

Rendszer-és Irányítástechnika

BMEGEMIBMRI

Házi Feladat

Kárpáti Péter Milán

VW19BD

Paraméterek:

δ_0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
9[V]	192,45 $\left[\frac{V}{rad}\right]$	30[°]	5 [%]	20 [%]	1 [ms]

Tartalomjegyzék

A feladatkiírás	3
1 A rendszer dinamikai modellezése.....	4
1.a Rendszer feszültség-szögsebesség átviteli függvénye.....	4
1.b A rendszer leírása állapotter modellel	4
1.c Rendszer időállandinak és statikus erősítésének meghatározása	6
1.d A rendszer szögsebesség időfüggvénye névleges feszültség esetén.....	6
2 PD pozíciószabályozás analízise.....	6
2.a A felnyitott kör frekvencia átviteli függvényének meghatározása	6
2.b A vágási körfrekvencia meghatározása	7
2.c Felnyitott kör Bode-diagramjai és az egységugrásra adott válasz.....	8
3 PI szögsebesség szabályozás tervezése.....	9
3.a A zárt szabályozási lánc átviteli függvénye.....	9
3.b Stabilitás vizsgálata	10
3.c A felnyitott kör frekvencia átviteli függvénye.....	10
3.d P meghatározása a fázistartalék függvényében	11
3.e A felnyitott kör Bode-diagramja és a zárt szabályozási lánc névleges szögsebességre adott válasza	11
4 Állapot visszacsatolás tervezése	12
4.a A pólusallokációhoz használt pólusok megadása	12
4.b A rendszer irányíthatósági kanonikus alakja	13
4.c A szabályozó K mátrixának meghatározása	14
4.d Visszacsatolástól függő és független alapjelkompenzáció	16
5 Mellékletek	19

A feladatkiírás

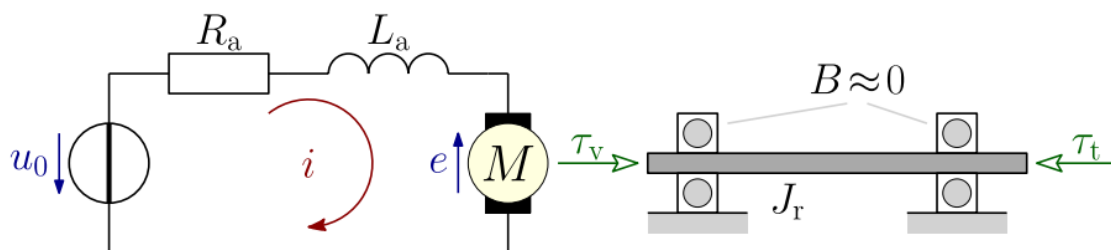
A feladatban a MAXON vállalat A-Max 32 típusú, 20 W teljesítményű kefések egyenáramú motorját fogom modellezni. Emellett a feladat során a modellezett motorhoz különböző szabályzásokat fogok tervezni.

A kapott névleges feszültség $u_n = 9 \text{ [V]}$ alapján beazonosított motor típuszáma: 236667.

1. táblázat: A motor paraméterei

Megnevezés	Jelölés	Katalógus érték	SI érték
Névleges kapocsfeszültség	(u_n)	9 [V]	9 [V]
Armatúra ellenállás	(R)	1,05 [Ω]	1,05 [Ω]
Armatúra induktivitás	(L)	0,13 [mH]	0,00013 [H]
Motorállandó	(k_m)	17 [mNm/A]	0,017 [Nm/A]
Forgórész tehetetlenségi nyomatéka	(J_r)	40,8[gcm ²]	0,00000408 [kgm ²]
Névleges fordulatszám	(ω_n)	3480 [rpm]	364,4248 [rad/s]
Névleges áramerősség	(i_n)	2,62 [A]	2,62 [A]
Sebesség állandó	(k_s)	562 [rpm/V]	58,8525 [(rad/s)/V]

A motor technikai vázlata az alábbi:



1. ábra: A motor technikai vázlata

A villamos oldalra felírható hurok egyenlet:

$$u_0 = R_a i + L_a \frac{di}{dt} + e \quad (1)$$

ahol e az indukált feszültséget jelöli. A mechanikai oldalra felírható a

$$J_r \frac{d\omega}{dt} = \tau_v - \tau_t \quad (2)$$

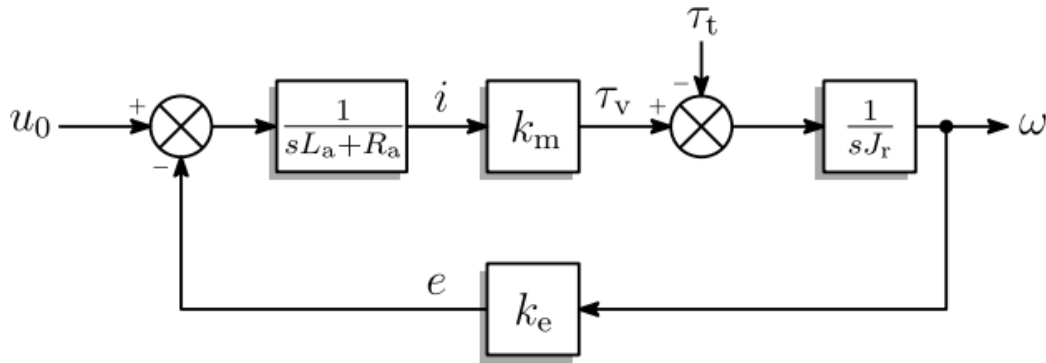
ahol τ_v a villamos nyomaték és τ_t a terhelő nyomaték. A két oldalt a

$$\tau_v = k_m i \quad (3)$$

$$e = k_e \omega \quad (4)$$

csatoló egyenletek kapcsolják össze.

Ezen összefüggések az alábbi hatásvázlaton szemléltethetők:



2. ábra A rendszerre felrajzolható hatásvázlat

1 A rendszer dinamikai modellezése

1.a Rendszer feszültség-szögsebesség átviteli függvénye

A feladat kiírásban található hatásvázlat alapján felírható:

$$W_{\Omega U} = \frac{\frac{1}{sL_a + R_a} \cdot k_m \cdot \frac{1}{sJ_r}}{1 + k_e \cdot \frac{1}{sL_a + R_a} \cdot k_m \cdot \frac{1}{sJ_r}} = \frac{k_m}{(sL_a + R_a)sJ_r + k_e \cdot k_m} = \frac{\frac{k_m}{L_a J_r}}{s^2 + \frac{R_a}{L_a} \cdot s + \frac{k_e \cdot k_m}{L_a \cdot J_r}} \quad (5)$$

Az egyenletbe behelyettesítve

$$W_{\Omega U} = \frac{3.2051 \cdot 10^7}{s^2 + 9323,9323 \cdot s + 5.4460 \cdot 10^5} \quad (6)$$

ahol $k_e = \frac{1}{k_s}$

1.b A rendszer leírása állapottér modellel

Az állapottér modell általános alakja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (8)$$

A rendszer állapot változói:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

A rendszer bemenetei:

$$\mathbf{u} = u(t)$$

A rendszer kimenete:

$$y(t) = \omega(t)$$

A feladat kiírásában szereplő villamos és mechanikai oldalra felírt 1.,2. egyenletek és a 3.,4. kapcsoló egyenletek alapján kifejezhetőek az állapot változók szerinti deriváltak.

