Metody numeryczne

Interpolacja

1 Wprowadzenie do interpolacji

1.1 Przykład wprowadzający

Problem

Temperatura	24	25	23	20	16	[°C]
Czas	12	13	14	15	16	[godz.]

Jaka temperatura była o godzinie 14:30? O której godzinie temperatura była równa 21°C?

1.2 Ogólne sformułowanie problemu interpolacji

Załóżmy, że w pewnym przedziale $[a, b]$ danych jest $n + 1$ punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ oraz, że w każdym z tych punktów znane są:

- wartość funkcji $f(x_i)$
- wartości $f'(x_i), f''(x_i), \ldots, f^{(d_i)}(x_i)$ kolejnych jej pochodnych,

przy czym dla poszczególnych punktów x_i wartości d_i mogą być różne.

Punkty x_i nazywamy *węzłami interpolacji* o krotności $d_i + 1$.

Problem
Wyznaczyć funkcję $F(x)$ taką, że dla każdego x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ zachodzi

$$F(x_i) = f(x_i), F'(x_i) = f'(x_i), \ldots, F^{(d_i)}(x_i) = f^{(d_i)}(x_i). \tag{1}$$

Szczególnym przypadkiem interpolacji jest *interpolacja w sensie Lagrange'a*, dla której wszystkie węzły mają krotność 1. Wówczas wymagamy jedynie

$$F(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

W dalszej części wykładu będziemy zajmować się głównie interpolacją w sensie Lagrange'a.

Wybrane zastosowania interpolacji

- obliczanie wartości funkcji w punktach x różnych od węzłów interpolacji. Gdy $x \in [a, b]$, to mówimy o interpolacji *w wąskim sensie* oraz o *ekstrapolacji*, gdy $x \notin [a, b]$,
- obliczanie wartości funkcji $f(x)$, gdy obliczenie z określającego ją wzoru jest trudne rachunkowo,
- całkowanie numeryczne (np. reguła trapezów),
- różniczkowanie numeryczne,
- wyznaczanie miejsc zerowych funkcji, itp.

Ponieważ wartości funkcji $f(x)$ pomiędzy węzłami interpolacji nie są znane, więc oszacowanie błędu interpolacji bez dodatkowych informacji o funkcji jest niemożliwe. O błędach, często niesłusznie utożsamianych z błędami interpolacji powiemy w kontekście aproksymacji interpolacyjnej.

Zanim przedstawimy metody interpolacji niezbędne będzie wprowadzenie pojęć związanych z układami funkcji ortogonalnych.

1.3 Funkcje ortogonalne

Niech L będzie przestrzenią liniową. *Iloczyn skalarny* elementów $e_1, e_2 \in L$ jest odwzorowaniem $\langle \cdot \rangle : L \times L \to \mathbb{R}$, spełniającym następujące warunki:

- $\langle e, e \rangle \geq 0$ (nieujemny kwadrat),
- $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle$ (symetria),
- $\langle e_1 + e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle + \langle e_2, e_3 \rangle$ (addytywność),
- $\langle \alpha e_1, e_2 \rangle = \alpha \langle e_1, e_2 \rangle$ (jednorodność),
- $\langle e, e \rangle = 0 \Leftrightarrow e = \mathbf{0}$.

Przykład 1: W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ iloczyn skalarny wektorów x i y zdefiniowany jest jako

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Przykład 2: W przestrzeni liniowej funkcji całkowalnych iloczyn skalarny funkcji f i g w przedziale $[a, b]$ zdefiniowany jest jako

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

lub z funkcją wagową $w(x) \geq 0$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx.$$

Funkcje f i g określone w przedziale $[a, b]$ nazywamy *funkcjami ortogonalnymi* jeżeli ich iloczyn skalarny jest równy zero, tzn.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx = 0.$$

Zbiór funkcji $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ nazywamy *układem funkcji ortogonalnych* (układem ortogonalnym) w $[a, b]$ jeżeli dla każdych dwóch różnych funkcji φ_i, φ_j zachodzi

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$$

W dalszej części wykładu będziemy używali różnych układów funkcji ortogonalnych, np.

