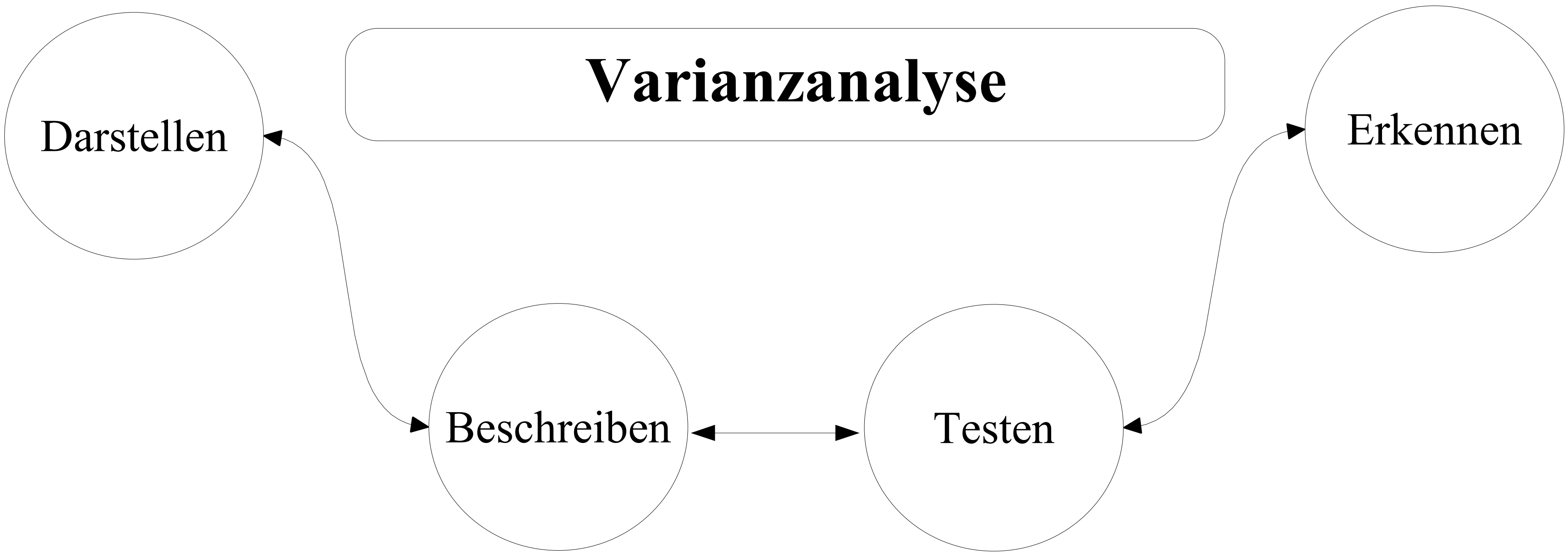
Vertiefungsrichtung Marktforschung

HOCHSCHULE harz

Sommersemester 2006

Dipl.-WiInf.(FH) Christian Reinboth



Varianzanalyse

- Die Varianzanalyse gehört wie die Regressionsanalyse zu den strukturprüfenden Verfahren und dient der Feststellung von Mittelwertunterschieden zwischen zwei oder mehr Gruppen von Merkmalsträgern

- Mathematisches Prinzip der Varianzanalyse:
  - Es wird getestet, ob die Varianz zwischen den Gruppen größer ist als innerhalb der Gruppen
  - Das Ergebnis ermöglicht eine Aussage darüber, ob sich die Gruppen bezüglich der (abhängigen) Variablen signifikant voneinander unterscheiden, bzw. ob die Einteilung in Gruppen anhand der (unabhängigen) Variablen gerechtfertigt ist
  - Um eine Varianzanalyse durchführen zu können, muss im Vorfeld bekannt sein, welches die abhängige und welches die unabhängigen Variablen in einem Modell sind – daher wird sie auch als ein strukturprüfendes Verfahren bezeichnet

- Unterscheidung in ANOVA – Analysis of Variance (nur eine unabhängige Variable) und MANOVA – Multivariate Analysis of Variance (mindestens zwei unabhängige Variablen)

ONEWAY ANOVA

ozon

			Quadratsumme	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz
Zwischen den Gruppen	(Kombiniert)		17267,908	195	88,553	3,084	,000
	Linearer Term	Gewichtet	7338,670	1	7338,670	255,590	,000
		Abweichung	9929,238	194	51,182	1,783	,000
Innerhalb der Gruppen			3847,498	134	28,713		
Gesamt			21115,406	329			

Inhalte: Varianzanalyse

- Hintergründe der Varianzanalyse
- Der T-Test als Alternative
- Warum also keine T-Test-Reihe?
- Visuelle Grundidee der Varianzanalyse
- Schritt 1: Modell und Voraussetzungen
  - Formen der Varianzanalyse
  - Prüfung der Voraussetzungen
    - Prüfung auf Normalverteilung
    - Prüfung auf Varianzgleichheit
- Schritt 2: Analyse der Abweichungsquadrate
  - Beispielfall: Plakatdesigns
  - Streuungszerlegung
  - Exkurs: Freiheitsgrade
  - Zerlegung der Freiheitsgrade
  - Berechnung der Effektstärke
- Schritt 3: Prüfung der statistischen Unabhängigkeit
  - F-Test
  - Post-Hoc-Tests
    - Ablauf eines Scheffé-Tests
- Die zweifaktorielle Varianzanalyse
  - Modell der zweifaktoriellen Varianzanalyse
  - Zerlegung der Gesamtstreuung
  - Test auf Signifikanz der Ergebnisse
  - Interaktionsdiagramme

Hintergründe der Varianzanalyse

- Versuch: In fünf Schulklassen der gleichen Ausbildungsstufe werden parallel zueinander fünf verschiedene Unterrichtskonzepte eingesetzt, anschließend wird der Lernerfolg in einem gemeinsamen Test gemessen
- Frage: Haben sich die Unterrichtskonzepte signifikant auf den Lernerfolg ausgewirkt?

Die Varianzanalye untersucht die Wirkung

einer oder mehrerer unabhängiger Variablen (Faktoren)	**auf eine oder mehrere abhängige Variablen**
Nominalskalenniveau	**Intervallskalenniveau**

- Das **Wirkungsmodell** (abhängige und unabhängige Variablen) ist dabei **im Voraus bekannt**

- Die Varianzanalyse überprüft den **Einfluss einer oder mehrerer unabhängiger Variablen auf eine abhängige Variable**
- Sie testet für **Fälle mit mehr als zwei Gruppen** (ansonsten T-Test) ob **signifikante Mittelwertunterschiede** vorliegen
- Der Analyse liegen die folgenden Hypothesen zugrunde:
  - **Nullhypothese H_0**: alle Mittelwerte sind in der Grundgesamtheit **gleich** ($H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m$)
  - **Alternativhypothese H_1**: mindestens zwei Mittelwerte **unterscheiden sich**

Die Varianzanalyse ist das bedeutenste Verfahren zur Auswertung von Experimenten

Der T-Test als Alternative

- Um **Mittelwerte zu vergleichen**, kann auch der **T-Test** (Statistik II) eingesetzt werden

- Der T-Test verwendet als **Prüfkriterium** einen **Wert aus der t-Verteilung**
- Dieser Wert lässt sich **aus den Stichprobenwerten berechnen**
- Anschließend **Vergleich des berechneten t-Wertes** mit dem **theoretischen t-Wert unter bestimmten Annahmen**
- Meistverwendete Annahme: Die **Mittelwerte der zweier Variablen sind in der Grundgesamtheit identisch**

- Soll diese Annahme geprüft werden, berechnet sich der t-Wert als: $t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{(\sqrt{(\frac{S_1^2}{N_1}+\frac{S_2^2}{N_2})})}$
- Sind beide Gruppenmittelwerte Null ergibt sich ein t-Wert von Null
- Mittelwerte und Varianzen aus einer Stichprobe stimmen **höchstens zufällig** mit den „wahren" Werten überein
- Bei der **Ziehung mehrerer Stichproben** streuen diese Werte um die „wahren Werte"
- Dies **überträgt sich auf die t-Werte**, für die sich ebenfalls **bei verschiedenen Stichproben verschiedene Werte ergeben**
- Schlussfolgerung: Eine Übereinstimmung der Mittelwerte in der Grundgesamtheit **muss nicht unmittelbar erkennbar sein**
- Da die Verteilung von t bekannt ist, lässt sich errechen **mit welcher Wahrscheinlichkeit t um ein bestimmtes Ausmaß abweicht**, den der Wert bei **Übereinstimmung von Stichprobe und Grundgesamtheit** angenommen hätte

- Der T-Test ist daher ein **probates Mittel zum Vergleich zweier Mittelwerte**

Warum also keine T-Test-Reihe?

- Liegen **drei oder mehr Gruppen** vor, ließen sich auch **drei oder mehr T-Tests** durchführen
- Wieso also der Rückgriff auf die komplexere Varianzanalyse?

- Wie jeder statistische Test, wird auch beim T-Test eine **Irrtumswahrscheinlichkeit α** ausgegeben
  - Diese kann frei festgelegt werden, üblich sind 0,01 oder 0,05

