第四章 圓與直線

授課科目：高職數學B2
授課班級：商管群
授課教師：湯詠傑
2022.05.15製

本章一共包含兩個小節

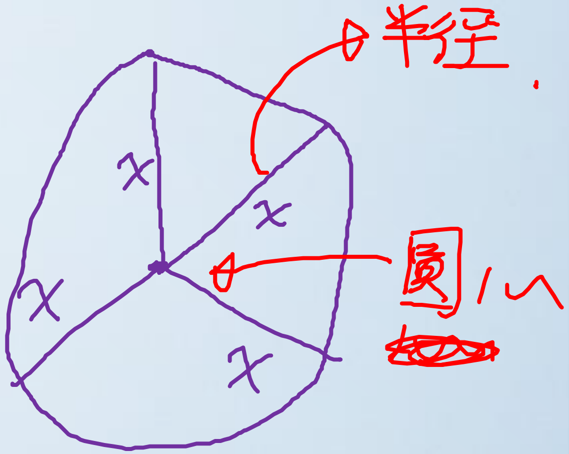
- 4-1 圓方程式
- 4-2 圓與直線的關係

4-1圓方程式

一、圓的定義

在平面上與一定點等距離的所有點形成的圖形即稱為「圓」。

其中定點稱為圓心、定點與圓上任一點的距離即稱為半徑。



二、圓的方程式

$x-h=0 \Rightarrow x=h$

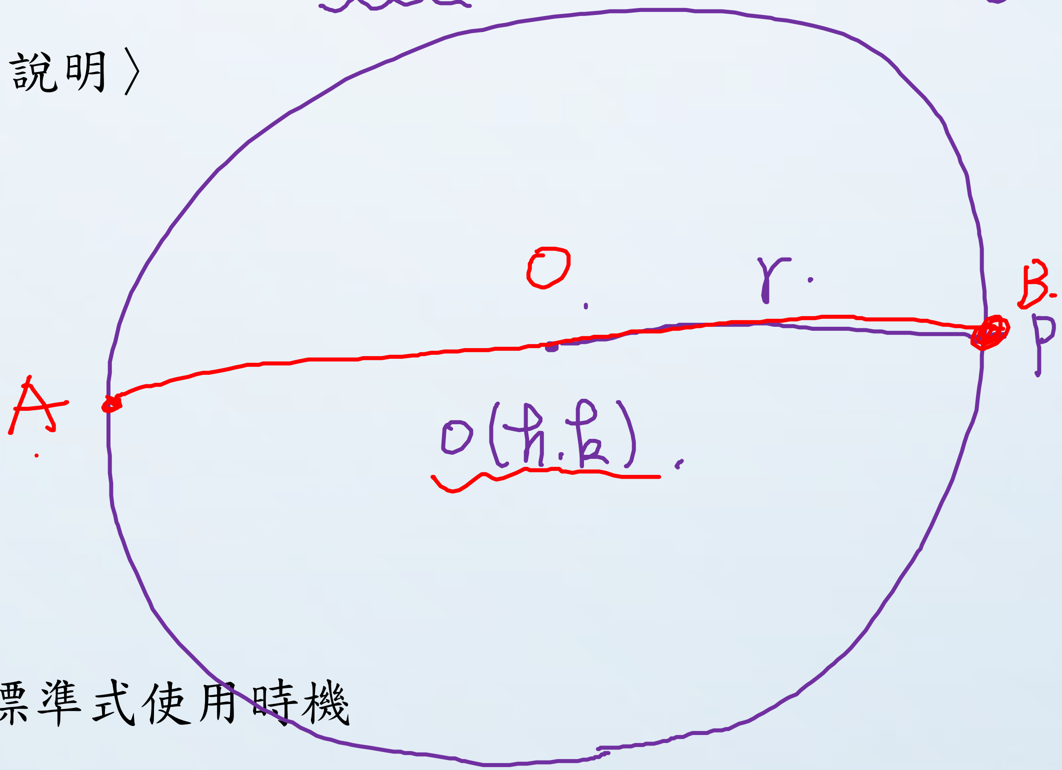
① $y-k=0 \Rightarrow y=k$　$O(h,k)$

1. 圓的標準式

(1) 記法

設圓C的圓心為$O(h,k)$、半徑為r，則圓C的標準式為$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

〈說明〉



$\overline{OP}=r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$

$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$ #

(2) 標準式使用時機

I. 已知圓心、半徑。

II. 已知直徑的兩端點。

(P. 174)例題1.

(1) $x^2+y^2=4$

(2) $(x-2)^2+(y+2)^2=5$

(3) $4(x-3)^2+4y^2=9$.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

<sol> (1) $x^2+y^2=2^2$

$\therefore O(0,0)$ $\underline{r=2}$.

(2) $(x-2)^2+(y+2)^2=5=(\sqrt{5})^2$

$\therefore O(2,-2)$ $r=\sqrt{5}$.

(3) $4(x-3)^2+4y^2=9$

$\Rightarrow (x-3)^2+y^2=\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\therefore O(3,0)$ $r=\frac{3}{2}$

(P. 175)例題2.

