

The background features a light blue grid with several 3D cubes of varying sizes and orientations. Some cubes are connected by thin white lines, creating a network-like structure. The overall aesthetic is clean and modern.

授課科目：高職數學B2

授課班級：商管群

授課教師：湯詠傑

2022.04.11製

# 第一章 三角函數

# 1-1 角度的基本性質

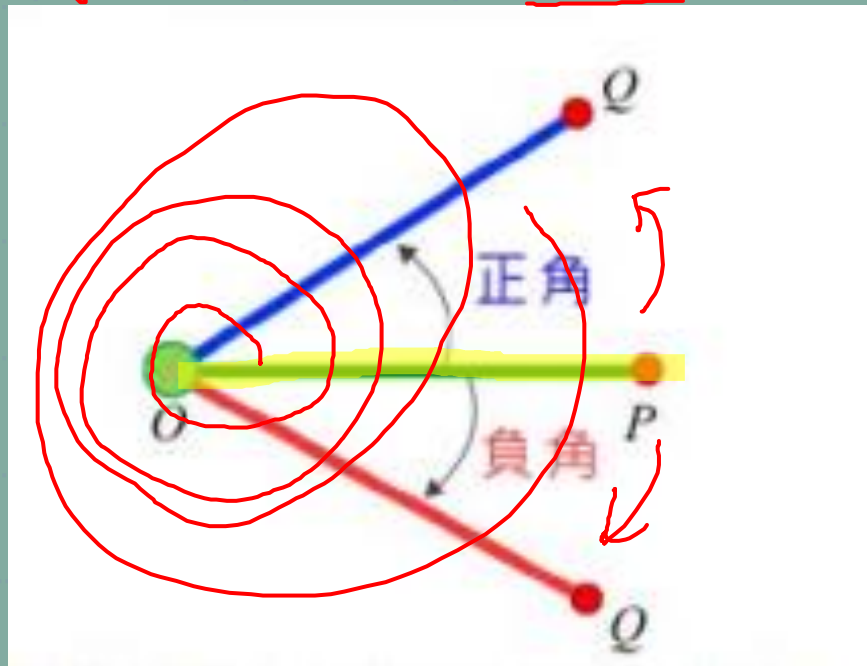
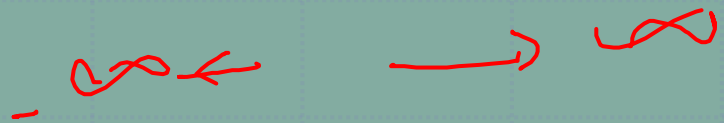
# 一、有向角

## 1. 定義

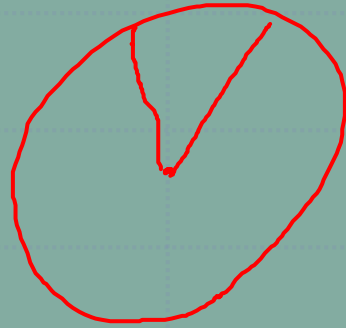
設 $\overrightarrow{OA}$ 為起始邊、 $\overrightarrow{OB}$ 為終邊，將起始邊旋轉至終邊所形成的角稱為「有向角」，以 $\angle AOB$ 表示。其中以順時針旋轉的角稱為「正角」，逆時針旋轉的角稱為「負角」。

2. 決定有向角的因素包含始邊、終邊、旋轉方向及旋轉量(不限圈數)。

3. 有向角的大小不限。



## 二、角度量與扇形



### 1. 角度的表示法

- (1) 將圓周分成360等分，每一等分所對應之圓心角稱為「1度」，記為  $1^\circ$ 。
- (2) 將每一度分成60等分，每一等分稱為「1分」，記為1'。
- (3) 將每一分分成60等分，每一等分稱為「1秒」，記為1''。

## 2. 弧度的表示法

### (1) 弧度的定義

在圓周上取一段與半徑等長的弧(即 $S = r$ )，此弧所對應之圓心角即稱為**1弧度**(亦稱**1徑**)，記為**1**。

(2)  $1^\circ \neq 1$ 。

(3) 一周角為 $2\pi$ 。

(4)  $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 、 $1 = \frac{180^\circ}{\pi}$ 。

### 3. 扇形的表示法

設一扇形的半徑為 $r$ 、其圓心角為 $\theta$ ，且對應之弧長為 $S$ ，面積為 $A$ ，則：

$$(1) \underline{S = r\theta}$$

$$(2) A = \frac{1}{2}r^2\theta = \boxed{\frac{1}{2}rS}$$

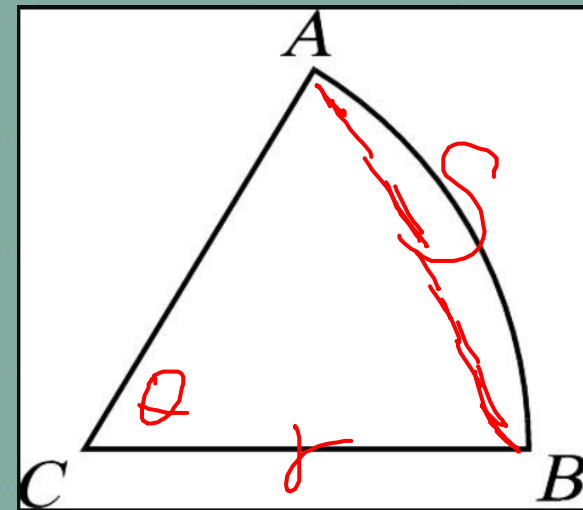
$$r \cdot r \cdot \pi \cdot \theta$$

$$= r^2 \pi \theta$$

$$\theta = \frac{S}{r}$$

$$\boxed{S = r\theta}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \theta$$

