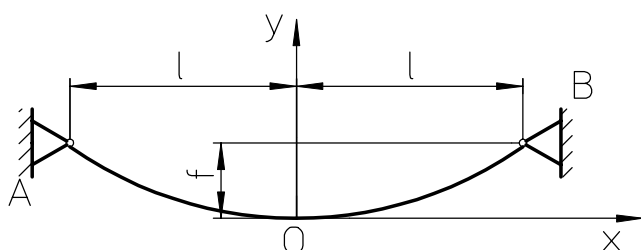
Az (A és B) felfüggesztési pontokban az erő:

$$S_A = S_0 \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{S_0} \cdot x_A \right)^2}, \quad (4.51)$$

$$S_B = S_0 \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{S_0} \cdot x_B \right)^2}, \quad (4.52)$$

ahol:

- x_A és x_B az A és B felfüggesztési pontok vízszintes távolságai az y tengelytől.



A 4.40. ábrán bemutatott szimmetrikus láncgörbe legalsó O pontja a feszítáv felénél van, amelyet az f belógás határoz meg. A $2l$ feszítávú láncgörbe legalsó pontján az S_0 belső erő nagysága a (4.48) összefüggés alapján:

4.40. ábra. Szimmetrikus láncgörbe

$$y = \frac{q_0}{S_0} \cdot \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{q_0}{S_0} \cdot \frac{l^2}{2} = f \Rightarrow S_0 = \frac{q_0 \cdot l^2}{2 \cdot f}. \quad (4.53)$$

A láncgörbe L hossza a (4.43) és (4.49) összegüggések alapján:

$$L = \int_{-x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 \cdot x}{S_0} \right)^2} \cdot dx, \quad (4.54)$$

ahol:

- $x(A) = -x_A$ és $x(B) = x_B$ az A és B pontok koordinátái, tulajdonképpen a láncgörbe legalsó pontjában felvett koordináta rendszerben a felfüggesztési pontok vízszintes távolságai.

Az integrál megoldásaként, a láncgörbe L hossza:

$$\begin{aligned} L = & \frac{x_B}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 \cdot x_B}{S_0} \right)^2} + \frac{S_0}{2 \cdot q_0} \ln \left[\frac{q_0 \cdot x_B}{S_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 \cdot x_B}{S_0} \right)^2} \right] + \\ & + \frac{x_A}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 \cdot x_A}{S_0} \right)^2} + \frac{S_0}{2 \cdot q_0} \ln \left[\frac{q_0 \cdot x_A}{S_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 \cdot x_A}{S_0} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

4.7.4. KÖZÖNSÉGES LÁNCGÖRBE

Egyenletesen megoszló terheléssel terhelt kötél látható a 4.41. ábrán, alakja közönséges láncgörbe. Ilyen alakja van pl. a magasfeszültségű távvezetéknek.

Az egységnyi q_0 terhelés esetén, a kötél elemi ds hosszának súlya:

$$dQ = q_0 \cdot ds, \quad (4.56)$$

az egységnyi terhelés vízszintes dx hosszön:

$$q(x) = \frac{dQ}{dx} = q_0 \cdot \frac{ds}{dx}. \quad (4.57)$$

Behelyettesítve a (4.57)-et a (4.40)-be, a láncgörbe differenciálegyenlete:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q_0}{S_0} \cdot \frac{ds}{dx}, \quad (4.58)$$

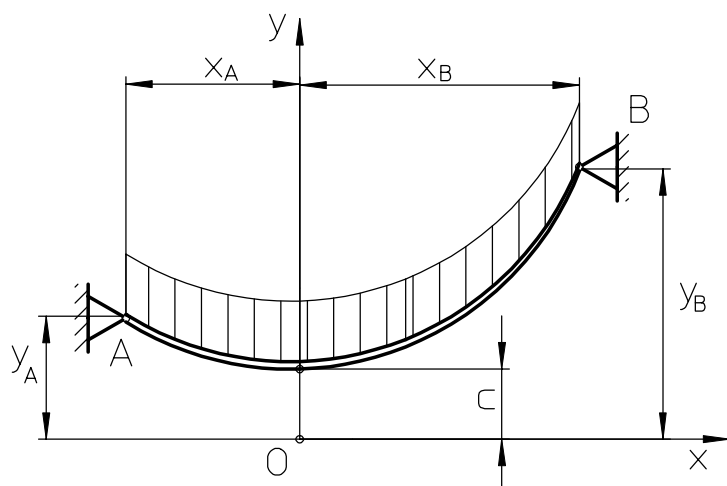
figyelembe véve (4.42)-öt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (4.59)$$

ahol:

$$c = \frac{S_0}{q_0} = \text{const}, \quad (4.60)$$

c -a láncgörbe paramétere.



4.41. ábra. Közönséges láncgörbe

Az S_0 vízszintes erő és a kötel q_0 megoszló terhelése állandó mennyiségek, ugyanígy a láncgörbe paramétere is állandó, mértéke hosszúság. A láncgörbe egyenlete legegyszerűbben a c paraméterrel függőlegesen eltoltt koordináta rendszerben definiálható, (amely megengedett, hiszen a paraméternek a mértéke hosszúság) bemutatva a 4.41. ábrán. Ebben az új koordináta rendszerben a határértékek megváltoztak, újabb alakjaik a következők:

$$y(0) = c, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0, \quad (4.61)$$

Az új határértékekkel megoldott differenciálegyenlet, bevezetve egy új változót $u = dy/dx$ alakban, a láncgörbe egyenlete következőként alakul:

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{c} \cdot dx, \quad (4.62)$$

amelynek integrálja:

$$u = sh\left(\frac{x}{c} + C_1\right),$$

illetve:

$$\frac{dy}{dx} = sh\left(\frac{x}{c} + C_1\right), \quad (4.63)$$

ahol:

- C_1 integrálási állandó,
- $sh(v)$ szinuszhiperbolikus függvény, amelynek alakja a v független változóra:

$$sh(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{2},$$

mégegyszer integrálva a (4.63) összefüggést:

$$y = ch\left(\frac{1}{c} + C_1\right) + C_2, \quad (4.64)$$

ahol:

- C_2 integrálási állandó,
- $ch(v)$ koszinuszhiperbolikus függvény, amelynek alakja a v független változóra:

$$ch(v) = \frac{e^v + e^{-v}}{2},$$

A (4.61) határértékek figyelembevételével az integrálási állandók értékei:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad (4.65)$$

és a közönséges láncgörbe egyensúlyi helyzetben:

$$\boxed{y = c \cdot ch \frac{x}{c}}. \quad (4.66)$$

A fenti egyenletből meghatározható a közönséges láncgörbe hossza L . A (4.43) és (4.66) összefüggések alapján:

$$L = \int_{-x_A}^{x_B} c \cdot ch \frac{x}{c} = c \cdot \left(sh \frac{x_B}{c} + sh \frac{x_A}{c} \right). \quad (4.67)$$

A láncgörbe metszetében ható erő a (4.36) alapján:

$$S = \frac{S_0}{\cos \alpha} = S_0 \cdot \sqrt{1 + tg^2 \alpha} = S_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}. \quad (4.68)$$

A (4.60) és (4.66) összefüggéseket behelyettesítve a (4.68)-ba, és kihasználva a szinuszhiperbolikus és koszinuszhiperbolikus függvény közötti összefüggést, melynek alakja:

$$ch^2(v) - sh^2(v) = 1, \quad (4.69)$$

a láncgörbének metszetében kapott erő:

$$\boxed{S = q_0 \cdot y}. \quad (4.70)$$

A láncgörbében fellépő belső erő arányos a függőleges y koordinátával. Ennek a kifejezésnek segítségével meghatározhatók a felfüggesztési pontokban (A és B) fellépő erők, amelyek tulajdonképpen a támaszok reakciói:

$$S_A = F_A = q_0 \cdot y_A, \quad S_B = F_B = q_0 \cdot y_B, \quad (4.71)$$

ahol:

- y_A és y_B a kötélfelfüggesztési pontjainak függőleges koordinátái.

5. NEMIDEÁLIS TÁMASZOK

A merev test eddigi egyensúlyi vizsgálatánál minden esetben, az érintkező felületek ideálisan sík felületek voltak. Az ilyen, feltételezett ideális felületek reakciói, mindig a két felület közös érintőjének irányában hatnak az érintkezési pontban.

Valós folyamatoknál a felületek sohasem teljesen símák, hanem érdesek. Az érintkezőfelületek érdességéből adódóan, amennyiben az egyik elmozdul a másikon, olyan mechanikus hatások jelentkeznek, amelyek az elmozdulást megnehezítik. **Ennek a folyamatnak, amely két felület egymáson történő elmozdulásakor jelentkezik, neve csúszósúrlódás.** Maga a folyamat egy összetett fizikai jelenség, amely közben a felületek felmelegedése, elektromos feltöltése, az egyenetlenségek töredezése, anyagátvitel stb. jön létre. A valós testek gördüléskor valós (érdes) felületen, illetve egy másik test felületén történő forgásukkor, az érintkezési pontban szintén jelentkezik ellenállás a gördüléssel, valamint forgással szemben.

A csúszósúrlódás a test haladó mozgásával szemben súrlódóerőt, a gördülés ellen viszont gördülőellenállást (gördülő súrlódást) fejt ki.

5.1. CSÚSZÓSÚRLÓDÁS

A csúszósúrlódás törvényeit elsőnek *Coulomb* (1736 - 1806) határozta meg, amelyek így szólnak:

1. Egy test elmozdulásával egy másik test felületén, az érintkezőfelületeken \vec{F}_T súrlódóerő lép fel, amelynek nagysága nullától egy maximális értékig változik, amely a **súrlódóerő határértéke** (F_{gr}).

$$0 \leq F_T \leq F_{gr}.$$

A csúszósúrlódóerő értelme mindenkor a külső erők kiváltotta mozgás irányával ellentétes értelmű.

2. **A súrlódóerő határértékének nagysága (intenzitása) a csúszósúrlódási tényező és a felületek közötti normális nyomás szorzata.**

$$F_\mu = F_{gr} = \mu \cdot R_N, \quad (5.1)$$

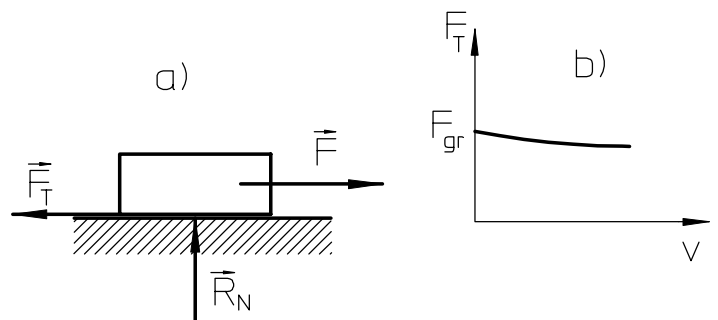
ahol:

- μ a súrlódás tényezője,
- R_N normális nyomás.

A csúszósúrlódás tényezője csak kísérleti úton határozható meg. A súrlódás tényezőjének értékére kihatással van: az érintkező testek anyaga, a felületek állapota (elsősorban érdessége), a hőmérséklet, a felületek közti kenőanyag stb.

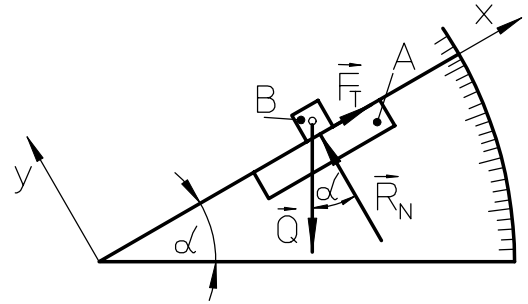
3. **A súrlódóerő F_μ nagysága nem függ az érintkezőfelületek nagyságától.**

Ha egy nyugalomban levő testre amely egy érdes felületen fekszik \vec{F} erő hat (5.1. a. ábra), ekkor az érintkezőfelületeken \vec{F}_T súrlódóerő lép fel amelynek értelme a mozgással ellentétes. A súrlódóerő értéke nullától, legnagyobb értékéig a súrlódóerő határértékéig F_{gr} növekszik, a test elmozdulásakor értéke kissé visszaesik a nyugvásbeli értékéhez képest, ahogy az az 5.1. b) ábrán ábrázolt függvényről látszik, az A test sebességének v változásával.



5.1. ábra. Test mozgása érdes felületen

A súrlódás μ tényezőjének mérésére az u.n. tribométer szolgál (5.2. ábra). A műszer egy változtatható hajlásszögű lejtőből áll, amelyen a hajlásszög pontosan mérhető. Az A alapra amely egy változtatható betét, rá kell helyezni a vizsgált B anyagból készült testet, majd a lejtőt fokozatosan emelni kell mindaddig, amíg a B test el nem mozdul, és ekkor kell leolvasni az α szöget. A B testre ható erők a következők: a test súlya \vec{Q} , a normális reakció \vec{R}_N és a súrlódóerő \vec{F}_T . Az ábrán látható koordináta rendszerre vonatkoztatva az egyensúlyi egyenletek alakjai:



5.2. ábra. Tribométer

$$\sum F_{ix} = F_T - Q \cdot \sin \alpha = 0, \quad \sum F_{iy} = R_N - Q \cdot \cos \alpha = 0.$$

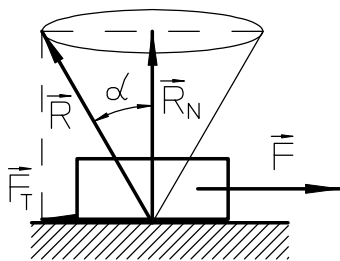
Mivel az α szög közvetlenül a megcsúszás előtt lett leolva, a súrlódóerő is ekkor érte el maximális (határ) értékét, vagyis $F_T = F_\mu = \mu \cdot R_N$. Az egyenletet megoldva, felírható a következő összefüggés:

$$\boxed{\mu = \operatorname{tg} \alpha}, \quad (5.2)$$

amely a csúszósúrlódási tényező értékét és az α szög kapcsolatát mutatja. Az α szög a **súrlódási határszög**. A súrlódási tényező értékei különböző anyagokra megtalálhatók a szakirodalomban, ezek közül néhány:

Anyagok	μ súrlódási tényező
fa - fa	0,54 ÷ 0,62
fém - fém	0,15 ÷ 0,25
fém - jég	0,027
bőr - fém	0,47

5.2. A SÚRLÓDÁSI KÚP



5.3. ábra. Súrlódási kúp

Ha egy érdes felületen fekvő testre a felület síkjában \vec{F} erő hat (5.3. ábra), az érintkezési felületeken \vec{F}_T súrlódóerő lép fel. Ennek az erőnek nagysága:

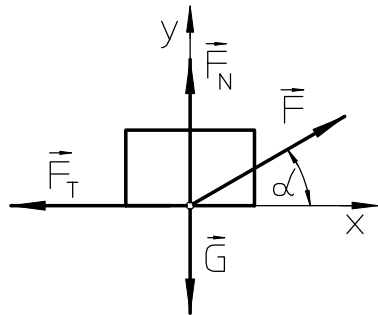
$$F_T = \mu \cdot R_N.$$

A normális \vec{R}_N erő és az \vec{R} eredőerő között bezárt szög a súrlódási határszög $\alpha = \operatorname{arctg} \mu$. Az α szöggel a normális erő köré rajzolt kúp a **súrlódási kúp**. A súrlódási kúp az eredőerő helyzetének a határesetét határozza meg, amikor a test éppen elmozdul. **Amennyiben a külső erők eredője a kúpon belül helyezkedik el-a test nyugalomban van, amennyiben az \vec{R} a kúpon kívül helyezkedik el-a test elmozdul.**

5.1. példa.

Mekkora, a vízszinteshez bezárt $\alpha = 30^\circ$ alatt ható, \vec{F} erővel kell a $G=10$ [N], súlyú testre hatni, amely vízszintes alapon fekszik 5.4. ábra hogy elmozduljon, ha a súrlódási tényező $\mu = 0,6$.