(1). circle

(2) $O(-4,3)$ $r=5$.

$(x-(-4))^2+(y-3)^2=5^2$

$\Rightarrow (x+4)^2+(y-3)^2=25=r^2$ ※

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$r^2=8$.

練2.

(2) $M(1,-2)$ $P(3,-4)$.

⟨sol⟩

$r^2=\overline{MP}^2$ $(x-1)^2+(y+2)^2=8$. ※

$(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$.

$(3-1)^2+(-4+2)^2=8=r^2$.

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=8$ ※

(P. 176)例題3.

A$(2,4)$ B$(-4,2)$

<sol>

O$(-1, 3)$

$(x+1)^2+(y-3)^2=r^2$

$(2,4) \Rightarrow 3^2+1^2=r^2=10$

$\therefore$ C: $(x+1)^2+(y-3)^2=10$ #

3

$(x-h)^2+(y-k)^2=\boxed{r^2=13}$

$(x-1)^2+(y-2)^2=13$

2. 圓的一般式

(1) 記法

將圓的標準式展開整理後，即為圓的一般式，以$x^2+y^2+dx+ey+f=0$的形式表示。

(2) 性質

未知數

ex. $ax^2+bx+c=0$

一元二次方程式.

I. 必為二元二次方程式。

最高次.

II. x^2係數 $=$ y^2係數

III. xy項係數為0

IV. 配方後為標準式。

3. 二者關係

標準式→一般式(透過展開)

一般式→標準式(透過配方)

標準式 $\overset{\text{展開}}{\underset{\text{配方}}{\rightleftharpoons}}$ 一般式

三、圓的形狀

1. 雙變數的配方法

$$x^2+y^2+dx+ey+f=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)^2=\frac{d^2+e^2-4f}{4}$$

〈說明〉

原則：① x^2係數$=0$

② 常數不變

$$x^2+dx+\frac{d^2}{4}+y^2+ey+\frac{e^2}{4}=-f+\frac{d^2}{4}+\frac{e^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)^2=\frac{d^2+e^2-4f}{4}$$

$$\therefore O\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$$

$$r=\frac{\sqrt{d^2+e^2-4f}}{2}.$$

(P. 177)例題4.

(P. 179)例題5.

2. 圓的判別

(1) 相異兩點決定一直線。

(2) 不共線相異三點決定一圓，且為外接圓。

Question: 是否形如$x^2+y^2+dx+ey+f=0$都是一個圓？

Ans:不一定

(3) 決定圓的因素：半徑大小

(4) 判別法則

Case. 1 一般式判別法：

I. 判別式：$D = d^2 + e^2 - 4f$

II. 判斷表格

判別式關係	圖形狀態
$D > 0$	一圓
$D = 0$	一點
$D < 0$	不存在(虛圓)

$$\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)^2=\frac{d^2+e^2-4f}{4}.$$

$$\therefore r=\frac{\sqrt{d^2+e^2-4f}}{2}$$

決定此圓的關鍵因素.

Case. 2 標準式判別法：

I. 判別式：$d = r^2$

II. 判斷表格

判別式關係	圖形狀態
$d > 0$	一圓
$d = 0$	一點
$d < 0$	不存在(虛圓)

(P. 180)例題6.

(P. 181)例題7.

(講義P. 135)例題5.

$P(4,6)$　$r=5$.　O在y軸上.

<sol>.

設$O(0,k)$.

$\Rightarrow x^2+(y-k)^2=25$.

$P(4,6) \Rightarrow 16+(6-k)^2=25$.

$\therefore \sqrt{(6-k)^2}=\sqrt{9}$.

$\therefore 6-k=\pm 3$.

$\therefore k=3, 9$.

$\therefore x^2+(y-3)^2=25$ or $x^2+(y-9)^2=25$ ※

練5.

Ans: $(x+10)^2+y^2=169$

or

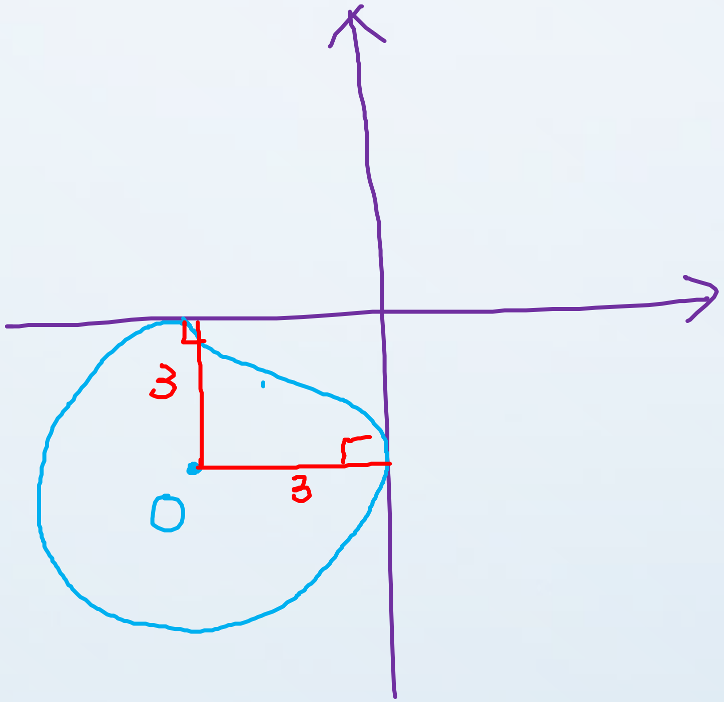
$(x-14)^2+y^2=169$.