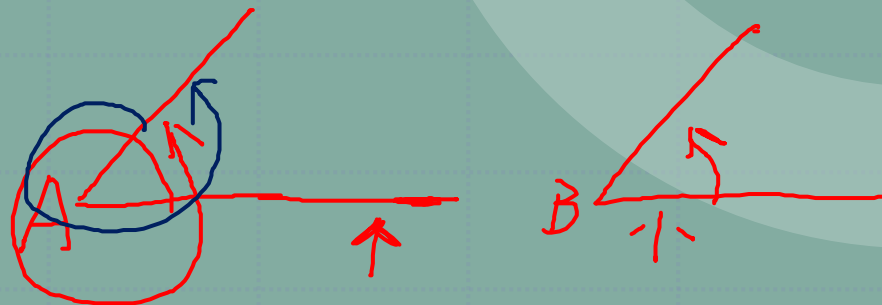


$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot S$$

# ~~三~~ 同界角

1. 定義

兩個有向角具有相同的始邊與終邊。



2. 最大負同界角：所有負同界角中最大的角。

3. 最小正同界角：所有正同界角中最小的角。

4. 同界角的判別法則：兩個角相差360度的整數倍。

5. 一個 $\theta$ 角都有無限多個同界角。

"吃"

真實力



60

$25 \times 4 = 100$

# 1-2 銳角三角函數

60

A

40

10

$= 78$

11

4

6

50%

75%

5

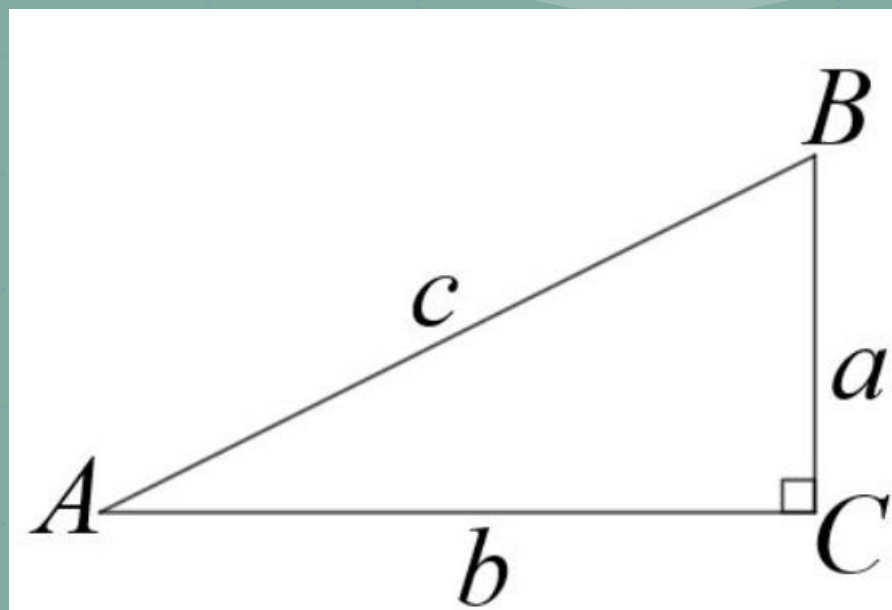
28

88%



# 一、畢氏定理

設直角三角形的兩股長分別為 $a$ 、 $b$ ，其斜邊長為 $c$ ，則 $c^2 = a^2 + b^2$ 。

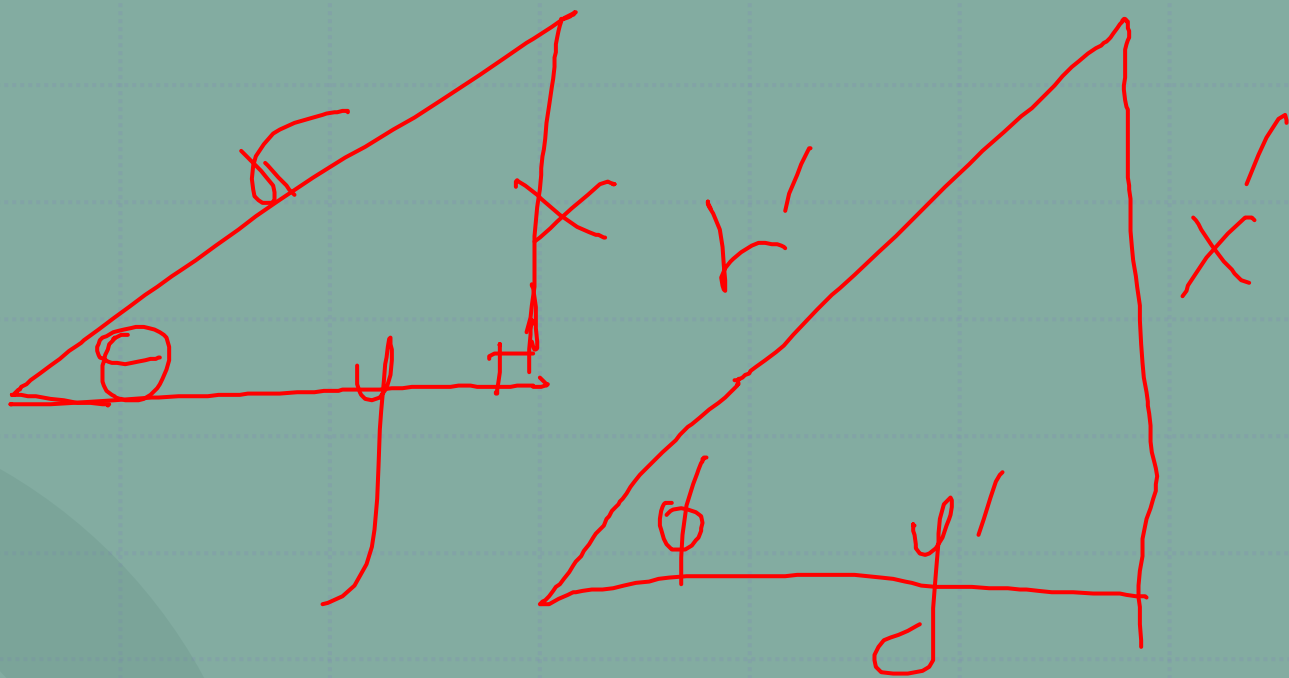


## 二、銳角三角函數的定義

函數： $\theta \longrightarrow f(\theta)$   
 $x \longrightarrow f(x)$

