第三章 向量

授課科目：高職數學B2
授課班級：商管群
授課教師：湯詠傑
2022.04.14製

本章一共包含三個小節

- 3-1 向量的作圖
- 3-2 向量的座標表示法
- 3-3 向量的內積

3-1 向量的作圖

一、向量的定義

1. 有向線段

具有方向的線段，即為「有向線段」，以符號 $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$ 表示，其中 A 為起點、B 為終點。

"向量長度"

A起

終

2. 向量

(1) 定義

具有大小及方向的量，即稱為「向量」。

$\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{AB}$

(2) 以 A 為起點、B 為終點的向量，以符號 $\overrightarrow{AB}$ 表示。

① $\overline{AB}$

② $\overleftrightarrow{AB}$：直線.

③ $\overrightarrow{AB}$：射線.

④ $\overrightarrow{AB}$：向量.

3. 其他向量的定義

(1) 零向量

I. 起點與終點同一點的向量，稱為「零向量」,以符號$\vec{0}$表示。

II. 長度為<u>0</u>、沒有方向性。

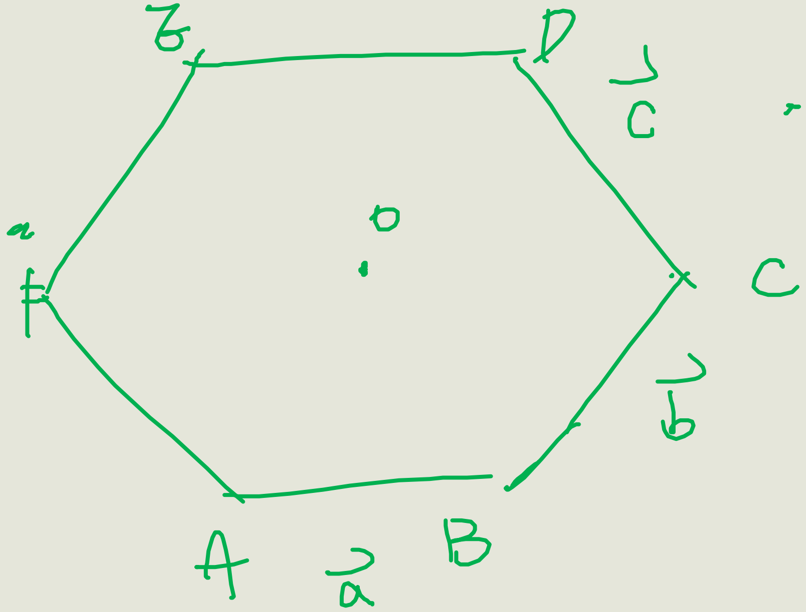
(2) 相等向量

當兩個向量的<u>大小</u>即<u>方向</u>均相等時，稱這兩個向量為相等向量。

(3) 逆向量(反向量)

當兩個向量<u>大小相等</u>且<u>方向相反</u>時，此兩向量互為反向量(逆向量)。

例題1.



AB

二、向量運算的作圖

A→B→A : 0.

位移

位移 : 0

力學　電磁

物理　力學

1. 物理學上的向量

(1) 在物理學上，向量$\overrightarrow{AB}$可看作是一個物體由A點移動至B點的<u>位移</u>。

(2) 向量是可<u>平移</u>的。

2. 向量的加法

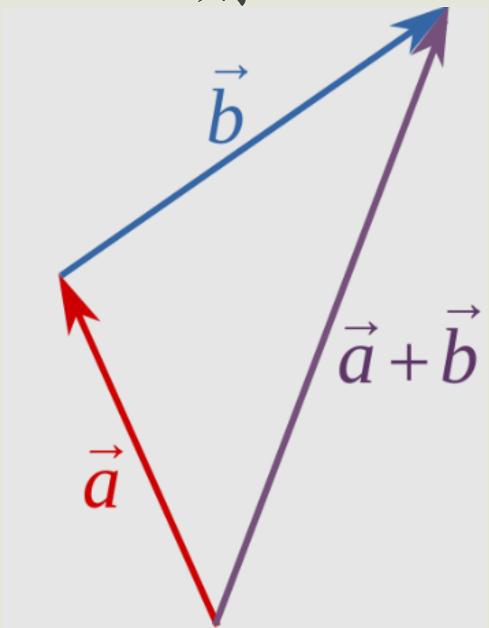
由於向量是可<u>平移</u>的，因此我們可以定義以下兩種算法：

(1) 三角形法

I. 頭接尾。

II. 若$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$、$\vec{b} = \overrightarrow{BC}$，則$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$。