Megoldás: A testre $\vec{G}, \vec{F}, \vec{F}_N, \vec{F}_T$ erők hatnak. Az erők vetületére felállított egyensúlyi feltételek a következők:



$$1. \sum F_{ix} = F \cdot \cos \alpha - F_T = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = F_N + F \cdot \sin \alpha - G = 0.$$

A második egyenletből:

$$F_N = G - F \cdot \sin \alpha,$$

mivel:

$$F_T = \mu \cdot F_N = \eta \cdot (G - F \cdot \sin \alpha),$$

behelyettesítve az első egyenletbe:

$$F = \frac{\eta \cdot G}{\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha} \approx 5,2 \text{ [N]}.$$

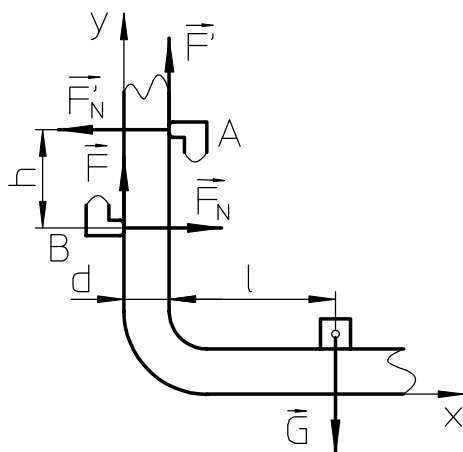
5.4. ábra. Az 5.1. példa illusztrációja

Ha a testre kisebb erő hat, pl. $F' = 4 \text{ [N]}$, ennek az erőnek a vetülete $F' \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \sqrt{3} = 3,46 \text{ [N]}$, és a maximális súrlódóerő amely ezáltal létrejöhet $F_T = \mu \cdot (G - F' \cdot \sin 30^\circ) = 4,8 \text{ [N]}$. Tehát a test nem fog elmozdulni. A súrlódóerő a testet még egyensúlyban tartja, amikor ennek az \vec{F} erőnek nagysága egyenlő az x tengelyre vett vetületével, ($F'' = F' \cdot \cos 30^\circ = 3,46 \text{ [N]}$), de nem egyenlő az F_T erővel (ettől kisebb).

Fontos megjegyezni, hogy az \vec{F}_T súrlódóerőt mindig az $F_T = \mu \cdot F_N$ összefüggésből kell meghatározni, ahol az F_N erőt az egyensúlyi egyenletek adják. Az ehhez hasonló feladatok megoldásakor tipikus hibaként szokott előfordulni még az is, hogy a számításnál a súrlódóerőt az $F_T = \mu \cdot G$ összefüggésből határozzák meg, holott a felületek közötti nyomás nem mindig egyenlő a test G súlyával.

5.2. példa.

A hajlított tartó függőleges vége az A és B támaszokon fekszik, amelyek közti távolság h (5.5. ábra). A tartó súlyát elhanyagolva, meghatározni milyen d szélességénél lesz a tartó egyensúlyban a vízszintes szárán elhelyezett terheléssel, és annak melyik helyzetében. A tartó súrlódási tényezője μ .



5.5. ábra. Az 5.2. példa illusztrációja

ahol: $F = \mu \cdot F_N, F' = \mu \cdot F'_N$. Az első és második egyenletből következik:

Megoldás: A terhelés súlya G , távolsága a tartó függőleges részétől l . A tartó egyensúlyának határesetében szélességének értéke $d = d_{gr}$. Ebben az esetben a tartóra ható erők $\vec{G}, \vec{F}_N, \vec{F}'_N, \vec{F}, \vec{F}'$, amelyek közül az \vec{F}, \vec{F}' a súrlódóerők határesetei. Az egyensúlyi egyenletek, és az A pontra vett nyomatéki egyenletek alakjai:

$$1. \sum F_{ix} = F_N - F'_N = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = F + F' - G = 0,$$

$$3. \sum M_A = F_N \cdot h - F \cdot d_{gr} - G \cdot l = 0,$$

$$F_N = F'_N, \quad G = 2 \cdot \mu \cdot F_N.$$

Behelyettesítve a kapott értékeket a harmadik egyenletbe, egyszerűsítve F_N -el:

$$h - \mu \cdot d_{gr} - 2 \cdot \mu \cdot l = 0,$$

ahonnan:

$$d_{gr} = \frac{h}{\mu} - 2 \cdot l.$$

Ha ebben az egyenletben μ értéke nulláig csökken, az egyenlet jobboldala végtelen lesz. Tehát az egyensúly bármelyik $d > d_{gr}$ távolság esetén fennáll. A d_{gr} mennyiség legnagyobb értékét $l = 0$ esetben éri el. A tartó egyensúlyban lesz a terhelés bármely helyzetében, amennyiben $l \geq 0$, és eleget tesz a következő összefüggésnek:

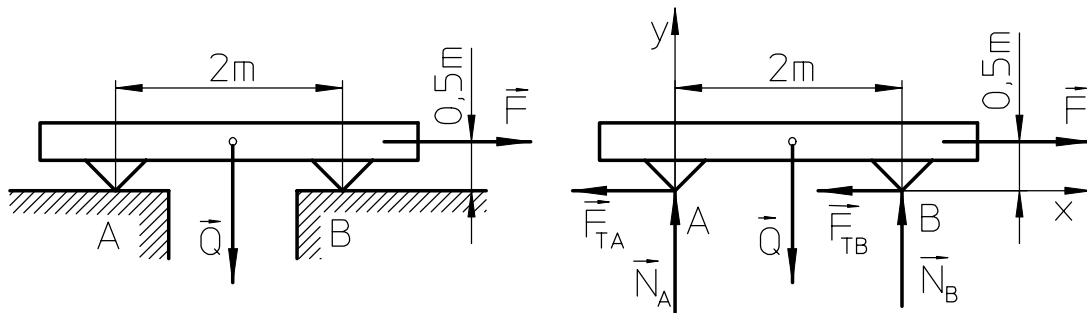
$$d \geq \frac{h}{\mu}.$$

Ha a súrlódás kisebb, a d értékét nagyobbra kell venni. Ha súrlódás nincs ($\mu = 0$), az egyensúly sem állhat fenn, mivel ebben az esetben $d = \infty$.

A feladatban bemutatott szerkezet, (amelynek egyensúlyi állapota volt a vizsgálat tárgya), a gyakorlatban sokszor alkalmazott fékezőszerkezet alapját képezi.

5.3. példa.

Az 5.6. ábrán bemutatott $Q = 380 \text{ [N]}$ súlyú szerkezet az A és B pontokban támaszkodik érdes felületen. A felületek súrlódási tényezői különbözőek, értékeik $\mu_A = 0,2$; $\mu_B = 0,4$. Meghatározni a vízszintes húzóerő \vec{F} nagyságát határesetben.



5.6. ábra. Az 5.3. példa illusztrációja

Megoldás: A szerkezetre az aktív \vec{Q} és \vec{F} erők mellett az A és B pontba \vec{N}_A és \vec{N}_B normális erők, valamint \vec{F}_{TA} és \vec{F}_{TB} súrlódóerők is hatnak. A súrlódóerők nagyságai: $F_{TA} = \mu_A \cdot N_A$, $F_{TB} = \mu_B \cdot N_B$. Az ábra szerinti koordináta rendszer alapján, az egyensúlyi egyenletek alakjai:

$$1. \sum F_{ix} = F - \mu_A \cdot N_A - \mu_B \cdot N_B = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = N_A + N_B - Q = 0,$$

$$3. \sum M_A = N_B \cdot 2 - Q \cdot 1 - F \cdot 0,5 = 0.$$

A második egyenletből:

$$N_A = Q - N_B,$$

behelyettesítve az első egyenletbe:

$$F = \mu_A \cdot N_A + \mu_B \cdot N_B = \mu_A \cdot Q - \mu_A \cdot N_B + \mu_B \cdot N_B = \mu_A \cdot Q + 0,2 \cdot N_B,$$

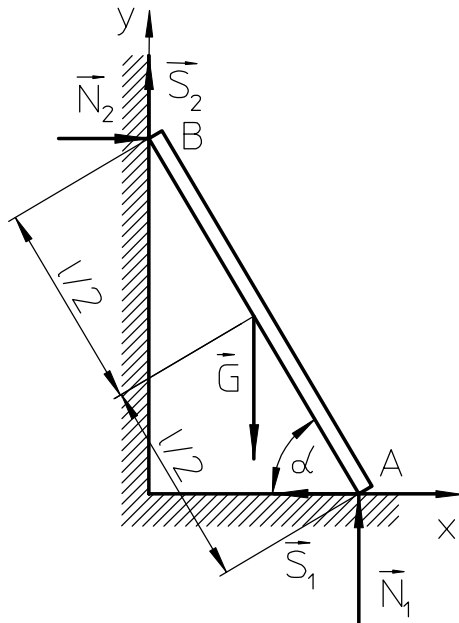
amelyből:

$$N_B = \frac{F - \mu_A \cdot Q}{0,2} = 5 \cdot F - Q,$$

behelyettesítve a harmadik egyenletbe:

$$10 \cdot F - 2 \cdot Q - Q - 0,5 \cdot F = 0 \Rightarrow 9,5 \cdot F = 3 \cdot Q \Rightarrow F = \frac{3 \cdot Q}{9,5} = \frac{3 \cdot 380}{9,5} = 120 \text{ [N]}.$$

5.4. példa.



5.7. ábra. Az 5.4. példa illusztrációja

Homogén rúd melynek súlya G , hossza $AB = l$, egyik végével vízszintes, másikkal függőleges falhoz van támasztva (létra modelje), 5.7. ábra. Az alap súrlódási tényezője μ_1 , a falmenti μ_2 . Meghatározni az α szög határértékét, amelynél a rúd még egyensúlyban van.

Megoldás: Mivel a rúd saját súlyánál fogva csak csúszhat, az S_1 és S_2 súrlódóerők értelmei az ábra szerint alakulnak. A súrlódóerők nagyságai, mivel határesetről van szó egyenlőek:

$$S_1 = \mu_1 \cdot N_1$$

$$S_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

Az egyensúlyi egyenletek:

$$1. \sum F_{ix} = N_2 - \mu_1 \cdot N_1 = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = N_1 + \mu_2 \cdot N_2 - G = 0,$$

$$3. \sum M_A = G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha - N_2 \cdot l \cdot \sin \alpha - \mu_2 \cdot N_2 \cdot l \cdot \cos \alpha = 0.$$

A harmadik egyenlet az egyszerűsítések után:

$$3. G - 2 \cdot N_2 \cdot \tan \alpha - 2 \cdot \mu_2 \cdot N_2 = 0.$$

Az első egyenletből: $N_1 = \frac{N_2}{\mu_1}$, amely behelyettesítve a másodikba: $G = \frac{N_2}{\mu_1} + \mu_2 \cdot N_2$,

behelyettesítve a harmadikba, valamint elosztva N_2 -vel:

$$\frac{1}{\mu_1} + \mu_2 - 2 \cdot \tan \alpha - 2 \cdot \mu_2 = 0,$$

a végeredmény:

$$\tan \alpha = \frac{1 - \mu_1 \cdot \mu_2}{2 \cdot \mu_1}.$$

5.3. KÖTÉLSÚRLÓDÁS

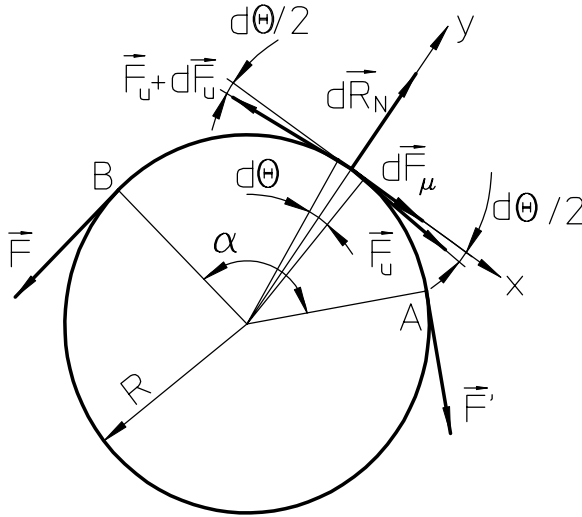
Egy érdes felületű hengeres testre fektetett kötélt esetében, amelynek egyik végére \vec{F} erő hat, egyensúlyi helyzetében meg kell határozni a másik végén ható \vec{F}' erőt (5.8. ábra).

A kötélt az A és B pontok közti íven fekszik, amelynek csúcsszőge α . A kötélt és a henger felülete közt súrlódóerő hat. Az elementáris ívhossz $dL = r \cdot d\theta$ egyensúlyát vizsgálva, amelyre a kötélt végeinél \vec{F}_u és $\vec{F}_u + d\vec{F}_u$, erők hatnak, normális reakciója $d\vec{R}_N$, valamint a súrlódóerő nagyságának határértéke $d\vec{F}_\mu$.

Az ábra szerinti koordinátatengelyekre felírt egyensúlyi egyenletek alakjai:

$$1. \sum F_{ix} = dF_\mu + F_u \cdot \cos \frac{dQ}{2} - (F_u + dF_u) \cdot \cos \frac{dQ}{2} = 0,$$

$$2. \sum F_{iy} = dR_N - F_u \cdot \sin \frac{dQ}{2} - (F_u + dF_u) \cdot \sin \frac{dQ}{2} = 0.$$



5.8. ábra. Kötélsúrlódás

Sorbafejtve a trigonometrikus függvényeket, mivel $d\theta$ kicsiny szög, a magasabbrendű mennyiségek elhagyhatók, végeredményként a színusz valamint koszinusz függvények alakjai:

$$\cos \frac{dQ}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{dQ}{2} \approx \frac{dQ}{2}.$$

Figyelembevéve a fenti összefüggéseket az egyensúlyi egyenletek alakjai:

$$1. dF_\mu + F_u - F_u - dF_u = 0 \Rightarrow dF_\mu = dF_u,$$

$$2. dR_N - 2 \cdot F_u \cdot \frac{dQ}{2} + dF_u \cdot \frac{dQ}{2} \Rightarrow dR_N = F_u \cdot dQ.$$

Mivel $dF_u \cdot \frac{dQ}{2}$ másodrendű kicsiny mennyiség

így elhagyható, a súrlódóerő határértékére felírható: $dF_\mu = \mu \cdot dR_N$, és az egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} \mu \cdot dR_N &= dF_u \\ dR_N &= F_u \cdot dQ \end{aligned} \right\} \frac{dF_u}{F_u \cdot dQ} = \mu \Rightarrow \frac{dF_u}{F_u} = \mu \cdot dQ,$$

Integrálva az egyenlet baloldalát F' és F határok között, a jobboldalt 0-tól α -ig:

$$\int_{F'}^F \frac{dF_u}{F_u} = \mu \cdot \int_0^\alpha dQ, \quad \text{az eredmény} \quad \frac{F}{F'} = e^{\mu\alpha}.$$

Az F' legkisebb értéke egyensúlyi helyzetben:

$$\boxed{F' = F \cdot e^{-\mu\alpha}} \quad (5.3)$$

ahol:

- e a természetes logaritmus alapja, értéke: $e = 2,718281$

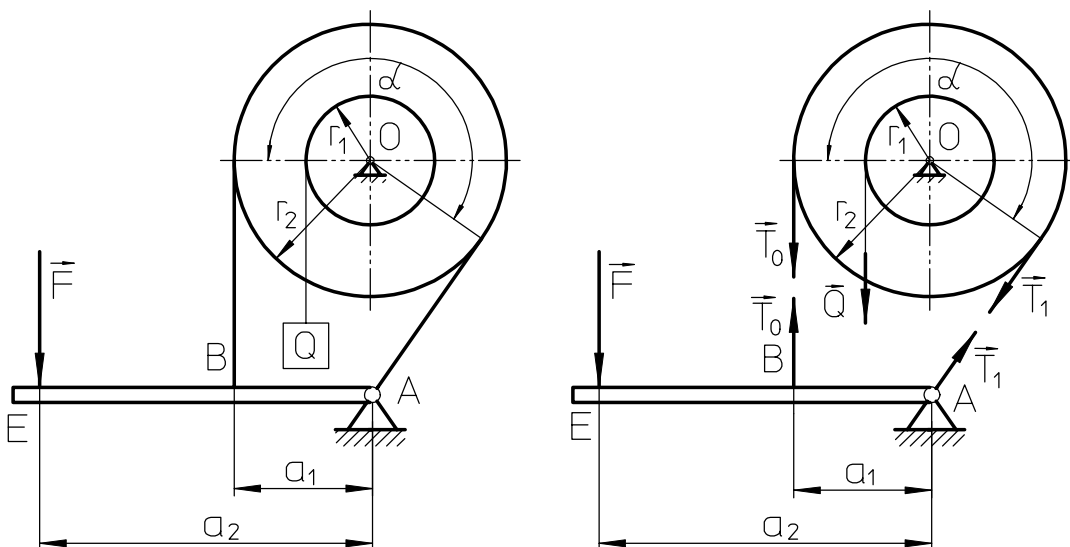
Ez az ismert Euler-féle egyenlet, amelyet a gépészetben sokszor használnak szíjátvételek számításakor. Az F' erő kizárólag a μ súrlódási tényezőtől és az α szögtől függ, a kerék R átmérőjétől nem.

