授課科目：高職數學B2

授課班級：商管群

授課教師：湯詠傑

2022.04.11製

第一章 三角函數

1-1 角度的基本性質

一、有向角

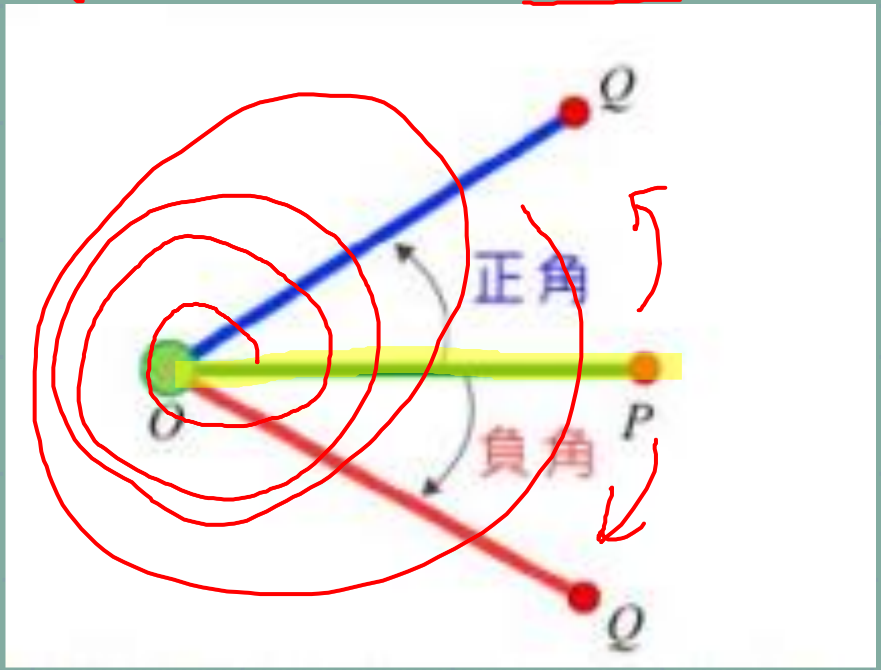
1. 定義

   設$\overline{OA}$為起始邊、$\overline{OB}$為終邊，將起始邊旋轉至終邊所形成的角稱為「有向角」，以$\angle AOB$表示。其中以順時針旋轉的角稱為「正角」，逆時針旋轉的角稱為「負角」。