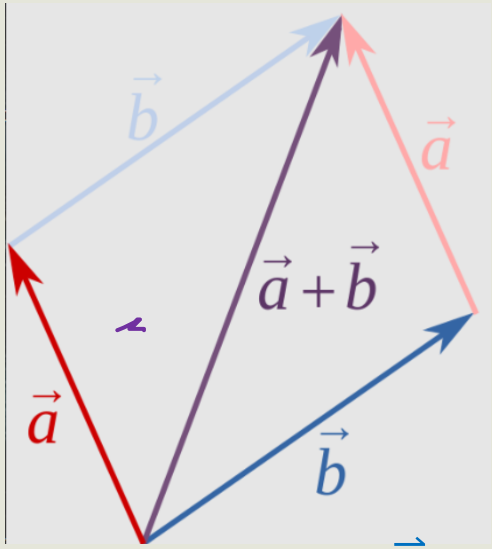
III. 圖示：

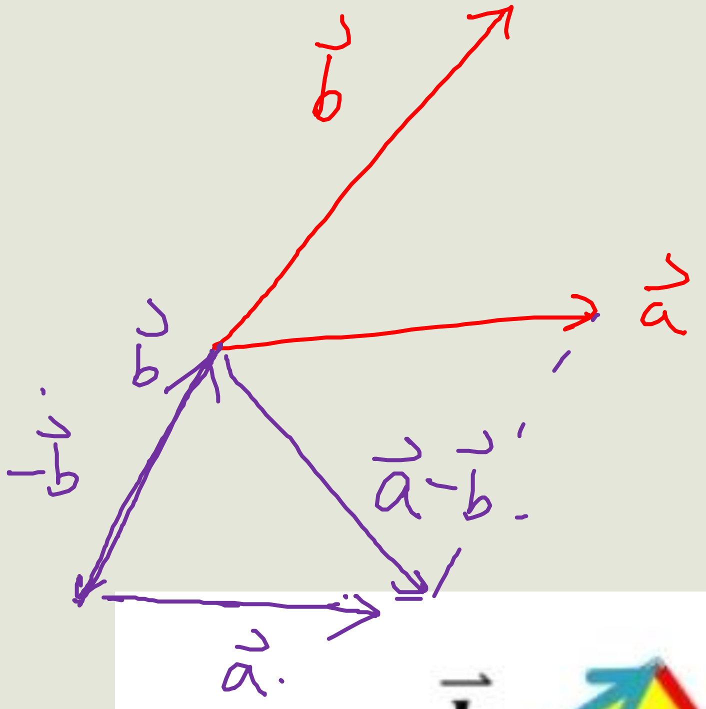


(2) 平行四邊形法

I. 尾接尾。

II. 圖示：



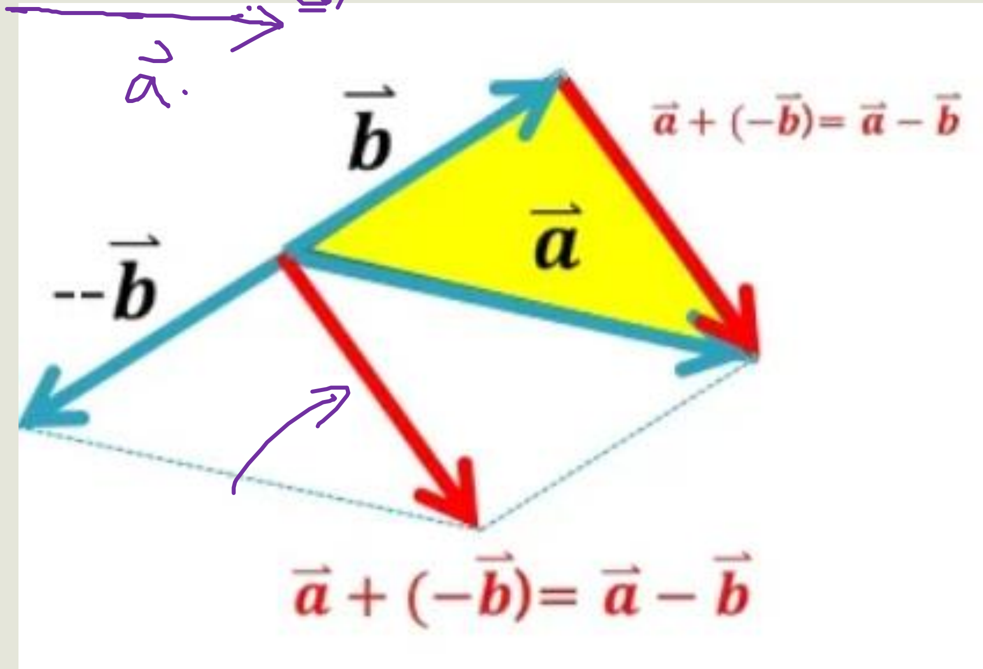


(3) 向量加法滿足交換律，即 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ 。

3. 向量的減法

(1) 向量的本質是不存在減法的，所謂向量的減法，即是在一個向量上加上另一個向量的反向量，即 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$。

(2) 作圖方式有兩種：