### 1. 三角函數核心思想

當銳角 $\theta$ 改變時，任兩邊邊長的比值也會隨之改變，則角度與比值產生了函數的「對應關係」，此對應關係的函數我們即稱為「三角函數」。



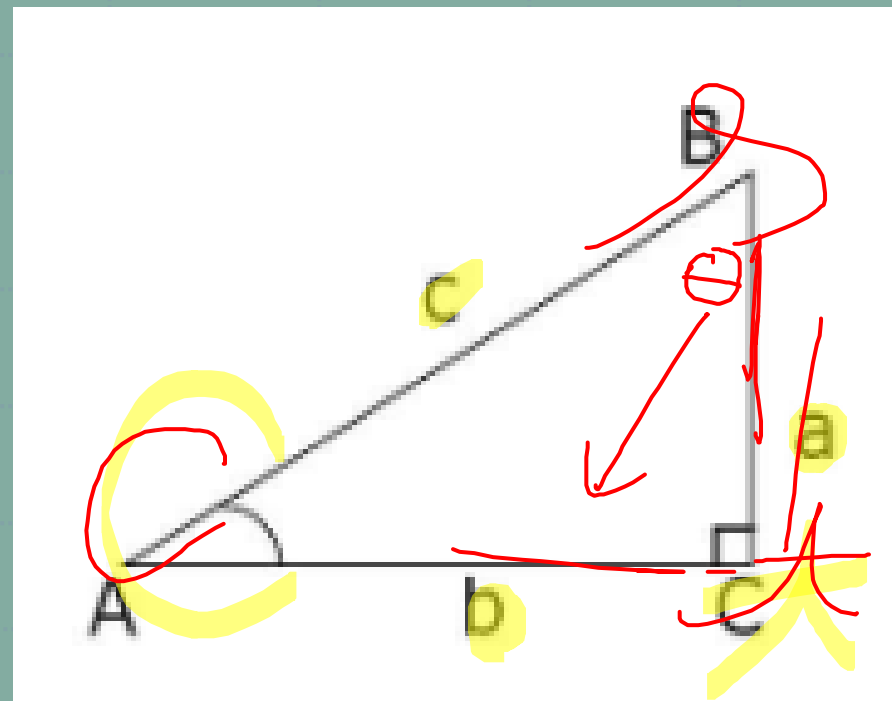
## 2. 定義

(1) 正弦函數： $\sin \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$  (4) 餘割函數： $\csc \theta = \frac{c}{a} = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} = 1$

(2) 餘弦函數： $\cos \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$  (5) 正割函數： $\sec \theta = \frac{c}{b} = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} = 1$

(3) 正切函數： $\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$  (6) 餘切函數： $\cot \theta = \frac{b}{a} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}} = 1$