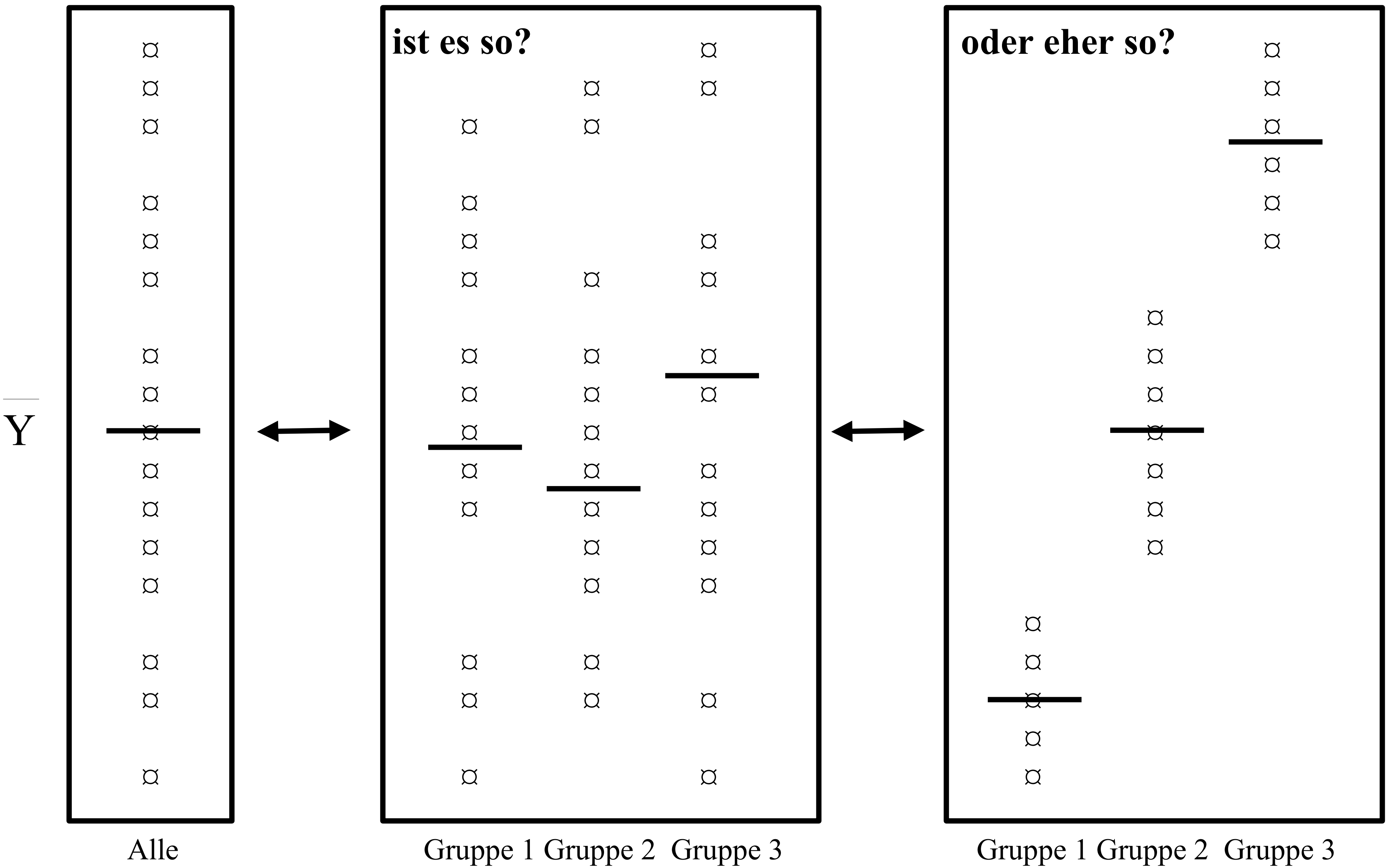
- Bei der **Durchführung einer Reihe von T-Tests** kommt es zur sogenannten **α-Fehlerinflation**:
  - Angenommen, die Irrtumswahrscheinlichkeit wird auf 0,05 festgelegt
  - Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Vergleich nur zufällig signifikant ist, liegt damit bei 5%
  - Bei mehreren Vergleichen **steigt die Wahrscheinlichkeit auf mindestens einen Fehler dramatisch an**
  - Führt man z.B. **28 Vergleiche** durch, beträgt diese Wahrscheinlichkeit schon **76,2%**
  - T-Tests sind daher für **Vergleiche mit mehr als zwei Gruppen ungeeignet**

- Die Varianzanalyse stellt eine **Erweiterung des T-Tests für Vergleichsfälle mit mehr als zwei Gruppen** dar

HOCHSCHULE harz

Die einfaktorielle Varianzanalyse

Visuelle Grundidee der Varianzanalyse



Ablauf der Varianzanalyse

HOCHSCHULE harz

Schritt 1
Problemformulierung
Prüfung der Voraussetzungen

Zunächst muss das für die Varianzanalyse unterstellte Konstrukt aus abhängigen und unabhängigen Variablen formuliert werden. Daneben gibt es eine Reihe methodischer Voraussetzungen, die vor Beginn der Analyse der Abweichungsquadrate zu überprüfen sind.

Schritt 2
Analyse der Abweichungsquadrate

Im Hauptschritt der Varianzanalyse wird die Gesamtvarianz in die Varianz innerhalb der und die Varianz zwischen den durch die unabhängigen Variablen gebildeten Gruppen zerlegt. Das Verhältnis der Varianzen zueinander gibt Aufschluss über den Erklärungsgehalt der Faktoren.

Schritt 3
Prüfung der statistischen Unabhängigkeit

Finden sich signifikante Unterschiede zwischen den Gruppenmittelwerten ist abschließend zu prüfen, ob sich diese auf Zufallseffekte oder auf „echte“ Unterschiede in der Grundgesamtheit zurückführen lassen. Dies geschieht mit dem F-Test und einer Auswahl möglicher Post-Hoc-Tests.

Beispielfälle

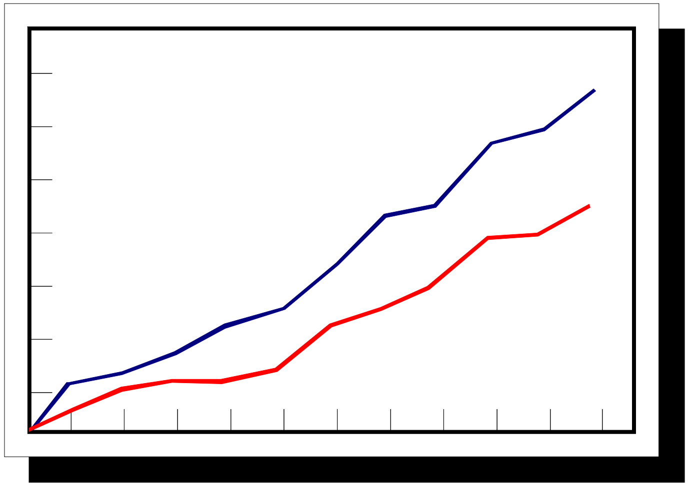
- Welche Wirkung haben verschiedene Formen der Werbung (z.B. Anzeigen, Plakate, Radiospots) auf die Verkaufszahlen?
  - Unabhängige Variable: Durchgeführte Werbemaßnahmen (nominalskaliert)
  - Abhängige Variable: Verkaufte Einheiten (intervallskaliert)

>>> **Einfaktorielle Varianzanalyse**

- Welche Wirkung haben zwei Verkaufsparameter (Verpackung und Plazierung) isoliert und gemeinsam auf den Absatz?
  - Unabhängige Variablen: Verpackungsart, Warenplazierung (nominalskaliert)
  - Abhänhige Variable: Verkaufte Einheiten (intervallskaliert)

>>> **Zweifaktorielle Varianzanalyse**

- **Unabhängige Variablen = Faktoren**
- **Ausprägungen der unabhängigen Variablen = Faktorstufen**



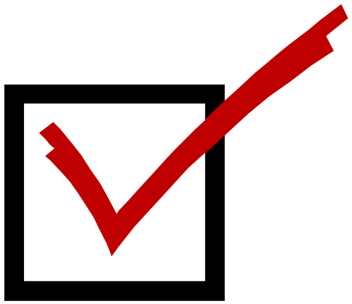
Formen der Varianzanalyse

Zahl der AV	Zahl der UV	Bezeichnung der Verfahren	
1	1	Einfaktorielle Varianzanalyse (univariat)	ANOVA
1	2	Zweifaktorielle Varianzanalyse	
1	3	Dreifaktorielle Varianzanalyse	
1	...	...	
>= 2	>= 1	Mehrdimensionale Varianzanalyse	**MANOVA**

ANOVA = Analysis of Variance

MANOVA = Multivariate Analysis of Variance

Prüfung der Voraussetzungen



- **Skalenniveaus der verwendeten Variablen**
  - Abhängige Variablen müssen **metrisch skaliert** sein (Vergleich der Mittelwerte!)
  - Unabhängige Variablen können auch **nominalskaliert** sein
- **Vermutung über Wirkungszusammenhänge**
  - Die Varianzanalyse gehört zu den **strukturprüfenden Verfahren**
  - Eine **Hypothese über Wirkungszusammenhänge** zwischen UV und AV ist daher nötig
- **Unterscheidbarkeit der Faktoren**
  - Alle einbezogenen Faktoren müssen **verschiedene Einflussgrößen** der AV darstellen
  - Getrennte Faktoren wie „Plastikverpackungstypen“ und „Papierverpackungstypen“ sind unmöglich
- **Normalverteilung der Grundgesamtheit**
  - Daten müssen **per Zufallsstichprobe** aus einer **normalverteilten Grundgesamtheit** gezogen werden
  - Normalverteilung aller(!) Abstufungsgruppen ist vor Durchführung der Varianzanalyse zu prüfen (EDA)
- **Gleichheit der Varianzen in den Fallgruppen**
  - Grundannahme: **Varianz der abhängigen Variablen ist in den Gruppen gleich groß**
  - Daher vor Durchführung der Varianzanalyse Homoskedastizitätsprüfung/Levene-Test (EDA)

Normalverteilungsprüfung: Einführung

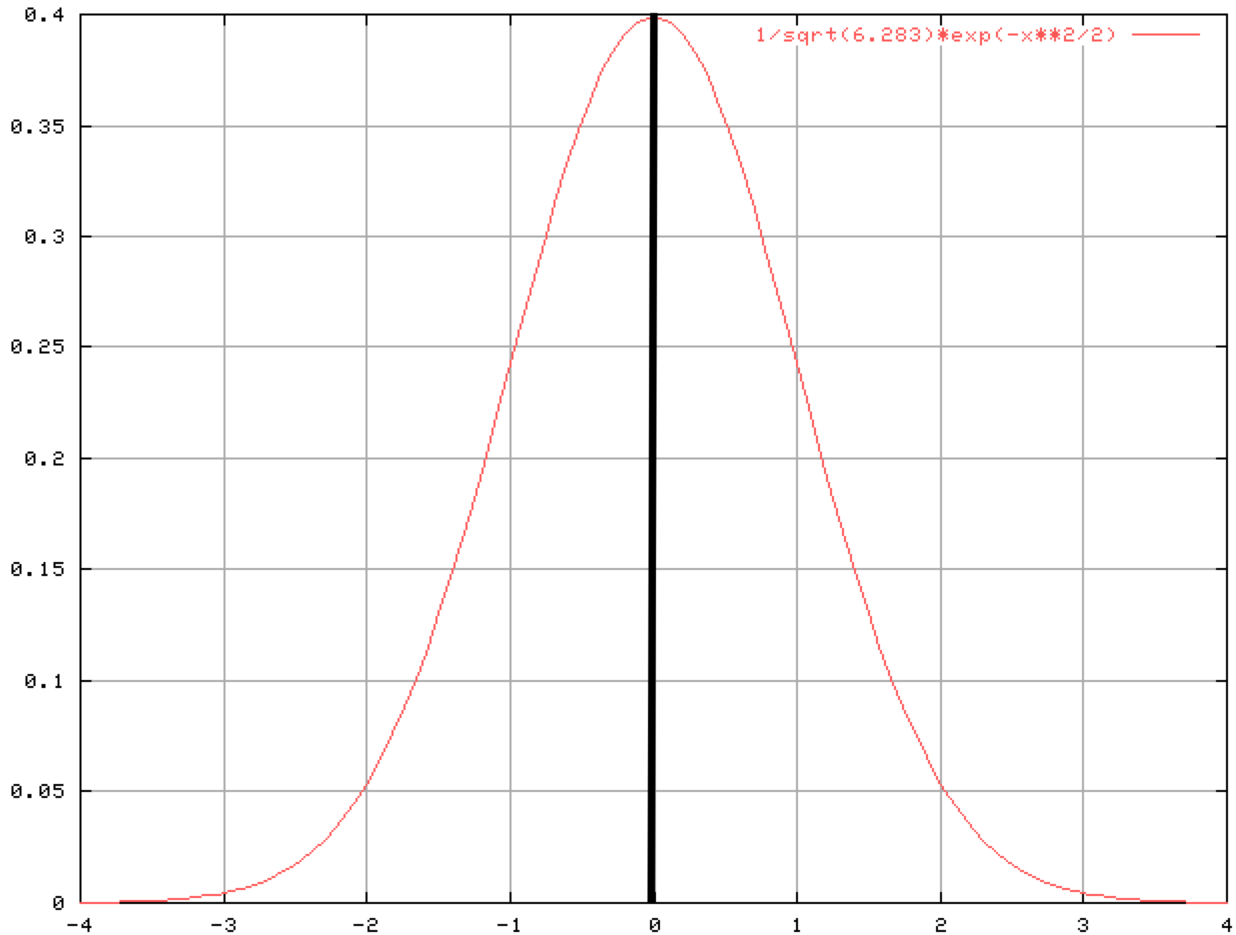
- Die Gauß- oder Normalverteilung ist die **wichtigste kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung** $f(x)=\frac{1}{(\sigma\sqrt{(2\pi)})}e^{((\frac{-1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2))}$