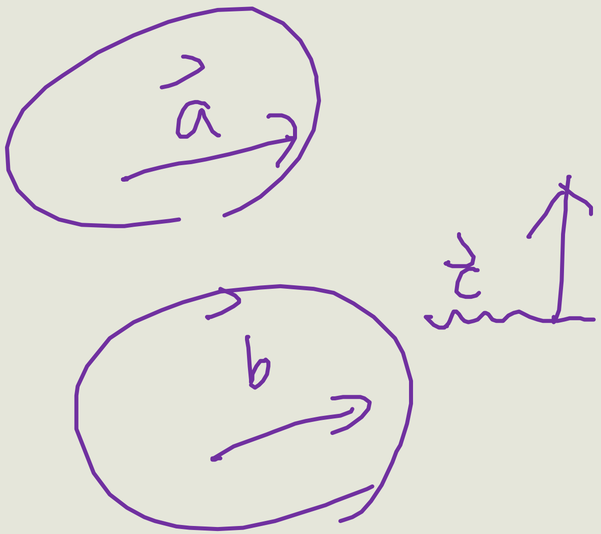
例題2.

你会了

例題3.

作 気3

例題4.



偏 不会绝是上面和

倍 会了.

三、向量的實數積作圖

1. 實數積的定義

設$\vec{a}$為一個非零向量、r為實數，則實數r乘以向量$\vec{a}$，即為$\vec{a}$的實數積，以符號$r\vec{a}$表示。

2. 大小與方向 $r\vec{a}$ "$\vec{0}$"

$r=-x$

$(-x)\vec{a}$

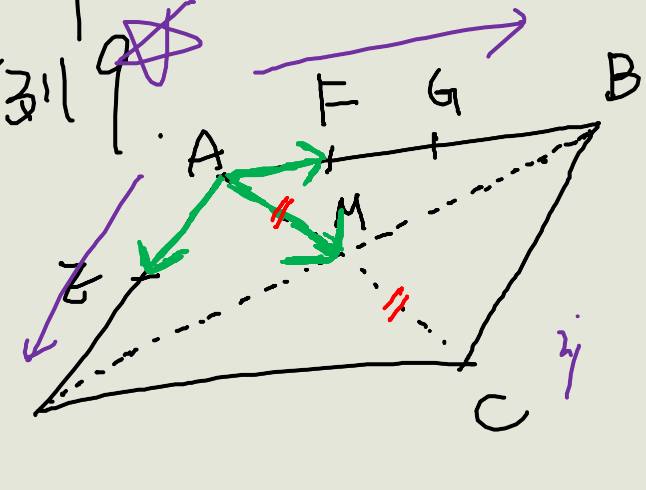
$=x\cdot\underbrace{(-\vec{a})}$

	$r>0$	$r=0$	$r<0$
長度 大小	r倍	0	$\lvert r\rvert$倍
方向 同/反向	相同	找不到	相反

例題5.