1. Układ funkcji trygonometrycznych: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \sin kx, \cos kx$, ortogonalny w przedziale $[-\pi, \pi]$ z funkcją wagową $w(x) = 1$,

2. Układ wielomianów Czebyszewa: $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$, ortogonalny w przedziale $(-1, 1)$ z funkcją wagową $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$,
3. Układ wielomianów Hermita: $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_n(x)$, ortogonalny w przedziale $(-\infty, \infty)$ z funkcją wagową $w(x) = e^{-x^2}$.
4. ...

1.4 Problem interpolacji w sensie Lagrange'a

Przyjmijmy, że funkcja $F(x)$ jest wielomianem uogólnionym danym wzorem

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x),$$

gdzie $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ jest układem funkcji ortogonalnych w $[a, b]$.

Aby wielomian uogólniony był funkcją interpolującą muszą zachodzić równości

$$\begin{gathered}
F(x_0) = a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \ldots + a_n\varphi_n(x_0) = f(x_0),\\
F(x_1) = a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \ldots + a_n\varphi_n(x_1) = f(x_1),\\
\ldots\\
F(x_n) = a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \ldots + a_n\varphi_n(x_n) = f(x_n).
\end{gathered}$$

Powyższe równania tworzą układ $n+1$ równań z $n+1$ niewiadomymi $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

2 Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Przyjmijmy, mastępujący układ funkcji

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = x^n,$$

liniowo niezależnych w $(-\infty, \infty)$.

Funkcja $F(x)$ jest więc klasycznym wielomianem

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

Aby $F(x)$ była funkcją interpolującą musi być spełniony układ równań:

$$\begin{gathered}
F(x_0) = a_0 + x_0a_1 + x_0^2a_2 + \ldots + x_0^na_n = f(x_0),\\
F(x_1) = a_0 + x_1a_1 + x_1^2a_2 + \ldots + x_1^na_n = f(x_1),\\
\ldots\\
F(x_n) = a_0 + x_na_1 + x_n^2a_2 + \ldots + x_n^na_n = f(x_n).
\end{gathered}$$

Wyznacznik macierzy głównej tego układu jest wyznacznikiem Vandermonde'a

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ & \ldots & \ldots & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

Ponieważ $x_0, \ldots, x_n$ są parami różne, więc $\det V \neq 0$ a układ ma jedno rozwiązanie będące wektorem współczynników wielomianu interpolującego $F(x)$.

Dołóżmy do układu równanie $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=f(x)$. Tworząc układ $n+2$ równań z $n+1$ niewiadomymi. Wyznacznik macierzy rozszerzonej takiego układu jest zawsze równy 0.

$$\det[A|B]=\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & x & \ldots & x^n & f(x) \\ 1 & x_0 & \ldots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n & f(x_1) \\ & \ldots & \ldots & & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n & f(x_n) \end{array}\right|=0$$

Rozwijając wyznacznik względem pierwszego wiersza, dla $n=1$ otrzymujemy *wielomian interpolacyjny Lagrange'a stopnia 1* (wielomian interpolacji liniowej) oznaczany $L_1(x)$

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1),$$

lub oznaczając $P_0(x)=(x-x_1)/(x_0-x_1)$, $\quad P_1(x)=(x-x_0)/(x_1-x_0)$,

$$L_1(x)=P_0(x)f(x_0)+P_1(x)f(x_1).$$

Zauważmy, że

$$\begin{array}{ll} P_0(x_0)=(x_0-x_1)/(x_0-x_1)=1, & P_1(x_0)=(x_0-x_0)/(x_1-x_0)=0, \\ P_0(x_1)=(x_1-x_1)/(x_0-x_1)=0, & P_1(x_1)=(x_1-x_0)/(x_1-x_0)=1. \end{array}$$

Zatem $L_1(x_0)=f(x_0)$ oraz $L_1(x_1)=f(x_1)$, czyli $L(x)$ interpoluje $f(x)$.

Ogólnie dla dowolnego n otrzymujemy *wielomian interpolacyjny Lagrange'a stopnia n*

$$L_n(x)=f(x_0)P_{n,0}(x)+\cdots+f(x_n)P_{n,n}=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)P_{n,k}(x),$$

gdzie

$$P_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

Zauważmy, że dla $i\neq k$, $P_{n,k}(x_i)=0$ oraz $P_{n,k}(x_k)=1$, czyli $L_n(x_i)=f(x_i)$ dla każdego $i=0,\ldots,n$.