Például, a fából készült henger köré csavart kötél, amelynek súrlódási tényezője $\mu = 0,33$ ha egy teljes körön van körültekerve ($\alpha = 2\pi$) végeinek húzóerejei közötti összefüggés $F = 8 \cdot F'$; ellenben ha háromszor van körülcsavarva, és súrlódási tényezője $\mu = 0,5$:

$$F = e^{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mu} \cdot F' = 2,7182^{6 \cdot \pi \cdot 0,5} \cdot F' = 12391 \cdot F', \text{ amely igencsak nagy erőt jelent.}$$

5.5. példa.

A szalagféket sokrétűen hasznosítják különféle emelőszervezetekben teher fenntartására, illetve sebességének szabályozására. Egy ilyen fék legegyszerűbb kivitele az 5.9. ábrán látható. Az r_1 átmérőjű dobra kötél van felcsévéelve, végén Q súllyal. A kötéldobbal egybe van építve az r_2 átmérőjű féktárcsa, amelynek kerületére acélszalag feszül, α kerületi szöggel. A szalag A végpontja egy álló csuklóhoz, másik B végpontja az ABE fékemelő karjához van hozzáerősítve. A fékemelő E végén a fékerő hat. Csak a fékszalag súrlódását véve alapul, mekkora az a legkisebb F fékerő, amellyel a Q teher egyensúlyban tartható?



5.9. ábra. Az 5.5. példa illusztrációja

Megoldás: A teher a dobót az óramutató járásával ellentétes irányba igyekszik forgatni, ennek a fékszalag áll ellen fékezónyomatékkal, amelyből következik, hogy a szalag A pontjában nagyobb (T_1) erő hat, mint a másik B pontjában (T_0) erő, 5.9. ábra.

Az egyensúlyi nyomatéki egyenlet (az O pontra számított nyomatékok összege):

$$1. \quad Q \cdot r_1 + T_0 \cdot r_2 - T_1 \cdot r_2 = 0.$$

A fékszalag száraiban fellépő erők viszonya, a megcsúszás határán: 2. $T_1 = T_0 \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$.

A fékemelő karjainak egyensúlya:

$$3. \quad F \cdot a_2 - T_0 \cdot a_1 = 0.$$

Az első egyenletből:

$$T_1 - T_0 = Q \cdot \frac{r_1}{r_2}, \quad \text{vagy} \quad T_0(e^{\mu \cdot \alpha} - 1) = Q \cdot \frac{r_1}{r_2},$$

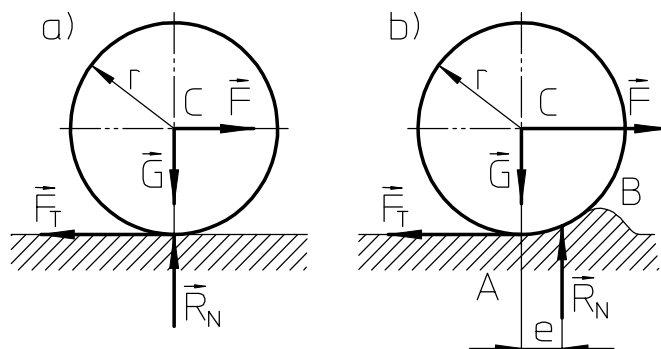
Végül a harmadik egyenletből:

$$F = T_0 \cdot \frac{a_1}{a_2} = Q \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha} - 1}.$$

Amely a fék keresett áttételi viszonya.

5.4. GÖRDÜLŐELLENÁLLÁS (GÖRDÜLÉSI SÚRLÓDÁS)

A testek gördülésekor keletkező ellenállás a gördülőellenállás.



5.10. ábra. Gördülőellenállás

Vizsgálva egy r sugarú \vec{G} súlyú henger gördülését merev érdes vízszintes alapon (5.10. a ábra), amelyhez vízszintesen ható \vec{F} erőre van szükség. Az érintkezési pontban \vec{R}_N normál reakcióerő hat, egyirányban a henger súlyával. Az egyensúlyi feltételekből adódik, hogy $\vec{F} = \vec{F}_T$ és $\vec{R}_N = \vec{G}$ amelyek egyensúlyi erők, míg az \vec{F} és \vec{F}_T erők erőpárt alkotnak, amely a henger gördülését bármilyen kis \vec{F} erővel képes elősegíteni. Természetesen ez idealizált eset, és nem felel meg a valóságnak, hiszen a valós esetekben mindenkor bizonyos nagyságú \vec{F} erő kell ahhoz, hogy a henger elmozduljon.

Valós eseteknél gördüléskor az érintkezőfelületek kissé benyomódnak (deformálódnak), ennek következményeként a kontaktus az AB íven történik (5.10. b ábra), aminek következtében a normális reakció eredője \vec{R}_N az e távolsággal eltolódik ahhoz az esethez képest, amelynél nem történt deformáció.

Az e távolság (melynek mértéke hosszúság) a gördülőellenállás karja (gördülősúrlódási tényező).

Az \vec{R}_N és \vec{G} erők a deformált felületen erőpárt alkotnak, amelynek nyomatéka $M_k = R_N \cdot e$. Ez az erőpár egyensúlyban van az \vec{F} és \vec{F}_T , erők által képezett erőpárral, amelynek nyomatéka $M_F = F \cdot r$, kiegyenlítve a nyomatékokat a legkisebb gördítő erő nagysága:

$$F_{g\ddot{o}r} = \frac{e}{r} \cdot R_N. \quad (5.4)$$

Összehasonlítva a fenti összefüggést a csúszósúrlódással $F_T = \mu \cdot R_N$ látható, hogy mindkettő arányos a normális reakcióval (felületi nyomással) R_N . Az \vec{F} húzóerőt fokozatosan növelve, két eset fordulhat elő, ezek:

1. ha $\mu < e/r$ a henger gördülés nélkül kezd csúszni,
2. ha $\mu > e/r$ a henger csúszásmentesen gördül.

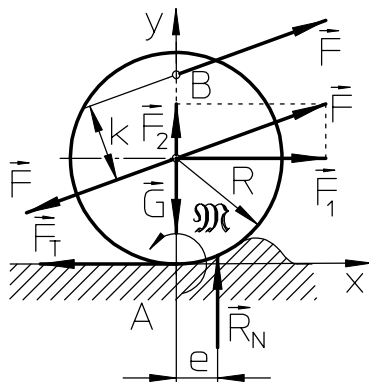
A **gördülőellenállás karja** e a gördülő pár anyagától függ, meghatározása kísérleti úton történik. A gördülőellenállás karjának nagysága egyes anyagokra következő:

fa - fán	$e = 0,05 \div 0,08$ [m]
acél - acélon (vasúti kocsikereke sinen)	$e = 0,005$ [m]
edzett acél - edzett acélon (golyóscsapágy)	$e = 0,001$ [m]

5.6. példa.

Az R sugarú \vec{G} súlyú hengerre (5.11. ábra) B pontban \vec{F} ferde erő hat. Meghatározni az \vec{F} erő határértékét, amikor a henger elkezd gördülni.

Megoldás: Az \vec{F} erő reakciójaként \vec{F}_T súrlódóerő és egy M erőpár lép fel, amely tulajdonképpen a gördülőellenállás. Redukálva az \vec{F} erőt a henger O középpontjára, az O pontban \vec{F} erő hat, és egy nyomaték, melynek nagysága $F \cdot k$. Az erőt komponenseire bontva az O pontban (vízszintes F_1 és függőleges F_2), majd felírva az egyensúlyi egyenleteket:



5.11. ábra. Az 5.6. példa illusztrációja

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{ix} &= F_1 - F_T = 0, & \text{amelyből} & F_T = F_1, \\ 2. \sum F_{iy} &= R_N + F_2 - G = 0, & \text{amelyből} & R_N = G - F_2, \\ 3. \sum M_A &= M - F \cdot k - F_1 \cdot R = 0, & \text{amelyből következik:} & \end{aligned}$$

$$M = F \cdot k + F_1 \cdot R.$$

A henger egyensúlyban van, ha:

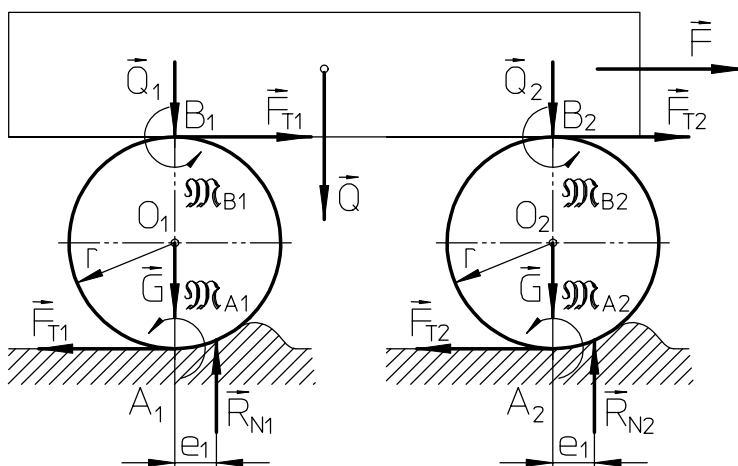
$$M = F \cdot k + F_1 \cdot R \leq R_N \cdot e,$$

ahol e a gördülőellenállás karja.

5.7. példa.

A \vec{Q} súlyú hasáb alakú test két egyforma korongon nyugszik (5.12. ábra). Az r sugarú korongok súlya \vec{G} , amelyek vízszintes alapon gördülnek. Meghatározni azt a legnagyobb vízszintes \vec{F} erőt, amely hatására a gördülés elkezdődik.

Megoldás: A \vec{Q} súly két komponensre oszlik, hengerenként \vec{Q}_1 és \vec{Q}_2 . Az \vec{F} erő a hengerekre a B_1 és B_2 pontokban \vec{F}_{T1} és \vec{F}_{T2} súrlódóerőkkel hat. A hengerek és az alap között ugyanazok a súrlódóerők jelentkeznek az A_1 és A_2 pontokban 5.12. ábra. A jelentkező gördülőellenállások M_{B1} , M_{A1} , M_{B2} , M_{A2} . Ha a gördülőellenállás karja a henger és a hasáb között e , a henger és az alap között e_1 , a megfelelő gördülőellenállások nyomatékai a két korongra:



5.12. ábra. Az 5.7. példa illusztrációja

$$M_1 = Q_1 \cdot e + (G + Q_1) \cdot e_1,$$

$$M_2 = Q_2 \cdot e + (G + Q_2) \cdot e_1.$$

A hasáb egyensúlyából következik:

$$Q_1 + Q_2 = Q, \quad \text{és} \quad F_{T1} + F_{T2} = F,$$

az első korong egyensúlyából következik:

$$M_1 = 2 \cdot F_{T1} \cdot r,$$

amásodik korong egyensúlyából következik:

$$M_2 = 2 \cdot F_{T2} \cdot r,$$

összeadva a két utóbbi egyenletet:

$$M_1 + M_2 = (F_{T1} + F_{T2}) \cdot 2 \cdot r,$$

a helyettesítések után:

$$F \cdot 2 \cdot r = Q \cdot e + (Q + 2G) \cdot e_1,$$

végül:

$$F = \frac{1}{2 \cdot r} [Q \cdot e + (Q + 2G) \cdot e_1].$$

6. ANALITIKUS STATIKA

Az eddigi fejezetekben, két mechanikai hatás az *erő és erőpár* mint *vektormennyiségek* segítségével volt meghatározva a merev test, illetve testek egyensúlyi helyzete, ezért is nevezik a statika ezen ágát *vektorstatikának*. A *vektorstatikában* használt *egyensúlyi egyenletek*, magukba foglalták *minden aktív erő és erőpár*, valamint a *támaszok reakcióit is*. Az *egyensúlyi egyenletek megoldásaként*, amelyek az egyensúlyi feltételekből adódtak, az *aktív erők és erőpárok függvényében, minden támasz reakciója is megoldást nyert*.

Sűrűn előfordul, hogy különösen összetett rendszerek (mechanizmusok, gépek) esetében ez a módszer kevésbé alkalmas, mivel a rendszer mindenegyres tagjára 6 egyensúlyi egyenletet kell felírni, amelynek megoldása, több testből álló szerkezetre nézve, nehézségekbe ütközhet. Másrészt, ilyen vizsgálatoknál elsődleges feladatként a rendszer egyensúlyi állapotában, az aktív erők és erőpárok közötti viszony meghatározása a cél, a támaszok reakcióit figyelmen kívül hagyva. *Az analitikus statika módszereivel meghatározhatók az aktív erők és erőpárok közötti viszonyok, valamint a merev testek rendszerének egyensúlyi helyzete anélkül, hogy az ideális támaszok reakcióit meg kellene határozni*. Az analitikus statika módszereivel az egyensúlyi helyzetek tulajdonságai is vizsgálhatók, felosztva stabil és instabil egyensúlyi helyzetekre. *Az analitikus statikában nem vizsgálat tárgya az erőrendszerek és erőpárrendszerek egyszerűsítése*.

A vektor statikában a mozgás fogalma ismeretlen. Ellentétben ezzel, az analitikus statikában a mozgás fogalma, tulajdonképpen a *kis elmozdulásoknak* fogalma igen nagy jelentőségű, amelyek segítségével az *erő illetve erőpár munkája* határozható meg. *Az analitikus statikában (mechanikában) a mechanikai hatás mértéke az erő illetve erőpár munkája. A mechanikai hatás mértéke az a munka, amelyet az erő és erőpár, a test térbeli elmozdulásával végez*.

Az *általános* vagy *generalizált koordináták* bevezetésével, az analitikus statika módszereivel annyi egyenletet kell megoldani, ahány *szabadságfoka* van az adott rendszernek.

A vektorstatika (a támaszok reakcióival), és az analitikus statika (a támaszok reakciói nélkül) is, a merev testek rendszerének egyensúlyi helyzetét határozza meg. Mivel ezek a módszerek, ugyanannak az egyensúlyi problémának a megoldására használt két különböző eljárást jelentenek, végeredményeiknek egybevágnaknak kell lenniök.

6.1. AZ ÁLTALÁNOS (GENERALIZÁLT) KOORDINÁTA ÉS A SZABADSÁGFOK FOGALMA

A merev testek rendszerének egyensúlyi helyzete megadható Descart-féle koordinátákkal, szögekkel, ívhosszal stb. Mindezek a *mennyiségek*, amelyek a testek, illetve ezek rendszerének *egyensúlyi helyzetét*, vagy a *mozgásállapotát a térben* meghatározzák *paramétereknek* nevezik. *A független paraméterek számát* amelyekkel egyértelműen meghatározható a merev testek rendszerének helyzete a térben, *szabadságfoknak* nevezik. Ez a szám egyúttal a merev testek rendszerének *egymásközi független elmozdulásával* egyenlő. Amennyiben a test helyzete szabadságfokának számánál több paraméterrel van megadva, abban az esetben ezek között analitikai összefüggések állnak fenn, amelyek a paraméterek egymásközi függőségét fejezik ki. Az ilyen, egymástól függő paraméterek közötti analitikai összefüggéseket *kényszeregyenleteknek* nevezik. A kényszeregyenletek legtöbb esetben a test merevségét, kötél nyújthatatlanságát, vagy a rendszerben fellelhető egyéb geometriai összefüggéseket fejezik ki.

Az olyan független paramétereket, amelyek segítségével a vizsgált merev testek rendszerének helyzete a térben egyértelműen meghatározható, és számuk megegyezik a szabadságfokok számával általános vagy generalizált koordinátáknak nevezik. Jelölésük q_α ; $\alpha = 1, 2, \dots, n$ (n -a szabadságfokok száma). A generalizált koordináták reális mennyiségek, számokkal kifejezhető értékeik vannak, valamint független geometriai jelentésük, ezek segítségével a vizsgált rendszer helyzete a térben egyértelműen meghatározott. Generalizált koordináták lehetnek: Descart-féle

koordináták, szögek, ívkoordináták stb. Minden probléma tárgyalásakor a generalizált koordináták többféle módon választhatók.