例題6.

p.97 例19



<sol>

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AE} + \beta\overrightarrow{AF}$

$= \alpha$

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ 2\overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AM} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}. \end{aligned}}$$

3-2 向量的座標表示法

一、向量的座標表示

1. 向量的表示法

(1) 設座標平面上有一點$P(a,b)$，則以P點座標(a,b)表示有向線段$\overline{OP}$，記為$\overrightarrow{OP}=(a,b)$。

(2) 若$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$為平面上任意兩點，則向量$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，其中$x_2-x_1$為$x$分量、$y_2-y_1$為$y$分量。

(3) 每個向量在座標平面上都有唯一的座標表示法。

$\vec{a}$ $\vec{b}$

$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$

$(c_1,c_2)=x(a_1,a_2)+y(b_1,b_2)$

$(c_1,c_2)=(xa_1,xa_2)+(yb_1,yb_2)$

2. 向量的長度

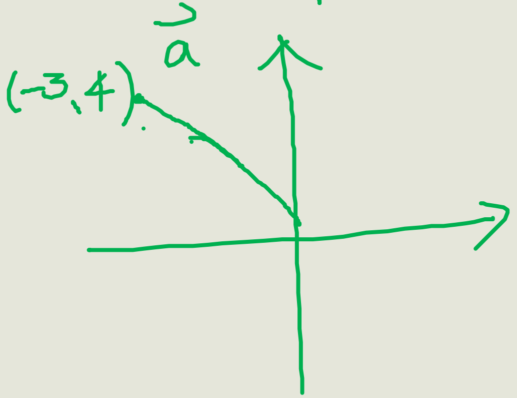
設$\vec{v}=(a,b)$，則$|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2}$。

3. 向量的相等

設$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$為平面上兩個非零向量，若$\vec{a}=\vec{b}$，則兩個向量相等，且$a_1=b_1$，$a_2=b_2$。

例題1.

$\vec{a} = (-3, 4).$



$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$

$= 5.$

例題2.

$\vec{a}=\vec{b}$

$(x+2, -5) = (5, y-1)$

$\therefore \begin{cases} x+2=5 \\ -5=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$

例題3.

$A(4,8)$ $B(-1,20)$

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1-4,\ 20-8)$

$=(-5,12)$ #

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-5)^2+12^2}$

$=13$ #

例題4.