W praktyce stosowana jest postać wymagająca wykonania mniejszej liczby działań arytmetycznych. Po podstawieniu

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

otrzymujemy wyrażenie o liczniku niezależnym od k

$$P_{n,k}(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\cdot\frac{1}{(x-x_k)}.$$

Ostatecznie

$$L_n(x)=\omega_{n+1}(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\cdot\frac{1}{(x-x_k)}.$$

Przykład: Należy wyznaczyć temperaturę o godz. 14:30, czyli $T(14.5)$.

Temperatura	24	25	23	20	16	[°C]
Czas	12	13	14	15	16	[godz.]

Użyjemy wielomianu $L_4(t)$.

$\omega_5(t) = (t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_3)(t-t_4) = (14.5-12)(14.5-13)\dots(14.5-15)(14.5-16) = 1.40625$

$$\begin{aligned} L_4(14.5) = 1.40625 \cdot \Bigg(& \frac{24}{(12-13)(12-14)(12-15)(12-16)} \cdot \frac{1}{(14.5-12)} \\ & + \frac{25}{(13-12)(13-14)(13-15)(13-16)} \cdot \frac{1}{(14.5-13)} + \dots + \\ & + \frac{16}{(16-12)(16-13)(16-14)(16-15)} \cdot \frac{1}{(14.5-16)} \Bigg) = \\ & = 1.40625(0.40000 - 2.77778 + 11.50000 + 6.66667 - 0.44444) \approx 21.6 \end{aligned}$$

3 Różnice progresywne

Załóżmy, że węzły interpolacji $x_0, x_1, \dots, x_n$ są równoodległe, tzn. dla każdego $i = 1, \dots, n$

$$x_i = x_0 + ih,$$

gdzie h jest stałym przyrostem argumentu. Oznaczmy $y_i = f(x_0 + ih)$.

Różnicę progresywną (różnicę skończoną) Δy_i rzędu pierwszego funkcji $f(x)$ w punkcie x_i, $i = 0, 1, \dots, n-2$ definiujemy następująco:

$$\Delta y_i = f(x_i + h) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i.$$

Różnicę progresywną rzędu k można zdefiniować następująco:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i,$$

gdzie $i = 0, 1, \dots, n-k$.

4 Wzory interpolacyjne Newtona

Wzory Newtona stosowane są dla węzłów równoodległych.

4.1 Pierwszy wzór Newtona (progresywny)

Pierwszy wzór interpolacyjny Newtona jest wielomianem postaci

$$N_n^I(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Pomijając szczegóły procesu wyznaczenia współczynników mamy

$$a_k = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Stąd po podstawieniu

$$N_n^I(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Często stosowaną postacią wzoru jest

$$N_n^I(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

gdzie $q = (x - x_0)/h$.

Przykład: Wartości funkcji $K(x)$ dane są w węzłach interpolacji $x_i = (i+2)/10, i = 0, 1, \dots, 4$. Stosując pierwszy wzór Newtona obliczyć wartość funkcji dla $x = 0.25$.

x_i	$y_i = K(x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0.2	**1.75270**				
		−0.38024			
0.3	1.37246		**0.12231**		
		−0.25793		**−0.05449**	
0.4	1.11453		0.06782		**0.02988**
		−0.19011		−0.02461	
0.5	0.92442		0.04321		
		−0.14690			
0.6	0.77752				

$$\begin{aligned} N_4^I(x) = 1.75270 + &\frac{-0.38024}{1!(0.1)}(x-0.2) + \frac{0.12231}{2!(0.1)^2}(x-0.2)(x-0.3)+ \\ &+ \frac{-0.05449}{3!(0.1)^3}(x-0.2)(x-0.3)(x-0.4)+ \\ &+ \frac{0.02988}{4!(0.1)^4}(x-0.2)(x-0.3)(x-0.4)(x-0.5). \end{aligned}$$

Po podstawieniu $x = 0.25$ mamy

$$K(0.25) \approx N_4^I(0.25) = 1.54272.$$

Ponieważ funkcja $K(x)$ jest znaną funkcją Mcdonalda wiadomo, że dokładna wartość wynosi $K(0.25) = 1.54151$. Do oszacowania błędu popełnianego podczas korzystania z pierwszego wzoru Newtona powrócimy przy aproksymacji interpolacyjnej.