(講義P.135)例題6.

<sol>

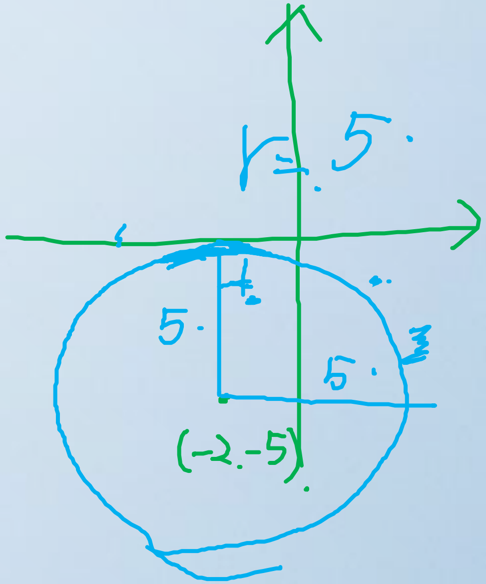
$\because r=3.\quad O(-3,-3).$

$\therefore (x+3)^2+(y+3)^2=9$ ※



練6.

$(x+2)^2+(y+5)^2=25.$

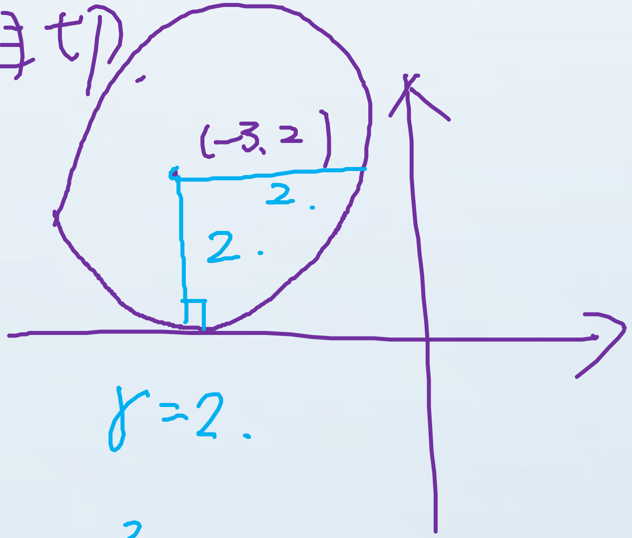


(講義P.138)例題10.

$x^2+6x+y^2-4y=-k.$

$\Rightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=\underline{13-k}=r^2.$

x軸相切.



$r=2.$

$r^2=4.$

$\therefore 13-k=4 \quad \therefore \underline{k=9}$ #

練10. $k=4$

(講義P. 138)例題11.

method 1: d^2+e^2-4f.

method 2: 配方

(1) $e^2=(-2)^2=4$.

$3^2+(-2)^2-4(-1)=9+4+4>0$. circle

$x^2+y^2\pm dx\pm ey\pm f$

(2) X

$\boxed{2^2+2^2-4(-2)}>0$.

$4+4+f$.

$-4(-2)$ circle

(3) point.

練11.

① circle

② X.

③ point.

(講義P. 139)例題13.

$C: x^2+y^2+2x-4y+k+1=0.$

$(x+1)^2+(y-2)^2=-1-k+1+4$

$=4-k.$

(1) $4-k>0 \Rightarrow k<4$

(2) $4-k=0 \Rightarrow k=4$

(3) $4-k<0 \Rightarrow k>4$ #.

練13.

(1) $k<13$

(2) $k=13$

(3) $k>13$.

(講義P. 140)例題15.

(-1.1) (1.3)

$\langle Sol \rangle$.

$O(h.0)$

$(x-h)^2+y^2=r^2$.

$\Rightarrow (-1-h)^2+1^2=r^2$.

$\Rightarrow (1-h)^2+3^2=r^2$

$\therefore ((-1)+(-h))^2+1=(1-h)^2+9$.

$1+2h+\cancel{h^2}+\cancel{1}=\cancel{1}-2h+\cancel{h^2}+9$

$4h=8 \Rightarrow \underline{h=2} \Rightarrow r^2=10$.

$\therefore C:(x-2)^2+y^2=\underline{10}$ ※

<u>練15</u>: $x^2+(y+1)^2=5$

6/6(一)
9:30～13:00
(含1小時輔).
單元小考3-3.
6/10(五).
時間待定.

（講義P. 141）例題16.