3. 已知一個三角函數值，即可得知另外五個三角函數值。



### 三、三角函數的恆等式

#### 1. 倒數關係

$$(1) \sin \theta \times \csc \theta = 1$$

$$(2) \cos \theta \times \sec \theta = 1$$

$$(3) \tan \theta \times \cot \theta = 1$$

〈說明〉

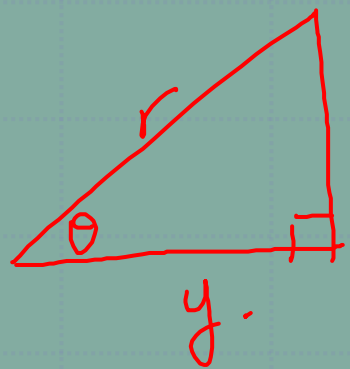
定義

## 2. 商數關係

(1)  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

(2)  $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

〈說明〉



$$\sin \theta = \frac{x}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y} = \tan \theta \quad \square$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x} \quad \square$$

### 3. 平方關係

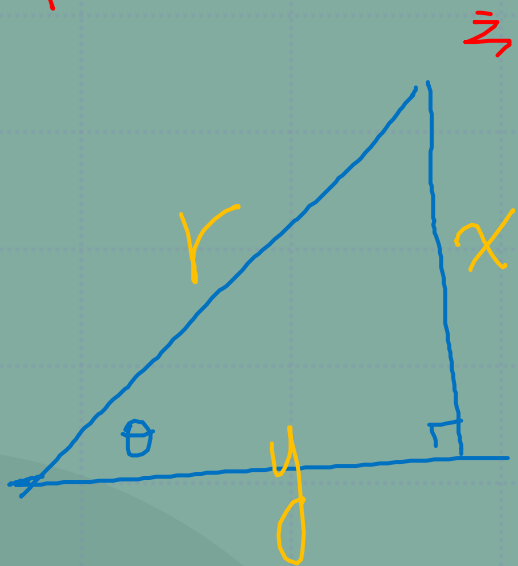
(1)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

(2)  $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

(3)  $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

〈說明〉

proof: 定義的轉換



$$r^2 = x^2 + y^2$$

同除  $r^2$   $\Rightarrow 1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \quad \square$$

$$\sin^2 \theta \neq \sin(\theta^2)$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

同樣方式

#### 4. 餘角關係

$$(1) \begin{cases} \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta) \\ \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \tan \theta = \cot(90^\circ - \theta) \\ \cot \theta = \tan(90^\circ - \theta) \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \sec \theta = \csc(90^\circ - \theta) \\ \csc \theta = \sec(90^\circ - \theta) \end{cases}$$

〈說明〉

proof idea: 定義的轉換、作圖.

## 四、銳角的三角函數值

### 1. 三角函數值表

√長±寬

√長=斜

$0^\circ < \theta < 45^\circ$



$45^\circ < \theta < 90^\circ$

	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\tan \theta$	$2 - \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$
$\cot \theta$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2 - \sqrt{3}$
$\sec \theta$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$
$\csc \theta$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$



## 2. 函數分析

(1) 遞增函數： $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ 、 $\sec \theta$ 。

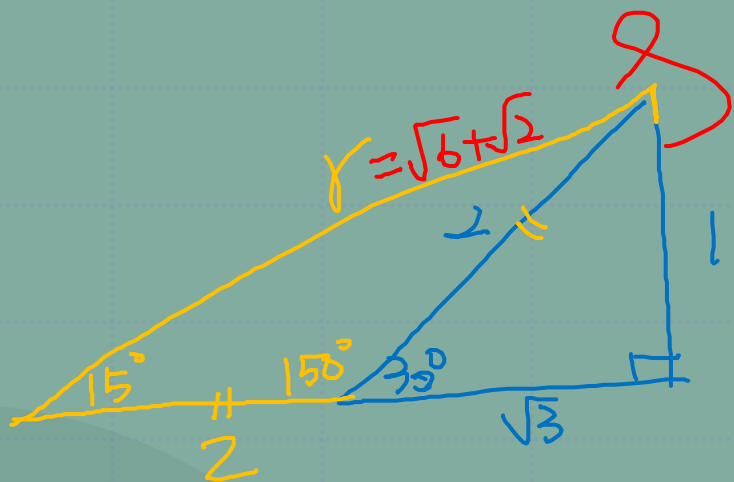
(2) 遞減函數： $\cos \theta$ 、 $\cot \theta$ 、 $\csc \theta$ 。

(3) 改變函數不等號的分界點在45度。

〈說明〉

延伸

求  $\sin 15^\circ$  method:



$$r = \sqrt{1^2 + (2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{12} + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 4 + 4\sqrt{3} + 3}$$

$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \times$$

# 1-3 任意角的三角函數

# 一、廣義角(任意角)

## 1. 標準位置角

將有向角的頂點與直角坐標系的原點重合，始邊置於x軸正向上，所形成之角即稱為「標準位置角」，通常以 $\theta$ 表示。

## 2. 象限角

### (1) 第一象限角

滿足 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 的角稱為第一象限角  
→即 $360^\circ \times n < \theta < 360^\circ \times n + 90^\circ$  ( $n$ 為整數)