A test térbeli helyzetének vizsgálatakor, a vizsgálat alapvetően kétféle problémakörre terjedhet ki:

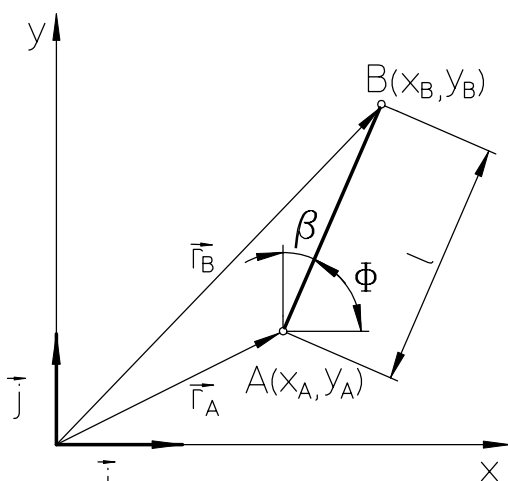
1. a test bizonyos karakterisztikus pontjainak térbeli helyzetére (amelyek helyvektorral vagy Descart-féle koordinátákkal adhatók meg),
2. a test egészének térbeli helyzetére (amely a test egy pontjával, és a test egy síkjának a koordináta-rendszer tengelyei által meghatározott síkokkal bezárt szögével adható meg).

6.1.1. PÉLDÁK GENERALIZÁLT KOORDINÁTÁK MEGHATÁROZÁSÁRA

1. Merev rúd helyzete síkban

Az xy síkban fekvő rúd helyzete két pontjának A és B koordinátaival $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ határozható meg (6.1. ábra). Mivel a rúd **merev**, hossza l változatlan, ez a tulajdonsága kifejezhető a következő **kényszeregyenlettel**:

$$l^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2. \quad (6.1)$$



6.1. ábra. Síkban fekvő rúd

$$\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j},$$

$$\vec{r}_B = x_B \cdot \vec{i} + y_B \cdot \vec{j} = (x_A + l \cdot \cos F) \cdot \vec{i} + (y_A + l \cdot \sin F) \cdot \vec{j}, \quad (6.2)$$

ahol:

- \vec{i} és \vec{j} az Ox és Oy tengelyek egységvektorai.

Amint látható, a pontok helyzetvektorai a generalizált koordináták függvényei:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(x_A, y_A, F), \quad \text{és} \quad \vec{r}_B = \vec{r}_B(x_A, y_A, F).$$

Alapul véve β a szöget (a rúd és az y tengely iránya közti szög), amely szintén kifejezhető a generalizált koordináták függvényében, alakja:

$$\beta = \beta(x_A, y_A, F), \text{ odnosno } \beta = \frac{\pi}{2} - F. \quad (6.3)$$

Kifejezve a (6.1) kényszeregyenlet generalizált koordinátákkal (6.2) alapján:

$$\begin{aligned} l^2 &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 = \\ &= \left[(x_A + l \cdot \cos F) \cdot \vec{i} + (y_A + l \cdot \sin F) \cdot \vec{j} - (x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j}) \right]^2 = \\ &= (l \cdot \sin F \cdot \vec{j} + l \cdot \cos F \cdot \vec{i})^2 = l^2 \cdot \sin^2 F \cdot \vec{j}^2 + 2 \cdot l^2 \cdot \sin F \cdot \cos F \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + l^2 \cdot \cos^2 F \cdot \vec{i}^2 = \end{aligned}$$

mivel:

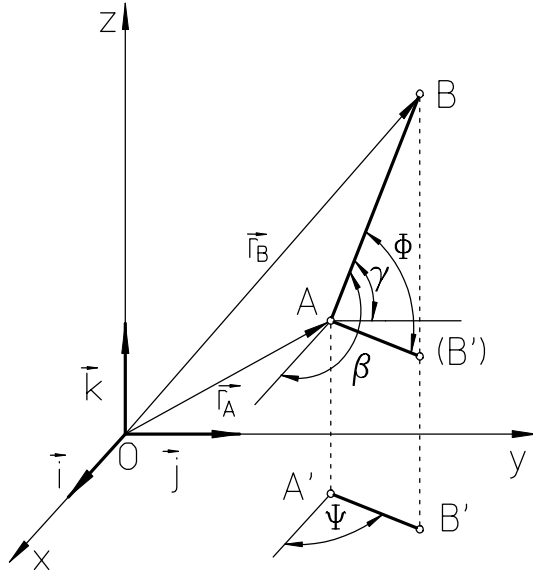
- $\vec{j}^2 = 1$ és $\vec{i}^2 = 1$ egységvektorok,
- $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ amelyek egymásközt merőlegesek, a kifejezés végleges alakja:

$$l^2 \cdot (\sin^2 F + \cos^2 F) = l^2, \quad \text{vagy} \quad l^2 = l^2 \Rightarrow 0 = 0.$$

Amiből következik, hogy a kényszeregyenlet helyes, így ennek a feladatnak a vizsgálata egyszerűbben elvégezhető generalizált koordináták segítségével mint Descart-féle koordinátákkal.

2. Merev rúd helyzete térben

A térbeli merőleges xyz Descart-féle koordinátarendszerben (6.2. ábra), elhelyezkedő rúd helyzete egyértelműen definiált az A és B végpontjainak koordinátaival $A(x_A, y_A, z_A)$ és $B(x_B, y_B, z_B)$. A rúd merevségéből adódó kényszeregyenlet alakja:



6.2. ábra. Térbeli rúd

$$l^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \quad (6.4)$$

amelyből az látszik, hogy a koordináták nem függetlenek. Bármelyik kifejezhető a másik *öt* segítségével, amelyek *függetlenek*. A *térbeli rúdnak* ezek szerint *öt szabadságfoka van* $n = 5$.

Generalizált koordinátaként pl. egy pont koordinátái $A(x_A, y_A, z_A)$, valamint két szög, amelyek közül az első a Φ szög, a rúd iránya és a vízszintes sík, a második a Ψ szög, a rúd vízszintes vetülete és az x tengellyel bezárt szögek (6.2. ábra). Az A és B pontok helyzetvektorai:

$$\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_B = x_B \cdot \vec{i} + y_B \cdot \vec{j} + z_B \cdot \vec{k}, \text{ kifejezve generalizált koordinátákkal:}$$

$$\vec{r}_B = (x_A + l \cdot \cos F \cdot \cos Y) \cdot \vec{i} + (y_A + l \cdot \cos F \cdot \sin Y) \cdot \vec{j} + (z_A + l \cdot \sin F) \cdot \vec{k}. \quad (6.5)$$

A rúd iránya és az x tengely irányával bezárt β szög szintén kifejezhető generalizált koordinátákkal, következőképpen:

1. a rúd közvetlen vetítésével az x tengelyre:

$$AB_{(x)} = l \cdot \cos \beta,$$

2. ugyanez megkapható, a rúd vízszintes síkbani vetületének mégegyszeri vetítésével az x tengelyre:

$$AB_{(x)} = l \cdot \cos F \cdot \cos Y.$$

A vetületek egyenlőségéből adódóan:

$$\beta = \arccos(\cos F \cdot \cos Y). \quad (6.6)$$

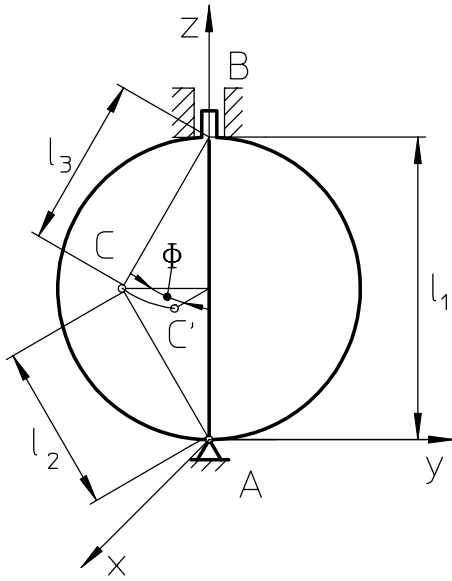
Ami ugyancsak azt jelenti, hogy a szög a generalizált koordináták függvénye. Bizonyítható a rúd és az y tengely közti γ szög is, melynek alakja:

$$\gamma = \arccos(\cos F \cdot \sin Y). \quad (6.7)$$

Behelyettesítve a (6.5) összefüggést a (6.4)-be, mivel $\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, az eredmény $0 = 0$, amely a kényszeregyenlet helyességét bizonyítja.

3. Test melynek mozgása korlátozott

Az A pontban gömbcsuklóhoz, a B pontban vezetőhöz kötött test 6.3. ábra, mozgása korlátozott. A test térbeli helyzetét három, nem ugyanazon az egyenesen elhelyezkedő pont meghatározza, így az A és B pontok mellett még egy az AB egyenesen kívüleső C pont elegendő. Az A pontba helyezett xyz koordináta rendszerre, melynek z tengelye a B ponton halad keresztül, a pontok koordinátái ($x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$) közti kényszeregyenletek, mivel a pontok közti távolságok állandóak (merev test), a következőképpen írhatók fel:



6.3. ábra. Test kényszerekkel korlátozott mozgása

1. $x_A = 0,$
2. $y_A = 0,$
3. $z_A = 0,$
4. $x_B = 0,$
5. $y_B = 0,$
6. $l_1^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2,$
7. $l_2^2 = \vec{AC} \cdot \vec{AC} = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2,$

8.

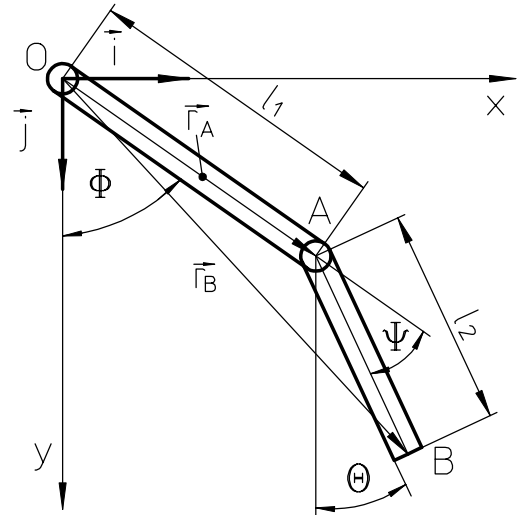
$$l_3^2 = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2,$$

Az A, B, C pont kilenc koordinátája nyolc kényszeregyenlettel kapcsolódik, tehát a **független koordináták száma egy**, ami azt jelenti, hogy az ilyen test **szabadságfoka egy** $n=1$, ami tulajdonképpen a **z álló tengely körüli forgás**. A test álló tengely körüli forgómozgásának helyzete **egy generalizált koordinátával meghatározható**, a Φ forgásszöggel.

4. Merev rudak rendszere

Adott két OA és AB síkban elhelyezkedő rúd, melyek az A pontban csuklóval kapcsolódnak (6.4. ábra). Az OA rúd hossza l_1 , és végével álló csuklóhoz kapcsolódik az O pontban, az AB rúd hossza l_2 . Az O pontba helyezett xy koordináta rendszerben, a rudak helyzete három ponttal adott (O, A, B). A pontok koordinátái $x_O, y_O, x_A, y_A, x_B, y_B$. Az O kezdőpontú koordinátarendszerben, merev rudak esetén, felírhatók a következő kényszeregyenletek:

1. $x_O = 0,$
2. $y_O = 0,$
3. $l_1^2 = \vec{OA} \cdot \vec{OA} = x_A^2 + y_A^2,$
4. $l_2^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$



6.4. ábra. Két merev rúd

A koordináták száma 6, a kényszeregyenletek száma 4, így a független koordináták száma 2. A rendszernek két szabadságfoka van $n = 2$. Független koordinátaként bármely, az x_A, y_A, x_B , és y_B koordináták közül kiválasztható, de választható másik két paraméter is, pl. a Φ és Ψ szögek, amelyek ekkor **generalizált koordináták**. Az \vec{r}_A és \vec{r}_B helyzetvektorokat a **generalizált koordináták segítségével kell kifejezni**. Ha a Φ és Ψ szögek a generalizált koordináták, a helyzetvektorok következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned}\vec{r}_A &= l_1 \cdot (\sin F \cdot \vec{i} + \cos F \cdot \vec{j}), \\ \vec{r}_B &= \vec{r}_A + l_2 \cdot [\sin(F - Y) \cdot \vec{i} + \cos(F - Y) \cdot \vec{j}].\end{aligned}\quad (6.10)$$

A pontok koordinátái, (amelyek tulajdonképpen az \vec{i} és \vec{j} egységvektorok koeficiensei a (6.10) összefüggésben), úgyszintén a Φ és Ψ generalizált koordináták funkciói:

$$\begin{aligned}x_A &= l_1 \cdot \sin F, & y_A &= l_1 \cdot \cos F, \\ x_B &= l_1 \cdot \sin F + l_2 \cdot \sin(F - Y), & y_B &= l_1 \cdot \cos F + l_2 \cdot \cos(F - Y).\end{aligned}\quad (6.11)$$

A rudak y tengellyel bezárt szögei szintén kifejezhetők a generalizált koordináták függvényeként:

$$\Phi = \Phi, \quad \Theta = \Phi - \Psi. \quad (6.12)$$

A fenti példák alapján leszögezhetők:

1. Merev testek helyzete a térben megadható a testek szabadságfokánál számosabb paraméterrel. Ebben az esetben, mivel a test helyzetét független paraméterekkel kell meghatározni, fel kell állítani a paraméterek közötti analitikus összefüggéseket, tehát kényszeregyenleteket. Ezek segítségével minden paraméter kifejezhető a független paraméterek függvényében. Az össz paraméterek számának és a kényszeregyenletek számának különbsége adja a test szabadságfokát, amely megegyezik a független paraméterek számával.
2. Bevezetve a generalizált koordinátákat, amelyeknek száma megegyezik a test szabadságfokával, a kényszeregyenletek kielégítettek, a test helyzete a térben egyértelműen meghatározott. A vizsgálat további részében, a támaszokat figyelmen kívül lehet hagyni.
3. Bevezetve a generalizált koordinátákat, a rendszer pontjainak helyzetvektorai, de a testek térbeli helyzetét meghatározó szögek is a generalizált koordináták függvényei.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_\alpha). \quad (6.13)$$

$$F_k = F_k(q_\alpha). \quad (6.14)$$

ahol:

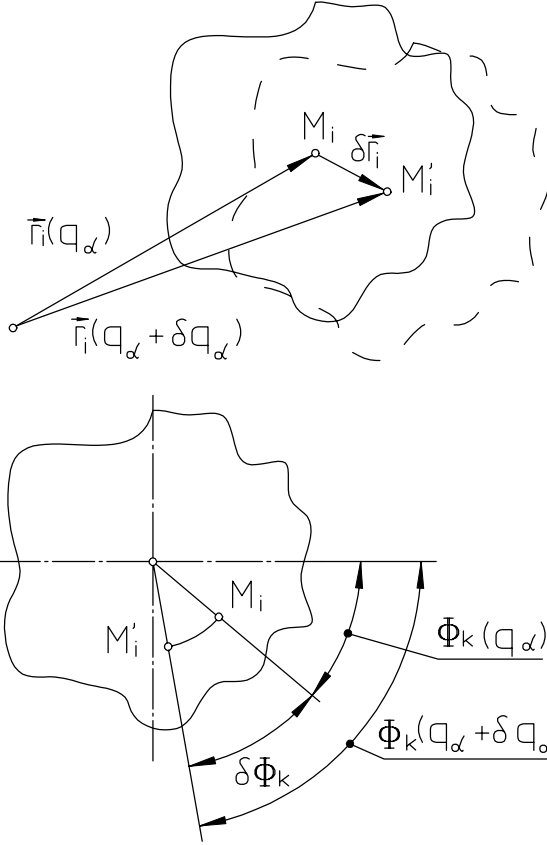
- $i = 1, 2, \dots, N$ a pontok száma,
- $\alpha = 1, 2, \dots, n$ a szabadságfok száma,
- $k = 1, 2, \dots, M$ a szögek száma.

6.2. A VIRTUÁLIS ELMOZDULÁS ÉS ELFORDULÁS FOGALMA

A merev testek térbeli helyzete valós helyzet, amely a q_α generalizált koordinátákkal meghatározott. **Virtuális mozgás** fogalma alatt olyan, az időtől független nagyon csekély mozgás értendő, tehát a rendszer **tisztán geometriai mozgása**, amelyet támaszai lehetővé tesznek.

Ha δq_α a generalizált koordináták végtelen kis változását jelöli, amit virtuális (kinematikailag lehetséges) mozgás (elemi elmozdulás) vált ki, a rendszer átrendeződésével egy nagyon közeli helyzetbe, összhangban a támaszokkal, az új helyzet a generalizált koordináták új értékeivel definiálható, amelyek alakja $q_\alpha + \delta q_\alpha$, ahol δq_α a független virtuális változást jelöli.

A merev testnek két alapmozgása ismert, a haladó mozgás és forgómozgás álló tengely körül.



