Exploratorische Faktorenanalyse

Kapitel 5

5.1 Ziele der Faktorenanalyse

(1) Daten reduzieren

(2) Zusammenhänge zwischen Items werden auf latente Variablen zurückgeführt

(3) Komplexerer Merkmalsbereich kann in homogenere Teilbereiche untergliedert oder auszudifferenzieren werden

(1) Warum eine Faktorenanalyse?

- Beurteilung vieler Korrelationen mühsam
  - Zusammenhang zwischen 30 Variablen erfordert die Betrachtung von 30 • (30 - 1) / 2 = 435 einfachen Korrelationen
- Einzelanalysen sehr aufwändig
- Effektives Verfahren zur Beurteilung vieler Korrelationen stellt die Faktorenanalyse dar
- Nützlich, wenn keine Annahmen über die Struktur eines Konstruktes oder mehrerer Konstrukte vorhanden sind

(2) Wie werden Faktoren bestimmt?

- Zuordnung zu latenter Dimension (= Faktor) oder Zusammenfassung zu einer Komponente über Ähnlichkeit / Unähnlichkeit (Interkorrelationen) der Itemantworten

- Ähnlichkeit / Unähnlichkeit wird durch vorliegende Stichprobe mitbestimmt.

(3) Wie werden Faktoren bestimmt

- Maß für die Ähnlichkeit / Unähnlichkeit: Korrelationen oder Kovarianzen zwischen Items

- Ausgangsmatrix, Matrix der Korrelationen oder Kovarianzen zwischen den Items in der Stichprobe, wird auf ökonomische Weise durch weniger (latente) Variablen reproduziert.

5.2 Grundgedanke und Schritte der Faktorenanalyse

- Folgende Annahme:
  - Eigenschaften, Merkmale oder Fähigkeiten einer Person werden durch eine Kombination aus gewichteten Faktorwerten und einem Fehler beschrieben (Moosbrugger & Hartig, 2003, S. 138):

$$X_{im} = f_{i1} \cdot a_{m1} + f_{i2} \cdot a_{m2} + f_{i3} \cdot a_{m3} \ldots\ldots + f_{ij} \cdot a_{mj} + \ldots\ldots f_{iq} \cdot a_{mq} + e_i$$

dabei ist:

X_{im} = Wert einer Person i auf einem Item m

f_{i1} = Faktorwert der Person i auf Faktor j

a_{m1} = Ladung des Items m auf Faktor 1

f_{ij} = Faktorwert der Person i auf Faktor j

a_{mj} = Ladung des Items m auf Faktor j

q = Anzahl der Faktoren

e_i = Fehlerkomponente, die durch die Faktorenanzahl nicht erklärt werden kann

5.3 Geometrische Modelle

- Mit Hilfe des geometrischen Modells lässt sich veranschaulichen, was bei einer Faktorenanalyse geschieht:

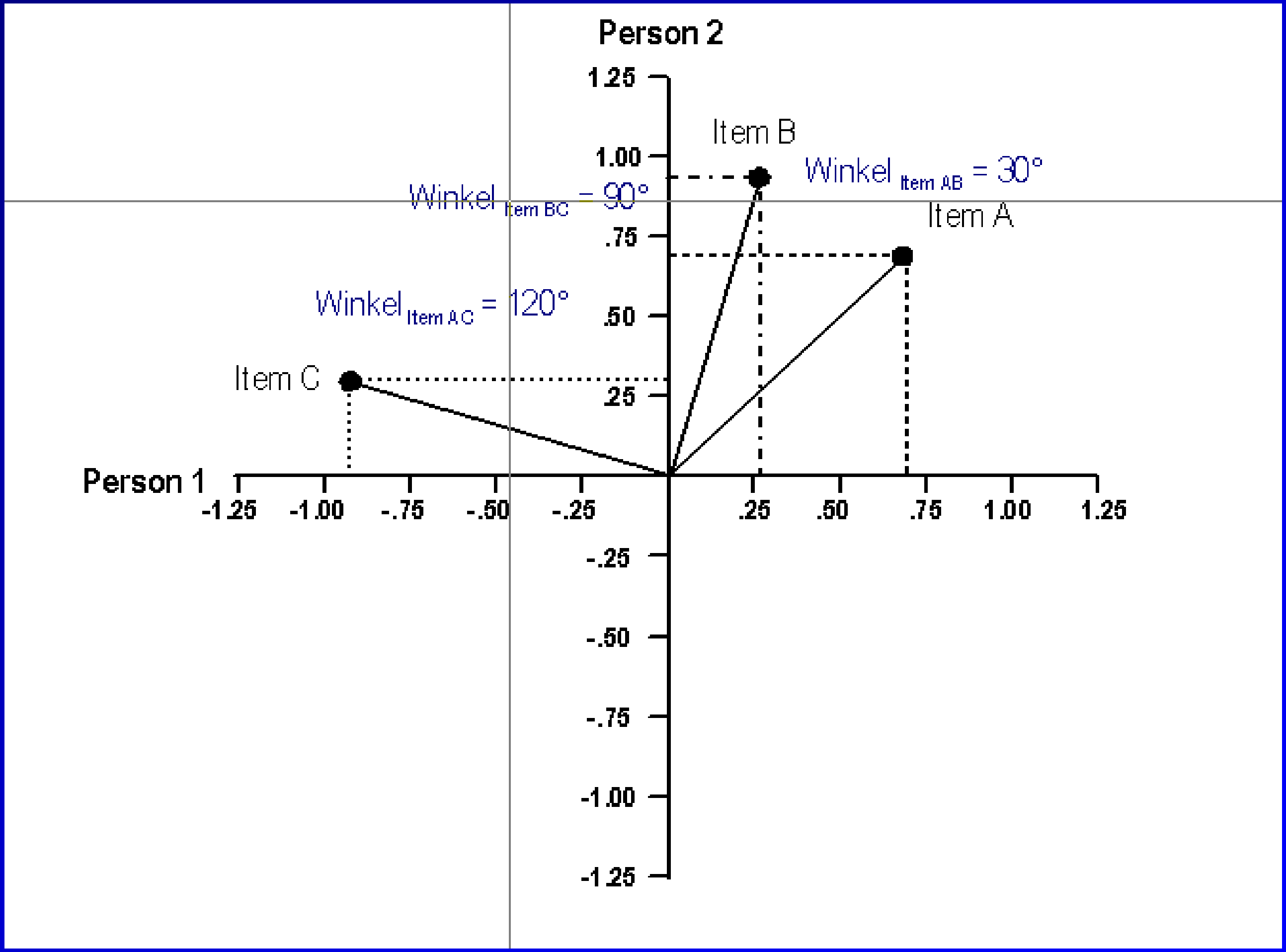
(1) ***Personenraum***: Wird der Personenraum betrachtet, so stellen die Achsen des Koordinatensystems n Versuchspersonen dar und die Punkte m Items.

(2) ***Faktorraum***: Wird der Faktorraum betrachtet, so stellen die Achsen q Faktoren und die Punkte m Items dar. Die Items sind dabei mit der Vektorlänge von 1 normiert. Die q Faktoren bilden einen Unterraum des Personenraums.

(1) Geometrische Modelle: Personenraum

- Geometrisches Modell:
  - Punkte in n-dimensionalen Personenraum (Personen sind Achsen) stellen m Items dar
    - Dies gilt, wenn es sich um z-standardisierte Variablen mit einer Länge von 1 handelt
    - Wenn keine z-standardisierte Variablen:
      - Korrelation zweier Variablen: $\sqrt{h_i^2} \cdot \sqrt{h_j^2} \cdot \cos \varphi = r_{ij}$
  - Items, die einen geringen Winkel einschließen, weisen einen hohen Zusammenhang auf. Items, die in einem 90°-Winkel aufeinander stehen, einen geringen Zusammenhang.
    - das heißt, sie stehen orthogonal zueinander

(2) Geometrische Modelle: Personenraum



Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion, Pearson Education 2003, Markus Bühner, 9

(3) Geometrische Modelle: Personenraum

– Items A und B weisen Winkel von 30° auf

– Die Korrelation zwischen beiden Items entspricht Cosinus von (30°), also einer Korrelation von r = .87.
  - Auf Taschenrechner die Zahl 30 eingeben und dann die cos-Taste drücken = Wert von .8660

– Die Items A und C schließen einen Winkel von 120° ein = Korrelation entspricht Cosinus von (120°)
  - r = -.50.

– Item B und C schließen einen Winkel von 90° ein = Korrelation von r = .00

(4) Geometrische Modelle: Personenraum

– Die Achsen stellen die Probanden dar

– Der Schnittpunkt der Werte, die beide Probanden erzielt haben bestimmt die Lage der Punkte im Personenraum.

– Proband 1 (Person 1) hat auf Item A einen z-Wert von „.70" erzielt und Proband 2 (Person 2) ebenfalls „.70".

– Auf diese Weise erhalten alle Items einen Punkt im Versuchspersonenraum.

(5) Geometrische Modelle: Faktorenraum

– Durch Projektionen der Items im Personenraum wird ein neues Koordinatensystem gebildet

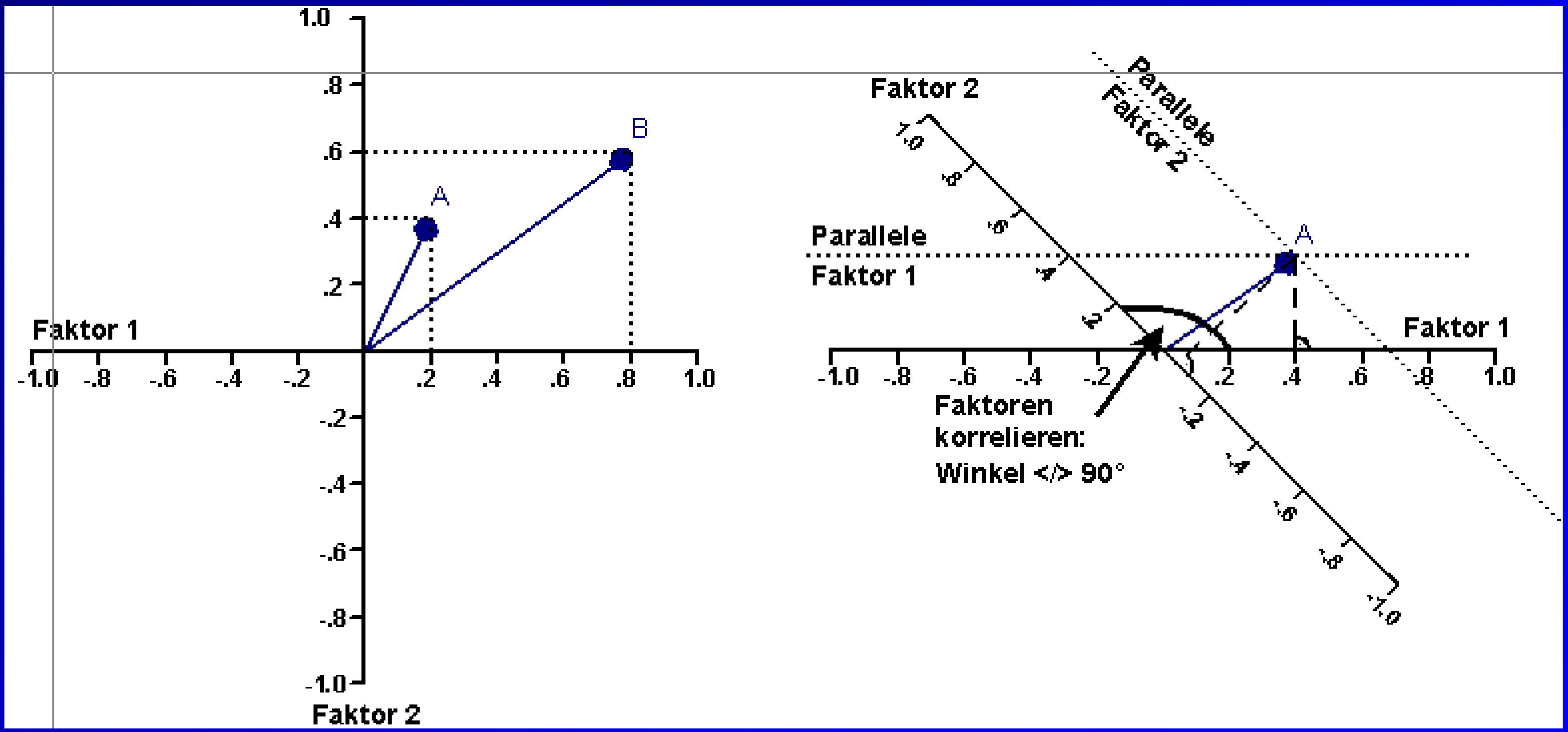
– Dieses Koordinatensystem weist möglichst wenig Dimensionen auf

– Die Dimensionen des neuen Koordinatensystems soll die Zusammenhänge der Items im Personenraum möglichst genau und vollständig repräsentieren

(6) Geometrische Modelle: Faktorenraum

- Nach Prinzip der Varianzmaximierung werden in Personenraum q-Faktoren in Form von Geraden gelegt (latente Dimensionen)
- Geraden werden so gedreht (Rotation),
  - bis die Winkel zwischen Itemvektoren (Strecke zwischen dem Ursprung des Koordinatensystems und dem Itemendpunkt) und Faktoren sehr klein werden (hohe Korrelationen mit dem Faktor aufweisen).