2. 決定有向角的因素包含始邊、終邊、旋轉方向及旋轉量(不限圈數)。

3. 有向角的大小不限。

$-\infty \leftarrow \quad \rightarrow \infty$



二、角度量與扇形

1. 角度的表示法

(1) 將圓周分成360等分，每一等分所對應之圓心角稱為「1度」，記為 1°。

(2) 將每一度分成60等分，每一等分稱為「1分」，記為1'。

(3) 將每一分分成60等分，每一等分稱為「1秒」，記為1"。

2. 弧度的表示法

（1）弧度的定義

在圓周上取一段與半徑等長的弧(即$S = r$)，此弧所對應之圓心角即稱為1弧度(亦稱1弳)，記為1。

（2）$1° \neq 1$。

（3）一周角為2π。

（4）$1° = \frac{\pi}{180}$、$1 = \frac{180°}{\pi}$。

3. 扇形的表示法

設一扇形的半徑為r、其圓心角為θ，且對應之弧長為S，面積為A，則：

(1) $S = r\theta$

(2) $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \boxed{\frac{1}{2}rS}$

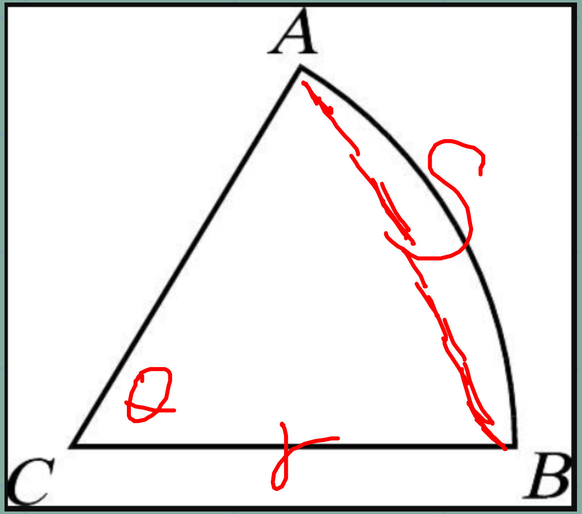
$r \cdot r \cdot \pi \cdot \theta$

$= r^2 \pi \theta$

$\theta = \frac{S}{r} = 1$

$\boxed{S = r\theta}$

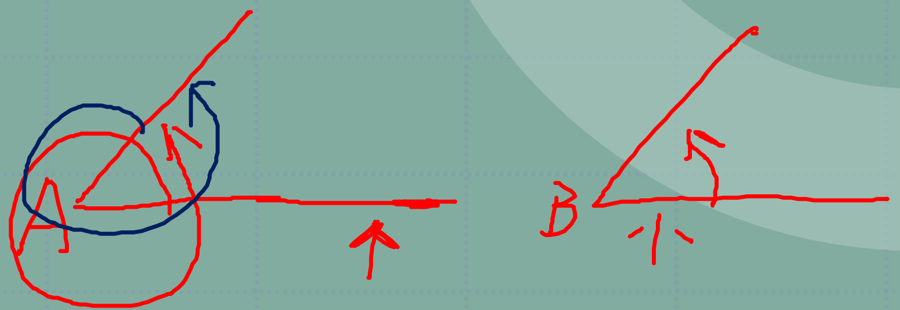
$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \theta$



$\frac{1}{2} \cdot r \cdot S$

三、同界角

1. 定義
   兩個有向角具有相同的始邊與終邊。



2. 最大負同界角：所有負同界角中最大的角。
3. 最小正同界角：所有正同界角中最小的角。
4. 同界角的判別法則：兩個角相差360度的整數倍。
5. 一個θ角都有無限多個同界角。