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_0}{L_a} - \frac{e}{L_a} - \frac{R_a i}{L_a} = \frac{1}{L_a} u_0 - \frac{k_e}{L_a} \omega - \frac{R_a}{L_a} i \quad (9)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau_v - \tau_t}{J_r} = \frac{k_m i - \tau_t}{J_r} = \frac{k_m}{J_r} i - \frac{1}{J_r} \tau_t \quad (10)$$

Így már fel tudom írni az állapotegyenletet mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dx} \\ \frac{d\omega}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_e}{L_a} \\ \frac{k_m}{J_r} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ \tau_t \end{bmatrix} \quad (11)$$

A behelyettesítés után az alábbi állapot egyenletet kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dx} \\ \frac{d\omega}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9323,9323 & -130.70486 \\ 4166,6666 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7692,3077 & 0 \\ 0 & -245098.0392 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ \tau_t \end{bmatrix} \quad (12)$$

Amennyiben a terhelő nyomatékot zérusnak feltételezzük:

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dx} \\ \frac{d\omega}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9323,9323 & -130.70486 \\ 4166,6666 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7692,3077 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [u_0] \quad (13)$$

A kimeneti egyenlet a 7. egyenlet alapján:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} \quad (14)$$

1.c Rendszer időállandóinak és statikus erősítésének meghatározása

Az átviteli függvény nevezőjének szorzattá alakítása:

$$W_{\Omega U} = \frac{3.2051 \cdot 10^7}{(s + 8008,9235)(s + 67,9996)} \quad (15)$$

Ebből az időállandós alak megkapható a pólusok kiemelésével:

$$W_{\Omega U} = \frac{\frac{3.2051 \cdot 10^7}{8008,9235 \cdot 67,9996}}{\left(\frac{s}{8008,9235} + 1\right)\left(\frac{s}{67,9996} + 1\right)} = \frac{58,8525}{(0,0001249s + 1)(0,01471s + 1)} \quad (16)$$

Így a rendszer időállandói:

$$T_1 = 0,01471 [s] \quad (17)$$

$$T_2 = 0,0001248[s] \quad (18)$$

A rendszer statikus erősítése megegyezik a rendszer időállandós alakjának a számlálójával:

$$A_0 = 58,8525 [-] \quad (19)$$

1.d A rendszer szögsebesség időfüggvénye névleges feszültség esetén

A szögsebesség Laplace tartományban:

$$\Omega(s) = W_{\Omega U}(s) \cdot U(s) \quad (20)$$

A bemenet:

$$U(s) = \frac{u_n}{s} \quad (21)$$

$$\Omega(s) = \frac{3.2051 \cdot 10^7}{(s + 8008,9235)(s + 67,9996)} \cdot \frac{9}{s} \quad (22)$$

A függvényt inverz Laplace transzformálva az alábbi időfüggvényt kapjuk: (Az inverz Laplace transzformációt matlab segítségével végeztem el)

$$\omega(t) = 0,503965 \cdot e^{-8008,92 \cdot t} - 59,3565 \cdot e^{-67,9996 \cdot t} + 58,8525 \quad (23)$$

2 PD pozíciószabályozás analízise

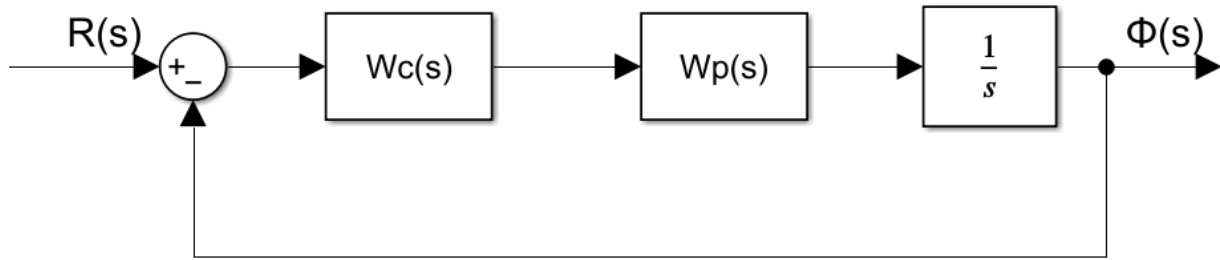
2.a A felnyitott kör frekvencia átviteli függvényének meghatározása

Ideális PD szabályozó átviteli függvénye:

$$W_c = PDs = P(1 + sT_d) \quad (24)$$

Pólus-zérus kiejtést alkalmazunk így a szabályozó időállandóját úgy állítjuk be, hogy megegyezzen a szakasz legnagyobb időállandójával. Így: $T_d = T_1$. P értéke a feladat kiírás alapján ϑ_1 értékű, tehát $P = 192,45 \left[\frac{V}{rad} \right]$

Mivel pozíció szabályozást tervezünk ezért a szögsebességet integrálnunk kell. A szakasz átviteli függvényét kiszámítottam az első feladatban. Így a szabályozási kör hatásvázlata:



3. ábra A szabályozási kör

A felnyitott kör átviteli függvénye:

$$W_o(s) = \frac{A_0}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \cdot \frac{1}{s} \cdot P(T_1s + 1) = \frac{A_0P}{(T_2s + 1)s} \quad (25)$$

A frekvencia átviteli függvény kiszámításához az alábbi **formális** behelyettesítést végzem.

$$s = j\omega$$

Így a nyitott kör frekvencia átviteli függvénye:

$$W_o(j\omega) = \frac{A_0P}{(T_2j\omega + 1)j\omega} = A_0P \frac{1}{(T_2j\omega + 1)} \cdot \frac{1}{j\omega} \quad (26)$$

2.b A vágási körfrekvencia meghatározása

A vágási körfrekvenciát a definíciójából következően tudjuk meghatározni, vagyis az a körfrekvencia érték amely mellett a felnyitott kör erősítése 1.