- Die zugehörige **Dichtefunktion** ist als **Gaußsche Glockenkurve** bekannt

- Eigenschaften**:**
  - Dichtefunktion ist **glockenförmig** und **symmetrisch**
  - **Erwartungswert, Median** und **Modus** sind **gleich**
  - **Zufallsvariable** hat eine **unendliche Spannweite**

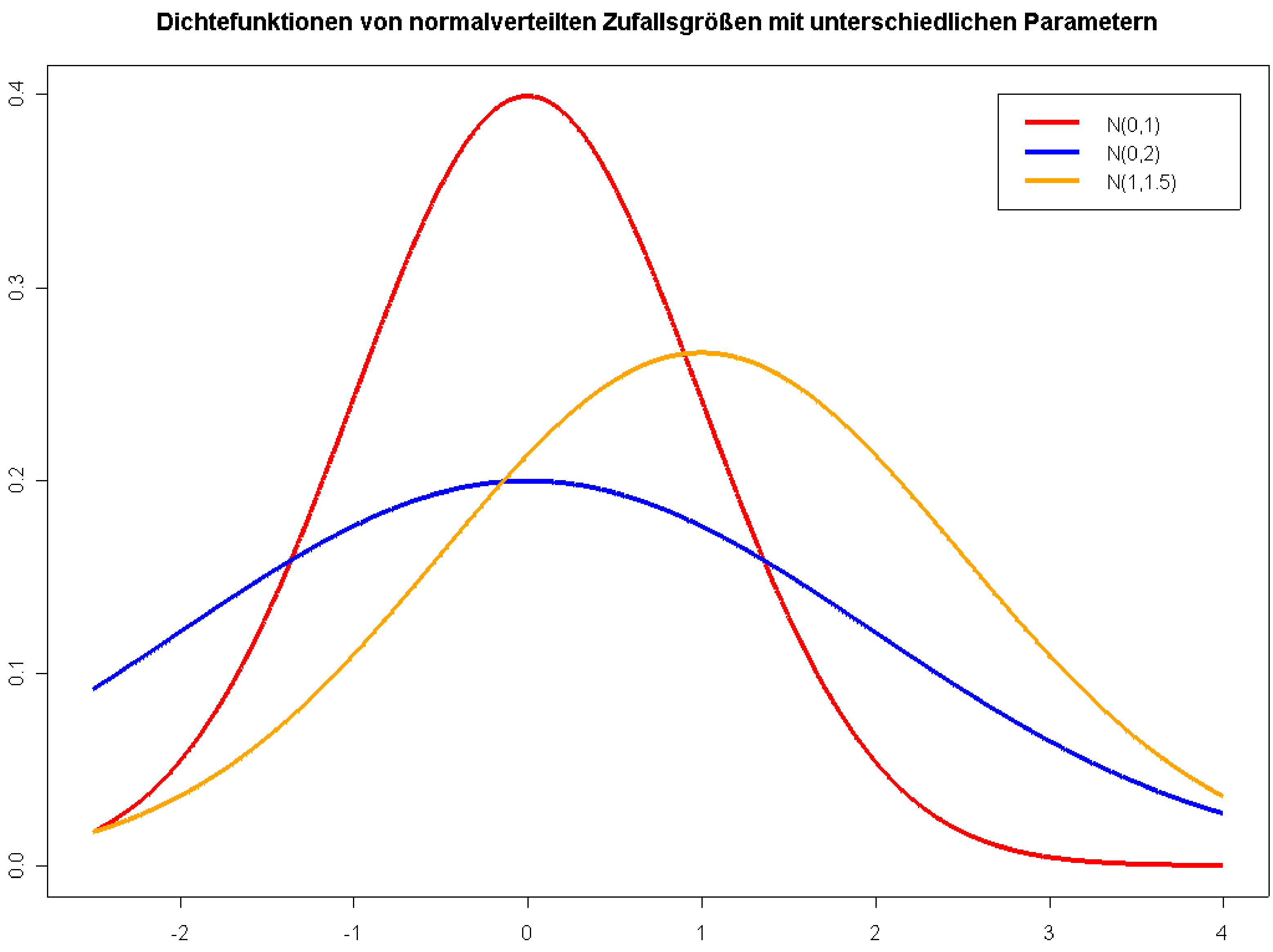
- Viele statistische Verfahren **setzen die Normalverteilung** der Daten in der Grundgesamtheit **voraus**

- Es ist daher häufig zu **prüfen**, ob von einer solchen Verteilung ausgegangen werden kann (auch näherungsweise)



μ
Erwartungswert
Median
Modus

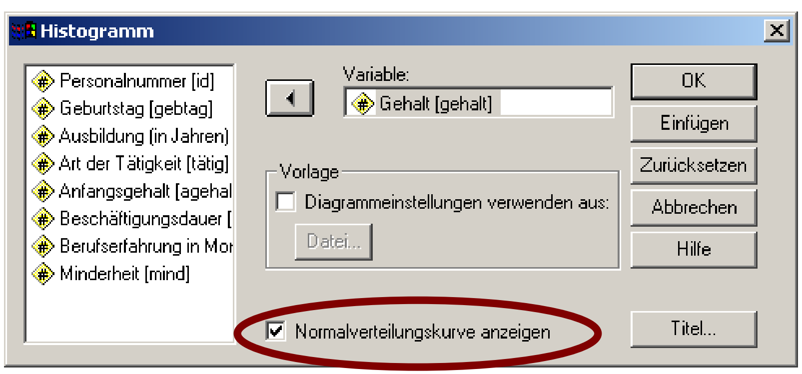
Normalverteilungsprüfung: Dichtefunktion

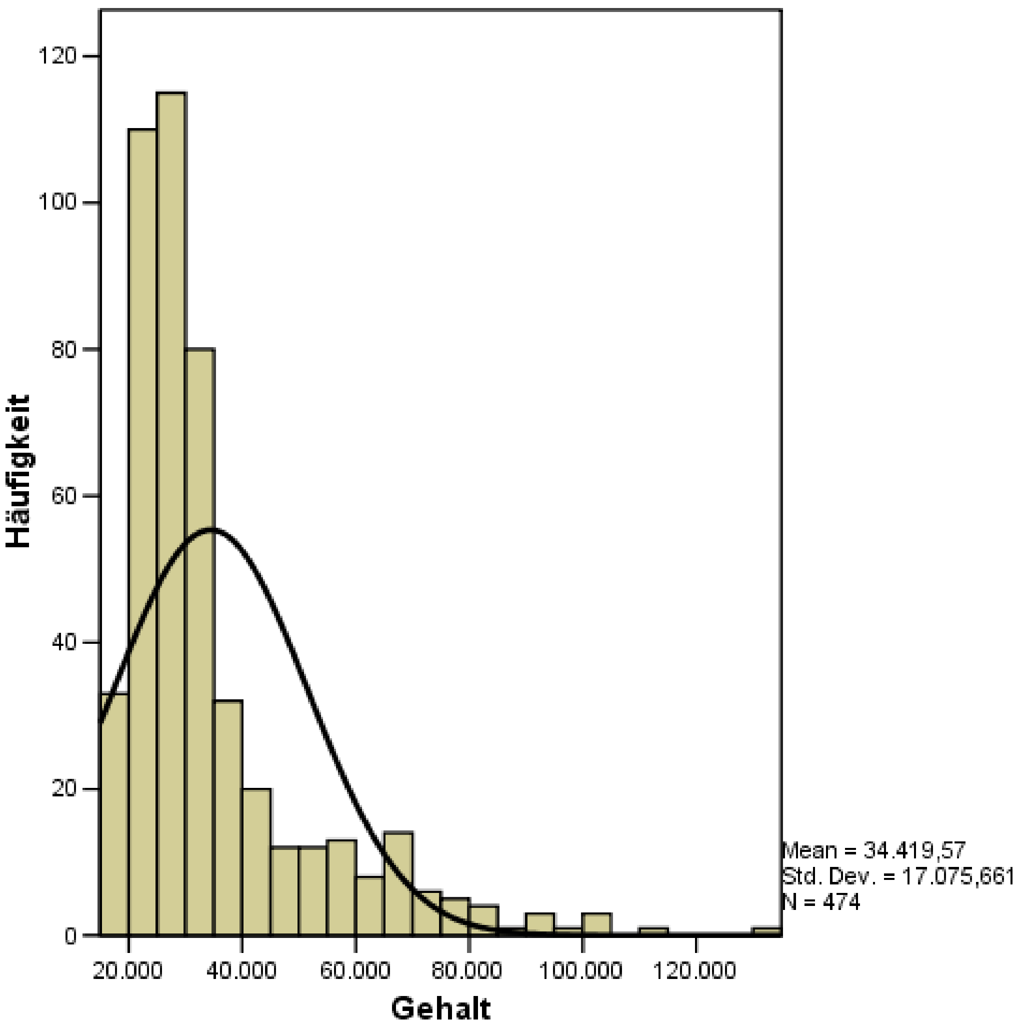


Normalverteilungsprüfung: Histogramm

- Grafische Analyse mit **Histogramm und überlagerter Normalverteilungskurve**

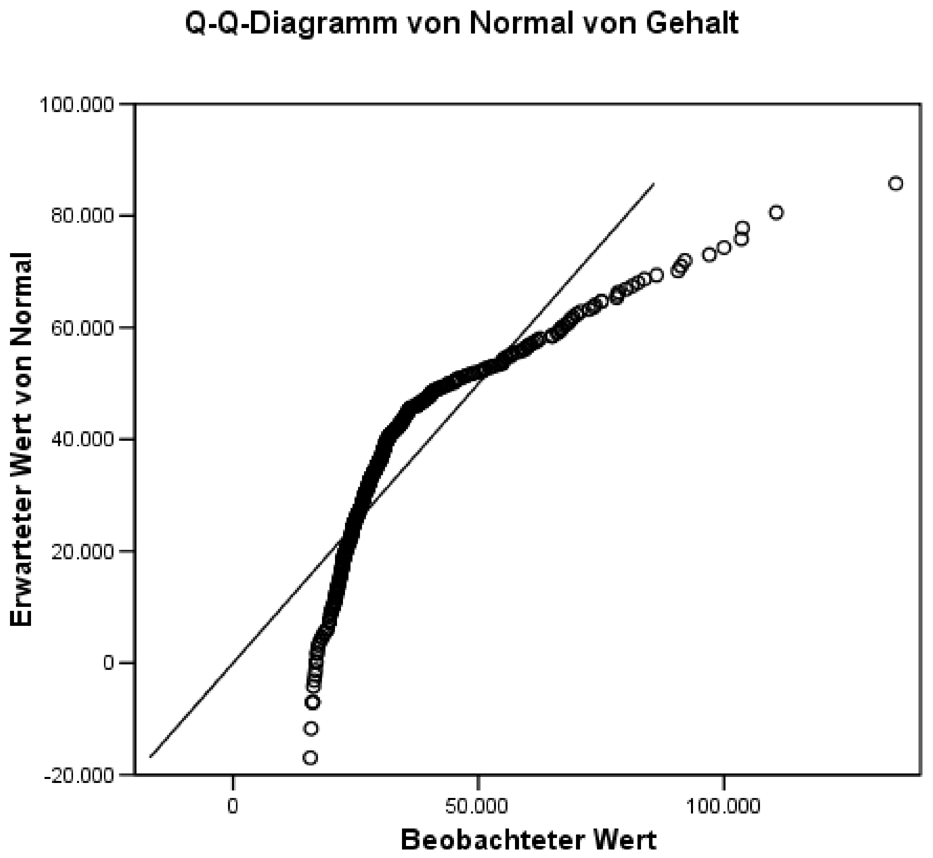
- Die Balken des Histogramms spiegeln die **Breite der Wertebereiche** wieder – da zudem für leere Wertebereiche ein Freiraum ausgegeben wird, kommt im Histogramm die **gesamte empirische Verteilung** der Variablen zum Ausdruck
- Dies ermöglicht den **direkten Vergleich** mit einer **eingezeichneten theoretischen Verteilung**, wie beispielsweise der Normalverteilung
- Der Grad der Abweichung einer Normalverteilung lässt sich auch anhand verschiedener Maßzahlen wie **Exzeß** (Kurtosis) und **Schiefe** bestimmen

