第二章 三角函數的應用

授課科目：高職數學B2
授課班級：商管群
授課教師：湯詠傑
2022.04.14製

2-1 正弦定理與餘弦定理

我們將介紹：

- 三角形面積公式
- 餘弦定理
- 正弦定理
- 平行四邊形定理

一、三角形面積公式

1. 三角形面積公式

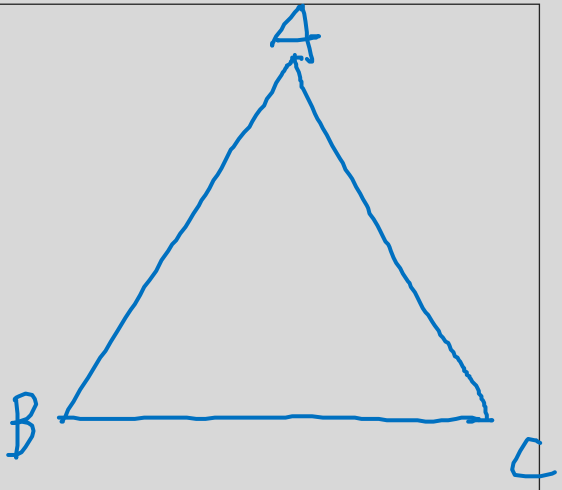
(1) 公式

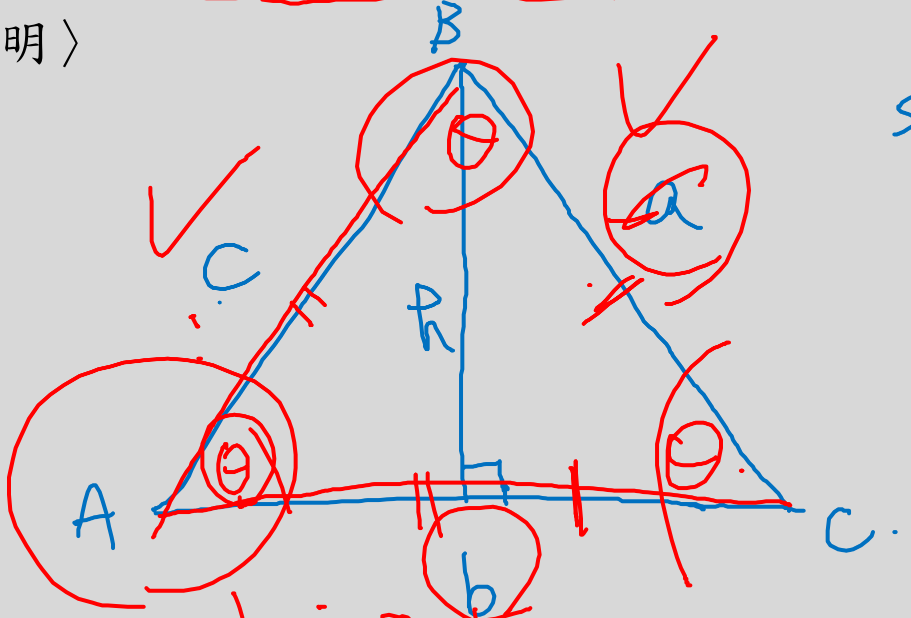
在ΔABC中，∠A、∠B、∠C的對邊長分別為a、b、c，則：

$\Delta ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$。

(2) 使用時機：兩邊夾一角求面積

〈說明〉





$\frac{1}{2}\sin\theta\cdot b\cdot c$

$\sin A=\frac{h}{c}\Rightarrow h=c\sin A$

$\therefore\Delta ABC=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h$

$=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin A$ ※

2. 海龍公式

(1) 定義

設ΔABC的三邊長分別為a、b、c，則$\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$。周長一半

(2) 使用時機：已知三邊求面積

外心

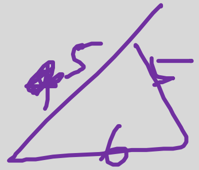
3. 設ΔABC的三邊長分別為a、b、c，外接圓半徑為R，則$\Delta ABC=\dfrac{abc}{4R}$。

4. 設ΔABC的三邊長分別為a、b、c，內切圓半徑為r，則$\Delta ABC=rS$，其中$S=\dfrac{a+b+c}{2}$。

〈說明〉

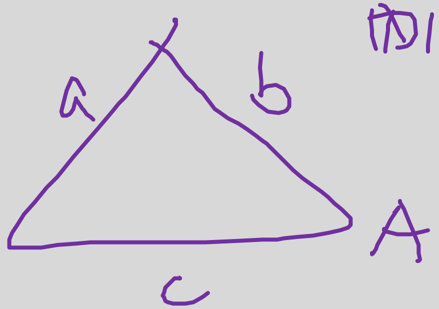
內心

e.g.