6.5. ábra. Virtuális elmozdulás és virtuális elfordulás

Ha $\delta \vec{r}_i$ a rendszer M_i pontjának végtelenül kis elmozdulásvektora, $\delta \Phi_k$ pedig egy végtelenül kicsi álló tengely körüli elfordulás szöge, amelyek a rendszer valós helyzetéhez képest egy közeli, a kényszerekkel összeférő, új helyzetében jellemzik a rendszert (6.5.ábra), a következőképpen alakulnak:

$$\delta \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_\alpha + \delta q_\alpha) - \vec{r}_i(q_\alpha), \quad (6.15)$$

$$\delta F_k = F_k(q_\alpha + \delta q_\alpha) - F_k(q_\alpha). \quad (6.16)$$

A $\delta \vec{r}_i$ vektor az M_i pont **virtuális** vagy lehetséges **elmozdulása**, a $\delta \Phi_k$ pedig a test **virtuális** vagy lehetséges **elfordulása** álló tengely körül. Ezek a mennyiségek a következőképp fejezhetők ki:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha, \quad (6.17)$$

$$\delta F_k = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha, \quad (6.18)$$

ahol:

- $i = 1, 2, \dots, N$ a test pontjainak száma,
- $\alpha = 1, 2, \dots, n$ szabadságfokok száma,
- $k = 1, 2, \dots, M$ elfordulási szögek száma,
- q_α generalizált koordináta.

A vektorok vagy skalárok virtuális változásai megkaphatók (kiszámíthatók) **mint differenciálok (deriváltak)**, ahol a d jelet a ∂ variáció jele váltja fel azért, mert a virtuális elmozdulások időtől függetlenek.

A virtuális elfordulás is kezelhető vektorként, hozzárendelve $\delta \vec{F}_k$ vektort, amelynek alakja:

$$\delta \vec{F}_k = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial \vec{F}_k}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha, \quad (6.19)$$

ez a vektor az elfordulás tengelye irányában fekszik, értelme (nyila) abba az irányba mutat, amelyből a $\delta \Phi_k$ elfordulás pozitívnak látszik (a nyíllal szembe fordulva az óramutató járásával ellentétes irány).

6.3. VIRTUÁLIS MUNKÁ

A virtuális munka az erő illetve erőpár munkája virtuális elmozdulása illetve elfordulása folytán. Az analitikus mechanikában a virtuális munka az erő illetve erőpár mechanikai hatásának mértéke. Az erő virtuális munkát végez támadáspontjának virtuális elmozdulása folytán, míg az erőpár a merev test virtuális elfordulása folyamán. A virtuális munka az erő és az erőpár hatásának mértéke, merev test térbeli elmozdulásakor. **A munka skaláris mennyiség.**

6.3.1. ERŐ VIRTUÁLIS MUNKÁJA

Ha a test M pontjában, melynek helyzete \vec{r} helyzetvektorral adott az O ponthoz képest, \vec{F} erő hat és ha a pont virtuális elmozdulása $\delta\vec{r}$, az **erő virtuális munkája** ezen az elmozduláson egyenlő:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}, \quad (6.20)$$

vagy

$$\delta A = F \cdot \delta r \cdot \cos \alpha, \quad (6.21)$$

ahol:

- α az \vec{F} és $\delta\vec{r}$ között bezárt szög.

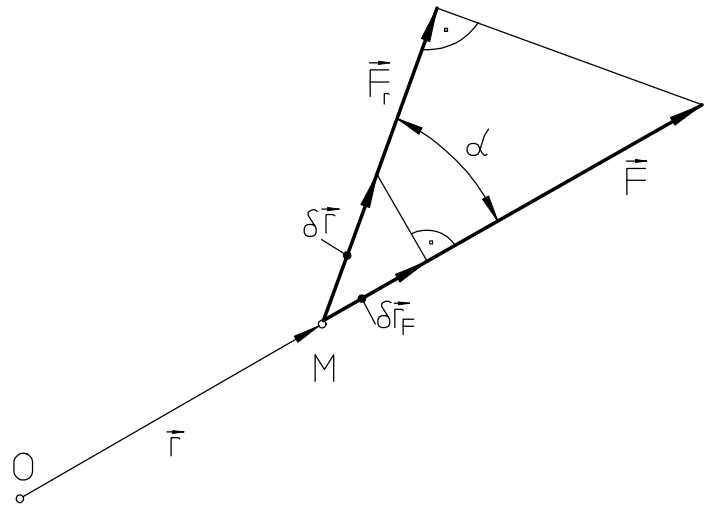
A virtuális munka többféleképpen kifejezhető (6.6. ábra):

1. A virtuális elmozdulás vetítésével az erő hatásvonalára

Ekkor felírható:

$$\delta r_F = \delta r \cdot \cos \alpha, \quad (6.22)$$

a virtuális munka alakja:



6.6. ábra. Az erő virtuális munkája

$$\delta A = F \cdot \delta r_F = F \cdot \delta r \cdot \cos \alpha. \quad (6.23)$$

A virtuális munka az F erő nagyságának, és irányában történt δr_F elmozdulásnak szorzata.

2. Az erő vetítése az elmozdulás irányára

Ekkor:

$$F_r = F \cdot \cos \alpha, \quad (6.24)$$

a virtuális munka:

$$\delta A = F_r \cdot \delta r = F \cdot \cos \alpha \cdot \delta r. \quad (6.25)$$

A munka pozitív, ha az erő vetülete és az elmozdulás irányai egyirányúak (hegyesszög), ellenkező irányoknál (tompaszög) a munka előjele negatív.

3. Ha az M pont \vec{r} helyzetvektora Descart-féle koordinátákkal adott

A merev test helyzetvektorának alakja:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (6.26)$$

ekkor:

$$\delta \vec{r} = \delta x \cdot \vec{i} + \delta y \cdot \vec{j} + \delta z \cdot \vec{k}, \quad (6.27)$$

a virtuális munka:

$$\delta A = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z, \quad (6.28)$$

ahol:

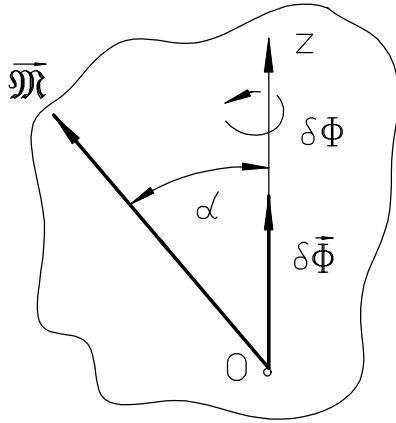
- F_x, F_y, F_z az erő vetületei, Descart-féle koordinátarendszer tengelyeire.

Ha a merev testre az M_i pontokban N számú F_i erő hat, amelyeknek virtuális elmozdulásaik δr_i -k, az össz virtuális munka, az erők virtuális munkáinak algebrai összegével egyenlő:

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i. \quad (6.29)$$

A munka mértékegysége a Joule- ez a munka egyenlő azzal a munkával, amelyet egy Newton erő, egy méteres elmozdulás alatt végez el.

6.3.2. ERŐPÁR VIRTUÁLIS MUNKÁJA



6.7. ábra. Erőpár virtuális munkája

Ha a testre \vec{M} erőpár hat, és a test z tengely körüli virtuális elfordulása $\delta \vec{F}$ vektor, amely a tengely irányában hat, és az \vec{M} vektort az O pontban metszi (6.7. ábra), az erőpár ezen elfordulása alatt végzett virtuális munkája az \vec{M} és $\delta \vec{F}$ vektorok skaláris szorzatával egyenlő:

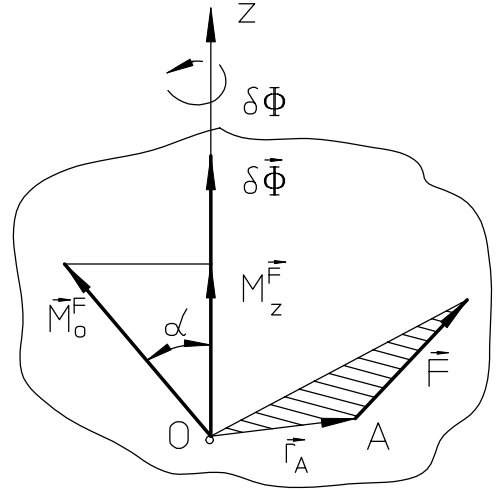
$$\delta A = \vec{M} \cdot \delta \vec{F} \quad (6.30)$$

Ha az \vec{M} vektor és a z tengely között bezárt szög α (6.7. ábra), az elfordulás virtuális munkája:

$$\delta A = M \cdot \delta F \cdot \cos \alpha. \quad (6.31)$$

Ha a testre \vec{F} erő hat (6.8. ábra), az erő z tengelyre vonatkoztatott forgatóhatásának mértéke, az erő z tengelyre számított nyomatéka $M_z^{\vec{F}}$. Ekkor az \vec{F} erő virtuális munkája a z tengely körüli $\delta \Phi$ virtuális elfordulás következtében:

$$\delta A = M_z^{\vec{F}} \cdot \delta \Phi \quad (6.32)$$



6.8. ábra Az erő nyomatékának virtuális munkája

6.4. IDEÁLIS TÁMASZOK

Az analitikus statikában az erők és erőpárok hatása, valamint a támaszok reakciói is, az általuk végzett munkával mérhető, amelyet a lehetséges (virtuális) elmozdulásokon, amelyeket a támaszok megengednek, végeznek.

Ha a merev testek rendszere felszabadul minden támasztól (beleértve belső és külső támaszokat is), amelyeknek hatását megfelelő reakciók helyettesítik (\vec{R}_i erők és \vec{M}_k erőpárok), ezeknek száma megegyezik a rendszerben található testek számával. Amennyiben az M_i pontok, amelyekben erők hatnak, virtuálisan elmozdulhatnak (a támaszokkal összhangban) $\delta \vec{r}_i$ nagysággal, a testeknek amelyekre erőpárok hatnak virtuális elfordulásuk $\delta \vec{F}_k$, a támaszok reakcióinak (\vec{R}_i erők és \vec{M}_k erőpárok) össz virtuális munkája egyenlő:

$$\delta A^R = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{k=1}^M \vec{M}_k \cdot \delta \vec{F}_k, \quad (6.33)$$

ahol:

- $i = 1, 2, \dots, N$ az erők száma,
- $k = 1, 2, \dots, M$ az erőpárok száma.

A támaszok akkor ideálisak, ha reakcióik munkája egyenlő nullával, vagyis:

$$\delta A^R = 0. \quad (6.34)$$

Amennyiben a (6.43) összefüggés nem áll fenn, a támasz nem ideális, ebben az esetben reakcióját a rendszerre ható aktív erők és erőpárok hatásához hozzá kell rendelni.

Példák ideális támaszokra

1. Súlytalan merev rúd

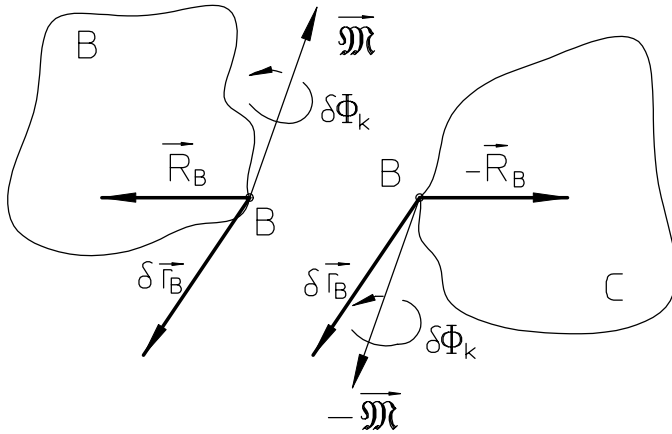
Az AB merev rúd, végeivel csuklósan csatlakozik két testhez (6.9. ábra). Kikittatva a rudat, hatása helyettesíthető az \vec{R} és $-\vec{R}$ erővel a rúd irányvonalában. Az A és B pontok $\delta \vec{r}_A$ és $\delta \vec{r}_B$ virtuális elmozdulásával a virtuális munka összege:

$$\delta A^R = R \cdot (\delta r_A \cos \alpha - \delta r_B \cos \beta), \quad (6.35)$$

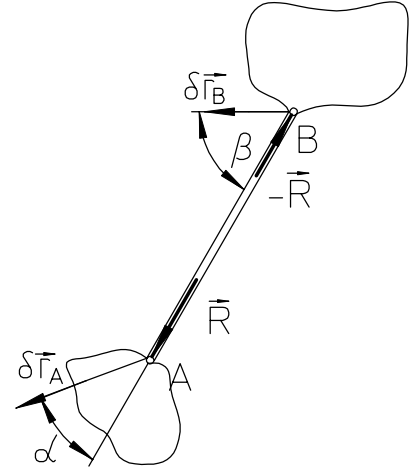
amely akkor lesz egyenlő nullával, ha a rúd merev, mert ekkor a rúd végein történt elmozdulások vetületei a rúd irányvonalára egyenlőek.

Ezek szerint a merev, végein csuklókkal csatlakoztatott rúd ideális támasz.

2. Álló és görgős hengeres csukló, valamint befogás



6.10. ábra Hengeres csukló



6.9. ábra. Merev rúd

Adott a B és C test amelyek álló, illetve görgős csuklóval kapcsolnak, vagy be vannak fogva (6.10. ábra). FeltételeSEN a támasznak $\delta \vec{r}_B$ virtuális elmozdulása, illetve tengely körül $\delta \vec{F}_k$ elfordulása van a térben. Felszabadítva a támaszt a B pontban két \vec{R}_B és $-\vec{R}_B$ reakcióerő, valamint két \vec{M}_k és $-\vec{M}_k$ erőpár hat a B és C testekre.

Tekintettel arra, hogy a csukló virtuális $\delta \vec{r}_B$ elmozdulása és $\delta \vec{F}_k$ elfordulása is a térben mindkét B és C testre vonatkoztatva ugyanakkora, így virtuális munkájuk összege nulla:

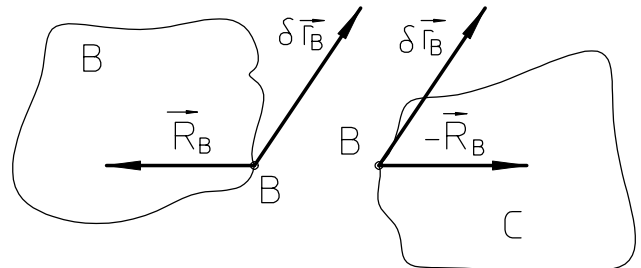
$$\delta A^R = \vec{R}_B \cdot \delta \vec{r}_B - \vec{R}_B \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{M}_k \cdot \delta \vec{F}_k - \vec{M}_k \cdot \delta \vec{F}_k = 0. \quad (6.36)$$

Ennek alapján, a hengeres csukló (álló, vagy görgős), és a befogás is ideális támaszok.

3. Gömbcsukló és vezető

Gömbcsuklóval, vagy vezetővel összekapcsolt B és C test (6.11. ábra), $\delta \vec{r}_B$ virtuális elmozdulással feltételeSEN elmozdulhat. A támasz felszabadításakor \vec{R}_B és $-\vec{R}_B$ reakcióerők hatnak a B pontban. Mivel a csukló $\delta \vec{r}_B$ virtuális elmozdulása mindkét testre vonatkoztatva ugyanakkora, a reakciók virtuális munkáinak összege nulla.

$$\delta A^R = \vec{R}_B \cdot \delta \vec{r}_B - \vec{R}_B \cdot \delta \vec{r}_B. \quad (6.37)$$

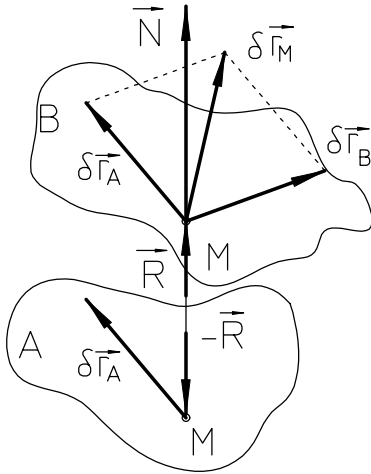


6.11. ábra. Gömbcsukló

Tehát, a gömbcsukló és a vezető mindenkor ideális támasz.