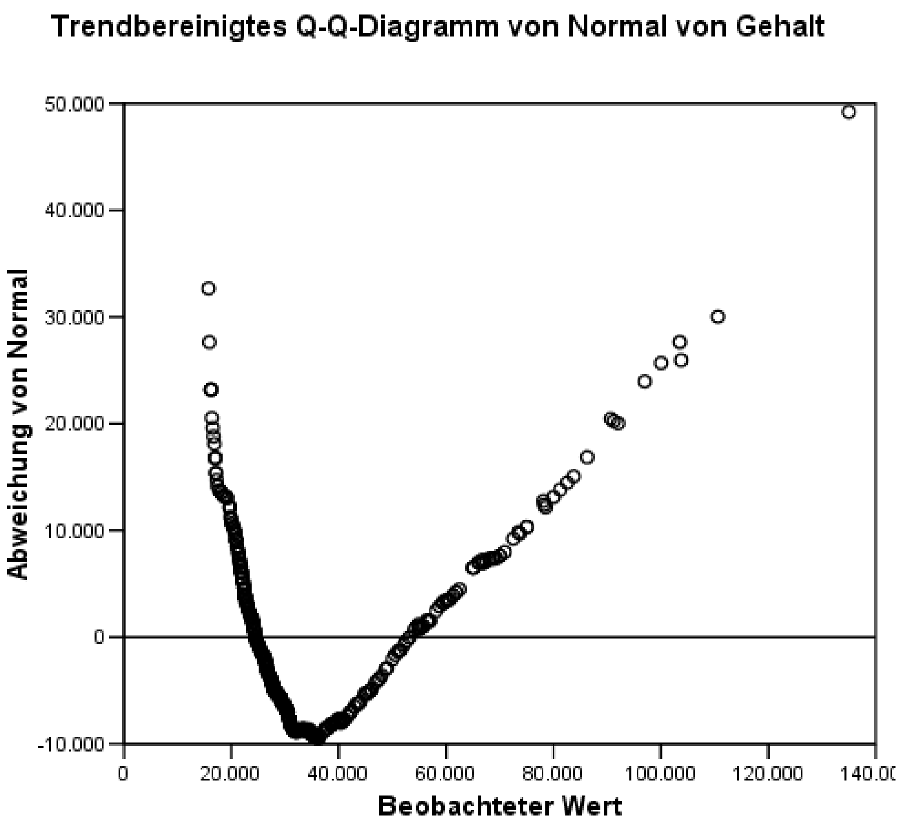




Normalverteilungsprüfung: Q-Q

- Grafische Analyse mit Q-Q-Diagramm und trendbereinigtem Q-Q-Diagramm





Normalverteilungsprüfung: K-S-A

- Die Prüfung auf Vorliegen einer Normalverteilung kann auch mit einem **Anpassungstests** erfolgen
- In SPSS lässt sich dazu beispielsweise der **Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest** nutzen
- Der Test arbeitet mit der **kumulierten empirischen** und der **kumulierten erwarteten Referenzverteilung**
- Die maximale Differenz zwischen beiden Verteilungen wird zur Berechnung der Prüfgröße Z nach Kolmogorov-Smirnov verwendet, mit der dann aus einer Tabelle der für einen Stichprobenumfang n kritische Wert für die maximale Differenz bei einem gegebenen Signifikanzniveau abgelesen werden kann

- **Nullhypothese H_0** des SPSS-Tests: **die Werte der untersuchten Variablen sind normalverteilt**
- Berechnet wird die Wahrscheinlichkeit, mit der das Zurückweisen dieser Hypothese falsch ist (**Signifikanzwert**)
- **Je größer diese Wahrscheinlichkeit ausfällt**, desto eher ist von einer **Normalverteilung der Werte auszugehen**

- Im nebenstehenden Beispiel eines Kolmogorov-Smirnov-Tests fällt der Signifikanzwert mit 0,00 so niedrig aus, dass die Annahme der Normalverteilung zurückzuweisen ist
- Bei der Interpretation ist zu beachten, dass es sich um einen **Test auf perfekte Normalverteilung** handelt
- Anzuraten ist daher die **Kombination** mit einem der **grafischen Prüfverfahren**

Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest

		Gehalt
N		474
Parameter der Normalverteilung[a,b]	Mittelwert	34.419,57
	Standardabweichung	17.075,661
Extremste Differenzen	Absolut	,208
	Positiv	,208
	Negativ	-,143
Kolmogorov-Smirnov-Z		4,525
Asymptotische Signifikanz (2-seitig)		,000

a. Die zu testende Verteilung ist eine Normalverteilung.

b. Aus den Daten berechnet.

Homoskedastizitätsprüfung: Levene-Test

- Viele statistische Verfahren setzen voraus, dass die **Varianzen innerhalb verschiedener Fallgruppen gleich sind** (beispielsweise Signifikanztests und Mittelwertvergleiche)
  - Gleichheit der Varianzen = **Homoskedastizität**
  - Ungleichheit der Varianzen = **Hetroskedastizität**

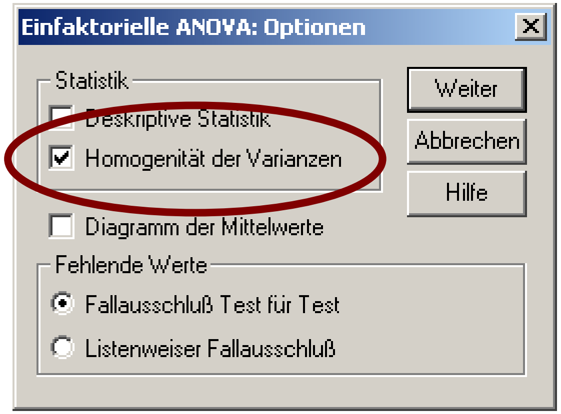
- Mit dem **Signifikanztest nach Levene** wird die **Nullhypothese H_0** überprüft, dass die **Varianzen in der Grundgesamtheit in allen Gruppen homogen** (gleich) sind
  - Der Test arbeitet mit dem **F-Wert als statistischem Prüfmaß** mit bekannter Verteilung
  - Es wird getestet, mit welcher Wahrscheinlichkeit die beobachteten Abweichungen in den Varianzen auftreten können, wenn in der Grundgesamtheit absolute Varianzgleichheit herrscht
  - Diese Wahrscheinlichkeit wird als Testergebnis ausgewiesen
  - Eine **geringe Wahrscheinlichkeit weist auf eine Varianzungleichheit hin**

ANOVA[b]

Modell		Quadratsumme	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz
1	Regression	1,1E+11	2	5,46E+10	898,947	,000[a]
	Residuen	2,9E+10	471	60785788		
	Gesamt	1,4E+11	473			

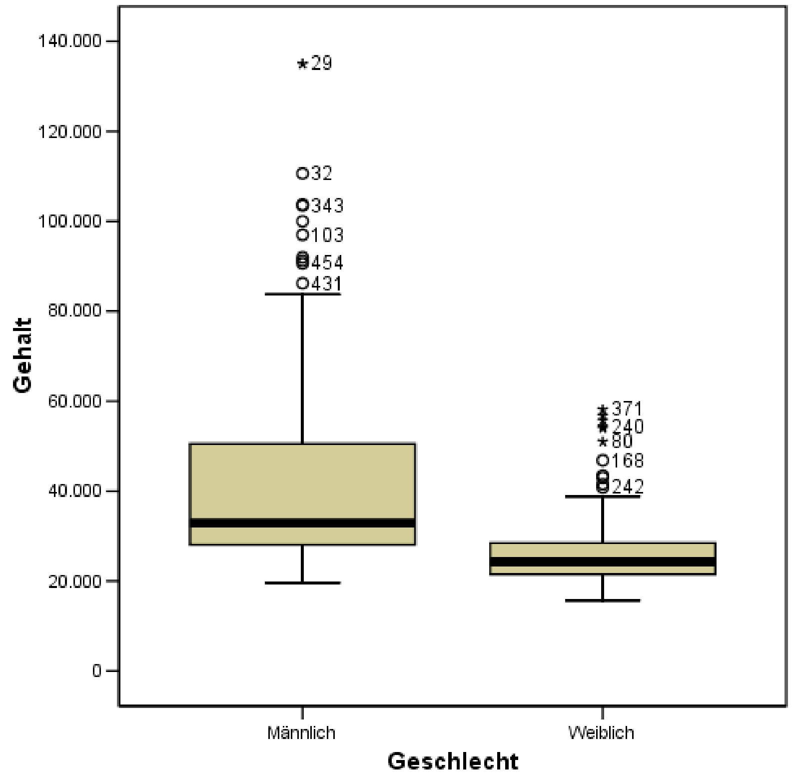
a. Einflußvariablen : (Konstante), Ausbildung (in Jahren), Anfangsgehalt

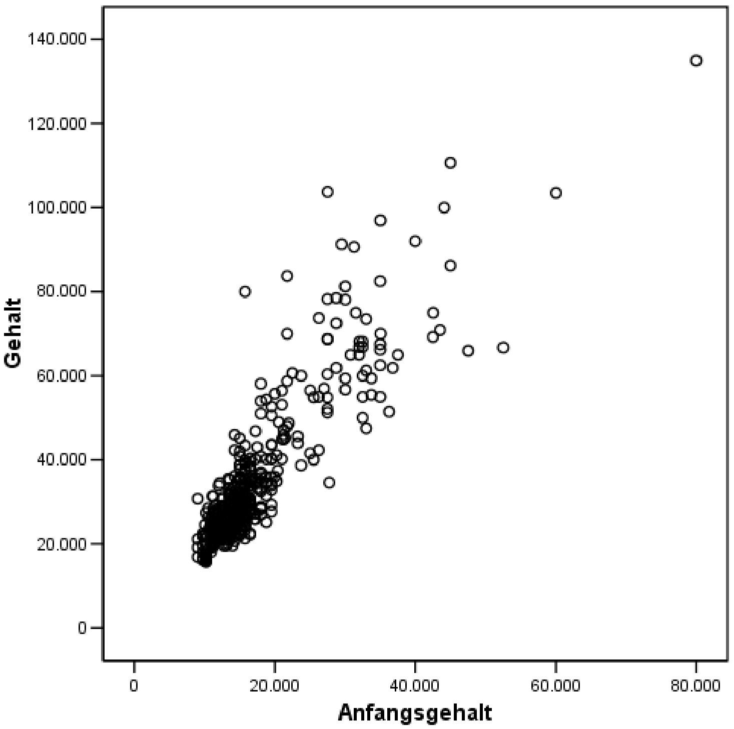
b. Abhängige Variable: Gehalt



Grafische Homoskedastizitätsprüfung

- Eine **grafische Prüfung auf Homoskedastizität** kann mit **Streudiagrammen** oder **Boxplots** durchgeführt werden
- Hierbei ist auf die unterschiedlichen Streuungen und die Höhe des Medians zu achten





Ablauf der Varianzanalyse

Schritt 1
Problemformulierung
Prüfung der Voraussetzungen

Zunächst muss das für die Varianzanalyse unterstellte Konstrukt aus abhängigen und unabhängigen Variablen formuliert werden. Daneben gibt es eine Reihe methodischer Voraussetzungen, die vor Beginn der Analyse der Abweichungsquadrate zu überprüfen sind.