"$P(1,2)$
$C: x^2+y^2-4x-2y+1=0.$

<sol> $C: x^2-4x+4+y^2-2y+1=-1+4+1$

$(x-2)^2+(y-1)^2=2^2$

$O(2,1)$ $r=2.$

$L \Rightarrow O, P.$

$m_{\overline{OP}}=\frac{1-2}{2-1}=-1.$

$y=mx+b$ 斜率 斜截式.

$\therefore L: y=-x+b.$

$P(1,2)$ 代入 $\Rightarrow 1=-2+b \Rightarrow b=3$

$\therefore y=-x+3 \Rightarrow x+y-3=0$ "一般式"
ⵈ

$A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ 斜率求法

$m_{\overline{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$

練16. $2x+y+2=0.$

点圓：关係
線圓：切線方程式.(公式)

4-2 圓與直線的關係

一、點圓關係

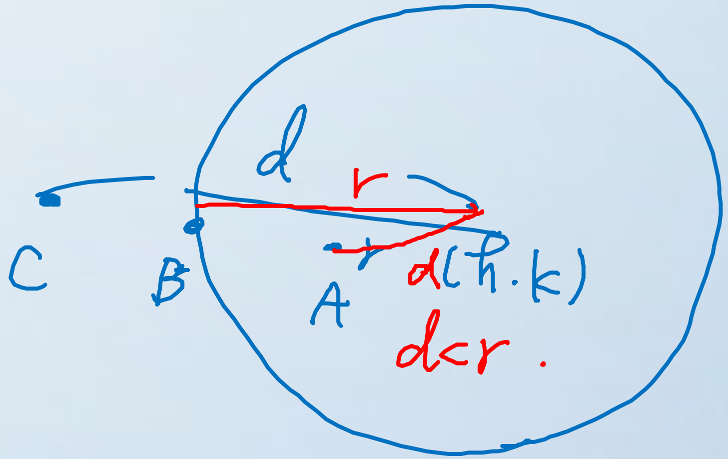
A.B.C　　$d >$ 半徑

設圓 $C: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，點 $P(x_0, y_0)$，假設 d 為圓心與點 P 的距離，則

比較	點的位置
$d > r$	圓外
$d = r$	圓上
$d < r$	圓內

C

從代數的角度來看，將點代入方程式後，得到的值可視為 d，利用表格比較仍然可得到結果。



(P. 186)例題1.

收到訊號 ⇒ 在 range 內

①裡面 ⇒ 位置在圓內

②邊界 ⇒ ······· 上.

(1) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$.

$(3,5) \Rightarrow 4^2+3^2>16 \Rightarrow$ 外

(x)

(2) $x^2+y^2+2x-4y-36=0$.

$(3,5) \Rightarrow$

$3^2+5^2+6-20-36=0$.

$9+25+6-56<0$.

⇒ 圓內 (收得到).

①圓方程式：標準式、

可 r.

②代數：$p(x_0,y_0)$ 代入 $\begin{matrix} >0 \\ =0 \\ <0. \end{matrix}$

二、線圓關係

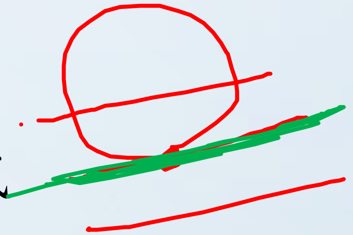
設圓C: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，直線L: $ax+by+c=0$。

則線圓關係的判別有兩種方式：

Case. 1 代數判別法　　$by=-ax-c \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

Step. 1 將直線L移項後代入圓C

Step. 2 將方程式化簡至$Ax^2+Bx+C=0$的形式



Step. 3 利用一元二次方程式的判別式$D=$ B^2-4AC 決定關係

"$ax^2+bx+c=0$"

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　$b^2-4ac=D$

$D>0 \Rightarrow$ 2相異實根

$D=0 \Rightarrow$ 二重根

$D<0 \Rightarrow$ 無解

判別式	代數關係	幾何關係	備註
$D>0$	兩相異實根	相交兩點(相割)	此兩點形成之線段為 弦 ；直線為 割線 。
$D=0$	(二重根) 兩相等實根	相切一點(相切)	此時直線L為 切線 。
$D<0$	無實根(兩虛根)	不相交(相離)	

Case. 2 幾何判別法

設d為圓心到直線L的距離，比較d與r的大小關係：

大小關係	幾何狀態
$d>r$	不相交（相離）
$d=r$	相切一點（相切）
$d<r$	相交兩點（相割）

$d>r.$

(P. 188)例題2.

$C: (x+2)^2+(y-3)^2=16.$

$(6,0) \longrightarrow (0,8)$.