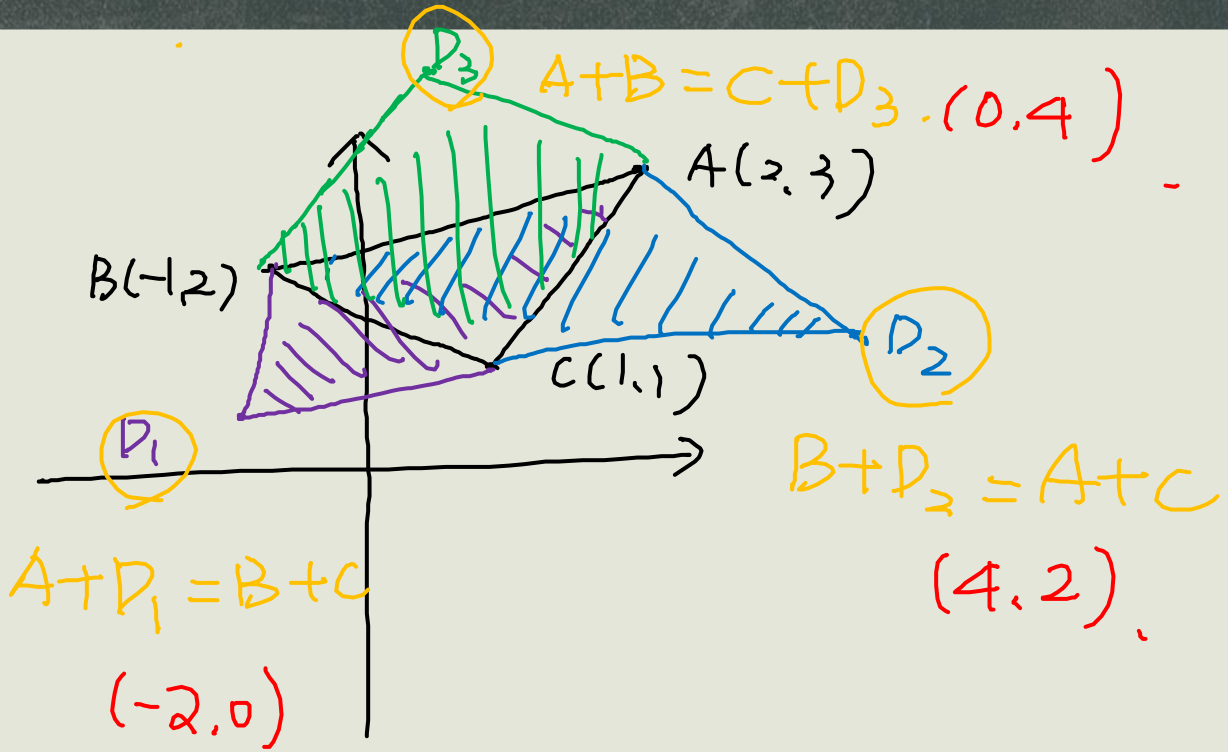
已知一平行四边形

A(2,3) B(-1,2) C(1,1)

求D点座标(要).

<sol> 3

"命名規則"



二、向量的運算

1. 設$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則：

   (1) $\vec{a}+\vec{b}=$ $\underline{(a_1+b_1,a_2+b_2)}$。

   (2) $\vec{a}-\vec{b}=$ $\underline{(a_1-b_1,a_2-b_2)}$。

$(1+2)+3=1+(2+3)$

2. 運算性質

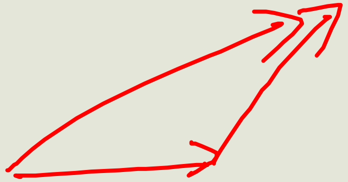
   設$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$為任意三個向量：

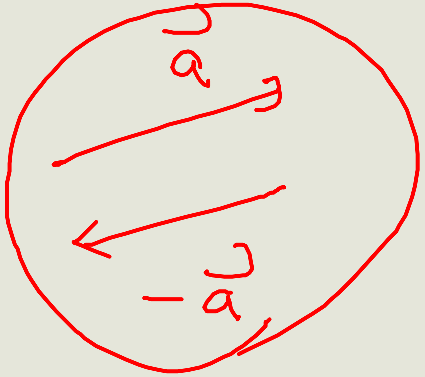
   (1) 交換律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

   (2) 結合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

   (3) 加零向量：$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

   (4) 加反向量：$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$





$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

例題5.

$\vec{a}=(2,6)$

$\vec{b}=(-1,2)$

$|\vec{a}|$

① $\vec{a}+\vec{b}=(2,6)+(-1,2)$

$=(2+(-1),\ 6+2)=(1,8)$ ※

② $\vec{a}-\vec{b}=(2,6)-(-1,2)=(3,4)$ #

③ $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ※

* $\vec{v}=(a,b)$

$|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2}$

例題6.