Schritt 2
Analyse der Abweichungsquadrate

Im Hauptschritt der Varianzanalyse wird die Gesamtvarianz in die Varianz innerhalb der und die Varianz zwischen den durch die unabhängigen Variablen gebildeten Gruppen zerlegt. Das Verhältnis der Varianzen zueinander gibt Aufschluss über den Erklärungsgehalt der Faktoren.

Schritt 3
Prüfung der statistischen Unabhängigkeit

Finden sich signifikante Unterschiede zwischen den Gruppenmittelwerten ist abschließend zu prüfen, ob sich diese auf Zufallseffekte oder auf „echte“ Unterschiede in der Grundgesamtheit zurückführen lassen. Dies geschieht mit dem F-Test und einer Auswahl möglicher Post-Hoc-Tests.

Beispielfall: Plakatdesigns

- Ein Filmverleih will wissen, ob sich **unterschiedliche Plakatdesigns auf den Verkauf von Kinokarten auswirken**
  - Dazu werden an **vier verschiedenen Kinos vier verschiedene Plakatdesigns** ausgehängt
  - Für die jeweils **fünf Tagesvorstellungen** jedes Kinos werden die **Besucherzahlen** erfasst
  - Wir erhalten **vier Teilstichproben mit jeweils fünf Beobachtungswerten**
  - Aus allen Beobachtungswerten wird der Gruppenmittelwert und der Gesamtmittelwert gebildet

- Wenn es **keine Mittelwertunterschiede** zwischen den vier Kinos gibt, so haben die Plakate **keinen Einfluss**
- Aus dem **Vorliegen von Mittelwertunterschieden** könnte also auf den **Einfluss der Plakate** geschlossen werden?

		Vorstellung 1	Vorstellung 2	Vorstellung 3	Vorstellung 4	Vorstellung 5	Mittelwert
Kino 1	Plakat No.1	23	28	31	24	19	25
Kino 2	Plakat No.2	44	51	41	46	39	44,2
Kino 3	Plakat No.3	22	18	15	23	41	23,8
Kino 4	Plakat No.4	35	41	39	27	34	35,2
							32,05

- Nach der **Einteilung in abhängige und unabhängige Variablen** erfolgt die **Gruppenbildung nach Faktorstufen**
- Für die Werte der **abhängigen Variablen** wird dabei in jeder Gruppe gesondert der Mittelwert ausgewiesen
- Entscheidende Fragen:
  - **Unterscheiden sich diese Mittelwerte auch in der Grundgesamtheit signifikant voneinander...**
  - **oder sind alle bei den Stichproben auftretenden Unterschiede lediglich zufallsbedingt?**

Beispielfall: Plakatdesigns

- Wenn sich die **im Modell nicht erfassten Einflüsse** (Wetterlage, andere Events, etc.) in allen vier Kinos bis auf zufällige Abweichungen **gleich stark auswirken**, zeigen die **Abweichungen der Mittelwerte** den **Einfluss der Plakatversionen**

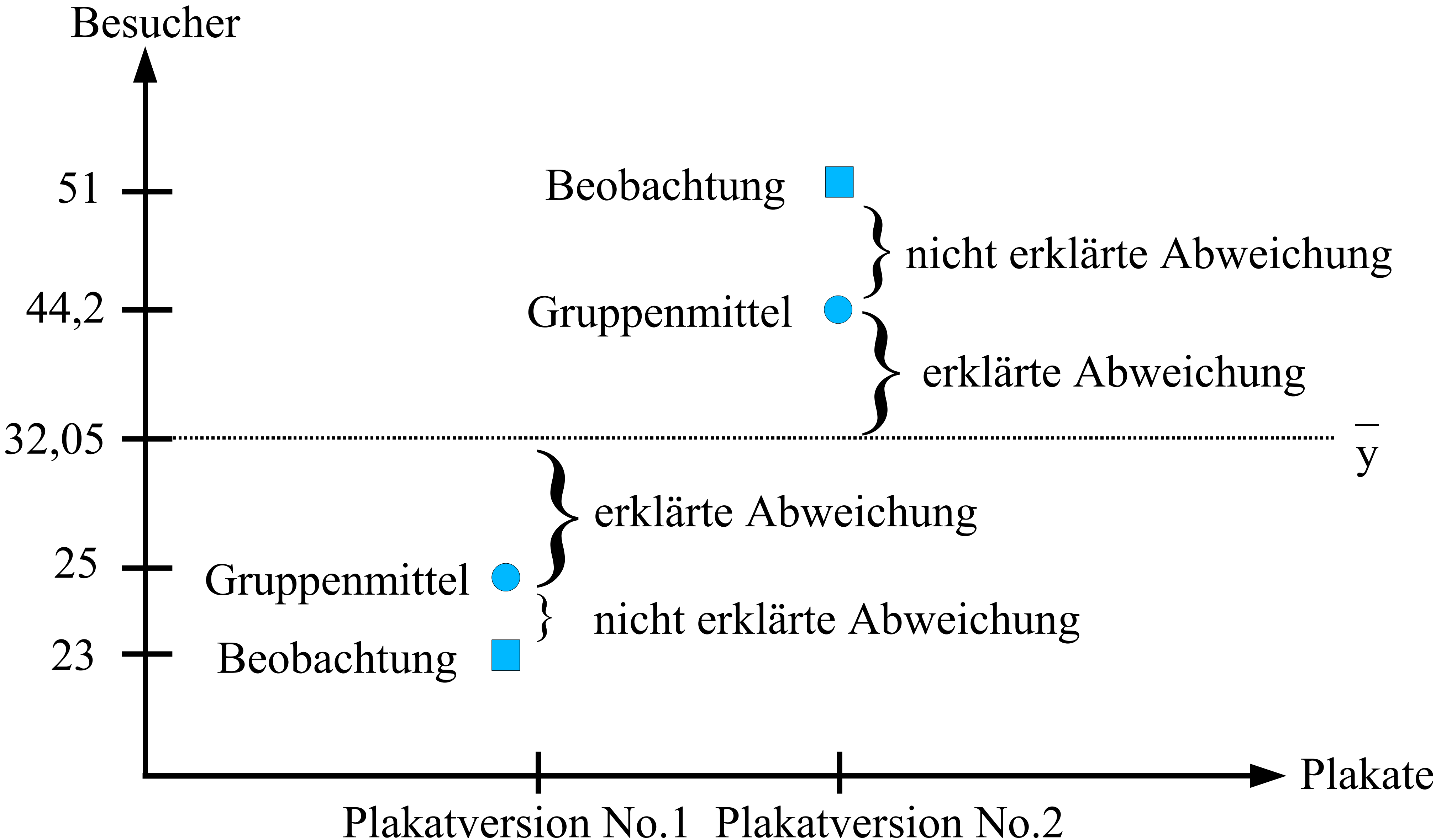
- Der Prognosewert für die Anzahl der Kinobesucher wäre 32,05, wenn die Plakate keine Rolle spielen würden
- Geht man von einem Einfluss der Plakate aus, sind die Prognosewerte je Kino 25, 44,2, 23,8 bzw. 35,2
- Die **Abweichungen der Gruppenmittelwerte vom Gesamtmittelwert** sind durch den **Einfluss der Faktoren** zu erklären
- Die **Abweichungen der realen Werte von den Gruppenmittelwerten** sind auf **zufällige Einflüsse** zurückzuführen

		Vorstellung 1	Vorstellung 2	Vorstellung 3	Vorstellung 4	Vorstellung 5	Mittelwert
Kino 1	Plakat No.1	23	28	31	24	19	25
Kino 2	Plakat No.2	51	44	41	46	39	44,2
Kino 3	Plakat No.3	22	18	15	23	41	23,8
Kino 4	Plakat No.4	35	41	39	27	34	35,2
							32,05

- **Die Gesamtabweichung lässt sich daher in zwei Komponenten zerlegen (Streuungszerlegung!):**

Gesamtabweichung = erklärte Abweichung + nicht erklärte Abweichung

Streuungszerlegung



Streuungszerlegung

	SSt	SSb	SSw
Plakat No.1	$(23-32{,}05)^2=81{,}9025$ $(28-32{,}05)^2=16{,}4025$ $(31-32{,}05)^2=1{,}1025$ $(24-32{,}05)^2=64{,}8025$ $(19-32{,}05)^2=170{,}30$	$(25-32{,}05)^2=49{,}7025$ $(25-32{,}05)^2=49{,}7025$ $(25-32{,}05)^2=49{,}7025$ $(25-32{,}05)^2=49{,}7025$ $(25-32{,}05)^2=49{,}7025$	$(23-25)^2= 4$ $(28-25)^2=9$ $(31-25)^2=36$ $(24-25)^2=1$ $(19-25)^2=36$
Plakat No. 2	$(51-32{,}05)^2=359{,}1025$ $(44-31{,}05)^2=142{,}8025$ $(41-32{,}05)^2=80{,}1025$ $(46-32{,}05)^2=194{,}6025$ $(39-32{,}05)^2=48{,}3025$	$(44{,}2-32{,}05)^2=147{,}6225$ $(44{,}2-32{,}05)^2=147{,}6225$ $(44{,}2-32{,}05)^2=147{,}6225$ $(44{,}2-32{,}05)^2=147{,}6225$ $(44{,}2-32{,}05)^2=147{,}6225$	$(51-44{,}2)^2=46{,}24$ $(44-44{,}2)^2=0{,}04$ $(41-44{,}2)^2=10{,}24$ $(46-44{,}2)^2=3{,}24$ $(39-44{,}2)^2=27{,}04$
Plakat No. 3	$(22-32{,}05)^2=101{,}0025$ $(18-32{,}05)^2=197{,}4025$ $(15-32{,}05)^2=290{,}7025$ $(23-32{,}05)^2=81{,}9025$ $(41-32{,}05)^2=80{,}1025$	$(23{,}8-32{,}05)^2=68{,}0625$ $(23{,}8-32{,}05)^2=68{,}0625$ $(23{,}8-32{,}05)^2=68{,}0625$ $(23{,}8-32{,}05)^2=68{,}0625$ $(23{,}8-32{,}05)^2=68{,}0625$	$(22-23{,}8)^2=3{,}24$ $(18-23{,}8)^2=33{,}64$ $(15-23{,}8)^2=77{,}44$ $(23-23{,}8)^2=0{,}64$ $(41-23{,}8)^2=295{,}84$
Plakat No. 4	$(35-32{,}05)^2=8{,}7025$ $(41-32{,}05)^2=80{,}1025$ $(39-32{,}05)^2=48{,}3025$ $(27-32{,}05)^2=25{,}5025$ $(34-32{,}05)^2=3{,}8025$ SSt =2076,95	$(35{,}2-32{,}05)^2=9{,}9225$ $(35{,}2-32{,}05)^2=9{,}9225$ $(35{,}2-32{,}05)^2=9{,}9225$ $(35{,}2-32{,}05)^2=9{,}9225$ $(35{,}2-32{,}05)^2=9{,}9225$ SSb =1376,55	$(35-35{,}2)^2=0{,}04$ $(41-35{,}2)^2=33{,}64$ $(39-35{,}2)^2=14{,}44$ $(27-35{,}2)^2=67{,}24$ $(34-35{,}2)^2=1{,}44$ SSw =700,4