$S=\sqrt{8\times3\times3\times2}$

$=12$



$\Delta ABC=\frac{1}{2}rS=S$

$\Delta ABC=\frac{1}{2}bc\sin A$

cosθ

二、餘弦定理

在ΔABC中，∠A、∠B、∠C的對邊長分別為a、b、c，則：

1. 第一型表示法：

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

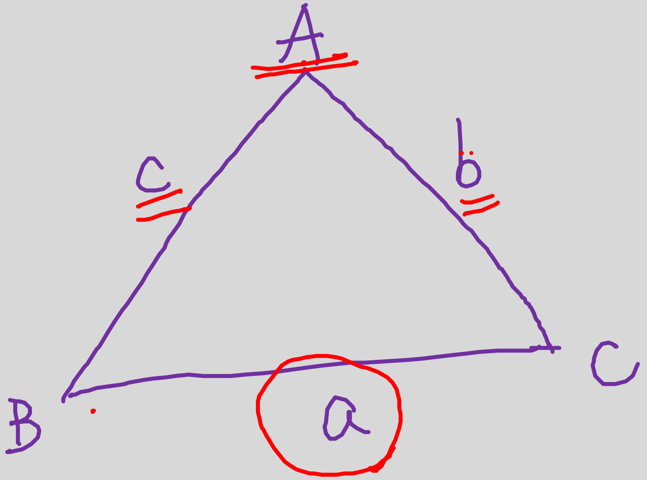
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$\cos 90^\circ = 0$

※使用時機：兩邊夾一角求第三邊

〈說明〉



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$

移項 $\Rightarrow 2bc\cdot\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

$$\boxed{\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

2. 第二型表示法

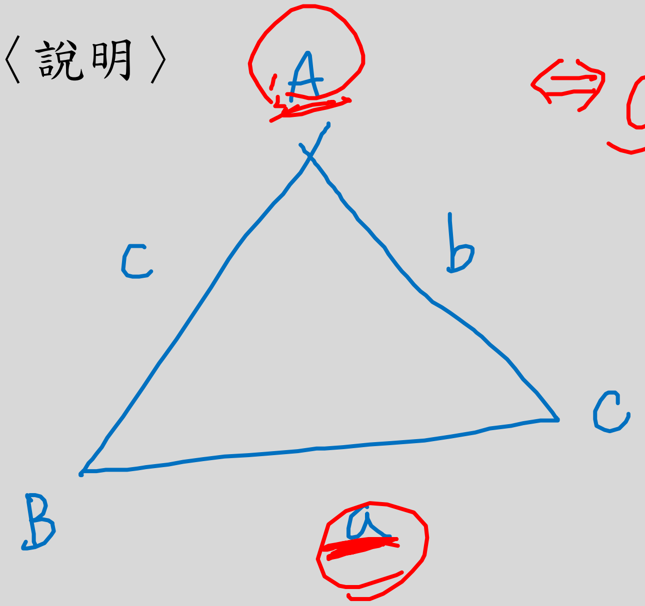
$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

※使用時機：已知三邊求夾角

〈說明〉



$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

三、正弦定理

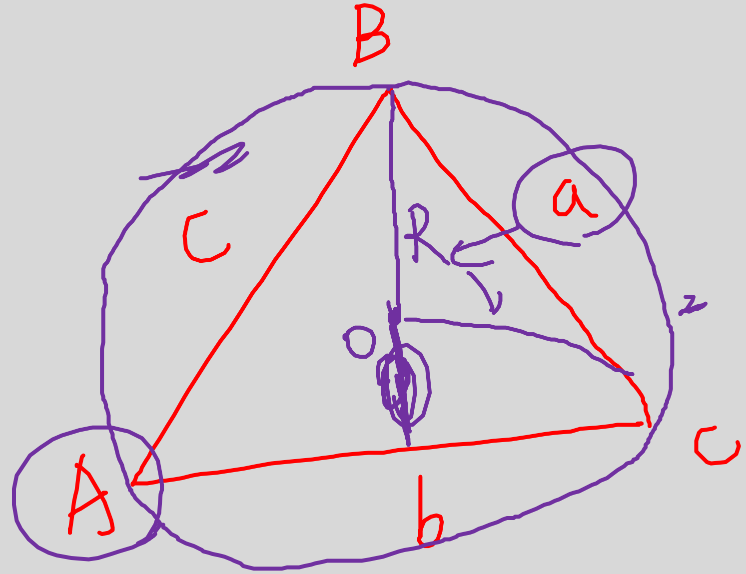
在ΔABC中，∠A、∠B、∠C的對邊長分別為a、b、c，若R為其外接圓半徑，則：

1. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
2. $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

※注意：邊長比≠角度比 。

〈說明〉

1



$$\frac{a}{\sin A} = 2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$\because \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{1}{2R}$

(2) $\Rightarrow \therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

$\therefore a = 2R\sin A$

$b = 2R\sin B$

$c = 2R\sin C$

$\therefore a : b : c$

$= \cancel{2R}\sin A : \cancel{2R}\sin B : \cancel{2R}\sin C$

$= \sin A : \sin B : \sin C$

★★★正弦、餘弦的使用時機：

先看餘弦定理，若餘弦定理無法使用，則使用正弦定理。

四、平行四邊形定理

已知一平行四邊形$ABCD$，其對角線分別為$\overline{AC}$及$\overline{BD}$，則$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$。

〈說明〉

2-2 三角測量

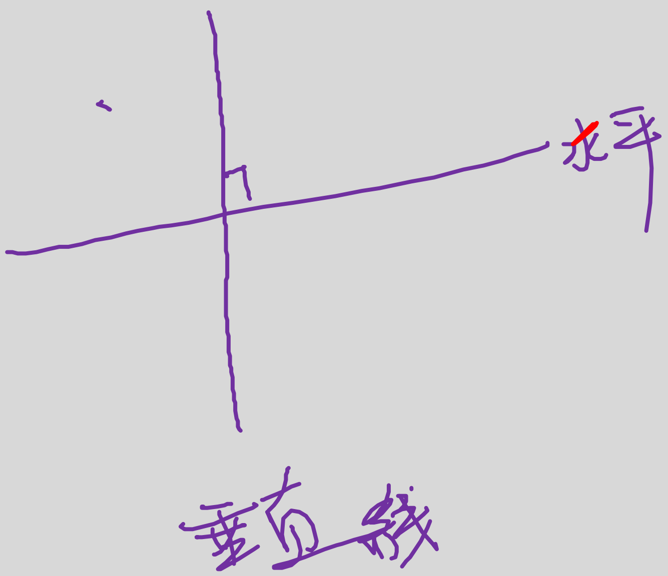
我們將介紹這些技能：

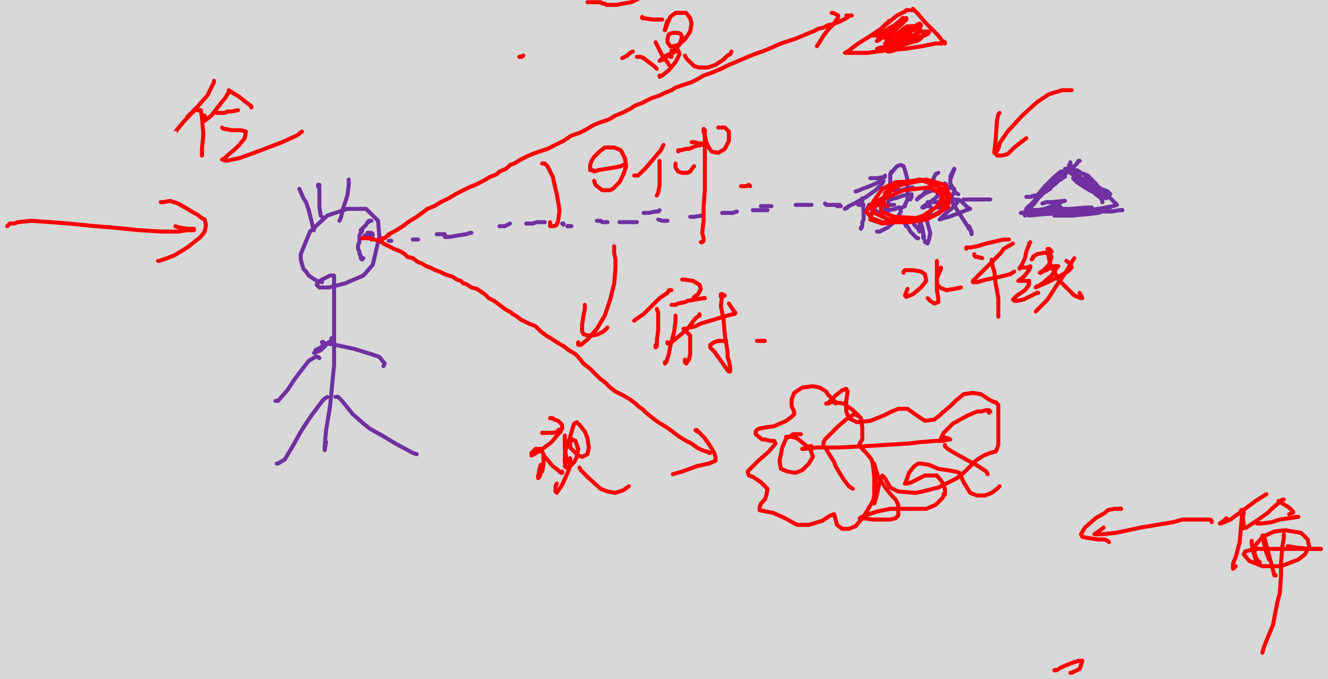
- 測量用名詞
- 方位
- 題型解析

一、測量用名詞

1. 鉛垂線：與地心連線的直線。
2. 水平線：與鉛垂線垂直的直線。
3. 視線：眼睛與目標物的連線。
4. 仰角與俯角：

   測量者朝向目標物的「視線」在水平線的上方，稱為仰角；若在水平線下方，稱為俯角。

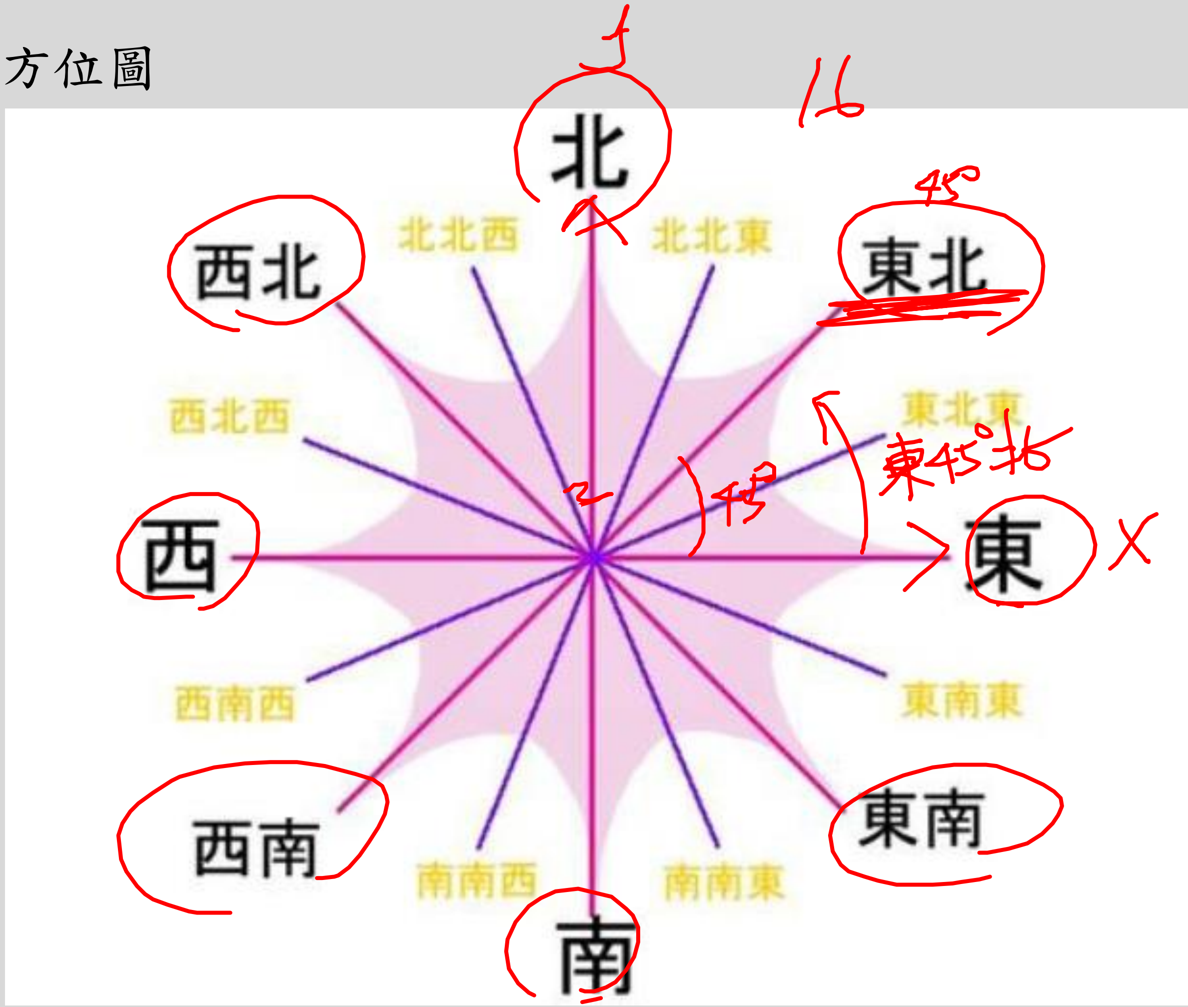




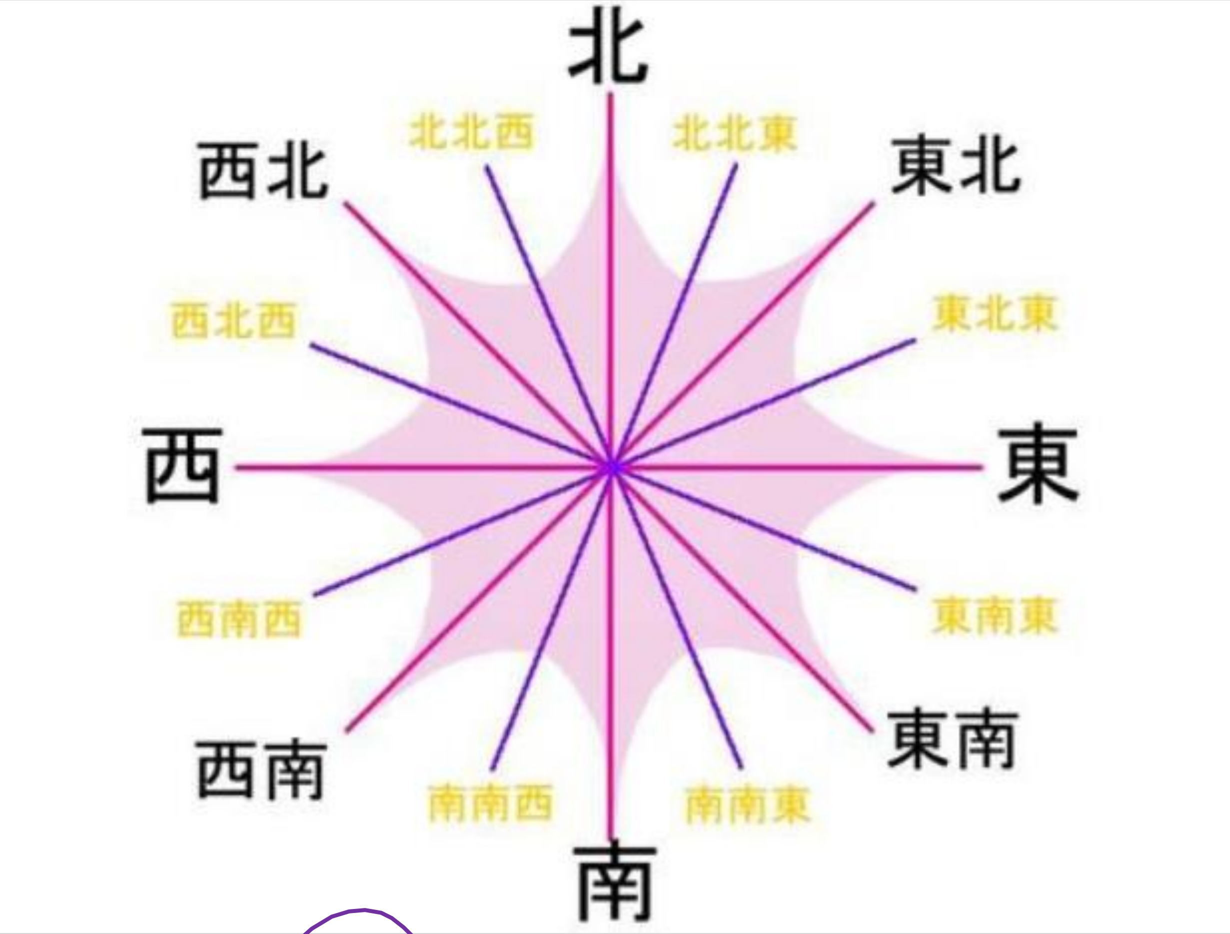
二、方位

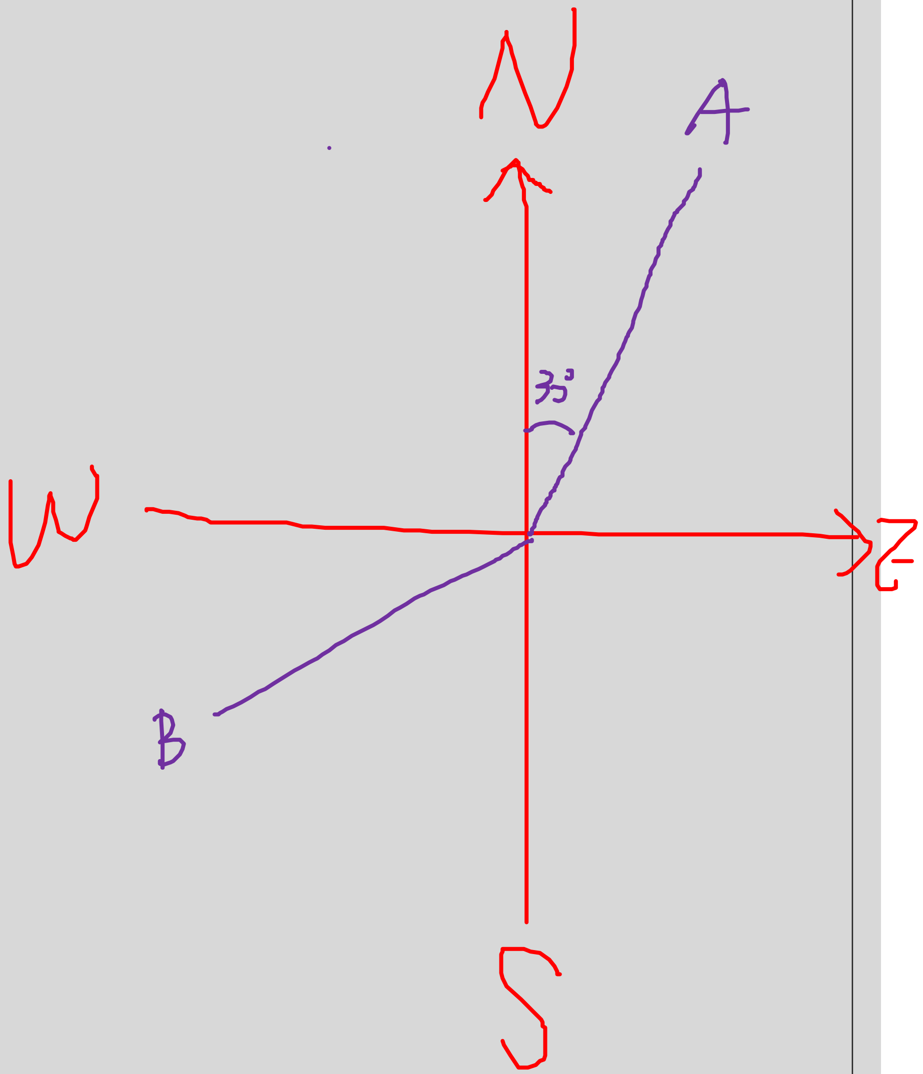
1. 定義：觀測者與目標物之間的相對方位。

2. 方位圖



3. 方位角





A的名字為北30°東；B的名字為南45°西(西45°南)。

三、三角測量的題型解析

- 二維
  - 直角：畢氏定理
  - 非直角
    - 正弦定理
    - 餘弦定理
- 三維：化為二維再分析

平

平（二維）

立（三維）

$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{0}=\times$

$\tan\frac{\pi}{2}$, $\tan\frac{3}{2}\pi$

$\sin\frac{\pi}{2}=$

$\tan 0=0$, $\tan\pi=0$

$\times$

感謝您！