$$|W_o(\omega_c)| = 1 \quad (27)$$

$$\frac{A_0P}{|(T_2j\omega_c + 1)| \cdot |j\omega_c|} = 1 \quad (28)$$

$$A_0P = \omega_c \sqrt{1 + T_2^2 \omega_c^2} \quad (29)$$

Az egyenletet átrendezve a vágási körfrekvenciára 4-ed fokú összefüggést kapunk:

$$T_1^2 \omega_c^4 + \omega_c^2 - P^2 A_0^2 = 0 \quad (29)$$

Az egyenlet megoldásai:

$$\omega_{c1} = -7996.3532$$

$$\omega_{c2} = 7996.3532$$

$$\omega_{c3} = -11317.4431i$$

$$\omega_{c4} = 11317.4431i$$

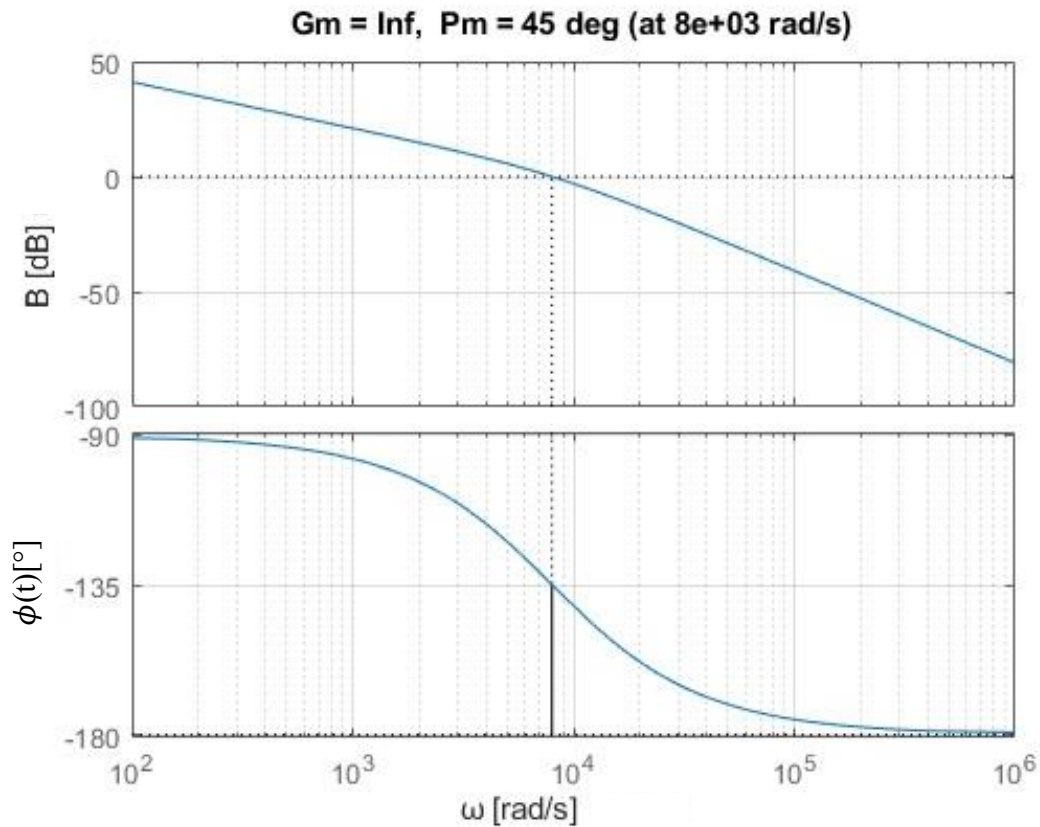
Az egyetlen valós pozitív megoldás ω_{c2} így az lesz a vágási körfrekvencia. A fázis tartalékra az alábbi egyenlet írható fel:

$$\varphi_t = \pi + \varphi(\omega_c) = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctg(T_2 \cdot \omega_c) \quad (30)$$

Az egyenletbe behelyettesítve:

$$\varphi_t = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctg(0,0001249 \cdot 7996,3532) = 0,7862 \text{ [rad]} = 45,045 \text{ [°]} \quad (31)$$

2.c Felnyitott kör Bode-diagramjai és az egységugrásra adott válasz



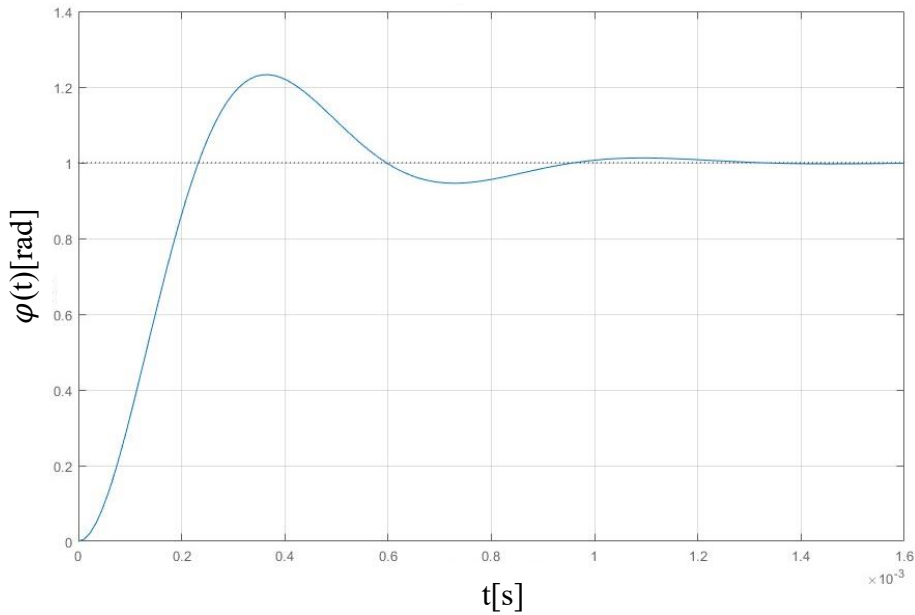
4. ábra Felnyitott kör Bode-diagramja

A zárt szabályozási kör ugrásválaszának meghatározásához először meg kell határoznunk a zárt kör átviteli függvényét. Amely ebben az esetben felírható az alábbi összefüggés segítségével:

$$W_{cl} = \frac{W_o}{1 + W_o} = \frac{A_0 P}{T_2 s^2 + s + A_0 P} \quad (32)$$

A gerjesztés egységugrás így az ugrásválasz:

$$Y(s) = \frac{A_0 P}{T_2 s^2 + s + A_0 P} \cdot \frac{1}{s} \quad (33)$$



5. ábra Zárt szabályozási kör ugrásválasza

3 PI szögsebesség szabályozás tervezése

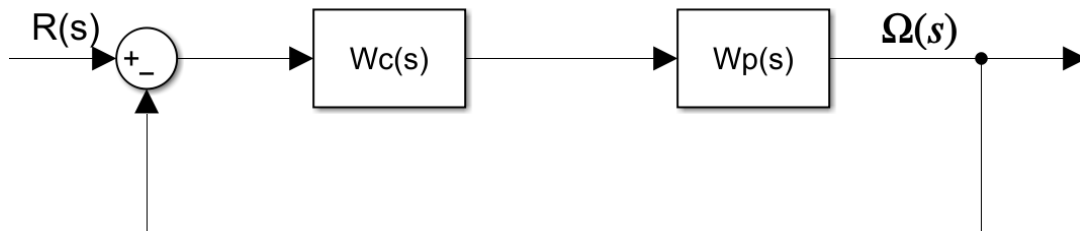
3.a A zárt szabályozási lánc átviteli függvénye