Streuungszerlegung

Gesamtabweichung	= erklärte Abweichung	+ nicht erklärte Abweichung
Summe der quadrierten Gesamtabweichungen	= Summe der quadrierten Abweichungen zwischen den Faktorstufen	+ Summe der quadrietern Abweichungen innerhalb der Faktorstufen
$\sum_{g=1}^{G}\sum_{k=1}^{K}(y_{gk}-\bar{y})^2 \;=$	$\sum_{g=1}^{G} K(\bar{y}_g-\bar{y})^2$	$+ \quad \sum_{g=1}^{G}\sum_{k=1}^{K}(y_{gk}-\bar{y}_g)^2$
SSt(otal) SS = „sum of squares“	= SSb(etween)	+ SSw(ithin)

- Die Streuung wird hier in **zwei additive Komponenten** zerlegt
  - Die **erklärte Abweichung** ist auf die **Faktorstufen** zurückzuführen
  - Die **nicht erklärte Abweichung** wird durch **unbekannte äußere Einflüsse** verursacht

- Problem: **Die Quadratsummen werden größer, je mehr Beobachtungswerte eingehen**
- Um eine **aussagefähige Größe für die Streuung** zu erhalten, wird daher durch die **Anzahl der Freiheitsgerade** geteilt
- So erhält man die **Varianz**, die **unabhängig von der konkreten Anzahl der Beobachtungswerte** ist
- Die **empirische Varianz** ist auch als **mittlere quadratische Abweichung** definiert (MSS = „mean sum of squares“)

$$Varianz\,(MSS) = \frac{SS}{(Zahl\ der\ Beobachtungen - 1)}$$

Exkurs: Freiheitsgrade

- Die **Freiheitsgrade** geben die Anzahl von Größen eines Systems an, die **unabhängig voneinander variieren** können

- Die **Schätzung von Parametern** in der Statistik ist eng verbunden mit den **zur Verfügung stehenden Informationen**
- Die **Anzahl an Informationen für die Schätzung** entspricht der **Anzahl der Freiheitsgrade**

Das arithmetischen Mittel aus den Zahlen 1,3,2,1 und 3 ist 2

1	
3	
2	
1	
3	

Ist das arithmetische Mittel von 2 noch zu erreichen, wenn man die erste Zahl ändert, gesetzt den Fall, man könnte die nachfolgenden Zahlen auch ändern?

Was passiert bei der zweiten Zahl? Derdritten? Der vierten?

Die ersten vier Zahlen wurden festgelegt. Lässt sich auch die letzte Zahl noch beliebig festlegen wenn das arithmetisches Mittel weiterhin 10 sein soll?

Merksatz: Die Freiheisgrade geben die maximale Anzahl der Zahlen in einer Verteilung an, die beliebig geändert werden können, ohne dass sich das arithmetische Mittel der Verteilung ändert!

Zerlegung der Freiheitsgrade

- **Die Freiheitsgrade können analog zur Gesamtstreuung zerlegt werden**
  - Insgesamt gibt es 4 Faktorstufen und 5 Beobachtungen, also 20 Beobachtungen insgesamt = 19 Freiheitsgrade (für MS_t)
  - Bei den 4 Faktorstufenmittelwerten können dann nur 3 frei variiert werden = 3 Freiheitsgrade (für MS_b)
  - Jede der 4 Faktorstufen enthält 5 Beobachtungen, davon 4 frei variierbare = 16 Freiheitsgrade (für MS_w)

Mittlere quadratische (Gesamt-)Abweichung („mean sum of squares“)	$MS_t = \frac{SS_t}{(G*K-1)}$	$MS_t = \frac{2076{,}95}{(4*5-1)} = \frac{2076{,}95}{19} = 109{,}313$
Mittlere quadratische Abweichung zwischen den Faktorstufen	$MS_b = \frac{SS_b}{(G-1)}$	$MS_b = \frac{1376{,}55}{(4-1)} = \frac{1376{,}55}{3} = 458{,}85$
Mittlere quadratische Abweichung innerhalb der Faktorstufen	$MS_w = \frac{SS_w}{(G*(K-1))}$	$MS_w = \frac{700{,}4}{(4*(5-1))} = \frac{700{,}4}{16} = 43{,}775$

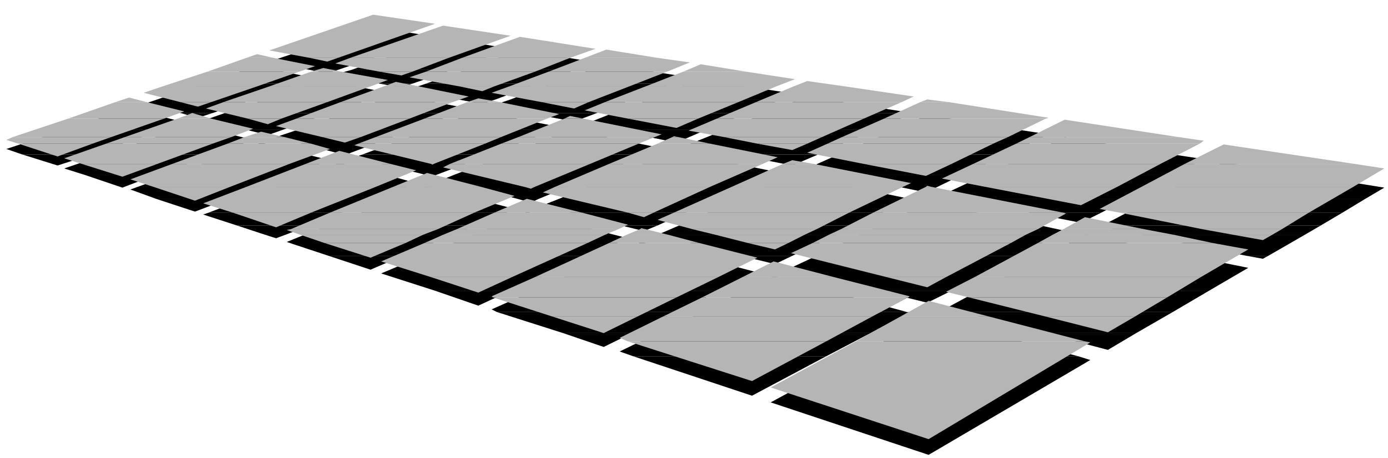
- **Wäre MSw gleich Null, dann würde MSt allein durch die Faktoren erklärt werden**
- **Je stärker MSw von Null abweicht, desto geringer muss der Erklärungsanteil der Faktoren sein**
- Interessant ist also das **Verhältnis von MSb zu MSw**
- Im Beispiel ist MSb wesentlich größer als MSw
- Ein Einfluss der unabhängigen Variable „Plakatversion“ kann daher vermutet werden

Berechnung der Effektstärke

etaQuadrat

HOCHSCHULE harz

- Ein gängiges Maß für die Stärke des Gesamteffekts ist das multiple Eta²
  - Je näher das multiple Eta² an Eins liegt, desto höher ist der erklärte Anteil an der Gesamtabweichung
  - Je höher dieser Anteil ist, umso stärker ist der Gesamteffekt einzuschätzen
- Das multiple Eta² berechnet sich aus: $Eta^2 = \frac{SS_b}{SS_t} = \frac{(Summe\ der\ quadrierten\ Abweichungen\ zwischen\ den\ Faktorstufen)}{(Summe\ der\ quadrierten\ Abweichungen\ insgesamt)}$
- Am bereits verwendeten Beispiel berechnet: $Eta^2 = \frac{SS_b}{SS_t} = \frac{1376{,}55}{2076{,}95} = 0{,}6628$
- Insgesamt werden also 66,28% der Gesamtstreuung durch den Faktor „Plakatplazierung“ aufgeklärt



Ablauf der Varianzanalyse

Schritt 1
Problemformulierung
Prüfung der Voraussetzungen

Zunächst muss das für die Varianzanalyse unterstellte Konstrukt aus abhängigen und unabhängigen Variablen formuliert werden. Daneben gibt es eine Reihe methodischer Voraussetzungen, die vor Beginn der Analyse der Abweichungsquadrate zu überprüfen sind.

Schritt 2
Analyse der Abweichungsquadrate

Im Hauptschritt der Varianzanalyse wird die Gesamtvarianz in die Varianz innerhalb der und die Varianz zwischen den durch die unabhängigen Variablen gebildeten Gruppen zerlegt. Das Verhältnis der Varianzen zueinander gibt Aufschluss über den Erklärungsgehalt der Faktoren.

Schritt 3
Prüfung der statistischen Unabhängigkeit

Finden sich signifikante Unterschiede zwischen den Gruppenmittelwerten ist abschließend zu prüfen, ob sich diese auf Zufallseffekte oder auf „echte“ Unterschiede in der Grundgesamtheit zurückführen lassen. Dies geschieht mit dem F-Test und einer Auswahl möglicher Post-Hoc-Tests.