4.2 Drugi wzór Newtona (wsteczny)

Drugi wzór interpolacyjny Newtona jest wielomianem postaci

$$N_n^{II}(x) = b_0 + b_1(x - x_n) + b_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + b_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1).$$

Pomijając szczegóły procesu wyznaczenia współczynników mamy

$$b_k = \frac{\Delta^k f(x_{n-k})}{k!h^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Stąd po podstawieniu

$$N_n^{II}(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1).$$

Definiując tym razem $q = (x - x_n)/h$, można $N_n^{II}(x)$ zapisać jako

$$N_n^{II}(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \cdots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Przykład: Wartości funkcji $K(x)$ dane są w węzłach interpolacji $x_i = (i+2)/10, i = 0, 1, \ldots, 4$. Stosując drugi wzór Newtona obliczyć wartość funkcji dla $x = 0.55$.

x_i	$y_i = K(x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0.2	1.75270				
		−0.38024			
0.3	1.37246		0.12231		
		−0.25793		−0.05449	
0.4	1.11453		0.06782		**0.02988**
		−0.19011		**−0.02461**	
0.5	0.92442		**0.04321**		
		−0.14690			
0.6	**0.77752**				

$$N_4^{II}(x) = 0.77752 + \frac{-0.14690}{1!(0.1)}(x-0.6) + \frac{0.04321}{2!(0.1)^2}(x-0.6)(x-0.5) +$$
$$+ \frac{-0.02461}{3!(0.1)^3}(x-0.6)(x-0.5)(x-0.4) +$$
$$+ \frac{0.02988}{4!(0.1)^4}(x-0.6)(x-0.5)(x-0.4)(x-0.3).$$

Po podstawieniu $x = 0.55$ mamy

$$K(0.55) \approx N_4^{II}(0.55) = 0.84594.$$

Dokładna wartość funkcji Macdonalda $K(x)$ w punkcie $x = 0.55$ wynosi 0.84657. Do oszacowania błędu popełnianego podczas korzystania z drugiego wzoru Newtona powrócimy przy aproksymacji interpolacyjnej.

4.3 Informacje o innych wzorach interpolacyjnych

- Wzory interpolacyjne Gaussa (progresywny, wsteczny),
- Wzorór interpolacyjny Stirlinga,
- Wzór interpolacyjny Bessela.

4.4 Wybór wzoru interpolacyjnego

Jeżeli x jest punktem w którym chcemy oszacować wartość funkcji, to w przypadku węzłów równoodległych wybór wzoru zależy głównie od położenia x w przedziale $[a, b]$.

1. Blisko początku przedziału - pierwszy Newtona (progresywny),
2. Blisko końca przedziału - drugi Newtona (wsteczny),
3. W pobliżu środka należy rozważyć wybór wzorów Gaussa, Stirlinga lub Bessela.

Warto minimalizować ilości obliczeń, np. stosując schemat Hornera we wzorach Newtona.

5 Interpolacja Czebyszewa

Przyjmijmy, że bazę tworzy układ funkcji

$$\varphi_0(x) = T_0(x), \quad \varphi_1(x) = T_1(x), \quad \varphi_2(x) = T_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = T_n(x),$$

gdzie $T_i(x)$ jest i-tym wielomianem Czebyszewa pierwszego rodzaju.

Wielomiany Czebyszewa można zdefiniować rekurencyjnie:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2\,x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Funkcja $F(x)$ jest więc dana jako

$$F(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \ldots + a_n T_n(x).$$

Aby $F(x)$ była funkcją interpolującą musi być spełniony układ równań:

$$\begin{gathered}
F(x_0) = T_0(x_0)a_0 + T_1(x_0)a_1 + T_2(x_0)a_2 + \ldots + T_n(x_0)a_n = f(x_0),\\
F(x_1) = T_0(x_1)a_0 + T_1(x_1)a_1 + T_2(x_1)a_2 + \ldots + T_n(x_1)a_n = f(x_1),\\
\ldots\\
F(x_n) = T_0(x_n)a_0 + T_1(x_n)a_1 + T_2(x_n)a_2 + \ldots + T_n(x_n)a_n = f(x_n).
\end{gathered}$$

Wielomian ze współczynnkiami $a_0, a_1, \ldots, a_n$ wyznaczonymi jako rozwiązanie powyższego układu nazywany jest *wielomianem interpolacyjnym Czebyszewa*.