Az ideális PI szabályozó átviteli függvénye:

$$W_c = \frac{1 + T_I s}{T_I s} \quad (34)$$

ahol $T_I = T_1$

Mivel ebben az esetben szögsebességet szabályozunk nem kell integrálnunk. Így a szabályozási kör ebben az esetben:



6. ábra PI szabályozási kör

Ezek alapján a felnyitott kör átviteli függvénye:

$$W_o = W_c W_p = \frac{1 + T_1 s}{T_1 s} \cdot \frac{A_0}{(T_2 s + 1)} = \frac{A_0 P_I}{T_1 s (T_2 s + 1)} \quad (35)$$

A zárt szabályozási kör átviteli függvénye megkapható az alábbi összefüggés alapján:

$$W_{cl} = \frac{W_o}{1 + W_o} = \frac{\frac{A_0 P_I}{T_1 s(T_2 s + 1)}}{1 + \frac{A_0 P_I}{T_1 s(T_2 s + 1)}} = \frac{A_0 P_I}{T_1 s(T_2 s + 1) + A_0 P_I} = \frac{A_0 P \omega_n}{(T_1 T_2 s^2 + T_1 s + P A_0)} \quad (36)$$

Innen a karakterisztikus polinom:

$$p(s) = T_1 T_2 s^2 + T_1 s + A_0 P_I = 1.836 \cdot 10^{-6} s^2 + 0.01471 s + 58,8525 P_I \quad (37)$$

3.b Stabilitás vizsgálata

A stabilitás vizsgálatot a Hurwitz-kritérium alapján fogom megvizsgálni, melynek első feltétele, hogy a karakterisztikus polinom együtthatói azonos előjelűek legyenek.

$$a_2: T_1 T_2 > 0 \text{ és } a_1: T_1 > 0 \quad \text{teljesül}$$

$$a_0: A_0 P_I > 0 \quad \text{teljesül, ha } P_I > 0$$

A kritérium második feltétele, hogy a Hurwitz mátrix főátlójára feszített aldeterminánsok pozitívak legyenek.

A Hurwitz mátrix általános formája:

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

A Hurwitz mátrix a feladatban szereplő rendszerre:

$$H = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ T_1 T_2 & A_0 P_I \end{bmatrix} \quad (39)$$

A főátlóra feszített aldeterminánsok:

$$\Delta_1 = \det(H_1) = T_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \det(H_2) = T_1 \cdot A_0 P_I > 0 \text{ ha } P_I > 0$$

Ezek alapján a rendszer stabil amennyiben:

$$P_I > 0 \left[\frac{V}{rad} \right] \quad (40)$$

3.c A felnyitott kör frekvencia átviteli függvénye

A felnyitott kör frekvencia átviteli függvényének kiszámításához a 35. egyenletbe az $s = j\omega$ formális helyettesítést alkalmazzuk.

$$W_o(j\omega) = \frac{A_0 P_I}{T_1 j\omega (T_2 j\omega + 1)} = A_0 P_I \frac{1}{(T_2 j\omega + 1)} \cdot \frac{1}{T_1 j\omega} \quad (41)$$

3.d P meghatározása a fázistartalék függvényében

A paraméter lista szerint a fázis tartaléknak 30° -nak kell lennie. Tehát $\varphi_t = 30[^\circ]$ Így az alábbi egyenletek írhatóak fel a fázistartaléokra:

$$\varphi_t = \pi + \varphi(\omega_c) \quad (42)$$

$$\varphi(\omega_c) = \frac{\pi}{2} - \arctg(T_2\omega_c) \quad (43)$$

$$\frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctg(T_2\omega_c) \quad (44)$$

Az egyenletet ω_c -re rendezve:

$$\omega_c = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{T_2} = 13871,8623 \left[\frac{rad}{s}\right] \quad (45)$$

Ebből P_I -t a vágási körfrekvencia definíciója segítségével kaphatjuk meg.

$$|W_o(\omega_c)| = 1 \quad (46)$$

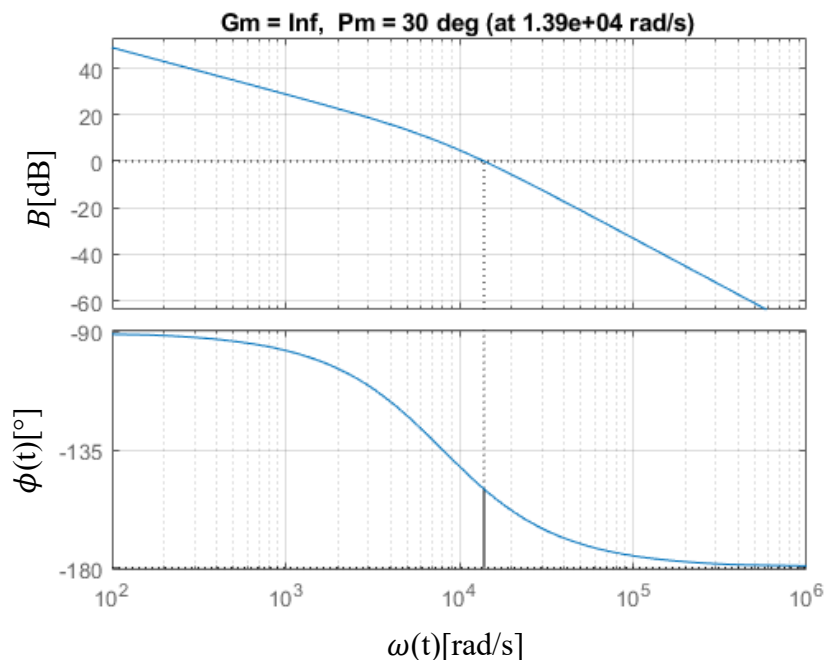
$$\left| A_0 P_I \frac{1}{(T_2 j\omega_c + 1)} \cdot \frac{1}{T_1 j\omega_c} \right| = 1 \quad (47)$$