1-2 銳角三角函數

真實力

75

60

25×4=100

4

6 — 50%

75%

5

28 — 88%

11

60

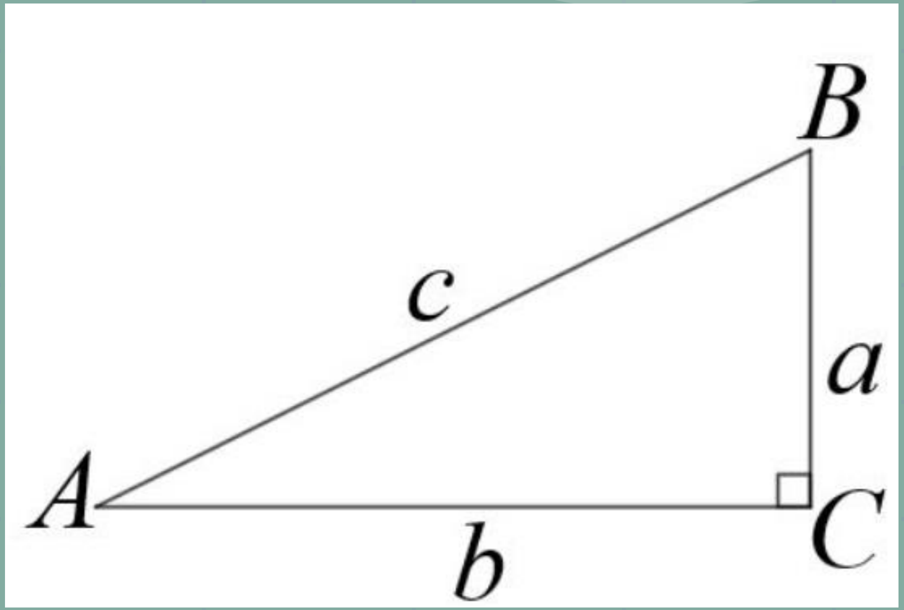
A

10 =78

40

一、畢氏定理

設直角三角形的兩股長分別為a、b，其斜邊長為c，則$c^2 = a^2 + b^2$。



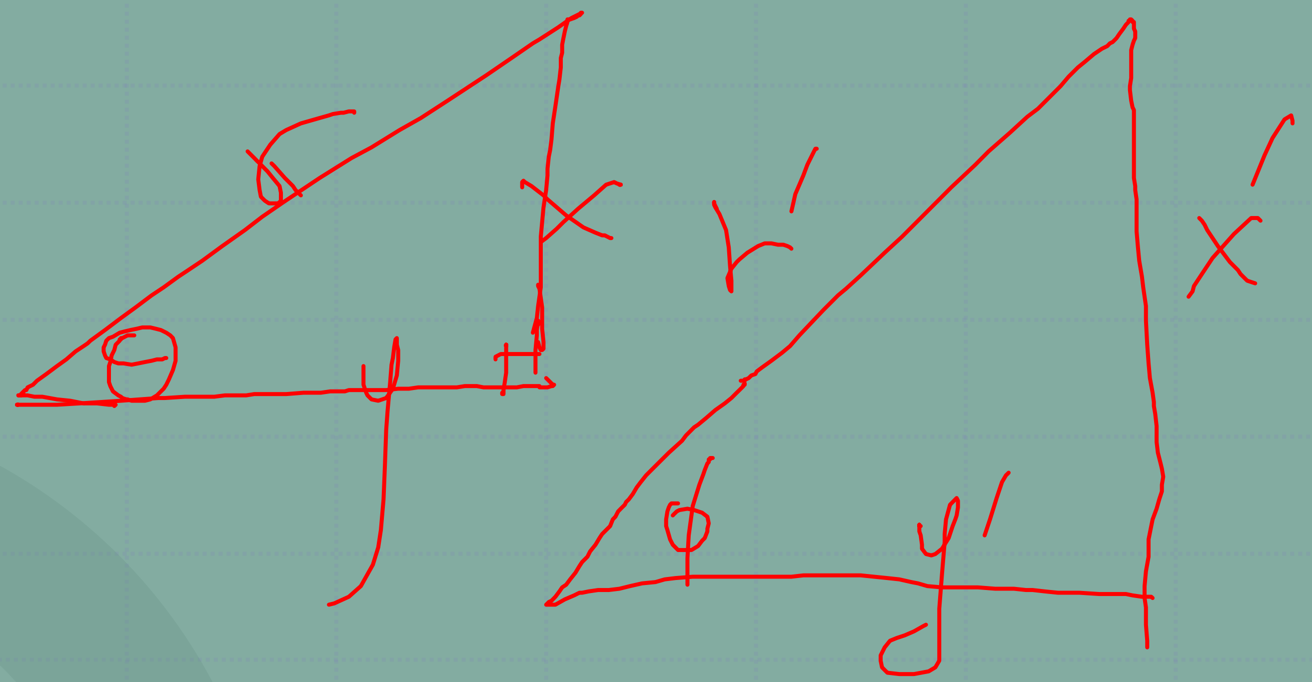
二、銳角三角函數的定義

函數：$x \longrightarrow f(x)$

$\theta \longrightarrow f(\theta)$

1. 三角函數核心思想

   當銳角θ改變時，任兩邊邊長的比值也會隨之改變，則角度與比值產生了函數的「對應關係」，此對應關係的函數我們即稱為「三角函數」。



2. 定義

(1) 正弦函數：$\sin\theta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$

(4) 餘割函數：$\csc\theta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$

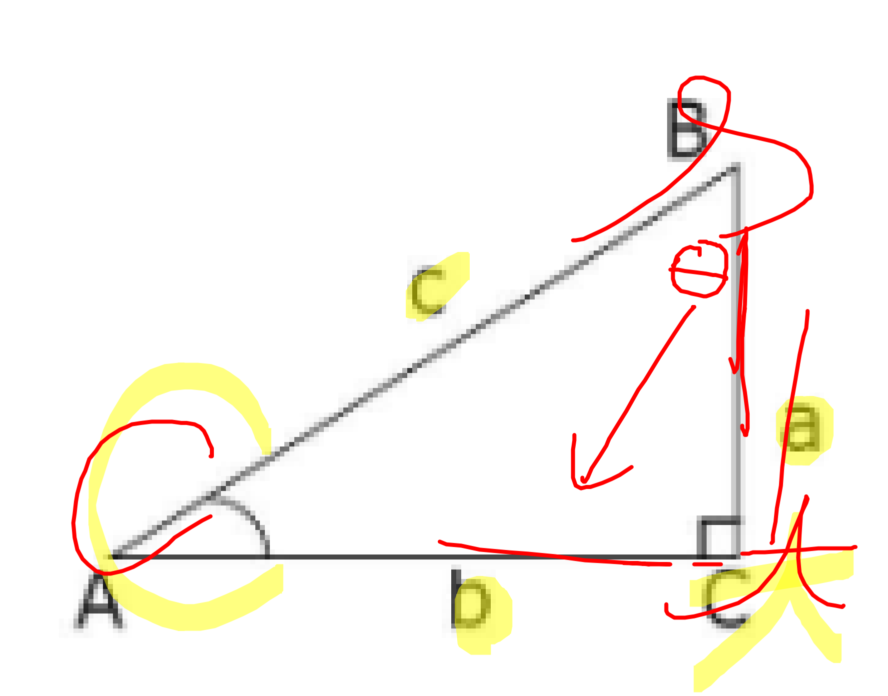
(2) 餘弦函數：$\cos\theta = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$

(5) 正割函數：$\sec\theta = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$

(3) 正切函數：$\tan\theta = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$

(6) 餘切函數：$\cot\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$

3. 已知一個三角函數值，即可得知另外五個三角函數值。



三、三角函數的恆等式

1. 倒數關係

(1) $\sin\theta \times \csc\theta = 1$

(2) $\cos\theta \times \sec\theta = 1$

(3) $\tan\theta \times \cot\theta = 1$

〈說明〉

定義

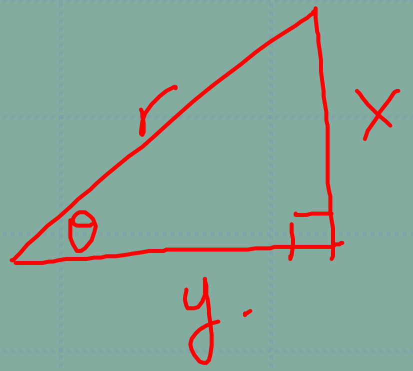
2. 商數關係

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

〈說明〉

$\sin\theta = \dfrac{x}{r}$



$\cos x = \dfrac{y}{r}$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \dfrac{x}{y} = \tan\theta$ ◇