Zalety interpolacji Czebyszewa:

- mniej wrażliwa na błędy zaokrągleń od interpolacji przy pomocy wzoru Lagrange'a,
- bardzo dobrze aproksymuje, gdy węzły pokrywają się z zerami wielomianu Czebyszewa $T_{n+1}(x)$ (wrócimy do tego tematu omawiając aproksymację).

Węzły Czebyszewa:
Niech $n+1$ węzłów interpolacji pokrywa się z zerami wielomianu Czebyszewa stopnia $n+1$.

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\,\pi\right), \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Wówczas macierz główna pomnożona przez $\sqrt{\frac{2}{n+1}}$ jest macierzą ortogonalną a współczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_n$ można obliczyć bezpośrednio jako

$$a_k = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T_k(x_i) y_i, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Uwaga: Wielomiany Czebyszewa określone są w przedziale $[-1, 1]$. Jeżeli interpolowana funkcja $f(t)$ określona jest dla $t \in [a, b]$, to należy zastosować podstawienie

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x.$$

Otrzymana tak funkcja $f(x)$ określona jest w przedziale $[-1, 1]$.

Przykład: Należy wyznaczyć temperaturę o godz. 14:30, czyli $T(14.5)$.

Temperatura	24	25	23	20	16	[°C]
Czas	12	13	14	15	16	[godz.]

Funkcja interpolowana określona jest w przedziale $[a, b] = [12, 16]$. Stosując omówione wcześniej podstawienie otrzymujemy argument $x = 0.5t - 7$ należący do przedziału $[-1, 1]$. Zastosujemy pięć pierwszych wielomianów Czebyszewa

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = 1,\\
&T_1(x) = x,\\
&T_2(x) = 2x^2 - 1,\\
&T_3(x) = 4x^3 - 3x,\\
&T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,
\end{aligned}$$

Obliczając wartości poszczególnych wielomianów w węzłach $t_0, \ldots, t_4$ otrzymujemy układ równań o macierzy rozszerzonej

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrrrr|r}
1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 & 1.0 & 24.0\\
1.0 & -0.5 & -0.5 & 1.0 & -0.5 & 25.0\\
1.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 & 23.0\\
1.0 & 0.5 & -0.5 & -1.0 & -0.5 & 20.0\\
1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 16.0
\end{array}\right]$$

Rozwiązaniem układu są liczby

$$a_0 = 21.66667, \quad a_1 = -4.33333, \quad a_2 = -1.50000, \quad a_3 = 0.33333, \quad a_4 = -0.16667.$$

Stąd poszukiwany wielomian

$$F(x) = 21.66667 \cdot T_0(x) - 4.33333 \cdot T_1(x) - 1.50000 \cdot T_2(x) + 0.33333 \cdot T_3(x) - 0.16667 \cdot T_4(x).$$

Pozostaje obliczyć wartość wielomianu dla $t = 14.5$, któremu odpowiada $x = 14.5/2 - 7 = 0.25$

$$F(0.25) = 21.57813.$$

W obliczaniu wartości wielomianu Czebyszewa dobrze sprawdza się algorytm Clenshaw'a.

6 Interpolacja trygonometryczna

Często zachodzi potrzeba interpolowania funkcji okresowych. Wówczas jako baza bardzo przydatny jest układ funkcji, który tworzą funkcje trygonometryczne.

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = \cos(x), \quad \varphi_2(x) = \sin(x), \quad \varphi_3(x) = \cos(2x),\\
&\varphi_4(x) = \sin(2x), \quad \ldots, \quad \varphi_{2m-1}(x) = \cos(mx), \quad \varphi_{2m}(x) = \sin(mx).
\end{aligned}$$

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest funkcją okresową, której okresem głównym jest przedział $[0, 2\pi]$.

Funkcja $F(x)$ jako kombinacja liniowa elementów bazy, dana jest jako następujący *wielomian trygonometryczny*

$$F(x) = a_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right),$$

gdzie $n = 2m$.