(7) Geometrische Modelle: Faktorenraum



(8) Geometrische Modelle: Faktorenraum

- Es können orthogonale Faktoren (90°-Winkel) in den Versuchpersonenraum gelegt werden oder korrelierte (oblique) Faktoren (Winkel < 90°).
- Ladungen und Korrelationen bilden bei orthogonaler Rotation die Schnittpunkte der Itemvektor-Endpunkte mit den auf die Länge 1 normierten Faktoren (Wert auf der Faktorachse)

(9) Geometrische Modelle: Faktorenraum

- Item A lädt auf Faktor 1 mit a=.2 und auf Faktor 2 mit a=.4.
- Item B lädt auf Faktor 1 mit a=.8 und auf Faktor 2 mit a=.6.
- Summe der quadrierten Faktorladungen über die extrahierten Faktoren ergibt Kommunalität
- Wurzel aus der Kommunalität ergibt Vektorlänge
- Bei obliquer Rotation werden zur Ermittlung der Ladungsgewichte Parallelen zu den Faktoren gebildet, die bis zum Endpunkt des Itemvektors verschoben werden

(10) Geometrische Modelle: Faktorenraum

- Der Schnittpunkt dieses verschobenen Vektors mit den Faktoren (Wert auf der Faktorachse) ergibt Ladung.
- Item A lädt auf Faktor 1 mit a = .65 und auf Faktor 2 mit a = .4.
- Korrelationen mit dem Faktor entspricht bei obliquer Rotation dem Lot vom Vektorendpunkt des Items auf den Faktor (Wert auf der Faktorachse), so dass im Fußpunkt ein 90° Winkel entsteht.

(11) Geometrische Modelle: Faktorenraum

- Der Schnittpunkt auf dem Faktor ergibt die Korrelation.
- Item A korreliert mit Faktor 1 mit r=.4 und mit Faktor 2 mit r=.08.
- Ausführungen über den Faktorraum beziehen sich auf das Hauptkomponentenmodell.
- Für das Modell mehrerer gemeinsamer Faktoren ist die geometrische Darstellung komplexer

5.4 Voraussetzungen

(1) Linearität

(2) Ausreißerwerte

(3) Substanzielle Korrelationen

(4) Stichprobengröße und Itemanzahl

(1) Voraussetzungen

– **Linearität**

- Ausreichend hohe lineare Zusammenhänge zwischen den Items müssen bestehen
  - (je höher die Werte von Item A, desto höher sind die Werte von Item B).
- Schwach monotone oder kurvenlineare Verläufe lassen sich auch linear beschreiben, aber nicht adäquat.
- Optimal ist Faktorlösung, wenn Linearität in hohem Maße gegeben ist

(2) Voraussetzungen

– **Ausreißerwerte** linearen Zusammenhang erhöhen oder mindern

- Prüfung der Histogramme jeder Variablen
- Liegen Probanden weit entfernt von der Mitte der Verteilung, Transformation in Anteilsschätzungen
  - Diese Anteilsschätzungen werden in z-Werte transformiert und als Normalrangwerte bezeichnet
- Bei unterschiedlichen Verteilungen kann auch eine Logarithmierung sinnvoll sein

(3) Voraussetzungen

- **Substanzielle Korrelationen**.
- Faktorenanalyse nur dann sinnvoll, wenn Variablen substanziell korrelieren
- Um zu quantifizieren, ob substanzielle Korrelationen in der Korrelationsmatrix vorliegen, wird Kaiser-Meyer-Olkin-Koeffizient (KMO)

(4) Voraussetzungen

– **Stichprobengröße und Itemanzahl.**

- Wichtig: V**orher** überlegen, wie viele Faktoren erwartet werden.
- **Pro Faktor** mindestens **drei Items**, möglichst aber vier, fünf oder mehr Items verwenden.
- P**sychometrischen Eigenschaften** der Items oder Testkennwerte zu beachten.
- So sollten Testkennwerte oder Items mit Reliabilitäten unter r_{tt} = .60 vermieden werden.

(4a) Voraussetzungen

- Reliabilitäten über r_{tt} = .60 in der Regel für die meisten Skalenwerte oder Testkennwerte aus Leistungstests gegeben
- Für einzelne Items eines Fragebogens ist die Reliabilität bei einer einzigen Messung jedoch schwierig zu bestimmen.
- Als Mindestschätzung der Reliabilität kann die Kommunalität eines Items verwendet werden.
  – Kommunalität der Items sollte dann $h^2 > .60$ sein

(4b) Voraussetzungen

Folgende Richtlinien sind zu beachten:

$N < 60$ und $h^2 < .60$	inkompatibel zur Durchführung einer Faktorenanalyse		
$N = 60$ und $h^2 > .60$	gerade ausreichend	$N = 100$	ausreichend
$N = 200$	fair	$N = 300$	gut
$N = 500$	sehr gut	$N = 1000$	exzellent

5.5 Methoden der Faktorenanalyse

- Unterscheidung Hauptkomponenten-analyse und verschiedenen Arten von Faktorenanalysen
  - Hauptkomponentenanalysen: Ziel besteht darin, die **Ausgangskorrelationsmatrix** der Items **vollständig** und mit **wenig Informationsverlust** zu **reproduzieren**
  - **Faktorenanalysen** versuchen, die **gemeinsame Varianz** zwischen Items zu **erklären**

(1) Methoden der Faktorenanalyse

- Unterscheidung Hauptkomponentenanalyse und verschiedene Arten von Faktorenanalysen:
  - Hauptkomponentenanalysen: Ziel besteht darin, die Ausgangskorrelationsmatrix der Items vollständig und mit wenig Informationsverlust zu reproduzieren
  - Faktorenanalysen: Versuch die gemeinsame Varianz zwischen Items zu erklären

(2) Methoden der Faktorenanalyse

- Für Hauptkomponentenanalyse und Faktorenanalysen benötigt man zur Berechnung a priori:
  - Anzahl der zu extrahierenden Faktoren
  - Schätzungen der Anfangskommunalität für jedes Item (aufgeklärte Varianz [quadrierte Korrelation] eines Items über alle extrahierten Faktoren)
  - Anfangskommunalitäten werden in die Diagonale der Stichprobenkorrelationsmatrix eingesetzt

(3) Methoden der Faktorenanalyse

- Hauptachsen- und Hauptkomponentenanalyse rechnerisch gleich
  - Unterschiede liegen in den Anfangskommunalitäten
- Nach Einsetzen der Anfangskommunalitäten in die Diagonale der Korrelationsmatrix erfolgt Extraktion der voreingestellten Faktorenanzahl
- Kommunalität wird über Summation der quadrierten Ladungen neu ermittelt
- Es wird davon ausgegangen, dass diese Schätzung näher an der „wahren" Kommunalität liegt.

(4) Methoden der Faktorenanalyse

- Hauptachsen- und Hauptkomponentenanalysen rechnerisch gleich
- Anfangskommunalitäten werden in die Diagonale der Stichprobenkorrelationsmatrix eingesetzt
- Hauptachsen- und Hauptkomponentenanalyse unterscheiden sich in Anfangskommunalitäten
- Nach Einsetzen der Anfangskommunalitäten in die Diagonale der Korrelationsmatrix erfolgt Extraktion der voreingestellten Faktorenanzahl

(5) Methoden der Faktorenanalyse

- Kommunalität wird über Summation der quadrierten Ladungen neu ermittelt
- Es wird davon ausgegangen, dass diese Schätzung näher an der „wahren” Kommunalität liegt
- Neu ermittelte Kommunalität unterscheidet sich in der Regel von der Anfangskommunalität und wird wiederum in die Diagonale der Korrelationsmatrix eingesetzt

(6) Methoden der Faktorenanalyse

- Dieser Prozess wird wiederholt bis der Unterschied zwischen zwei aufeinander folgenden Kommunalitätsschätzungen gering ist
  - Ein Abbruchkriterium wird meist willkürlich gewählt.
- Ideal als Schätzung der Anfangskommunalität ist die Reliabilität
- Reliabilität eines Einzelitems - gerade bei Fragebogenitems – kann nur schwer ermittelt werden
  - Behelf mit Schätzungen der Reliabilität

(7) Methoden der Faktorenanalyse

- Hauptkomponentenanalyse: Geht von unwahrscheinlichem Fall aus, dass gesamte Itemvarianz aufgeklärt werden kann ($h^2 = 1$)
  - Dies ist nur bei reliablen Leistungstestkennwerten gegeben, ($r_{tt} > .95$)
  - Da jede Variable oder jedes Item messfehlerbehaftet ist, stellt Überschätzung der Reliabilität dar
- Hauptachsenanalyse verwendet quadrierte multiple Korrelation als Anfangskommunalität
  - Unterschätzt Itemreliabilität, da es unwahrscheinlich ist, dass wirklich alle Items in der Faktorenanalyse berücksichtigt sind, um ein Item maximal vorherzusagen

Hauptkomponentenanalyse

- Interpretation: Wie lassen sich die auf einem Faktor hoch ladenden Variablen durch einen Sammelbegriff (Komponente) beschreiben?
- Einsetzen einer Kommunalität (h^2) von 1 in die Korrelationsmatrix
- Werden so viele Faktoren wie Items extrahiert, ist mit der PCA die gesamte Varianz der Items reproduzierbar
- Werden weniger Faktoren als Items extrahiert, entspricht Restvarianz dem Varianzanteil, der durch die extrahierten Faktoren nicht reproduzierbar ist
- (Multivariate) Normalverteilung und Intervallskalenniveau keine Voraussetzung
  - Liegt beides vor, bestehen optimale Bedingungen für die Durchführung

Hauptachsenanalyse

- **Interpretation:** Wie lässt sich die „Ursache" bezeichnen, die für die Korrelationen zwischen den Items verantwortlich ist?

- Es wird die Varianz faktorisiert, die durch alle anderen Variablen vorhergesagt werden kann (R^2).

- Einzigartigkeit der Variablen ($1 - h^2$) drei Komponenten:
  - (1) Systematische Varianz, die durch fremde Variablen erklärt wird
  - (2) Spezifische systematische Varianz einer Variablen, die durch keine anderen Variablen erklärt wird ($r_{tt} - h^2$)
  - (3) Nicht reproduzierbare unsystematische Varianz einer Variablen ($1 - r_{tt}$).

Hauptachsenanalyse

- Normalverteilung und Intervallskalenniveau keine Voraussetzung
- Liegt beides vor, bestehen optimale Bedingungen für Durchführung

Maximum-Likelihood Faktorenanalyse

- Maximum-Likelihood-Methode:
  - Aus beobachteter Stichproben-Korrelationsmatrix werden Faktoren geschätzt, die möglichst viel Varianz in Korrelationsmatrix der Grundgesamtheit aufklären
- Daten werden unter Annahme eines Modells betrachtet
  - Dadurch ist es mit einem Modelltest (χ^2-Test) möglich, das angenommene Modell anzunehmen oder zu verwerfen.
  - Mit Hilfe des χ^2-Tests wird ermittelt, ob die Faktorenstruktur der Datenstruktur entspricht oder nicht.
- Auch bei der ML-Methode werden in SPSS quadrierte multiple Korrelationen als Anfangskommunalitäten eingesetzt.

Maximum-Likelihood Faktorenanalyse

- Interpretation: Wie lässt sich die „Ursache" in der Grundgesamtheit bezeichnen, die für die Korrelationen zwischen den Items verantwortlich ist?

- Voraussetzungen:
  - ausreichend großen Stichproben (Populationsparameter werden geschätzt)
  - Multivariate Normalverteilung

- χ^2-Test: Prüfung, ob Faktorenstruktur Datenstruktur entspricht
  - Liegt keine multivariate Normalverteilung vor, überschätzt der Signifikanztest die richtige Faktorenanzahl

Maximum-Likelihood Faktorenanalyse

- Modellpassung wird als Nullhypothese formuliert:
  - H_0: Das Modell passt auf die Daten
  - Mit steigender Teststärke (größerem N) wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Modell abgelehnt wird, höher

- Anzahl der Faktoren wird bei der ML-Methode durch die Anwendung des Goodness-of-Fit-Test bestimmt
  - Ist Goodness-of-Fit-Test signifikant, muss ein weiterer Faktor extrahiert werden
  - Prozedur wird solange wiederholt, bis Goodness-of-Fit Test nicht mehr signifikant wird

Anzahl der Faktoren	χ^2	Signifikanz
1	184.88	.000
2	94.18	.000
3	61.08	.001
4	27.34	.198 ← *p*-Wert nicht mehr signifikant

5.6 Extraktionskriterien für Faktoren

- Faktorenextraktion generelles Problem der Faktorenanalyse.
- Kein allgemein anerkanntes Abbruchkriterium während der Faktorenextraktion
- Mehrere Kriterien müssen gleichzeitig berücksichtigt werden
- Dabei spielt vor allem die inhaltliche Plausibilität der Faktoren eine große Rolle.