A $(0,-2)$

B $(2,3)$

C $(-1,3)$

D $(3,1)$

① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}=(2,5)$

$\overrightarrow{CD}=(4,-2)$

$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

$=(6,3)$

② $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

$=(-2,7)$

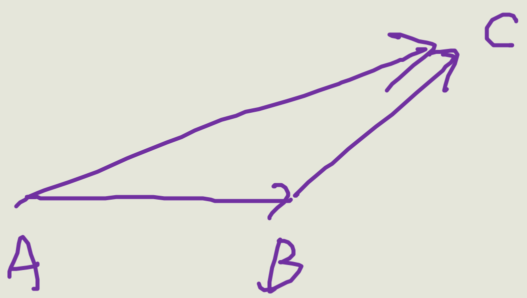
③ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}| = \sqrt{6^2+3^2}$

$=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

例題7.

$\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ $\overrightarrow{BC}=(0,-4)$.

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$



① $\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=(-3,4)+(0,-4)$

$=(-3,0)$ ※.

② $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-3)^2+0^2}$

$=3$.

$|\overrightarrow{AB}|=5$

$|\overrightarrow{BC}|=4$

$\therefore$ 周 $=5+3+4$

$=12$ ※

三、向量的實數積

1. 設$\vec{a}=(a_1,a_2)$為平面上任一向量、r為實數，則$r\vec{a}=(ra_1,ra_2)$。

2. 運算性質

設$\vec{a}$、$\vec{b}$為平面上兩個任意向量，r、s為實數：

(1) $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$ 分配律

(2) $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

(3) $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})=(r\vec{a})s$ 結合律

$4:2=$

3. 平行向量

(1) 設$\vec{a}$、$\vec{b}$為平面上兩個非零向量，若$\vec{a}$與$\vec{b}$的大小呈比例，則無論$\vec{a}$與$\vec{b}$是同向還是反向，均稱兩向量互為「平行向量」，記為$\vec{a}//\vec{b}$。

(2) 設$\vec{a}=(x_1,y_1)$、$\vec{b}=(x_2,y_2)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，則$\boxed{\vec{a}=r\vec{b}，即\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}}$。 係數積

$x_1y_2=x_2y_1$

(3) 平行分量呈比例。 $x_1:x_2=y_1:y_2$

$\vec{a}=r\vec{b}$

$\rightarrow (x_1,y_1)=(rx_2,ry_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1=rx_2 \\ y_1=ry_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{x_2}=r \\ \frac{y_1}{y_2}=r \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$

$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}$ // $\frac{x_2}{x_1}\neq\frac{y_1}{y_2}$

$2\vec{a}=\vec{b}$ 呈比例

$(3\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}})=\frac{1}{}$

例題8.

$A(-1,0)\ B(2,3)\ C(-3.4)$

求 $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

<sol>

$\overrightarrow{AB}=(3.3)$

$\overrightarrow{BC}=(-5,1)$

$\overrightarrow{CA}=(2,-4)$

$$3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$

$$=3(3.3)-2(-5.1)+(2.-4)$$

$$=(9.9)+(10,-2)+(2.-4)$$

$$=(21.3)$$ #

例題9.

$\vec{a}=(2,-1)$

$\vec{b}=(k,3)$

$\vec{a}\parallel\vec{b}$: $k=?$

<sol>

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$$

$$\frac{2}{k}=\frac{-1}{3}$$

$$-k=6$$

$$\therefore k=-6$$

$\boxed{\text{平行分量成比例}}$

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}$$

$$\frac{k}{2}=\frac{3}{-1}$$

$$-k=6$$

$$\therefore k=-6$$

四、單位向量

設$\vec{a}=(a_1,a_2)$，則與$\vec{a}$同向的單位向量為$\overrightarrow{u_a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(a_1,a_2)}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}}$。(將向量$\vec{a}$除上自身長度)

e.g. $\vec{a}=(3,4)$

$$\vec{u_a}=\frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{(3,4)}{5}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

例題10.

① $\vec{a}=(3,4)$

$\vec{u}_a=\frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{(3,4)}{5}=\boxed{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}$ #

Key:"單位向量"的"長度"為 1.

$\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}}=\sqrt{1}=1$ #

② "反" 長度=2 . $\vec{v}$.