4. Ideálisan sima felület

Az ideálisan sima A test elmozdulása a térben $\delta \vec{r}_A$ lehet. Ennek a testnek a felületén egy másik B ideális test is elmozdulhat, az A testhez képest $\delta \vec{r}_B$ -vel. A testek érintkezési pontja M pont. A B test érintkezési pontjának össz virtuális elmozdulása:



$$\delta \vec{r}_M = \delta \vec{r}_B + \delta \vec{r}_A \quad (6.38)$$

Különválasztva az A és B testet, mivel ideálisan simák, \vec{R} és $-\vec{R}$ reakcióik a közös \vec{N} normálisuk irányában hatnak (6.12. ábra). Virtuális munkájuk összege:

$$\begin{aligned} \delta A^R &= -\vec{R} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_M = -\vec{R} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{R} \cdot (\delta \vec{r}_B + \delta \vec{r}_A) = \\ &= \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_B = 0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

Slika 6.12. Glatka površina

azért mert a $\delta \vec{r}_B$ az erők \vec{N} irányára merőleges síkban fekszik, virtuális munkát nem végez.

Az analitikus statika szempontjából tehát, két ideálisan sima felület kontaktusa is ideális támasz.

6.5. GENERALIZÁLT ERŐK

Ha a térbeli merev testek rendszerére az M_i pontokban általános aktív \vec{F}_i^a erő és \vec{M}_k^a erőpárrendszer hat, generalizált koordinátái q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$), szabadságfoka n , az M_i pontjainak helyzete \vec{r}_i helyzetvektorokkal definiált egy álló O ponthoz képest, a testek helyzete pedig Φ_k szögekkel, amelyeket a testekben felvett térbeli vonalak, bizonyos referens irányokkal zárnak be. Amennyiben a támaszok megengednek, mindenegyres M_i pontnak $\delta \vec{r}_i$ virtuális elmozdulása van, a testeknek viszont $\delta \vec{F}_k$ virtuális elfordulásai a z_k tengelyek körül. Ilyen esetben, az aktív erők és erőpárok összesített virtuális munkája:

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{k=1}^M \vec{M}_k^a \cdot \delta \vec{F}_k, \quad (6.40)$$

ahol:

- $i = 1, 2, \dots, N$ az aktív erők száma,
- $k = 1, 2, \dots, M$ az aktív erőpárok száma.

A virtuális elmozdulás $\delta \vec{r}_i$ és virtuális elfordulás $\delta \vec{F}_k$ (6.17) és (6.18) összefüggésekkel meghatározott alakjait behelyettesítve, az aktív erők és erőpárok virtuális munkája:

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum_{k=1}^M \vec{M}_k^a \cdot \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{F}_k}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha,$$

az összeadás sorrendjei megváltoztathatók, minek következtében:

$$\delta A^a = \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} + \sum_{k=1}^M \vec{M}_k^a \cdot \frac{\partial \vec{F}_k}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha. \quad (6.41)$$

A zárójelben szereplő összefüggés kizárólag a generalizált koordinátáktól függ, tehát a (6.41) újabb alakja:

$$\delta A^a = \sum_{\alpha=1}^n Q_{\alpha} \cdot \delta q_{\alpha}, \quad (6.42)$$

amelyből :

$$Q_{\alpha} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} + \sum_{k=1}^M \vec{M}_k^a \cdot \frac{\partial \vec{F}_k}{\partial q_{\alpha}}. \quad (6.43)$$

A (6.43) összefüggés neve **generalizált erő**. A generalizált erőnek a generalizált koordinátától függő mértékegysége van. Ha a **generalizált koordináta** mértékegysége **hosszúság**, ekkor a **generalizált erő** mértékegysége **erő**, ha a **generalizált koordináta** mértékegysége **szög**, ekkor az ennek megfelelő **generalizált erő** mértékegysége **nyomaték**. A generalizált erőt gyakorlatilag sohasem a (6.43) összefüggés alapján határozzák meg. Meghatározására minden aktív erő és erőpár virtuális munkáját kell felírni, kifejezve a generalizált koordináták δq_{α} variációival. **A Q_{α} generalizált erők a generalizált koordináták megfelelő q_{α} variációinak koeficienseiként ismerhetők fel.**

6.6. A VIRTUÁLIS MUNKA ELVE

Az egyensúlyban levő merev testek rendszerére, amelyre az \vec{F}_i^a ($i = 1, 2, \dots, N$) aktív erők és \vec{M}_k^a ($k = 1, 2, \dots, M$) erőpárok hatnak, egyensúlyi feltétele az, hogy az aktív erők és erőpárok, valamint a támaszok reakcióinak össz virtuális munkája egyenlő nullával.

$$\delta A^a + \delta A^R = 0. \quad (6.44)$$

Mivel az ideális támaszok reakcióinak virtuális munkája nulla, az egyenlet új alakja:

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{k=1}^M \vec{M}_k^a \cdot \delta \vec{F}_k = 0. \quad (6.45)$$

A fenti egyenlet az ismert Lagrange (J. L. Lagrange 1736-1813)-D'alambert (J. D. 'Alambert 1771-1813)-féle elv, vagy a virtuális munka elve. **Az elv így szól: Merev testek rendszerének egyensúlyi helyzetében, minden aktív erő és erőpár virtuális munkájának összege egyenlő nullával.**

Az összefüggés generalizált erőkkel kifejezve:

$$\delta A^a = \sum_{\alpha=1}^n Q_{\alpha} \cdot \delta q_{\alpha} = 0. \quad (6.46)$$

Minden q_{α} generalizált koordináta (definíció szerint) független, tehát a δq_{α} variációik is függetlenek. Ebből következik, hogy a (6.46) összefüggés csak akkor teljesülhet, ha a δq_{α} variációk össz koeficiensei egyenlők nullával, vagyis:

$$\boxed{Q_{\alpha} = 0}. \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \quad (6.47)$$

Végeredményként leszögezhető, hogy a merev testek rendszere egy adott helyzetben akkor van egyensúlyban, ha abban a helyzetben a generalizált erők összege nulla.

Megjegyzés:

1. Feladatok megoldásánál a virtuális munka elve előnye a vektor módszerrel szemben az, hogy az egyensúlyi feltételek felállításakor nem szükséges a belső és külső ideális támaszoktól megszabadulni, hiszen ezek reakciói nem végeznek virtuális munkát.

2. Ha a rendszerben vannak olyan támaszok is, amelyeknek reakciói nem ideálisak, ezeket a reakciókat az aktív erők és erőpárok hatásához kell egyszerűen hozzárendelni.
3. Az ideális támaszok reakciói is meghatározhatók ezzel a módszerrel oly módon, hogy a támaszok hatását reakcióikkal kell helyettesíteni, a rendszerhez pótlólagos virtuális elmozdulást kell hozzárendelni, összhangban a felszabadított támaszokkal, és az új szabadságfokokkal. Ezáltal a támaszok reakciói aktív erőkké lépnek elő, és virtuális munkájukat a többi aktív erő és erőpár hatásához kell hozzáadni.

Feladatok megoldása a virtuális munka elvének alkalmazásával

A statikában a virtuális munka elvét két feladatcsoport megoldására alkalmazzák, ezek:

1. A külső erők és erőpárok ismeretében meghatározható a merev test illetve testek rendszerének egyensúlyi helyzete.
2. Azoknak a feltételeknek meghatározása, amelyeknek az erő és erőpárrendszernek eleget kell tennie a rendszer egyensúlyi helyzetében.

A feladatok megoldásának menete a következő:

1. a szabadságfok meghatározása,
2. minden aktív erő és erőpár felvétele,
3. a virtuális munka meghatározása minden megadott erő és erőpár esetére, figyelembe véve a megfelelő virtuális elmozdulásokat, amelyeket a támaszok megengednek,
4. a generalizált erők meghatározása, a generalizált koordináták variációiként,
5. a generalizált erők kiegyenlítése nullával, amelyekből kifejezhetők az egyensúlyi feltételek.

I. Virtuális munka elvének alkalmazása egyszerű mechanizmusok számítására

A legegyszerűbb mechanizmusok az **emelő** és a **lejtő**. Ezekre csak két erő hat, amelyek közül az egyik a Q terhelés, amelynek iránya, értelme és nagysága ismert, a másik a P erő amely a teher emelésére szolgál, és ennek a nagyságát kell meghatározni egyensúlyi helyzetben.

6.1. példa.

Az emelő merev rúdnak tekinthető, amelynek végein a P és Q erők hatnak 6.13. ábra. Egyensúlyi helyzetében az erők viszonyát kell meghatározni.

Megoldás: Az O pont körüli kicsiny **virtuális** elfordulás esetén $\delta\Phi$ szöggel, a Q és P erők virtuális munkáját kell meghatározni.

A Q erő virtuális munkája az erő nyomatékának, és a virtuális $\delta\Phi$ elfordulásnak szorzata:

$$\delta A_Q = Q \cdot a \cdot \delta\Phi.$$

Hasonlóképpen, a P erő virtuális munkája:

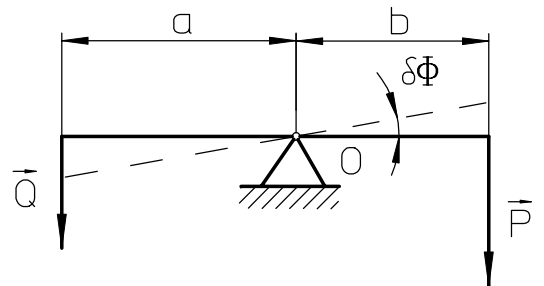
$$\delta A_P = -P \cdot b \cdot \delta\Phi.$$

Ennek az erőnek a munkája negatív, mert a kart az óramutató járásával egyirányban forgatja. Mivel több erő nincs, az eddigiek virtuális munkáinak összege:

$$\sum \delta A = Q \cdot a \cdot \delta\Phi - P \cdot b \cdot \delta\Phi = 0.$$

Egyensúlyi helyzetben az össz virtuális munka egyenlő nullával, amelyből az emelő közismert egyenlete adódik:

$$\boxed{P \cdot b = Q \cdot a}.$$

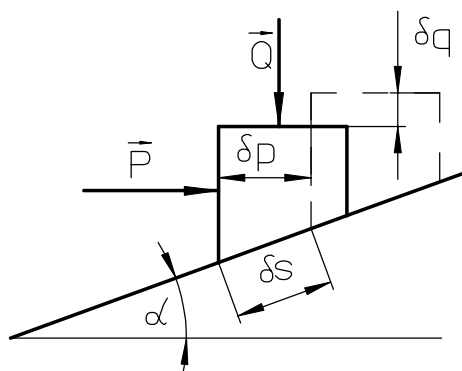


6.13. ábra. A 6.1. példa illusztrációja

amelyet még Arkhimédész állított fel, i.e. 250. körül.

6.2. példa.

A lejtőn, elhelyezkedő Q teherrel egy vízszintes P erő tart egyensúlyt 6.14. ábra. Egyensúlyi helyzetben meghatározni az erők viszonyát.



Megoldás: A teher δs virtuális elmozdulásával, a vízszintes erő útja δp , melynek függőleges komponense δq . Az elmozdulások egymásközi viszonya az ábra alapján:

$$\delta p = \delta s \cdot \cos \alpha, \quad \text{és} \quad \delta q = -\delta s \cdot \sin \alpha.$$

Az erők virtuális munkája ezeken az elmozdulásokon:

$$\sum \delta A = P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q = 0,$$

illetve:

$$P \cdot \delta s \cdot \cos \alpha - Q \cdot \delta s \cdot \sin \alpha = 0,$$

6.14. ábra. A 6.2. példa illusztrációja

amelyből következik:

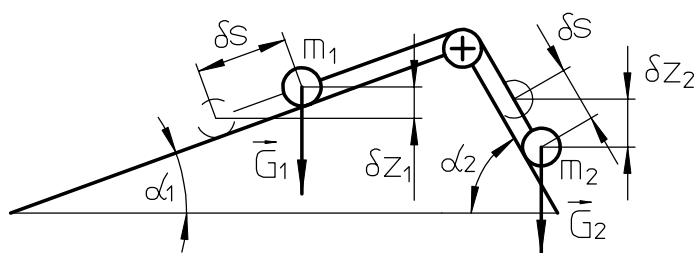
$$\boxed{P = Q \cdot \tan \alpha}.$$

A fenti egyszerű példákban látszik, hogy feladatok megoldásakor, alkalmazva a virtuális munka elvét, a következőként kell eljárni:

1. Mindenekelőtt azokat az erőket kell berajzolni, amelyek virtuális munkát végeznek. A virtuális elmozdulásra merőleges erők munkát nem végeznek, ez vonatkozik azokra az erőkre is, amelyek álló csuklókon haladnak keresztül, valamint a belső erőkre is, mivel ezeknek nincs elmozdulásuk.
2. Az aktív erők támadáspontjainak virtuális elmozdulásait ki kell fejezni a virtuális munka egyenleteivel, amelyeknek száma megegyezik a szabadságfokok számával.
3. Végül, a virtuális munka egyenleteiből ki kell fejezni a keresett mennyiségeket.

6.3. példa.

Az m_1 és m_2 anyagi pontok, melyeknek súlyai G_1 és G_2 ahol $G_1 > G_2$, szabadon súrlódásmentesen csúszhatnak az α_1 és α_2 hajlásszögű lejtőkön, függőleges síkban. A pontok fonállal össze vannak kötve a 6.25. ábra szerint. Meghatározni az m_1 és m_2 egyensúlyi helyzetét.



6.15. ábra. A 6.3. példa illusztrációja

Megoldás: Az m_1 pont δs elmozdulásával, süllyedése: $\delta z_1 = \delta s \cdot \sin \alpha_1$,

az elvégzett virtuális munka: $\delta A_1 = G_1 \cdot \delta s \cdot \sin \alpha_1$ (G_1 munkát "végez").

Az m_2 pont emelkedése: $\delta z_2 = \delta s \cdot \sin \alpha_2$,

az elvégzett virtuális munka: $\delta A_2 = - G_2 \cdot \delta s \cdot \sin \alpha_2$ (G_2 munkát "használ").

A virtuális munkák összege: $\sum \delta A = G_1 \cdot \delta s \cdot \sin \alpha_1 - G_2 \cdot \delta s \cdot \sin \alpha_2 = 0$,

$$G_1 \cdot \sin \alpha_1 = G_2 \cdot \sin \alpha_2,$$

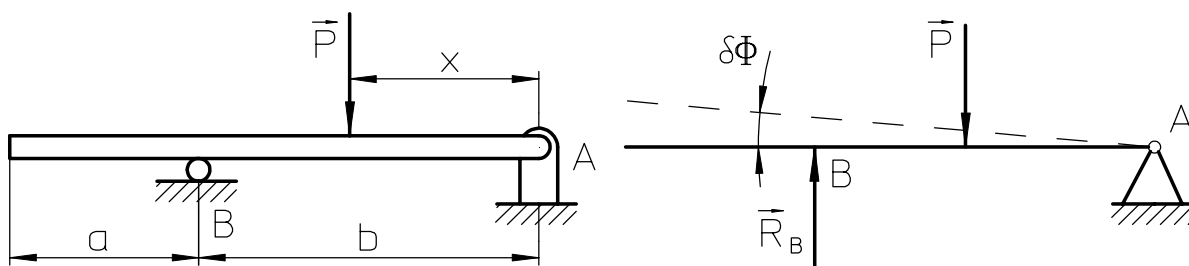
amennyiben ez a feltétel teljesült, az m_1 és m_2 pontok egyensúlyban vannak minden helyzetükben feltéve, hogy a fonal feszes.

II. Támaszok reakcióinak meghatározása virtuális munka elvével

Támaszok reakcióinak meghatározásakor abból a feltételből kell kiindulni, hogy a merev testek rendszere egyensúlyban van. A támaszok (amelyeknek reakcióit meg kell határozni) hatását megfelelő reakciókkal kell helyettesíteni, amelyek a későbbiekben mint aktív erők és erőpárok fognak szerepelni. A támaszok megszűnésével reakcióik virtuálisan elmozdulhatnak (a megmaradt támaszokkal összhangban), és így ezek a reakciók is végeznek munkát. Ezáltal a virtuális munka egyenletében a támaszok reakcióinak munkája is szerepelni fog mint ismeretlen, és így megoldható. Minden egyes független reakciókomponensnek megfelelő egyenlet felel meg, tehát ha a reakciónak kettő, vagy három komponense van, a virtuális munka elvét két, illetve háromszor kell alkalmazni. A továbbiakban a példákon keresztül ez illusztrálva lesz.

6.4. példa.

Az A pontban csuklóban végződő vízszintes rúd B pontban alá van támasztva, és \vec{P} erő hat rá 6.16. ábra. A virtuális munka elve segítségével meghatározni a B pont reakcióját a \vec{P} erő A ponttól mért tetszőleges x helyzetében.