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\frac{x}{y}} = \cancel{\dfrac{x}{y}}\ \dfrac{y}{x}$ ◇

3. 平方關係

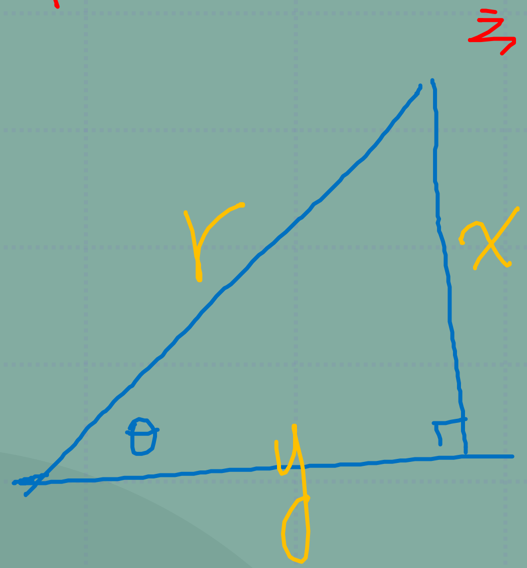
(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

(3) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

〈說明〉

proof: 定義的轉換



$r^2 = x^2 + y^2$

同除 r^2

$\Rightarrow 1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$

$\Rightarrow 1 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2$

$\Rightarrow 1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$\sin^2\theta \neq \sin(\theta^2)$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

同樣方式

4. 餘角關係

(1) $\begin{cases} \sin\theta = \cos(90^\circ - \theta) \\ \cos\theta = \sin(90^\circ - \theta) \end{cases}$

proof idea：定義的轉換、作圖.

(2) $\begin{cases} \tan\theta = \cot(90^\circ - \theta) \\ \cot\theta = \tan(90^\circ - \theta) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \sec\theta = \csc(90^\circ - \theta) \\ \csc\theta = \sec(90^\circ - \theta) \end{cases}$

〈說明〉

四、銳角的三角函數值

1. 三角函數值表

$0<\theta<45°$ 　　　　　　　　　　　　$45°<\theta<90°$

	15°	30°	45°	60°	75°
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\tan\theta$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\sec\theta$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
$\csc\theta$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

遞增

遞減

2. 函數分析

(1) 遞增函數： $\sin\theta$ 、 $\tan\theta$ 、 $\sec\theta$ 。

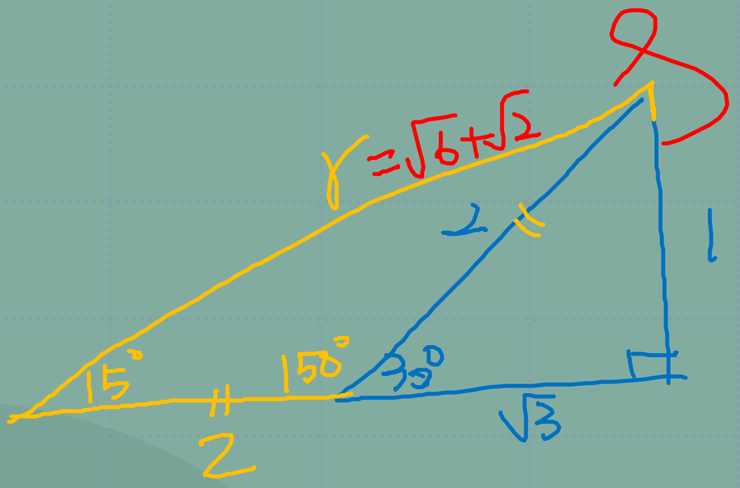
(2) 遞減函數： $\cos\theta$ 、 $\cot\theta$ 、 $\csc\theta$ 。

(3) 改變函數不等號的分界點在45度。

〈說明〉

延伸

求 $\sin 15^\circ$ method:



$r=\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{1^2+4+4\sqrt{3}+3}$

$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{6+2\sqrt{12}+2}$

$=\sqrt{(\sqrt{6})^2+2\sqrt{12}+(\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$\therefore \sin 15^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

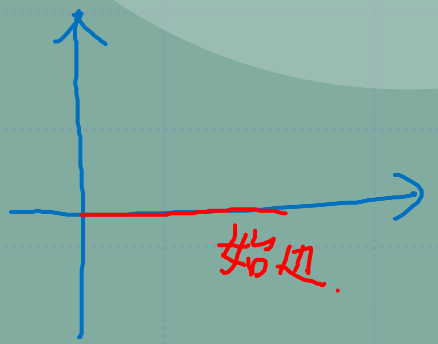
$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}^2-\sqrt{2}^2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ #

1-3 任意角的三角函數

一、廣義角(任意角)

1. 標準位置角

   將有向角的頂點與直角坐標系的原點重合，始邊置於x軸正向上，所形成之角即稱為「標準位置角」，通常以θ表示。



2. 象限角

   (1) 第一象限角

   圈起.