(1) Extraktionskriterien für Faktoren

- Hypothetisches Modell
  - Beispielsweise Big-Five)

- Eigenwert > 1:
  - Ist Eigenwert eines Faktors größer als Eins, klärt er mehr Varianz auf als eine standardisierte Variable (M = 0, SD = 1)
  - Alle Faktoren werden als bedeutsam erachtet, deren Eigenwert größer als Eins

(2) Extraktionskriterien für Faktoren

- Empfehlung für Anwendung Eigenwert > 1 (entspricht formal Kaiser-Guttmann-Kriterium):
- Man will besonders differenzierte Aufgliederung eines Merkmalsbereichs erhalten
- Reliabilität der Items sollte bekannt sein
- Überschätzt Anzahl wirklicher Faktoren.
- In sehr wenigen Fällen Unterschätzung

(3) Extraktionskriterien für Faktoren

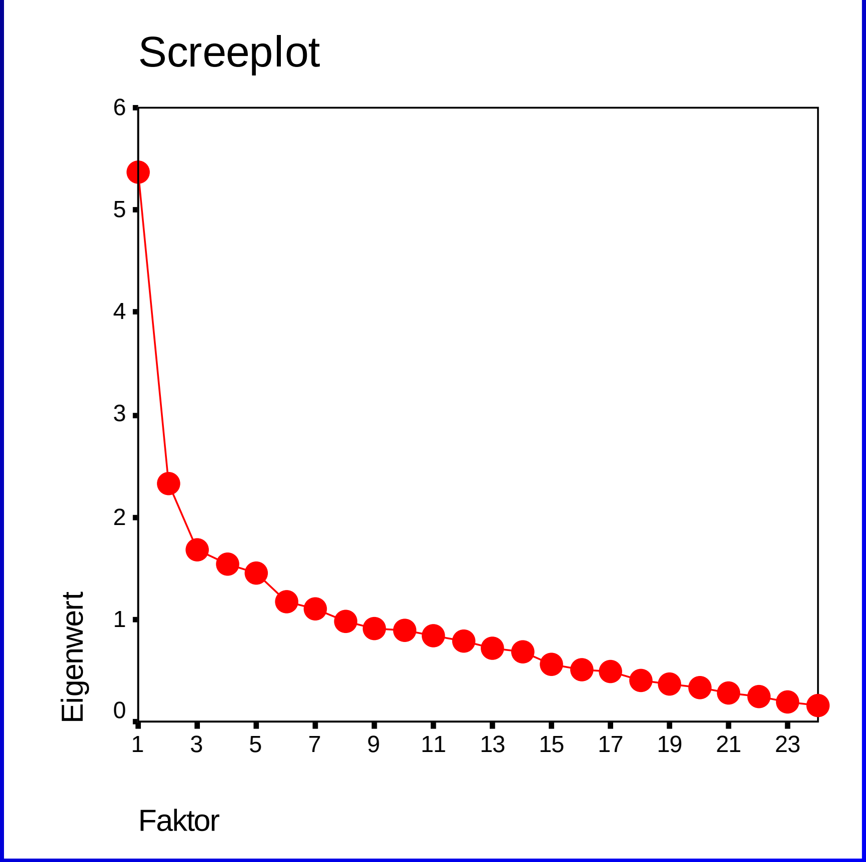
- Weniger für Fragebogenitems geeignet
  - Reliabilität der Fragebogenitems meist unbekannt, Schätzung über Kommunalität möglich
    - Kommunalität eines Items kann niedrig sein, obwohl Fragebogen-Item reliabel ist
    - Dies ist der Fall, wenn ein Faktor ein Merkmal sehr breit misst (mit vielen heterogenen Items) und ein Fragebogenitem nur mit einem Teil seiner Varianz zur Aufklärung dieses Faktors beiträgt
    - Mit steigender Anzahl extrahierter Faktoren, wächst Wahrscheinlichkeit hoher Kommunalitäten

(4) Extraktionskriterien für Faktoren

- Scree-Test nach Cattell:
  - Bedeutsamer Eigenwertabfall (Knick im Scree-Plot von links nach rechts) wird gesucht
  - Eignewerte vor dem Knick werden mitgezählt
    - Eigenwertverlauf vor der Rotation wird betrachtet
  - Methode hat sich bewährt, wird jedoch wegen ihrer Subjektivität kritisiert

(5) Extraktionskriterien für Faktoren

- Scree-Test nach Cattell:



(6) Extraktionskriterien für Faktoren

- Parallelanalyse nach Horn:
  - Bildung von Eigenwerten aus normalverteilten Zufallsvariablen
  - Extrahiert werden Faktoren oder Komponenten, deren Eigenwerte über den zufällig erzeugten Eigenwerten liegen
  - Eigenwertverlauf mit mit zufällig erzeugten Eigenwerten führt zu einer Geraden, die parallel zur x-Achse verläuft
  - Eigenwertverlauf mit empirisch bedeutsamen Eigenwerten nähert sich asymptotisch der y-Achse
  - Zufallskritische Absicherung notwendig
  - Methode ist beste Extraktionsmethode

(7) Extraktionskriterien für Faktoren

- MAP-Test:
  - Durchführung einer Hauptkomponentenanalyse, Extraktion der ersten Hauptkomponente
  - Auspartialisieren der ersten Hauptkomponente aus den Korrelationen zwischen den Variablen
  - Ermittlung der durchschnittlichen quadrierten Korrelation der Residualmatrix
  - Auspartialisierung der ersten **und** die zweiten Hauptkomponente aus der Korrelationsmatrix
  - Widerholung der Schritte, bis so viele Faktoren wie Variablen extrahiert
  - Anzahl der auspartialisierten extrahierten Komponenten (1, 2 usw.) und die dazugehörige quadrierte Partialkorrelation werden nebeneinander dargestellt

(8) Extraktionskriterien für Faktoren

– Anzahl der Komponenten wird extrahiert, bei der sich die niedrigste partielle quadrierte Korrelation ergibt
– weil damit die systematischen Varianzanteile zwischen den Items vollständig ausgeschöpft ist

(9) Extraktionskriterien für Faktoren

- **Sollten lieber mehr oder weniger Faktoren extrahiert werden?**
  - Überfaktorisierung (zu viele Faktoren werden extrahiert) ist unproblematischer als eine Unterfaktorisierung (zu wenige Faktoren werden extrahiert)
  - Werden Testkennwerte faktorisiert, deren Reliabilität bekannt ist, kann die Spezifität verwendet werden, um zu entscheiden, ob ein weiterer Faktor extrahiert werden soll
  - Kommunalität sollte bei Extraktion eines weiteren Faktors nicht die Reliabilität übersteigen
  - Faktoren sollten nicht mehr Varianz eines Items aufklären als es an systematischer Varianz aufweist.
  - Spezifität einzelner Items sollte sich nach der Extraktion eines weiteren Faktors deutlich verringern.

(10) Extraktionskriterien für Faktoren

- Ist eine replizierte Faktorenstruktur ein Hinweis auf ihre Richtigkeit?
  - Anzahl der extrahierten Faktoren kann die Replizierbarkeit der Faktorenanalyse beeinflussen:
    - bei Faktoren mit geringer Variablenzahl bedingt durch eine große Anzahl von extrahierten Faktoren
  - Replizierbarkeit spricht nicht für die Richtigkeit des Modells.
    - Konkurrierende Faktorlösungen können in gleicher Weise replizierbar sein

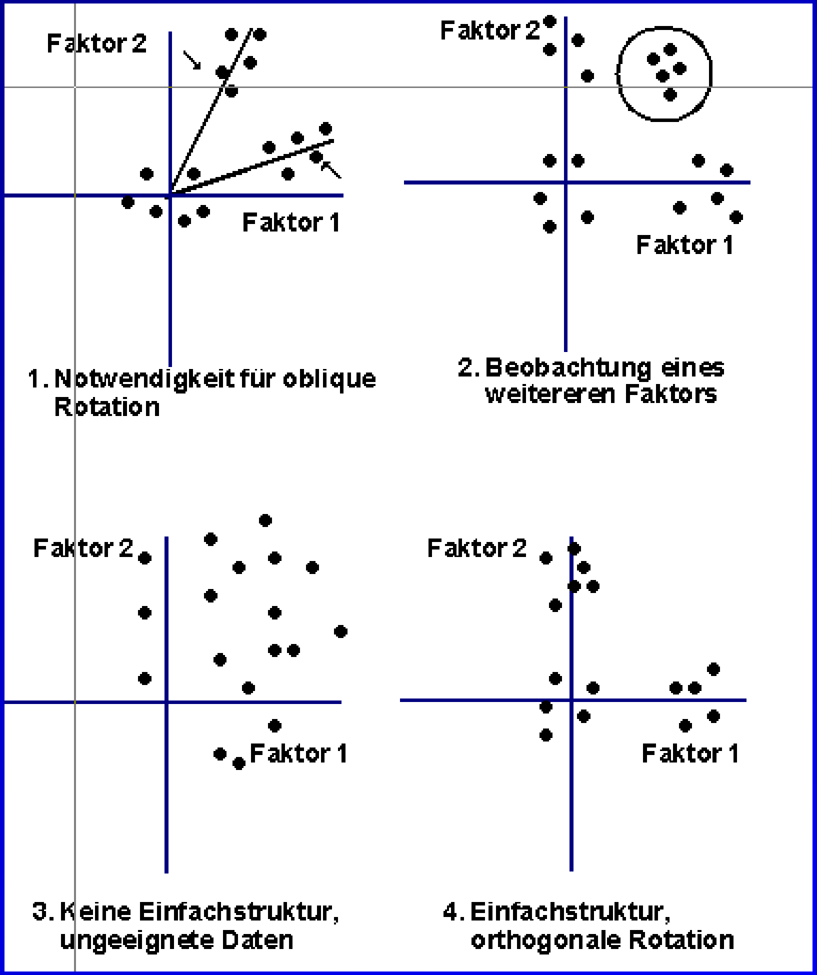
5.7 Rotationstechniken

- Zur besseren Interpretation der Faktorenstruktur, werden verschiedene Rotationstechniken angewandt
- Rotationen ändert nicht die Position der Items im Faktorraum, sondern Art und Weise, wie die Items durch die Faktoren beschrieben werden
- Rotationstechniken verfolgen unterschiedliche Ziele
- Ziel: Möglichst eindeutige Beschreibung der Items durch die Faktoren

(1) Rotationstechniken

- Ziel = Einfachstruktur:
  - hohe Ladungen eines Items auf einem Faktor und gleichzeitig niedrige Ladungen auf den anderen Faktoren
- Einfachstruktur kann seltener durch orthogonale Rotation erreicht werden
  - Faktoren korrelieren nicht miteinander
- Einfachstruktur kann durch häufiger durch oblique Rotationen erzielt werden
  - Faktoren korrelierenmiteinander.

(2) Rotationstechniken



Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion, Pearson Education 2003, Markus Bühner, 53

(3) Rotationstechniken: Orthogonal

- **Rotationstechniken:**
  - Varimax: Erzielt hohe Ladungen auf einem Faktor und niedrige Ladungen auf allen anderen Faktoren
    - Unangemessen, wenn aus theoretischer Sicht ein genereller übergeordneter Faktor postuliert wird.
  - Quartimax: Eignet sich, einen starken generellen Faktor und mehrere Gruppenfaktoren zu extrahieren
    - Tendiert dazu, eine Lösung mit allen Hauptladungen (moderat bis hoch) auf einem Faktor zu erzeugen und geringe Ladungen auf den restlichen Faktoren.
    - Minimiert die Anzahl der Faktoren, die zur Erklärung eines Items verwendet werden können

(4) Rotationstechniken: Orthogonal

- Equamax: Stellt einen Kompromiss zwischen Varimax- und Quartimax-Rotation dar
  - – Mit dieser Rotationstechnik wird die Varianz der Faktorladungen gleichmäßig über die Faktoren verteilt
    - Diese Rotation kann zu Irrtümern führen

(5) Rotationstechniken: Oblique

- Direct Oblimin: Vereinfacht Faktoren bei Minimierung von Kreuzprodukten der Ladungen
  - Delta-Werte von -4 bis 0 können in SPSS eingesetzt werden, um den Grad der Faktorinterkorrelation zu bestimmen. Faktoren korrelieren maximal: Delta-Wert = 0; Faktoren korrelieren minimal: Delta-Wert = -4.
- Direct Quartimin: Direct Quartimin entspricht der Methode Direct Oblimin mit einem Delta-Wert von 0
  - Führt zu hoch korrelierenden Faktoren
  - Sie stellt die meist angewandte oblique Rotationstechnik dar

(6) Rotationstechniken: Oblique

- Promax: Ursprünglich orthogonale Faktoren werden im Winkel verändert, so dass die Faktoren korrelieren können.
  - Die orthogonalen Ladungen werden um die Faktoren 2, 4, oder 6 potenziert
    - Geringe als auch hohe Ladungen werden reduziert. Vorteil: Moderate oder kleine Ladungen werden fast Null, hohe Ladungen geringfügig reduziert.
    - Die Promax-Rotation führt zu guten Lösungen

(7) Rotationstechniken: Fazit

- Orthogonale Faktorenlösung ist leichter zu interpretieren als Oblique
- Manchmal oblique Rotation zwingend, da theoretisch korrelierte Faktoren angenommen
- Als orthogonale Rotationstechnik empfiehlt sich die Varimax-Rotation und als oblique die Promax-Rotation oder die Direct-Oblimin- (bzw. Quartimin-) Rotation.

5.8 Grundbegriffe

- Zuordnung einer Variable zu einem Faktor:
  - Item wird dem Faktor zugewiesen, auf dem es am höchsten lädt
  - Zuordnung kann unzureichend sein, wenn Item nur gering auf Faktor lädt
  - Strengere Zuordnungsregel Fürntratt (1969):
    - Fürntratt-Kriterium: Ein Item wird einem Faktor zugeordnet, wenn quadrierte Ladung (a^2) des Items mindestens 50% der Itemkommunalität ist: $a^2 / h^2 > .5$.

(1) Grundbegriffe

- Ladung (a) entspricht bei orthogonalen Rotation der Korrelation zwischen Item und Faktor
  - Die quadrierte Ladung (a^2) gemeinsamer Varianzanteil zwischen Faktor und Variable
  - Oblique Rotation: Standardisierte Ladungsgewichte in Mustermatrix
    - Entsprechen partiellen standardisierten Regressionsgewichten, Sie geben die Wichtigkeit eines Items bezüglich des Faktors an, wenn der Einfluss der anderen Items auspartialisiert ist.
    - Korrelationen zwischen Items und Faktoren in der Strukturmatrix (Faktorladung), Ladungsgewichte bei obliquer Rotation können größer als ± 1 werden
  - Orthogonal Rotation: Struktur- und Ladungsmatrix gleich

(2) Grundbegriffe

- Interpretation partieller standardisierter Regressionsgewichte:
  - Geben mittlere Änderung – in Standardabweichungen – auf dem Faktor an, wenn das Item um eine Standardabweichung verändert wird.
  - Wird ein Item aus der Faktorenanalyse eliminiert, ändern sich alle anderen partiellen standardisierten Regressionsgewichte

(3) Grundbegriffe

- Einfachstruktur bezieht sich auf die Struktur der Faktormatrix.
  - Ladungen eines Items auf einem Faktor sehr hoch und auf den restlichen Faktoren sehr gering (nahe 0)
  - In Tabelle 5.1 dargestellte Faktormatrix kommt Einfachstruktur sehr nahe
    - Vgl. Ladungen in „grau” unterlegten Kästchen mit Ladungen in den „weiß” unterlegten Kästchen
  - Einfachstruktur erleichtert Interpretation

(4) Grundbegriffe

Tabelle 5.1

Ladungsmatrix und Kommunalitäten einer Hauptkomponentenanalyse mit Varimax-Rotation der Untertests aus dem HAWIE-R nach Tewes (1991).