Prüfung der statistischen Unabhängigkeit

- **Unterschiede zwischen den Gruppenmittelwerten** können sich auch **zufällig** ergeben (**Zufallsstichprobe**)
- Mit dem **varianzanalytischen F-Test** wird geprüft, ob die gefundenen Effekte tatsächlich signifikant sind

- **Nullhypothese H_0: Sämtliche Faktorstufenmittelwerte sind in der Grundgesamtheit identisch**
  - Jede der durch die Faktorstufen gebildete Gruppen kann als **unabhängige Stichprobe** betrachtet werden
  - Auf der Basis dieser Stichproben kann, ausgehend von der Varianzzerlegung, auf zwei verschiedene Weisen die **Gesamtvarianz der Grundgesamtheit** geschätzt werden:
    - **Mittels der Varianz innerhalb der Gruppen**
    - **Mittels der Varianz zwischen den Gruppen**
  - Beide Varianzen sind **zwei verschiedene Schätzungen der „wahren" Varianz** in der Grundgesamtheit
  - **Gilt die Nullhypothese**, müssten beide Schätzungen **zum gleichen Ergebnis führen**
  - Hat der Faktor dagegen einen **Einfluss auf die abhängige Variable**, **unterscheiden sich die Schätzungen**

  - Grund dafür ist, dass in diesem Fall die **Gruppen aus unterschiedlichen Grundgesamtheiten stammen**
    - Die **Varianz innerhalb der Gruppen** ist meist eine genauer Schätzwert für die **Varianz in der Grundgesamtheit**
    - Die **Varianz zwischen den Gruppen** ist nur dann ein guter Schätzwert, wenn kein **Einfluss des Faktors** vorliegt
  - Sind beide Varianzen **näherungsweise gleich**, spricht dies für die Richtigkeit der Nullhypothese
  - Unterscheiden sie sich dagegen **signifikant**, ist von einem **Einfluss des Faktors** auszugehen

Prüfung der statistischen Unabhängigkeit

- Der Quotient aus der Varianz zwischen den Gruppen und der Varianz innerhalb der Gruppen ist die **Testgröße F**: $F = \frac{s^2_{zwischen}}{s^2_{innerhalb}}$
- Aus der bekannten F-Verteilung lässt sich unter **Berücksichtigung der Freiheitsgrade** für beide Varianzschätzungen die **Wahrscheinlichkeit des berechneten F-Wertes bei Gültigkeit der Nullhypothese H_0** angeben

- **Vorgehensweise des F-Tests:**
  - Berechnung eines **empirischen Werts aus der F-Statistik**
  - **Vergleich** dieses Werts mit einem **kritischen Wert**
  - Bei **Gültigkeit von H_0** ist ein **F-Wert von Eins** zu erwarten
  - Starke **Abweichung des F-Werts von Null** macht **H_0 unwahrscheinlich**
  - In diesem Fall kann H_0 **verworfen** werden
  - **Schlußfolgerung**: In der Grundgesamtheit **besteht ein Zusammenhang**

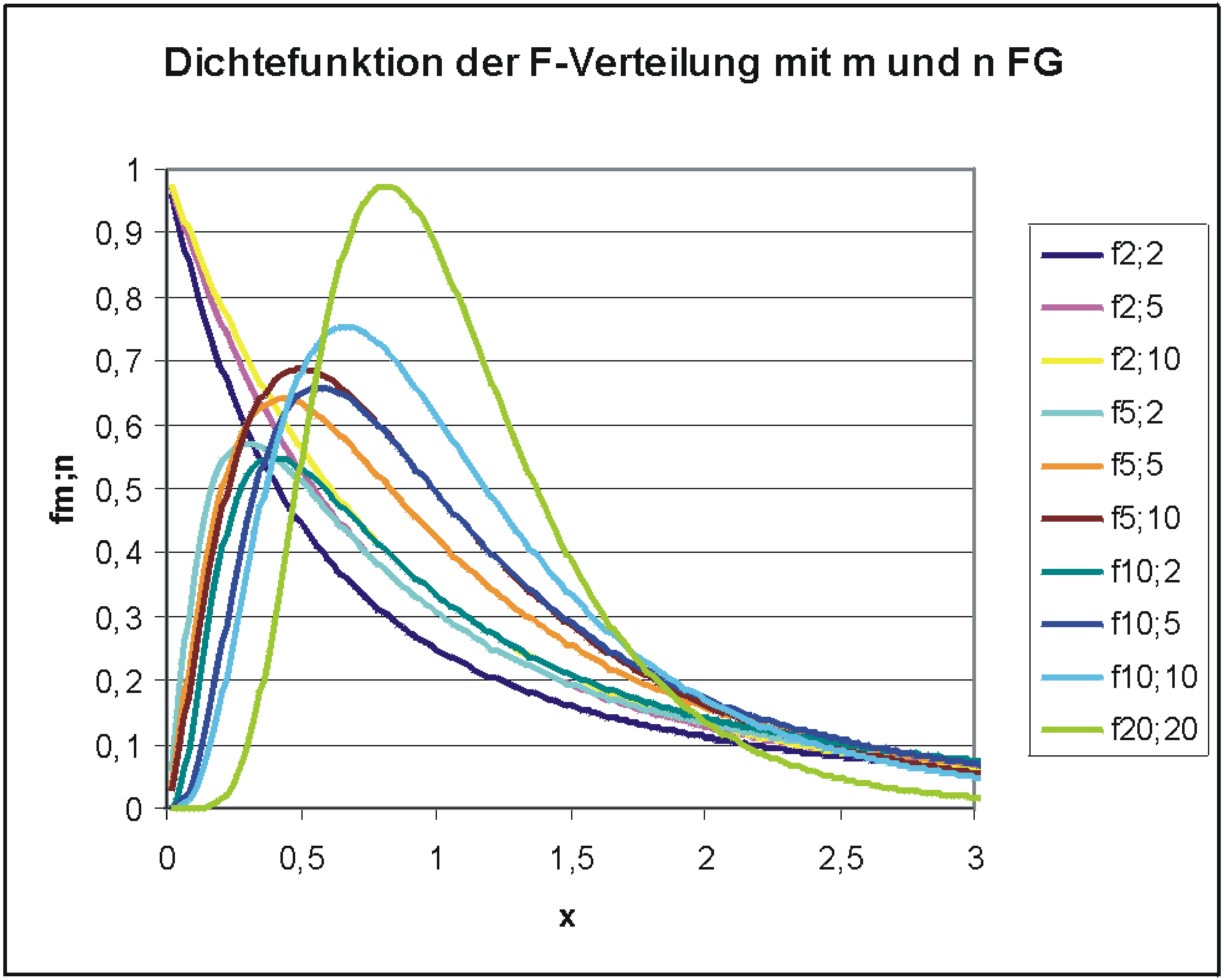
ANOVA[b]

Modell		Quadratsumme	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz
1	Regression	1,1E+11	2	5,46E+10	898,947	,000[a]
	Residuen	2,9E+10	471	60785788		
	Gesamt	1,4E+11	473			

a. Einflußvariablen : (Konstante), Ausbildung (in Jahren), Anfangsgehalt

b. Abhängige Variable: Gehalt

Dichtefunktion der F-Verteilung



Post-Hoc-Tests: Übersicht

- Der F-Test prüft lediglich, ob mindestens **zwischen zwei der Gruppenmittelwerte** eine signifikante Differenz besteht
- Es kann keine Aussage getroffen werden, **zwischen welchen Vergleichspaaren** Unterschiede aufgetreten sind

- Post-Hoc-Tests ermöglichen die Feststellung, **welche Mittelwerte sich signifikant unterscheiden**
- Dabei ist zu unterscheiden in **Paarvergleiche** und **Spannweitentests**
  - **Paarvergleiche** = Mittelwertdifferenzen aller möglichen Gruppenpaare werden auf Signifikanz getestet
  - **Spannweitentests** = Suche nach nicht signifikanten Mittelwertdifferenzen zur Bildung homogener Untergruppen

Paarvergleichstests:	**Spannweitentests:**
→ Scheffé → LSD → Bonferroni → Sidak → Tukey → GT2 Hochberg → Gabriel → Dunnett	→ Student-Newman-Keuls → Duncan → Tukey-B → Waller-Duncan → F-Test nach Ryan-Einot-Gabriel-Welsh → Q-Test nach Ryan-Einot-Gabriel-Welsh
→ Tamhane T2 → Dunnett T3 → Games-Howell → Dunnett C	

Post-Hoc-Tests: Scheffé

- Der allgemein **am häufigsten angewandte Post-Hoc-Test** ist der **Scheffé-Test** (die anderen sind Spezialtests)
- Wie alle anderen Post-Hoc-Tests sollte er **nur durchgeführt werden**, wenn der F-Test bereits signifikant geworden ist
- Der Test ist **vergleichsweise robust** gegenüber Verletzungen von der Voraussetzung der Linearität
- Da der Scheffé-Test sehr konservativ testet, kann es vorkommen, dass trotz einer Overall-Signifikanz im F-Test kein signifikantes Einzelpaar durch den Test aufgedeckt wird

Mehrfachvergleiche

Abhängige Variable: Verkäufe
Scheffé-Prozedur

(I) Plazierung	(J) Plazierung	Mittlere Differenz (I-J)	Standardfehler	Signifikanz	95%-Konfidenzintervall Untergrenze	95%-Konfidenzintervall Obergrenze
Normalregal	Zweitplazierung	-21,00000*	2,41661	,000	-27,7365	-14,2635
	Kühlregal	-8,80000*	2,41661	,011	-15,5365	-2,0635
Zweitplazierung	Normalregal	21,00000*	2,41661	,000	14,2635	27,7365
	Kühlregal	12,20000*	2,41661	,001	5,4635	18,9365
Kühlregal	Normalregal	8,80000*	2,41661	,011	2,0635	15,5365
	Zweitplazierung	-12,20000*	2,41661	,001	-18,9365	-5,4635

*. Die mittlere Differenz ist auf der Stufe .05 signifikant.

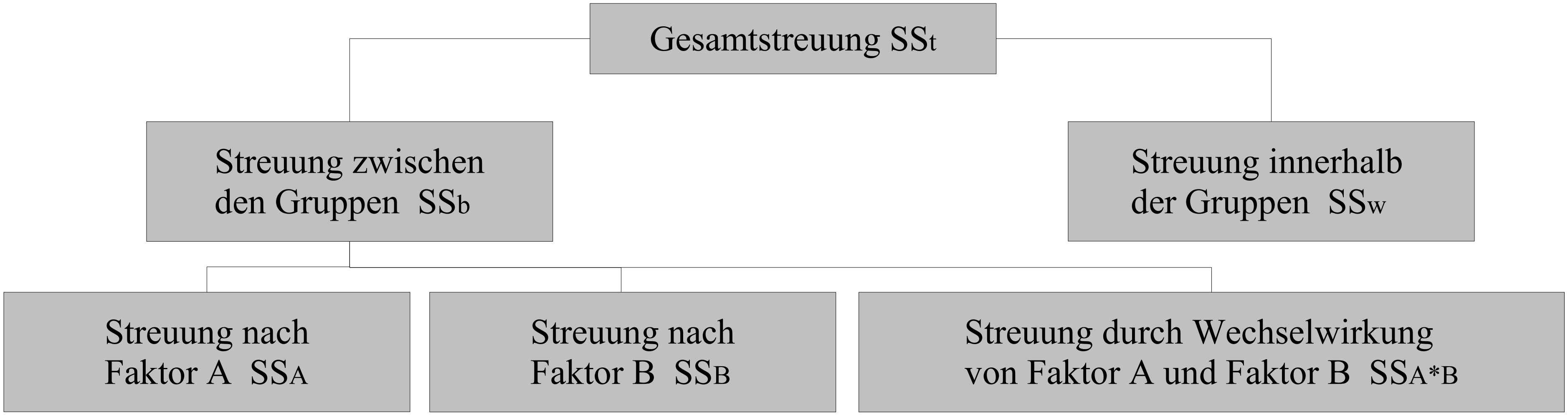
Die zweifaktorielle Varianzanalyse

Zweifaktorielle Varianzanalyse

- Die zweifaktorielle Varianzanalyse untersucht die **Effekte zweier unabhängiger Größen auf eine abhängige Variable**
  - Vorteil der mehrfaktoriellen Varianzanalyse: der **kombinierte Einfluss mehrerer Faktoren** kann untersucht werden
  - Gleichzeitig ist es weiterhin möglich, den **isolierten Einfluss jedes Faktors** und deren **Interaktion** aufzuzeigen