   滿足$0° < \theta < 90°$的角稱為第一象限角

   Z

   →即$360° \times n < \theta < 360° \times n + 90°$($n$為整數)

   (2) 第二象限角

   滿足$90° < \theta < 180°$的角稱為第二象限角

   →即$360° \times n + 90° < \theta < 360° \times n + 180°$($n$為整數)

   (3) 第三象限角

   滿足$180° < \theta < 270°$的角稱為第三象限角

   →即$360° \times n + 180° < \theta < 360° \times n + 270°$($n$為整數)

   (4) 第四象限角

   滿足$270° < \theta < 360°$的角稱為第四象限角

   →即$360° \times n + 270° < \theta < 360° \times n + 360°$($n$為整數)

3. 軸上角

   當θ角的終邊落在軸上時稱為「軸上角」。

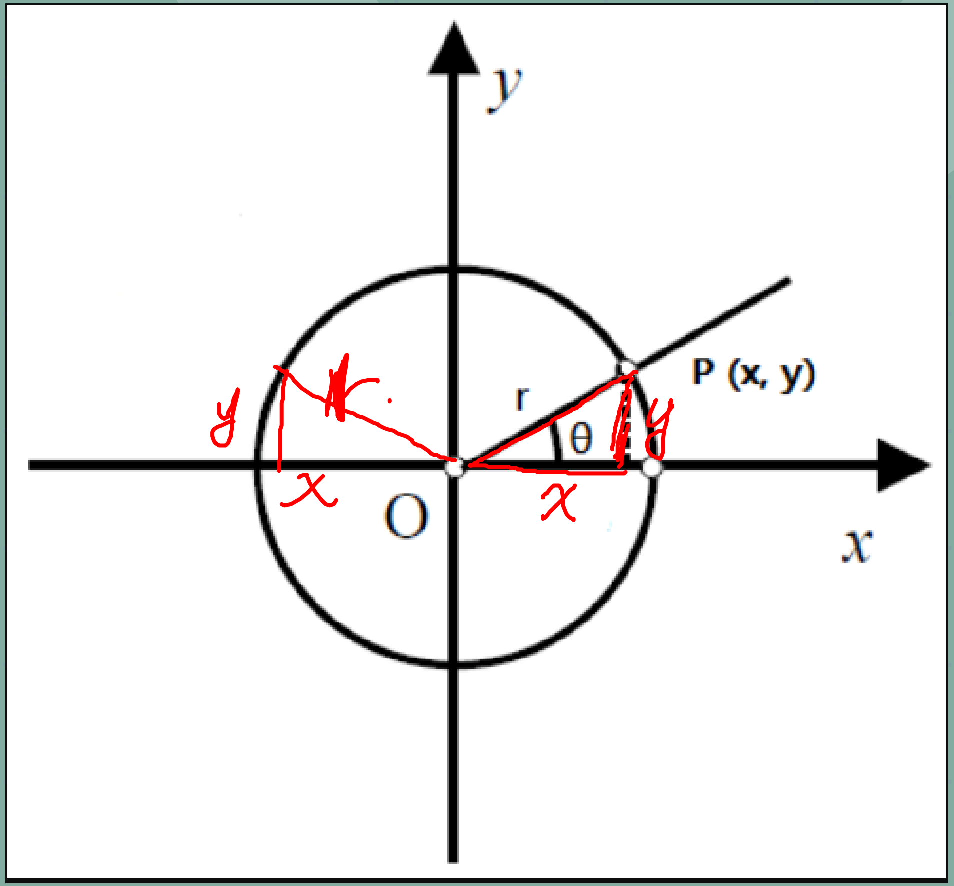
二、廣義角三角函數

1. 定義

(1) $\sin\theta = \frac{y}{r}$　　(2) $\cos\theta = \frac{x}{r}$

(3) $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$　　(4) $\cot\theta = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

