4-2 圓與直線的關係

一、點圓關係

設圓$C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，點$P(x_0,y_0)$，假設d為圓心與點P的距離，則

比較	點的位置
$d>r$	
$d=r$	
$d<r$	

從代數的角度來看，將點代入方程式後，得到的值可視為d，利用表格比較仍然可得到結果。

二、線圓關係

設圓$C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，直線$L: ax+by+c=0$。

則線圓關係的判別有兩種方式：

Case.1 代數判別法

Step.1 將直線L移項後代入圓C

Step.2 將方程式化簡至$Ax^2+Bx+C=0$的形式

Step.3 利用一元二次方程式的判別式$D=$________________決定關係。

判別式	代數關係	幾何關係	備註
$D>0$			此兩點形成之線段為___；直線為______。
$D=0$			此時直線 L 為______。
$D<0$			

Case.2 幾何判別法

設d為圓心到直線L的距離，比較d與r的大小關係：

大小關係	幾何狀態
$d>r$	
$d=r$	
$d<r$	

三、切線方程式

1. 直線假設法則

設直線$L: ax+by+c=0$，今平面上有另一條直線L_1，則：

(1) 若$L_1//L$，則$L_1: ax+by+k=0$。

(2) 若$L_1\perp L$，則$L_1: bx-ay+k=0$。

2. 求切線方程式

檢查點$P(x_0, y_0)$與圓的關係，可得兩種情況：

Case. 1 點在圓上(必有___解)

(1) 標準式求法

設圓$C: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

則切線方程式為$(x-h)(x_0-h)+(y-k)(y_0-k)=r^2$

(2) 一般式求法

設圓$C: x^2+y^2+dx+ey+f=0$

則切線方程式為$xx_0+yy_0+\frac{x+x_0}{2}d+\frac{y+y_0}{2}e+f=0$

口訣：

Case. 2 點在圓外(必有___解)

解法如下：

Step. 1 假設切線方程式為點斜式$y-y_0=m(x-x_0)$之形式並化為一般式。

Step. 2 求圓心到直線的距離公式。

利用點到直線的距離公式$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$解$m$，應要得到 2 個解。

Step. 3 m代回方程式後化為一般式，可得到切線方程式。

※※※ 若只解出一個m，表示另一條直線的斜率不存在才有此情形發生。而斜率不存在的情形只有可能是_________，故另一條切線方程式應為$x=x_0$。

e. g. 試求通過點$P(3,1)$且與圓$C: x^2+y^2=10$相切的切線方程式。

e. g. 試求通過點$P(2,0)$且與圓$C: x^2+y^2=1$相切的切線方程式。

e. g. 試求過點$P(3,2)$且與圓$C: x^2+y^2=9$相切的切線方程式。

3. 切線段長

設點$P(x_0, y_0)$為圓點C外一點。

(1) 標準式求法

若圓$C: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，則切線段長為_____________________。

(2) 一般式求法

若圓$C: x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則切線段長為_____________________。

〈說明〉