Aby wielomian $F(x)$ był wielomianem interpolującym musi być spełniony układ $2m = n + 1$ równań z $n + 1$ niewiadomymi $a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$:

$F(x_0) = a_0 + \cos(x_0)a_1 + \sin(x_0)b_1 + \ldots + \cos(mx_0)a_m + \sin(mx_0)b_m = f(x_0),$
$F(x_1) = a_0 + \cos(x_1)a_1 + \sin(x_1)b_1 + \ldots + \cos(mx_1)a_m + \sin(mx_1)b_m = f(x_1),$
$\ldots$
$F(x_{2m}) = a_0 + \cos(x_{2m})a_1 + \sin(x_{2m})b_1 + \ldots + \cos(mx_{2m})a_m + \sin(mx_{2m})b_m = f(x_{2m}),$

Gdy węzły są równoodległe, tzn.

$$x_i = \frac{2\pi}{n+1} i, \quad i = 0, 1, \dots, 2m,$$

to macierz główna układu równań pomnożona przez $\sqrt{\frac{2}{2m+1}}$ jest macierzą ortogonalną a współczynniki $a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$ można obliczyć bezpośrednio

$$a_0 = \frac{2}{2m+1} \sum_{i=0}^{2m} f(x_i)$$

oraz dla $k = 1, 2, \dots, m$

$$a_k = \frac{2}{2m+1} \sum_{i=0}^{2m} f(x_i) \cos(kx_i),$$

$$b_k = \frac{2}{2m+1} \sum_{i=0}^{2m} f(x_i) \sin(kx_i).$$

Uwaga: Jeżeli okresem głównym funkcji interpolowanej $f(t)$ jest przedział $[a, b]$, należy zastosować przekształcenie

$$t = a + \frac{b-a}{2\pi} x.$$

Otrzymana tak funkcja $f(x)$ ma okres główny $[0, 2\pi]$.

7 Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

Wielomiany stosowane w omówionych wcześniej metodach interpolacji są zwykle wielomianami wysokiego stopnia i mają w związku z tym istotne wady ujawniające się głównie podczas aproksymacji inerpolacyjnej (np. duże oscylacje).

Podzielmy zatem przedział interpolacji na podprzedziały (niekoniecznie równej wielkości)

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

oraz skonstruujmy osobne wielomiany interpolacyjne niskiego stopnia dla każdego przedziału $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Ogólna metoda funkcji sklejanych w zasadzie nie ogranicza doboru wielomianu interpolacyjnego poza wymaganiem aby wielomiany były małego stopnia i „gładko” łączyły się ze sobą. Można więc stosować wielomiany Hermita $H_n(x)$, Lagrange'a $L_n(x)$ ... .

Aby stosować wielomiany Hermita konieczna jest jednak znajomość wartości pochodnej funkcji interpolowanej f we wszystkich węzłach interpolacji.

Można również zaproponować metodę interpolacji klasycznymi wielomianami stopnia 3 (ang. Cubic Spline Interpolation)

Cubic Spline Interpolation - CSI
Wyznaczona tą metodą funkcja interpolująca S dla funkcji interpolowanej f spełnia następujące warunki:

1. $S(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$
2. W każdym przedziale $[x_j, x_{j+1})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, funkcja $S(x)$ jest wielomianem trzeciego stopnia $S_j(x)$.
3. Dla węzłów wewnętrznych x_j, $j = 1, \ldots, n-1$:
   (a) $S_{j-1}(x_j) = S_j(x_j)$,
   (b) $S'_{j-1}(x_j) = S'_j(x_j)$,
   (c) $S''_{j-1}(x_j) = S''_j(x_j)$.
4. Dla węzłów krańcowych x_0 i x_n spełniony jest jeden z warunków brzegowych:
   (a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$,
   (b) $S'(x_0) = f'(x_0)$ i $S'(x_n) = f'(x_n)$.

Wielomian interpolacyjny dla każdego przedziału $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ ma postać

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

Przykład:
Interpolacja funkcji, której wartości dane są w trzech równoodległych węzłach x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$.

Zapiszmy wielomiany dla obu przedziałów:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3,$$

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3.$$

Należy wyznaczyć wartości ośmiu współczynników $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, d_0, d_1$.