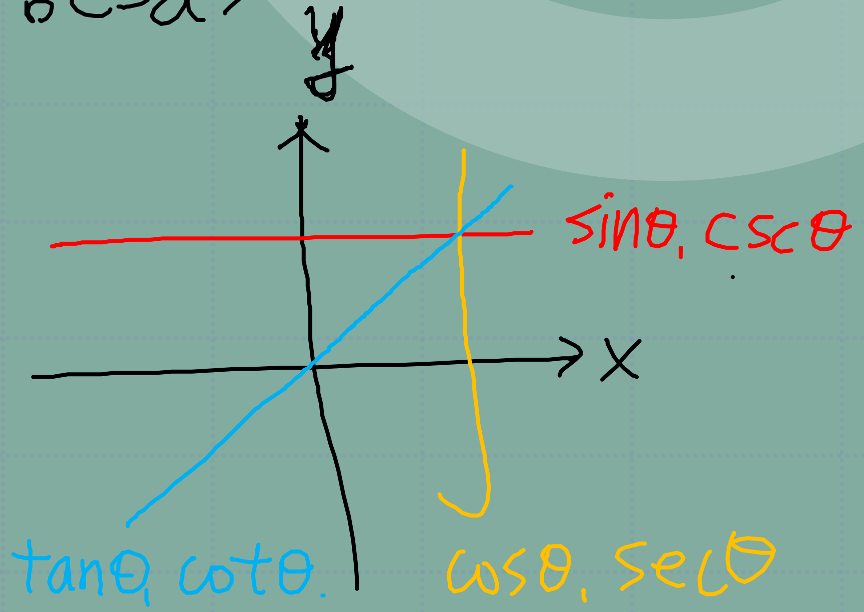
(5) $\sec\theta = \frac{r}{x}$ $(x \neq 0)$　　(6) $\csc\theta = \frac{r}{y}$ $(y \neq 0)$



2. 正負由P點的x、y決定。(原因：$r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

三、象限角的函數

<標記法>



1. 象限角的正負號

	I	II	III	IV
$\sin\theta$、$\csc\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$、$\sec\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$、$\cot\theta$	+	−	+	−

2. 軸上角的函數

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0°	0	1	0	X	1	X
90°	1	0	X	0	X	1
180°	0	-1	0	X	-1	X
270°	-1	0	X	0	X	-1

※四、廣義角化簡至銳角

假設平面上有一個廣義角A：　一律視為銳角.

Step1. 將角A化成$90^\circ \times n \pm \theta$的形式($n$為整數)。

Step2. 決定函數：$\begin{cases} n\text{為偶數：函數不變} \\ n\text{為奇數：正餘互換} \end{cases}$。

Step3. θ角照抄

Step4. 依原函數決定正負號。

例：將下列三角函數的廣義角化簡至銳角，並求出其三角函數值。

（1）$\sin 450°$　　（2）$\tan 570°$　　（3）$\cos(-390°)$

<sol>

(1) $\sin 450°$

$=\sin(90°\times 5+0°)$

$=\cos 0°$

$=\cancel{0}\ 1$ ※

(2) $\tan 570°$

$=\tan(90°\times 6+30°)$

$=\tan 30°$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ※

(3) $\cos(-390°)$

$=\cos(90°\times(-4)-30°)$

$=\cos 30°$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ※

<另>

$\cos(-390°)$

$=\cos(90°\times 0-390°)$

$=\cos 390°$

$=\cos(90°\times 4+30°)$

$=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ※

正切：tanx

1-4 正弦、餘弦函數的圖形

sinx cosx

一、週期函數

"$0 \sim 2\pi$"

在座標平面上，假設x為θ角的弧度、$f(x)$為其三角函數值。若函數$f(x)$恆有$f(x+p)=f(x)$發生，則稱$f(x)$為「週期函數」，其中p為函數$f(x)$的週期。

$y = $ 極端值

重覆一次所需時間

二、函數的圖形

y　x（弧度）　$f(x)$　$f(x+p)$　p

1. 特別角的函數值

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
		30°	45°			180°		
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0	X	0

※遞增情形：

(1) 當$0<\theta<\overset{45^\circ}{\frac{\pi}{4}}$時，$\sin\theta$ < $\cos\theta$。

(2) 當$\overset{45^\circ}{\frac{\pi}{4}}<\theta<\overset{90^\circ}{\frac{\pi}{2}}$時，$\sin\theta$ > $\cos\theta$。

(3) 當$0<\theta<\underset{90^\circ}{\frac{\pi}{2}}$時，$\underline{\sin\theta < \tan\theta}$。