- Im Gegensatz zur einfaktoriellen Varianzanalyse, ist zwischen **Haupt- und Interaktionseffekt** zu unterscheiden:
  - **Haupteffekt** = **isolierter Einfluss eines Faktors** auf die abhängige Variable
  - **Interaktionseffekt** = **Wechselwirkung beider Faktoren** auf die abhängige Variable
  - **Gesamteffekt = Haupteffekt + Interaktionseffekt**

- **Es gilt die folgende Beziehung:** $SS_t = SS_A + SS_B + SS_{A*B} + SS_w$



Zweifaktorielle Varianzanalyse

- Jede Ausprägung der Faktoren A und B beeinflusst die unabhängige Variable

- Die **kombinierte Wirkung der Faktoren auf eine Zelle** setzt sich zusammen aus...
  - dem **Gesamtmittelwert**
  - der **Wirkung des Faktors A**
  - der **Wirkung des Faktors B**
  - der **Interaktionswirkung** der Faktoren A und B

- Die Schätzung dieser Werte wird wie folgt vorgenommen:

	Wahrer Wert	Schätzung
Gesamtmittelwert	μ	$\bar{Y}$
Wirkung Faktor A	α_g	$(\bar{Y}_g - \bar{Y})$
Wirkung Faktor B	β_h	$(\bar{Y}_h - \bar{Y})$
Interaktionseffekt	$\alpha\beta_{gh}$	$\bar{Y}_{gh} - (\bar{Y} + (\bar{Y}_g - \bar{Y}) + (\bar{Y}_h - \bar{Y}))$

Zerlegung der Gesamtstreuung

HOCHSCHULE harz

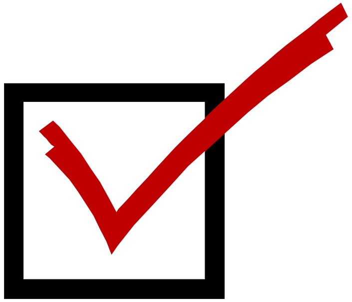
Gesamtstreuung	$SS_t=\sum_{g=1}^{G}\sum_{h=1}^{H}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ghk}+\bar{Y})^2$	Y_{ghk} = Beobachtungswert $\bar{Y}$ = Gesamtmittelwert
Haupteffekte Streuung nach Faktor A & Streuung nach Faktor B	$SS_A=H*K*\sum_{g=1}^{G}(Y_g-\bar{Y})^2$ $SS_B=G*K*\sum_{g=1}^{G}(Y_h-\bar{Y})^2$	G = Zahl der Ausprägungen von A H = Zahl der Ausprägungen von B K = Zahl der beobachteten Elemente Y_g = Zeilenmittelwert Y_h = Spaltenmittelwert
Interaktionseffekt Interaktion zwischen den Faktoren A und B	$SS_{(A*B)}=K*\sum_{g=1}^{G}\sum_{h=1}^{H}(\bar{Y}_{gh}-\hat{Y}_{gh})^2$ $mit: \hat{Y}=\bar{Y}_g+\bar{Y}_h-\bar{Y}$	G = Zahl der Ausprägungen von A H = Zahl der Ausprägungen von B K = Zahl der beobachteten Elemente $\bar{Y}_{gh}$ = Mittelwert in Zelle (g,h) $\hat{Y}_{gh}$ = Schätzwert in Zelle (g,h)
Streuung innerhalb der Gruppen	$SS_w=\sum_{g=1}^{G}\sum_{h=1}^{H}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ghk}-\bar{Y}_{gh})^2$	Y_{ghk} = Beobachtungswert $\bar{Y}_{gh}$ = Mittelwert in Zelle (g,h)

Test auf Signifikanz der Ergebnisse

- **Test des Gesamteffektes auf Signifikanz**
  - Nullhypothese H_0: **Gesamteffekt hat keine Auswirkungen auf die abhängige Variable**, d.h. alle Faktorstufenmittelwerte sind identisch

- **Tests der Haupteffekte A und B**
  - Nullhypothese H_0: **Die betrachteten Effekte haben keine Auswirkungen auf die abhängige Variable**, d.h. alle Faktorstufenmittelwerte sind identisch

- **Test des Interaktionseffektes**
  - Nullhypothese H_0: **Es gibt keine Interaktion zwischen den Faktoren**, d.h. die Mittelwerte der Interaktionsstufen sind identisch



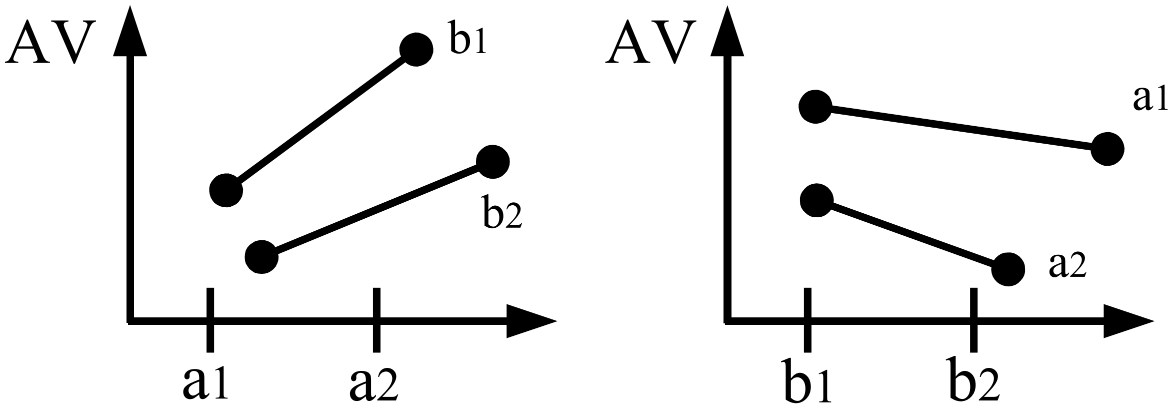
Interaktionsdiagramme

- Liegen **signifikante Interaktionen** vor, wird die **Interpretation der Haupteffekte** erheblich erschwert
  - Der **Einfluss eines Faktors** kann nur dann **adäquat beschrieben** werden, wenn der andere Faktor beachtet wird
  - **Interaktionsdiagramme** gestatten die **grafische Veranschaulichung der Interaktionseffekte**
  - Im Interaktionsdiagramm werden die **Gruppenmittelwerte gegeneinander abgetragen**

- Generell sind **zwei Arten von Verläufen** der abgetragenen Mittelwerte möglich:
  - **Parallele Verläufe** = Es liegt **keine Interaktion zwischen den Faktoren** vor
    - Die **Haupteffekte sind direkt interpretierbar** und ergeben in der Summe den Gesamteffekt
  - **Nichtparallele Verläufe** = Es liegt **Interaktion zwischen den Faktoren** vor
    - Möglich sind **verschiedene Arten von Verläufen**, die **unterschiedlich zu interpretieren** sind

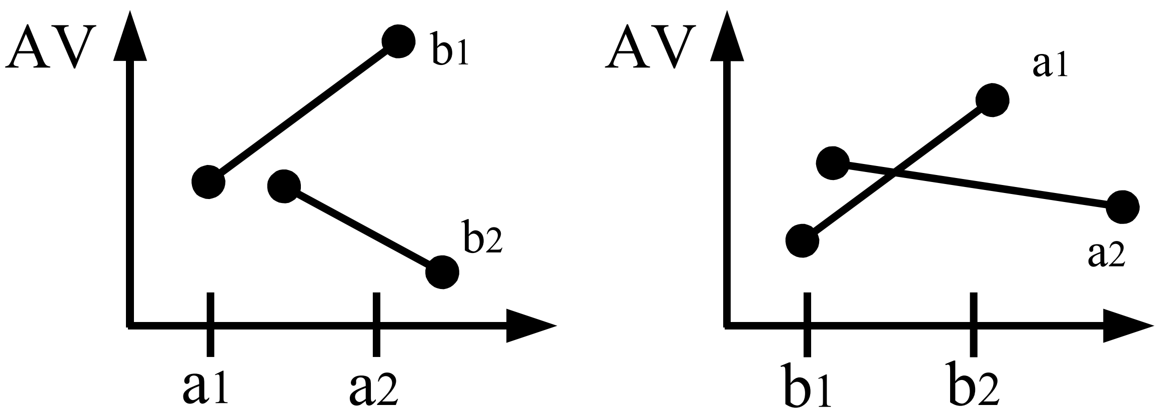
- Liegen **nichtparallele Verläufe** vor, ist die **Art des Verlaufes** zu beachten:
  - **Ordinale Interaktion** = **Die Linienzüge weisen in beiden Diagrammen den gleichen Trend auf**
    - **Beide Haupteffekte** sind **eindeutig interpretierbar**
  - **Hybride Interaktion** = **Die Linienzüge überschneiden sich in einem der beiden Diagramme**
    - Nur **einer der beiden Haupteffekte** ist **eindeutig interpretierbar**
  - **Disordinale Interaktion** = **Die Linienzüge überschneiden sich in beiden Diagrammen**
    - **Keiner der beiden Haupteffekte kann inhaltlich interpretiert werden**

Interaktionsdiagramme



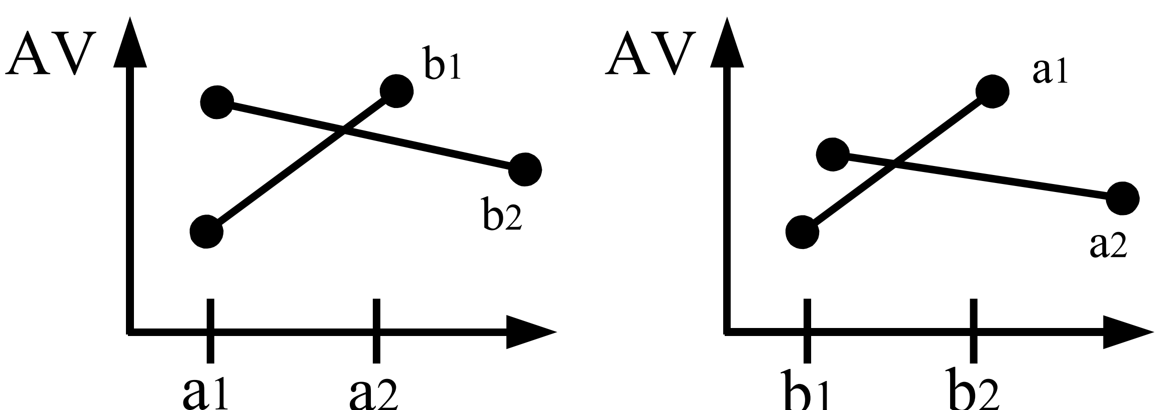
Ordinale Interaktion

Beide Haupteffekte interpretierbar



Hybride Interaktion

Nur Haupteffekt B interpretierbar



Disordinale Interaktion

Kein Haupteffekt interpretierbar

Gibt es noch Fragen?