W trakcie obliczeń potrzebne będą wzory pierwszej i drugiej pochodnej obu wielomianów:

$$S'_0(x) = b_0 + 2c_0(x - x_0) + 3d_0(x - x_0)^2,$$

$$S'_1(x) = b_1 + 2c_1(x - x_1) + 3d_1(x - x_1)^2,$$

$$S''_0(x) = 2c_0 + 6d_0(x - x_0),$$

$$S''_1(x) = 2c_1 + 6d_1(x - x_1).$$

Zapiszmy warunki, które musi spełniać wielomian S.

1. Oba wielomiany na końcach „swojego” przedziału muszą mieć wartości równe interpolowanej funkcji:

   $S_0(x_0) = f(x_0) = a_0 + b_0(x_0 - x_0) + c_0(x_0 - x_0)^2 + d_0(x_0 - x_0)^3 = a_0,$

   $S_0(x_1) = f(x_1) = a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 + d_0(x_1 - x_0)^3 = a_0 + b_0h + c_0h^2 + d_0h^3,$

   $S_1(x_1) = f(x_1) = a_1 + b_1(x_1 - x_1) + c_1(x_1 - x_1)^2 + d_1(x_1 - x_1)^3 = a_1,$

   $S_1(x_2) = f(x_2) = a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 + d_1(x_2 - x_1)^3 = a_1 + b_1h + c_1h^2 + d_1h^3.$

2. Z równości wartości pierwszych pochodnych w punkcie x_1 mamy:

   $S_0'(x_1) = S_1'(x_1),$

   $b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) + 3d_0(x_1 - x_0)^2 = b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) + 3d_1(x_1 - x_1)^2,$

   $b_0 + 2c_0h + 3d_0h^2 = b_1.$

3. Z równości wartości drugich pochodnych w punkcie x_1 mamy:

   $S_0''(x_1) = S_1''(x_1),$

   $2c_0 + 6d_0(x_1 - x_0) = 2c_1 + 6d_1(x_1 - x_1),$

   $2c_0 + 6d_0h = 2c_1.$

4. Przyjmując warunki brzegowe (a) zerowanie drugich pochodnych w punktach x_0, x_2:

   $S_0''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) = 2c_0 = 0,$

   $c_0 = 0.$

   $S_1''(x_0) = 2c_1 + 6d_1(x_0 - x_1),$

   $2c_1 + 6d_1h = 0.$

Równania zaznaczone na niebiesko tworzą układ ośmiu równań z ośmioma niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest

$a_0 = f(x_0),$

$b_0 = (-f(x_2) + 6f(x_1) - 5f(x_0))/4h,$

$c_0 = 0,$

$d_0 = (f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0))/4h^3,$

$a_1 = f(x_1),$

$b_1 = (f(x_2) - f(x_0))/2h,$

$c_1 = 3(f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0))/4h^2,$

$d_1 = -(f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0))/4h^3$. $\Box$

Powyższy przykład przedstawia prosty przypadek dla trzech równoodległych węzłów ($n = 2$). Podamy teraz ogólną metodę działającą dla dowolnego n oraz węzłów w dowolnych odległościach $h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ponieważ funkcja interpolująca $S_j(x)$ poszukiwana w każdym przedziale jest wielomianem trzeciego stopnia, więc jej druga pochodna jest funkcją liniową. Niech $M_j = S_j''(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Wychodząc zatem od interpolacji liniowej Lagrange'a w każdym z rozpatrywanych podprzedziałów otrzymujemy

$$S_j''(x) = L_1(x) = M_j \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_{j+1}}.$$

Dwukrotne całkowanie każdej z funkcji $S_j''(x)$ pozwala na otrzymanie pierwszej z postaci poszukiwanej funkcji $S_j(x)$ zależnej jednak od dwóch stałych wynikających z całkowania.

$$S_j(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j+1}} + A_j(x - x_j) + B_j.$$

Wartości stałych można wyznaczyć żądając równości funkcji interpolującej $S(x)$ oraz interpolowanej $f(x)$ na końcach każdego podprzedziału $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Dla każdego przedziału otrzymujemy wówczas układ równań:

$$S_j(x_j) = M_j \frac{h_{j+1}^2}{6} + B_j = f(x_j) = y_j,$$

$$S_j(x_{j+1}) = M_{j+1} \frac{h_{j+1}^2}{6} + A_j h_{j+1} + B_j = f(x_{j+1}) = y_{j+1}.$$