### (2) 第二象限角

滿足 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 的角稱為第二象限角  
→即 $360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$  ( $n$ 為整數)

### (3) 第三象限角

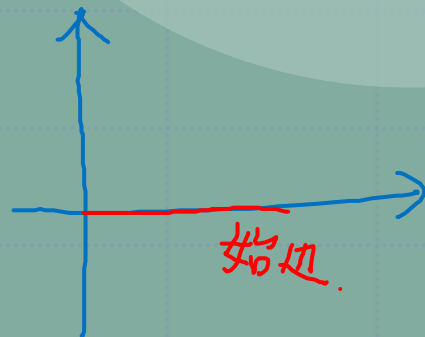
滿足 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 的角稱為第三象限角  
→即 $360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ$  ( $n$ 為整數)

### (4) 第四象限角

滿足 $270^\circ < \theta < 360^\circ$ 的角稱為第四象限角  
→即 $360^\circ \times n + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 360^\circ$  ( $n$ 為整數)

## 3. 軸上角

當 $\theta$ 角的終邊落在軸上時稱為「軸上角」。



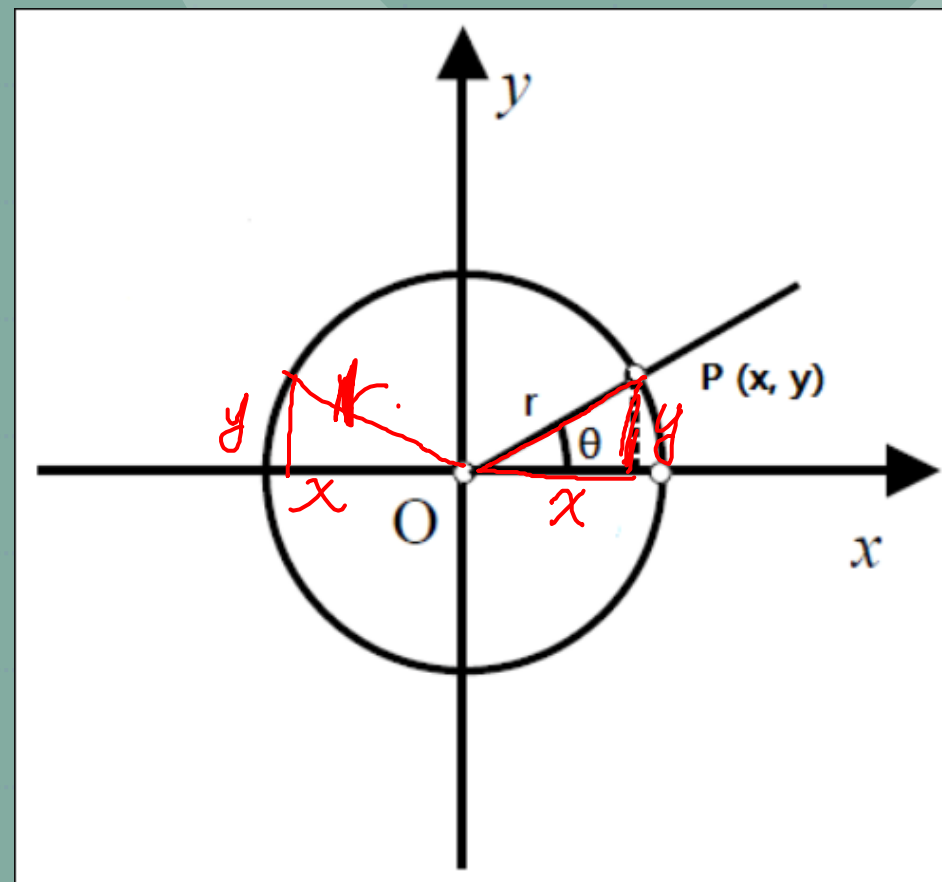
## 二、廣義角三角函數

### 1. 定義

$$(1) \sin \theta = \frac{y}{r} \quad (2) \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$(3) \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \quad (4) \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$(5) \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \quad (6) \csc \theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0)$$