$\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)\times 2=\left(-\frac{6}{5},-\frac{8}{5}\right)$ #

$=\sqrt{\frac{36}{25}+\frac{64}{25}}=\sqrt{\frac{100}{25}}=\sqrt{4}$

$=2$ #

$A(a,b)$ $B(c,d)$ $\overline{AB}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

5.26(四) 4th週考. 60, 130.

20%

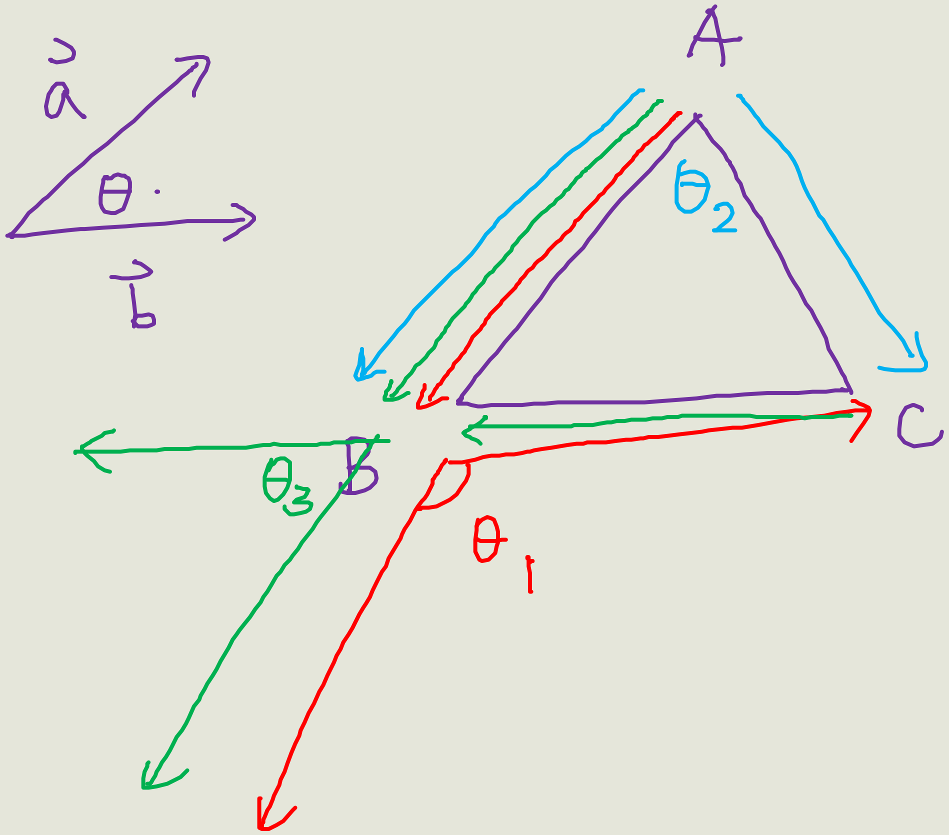
$\underline{35\%}$ = 20% 到課 + 15% 筆記

3-3 向量的內積

~~外積~~

一、向量的夾角

設$\vec{a}$、$\vec{b}$為兩個非零向量，今將$\vec{a}$、$\vec{b}$兩個向量"平移"並使兩向量的"起點"重合，則重合處所形成之交角即為兩向量的夾角，以θ表示，同時θ的範圍必定落在$0° \leq \theta < 180°$之間。