	Komponenten (Faktoren):			
Untertests:	**Verbal (F1)**	**Handlung (F2)**	**h^2**	**Rel**
Allgemeines Wissen	**.767**	**.277**	**.665**	**.89 α**
Zahlennachsprechen	**.516**	**.315**	**.366**	**.87 α**
Wortschatz-Test	**.856**	**.237**	**.789**	**.90 α**
Rechnerisches Denken	**.531**	**.475**	**.508**	**.82 α**
Allgemeines Verständnis	**.754**	**.034**	**.569**	**.81 α**
Gemeinsamkeitenfinden	**.722**	**.333**	**.632**	**.87 α**
Bilderergänzen	.210	**.709**	**.547**	**.76 α**
Bilderordnen	.340	**.635**	**.519**	**.76 α**
Mosaik-Test	.355	**.705**	**.623**	**.82 α**
Figurenlegen	**.006**	**.776**	**.602**	**.77 α**
Zahlen-Symbol-Test	**.382**	**.481**	**.377**	**.95 r_{tt}**
Varianzaufklärung nach Rotation	.3391	.2806	.6197	

Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion, Pearson Education 2003, Markus Bühner, 63

(5) Grundbegriffe

- Kommunalität (h^2): aufgeklärte Varianz eines Items über alle extrahierten Faktoren.
  - Gilt nur bei orthogonaler Rotation
  - Das bedeutet, die Ladungsquadrate eines Items (m) werden über alle Faktoren (q) aufsummiert
    - $h^2 = a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + a_{m3}^2 + a_{mq}^2$
  - Obliquer Rotation entsprechen die summierten quadrierten Korrelationen in Strukturmatrix nicht der Kommunalität.
    - Berücksichtigung der Faktoreninterkorrelationen nötig

(6) Grundbegriffe

– Je höher Kommunalität eines Items, desto besser wird Item durch Faktoren repräsentiert
– Kommunalität lässt sich nicht immer und nicht beliebig steigern, indem mehr Faktoren extrahiert werden
– Kommunalität Mindestschätzung der Reliabilität

(7) Grundbegriffe

- Je höher Kommunalität eines Items, desto besser wird Item durch Faktoren repräsentiert
- Kommunalität lässt sich nicht immer und nicht beliebig steigern, indem mehr Faktoren extrahiert werden
- Kommunalität Mindestschätzung der Reliabilität

(8) Grundbegriffe

- Faktorwert repräsentiert den Wert einer Person auf einem Faktor:
  - Ausprägungsgrad einer Person auf diesem Faktor
  - Mittelwert ist Null und die Standardabweichung 1
  - Hohe positive Werte hohe Ausprägung einer Person auf Faktor
  - Hohe negative Werte negative Ausprägung einer Person auf Faktor
  - Faktorwerte unterscheiden sich nach eingesetzter Methode:
    - Für Hauptkomponentenanalyse können Faktorwerte exakt berechnet werden
    - Für Hauptachsen- und Maximum-Likelihood-Faktorenanalyse nur Schätzung möglich
    - Verschiedene Berechnungen möglich
      - Regression, Bartlett, Anderson-Rubin

(9) Grundbegriffe

- Verwendung von Faktorwerten:
  - Korrelationen mit Außenkriterien zu berechnen
    - Beispielweise zwischen dem Faktorwert „Extraversion” im NEO-FFI und einer Lehrerbeurteilung
  - Berechnung einer Faktorenanalyse höherer Ordnung
  - Wichtige Unterscheidung zwischen Faktorwerten und Summenwerten:
    - Faktorwert gewichteter Wert
    - Summenwert ungewichtet
  - Die Verwendung von Faktorwerten ist kritisiert worden:
    - Ladungsgewichte stark stichprobenabhängig
    - Daher Verwendung Summenwert vorgeschlagen

(10) Grundbegriffe

– Verwendung von Faktorwerten:
  - Korrelationen mit Außenkriterien zu berechnen
    – Beispielweise zwischen dem Faktorwert „Extraversion” im NEO-FFI und einer Lehrerbeurteilung
  - Berechnung einer Faktorenanalyse höherer Ordnung
  - Wichtige Unterscheidung zwischen Faktorwerten und Summenwerten:
    – Faktorwert gewichteter Wert
    – Summenwert ungewichtet
  - Die Verwendung von Faktorwerten ist kritisiert worden:
    – Ladungsgewichte stark stichprobenabhängig
    – Daher Verwendung Summenwert vorgeschlagen

(11) Grundbegriffe

- Eigenwert ($\sum_m a_{mj}^2$): Aufgeklärte Varianz eines Faktors über alle Items
  - Eigenwert des ersten Faktors ist Summe aller quadrierten Ladungen in der ersten Spalte.
  - Aufgeklärte Varianz eines Faktors gibt die „Wichtigkeit" des Faktors an
  - Durch Methode bedingt, klärt der erste Faktor am meisten Varianz auf
  - Je mehr weitere Faktoren extrahiert werden, desto geringer werden die Eigenwerte der Faktoren.
  - Durch Rotation ändert sich die Varianz der Faktoren:
    - Es ist sinnvoll, aufgeklärte Varianz der Faktoren vor und nach der Rotation anzugeben.
    - Eigenwert geteilt durch die Anzahl der Items entspricht relativen Anteil der Varianz dieses Faktors an der Gesamtvarianz aller Items

(12) Grundbegriffe

- Fehler $(1 - r_{tt})$ bezeichnet den Messfehler eines Items

- Spezifität $(r_{tt} - h^2)$ bezeichnet die systematische Varianz einer Variablen, die nicht durch extrahierte Faktoren erklärt wird
  - Beispiel Tabelle 5.1:
  - Zahlen-Symbol-Test und „Zahlennachsprechen" haben hohe Spezifitäten:
    - Zahlen-Symbol-Test: .95 - .377 = .573
    - Zahlennachsprechen: .87 - .366 = .504
    - Beide Tests besitzen über 50 Prozent spezifische Varianz, die durch HAWIE-R-Faktoren „Verbale Intelligenz" und „Handlungsintelligenz" nicht erklärt wird

(13) Grundbegriffe

- Einzigartigkeit ($1 - h^2$) bezeichnet Varianz einer Variablen, die diese Variablen mit keiner anderen Variable teilt
  - Gilt unter unrealistischer Annahme,
    - dass alle möglichen Variablen, die mit dieser Variable korrelieren können, in Faktorenanalyse enthalten sind.
  - Einzigartigkeit beinhaltet die Spezifität der Variablen

5.9 Zusätzliche Prozeduren

- Der KMO-Koeffizient gibt Anhaltspunkte, ob die Variablenauswahl für eine Faktorenanalyse geeignet ist

$$KMO = \frac{\sum\sum r_{ij}^2}{\sum\sum r_{ij}^2 + \sum\sum r_{ij.z}^2}, i \neq j$$

<u>dabei ist</u>:

r_{ij}^2 = Quadrierter Korrelationskoeffizient zwischen Variablen i und j

$R_{ij.z}^2$ = Quadrierter Partialkorrelationskoeffizient zwischen Variablen i und j nach Auspartialisierung der restlichen Variablen

$i \neq j$ = Korrelationen der Variablen mit sich selbst werden nicht berücksichtigt

Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion, Pearson Education 2003, Markus Bühner, 73

(1) Zusätzliche Prozeduren

- Es wird gemeinsamer Varianzanteil (rij^2) aller Variablen miteinander bestimmt und durch die gemeinsamen Varianzanteil (rij^2) zwischen allen Variablen plus den quadrierten Partialkoeffizenten ($rij.z^2$) geteilt
- Bleibt großer Varianzanteil nach Auspartialisierung der restlichen Variablen erhalten (der Partialkoeffizient ist groß), wird der KMO-Koeffizient klein, da die Matrix wenig gemeinsame Varianz beinhaltet

(2) Zusätzliche Prozeduren

– Es gibt folgende Anhaltspunkte für die Bewertung der Höhe des KMO-Koeffizienten:

	<	.50	inkompatibel mit der Durchführung	.70	-	.79	mittel
.50	-	.59	schlecht	.80	-	.89	gut
.60	-	.69	mäßig		>	.90	sehr gut

(3) Zusätzliche Prozeduren

- **Bartlett´s Test** auf Sphärizität: Testet Nullhypothese, dass alle Korrelationen gleich 0 sind.
  - Test hängt wie alle Signifikanztests von der Stichprobengröße ab.
  - Je größer die Stichprobe ist, desto leichter wird die Nullhypothese „alle Korrelationen sind gleich Null” abgelehnt

- **MSA-Koeffizenten** (Measure of Sample Adequacy) sind ähnlich wie KMO-Koeffizienten, jedoch werden nur die Variablen-betreffenden Korrelationen summiert

(4) Zusätzliche Prozeduren

- Anti-Image-Matrix:
  - Image eines Items ist die durch eine multiple Regression der restlichen Items aufgeklärte Varianz eines Items.
  - Anti-Image ist derjenige Teil der Varianz, der von den anderen Variablen unabhängig ist
  - Werte der in SPSS angegebenen Kovarianz- und Korrelationsmatrix sollten nahe 0 sein

(5) Zusätzliche Prozeduren

- Signifikanz von Faktorladungen:
  - Signifikanz von Faktorladungen nicht anlog zu Signifikanzen von Korrelationen,
  - Keine Funktion ihrer Höhe:
    - Hohe Faktorladungen können nicht signifikant werden, dagegen geringere signifikant
  - Standardfehler von Ladungen ist höher
  - Viele Ladungen werden gleichzeitig betrachtet
    - Alpha-Adjustierung erforderlich

(6) Zusätzliche Prozeduren

– Stevens gibt folgende ad-hoc-Regel für die Signifikanz (p = .01, zweiseitig) von Ladungen:

N = 50	r > .361	N = 180	r > .192	N = 400	r > .129
N = 100	r > .286	N = 200	r > .182	N = 600	r > .105
N = 100	r > .256	N = 250	r > .163	N = 800	r > .091
N = 140	r > .217	N = 300	r > .149	N = 1000	r > .081

– Unter Berücksichtigung der globalen Fehlerwahrscheinlichkeit (p = .05) sollten Tabellenwerte als Ad-hoc-Regel verdoppelt werden

(7) Zusätzliche Prozeduren

- Reliabilität von Faktoren:
  - Reliabilität von Faktoren kann direkt berechnet werden.
  - Zwei Formeln
    - (1) Die **Reliabilität** der Variablen ist **bekannt**
    - (2) Die **Reliabilität** einer Variablen ist **nicht**

$$(1)\quad r_{ttp} = \frac{\lambda_p - \sum_{i=1}^{p} v_{ij}^{2} \cdot (1 - r_{tti})}{\lambda_p}$$

$$(2)\quad r_{ttp} = \frac{\lambda_p - (1 - r_m)}{\lambda_p}$$

dabei ist:

λ_p = Eigenwert des p-ten Faktors

r_{tti} = Reliabilität der Variable i auf dem Faktor

r_{ttp} = Reliabilität des Faktors

a = Ladung

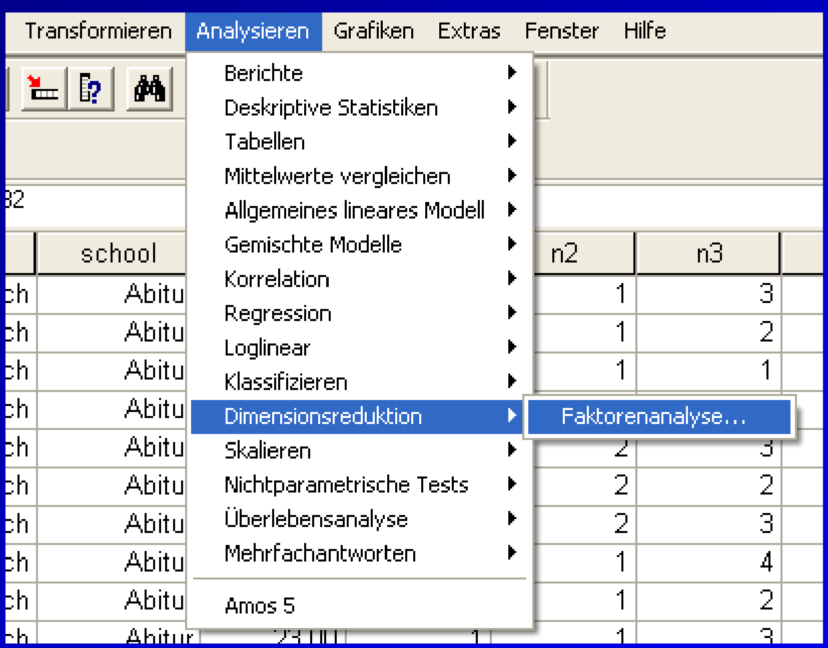
r_m = Durchschnittliche mittlere Variableninterkorrelation auf dem Faktor (Fisher-Z-transformierte Korrelationen)