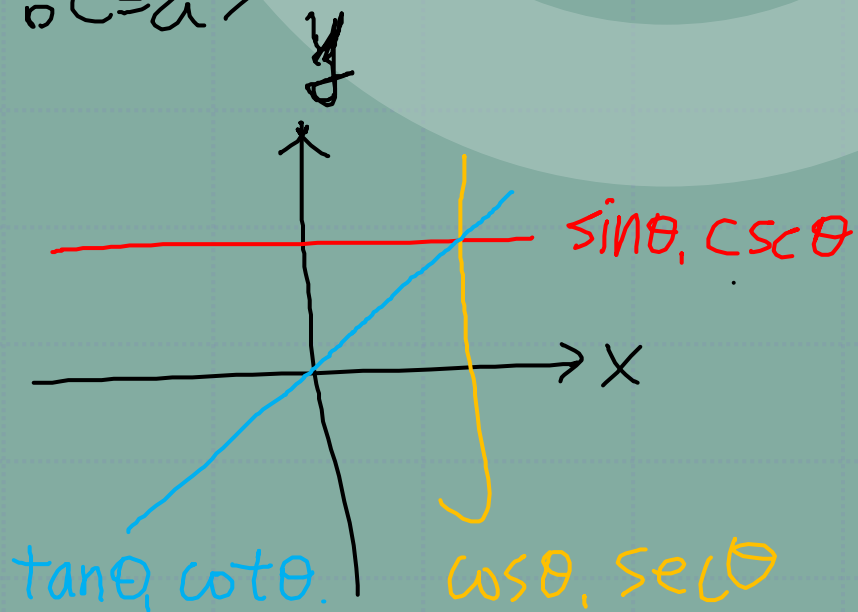
2. 正負由  $P$  點的  $x$ 、 $y$  決定。(原因： $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ )

# 三、象限角的函數

## 1. 象限角的正負號

	I	II	III	IV
$\sin \theta$ 、 $\csc \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$ 、 $\sec \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$ 、 $\cot \theta$	+	-	+	-

< 十字記法 >



## 2. 軸上角的函數

	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$0^\circ$	0	1	0	X	1	X
$90^\circ$	1	0	X	0	X	1
$180^\circ$	0	-1	0	X	-1	X
$270^\circ$	-1	0	X	0	X	-1

## ※四、廣義角化簡至銳角

假設平面上有一個廣義角 $A$ ：

Step1. 將角 $A$ 化成 $90^\circ \times n \pm \theta$ 的形式( $n$ 為整數)。

Step2. 決定函數： $\begin{cases} n \text{ 為偶數} : \text{函數不變} \\ n \text{ 為奇數} : \text{正餘互換} \end{cases}$ 。

Step3.  $\theta$ 角照抄

Step4. 依原函數決定正負號。

→ 一律視為銳角。

例：將下列三角函數的廣義角化簡至銳角，並求出其三角函數值。

(1)  $\sin 450^\circ$       (2)  $\tan 570^\circ$       (3)  $\cos(-390^\circ)$

<sol>

$$(1) \sin 450^\circ \\ = \sin(90^\circ \times 5 + 0^\circ)$$

$$= \cos 0^\circ$$

$$= \cancel{0} \times 1 \times$$

$$(2) \tan 570^\circ$$

$$= \tan(90^\circ \times 6 + 30^\circ)$$

$$= \tan 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times$$

$$(3) \cos(-390^\circ)$$

$$= \cos(90^\circ \times (-4) - 30^\circ)$$

$$= \cos 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times$$

<另>

$$\cos(-390^\circ)$$

$$= \cos(90^\circ \times 0 - 390^\circ)$$

$$= \cos 390^\circ$$

$$= \cos(90^\circ \times 4 + 30^\circ)$$

$$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times$$

正切  $\tan x$

# 1-4 正弦、餘弦函數的圖形

$\sin x$

$\cos x$



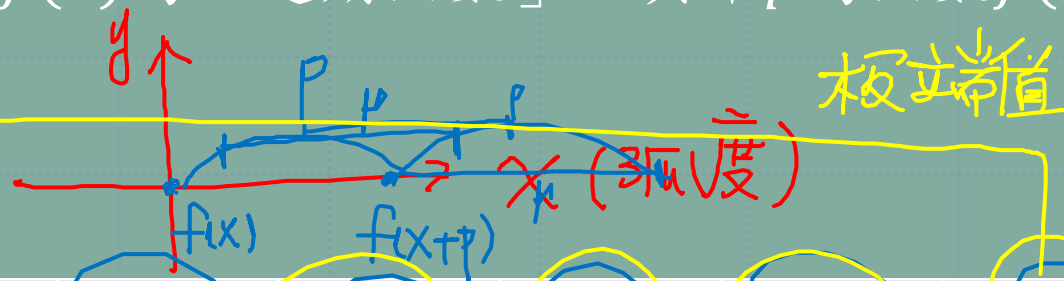
# ☆、週期函數

在座標平面上，假設 $x$ 為 $\theta$ 角的弧度、 $f(x)$ 為其三角函數值。若函數 $f(x)$ 恆有 $f(x+p)=f(x)$ 發生，則稱 $f(x)$ 為「週期函數」，其中 $p$ 為函數 $f(x)$ 的週期。