$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$的"夾角"：θ_1

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$的夾角：θ_2

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CB}$的夾角：θ_3

二、向量的內積

1. 內積符號的定義

設$\vec{a}$、$\vec{b}$為平面上的兩個非零向量，且兩向量的夾角為θ，則$\vec{a}$與$\vec{b}$的內積符號定為

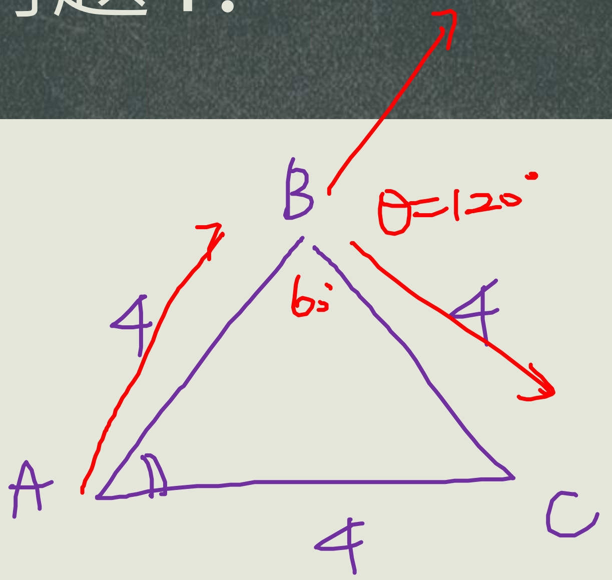
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

若$\vec{a}=(x_1,y_1)$、$\vec{b}=(x_2,y_2)$ dot ；則$\vec{a}$與$\vec{b}$的內積符號定為

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2 = 值.$$

2. 內積結果為純量。(實數)

例題1.



$$①\ \vec{AB}\cdot\vec{AC} = |\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot\cos\theta$$

$$= 4\cdot4\cdot\frac{1}{2} = \underline{8} \quad ※$$

$$②\ \vec{AB}\cdot\vec{BC} = |\vec{AB}||\vec{BC}|\cos\theta$$

$$= 4\cdot4\cdot\cos120^\circ$$

$$= 4\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{-8} \quad ※$$

例題2.

$\vec{a} = (-1, -2)$

$\vec{b} = (3, 4)$

<sol> $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 + (-8) = \underline{-11}$ #

3. 內積求夾角

(1) 設$\vec{a}$、$\vec{b}$為平面上的兩個非零向量，且兩向量的夾角為θ，則$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$。

(2) θ角的討論

$\theta \in$ I. ~~Ⅳ~~

$\cos\theta$值	角度類型
>0	銳角
$\boxed{=0}$	直角
<0	鈍角

proof: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \diamond$$

例題3.

$A(2,3)$

$B(1,5)$

$C(-1,4)$

① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=(-1,2)\cdot(-3,1)$

$=3+2$

$=5$ #

② $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\underline{\theta=45^\circ}$ #

三、向量內積的運算性質

1. 設$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$為平面上的三個任意向量，r為實數：

   (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 交換律

   (2) $(r\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(r\vec{b})=r(\vec{a}\cdot\vec{b})$ 結合律

   (3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 分配律

   (4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0$

proof：$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot \cancel{\cos\theta}$

$=|\vec{a}|^2\geq 0$

$x_1:x_2=y_1:y_2$　　$x_1:y_1=x_2:y_2$

2. 平行向量

設$\vec{a}=(x_1,y_1)$、$\vec{b}=(x_2,y_2)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，則$\vec{a}=r\vec{b}$，即$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$。

(平行分量呈比例)

3. 垂直向量

設$\vec{a}=(x_1,y_1)$、$\vec{b}=(x_2,y_2)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即$x_1x_2+y_1y_2=0$。

"$\cos 90^\circ=0$"

例題4.

$\vec{a} \perp \vec{b}$.

$\vec{a} = (k, 3)$

$\vec{b} = (k+2, -1)$

<sol> $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$k(k+2) - 3 = 0$

$k^2 + 2k - 3 = 0$

$(k-1)(k+3) = 0$

$\therefore k = 1, -3$ ___ ※

例題5.

$|\vec{a}|=2$ ✓

$|\vec{b}|=3$ ✓

$\theta=60^\circ$ ✓

① $\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

$=2\cdot3\cdot\cos60^\circ$

$=6\cdot\frac{1}{2}$

$=3$ ※.

② $|3\vec{a}-2\vec{b}|^2$.

$=|3\vec{a}|^2-2\cdot3\vec{a}\cdot2\vec{b}+|2\vec{b}|^2$.

$=9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\theta+4|\vec{b}|^2$

$=9\cdot2^2-12\cdot2\cdot3\cdot\cos60^\circ+4\cdot3^2=36$

$\therefore |3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{36}=6$ ※