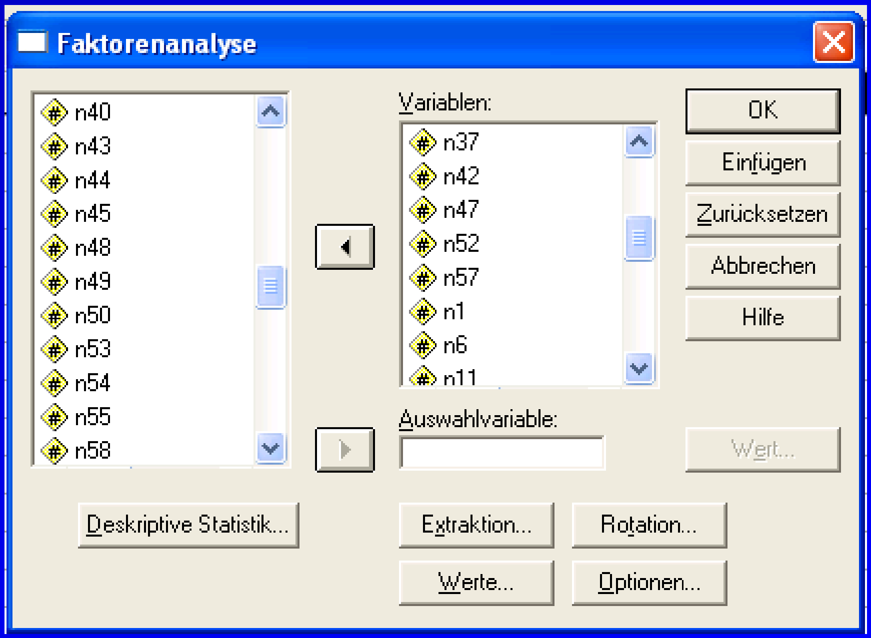
(8) Zusätzliche Prozeduren

- Reproduzierte Korrelationsmatrix**:**
  - Ziel der Faktorenanalyse: Mit wenig Informationsverlust Items auf wenige grundlegende Faktoren bzw. Komponenten reduzieren
  - Zusammenhänge der Ausgangskorrelationsmatrix (Stichprobenkorrelationsmatrix) sollen möglichst exakt repliziert werden
  - Mit Faktorladungen können Korrelationen zwischen den Items zurückgerechnet werden (reproduzierte Korrelationsmatrix)
  - Differenz zwischen der Ausgangskorrelationsmatrix und der reproduzierten Korrelationsmatrix entspricht der **Residualmatrix**
  - Alle Differenzen der Residualmatrix sollten möglichst um Null liegen
    - Dann: Ausgangskorrelationsmatrix mit reproduzierten Korrelationsmatrix identisch
    - Faktoren spiegeln Verhältnisse der Stichprobenkorrelationsmatrix exakt wider
  - Methode wird genutzt, um faktorenanalytische Methode (PCA, PAF, ML) auszuwählen.
  - Methode, die am besten ursprünglichen Stichprobenkorrelationen repliziert, sollte verwendet werden

5.10 Faktorenanalyse mit SPSS

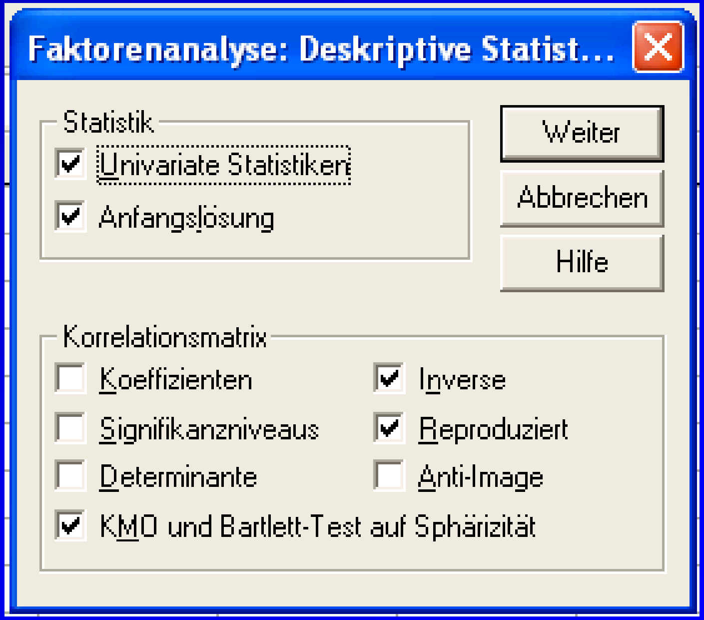
- Klicken Sie in Menüleiste auf „Analysieren“, „Dimensionsreduktion“ und „Faktorenanalyse“. Es öffnet sich Fenster „Faktorenanalyse”





(1) Faktorenanalyse mit SPSS

- „Deskriptive Statistiken“:
  - Folgende Statistiken sind für die Analyse sinnvoll:
    - (1) „**Statistik**”, „**Univariate Statistiken**” (= Mittelwerte und Standardabweichungen der Variablen)
    - (2) Korrelationsmatrix „**KMO und Bartlett-Test auf Sphärizität**”, „**Anti-Image**”, „**Reproduziert**” (Reproduzierte Korrelationsmatrix und Residualmatrix).
  - Die „Anfangslösung” ist bei SPSS voreingestellt und sollte beibehalten werden

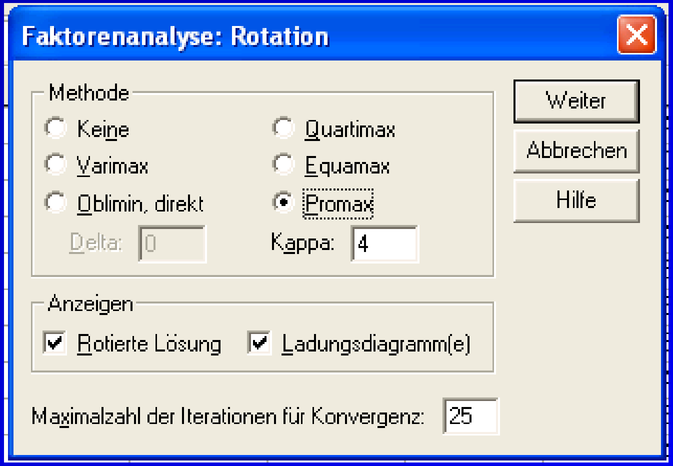


(2) Faktorenanalyse mit SPSS

- „Extraktion“:
  - Wählen Sie eine Extraktionsmethode
    - (1) Hauptachsenmethode
    - (2) Hauptkomponentenmethode
    - (3) Maximum-Likelihood-Methode
  - Markieren Sie unter „Anzeigen” das Kästchen „Scree-Plot“, um den Eigenwertverlauf optisch anzuzeigen
  - In machen Fällen muss die maximale Anzahl der Iterationen für die Konvergenz erhöht werden, falls eine Analyse fehlschlägt

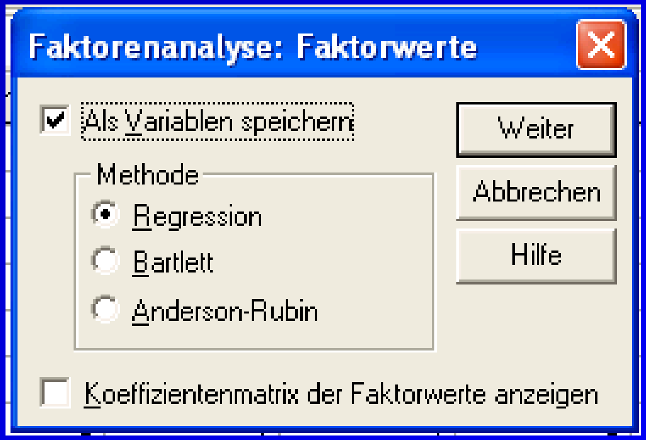
(3) Faktorenanalyse mit SPSS

- „Rotation”:
  - Wählen Sie die gewünschte Rotationsmethode (z.B. „Promax”)
  - Schlägt die Rotation in SPSS fehl, muss möglicherweise die Maximalzahl der Iterationen für die Konvergenz erhöht werden.



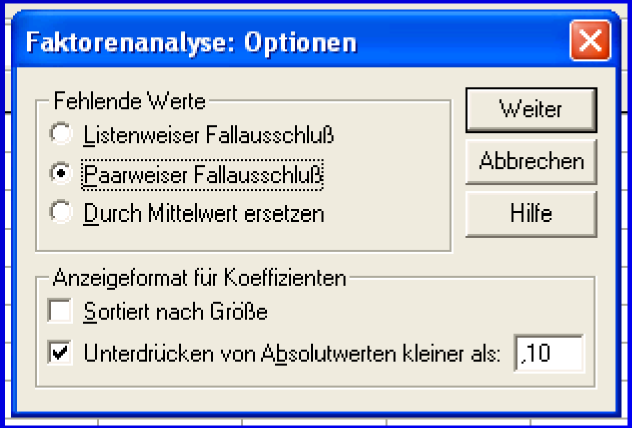
(4) Faktorenanalyse mit SPSS

- „Faktorwerte”:
  - Falls gewünscht, können die individuellen Werte einer Person über die Methode „Regression” in der Datendatei gespeichert und damit weiterverarbeitet werden



(5) Faktorenanalyse mit SPSS

- „Optionen”:
  - Sortiert nach Größe: Faktorladungs- und Faktorstrukturmatrizen werden nach der Größe der Werte sortiert, so dass Variablen, die auf demselben Faktor hohe Ladungen aufweisen, zusammen erscheinen.



(6) Faktorenanalyse mit SPSS

– **Unterdrücken von Ladungen:** Ladungen mit einem Betrag unterhalb des angegeben Wertes werden nicht angezeigt
  - Als ad-hoc Regel kann es sinnvoll sein, Ladungen mit a < .30 zu unterdrücken

– **Listenweiser Fallausschluss**: Fälle, die in mindestens einer der in die Faktorenanalyse einbezogenen Variablen einen fehlenden Wert aufweisen, werden vollständig aus der Analyse ausgeschlossen.

(7) Faktorenanalyse mit SPSS

- **Paarweiser Fallausschluss**: Bei der Berechnung der Korrelationen werden alle Fälle berücksichtigt, die für das betreffende Variablenpaar zwei gültige Werte aufweisen, auch wenn diese Fälle in anderen in die Analyse einbezogenen Variablen einen fehlenden Wert enthalten.

- **Durch Mittelwert ersetzen**: Fehlende Werte werden durch den Mittelwert der jeweiligen Variablen ersetzt, so dass alle Fälle in die Analyse einbezogen werden.
  - Ersetzen der fehlenden Werte wirkt sich nur auf die aktuelle Faktorenanalyse und nicht auf die Datendatei insgesammt

5.11 Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- Beispiel:
  - Analyse der NEO-FFI-Skalen „Extraversion” und „Neurotizismus”
  - Stichprobe von N = 101 Studenten
  - Vergleich zwischen:
    - Hauptkomponentenanalyse (PCA)
    - Hauptachsenanalyse (PAF)
    - Maximum-Likelihood-Analyse (ML)
  - Rotation: Promax und für die ML-Methode zusätzlich Variamax

(1) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- Ausgangsbasis: Korrelationsmatrix: r = -.13 bis r. = 69

Korrelationsmatrix

	N2	N7	N12	N17	N22	N27	N32	N37	N42	N47	N52	N57	N1	N6	N11	N16	N21	N26	N31	N36	N41	N46	N51	N56
N2	1.00	.17	.32	.37	.32	.32	.19	.40	.36	.08	.32	.26	-.06	-.22	-.15	-.22	-.30	-.24	-.10	-.14	-.08	-.24	-.05	-.03
N7	,17	1,00	,15	,33	-,10	,23	,03	,29	,08	-,07	,05	,08	-,11	,04	-,07	,00	-,13	,08	,02	-,16	-,02	,02	-,09	,09
N12	,32	,15	1,00	,20	,09	,17	,20	,42	,32	-,02	,23	,12	-,20	-,18	-,13	-,18	-,36	-,15	-,15	-,16	-,15	-,20	-,18	,05
N17	,37	,33	,20	1,00	,09	,31	,19	,39	,26	-,02	,17	,14	-,03	-,11	,02	-,01	-,13	-,13	,11	,01	-,07	-,05	-,10	,00
N22	,32	-,10	,09	,09	1,00	,13	,22	,07	,12	,22	,19	,13	,18	-,05	-,05	,03	,02	-,14	,04	,14	-,01	-,01	,12	-,03
N27	,32	,23	,17	,31	,13	1,00	,19	,43	,27	,15	,26	,35	-,09	-,09	-,06	-,33	-,29	-,05	,04	-,09	-,21	-,30	-,08	,06
N32	,19	,03	,20	,19	,22	,19	1,00	,22	,17	,16	,23	,09	,16	-,13	-,13	-,04	-,04	-,06	,05	,08	-,06	-,13	,07	,06
N37	,40	,29	,42	,39	,07	,43	,22	1,00	,44	,00	,28	,17	-,16	-,35	-,06	-,54	-,42	-,29	-,23	-,16	-,08	-,49	-,24	-,08
N42	,36	,08	,32	,26	,12	,27	,17	,44	1,00	-,29	,16	,15	-,09	-,21	-,20	-,45	-,32	-,50	-,08	-,16	-,33	-,44	-,24	-,01
N47	,08	-,07	-,02	-,02	,22	,15	,16	,00	-,29	1,00	,23	,04	,01	,02	,13	,00	,26	,09	-,03	,22	,12	,04	,06	-,10
N52	,32	,05	,23	,17	,19	,26	,23	,28	,16	,23	1,00	,20	-,14	-,12	,07	-,11	-,17	-,10	-,12	-,16	-,27	-,11	-,16	-,17
N57	,26	,08	,12	,14	,13	,35	,09	,17	,15	,04	,20	1,00	,03	-,30	-,11	-,18	-,15	-,27	,04	-,18	-,43	-,09	-,14	,05
N1	-,06	-,11	-,20	-,03	,18	-,09	,16	-,16	-,09	,01	-,14	,03	1,00	,14	,07	,18	,21	,10	,28	,24	,06	,22	,11	,11
N6	-,22	,04	-,18	-,11	-,05	-,09	-,13	-,35	-,21	,02	-,12	-,30	,14	1,00	,30	,29	,39	,42	,16	,23	,27	,36	,33	,09
N11	-,15	-,07	-,13	,02	-,05	-,06	-,13	-,06	-,20	,13	,07	-,11	,07	,30	1,00	,27	,46	,37	,24	,17	,38	,27	,13	,01
N16	-,22	,00	-,18	-,01	,03	-,33	-,04	-,54	-,45	,00	-,11	-,18	,18	,29	,27	1,00	,39	,47	,39	,16	,09	,69	,33	-,02
N21	-,30	-,13	-,36	-,13	,02	-,29	-,04	-,42	-,32	,26	-,17	-,15	,21	,39	,46	,39	1,00	,32	,14	,23	,27	,53	,28	,06
N26	-,24	,08	-,15	-,13	-,14	-,05	-,06	-,29	-,50	,09	-,10	-,27	,10	,42	,37	,47	,32	1,00	,30	,20	,40	,48	,38	-,04
N31	-,10	,02	-,15	,11	,04	,04	,05	-,23	-,08	-,03	-,12	,04	,28	,16	,24	,39	,14	,30	1,00	,32	,13	,24	,09	,15
N36	-,14	-,16	-,16	,01	,14	-,09	,08	-,16	-,16	,22	-,16	-,18	,24	,23	,17	,16	,23	,20	,32	1,00	,19	,29	,22	-,01
N41	-,08	-,02	-,15	-,07	-,01	-,21	-,06	-,08	-,33	,12	-,27	-,43	,06	,27	,38	,09	,27	,40	,13	,19	1,00	,17	,33	,15
N46	-,24	,02	-,20	-,05	-,01	-,30	-,13	-,49	-,44	,04	-,11	-,09	,22	,36	,27	,69	,53	,48	,24	,29	,17	1,00	,37	-,06
N51	-,05	-,09	-,18	-,10	,12	-,08	,07	-,24	-,24	,06	-,16	-,14	,11	,33	,13	,33	,28	,38	,09	,22	,33	,37	1,00	,11
N56	-,03	,09	,05	,00	-,03	,06	,06	-,08	-,01	-,10	-,17	,05	,11	,09	,01	-,02	,06	-,04	,15	-,01	,15	-,06	,11	1,00