Az egyenletet P_I -re átrendezve:

$$P_I = \frac{\omega_c T_1 \cdot \sqrt{T_2^2 \omega_c^2 + 1}}{A_0} = 6,9326 \left[\frac{Vs}{rad}\right] \quad (48)$$

3.e A felnyitott kör Bode-diagramja és a zárt szabályozási lánc névleges szögsebessége adott válasza

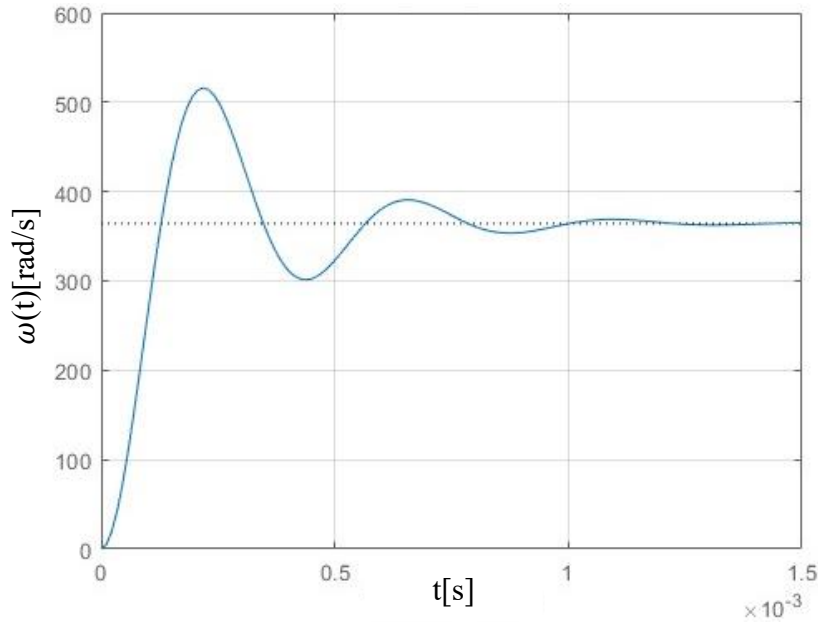
A 41. egyenlet alapján kirajzolható a Bode-diagram:



7. ábra Felnyitott kör Bode-diagramja

A zárt szabályozási lánc válasza a névleges szögsebességre:

$$Y(s) = W_{cl} \cdot \omega_{nev} \frac{1}{s} \quad (49)$$



8. ábra Zárt szabályozási lánc válasza a névleges szögsebességre

Az állandósult értéket végérték tétel segítségével kaphatjuk meg:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A_0 P \omega_{nev}}{(T_1 T_2 s^2 + T_1 s + P A_0) s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A_0 P \omega_{nev}}{(T_1 T_2 s^2 + T_1 s + P A_0)} \quad (50)$$

A határérték számítást elvégezve az eredmény:

$$y(\infty) = \omega_n = 364,4248 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (51)$$

tehát visszakaptuk a névleges szögsebességet a vártnak megfelelően hiszen a PI szabályozó megszünteti a maradó hibát.

4 Állapot visszacsatolás tervezése

4.a A pólusallokációhoz használt pólusok megadása

A paraméterként kapott adatok:

$$\Delta v = 5 [\%] \quad (52)$$

$$T_{20\%} = 1 [ms] = 0,001 [s] \quad (53)$$

A pólusokat az alábbi formában tudjuk felírni:

$$\tilde{p}_{1,2} = -\beta \pm \omega_d \quad (54)$$

ahol:

$$\beta = \zeta \cdot \omega_n \quad (55)$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (56)$$

Az egyenletben szereplő jelölések magyarázata:

ζ : relatív csillapítási tényező [-]

ω_n : csillapítatlan sajátkörfrekvencia $\left[\frac{rad}{s}\right]$

ω_d : csillapított sajátkörfrekvencia $\left[\frac{rad}{s}\right]$

Így kapott minőségi jellemzők segítségével az alábbi egyenletek írhatóak fel:

$$\Delta v = e^{-\frac{\omega_n \zeta \pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\beta \pi}{\omega_d}} \quad (57)$$

$$T_{20\%} = \frac{1}{\zeta \cdot \omega_n} \ln\left(\frac{100}{\alpha}\right) = \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{100}{\alpha}\right) \quad (58)$$

A behelyettesítés után β kifejezhető az 58. egyenletből.

$$\beta = \frac{\ln(5)}{0,001} = 1609,4379 \left[\frac{rad}{s}\right] \quad (59)$$

Ezek után az 57. egyenletből β felhasználásával ω_d is kiszámítható.

$$\omega_d = -\frac{\beta \pi}{\ln(\Delta v)} = 1687,8004 \left[\frac{rad}{s}\right] \quad (60)$$

Így az 54. egyenletbe behelyettesítve megkapjuk a pólusokat.

$$\tilde{p}_1 = -1609,4379 + 1687,8004i \quad (61)$$

$$\tilde{p}_2 = -1609,4379 - 1687,8004i \quad (62)$$

4.b A rendszer irányíthatósági kanonikus alakja

A rendszer irányíthatósági kanonikus alakját a 5. egyenletben felírt átviteli függvény alapján határozhatjuk meg. (A később levezetett M_c mátrix determinánsa nem 0 így a rendszer irányítható)

$$W_{\Omega U} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k_m}{L_a J_r}}{s^2 + \frac{R_a}{L_a} \cdot s + \frac{k_e \cdot k_m}{L_a \cdot J_r}} \quad (63)$$

Átrendezve $Y(s)$ -re és $\frac{k_m}{L_a J_r}$ -t kiemelve:

$$Y(s) = \frac{k_m}{L_a J_r} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{R_a}{L_a} \cdot s + \frac{k_e \cdot k_m}{L_a \cdot J_r}} U(s) \quad (64)$$

Az állapotváltozó bevezetése:

$$X(s) := \frac{1}{s^2 + \frac{R_a}{L_a} \cdot s + \frac{k_e \cdot k_m}{L_a \cdot J_r}} U(s) \quad (65)$$

Az egyenlet rendezése után az alábbi alakot kapjuk:

$$s^2 X(s) = -\frac{R_a}{L_a} s \cdot X(s) - \frac{k_e \cdot k_m}{L_a \cdot J_r} \cdot X(s) + U(s) \quad (66)$$