$\boxed{L: 4x+3y-24=0.}$

$\boxed{O(-2,3)}$

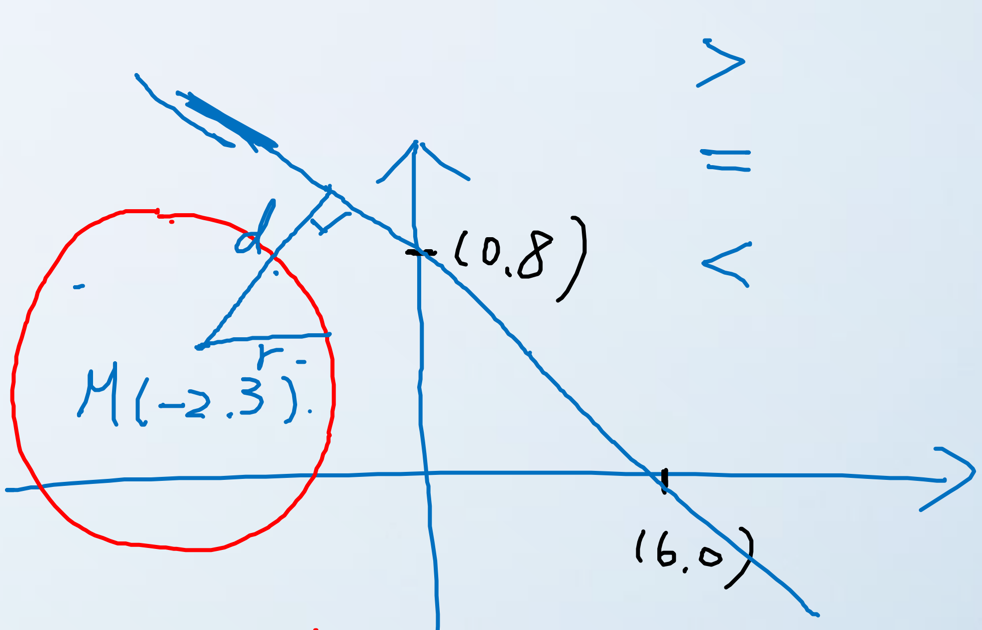
$r=4$.

<sol>

$>$

$=$

$<$



$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|-8+9-24|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{23}{5}>4.$$

安全

(P. 189)例題3.

$L: 4x-3y+k=0.$

$C: (x-2)^2+(y-3)^2=16.$ $\begin{cases} O(2,3) \\ r=4. \end{cases}$

相交二点 $d<r.$

<sol>.

method 1: 几何.

$O(2,3).$

$d(O,L)=\dfrac{|8-9+k|}{\underbrace{\sqrt{4^2+(-3)^2}}_{5}} < 4. \Rightarrow |k-1|<20. \Rightarrow -20<k-1<20.$

$\Rightarrow -19<k<21$ #

method 2: $3y=4x+k. \Rightarrow y=\dfrac{4x+k}{3}.$

$Ax^2+Bx+C=0.$

$B^2-4AC.$

練3: 相切 $\Rightarrow d=r.$

(P. 190) 例題4.

$C: (x-5)^2+(y-10)^2=25.$

$L: 3x-4y+5=0$

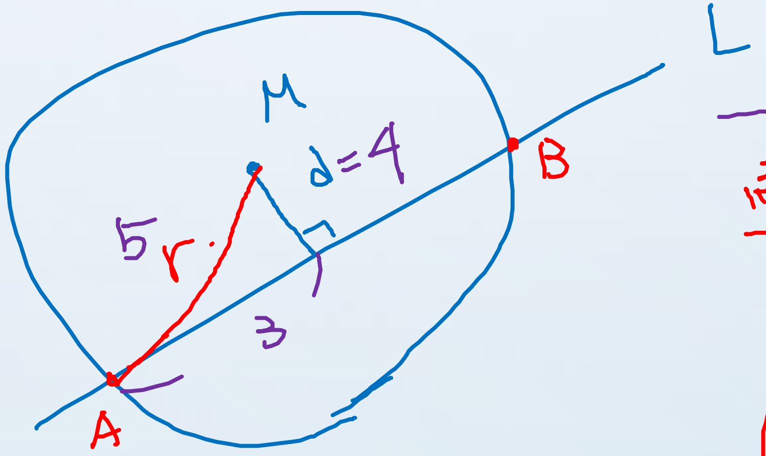
<solı>

$O(5,10)\quad r=5.$

$$d(O,L)=\frac{|15-40+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4.$$

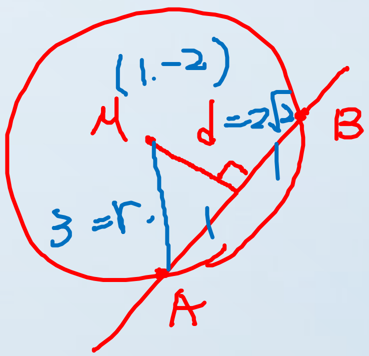
$0^2=0\times 0=0\quad \sqrt{4}=2\qquad \sqrt{0}=0$

$\therefore \overline{AB}=6.\quad \sqrt{1^2}=1$



練4.