Po rozwiązaniu układu otrzymujemy:

$$B_j = -M_j \frac{h_{j+1}^2}{6} + y_j,$$

oraz

$$A_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j).$$

Daje to następującą postać funkcji $S_j(x)$ w przedziale $[x_j, x_{j+1}]$

$$S_j(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j+1}} + \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j) \right)(x - x_j) + y_j - M_j \frac{h_{j+1}^2}{6}.$$

Aby wyznaczyć wartości parametrów M_j, $j = 1, \ldots, n-1$ żądamy równości wartości pierwszych pochodnych w węzłach wewnętrznych $S_{j-1}'(x_j) = S_j'(x_j)$ (patrz warunek 3(b)).
Wzór pochodnej:

$$S_j'(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j).$$

Wartości pochodnej w x_j wynoszą

$$S_j'(x_j) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2h_{j+1}} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j),$$

$$S'_{j-1}(x_j) = M_j \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2h_j} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1}).$$

$$-M_j \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2h_{j+1}} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j) = M_j \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2h_j} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1})$$

Po prostych przekształceniach i pogrupowaniu składników dla $j = 1, \ldots, n-1$ otrzymujemy

$$2M_j + \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} M_{j-1} + \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} M_{j+1} = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right).$$

Aby wyznaczyć wartości parametrów M_0 i M_n zastosujemy warunek brzegowy 4(a) albo 4(b).
Dla warunku 4(a) mamy: $M_0 = M_n = 0$.
Dla warunku 4(b) mamy:

$$f'(x_0) = S'_0(x_0) = -M_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{2h_1} + \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{6}(M_1 - M_0) = -\frac{h_1}{3} M_0 - \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_1}.$$

oraz analogicznie

$$f'(x_n) = S'_{n-1}(x_n) = \frac{h_n}{3} M_n + \frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}.$$

Algorytm CSI

1. Rozwiązanie układu $n+1$ podanych poniżej równań pozwala wyznaczyć wartości współczynników $M_0, M_1, \ldots, M_n$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
2M_0 & + & \lambda_0 M_1 & & & & & & & & = \delta_0 \\
\mu_1 M_0 & + & 2M_1 & + & \lambda_1 M_2 & & & & & & = \delta_1 \\
 & & \mu_2 M_1 & + & 2M_2 & + & \lambda_2 M_3 & & & & = \delta_2 \\
 & & & & & & \cdots & & & & \\
 & & & & & & \mu_{n-1} M_{n-2} & + & 2M_{n-1} & + \ \lambda_{n-1} M_n & = \delta_{n-1} \\
 & & & & & & & + & \mu_n M_{n-1} & + \ 2M_n & = \delta_n
\end{array}$$

przy czym $h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$, gdy $j = 0, \ldots, n-1$, natomiast dla $j = 1, \ldots, n-1$

$$\mu_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}}, \quad \lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}},$$

$$\delta_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h_{j+1}} - \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} \right).$$

Ponadto, gdy zadane są warunki brzegowe:

4(a) to $\lambda_0 = \delta_0 = \mu_n = \delta_n = 0$,

4(b) to $\lambda_0 = \mu_n = 1$, oraz

$$\delta_0 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1} - f'(x_0) \right),$$

$$\delta_n = \frac{6}{h_n} \left(f'(x_n) - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h_n} \right).$$

2. Po rozwiązaniu układu z punktu 1 znajomość $n+1$ współczynników $M_0, M_1, \ldots, M_n$ pozwala na wyznaczenie współczynników a_j, b_j, c_j, d_j dla każdego wielomianu $S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$. Mianowicie:

   $S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$, więc $a_j = S_j(x_j)$,

   $S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$, więc $b_j = S_j'(x_j)$,

   $S_j''(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$, więc $c_j = S_j''(x_j)/2$,

   $S_j^{(3)}(x) = 6d_j$, więc $d_j = S_j^{(3)}(x_j)$.

   Po obliczeniu odpowiednich pochodnych dla $S_j(x)$ otrzymujemy:

$$a_j = f(x_j), \quad b_j = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h_{j+1}} - \frac{2M_j + M_{j+1}}{6} h_{j+1},$$
$$c_j = \frac{M_j}{2}, \qquad d_j = \frac{M_{j+1} - M_j}{6h_{j+1}}.$$

Przykład:
(patrz skrypt T. Ratajczaka s.130-133)