Inverz Laplace transzformáció után az állapot egyenlet a következő:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{R_a}{L_a} \cdot \dot{x}(t) - \frac{k_e \cdot k_m}{L_a \cdot J_r} \cdot x(t) + u(t) \quad (67)$$

A kimeneti egyenlet

$$Y(s) = \frac{k_m}{L_a J_r} X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{k_m}{L_a J_r} x(t) \quad (68)$$

Így minden egyenletünk megvan az állapottér modell elkészítéséhez:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_m k_e}{L_a J_r} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (69)$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{k_m}{L_a J_r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Ahol:

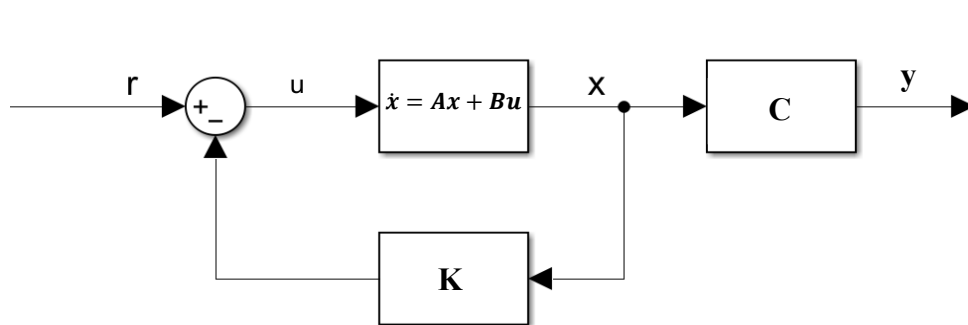
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_m k_e}{L_a J_r} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_c \quad (71)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_c \quad (72)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{k_m}{L_a J_r} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_c \quad (73)$$

4.c A szabályozó K mátrixának meghatározása

A szabályozási kör a K állapot visszacsatolással:



9. ábra Az állapottvisszacsatolás hatásvázlata

A 67. és 68. egyenletek alapján fel tudjuk írni a módosított rendszermátrixot azaz $\tilde{\mathbf{A}}$ -ot. Ehhez szükségünk van a karakterisztikus polinom együtthatóira:

$$\tilde{p}(s) = (s + \tilde{p}_1)(s + \tilde{p}_2) = s^2 + \underbrace{3218,8758}_{a_1}s + \underbrace{5438960.8011}_{a_0} \quad (74)$$

Ezekből $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5438960.8011 & -3218,8758 \end{bmatrix} \quad (75)$$

A módosított rendszer mátrix segítségével \mathbf{K}_c -re a következő egyenlet írható fel:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K}_c \quad (76)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_m k_e}{L_a J_r} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [k_{1c} \quad k_{2c}] \quad (77)$$

Így a \mathbf{K}_c mátrix elemei:

$$k_{1c} = -\frac{k_m k_e}{L_a J_r} + a_0 = 4894357,2235 \quad (78)$$

$$k_{2c} = -\frac{R_a}{L_a} + a_1 = -4858,0473 \quad (79)$$

Azonban ez nem az eredeti alakban van így vissza kell transzformálnunk. A transzformációs mátrix:

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{M}}_c \cdot \mathbf{M}_c^{-1} \quad (80)$$

ahol \mathbf{M}_c az eredeti irányíthatósági mátrix és $\tilde{\mathbf{M}}_c$ az irányíthatósági kanonikus alak irányíthatósági mátrixa.

Az irányíthatósági mátrixok kiszámítása:

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a^2} \\ 0 & \frac{k_m}{J_r L_a} \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_c = [\mathbf{B}_c | \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \quad (82)$$

Így a transzformációs mátrix:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_a & \frac{R_a \cdot J_r}{k_m} \\ 0 & \frac{J_r L_a}{k_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_r L_a}{k_m} \\ L_a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3,12 \cdot 10^{-8} \\ 1,3 \cdot 10^{-4} & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

A transzformációs mátrix segítségével már ki tudjuk számítani \mathbf{K} -t.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c \mathbf{T} = [-0.63146 \quad 0.152704] \quad (84)$$

Az eredmény ellenőrzése az Ackermann formulával:

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_n^T \cdot \mathbf{M}_c^{-1} \cdot \tilde{p}(\mathbf{A}) \quad (85)$$

Ahol:

\mathbf{e}_n^T : az n dimenziós egységvektor transzponáltja

\tilde{p} : A módosított karakterisztikus polinom \mathbf{A} -ban kiértékelve

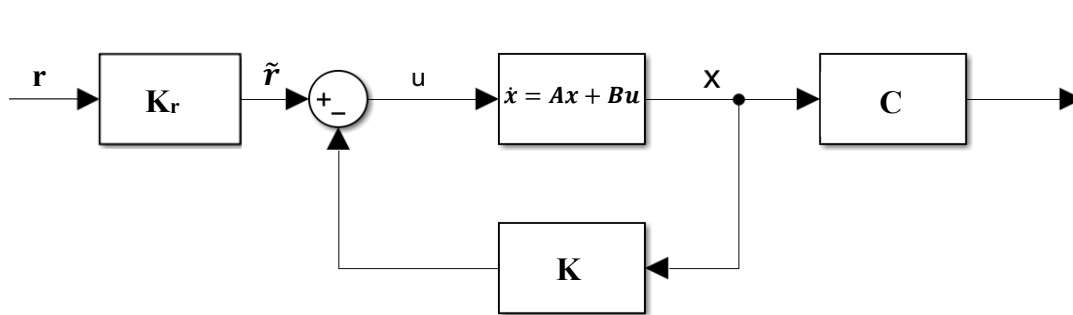
A formulát kiértékelve:

$$\mathbf{K}_{ack} = [-0.631546 \quad 0.152704] \quad (86)$$

Valóban ugyan azt az eredményt kapjuk.

4.d Visszacsatolástól függő és független alapjelkompenzáció

A maradó hiba megszüntetése érdekében alapjel kompenzációt hajtunk végre. Ennek két módja van az állapot visszacsatolástól függő és az állapotvisszacsatolástól független alapjel kompenzáció. Elsőként előbbit tervezem meg.