$$d=\frac{|1-2+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$



$$\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{9-8}=1.$$

三、切線方程式

1. 直線假設法則

一般式

設直線$L: ax+by+c=0$，今平面上有另一條直線L_1，則：

（1）若$L_1//L$，則L_1: $ax+by+k=0$。

（2）若$L_1 \perp L$，則L_1: $bx-ay+k=0$。

$$m=-\frac{a}{b}$$

$$by=-ax-c$$

$$y=\boxed{-\frac{a}{b}}x-\frac{c}{a}$$

$$\| \quad m$$

$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$$

$$-\frac{a}{b} \cdot m = -1$$

$$\boxed{m=\frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow bx-ay+k=0$$

$$m=\frac{b}{-(-a)}=\frac{b}{a}$$

$$\text{※} \begin{cases} L_1 // L \Rightarrow m_1 = m \\ L_1 \perp L \Rightarrow m_1 \cdot m = -1 \end{cases}$$

2. 求切線方程式

檢查點$P(x_0, y_0)$與圓的關係，可得兩種情況：

Case. 1 點在圓上(必有1解)

$(x-h)(x_0-h)+(y-k)(y_0-k)=r^2$

(1) 標準式求法

設圓$C: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

則切線方程式為$(x-h)(x_0-h)+(y-k)(y_0-k)=r^2$

(2) 一般式求法

$x \cdot x_0+y \cdot y_0+d\frac{x+x_0}{2}+e\frac{y+y_0}{2}+f=0$

設圓$C: x^2+y^2+dx+ey+f=0$

則切線方程式為$xx_0+yy_0+\frac{x+x_0}{2}d+\frac{y+y_0}{2}e+f=0$

口訣：平方用取代，一次用平均

Case. 2 點在圓外(必有 2 解)

解法如下：

$P(x_0, y_0)$

Step. 1 假設切線方程式為點斜式$y - y_0 = m(x - x_0)$之形式並化為一般式。

Step. 2 求圓心到直線的距離公式。

圓心.

利用點到直線的距離公式$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = r}$解$m$，應要得到2個解。

Step. 3 m代回方程式後化為一般式，可得到切線方程式。：2條

※※※ 若只解出一個m，表示另一條直線的斜率不存在才有此情形發生。而斜率不存在的情形只有可能是 鉛直線 ，故另一條切線方程式應為$x = x_0$。

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{0}$.

e.g. 試求通過點$P(3,1)$且與圓$C: x^2+y^2=10$相切的切線方程式。

<sol>.

Step1. P的位置. $3^2+1^2=10$. $\Rightarrow$ 圓上.

Step2. 套公式.

$$x^2+y^2=10$$

$$\Rightarrow x\cdot x+y\cdot y=10$$

$$\Rightarrow 3\cdot x+1\cdot y=10$$

$$\Rightarrow \underline{3x+y-10=0}$$ ※

$y-y_0=m(x-x_0)$:點斜式.

e.g. 試求通過點$P(2,0)$且與圓$C: x^2+y^2=1$相切的切線方程式。

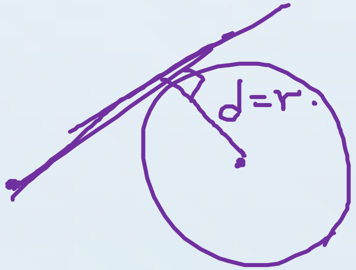
<sol>.

① $2^2+0^2>1 \Rightarrow$ 點在圓外.

② 設 $y-0=m(x-2)$.

$\Rightarrow y=mx-2m$

$\Rightarrow \boxed{mx-y-2m=0}$



③ $O(0,0)$ $r=1$.

∴ $d(O,L)$ r.

$\Rightarrow \dfrac{|0-0-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$\Rightarrow \dfrac{|-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow |-2m|=\sqrt{m^2+1}$.

$4m^2=m^2+1$

$\Rightarrow 3m^2=1$.

∴ $m^2=\frac{1}{3}$.

∴ $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$m=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x-y-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$

$\Rightarrow \sqrt{3}x-3y-2\sqrt{3}=0$ #

$m=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$.

$\Rightarrow \sqrt{3}x+3y-2\sqrt{3}=0$ #

e.g. 試求過點 $P(3,2)$ 且與圓 $C: x^2+y^2=9$ 相切的切線方程式。

<sol>: $p(3,2) \Rightarrow 3^2+2^2>9 \Rightarrow$ 圓外.

設 $L: y-2=m(x-3)$.

$\Rightarrow y-2=mx-3m$

$\Rightarrow mx-y+(2-3m)=0$.

$O(0,0)$ $r=3$.

$d(O,L)=r$.

$$\Rightarrow \frac{|0-0+2-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$$

$\Rightarrow |2-3m|=3\sqrt{m^2+1}$.

$\Rightarrow 4-12m+\cancel{9m^2}=\cancel{9m^2}+9$.

$\Rightarrow 12m=-5$

$\Rightarrow m=-\frac{5}{12}$ 代入 L

$\therefore -\frac{5}{12}x-y+2-3\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)=0$

$-5x-12y+24+15=0$

$\Rightarrow 5x+12y-39=0$ ※

另一條: $x-3=0$

(P. 191)例題5.