6.16. ábra. A 6.4. példa illusztrációja

Megoldás: A virtuális munka elvének alkalmazásához, képzeletben a B pont támaszát el kell távolítani, és hatását \vec{R}_B reakcióerővel helyettesíteni, amellyel a támasz a rúdra hat. Így a rendszernek egy szabadságfoka van, amelyre a \vec{P} és \vec{R}_B aktív erők közötti összefüggéseket kell felírni, egyensúlyi helyzetben. Képzeletben a rúdnak virtuális elmozdulást kell adni, amely ebben az esetben csak az A pont körüli $\delta \Phi$ végtelenül kicsiny elfordulás lehet.

A \vec{P} és \vec{R}_B erők megfelelő függőleges elmozdulásai:

$$-x \cdot \delta \Phi, \quad \text{és} \quad b \cdot \delta \Phi.$$

A virtuális munka egyenlete:

$$R_B \cdot b \cdot \delta \Phi - P \cdot x \cdot \delta \Phi = 0,$$

ahonnan:

$$\boxed{R_B = P \cdot \frac{x}{b}}.$$

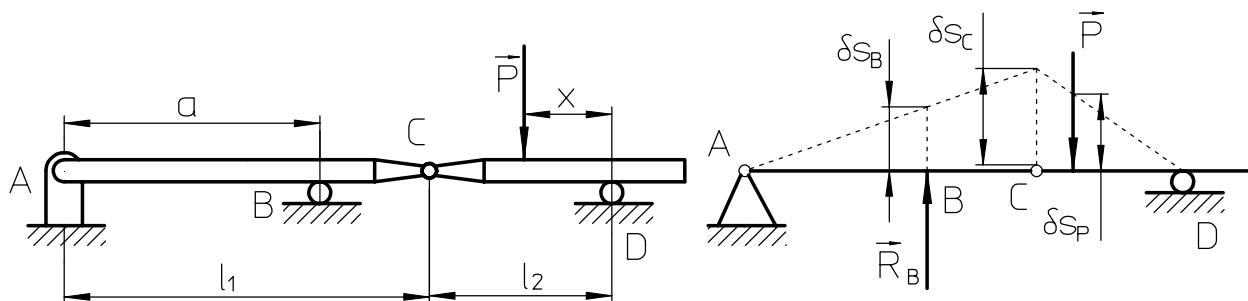
6.5. példa.

A \vec{P} erővel terhelt C pontban Gerber-csuklóval összekapcsolt AC és CD rudak a B és D pontokban fekszenek fel 6.17. ábra. A \vec{P} erő tetszőleges helyzetére meghatározni az \vec{R}_B reakciót.

Megoldás: Mint az előző példában, itt is a B pont támaszát (függőleges) \vec{R}_B reakcióerővel kell helyettesíteni, miáltal egy mozgó rendszer adódik. A függőleges virtuális elmozdulást, amelyet a

támaszok megengednek, a C pont végtelenül kicsiny δs_C elmozdulásával ki lehet fejezni. Az \vec{R}_B és \vec{P} erők megfelelő függőleges elmozdulásaik:

$$\delta s_B = \frac{\delta s_C \cdot a}{l_1}, \quad \text{és} \quad \delta s_P = \frac{\delta s_C \cdot x}{l_2}.$$



6.17. ábra. A 6.5. példa illusztrációja

A virtuális munkák egyenletei:

$$R_B \cdot \delta s_B - P \cdot \delta s_P = 0,$$

ahonnan:

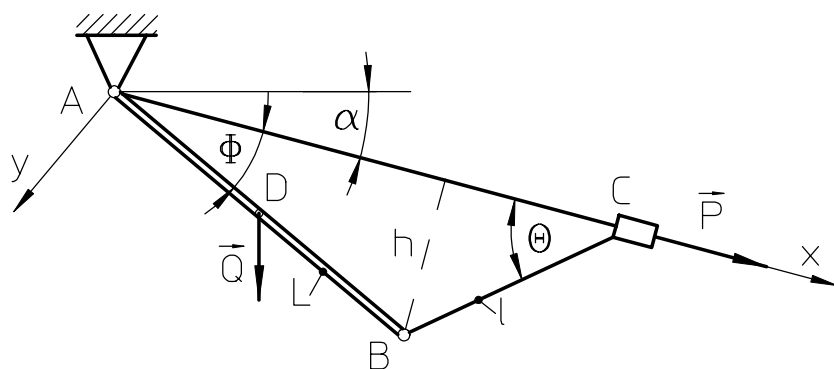
$$R_B = P \cdot \frac{\delta s_P}{\delta s_B},$$

behelyettesítve a virtuális elmozdulásokat:

$$R_B = P \cdot \frac{x \cdot l_1}{a \cdot l_2}.$$

6.6. példa.

Az L hosszúságú \vec{Q} súlyú AB rúd álló csuklóhoz van erősítve az A pontban. Másik B végéhez l hosszúságú BC köté van kötve, amelynek C vége egy gyűrűhöz kapcsolódik, amely az A ponton áthalad, és a vízszintes irány-nyal α szöget bezáró mozdu- latlan rúdon elmozdulhat 6.18. ábra. A mozdu- latlan rúd irányában a gyűrűre \vec{P} erő hat. Meghatározni a \vec{P} erő nag- ságát, amellyel a rendszer egyensúlyt tart fenn, ha a Φ és Θ szögek ismertek. A köté súlya és a súrlódás elhanya- goltható.



6.18. ébra. A 6.6. példa illusztrációja

rendszer szabadságfokát kell meghatározni. A C pont elmozdulásakor, az összes többi elem is (az l köté és az L rúd), pontosan meghatározott módon fog elmozdulni, mivel egymással össze vannak kapcsolva. A rendszernek tehát csak egy független elmozdulása van, így szabadságfoka is egy.

Az ábra szerinti koordináta rendszerben a \vec{P} erő az x tengely irányában fekszik, a \vec{Q} erőt pedig az x és y tengelyekre kell vetíteni. Ezeknek az erőknek (\vec{P} , \vec{Q}_x és \vec{Q}_y vetületeknek) megfelelő virtuális elmozdulásaik δx_C , δx_D , δy_D amelyek nem függetlenek.

A \vec{P} és \vec{Q} erők virtuális munkái ezeken az elmozdulásokon:

Megoldás: Első lépésben a

$$\delta A = P_x \cdot \delta x_C + Q_x \cdot \delta x_D + Q_y \cdot \delta y_D,$$

ahol: $P_x = P$, $Q_x = Q \cdot \sin \alpha$, $Q_y = Q \cdot \cos \alpha$ a Q erő vetületei a koordináta tengelyekre.

Mivel a rendszernek egy szabadságfoka van, mindezeket a δx_C , δx_D , δy_D virtuális elmozdulásokat egy független paraméterrel (virtuális elmozdulással) kell kifejezni.

Az x_C , x_D , és y_D pontok koordinátái:

$$x_C = L \cdot \cos F + l \cdot \cos Q, \quad x_D = \frac{L}{2} \cdot \cos F, \quad y_D = \frac{L}{2} \cdot \sin F.$$

A közöttük fennálló kényszeregyenletet a geometriai összefüggések adják, a Φ és Θ szögek függvényeként:

$$h = L \cdot \sin \Phi = l \cdot \sin \Theta,$$

A virtuális elmozdulásokat ezekből az egyenletekből kell meghatározni, mint az erők támadáspontjai vetületeinek, koordináták szerinti deriváltjait (variációit). A virtuális elmozdulások:

$$\begin{aligned} \delta x_C &= -L \cdot \sin F \cdot \delta F - l \cdot \sin Q \cdot \delta Q, & \delta x_D &= -\frac{L}{2} \sin F \cdot \delta F, \\ \delta y_D &= \frac{L}{2} \cos F \cdot \delta F, & L \cdot \cos F \cdot \delta F &= l \cdot \cos Q \cdot \delta Q \Rightarrow \delta Q = \frac{L \cdot \cos F}{l \cdot \cos Q} \cdot \delta F. \end{aligned}$$

Független virtuális elmozdulásként véve $\delta \Phi$ -t, a δx_C virtuális elmozdulás alakja:

$$\delta x = -L \cdot \sin F \delta F - l \cdot \sin Q \cdot \frac{L \cdot \cos F}{l \cdot \cos Q} \cdot \delta F = -L \cdot (\sin F + \cos F \cdot \operatorname{tg} Q) \cdot \delta F,$$

a virtuális munka:

$$\delta A = -P \cdot L \cdot (\sin F + \cos F \cdot \operatorname{tg} Q) \cdot \delta F - Q \cdot \sin \alpha \cdot \frac{L}{2} \sin F \cdot \delta F + Q \cdot \cos \alpha \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos F \cdot \delta F = 0,$$

$$\delta A = \delta F \left[-P \cdot (\sin F + \cos F \cdot \operatorname{tg} Q) + \frac{Q}{2} (\cos \alpha \cdot \cos F - \sin \alpha \cdot \sin F) \right] = 0,$$

$$\delta A = \delta F \cdot \left[-P \cdot (\sin F + \cos F \cdot \operatorname{tg} Q) + \frac{Q}{2} \cdot \cos(F + \alpha) \right] = 0.$$

A fenti egyenletből egy generalizált erő Q_Φ tűnik ki, mint a $\delta \Phi$ koeficiense, alakja:

$$Q_F = -P \cdot (\sin F + \cos F \cdot \operatorname{tg} Q) + \frac{Q}{2} \cdot \cos(F + \alpha).$$

A virtuális munka elve alapján, egyensúlyi helyzetben, a generalizált erő egyenlő nullával:

$$-P \cdot (\sin F + \cos F \cdot \operatorname{tg} Q) + \frac{Q}{2} \cdot \cos(F + \alpha) = 0.$$

Innen a \vec{P} erő keresett alakja:

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{\cos(F + \alpha)}{\sin F + \cos F \cdot \operatorname{tg} Q},$$

ahol:

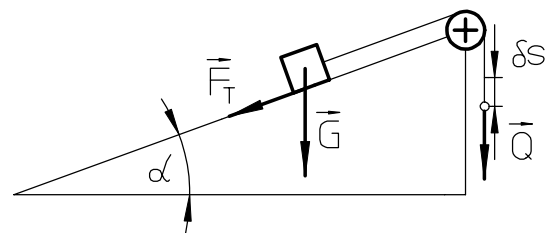
- Q , α , Φ , és Θ ismert mennyiségek.

III. Virtuális munka elvének alkalmazása figyelembe véve a súrlódóerőt

A virtuális munka elve akkor is alkalmazható, ha a támaszokban súrlódóerők lépnek fel. A súrlódóerőket a testekre ható aktív erőkhez kell hozzárendelni, majd a virtuális munkájukat ugyanúgy figyelembe venni.

6.7. példa.

Mekkora \vec{Q} erővel kell hatni a \vec{G} súlyú teherre, hogy elmozduljon az érdes felületű lejtőn, melynek hajlásszöge α 6.19. ábra.



6.19. ábra. A 6.7. példa illusztrációja

Megoldás: A virtuális munka egyenlete:

$$Q \cdot \delta s - G \cdot \delta s \cdot \sin \alpha - F_T \cdot \delta s = 0, \quad (\text{A})$$

ahol:

- δs a \vec{Q} erő függőleges elmozdulása,
- F_T a teher és a lejtő közötti súrlódóerő.

figyelembe véve a μ súrlódási tényezőt:

$$Q \cdot \delta s - G \cdot \delta s \cdot \sin \alpha - \mu \cdot G \cdot \delta s \cdot \cos \alpha = 0,$$

ahonnan:

$$Q = G \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha). \quad (\text{B})$$

Az (A) egyenletből látható, hogy az aktív \vec{Q} erő virtuális munkája δs virtuális elmozdulásán nemcsak a G teher emelésére szükséges melynek nagysága $\delta s \cdot \sin \alpha$, hanem az F_T súrlódóerő legyőzésére is. A hasznos munka $G \cdot \delta s \cdot \sin \alpha$ és az elvégzett (befektetett) munka $Q \cdot \delta s \cdot \sin \alpha$ közötti arány a bemutatott rendszer *mechanikai hatásfoka* η :

$$\eta = \frac{\text{hasznos munka}}{\text{befektetett munka}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha}. \quad (\text{C})$$

Ideális esetben amikor $\mu = 0$, ekkor a hatásfok $\eta = 1$, és η értéke annál kisebb, minél nagyobb μ értéke. A G teher lefelé történő elmozdulásakor, a \vec{Q} erő nagysága amely ehhez még elégséges, az (A) összefüggésből határozható meg, a \vec{G} teher munkáját ellenkező előjellel véve:

$$Q \cdot \delta s + G \cdot \delta s \cdot \sin \alpha - F_T \cdot \delta s = 0,$$

ahonnan, behelyettesítve $F_T = \mu \cdot G \cdot \cos \alpha$:

$$Q = G \cdot (\mu \cdot \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Ha érvényes: $\mu \cdot \cos \alpha - \sin \alpha = 0$, vagy $\operatorname{tg} \alpha = \mu = \rho$ másszóval, ha a lejtő hajlásszöge megegyezik a súrlódás ρ szögével a \vec{Q} erő értéke nulla, tehát fennáll az u.n. *önfékezés*. Ha $\alpha > \rho$ a teher magától fog a lejtőn lefelé csúszni, minden más külső erő hatása nélkül.

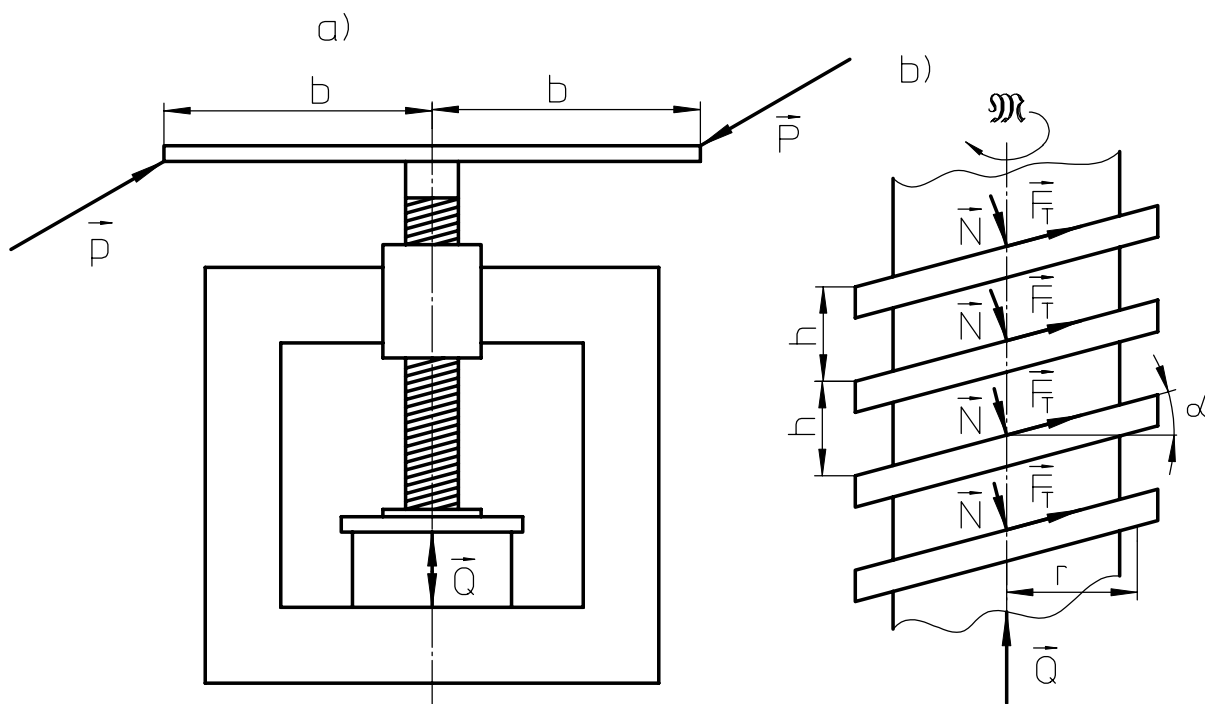
Abban az esetben, ha $\rho = \mu$ a lejtő, vagy ék, mint az egyik egyszerű emelésre használt mechanizmus, mechanikai hatásfoka a (C) egyenletből levezethető, behelyettesítve μ értékét $\operatorname{tg} \alpha$ -val:

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{2}.$$

A bemutatott módszer csavar vizsgálatára is alkalmas (6.8. példa), hiszen a csavar nem más, mint egy lejtő (ék), amely egy hengerfelület palástján van körülfektetve (6.20 b ábra).

6.8. példa.