(2) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy:
  - Zeigt an, ob substanzielle Korrelationen vorliegen
  - Wert liegt bei .70, noch passable Eignung der Daten
  - Bartlett-Test prüft Nullhypothese, dass alle Korrelationen gleich Null sind
  - Prüfgröße ist χ^2 (Chi) verteilt und beträgt der χ^2-Wert 760.49 bei df = 276
  - χ^2 signifikant (sig. = ,0). Korrelationen weichen signifikant von Null ab.
  - Bei hohem N wird der Bartlett-Test fast immer signifikant (höhere Teststärke)

Maß der Stichprobeneignung nach Kaiser-Meyer-Olkin.		,70
Bartlett-Test auf Sphärizität	Ungefähres Chi-Quadrat	760,49
	df	276
	Signifikanz nach Bartlett	0

(3) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- Anti-Image-Matrix enthält negativen Partialkorrelationen der Items
  - Aus entsprechenden Zusammenhang zwischen zwei Items sind alle anderen Variablen der Matrix auspartialisiert
  - MSA-Koeffizient (in Diagonale in Fettdruck): Hoher Wert (> .80) (analog zum KMO-Koeffizienten) gute Eignung der Testkennwerte
  - Items „N56" (KMO = .33) und „N47" (KMO = .42) KMO < .30 (!)

Anti-Image-Matrizen

	N1	N6	N11	N16	N21	N26	N31	N36	N41	N46	N51	N56	N2	N7	N12	N17	N22	N27	N32	N37	N42	N47	N52	N57
N1	**,69**	-,11	,00	,03	,00	-,01	-,16	-,05	,05	-,13	,08	-,10	-,03	,10	,18	,03	-,18	,08	-,21	-,08	,02	,03	,13	-,05
N6	-,11	**,82**	-,11	,04	-,17	-,13	,05	-,12	-,01	-,01	-,17	-,04	,03	-,17	-,08	,02	,02	-,15	,11	,23	-,07	,07	-,08	,21
N11	,00	-,11	**,61**	-,22	-,39	-,13	-,09	-,07	-,34	,12	,11	,01	,10	,16	-,02	-,02	,08	-,05	,23	-,23	-,06	,05	-,28	-,16
N16	,03	,04	-,22	**,70**	,06	-,08	-,34	,21	,32	-,41	-,16	,04	-,07	-,09	-,09	-,19	-,16	,19	-,15	,28	,27	,05	,07	,25
N21	,00	-,17	-,39	,06	**,73**	-,01	,09	,11	,04	-,35	,01	-,13	,10	,03	,27	-,05	-,07	,18	-,17	,09	-,15	-,37	,19	-,01
N26	-,01	-,13	-,13	-,08	-,01	**,80**	-,19	,01	-,17	-,13	-,19	,20	,03	-,14	-,12	,15	,15	-,26	-,06	,02	,30	,09	-,05	,15
N31	-,16	,05	-,09	-,34	,09	-,19	**,60**	-,30	-,15	,12	,16	-,13	,06	-,02	,09	-,08	,02	-,12	-,01	,12	-,22	,02	,03	-,20
N36	-,05	-,12	-,07	,21	,11	,01	-,30	**,64**	,09	-,26	-,08	,02	,05	,15	,06	-,10	-,13	,07	-,11	-,06	,02	-,24	,18	,18
N41	,05	-,01	-,34	,32	,04	-,17	-,15	,09	**,60**	-,08	-,20	-,17	-,20	-,02	,05	-,05	-,11	,20	-,07	-,09	,24	-,08	,27	,39
N46	-,13	-,01	,12	-,41	-,35	-,13	,12	-,26	-,08	**,77**	-,13	,15	,04	-,13	-,15	-,07	,06	,05	,19	,12	,06	,15	-,15	-,22
N51	,08	-,17	,11	-,16	,01	-,19	,16	-,08	-,20	-,13	**,76**	-,14	-,08	,15	,15	,07	-,11	-,06	-,13	-,06	-,07	,02	,09	-,09
N56	-,10	-,04	,01	,04	-,13	,20	-,13	,02	-,17	,15	-,14	**,33**	,03	-,15	-,21	,02	,05	-,13	-,05	,18	,10	,15	,06	-,08
N2	-,03	,03	,10	-,07	,10	,03	,06	,05	-,20	,04	-,08	,03	**,82**	-,06	-,09	-,20	-,20	-,05	,05	-,04	-,20	-,09	-,17	-,17
N7	,10	-,17	,16	-,09	,03	-,14	-,02	,15	-,02	-,13	,15	-,15	-,06	**,57**	,06	-,19	,07	-,06	,02	-,28	,00	-,01	,05	-,03
N12	,18	-,08	-,02	-,09	,27	-,12	,09	,06	,05	-,15	,15	-,21	-,09	,06	**,71**	,01	-,06	,14	-,14	-,25	-,20	-,14	,02	-,04
N17	,03	,02	-,02	-,19	-,05	,15	-,08	-,10	-,05	-,07	,07	,02	-,20	-,19	,01	**,74**	,05	-,17	-,07	-,23	-,07	,06	-,01	,02
N22	-,18	,02	,08	-,16	-,07	,15	,02	-,13	-,11	,06	-,11	,05	-,20	,07	-,06	,05	**,63**	-,09	-,02	,00	-,08	-,11	-,13	-,06
N27	,08	-,15	-,05	,19	,18	-,26	-,12	,07	,20	,05	-,06	-,13	-,05	-,06	,14	-,17	-,09	**,72**	-,06	-,15	-,10	-,23	,01	-,20
N32	-,21	,11	,23	-,15	-,17	-,06	-,01	-,11	-,07	,19	-,13	-,05	,05	,02	-,14	-,07	-,02	-,06	**,57**	-,10	-,10	-,07	-,23	-,03
N37	-,08	,23	-,23	,28	,09	,02	,12	-,06	-,09	,12	-,06	,18	-,04	-,28	-,25	-,23	,00	-,15	-,10	**,81**	-,06	,04	-,07	,03
N42	,02	-,07	-,06	,27	-,15	,30	-,22	,02	,24	,06	-,07	,10	-,20	,00	-,20	-,07	-,08	-,10	-,10	-,06	**,74**	,39	-,01	,19
N47	,03	,07	,05	,05	-,37	,09	,02	-,24	-,08	,15	,02	,15	-,09	-,01	-,14	,06	-,11	-,23	-,07	,04	,39	**,42**	-,23	,00
N52	,13	-,08	-,28	,07	,19	-,05	,03	,18	,27	-,15	,09	,06	-,17	,05	,02	-,01	-,13	,01	-,23	-,07	-,01	-,23	**,65**	,03
N57	-,05	,21	-,16	,25	-,01	,15	-,20	,18	,39	-,22	-,09	-,08	-,17	-,03	-,04	,02	-,06	-,20	-,03	,03	,19	,00	,03	**,59**

Fettdruck:: Maß der Stichprobeneignung, in der SPSS-Ausgabe mit (a) vermerkt

(4a) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

Kommunalitäten

	Hauptkomponentenanalyse		Hauptachsenanalyse		Maximum-Likelihood-Analyse	
	Anfänglich	Extraktion	Anfänglich	Extraktion	Anfänglich	Extraktion
N1	1,000	,152	,247	,096	,247	,079 ❶
N6	1,000	,341	,402	,290	,402	,270
N11	1,000	,281	,486	,223	,486	,203
N16	1,000	,500	,700	,466	,700	,557
N21	1,000	,481	,597	,431	,597	,407
N26	1,000	,482	,580	,442	,580	,433
N31	1,000	,264	,428	,187	,428	,185
N36	1,000	,261	,355	,184	,355	,142
N41	1,000	,240	,551	,191	,551	,139
N46	1,000	,552	,668	,529	,668	,609
N51	1,000	,303	,371	,242	,371	,230
N56	1,000	,006	,226	,003	,226	,001 ❷
N2	1,000	,483	,424	,420	,424	,398
N7	1,000	,098	,310	,073	,310	,124
N12	1,000	,274	,367	,225	,367	,232
N17	1,000	,365	,367	,287	,367	,347
N22	1,000	,251	,281	,137	,281	,096 ❸
N27	1,000	,420	,474	,345	,474	,338
N32	1,000	,279	,290	,170	,290	,139
N37	1,000	,560	,639	,536	,639	,573
N42	1,000	,428	,582	,382	,582	,390
N47	1,000	,175	,419	,091	,419	,054 ❹
N52	1,000	,284	,382	,207	,382	,192
N57	1,000	,206	,433	,153	,433	,130

Extraktionsmethode: Hauptkomponentenanalyse, Hauptachsenanalyse, Maximum-Likelihood-Analyse.

(4b) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- Kommunalitäten:
  - Hauptkomponentenanalyse unter der Spalte „Anfänglich“ für jedes Item Wert 1
  - Hauptachsen- und der Maximum-Likelihood Analyse unter Spalte „Anfänglich“ R^2
  - Verletzung multivariater Normalverteilung führt bei ML-Methode zu keinen verzerrten Resultaten
  - Bei Extraktion von wenigen Faktoren Kommunalitäten reduziert
  - Bei Hauptachsen- bzw. ML-Methode Kommunalitäten von N1, N56, N7 und N47 sehr gering ($h^2 < .10$)
    - Items in beiden Analysen von zwei Faktoren unzureichend erfasst
    - Zusammenhang zwischen Kommunalitäten Hauptkomponenten- und Hauptachsenanalyse korrelieren r = .984
    - Kommunalitäten bei Hauptkomponentenanalyse (M = .32, S = .14) fallen ca. halbe Standardabweichung höher aus als bei Hauptachsenanalyse (M = .26, S = .15)

(5a) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

Erklärte Gesamtvarianz

Komponente	Anfängliche Eigenwerte: Gesamt	% der Varianz	Kumulierte %	Summen von quadrierten Faktorladungen für Extraktion: Gesamt	% der Varianz	Kumulierte %	Rotierte Summe: Gesamt
1	5,368	22,367	22,367	5,368	22,367	22,367	❹ 4,919
2	2,320	9,665	32,032	2,320	9,665	❸ 32,032	❺ 3,945
3	1,673	6,972	39,004				
4	1,540	6,419	45,423				
5	1,456	6,067	51,490				
6	1,168	4,865	56,355				
7	1,103 ❶	4,596	❷ 60,950				
8	,978	4,076	65,027				
9	,914	3,809	68,835				
10	,891	3,714	72,549				
11	,847	3,528	76,077				
12	,781	3,254	79,331				
13	,721	3,004	82,336				
14	,674	2,810	85,146				
15	,557	2,322	87,468				
16	,514	2,143	89,611				
17	,498	2,076	91,686				
18	,400	1,668	93,354				
19	,376	1,566	94,921				
20	,338	1,406	96,327				
21	,280	1,168	97,495				
22	,249	1,037	98,532				
23	,199	,828	99,359				
24	,154	,641	100,000				

Extraktionsmethode: Hauptkomponentenanalyse.

a Wenn Komponenten korreliert sind, können die Summen der quadrierten Ladungen nicht addiert werden, um eine Gesamtvarianz zu erhalten.