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$. $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

<sol>

$P(4,2)$代入. $(x-2)(4-2)+(y-1)(2-1)=5$

$(4-2)^2+(2-1)^2=2^2+1^2=5$.

$\Rightarrow$ ∴點在圓上.

$(x-h)(x_0-h)+(y-k)(y_0-k)=r^2$.

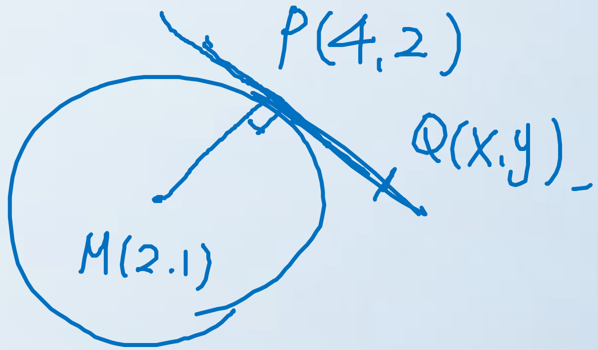
$(x-2)(4-2)+(y-1)(2-1)=5$.

$2x-4+y-1=5$.

∴ $2x+y-10=0$ #

$\boxed{x-4+5=0}$

method 2:



$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$.

$(2,1)(x-4,y-2)=0$.

∴ $2x-8+y-2=0$

$\Rightarrow 2x+y-10=0$ #

(P.192)例題6.

平行於 $\boxed{3x+4y+5=0}$

$(x-1)^2+(y+1)^2=9$

$O(1,-1)$ $r=3$

<sol>.

設 $L: 3x+4y+k=0$.

相切 $\Rightarrow d(O,L)=r$.

垂直：$L: -2x+y$.

$2x-y$

$$d=\frac{|3-4+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3.$$

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$\therefore |k-1|=5.$

$\therefore k-1=-5$, $k-1=5.$

$\therefore k=-4, 6.$

$$\therefore L: \begin{cases} 3x+4y-4=0 \\ 3x+4y+6=0 \end{cases}$$ ※

3. 切線段長

設點$P(x_0,y_0)$為圓點C外一點。

(1) 標準式求法

若圓$C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，則切線段長為$\boxed{\underline{\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2}}}$。

(2) 一般式求法

若圓$C:x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則切線段長為$\underline{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+dx_0+ey_0+f}}$。

〈說明〉

proof :

(P. 194)例題7.

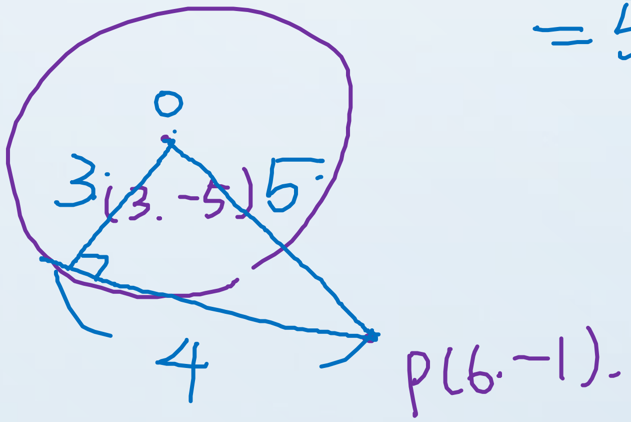
$P(6,-1)$.

$C_1 : (x-3)^2+(y+5)^2=9$.

$C_2 : x^2+y^2+6x-2y+6=0$.

$O(3,-5)$ $r=3$.

$$\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$



(講義P.146)例題3.

$(-3, 2)$ 在 $x^2+y^2+2x-4y+k=0$ 上

求 $k=?$

<sol>.

$$(-3)^2+2^2-2\cdot 3-4\cdot 2+k=0.$$

$$9+4-6-8+k=0.$$

$$\therefore \underline{k=1} \text{ ※}$$

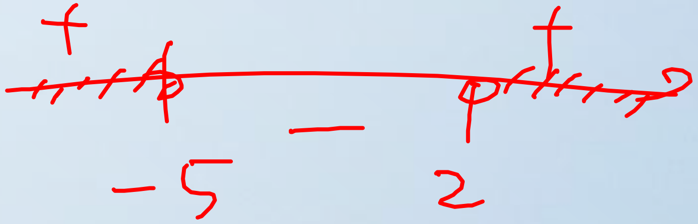
$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+4y=5 \end{cases}$$

$k<-5$, $k>2$.

$$x^2+3x-10>0$$

$$(x-2)(x+5)>0$$

∴



(講義P. 146)例題4.

$P(2,6)$. $\quad x^2+y^2+6x-2y-15=0$.