10. ábra A visszacsatolástól függő alapjelkompenzáció

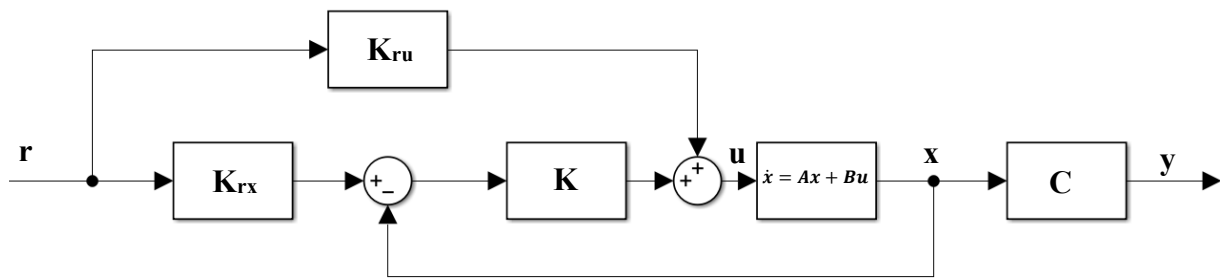
Az alapjelet kompenzáló \mathbf{K}_r mátrixot az alábbi módon számíthatjuk:

$$\mathbf{K}_r = - \left(\mathbf{C} \left(\underbrace{\mathbf{A} - \mathbf{BK}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \right)^{-1} \mathbf{B} \right)^{-1} \quad (87)$$

Az egyenletből minden mátrixot ismerünk az egyenletbe behelyettesítve és kiértékelve az eredmény:

$$\mathbf{K}_r = 0.1696955 \quad (89)$$

A visszacsatolástól független alapjelkompenzáció hatásvázlata:



11. ábra A visszacsatolástól függő alapjel kompenzáció hatásvázlata

A K_{rx} és K_{ru} mátrixok kiszámítása:

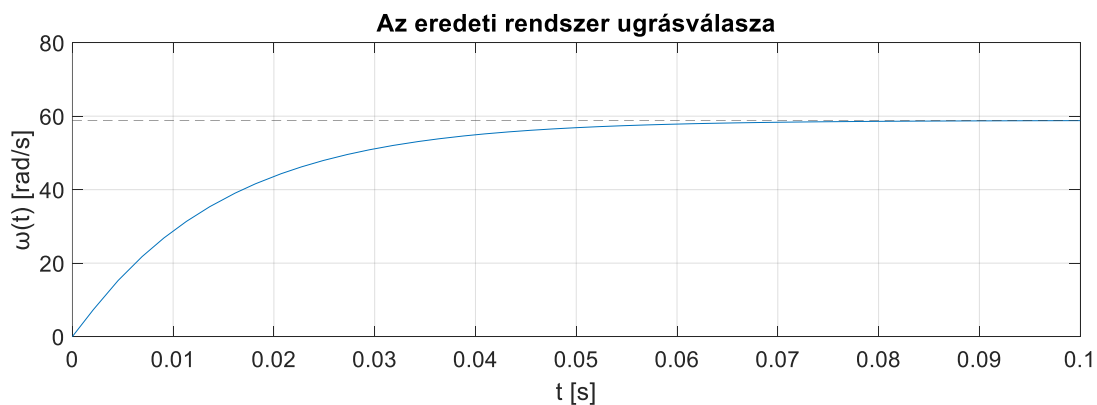
$$\begin{bmatrix} K_{rx} \\ K_{ru} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,0169916 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Így:

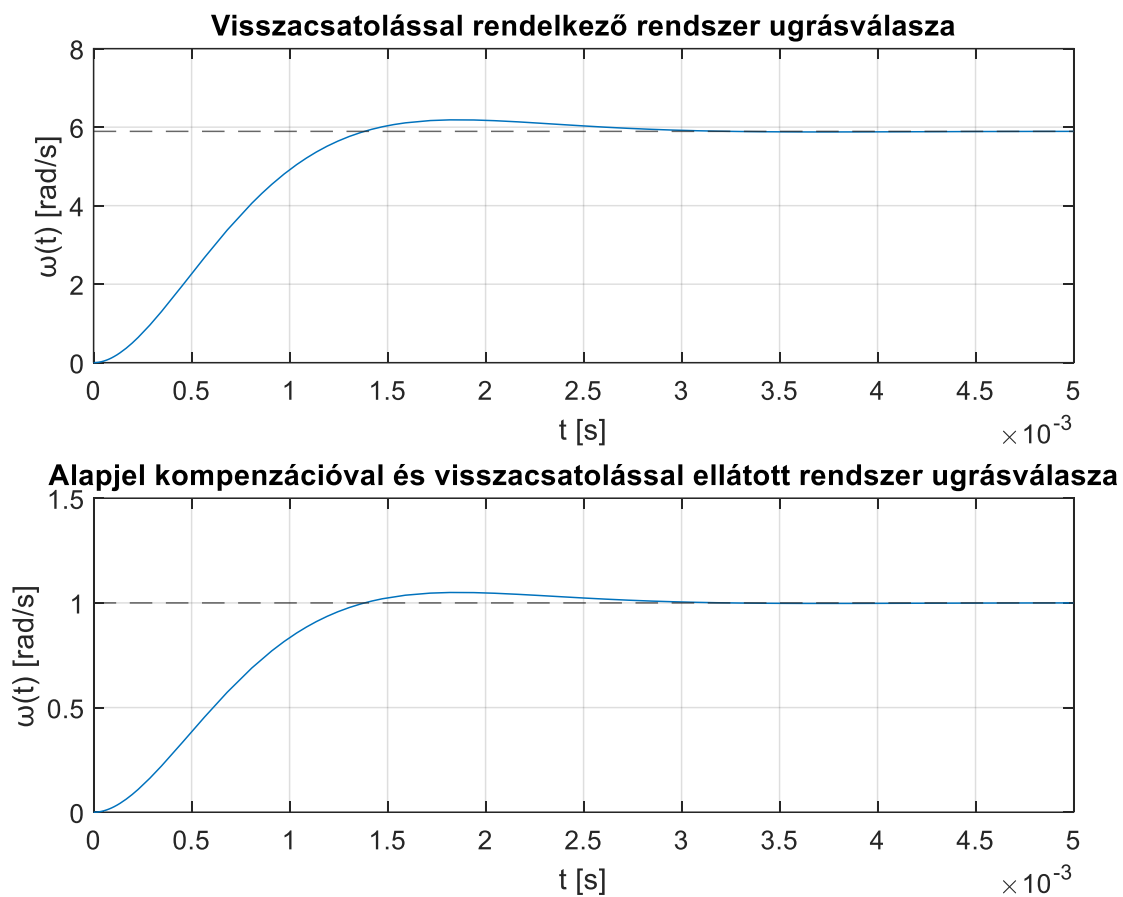
$$K_{rx} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$K_{ru} = 0,0169916 \quad (90)$$

Az eredeti állapot visszacsatolt rendszer és az állapot visszacsatolással rendelkező rendszerek ugrásválaszának összehasonlítása:



12. ábra Az eredeti rendszer ugrásválasza



13. ábra A visszacsatolással rendelkező és az alapjel kompenzációval rendelkező rendszerek ugrásválaszai