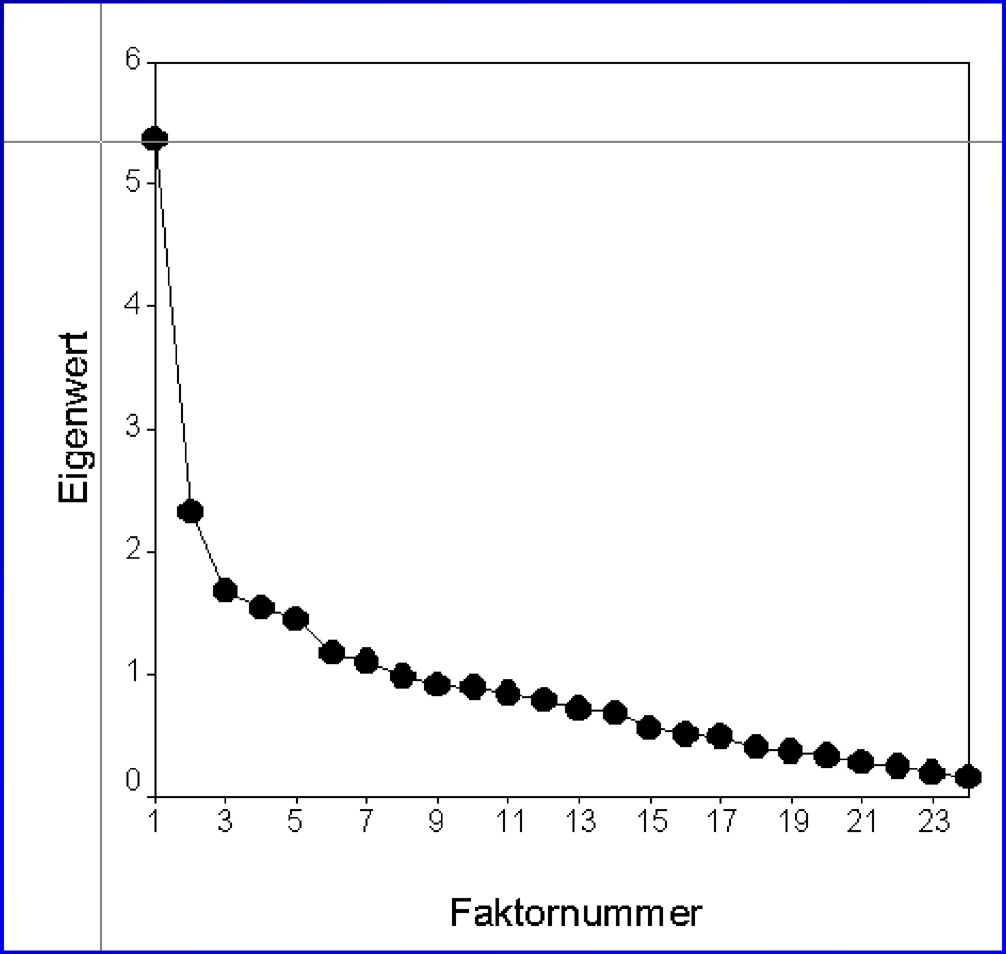
Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion, Pearson Education 2003, Markus Bühner, 96

(5b) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- Eigenwertverlauf
  - Spalte „Anfängliche Eigenwerte" deutet an, nach Eigenwert-Kriterium >1: 7-faktorielle Lösung angemessen
  - 7 Faktoren erklären zusammen 61 Prozent der Gesamtvarianz.
  - Vorherige Annahmen sprechen nur für zwei Faktoren
  - 2 Faktoren erklären nur 32 Prozent der Gesamtvarianz
  - Vor der Rotation: 1. Faktor 22 Prozent und 2. Faktor 10 Prozent
    - Verhältnisse ändern sich nach der Rotation
  - Nach der Rotation klärt 1. Faktor etwa 20 Prozent auf und 2. Faktor 16 Prozent

(6) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- Scree-Plot
  - Auf X-Achse Anzahl der Faktoren und auf der Y-Achse Eigenwert
  - Als Extraktionskriterium gilt die Anzahl der Faktoren bis zum Knick (links nach rechts) im Eigenwertverlauf
  - Beispiel: 2 oder 5 Faktoren.



(7a) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

```
Run MATRIX procedure:
PARALLEL ANALYSIS:
Principal Components
Specifications for this Run:
Ncases      101 ❶
Nvars        24 ❷
Ndatsets   1000 ❸
Percent      95
Random Data Eigenvalues
```

Root	Means	Prcntyle ❹	empirischer Eigenwertverlauf	
1,000000	2,015747	2,186831	5,368	
2,000000	**1,840348**	**1,962085**	**2,320**	**<- zwei Faktoren**
3,000000	1,707017	1,808901	1,673	
4,000000	1,591329	1,679670	1,540	
5,000000	1,489395	1,571834	1,456	

(7b) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- Parallelanalyse: Zufällige Eigenwerte werden erzeugt
  - Im Beispiel werden automatisch jeweils 1000 Datendateien (Stichproben) mit 101 Fällen und 24 Zufallsvariablen erzeugt
  - Angaben werden vom Anwender in die Syntax eingetragen
  - Im Extremfall können so viele Faktoren wie Items (24) extrahiert werden
    - Für jede einzelne der 24 möglichen Komponenten oder Faktoren resultiert Verteilung von 1000 zufälligen Eigenwerten
    - Anhand dieser Verteilung wird Grenze definiert (95%), mit der zufällige Eigenwerte nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von fünf Prozent auftreten
    - Zufällige Eigenwerte in dieser Größe sind extrem unwahrscheinlich und gehören ab dieser Grenze nicht mehr der Verteilung der zufälligen Eigenwerte an, sondern der Verteilung von empirischen Eigenwerten
  - Beispiel: 95% Perzentil der Verteilung **zufällig erzeugter Eigenwerte** erst 3 Komponenten:
    - ZUFALL: 2.186831 -> EMPRISCH 5.368
    - ZUFALL: 1.962085 -> EMPRISCH 2.320
    - ZUFALL: 1.808901 -> EMPRISCH 1.673
  - Die Komponenten oder Faktoren werden extrahiert, deren empirischer Eigenwertverlauf über dem zufälligen Eigenwertverlauf liegt.
  - Bei mehr Probanden wird eigenwertverlauf flacher
    - Bei geringen N werden weniger Faktoren extrahiert als bei einem hohen N.

(8a) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

Velicer's Average Squared Correlations

,000000 ❶	,047835	
1,000000	,020843	
2,000000	,019312	<- kleinste Partialkorrelation ❷
3,000000	,020772	
4,000000	,023000	
5,000000	,023464	
6,000000	,026032	
7,000000	,030242	
8,000000	,034136	
9,000000	,039249	

(8b) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- MAP-Test beruht auf Partialkorrelationen der jeweiligen extrahierten Komponenten (Hauptkomponentenanalyse) aus der ursprünglichen Korrelationsmatrix.
  - Im dargestellten Teil der Ergebnisdarstellung ist in Spalte 1 die Anzahl der auspartialisierten Komponenten dargestellt und in der Spalte 2 mittlere quadrierte Partialkorrelation.
  - Hinter der Zahl ,00000 ist mittlere quadrierte Korrelation der Ausgangskorrelationsmatrix aufgeführt
  - Es werden die Faktoren extrahiert, bei der die mittlere Partialkorrelation zwischen den Items nach Auspartialisierung der entsprechenden Komponenten am geringsten ist
  - Nach Auspartialisierung der dritten Komponente steigt Partialkorrelation wieder an.
  - Nach MAP-Test sind zwei Faktoren zu extrahieren

(9a) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

N56	-,02	-,01	-,01	-,01	,00	-,01	-,01	-,02	-,02	,00	-,01	-,01	,01	,02	,01	,02	,02	,02	,01	,01	,01	,02	,01	**,00**
N2		-,03	,02	,02	,16	-,05	-,03	-,05	,04	,03	,05	,04	,01	-,02	-,07	,03	-,03	-,05	-,05	-,04	,06	,02	,08	-,02
N7	-,03		,01	,13	-,20	,05	-,10	,09	-,04	-,13	-,09	-,03	-,11	,09	-,09	,04	-,06	,10	-,02	-,16	,02	,06	-,08	,10
N12	,02	,01		-,03	-,02	-,11	,04	,06	,05	-,03	,03	-,05	-,12	,02	-,02	,08	-,11	,05	-,07	-,05	-,01	,06	-,03	,07
N17	,02	,13	-,03		-,09	-,01	-,03	,05	,05	-,11	-,08	-,04	-,02	-,02	,00	,08	,01	-,08	,06	,02	,00	,04	-,08	,01
N22	,16	-,20	-,02	-,09		-,03	,10	-,07	,05	,17	,07	,05	,17	-,04	-,08	,03	,06	-,16	-,01	,12	,00	-,01	,11	-,02
N27	-,05	,05	-,11	-,01	-,03		-,02	,01	-,03	,10	,01	,15	-,02	,10	,02	-,09	-,04	,13	,09	,00	-,07	-,06	,04	,08
N32	-,03	-,10	,04	-,03	,10	-,02		,00	,03	,11	,07	-,02	,17	-,07	-,13	,03	,06	-,02	,03	,09	-,01	-,06	,09	,06
N37	-,05	,09	,06	,05	-,07	,01	,00		-,01	,00	-,02	-,10	-,02	-,02	,14	-,10	,01	,07	-,07	,03	,16	-,03	,02	-,06
N42	,04	-,04	,05	,05	,05	-,03	,03	-,01		-,25	-,05	-,06	,06	,10	,02	-,03	,07	-,13	,11	,04	-,11	,01	,02	,01
N47	,03	-,13	-,03	-,11	,17	,10	,11	,00	-,25		,19	,03	-,03	-,05	,04	-,11	,19	-,02	-,11	,15	,07	-,07	-,02	-,10
N52	,05	-,09	,03	-,08	,07	,01	,07	-,02	-,05	,19		,05	-,10	,00	,11	,03	-,01	,01	-,10	-,11	-,18	,04	-,08	-,16
N57	,04	-,03	-,05	-,04	,05	,15	-,02	-,10	-,06	,03	,05		,09	-,16	-,03	,01	,03	-,11	,09	-,10	-,32	,11	-,03	,06
N1	,01	-,11	-,12	-,02	,17	-,02	,17	-,02	,06	-,03	-,10	,09		,00	-,06	-,02	,04	-,09	,17	,14	-,04	,00	-,02	,10
N6	-,02	,09	,02	-,02	-,04	,10	-,07	-,02	,10	-,05	,00	-,16	,00		,08	-,09	,06	,08	-,04	,04	,08	-,04	,09	,08
N11	-,07	-,09	-,02	,00	-,08	,02	-,13	,14	,02	,04	,11	-,03	-,06	,08		-,06	,20	,08	,05	,00	,22	-,07	-,09	-,01
N16	,03	,04	,08	,08	,03	-,09	,03	-,10	-,03	-,11	,03	,01	-,02	-,09	-,06		-,08	-,02	,10	-,11	-,18	,10	-,03	-,04
N21	-,03	-,06	-,11	,01	,06	-,04	,06	,01	,07	,19	-,01	,03	,04	,06	,20	-,08		-,09	-,09	,00	,03	,04	-,02	,04
N26	-,05	,10	,05	-,08	-,16	,13	-,02	,07	-,13	-,02	,01	-,11	-,09	,08	,08	-,02	-,09		,03	-,04	,16	-,03	,07	-,06
N31	-,05	-,02	-,07	,06	-,01	,09	,03	-,07	,11	-,11	-,10	,09	,17	-,04	,05	,10	-,09	,03		,17	-,01	-,07	-,11	,14
N36	-,04	-,16	-,05	,02	,12	,00	,09	,03	,04	,15	-,11	-,10	,14	,04	,00	-,11	,00	-,04	,17		,06	,00	,04	-,02
N41	,06	,02	-,01	,00	,00	-,07	-,01	,16	-,11	,07	-,18	-,32	-,04	,08	,22	-,18	,03	,16	-,01	,06		-,12	,15	,14
N46	,02	,06	,06	,04	-,01	-,06	-,06	-,03	,01	-,07	,04	,11	,00	-,04	-,07	,10	,04	-,03	-,07	,00	-,12		,00	-,08
N51	,08	-,08	-,03	-,08	,11	,04	,09	,02	,02	-,02	-,08	-,03	-,02	,09	-,09	-,03	-,02	,07	-,11	,04	,15	,00		,10
N56	-,02	,10	,07	,01	-,02	,08	,06	-,06	,01	-,10	-,16	,06	,10	,08	-,01	-,04	,04	-,06	,14	-,02	,14	-,08	,10	

Extraktionsmethode: Maximum-Likelihood.

Residuen werden zwischen beobachteten und reproduzierten Korrelationen berechnet. Es liegen 147 (53,0Prozent) ❶ nicht-redundante Residuen mit absoluten Werten größer 0,05 vor.