$\overline{OP}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

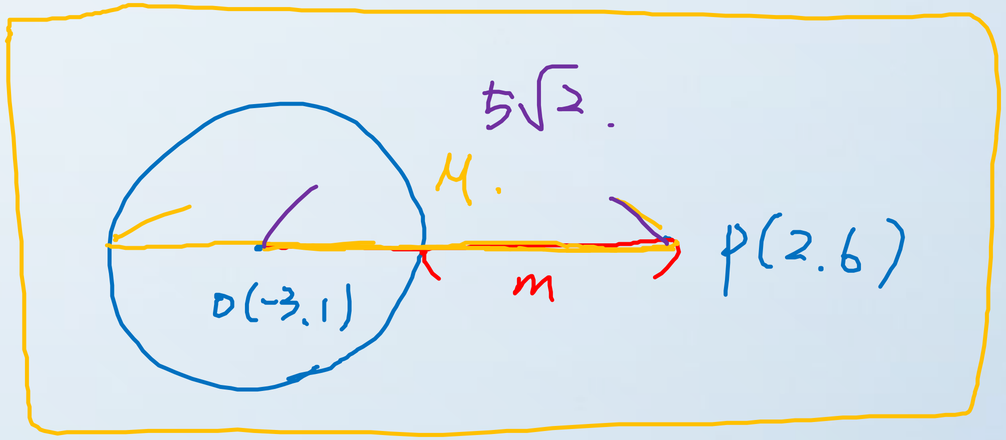
<sol>.

$x^2+6x+9+y^2-2y+1=15+9+1$

$\Rightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=25$.

$\therefore O(-3,1) \quad r=5$.

$\begin{cases} m=\overline{OP}-r=5\sqrt{2}-5 \# \\ M=\overline{OP}+r=5\sqrt{2}+5 \# \end{cases}$



將P(2.6)代入

$\Rightarrow 2^2+6^2+12-12-15>0$.

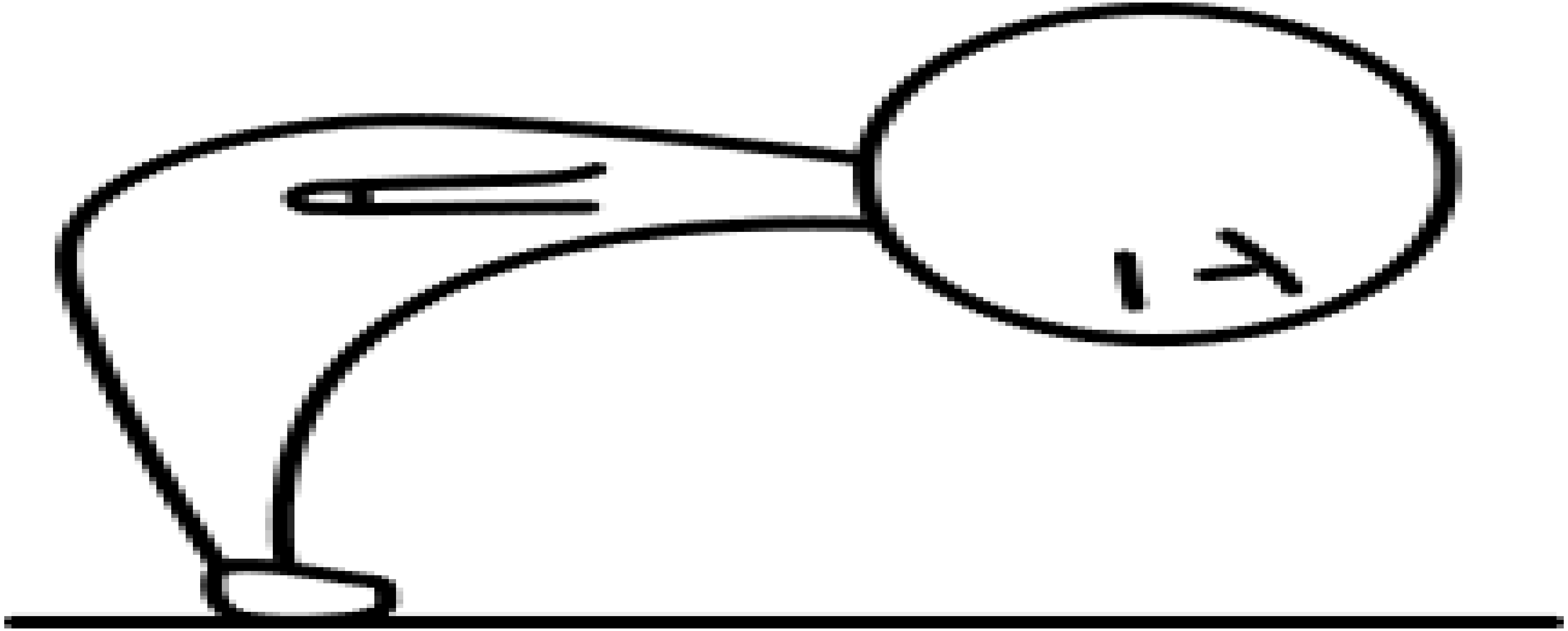
$\therefore$ P在圓外

(講義P.149)例題7.

(講義P.154)例題13.

(講義P. 156)例題16.

(講義P. 156)例題17.



下台一鞠躬

~Thank you~