## 二、函數的圖形

### 1. 特別角的函數值

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0	X	0



重複一次  
所需時間

※遞增情形：



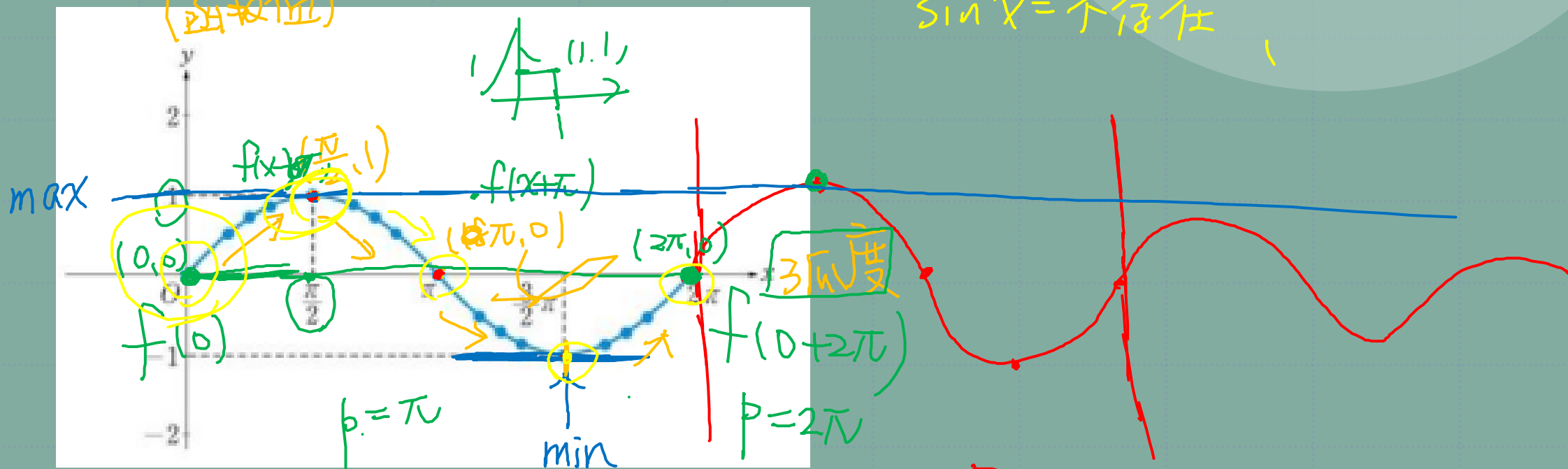
(1) 當  $0 < \theta < \overset{45^\circ}{\frac{\pi}{4}}$  時， $\sin \theta < \cos \theta$ 。

(2) 當  $\overset{45^\circ}{\frac{\pi}{4}} < \theta < \overset{90^\circ}{\frac{\pi}{2}}$  時， $\sin \theta > \cos \theta$ 。

(3) ✓ 當  $0 < \theta < \overset{90^\circ}{\frac{\pi}{2}}$  時， $\sin \theta < \tan \theta$ 。

## 2. 正弦函數( $\sin x$ )的圖形

### (1) 圖形



### (2) 性質

→ 定義域:  $x \in \mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}$  實數)

→ 值域:  $-1 \leq \sin x \leq 1$   $x \rightarrow f(x)$

→ 當  $x$  在第一、四象限時，為遞增函數；在第二、三象限時，為遞減函數。

→ 為連續函數。

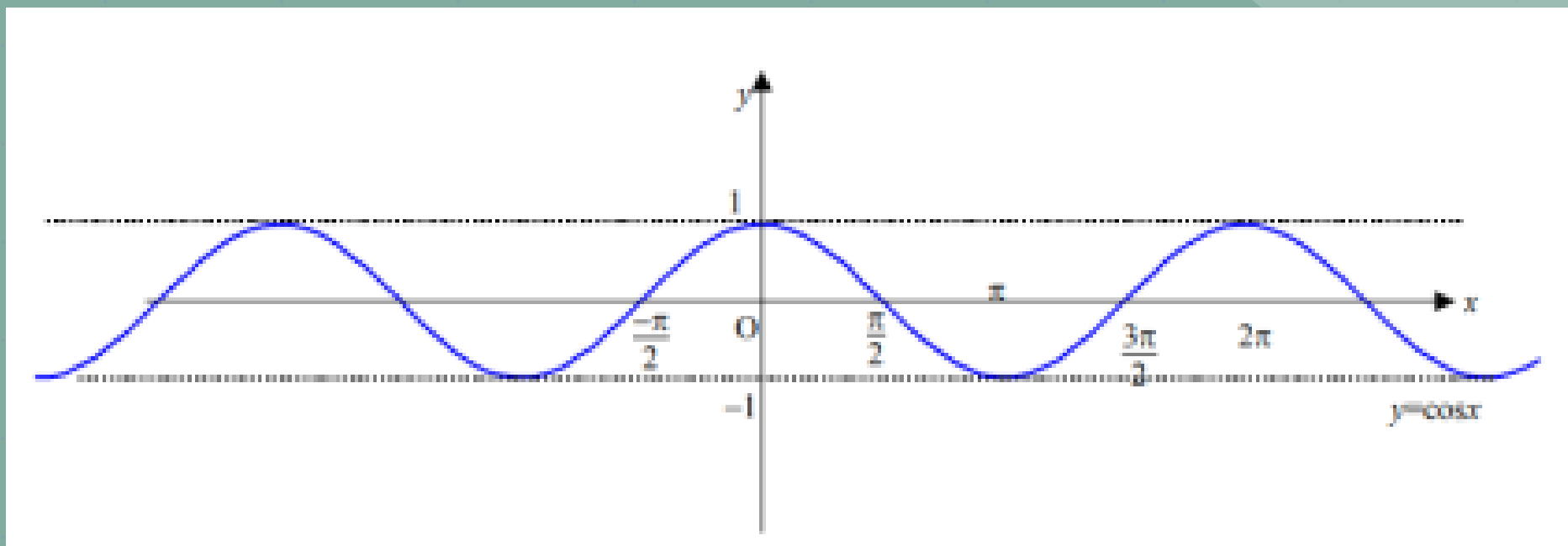
$$\sin 131^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq |\sin x| \leq 1$$