Meghatározni a 6.20.a)ábrán bemutatott csavarorsós prés mechanikai hatásfokát, ha a csavarszelvény alakja négyszögletes 6.20 b)ábra, menetemelkedése h , súrlódási tényezője μ középsugara r . A prés hasznos ereje \vec{Q} .



6.20. ábra. A 6.8. példa illusztrációja

Megoldás: A csavar végtelenül kis virtuális elfordulásakor, melynek nagysága $\delta \phi$, az $M=2 \cdot P \cdot b$ erőpár virtuális munkája:

$$\delta A_M = 2 \cdot P \cdot b \cdot \delta \phi,$$

ahol:

- P az erőpár erejének nagysága, amellyel a prés karjára hat,
- b a prés karjának hossza (az erőpár karja).

A \vec{Q} erő virtuális munkája:

$$\delta A_Q = -\frac{Q \cdot h \cdot \delta \varphi}{2\pi}.$$

A súrlódóerő támadáspontjának virtuális elmozdulása, amely a csavar tengelyétől r távolságban hat:

$$\delta s = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot r \cdot \delta \varphi,$$

a súrlódóerőnek megfelelő virtuális munka, amellyel a csavar elemi felületére hat:

$$\delta A_{F_T} = F_T \cdot \frac{r \cdot \delta \varphi}{\cos \alpha}.$$

Figyelembevéve a teljes csavarorsóra ható súrlódóerőt, az egész rendszer virtuális munkája:

$$2 \cdot P \cdot b \cdot \delta \varphi - \frac{Q \cdot h \cdot \delta \varphi}{2\pi} - \sum F_T \frac{r \cdot \delta \varphi}{\cos \alpha} = 0.$$

Az \vec{N} normális reakció a δs virtuális elmozdulásra merőleges, tehát munkát sem végez. A csavarorsó homlokfelülete és a vele nyomott felület közötti súrlódóerő figyelmen kívül lett hagyva. A csavarorsó és a prés állványa(csavaranya), közötti össz súrlódóerő felírható:

$$\sum F_T = \mu \cdot \sum N.$$

A függőleges irány egyensúlyi egyenletéből:

$$\sum F_{iy} = \sum F_T \cdot \sin \alpha - \sum N \cdot \cos \alpha + Q = 0.$$

Kiküszöbölve $\sum N$ -t a fenti egyenletekből:

$$\sum F_T = \frac{\mu \cdot Q}{\cos \alpha - \eta \cdot \sin \alpha}.$$

A kapott egyenletet behelyettesítve a virtuális munka egyenletébe, miközben h helyett a vele egyenértékű $2 \cdot r \cdot \pi \cdot \tan \alpha$ összefüggést véve:

$$2 \cdot P \cdot b - Q \cdot r \cdot \tan \alpha - \frac{\mu \cdot Q \cdot r}{\cos^2 \alpha - \mu \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 0,$$

ahonnan megkapható az M erőpár és a hasznos \vec{Q} erő közötti összefüggés:

$$M = Q \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha + \eta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha - \eta \cdot \sin \alpha}.$$

Behelyettesítve $\tan \rho = \eta$ (ρ a súrlódás szöge), a fenti összefüggés alakja:

$$M = Q \cdot r \cdot \tan(\alpha + \rho).$$

Ideális esetben ($\mu = \operatorname{tg} \rho = 0$), amikor nincs súrlódás:

$$M = Q \cdot r \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

amely azt jelenti, hogy az erőpár teljes munkája a \vec{Q} erő hasznos munkájává alakult. Ennek a munkának egy része a súrlódás legyőzésére kell, így a csavar mechanikai hatásfoka ennek a két munkának a hányadosa:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \rho)}.$$

6.7. AZ EGYENSÚLYI HELYZET STABILITÁSA

A vektor statika módszereivel meghatározhatók az egyensúlyi feltételek, ellenben ezzel a módszerrel nem határozható meg, vajon az egyensúlyi feltétel stabil, illetve labilis-e.

Az analitikus statika módszereivel vizsgálva ugyaznezeket az egyensúlyi feltételeket, meghatározható vajon stabil illetve labilis a kérdéses egyensúlyi helyzet.

Kimozdítva a rendszert egyensúlyi helyzetéből, a hozzá közeli helyzetében már más erő és erőpárrendszer hatása érvényesül. Ha ebben ***a kimozdított helyzetben olyan erő és erőpárrendszer hat, amely a rendszert visszaállítja egyensúlyi helyzetébe, ekkor az ilyen egyensúlyi helyzet stabil.*** Ellenben ha az ***erő és erőpárrendszer hatására*** a rendszer ***egyensúlyi helyzetétől eltávolodik, az ilyen egyensúlyi helyzet labilis.***

Egyszabadságfokú rendszerek esetében, a testek helyzetét egy generalizált koordináta q határozza meg, és az ennek megfelelő generalizált erő Q . Egyensúlyi feltételként a generalizált erő egyenlő nullával, ekkor a generalizált koordináta értéke q_r , amelynek alapján felírható:

$$Q_{(q_r)} = 0. \quad (6.48)$$

Kimozdítva a rendszert egyensúlyi helyzetéből, nagyon csekély Δq eltéréssel, új helyzetében a generalizált erő értéke $Q(q_r + \Delta q)$. Sorbafejtve ezt a függvényt, és elhagyva a magasabbrendű mennyiségeket:

$$Q(q_r + \Delta q) \approx Q(q_r) + \left(\frac{dQ}{dq} \right)_{q_r} \cdot \Delta q, \quad (6.49)$$

illetve a (6.48) alapján:

$$Q(q_r + \Delta q) \approx \left(\frac{dQ}{dq} \right)_{q_r} \cdot \Delta q. \quad (6.49)$$

Amennyiben:

$$\left(\frac{dQ}{dq} \right)_{q_r} < 0. \quad (6.50)$$

Ekkor, kimozdítva a testet egyensúlyi helyzetéből $\Delta q > 0$ értékkel, a generalizált erő $Q(q_r + \Delta q) < 0$, értéke negatív ami azt jelenti, hogy az elmozdulással ellentétes irányban hat. Ebben az esetben az elmozdulás iránya és a generalizált erő értelme ellentétes, így a generalizált erő visszaállítja a rendszert egyensúlyi helyzetébe, ***ez a stabil egyensúlyi helyzet.*** Az egyensúlyi helyzet stabilitásának definíciója megfogalmazható a következőképpen:

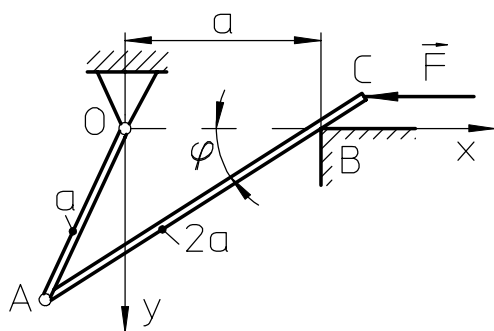
Akkor stabil az egyensúlyi helyzet, ha a generalizált erő generalizált koordináta szerinti deriváltja az egyensúlyi helyzetben negatív.

Az egyensúlyi helyzet labilis, ha a generalizált erő generalizált koordináta szerinti deriváltja az egyensúlyi helyzetben pozitív, vagyis:

$$\left(\frac{dQ}{dq} \right)_{q_r} > 0. \quad (6.51)$$

Ebben az esetben az elmozdulás és a generalizált erő egyértelműek, és a rendszer egyensúlyi helyzetéből történő kimozdításával, a generalizált erő ezt még jobban elősegíti.

6.9. példa.



6.21. ábra. A 6.20. példa illusztrációja

Merev testek rendszerét alkotó OA és AC rudak csuklósan kapcsolódnak az A pontban 6.21. ábra. Az OA rúd hossza a , az AC rúd $2a$, amely a B pontban sima támaszra fekszik. A C pontban az AC rúdra vízszintes \vec{F} erő hat. Az O csukló távolsága a támasztól $OB=a$. Meghatározni a φ szöget a rendszer egyensúlyi helyzetében, és kivizsgálni stabilitását.

Megoldás: A rendszer helyzetét a φ szög teljesmértékben meghatározza, tehát generalizált koordinátaként tekinthető. A rendszerre csak az \vec{F} erő hat, és a bejelölt koordináta rendszerben a δx virtuális elmozdulásra (amelyet mindig a tengely pozitív irányában kell venni),

az erő virtuális munkája :

$$\delta A = -F \cdot \delta x.$$

Az \vec{F} erő támadáspontjának helyzete kifejezve a φ generalizált koordinátával:

$$x = -a \cdot \cos(2\varphi) + 2 \cdot a \cdot \cos \varphi.$$

A δx virtuális elmozdulás, és a generalizált koordináta $\delta \varphi$ variációja közötti összefüggés:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \delta \varphi \Rightarrow \delta x = 2 \cdot a \cdot \sin(2\varphi) \cdot \delta \varphi - 2 \cdot a \cdot \sin \varphi \cdot \delta \varphi.$$

A virtuális munka, figyelembe véve $\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$ alakja:

$$\delta A = 2 \cdot F \cdot a \cdot \sin \varphi \cdot (1 - 2 \cos \varphi) \delta \varphi.$$

A generalizált erő a $\delta \varphi$ variáció koeficiensként:

$$Q = 2 \cdot F \cdot a \cdot \sin \varphi (1 - 2 \cos \varphi).$$

Egyensúlyi helyzetben a generalizált erő egyenlő nullával, így két egyensúlyi helyzet létezik, ezek:

$$\sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0^\circ, \quad 1 - 2 \cos \varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_2 = 60^\circ.$$

A generalizált erő a $\delta \varphi$ generalizált koordináta szerint vett deriváltja (szorzat deriváltjaként):

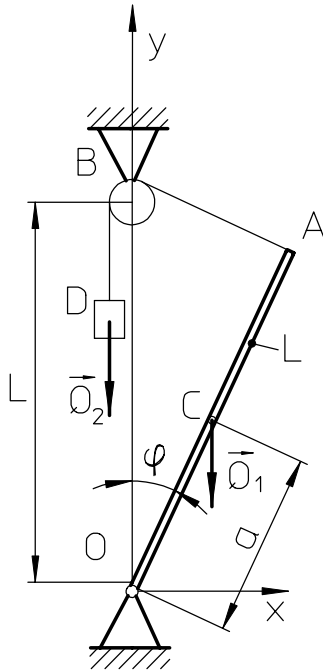
$$\frac{dQ}{d\varphi} = -4 \cdot F \cdot a \cdot \cos(2\varphi) + 2 \cdot F \cdot a \cdot \cos \varphi.$$

A φ_1 és φ_2 egyensúlyi helyzetben a derivációk értékei:

$$\left(\frac{dQ}{d\varphi} \right)_1 = -4 \cdot F \cdot a + 2 \cdot F \cdot a = -2 \cdot F \cdot a < 0 \quad \text{stabil egyensúly,}$$

$$\left(\frac{dQ}{d\varphi} \right)_2 = 2 \cdot F \cdot a + F \cdot a = 3 \cdot F \cdot a > 0 \quad \text{labilis egyensúly.}$$

6.10. példa.



6.22. ábra. A 6.10. példa illusztrációja

amelyből:

ahol:

- l a kötéll hossza.

A C pont y magassága az ábra alapján:

$$y_C = a \cdot \cos \varphi.$$

A virtuális elmozdulások:

$$\delta y_D = L \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \delta \varphi, \quad \delta y_C = -a \cdot \sin \varphi \cdot \delta \varphi.$$

Az (A) virtuális munka:

$$\delta A = \left[Q_1 \cdot a \cdot \sin \varphi - Q_2 \cdot L \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \cdot \delta \varphi,$$

amelyből a generalizált erő:

$$Q = Q_1 \cdot a \cdot \sin \varphi - Q_2 \cdot L \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Az $OA = L$ rúd egyik végével az O pontban csuklóhoz van erősítve, másik végéhez kötéll van kötve, amely egy keréken van átvetve B pontban, végén \vec{Q}_2 súllyal. A B pont az O ponttól függőleges L távolságra van. Az OA rúdra függőleges \vec{Q}_1 erő hat a C pontban $OC=a$ távolságra. Kivizsgálni a rúd egyensúlyának stabilitását, a kerék méreteit, a kötéll súlyát, és a súrlódást figyelmen kívül hagyva.

Megoldás: A rúd helyzete φ szöggel egyértelműen meghatározható, amely így generalizált koordinátaként szerepelhet. A \vec{Q}_1 és \vec{Q}_2 aktív erőkre amelyek a C és D pontokban hatnak, az ábra szerinti xy koordináta rendszerben virtuális munkájuk:

$$\delta A = -Q_1 \cdot \delta y_C - Q_2 \cdot \delta y_D. \quad (A)$$

A kötéll l hossza állandó, így felírható a következő kényszeregyenlet:

$$l = \text{const} = 2 \cdot L \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - (L - y_D),$$

$$y_D = 2 \cdot L \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + L - l,$$

Az egyensúlyi feltétel $Q = 0$, szerint figyelembevéve $\sin \varphi = 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$, következik:

$$\left[2 \cdot Q_1 \cdot a \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - Q_2 \cdot L \right] \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Az egyenlet megoldásaként, a rendszer egyensúlyi helyzetei:

$$1. \cos \frac{\varphi_1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi_1}{2} = 90^\circ \Rightarrow \varphi_1 = 180^\circ,$$

$$2. 2 \cdot Q_1 \cdot a \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = Q_2 \cdot L \Rightarrow \varphi_2 = 2 \cdot \arcsin \frac{Q_2 \cdot L}{2 \cdot Q_1 \cdot a}.$$

A generalizált erő generalizált koordináta szerinti deriváltja:

$$\frac{dQ}{d\varphi} = Q_1 \cdot a \cdot \cos \varphi + \frac{Q_2 \cdot L}{2} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

behelyettesítve $\cos \varphi = 1 - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$:

$$\frac{dQ}{d\varphi} = Q_1 \cdot a \cdot \left[1 - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] + \frac{Q_2 \cdot L}{2} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

A φ_1 és φ_2 egyensúlyi helyzeteknek megfelelően a deriváció értékei:

$$1. \text{ za } \varphi_1 = 180^\circ \Rightarrow -Q_1 \cdot a + \frac{Q_2 \cdot L}{2},$$

$$2. \text{ za } \varphi_2 = 2 \cdot \arcsin \frac{Q_2 \cdot L}{2 \cdot Q_1 \cdot a} \Rightarrow \frac{(2 \cdot Q_1 \cdot a - Q_2 \cdot L) \cdot (2 \cdot Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot L)}{4 \cdot Q_1 \cdot a}.$$

Mindkét egyensúlyi helyzet lehet stabilis és labilis is, a \bar{Q}_1 és \bar{Q}_2 valamint az a és L geometriai összefüggésektől függően:

$$-Q_1 \cdot a + \frac{Q_2 \cdot L}{2} > 0 \text{ az egyensúlyi helyzet } \textbf{labilis}, \quad (\text{B})$$

$$-Q_1 \cdot a + \frac{Q_2 \cdot L}{2} < 0 \text{ az egyensúlyi helyzet } \textbf{stabil}. \quad (\text{C})$$

A φ_2 szög esetére vett egyensúlyi helyzetet vizsgálva ennek a deriváltja pozitív, ha a (C) feltétel teljesül, ellenben negatív ha a (B) feltétel. Ami annyit jelent, hogy a (B) feltétellel a φ_2 szög szerinti helyzet **stabil** a (C) feltétel **labilis**. Ezeknek az eredményeknek alapján leszögezhető egy fontos következtetés. Az olyan rendszerek esetében, amelyeknek a paraméterek bizonyos értékei mellett, több egyensúlyi helyzetük lehetséges, ebből az egyik stabil a másik a labilis egyensúlyi helyzet. Ha a rendszer a labilis egyensúlyi helyzetből elmozdul, akkor paramétereinek ezekre az értékeire, átáll stabil helyzetébe. Ez a stabilitás átrendeződésének folyamata.

7. IRODALOM

1. Muttnyánszky Ádám, Lengyel János, Gyarmathy Kálmán:
Statika
(Tankönyvkiadó, Budapest 1992.)
2. Selmeci Ferenc:
Mechanika
(Műszaki könyvkiadó, Budapest 1991.)
3. Pattantyús:
Gépész és villamosmérnökök kézikönyve
(Műszaki könyvkiadó, Budapest 1961.)
4. Đorđe Đukić, Livija Cvetićanin:
Statika
(Univerzitet u Novom Sadu, 1994.)
5. S.M.Targ:
Teorijska mehanika, Kratak kurs
(Građevinska knjiga, Beograd 1985.)
6. Davorin Bazjanac:
Tehnička mehanika, Statika
(Tehnička knjiga, Zagreb 1959.)