5 Mellékletek

A számításokhoz használt matlab kód:

```
clear
clc

%% Adatok
Ra=1.05;
La=0.00013;
km=0.017;
ks=58.8525;
ke=1/ks
Jr=0.00000408;
wn=364.4248;
ia=2.62;

%% Az 1. feladat

%számláló együtthatója
szaml0=km
%nevező együtthatói
nev2=La*Jr
nev1=Jr*Ra
nev0=ke*km

nev0alt=(km*ke)/(La*Jr)
nev1alt=Ra/La
%Állapottér modell
format longG
A=[-Ra/La -ke/La;km/Jr 0]
B=[1/La;0]
C=[0 1]
D=0;
%időállandó

den=[nev2 nev1 nev0]
p=roots(den)
T1=-1/p(2)
T2=-1/p(1)
s = tf('s');

%gyöktényezős és időállandós alak kiszámítása
G = szaml0/(La*Jr*(s^2)+Jr*Ra*s+ke*km);
[y_eredeti,p,k] = zpndata(G)
G1 = zpk(y_eredeti,p,k,'DisplayFormat','timeconstant')
G2= zpk(y_eredeti,p,k,'DisplayFormat','roots')
Amp=szaml0/(ke*km)
[w, zeta, p] = damp(G)
tau = 1./w

%idő függvény kiszámítása
syms s;
Wp=(szaml0/(La*Jr*(s^2)+Jr*Ra*s+ke*km))*1/s;
Wp=vpa(Wp,6)
f=vpa(ilaplace(Wp),6)
```

```
%% 2. feladat PD szabályozó
```

```
%vágási körfrekvencia meghatározása
```

```
syms omega;  
P=192,45;  
freq=(tau(2)^2)*(omega^4)+omega^2-(P^2)*(Amp)^2==0;  
freq=vpa(freq,6);  
freqs=solve(freq,omega)
```

```
%fázistartalék meghatározása
```

```
fi_t=pi()/2-atan(tau(2)*freqs(2));  
fi_t=vpa(fi_t,6)  
fi_td=vpa(rad2deg(fi_t))
```

```
%Bode diagramm kirajzolása
```

```
fv = tf([Amp*P],[tau(2) 1 0]);  
figure(1);clf  
bode(fv)  
margin(fv);
```

```
grid on  
grid minor
```

```
%PD ugrásválasz
```

```
fv2=tf([Amp*P],[tau(2) 1 Amp*P])  
figure(2);clf  
xlabel('t [s]');  
ylabel('φ(t) [rad]');  
step(fv2)  
grid on
```

```
%% 3. feladat PI szabályozó tervezése
```

```
%PI szabályozó fázistartalék
```

```
wcpi=tan(pi()/3)/tau(2)  
P_pi=(tau(1)*wcpi*sqrt(tau(2)^2*wcpi^2+1))/Amp  
%felnyitott kör
```

```
Wopi=tf([Amp*P_pi],[tau(1)*tau(2) tau(1) 0])  
figure(1);clf  
bode(Wopi)  
margin(Wopi)  
grid on
```

```
%PI zárt szabályozási kör
```

```
fv_pi=tf([P_pi*Amp],[tau(1)*tau(2) tau(1) P_pi*Amp])
```

```
%PI válasza a névleges szögsebességre
```

```
figure(2);clf  
Config = RespConfig('Amplitude',364.4248);  
step(fv_pi,Config)  
s=stepinfo(step(fv_pi,Config))  
grid on
```

```
%% 4. feladat állapotter modell
```

```
%beta és omega_d számítása
```

```
Beta=log(5)/0.001
wd=-(Beta*pi())/log(0.05)
p1=complex(-Beta,wd)
p2=complex(-Beta,-wd)

syms s;
ps=poly([p1 p2])
ps=vpa(ps,8)
Ah=[0 1;-ps(3) -ps(2)]

%irányíthatósági kanonikus alak
Ball=[1/La;0]
Mc=[Ball A*Ball]
ir=det(Mc) %nem nulla a rendszert irányítható

Bc=[0;1]
Ac=[0 1;-(km*ke)/(La*Jr) -Ra/La]
Cc=[km/(La*Jr) 0]

Mch=[Bc Ac*Bc]

%transzformációs mátrix
T=Mch*(Mc^-1)
syms k1 k2
k=[0 0;k1 k2]
%Kc kiszámítása
kegy=vpa([0 1;((-km*ke)/(La*Jr)) (-Ra/La)]-k)==Ah)
k_s=solve(kegy)
%K_c vektor
k_c=[k_s.k1 k_s.k2]

% K vektor
k_s=[k_s.k1 k_s.k2]*T
%K ellenőrzése Ackermann formulával
k_ack=place(A,B,[p1 p2])

% Kr kiszámítása
kr=inv(-C*inv(A-B*k_s)*B)

%krx és kru számítása
syms krx1 krx2 kru;
krx=[krx1;krx2;kru];

krxu=inv([A B; C 0])*[0;0;1];
krx=vpa([krxu(1) krxu(2)],6)
kru=vpa(krxu(3),6)

syms s
[b, a] = ss2tf(A,B,C,D)
Y_eredeti = ((b(1)*s^2 + b(2)*s + b(3))/(a(1)*s^2 + a(2)*s + a(3)))*(1/s);
y_eredeti = ilaplace(Y_eredeti);

figure(3)
clf;
fplot(y_eredeti,[0 0.1]);
```

```
ylim([0 80])
title('Az eredeti rendszer ugrásválasza','FontSize',22);

xlabel("t [s]");
ylabel ("ω(t) [rad/s]");
yline(Amp,'--');
grid on

figure(4)
clf;
[d, c] = ss2tf(A-B*k_ack,B,C,D)
Y_visszacsat = ((d(1)*s^2 + d(2)*s + d(3))/(c(1)*s^2 + c(2)*s + c(3)))*(1/s);
y_visszacsat = ilaplace(Y_visszacsat);

subplot(2,1,1);
fplot(y_visszacsat,[0 0.005]);
ylim([0 8])
title('Visszacsatolással rendelkező rendszer ugrásválasza');
xlabel("t [s]");
ylabel ("ω(t) [rad/s]");
yline(dcgain(A-B*k_ack,B,C,D),'--');
grid on

Y_alapjel=Y_visszacsat*kr;
y_alapjel = ilaplace(Y_alapjel);

subplot(2,1,2);
fplot(y_alapjel,[0 0.005]);
ylim([0 1.5])
title('Alapjel kompenzációval és visszacsatolással ellátott rendszer ugrásválasza');
xlabel("t [s]");
ylabel ("ω(t) [rad/s]");
yline(1,'--');
grid on
```