Fettdruck: Reproduzierte Kommunalitäten, in SPSS mit Fußnote (b)

(9b) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- Reproduzierten Korrelationsmatrix
  - In Diagonalen obere Matrix: Reproduzierte Kommunalitäten
  - Die Residuen in der unterer Matrix Differenz zwischen beobachteten und reproduzierten Korrelationen
  - Die Anzahl nicht-redundanter Residuen hängt von der Anzahl der extrahierten Faktoren ab
    - Je mehr Faktoren extrahiert werden, desto geringer sind in der Regel die Residuen (dies muss jedoch nicht immer der Fall sein)
  - Anzahl bedeutsamer Residuen unterscheidet sich aufgrund der Analysemethode :
    - Hauptachsenanalyse = 154 (55.0 Prozent)
    - Hauptkomponentenanalyse = 162 (58.0 Prozent)
    - Maximum-Likelihood-Analyse = 147 (53.0 Prozent)
  - Nach nicht-redundanten Residuen, Maximum-Likelihood-Methode beste Analysetechnik

(10) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

- Ergebnisse der Extraktionsmethoden:
  - Eigenwert > 1 = 7 Faktoren
  - Scree-Test = 2 oder 5 Faktoren
  - Paralleltestanalyse = 2 Faktoren
  - MAP-Test = 2 Faktoren
  - Theoretische Vorgabe = 2 Faktoren
  - Ziel der Faktorenextraktion ist sparsame Repräsentation des Itemsatzes durch weniger Dimensionen
  - 2 Faktoren: Vernünftige Alternative zwischen
    - Sparsamkeit
    - ausreichender Anzahl (Sättigung) von Items pro Faktor (Reliabilitätsgesichtspunkt)

(11a) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPSS

Komponentenmatrix bzw. Faktorenmatrix (Unrotierte Faktorenmatrix)

	Komponente (PCA)		Faktor (PAF)		Faktor (ML)	
	1	2	1	2	1	2
N1	,28	,27	,25	,18	,31	
N6	,57	,15	,52	,13	,50	
N11	,44	,29	,40	,25	,51	,15
N16	,68	,21	,65	,20	,76	
N21	,67	,17	,64	,14	,57	-,11
N26	,65	,25	,62	,24	,69	
N31	,35	,37	,32	,29	,50	,20
N36	,40	,32	,36	,23	,41	
N41	,47	,12	,42	,10	,35	
N46	,71	,22	,69	,22	,80	
N51	,48	,26	,44	,22	,51	
N56						
N2	-,53	,45	-,50	,41		,62
N7	-,20	,24	-,17	,21	,14	,40
N12	-,49	,19	-,44	,17	-,15	,39
N17	-,33	,51	-,30	,44	,21	,67
N22	-,12	,49	-,10	,36	,18	,36
N27	-,48	,44	-,45	,38		,56
N32	-,22	,48	-,20	,36	,12	,42
N37	-,71	,25	-,69	,25	-,33	,54
N42	-,65		-,62		-,45	,27
N47		,41		,29	,25	,21
N52	-,38	,38	-,34	,30		,45
N57	-,40	,21	-,36	,16		

Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion, Pearson Education 2003, Markus Bühner, 106

(11b) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPPS

- Unrotierte Lösung:
  - Bei der unrotierten Lösung wird die erste Hauptkomponente so bestimmt, dass sie die meiste Varianz der Items aufdeckt.
  - Matrix zeigt, wie stark die Items auf dem ersten unrotierten Faktor laden, das heißt in welchem Ausmaß sie etwas Ähnliches messen.
  - Deutliche Ladungsunterschiede in der Höhe zwischen Hauptkomponenten-, Hauptachsen- und Maximum-Likelihood-Analyse.
  - Unrotierten Lösung wird meist zu unrecht wenig Bedeutung geschenkt

(12a) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPPS

Mustermatrix (Rotierte Faktorenmatrix)

	Komponente (PCA, Promax)		Faktor (PAF, Promax)		Faktor (ML, Promax)		Faktor (ML+Varimax)	
	1	2	1	2	1	2	1	2
N1	,43	,15	,35	,10	,31		,28	
N6	,54		,51		,50		,49	-,16
N11	,57	,11	,52	,12	,51	,15	,45	
N16	,67 ❷		,67 ❷		,76 ❷		,73 ❷	-,16
N21	,64	-,11	,61		,57	-,11	,59	-,24
N26	,68		,68		,69		,65	
N31	,56	,23	,50	,20	,50	,20	,42	
N36	,55	,15	,48	,12	,41		,38	
N41	,45		,41		,35		,35	-,12
N46	,71 ❶		,71 ❶		,80 ❶		,76 ❶	-,16
N51	,57		,53		,51		,48	
N56	❺	❺	❺	❺	❺	❺	❺	❺
N2		,68 ❸		,65 ❸		,62 ❸	-,21	,60 ❸
N7		,33		,30	,14	,40		,35
N12	-,21	,40	-,18	,35	-,15	,39	-,26	,41
N17	,16	,65 ❹	,17	,60 ❹	,21	,67 ❹		,59 ❹
N22	,30	,54	,24	,43	,18	,36		,30
N27		,65		,60		,56	-,20	,55
N32	,22	,58	,18	,48	,12	,42		,37
N37	-,33 ❻	,55 ❻	-,29 ❻	,54 ❻	-,33 ❻	,54 ❻	-,47 ❻	,59 ❻
N42	-,46 ❼	,31 ❼	-,43 ❼	,28 ❼	-,45 ❼	,27 ❼	-,51 ❼	,36 ❼
N47	,40 ❽	,37 ❽	,33 ❽	,28 ❽	,25 ❽	,21 ❽	,18 ❽	,14 ❽
N52		,54		,47		,45	-,11	,42
N57	-,13	,38	-,12	,31	-,11	,29	-,19	,30

(12b) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPPS

- Mustermatrix
  - Ladungen der Promax-Rotationen korrelieren über r = .92 miteinander
  - Faktorladungen für die PCA am höchsten und für ML-Methode am niedrigsten
- Erster Faktor in allen Promax-Lösungen eine klare Zuordnung der Items zur Skala „Neurotizismus”
  - Markeritems für Faktor 1 (Neurotizismus) Item N16 und N46
- Markeritems für Faktor 2 (Extraversion) die Items N2 und N17.
- Item N56 wird keinem der beiden Faktoren eindeutig zugeordnet
  - Ladung auf beiden Faktoren ist gering ($a < .10$).
  - Item besitzt eine geringe Kommunalität ($h^2 = .001$)
  - In Stichprobe erfasst dieses Item etwas anderes als „Neurotizismus”.
- Für Faktor 2 (Extraversion) Item N37 problematisch
  - Auf Faktor „Neurotizismus” (Faktor 1) bedeutsame Nebenladung auf von a .30
  - Die Items N42 und N47 werden bei allen Lösungen dem Faktor „Neurotizismus” mit negativem Vorzeichen zugeordnet, obwohl sie eigentlich zur Skala „Extraversion” gehören

(13a) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPPS

- Welche Methode angemessen?
  - **H**ängt von den Zielen ab, die verfolgt werden.
  - Ziel: Orthogonale, einfach zu interpretierende Skalen zu erzielen
    - Varimax-Rotation und Items nach Ladungen auf den orthogonalen Faktoren eleminieren
  - Ziel: Homogene Skalen, die korrelieren können
    - Oblique Rotation durchführen und Items mit geringen Ladungen eleminieren
  - bei Methodenwahl führt die ML-Methode zu geringsten Residuen zwischen Ausgangskorrelationsmatrix und reproduzierter Korrelationsmatrix
    - Entscheidung für ML-Methode, auch wenn die Voraussetzungen (große Stichprobe, multivariate Normalverteilung) nicht erfüllt

(13b) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPPS

- Welche Methode angemessen?
  - Nach ML-Methode mit Promax-Rotation Faktor 1 (Extraversion) bis auf Item N56 unverändert
  - Faktor 2 (Neurotizismus) gravierendere Änderungen:
    - Item N37 ist kritisch, da trotz obliquer Rotation und der Verwendung partieller standardisierter Regressionsgewichte Nebenladung von a = -.33 auf dem Faktor „Extraversion”
    - Items N42 und N47 werden durch die Faktorenanalyse dem „falschen” Faktor bzw. der falschen Komponente zugeordnet.
  - Die Varimax-rotierte Lösung würde zu keiner anderen Itemselektion führen.

(14) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPPS

Strukturmatrix (Rotierte Faktorenmatrix)

	Komponente (PCA)		Faktor (PAF)		Faktor (ML)		Faktor (ML+Varimax)	
	1	2	1	2	1	2	1	2
N1	,37		,30		,31		,28	
N6	,58	-,31	,54	-,32	,50		,49	-,16
N11	,52	-,12	,46	-,15	,51	,15	,45	
N16	,70 ❶	-,35	,68	-,38	,76		,73	-,16
N21	,69	-,38	,65	-,40	,57	-,11	,59	-,24
N26	,69	-,31	,66	-,32	,69		,65	
N31	,47		,40		,50	,20	,42	
N36	,49		,42	-,13	,41		,38	
N41	,49	-,26	,43	-,26	,35		,35	-,12
N46	,74	-,37	,73	-,40	,80		,76	-,16
N51	,55	-,17	,49	-,20	,51		,48	
N56								
N2	-,32	,69	-,34	,65		,62	-,21	,60
N7		,31		,27	,14	,40		,35
N12	-,38	,49	-,36	,45	-,15	,39	-,26	,41
N17	-,11	,59	-,14	,51	,21	,67		,59
N22		,42		,31	,18	,36		,30
N27	-,27	,65	-,29	,59		,56	-,20	,55
N32		,49		,38	,12	,42		,37
N37	-,56	,69	-,57	,69	-,33	,54	-,47	,59
N42	-,59	,50	-,57	,50	-,45	,27	-,51	,36
N47	,25	,20	,18	,12	,25	,21	,18	,14
N52	-,20	,53	-,22	,45		,45	-,11	,42
N57	-,29	,44	-,29	,38	-,11	,29	-,19	,30

(14b) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPPS

- Strukturmatrix enthält Korrelationen zwischen Items und Faktoren.
  - Wird in der Regel nicht interpretiert, es sei den man möchte wissen, wie hoch der gemeinsame Varianzanteil zwischen Ladung und Faktor ist.
  - Beispielsweise beträgt der gemeinsame Varianzanteil zwischen Item N16 und dem Faktor Neurotizismus $.70^2 = .49$ (49 Prozent)

(15) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPPS

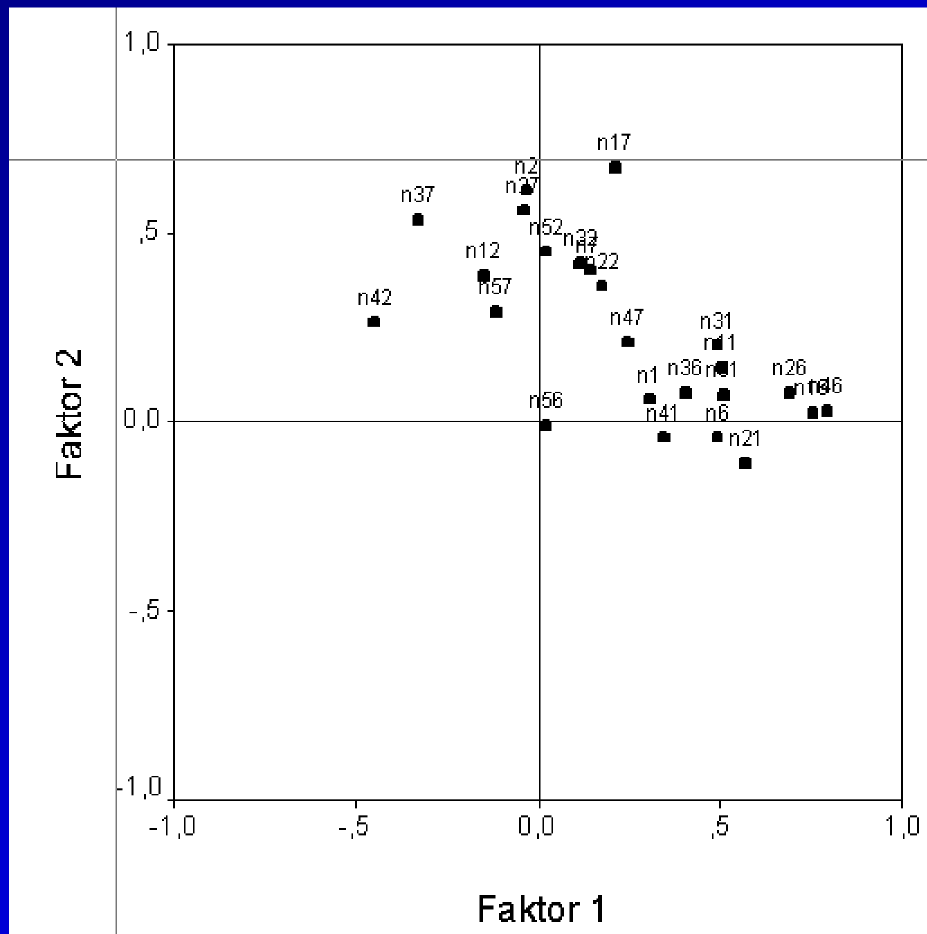
- Faktorenkorrelationsmatrix enthält Korrelationen zwischen den Faktoren nach Durchführung einer ML-Methode (r = .515)
  - Faktor 1 („Neurotizismus”) korreliert mit Faktor 2 („Extraversion”) deutlich negativ
  - Korrelation zwischen Faktoren beträgt nach Durchführung
    - einer Hauptachsenanalyse r = -.519
    - Hauptkomponentenanalyse r = -.392

Korrelationsmatrix für Faktor

Faktor	1	2
1	1,000	-,515
2	-,515	1,000

Extraktionsmethode: Maximum-Likelihood. Rotationsmethode: Promax mit Kaiser-Normalisierung.

(16a) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPPS



Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion, Pearson Education 2003, Markus Bühner, 115

(16) Beispiel einer Faktorenanalyse mit SPPS

- Diagramm einer Oblimin-rotierten ML-Ladungsmatrix:
  - Faktor 1 steht für „Neurotizismus” und Faktor 2 für „Extraversion”.
  - Item N56 lädt auf beiden Faktoren sehr niedrig (das Item liegt am Schnittpunkt der beiden Faktoren
  - Item N47 lädt gering und auf beiden Faktoren mit positiven Vorzeichen
    - Lage auf der Winkelhalbierenden zwischen beiden Faktoren
  - Die Items N37 und N42 laden moderat hoch und negativ auf dem Faktor „Neurotizismus”
    - Erfassen eigentlich „Extraversion”
  - Item 2 und Item 16 laden hoch auf ihrem Faktor
    - Werte auf der Faktorachse hoch