

一、填充題：

1. 已知三點 $A(4, 4)$, $B(5, 3)$, $C(-4, 0)$, 則 $\triangle ABC$ 的外接圓方程式為_____。

答案： $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$

解析：令圓方程式為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

$A(4, 4)$, $B(5, 3)$, $C(-4, 0)$ 代入

$$16 + 16 + 4d + 4e + f = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$25 + 9 + 5d + 3e + f = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$16 - 4d + f = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

解 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ 得

$$d = -2, e = 0, f = -24$$

2. 已知點 $A(-2, 1)$ 為圓 $C: x^2 + y^2 + 10x - 6y + k = 0$ 外一點，則實數 k 的範圍為_____。

答案： $21 < k < 34$

解析： $C: (x+5)^2 + (y-3)^2 = 34 - k$ 為一圓，

圓心 $O(-5, 3)$ ，半徑 $\sqrt{34 - k}$

$$\therefore 34 - k > 0 \Rightarrow k < 34 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{又 } \overline{OA} = \sqrt{(-5+2)^2 + (3-1)^2} > \sqrt{34 - k},$$

$$13 > \sqrt{34 - k} \Rightarrow k > 21 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

\therefore 由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 知 $21 < k < 34$

3. 平面上的動點 P 到一定點 $(2, -1)$ 距離固定為 4，則 P 之軌跡方程式為_____。

答案： $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$

解析：令 $P(x, y)$

\therefore 到 $(2, -1)$ 距離為 4

$$\therefore (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$$

4. 若方程式 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ 的圖形是一個圓，求實數 k 的範圍為_____。

答案： $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

解析： $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -k^2 + 1 + 4$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = -k^2 + 5$$

$$-k^2 + 5 > 0 \Rightarrow k^2 - 5 < 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$$

5. 設圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ ，若圓心為 (h, k) ，半徑為 r ，則 $h + k + r =$ _____。

答案：4

解析： $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 1 + 4 + 4$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

$$\therefore h = -1, k = 2, r = 3$$

$$h + k + r = 4$$

6. 試求以 $A(5, 5)$ 為圓心且與圓 $C: x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$ 相外切的圓方程式為_____。

答案： $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

解析： $\sqrt{(5+1)^2 + (5+3)^2} - 5 = 5$

$$\therefore \text{所求方程式為 } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

7. 設 $A(4, 1)$, $B(0, 5)$ 為坐標平面上兩點，若 \overline{AB} 為圓的一弦且距圓心 $\sqrt{8}$ ，則圓方程式為_____。

答案： $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$ 或 $x^2 + (y-1)^2 = 16$

解析： $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4$ 且 A 、 B 中點為 $(2, 3)$

令圓心 (x, y)

$$\overline{CM}^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$$

$$\overline{CB}^2 = x^2 + (y-5)^2 = 16$$

$$\Rightarrow (x, y) = (4, 5) \text{ 或 } (0, 1)$$

$$\therefore \text{圓} : (x-4)^2 + (y-5)^2 = 16 \text{ 或 } (x-0)^2 + (y-1)^2 = 16$$

8. 求圓心在 $Q(2, -3)$ 且與直線 $L: 3x - 4y + 2 = 0$ 相切的圓方程式為_____。(用標準式表示)

$$\text{答案} : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

$$\text{解析} : r = \frac{|6+12+2|}{5} = 4$$

$$\therefore \text{圓方程式為 } (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

9. 設點 $P(x, y)$ 在圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 上，則

(1) 點 $A(1, -3)$ 與圓 C 的關係為_____。(請填入「圓內」、「圓外」或「圓上」)

(2) $\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}$ 的最大值為_____。

$$\text{答案} : (1) \text{ 圓外} ; (2) 8$$

$$\text{解析} : (1) C : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-1)^2} = 5 > 3$$

$\therefore C$ 在圓外

$$(2) \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = (x, y) \text{ 與 } (1, -3) \text{ 的距離}$$

如圖最大值 = 8