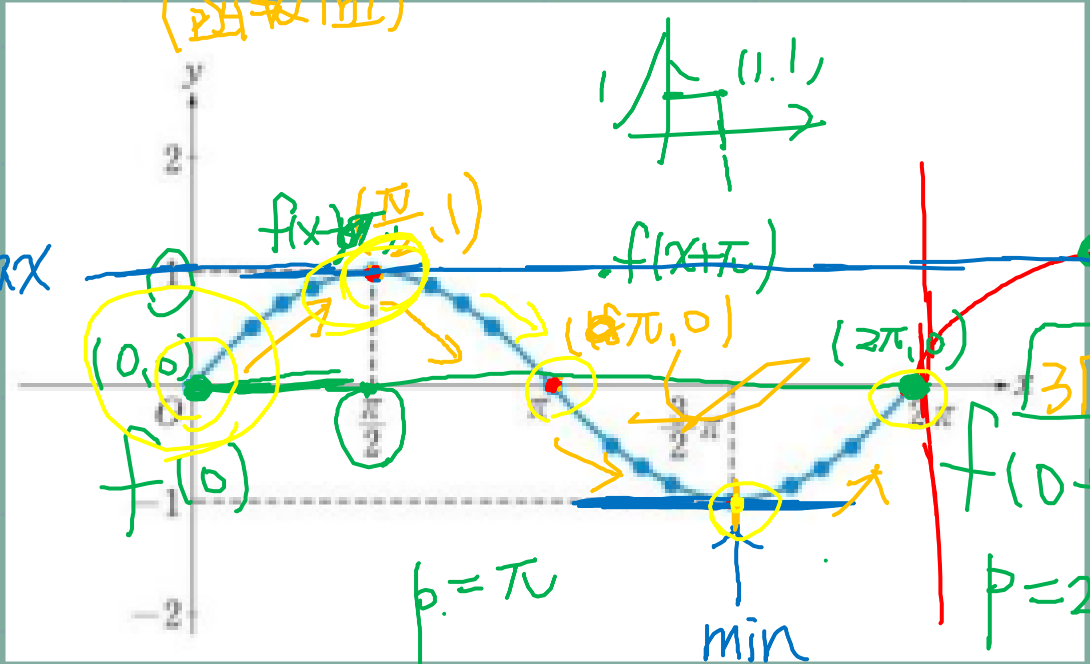
2. 正弦函數($\sin x$)的圖形

$\pi = 180^\circ$

$\sin x =$ 不存在 ?

(1) 圖形

(函數值)



$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

(2) 性質

D

→ 定義域：$x \in R$ (R 實數)

→ 值域：$-1 \le \sin x \le 1$

$x \to f(x)$

→ 當x在第一、四象限時，為遞增函數；在第二、三象限時，為遞減函數。

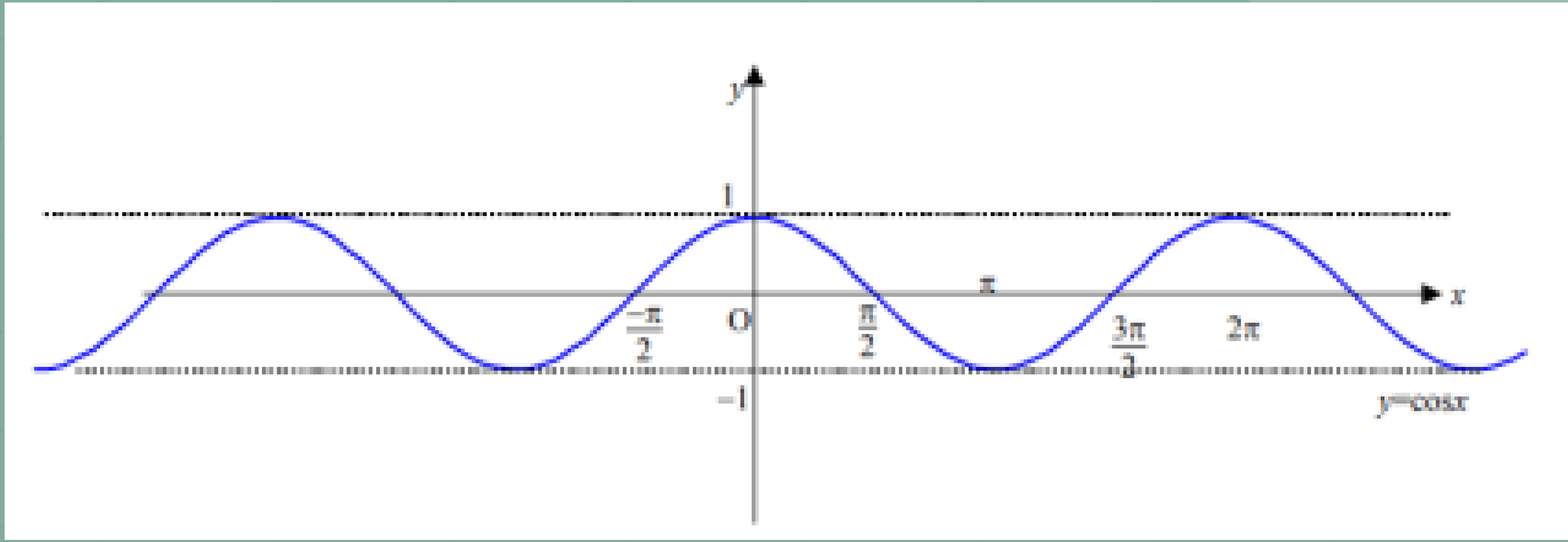
→ 為連續函數。

$0 \le |\sin x| \le 1$

$\Rightarrow$ " $0 \le |\sin x| \le 1$ "