$$0 \leq |\sin x| \leq 1$$

### 3. 餘弦函數( $\cos x$ )的圖形

#### (1) 圖形

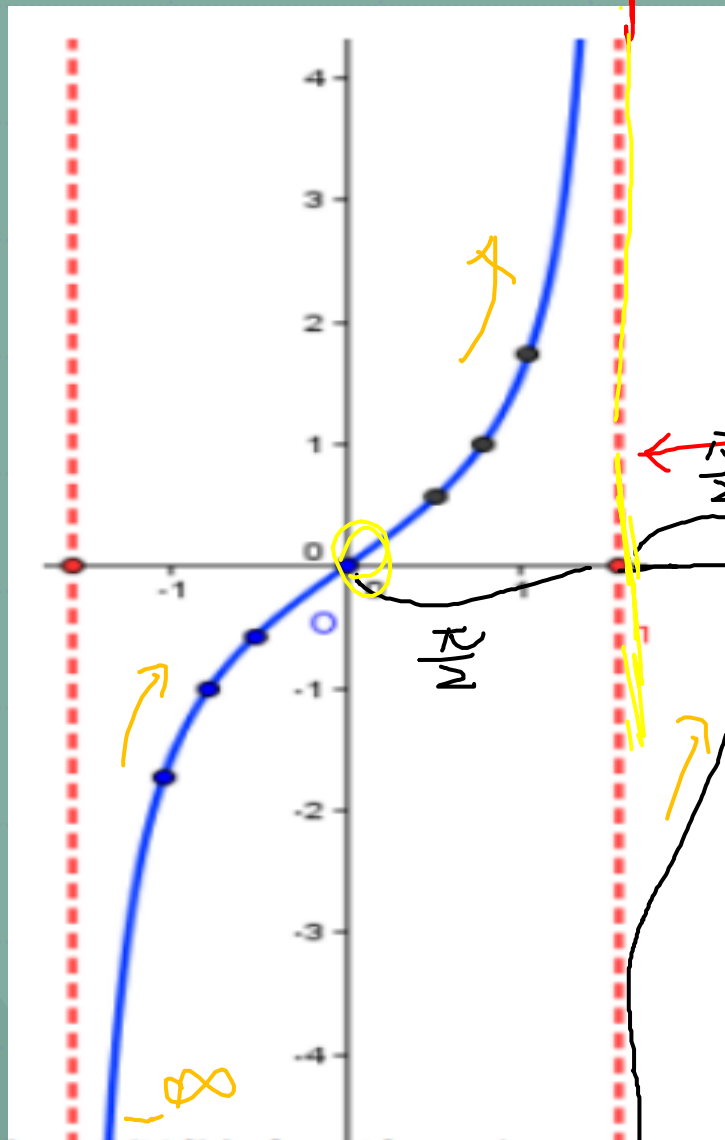


#### (2) 性質

- 定義域： $x \in R$
- 值域： $-1 \leq \cos x \leq 1$
- 當 $x$ 在第一、二象限時，為遞減函數；在第三、四象限時，為遞增函數。
- 為連續函數。

# 4. 正切函數( $\tan x$ )的圖形

## (1) 圖形



$$\tan \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0} = \text{不存在}$$

$$\tan \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 3\pi \text{ 弧度}$$

漸近線

## (2) 性質

- 定義域： $x \in R, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi (n \in Z)$
- 值域： $-\infty \leq \tan x \leq \infty$
- 恆為遞增函數。
- 不是連續函數。
- 漸進線方程式為  $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi (n \in Z)$ 。

5. 函數圖形的變化  
考慮函數  $y = a \sin(bx + c) + d$ ，則：



ex4 (1) 振幅變為  $a$  倍： $\begin{cases} a > 0 : \text{同向伸縮} \\ a < 0 : \text{反向伸縮} \end{cases}$ 。  $\rightarrow$  絕對值時考慮

(2) 週期變為  $\frac{T}{|b|}$ 。  
大小  $\div 2$

ex3 (3) 當  $c > 0$  時，圖形左移  $c$  單位；當  $c < 0$  時，圖形右移  $c$  單位。

(4) 當  $d > 0$  時，圖形上移  $d$  單位；當  $d < 0$  時，圖形下移  $d$  單位。