3. 餘弦函數($\cos x$)的圖形

（1） 圖形



（2） 性質

→ 定義域：$x \in R$

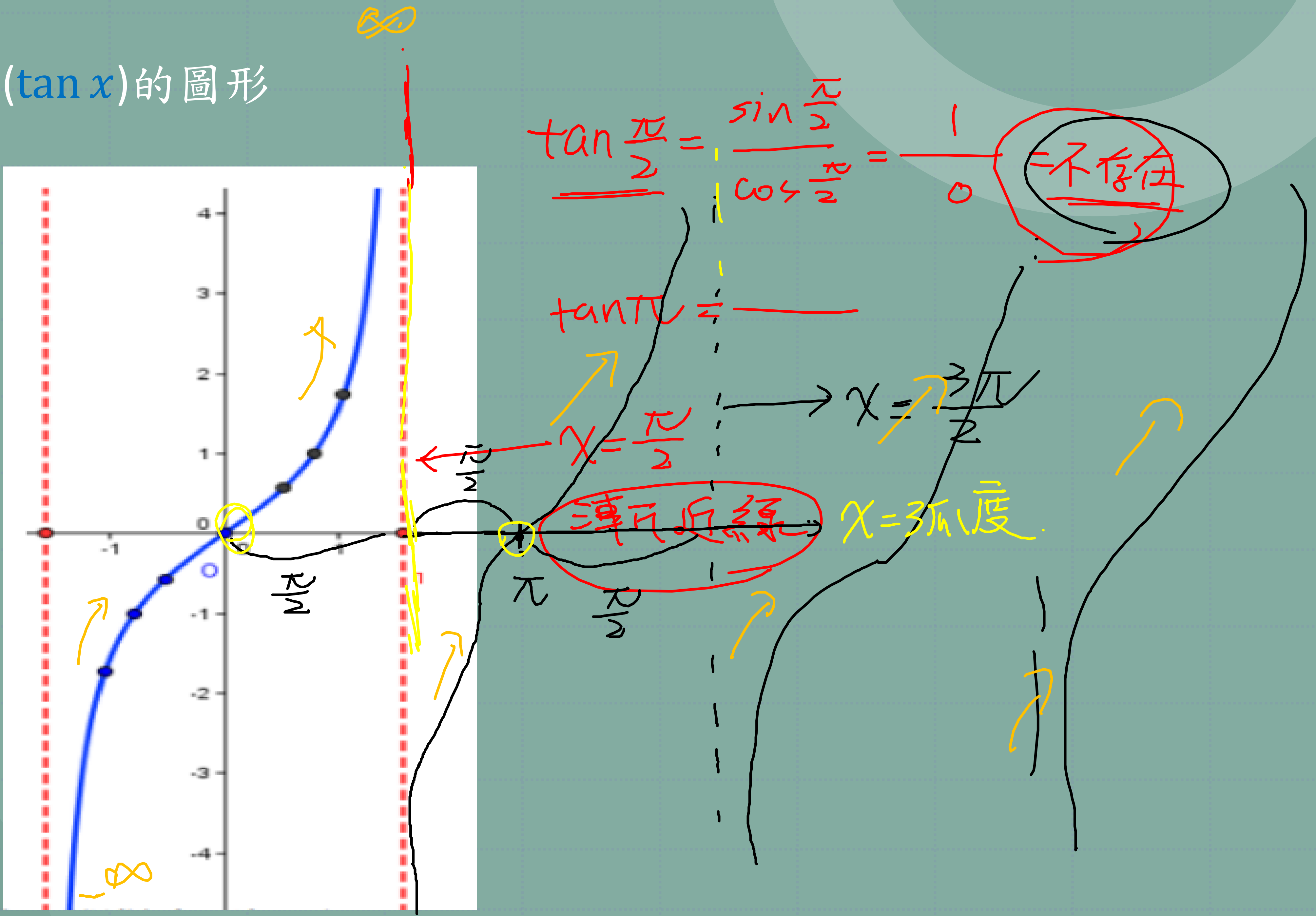
→ 值域：$-1 \le \cos x \le 1$

→ 當x在第一、二象限時，為遞減函數；在第三、四象限時，為遞增函數。

→ 為連續函數。

4. 正切函數($\tan x$)的圖形

（1）圖形



$\tan\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{0}$ 不存在

$\tan\pi=$ ____

（2）性質

→ 定義域：$x \in R, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi (n \in Z)$

→ 值域：$-\infty \leq \tan x \leq \infty$

→ 恆為遞增函數。

→ 不是連續函數。

→ 漸進線方程式為$x = \frac{\pi}{2} + n\pi (n \in Z)$。

5. 函數圖形的變化

弧度

考慮函數$y = a\sin(bx + c) + d$，則：

×2

a>0　a<0　×(−2)

a×4 (1) 振幅變為a倍：$\begin{cases} a > 0：\text{同向伸縮} \\ a < 0：\text{反向伸縮} \end{cases}$。→絕對值時考慮

(2) 週期變為$\dfrac{T}{|b|}$。÷2

大小

(3) 當$c > 0$時，圖形左移c單位；當$c < 0$時，圖形右移c單位。

a×3

(4) 當$d > 0$時，圖形上移d單位；當$d < 0$時，圖形下移d單位。