

一、填充題：

1. 有一圓 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ ，直線 $3x+4y=k$ 與圓 C 相交兩點，且 k 為整數，則 k 有_____個。

答案：29

解析：已知圓心 $O(1, -2)$ ， $L: 3x+4y=k$

$$d(O, L) = \frac{|3-8-k|}{5} < 3$$

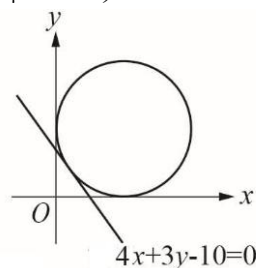
$$|-5-k| < 15$$

$$-15 < k+5 < 15$$

$$-20 < k < 10$$

$\therefore k = -19, -18, \dots, 9$ ，共 29 個

2. 如附圖，一圓同時與 x ， y 軸及直線 $L: 4x+3y-10=0$ 相切，試求圓的半徑 $r=_____$ 。(其中 $r>1$)



答案：5

解析：由圖可知圓心為 (r, r)

$$\frac{|4r+3r-10|}{5} = r$$

$$|7r-10| = 5r$$

$$7r-10 = \pm 5r$$

$$2r=10 \text{ 或 } 12r=10$$

$$r=5 \text{ 或 } r=\frac{5}{6}$$

3. 已知直線 $L: kx-y-k-1=0$ 與圓 $C: x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 相交於相異兩點，求 k 的範圍為_____。

答案： $k>0$ 或 $k<-\frac{4}{3}$

解析： $x^2+y^2-4x-2y+1=0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

已知圓心 $O(2, 1)$

$$d(O, L) = \frac{|2k-1-k-1|}{\sqrt{k^2+1}} < 2$$

$$\Rightarrow |k-2| < 2\sqrt{k^2+1}$$

$$\text{兩邊平方} \Rightarrow 3k^2+4k > 0$$

$$\Rightarrow k > 0 \text{ 或 } k < -\frac{4}{3}$$

4. 求過圓 $x^2+y^2=7$ 外一點 $(4, 4)$ 的切線段長為_____。

答案：5

解析： $\sqrt{4^2+4^2-7} = \sqrt{25} = 5$ 。

5. 已知 $k < 3$ ，若過點 $(-5, k)$ 恰可作唯一的一條切線與圓： $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 8$ 相切，則此條切線方程式為_____。

答案： $x+y+3=0$

解析：∵只能作一切線

∴ $(-5, k)$ 在圓上

$$\Rightarrow (-5+3)^2 + (k-4)^2 = 8$$

$$\Rightarrow k=6 \text{ (不合) 或 } 2$$

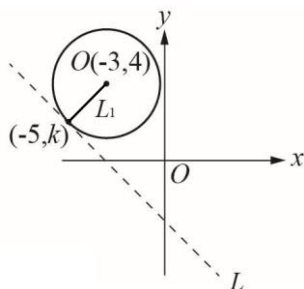
∵ $L \perp L_1$

$$\therefore m_L \times m_{L_1} = -1$$

$$m_{L_1} = \frac{4-2}{-3-(-5)} = 1$$

$$\therefore m_L = -1$$

$$\therefore L: y-2 = -(x+5) \Rightarrow x+y+3=0$$



6. 有一圓 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ ，過點 $(-1, -3)$ 且與圓 C 相切的切線方程式_____。

答案： $3x+4y+15=0$

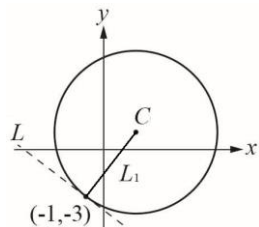
解析： $(-1, -3)$ 代入 $C: (-1-2)^2 + (-3-1)^2 = 25$

∴ $(-1, -3)$ 在圓上

$$\therefore L \perp L_1, \text{ 又 } m_1 = \frac{1-(-3)}{2-(-1)} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore m_L = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow L: y+3 = -\frac{3}{4}(x+1) \Rightarrow 3x+4y+15=0$$



7. 求過點 $(2, -1)$ 且與圓 $2x^2 + 2y^2 = 5x$ 相切之直線方程式為_____。

答案： $3x-4y-10=0$

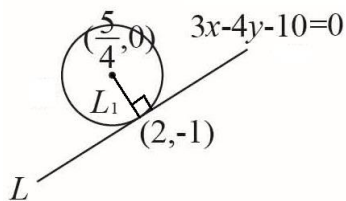
$$\text{解析：} 2x^2 + 2y^2 = 5x \Rightarrow (x - \frac{5}{4})^2 + y^2 = (\frac{5}{4})^2$$

$$(2, -1) \text{ 代入方程式 } 8+2=10$$

∴ $(2, -1)$ 在圓上

$$\therefore L \perp L_1 \text{ 且 } m_1 = \frac{0-(-1)}{\frac{5}{4}-2} = -\frac{4}{3} \therefore m_L: \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow L: y+1 = \frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow 3x-4y-10=0$$



8. 求平行 $L: x+y=1$ 且與 $C: x^2+y^2=2$ 相切的直線方程式為_____。

答案： $x+y+2=0$ 或 $x+y-2=0$

解析：令平行 $L: x+y=1$ 之方程式 $L_1: x+y+k=0$

圓心 $O(0,0)$

$$d(O, L) = \frac{|k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$k = \pm 2$$

$$\therefore L_1: x+y+2=0 \text{ 或 } x+y-2=0$$

9. 求通過 $P(5,5)$ 與圓 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ 相切的直線方程式為_____。

答案： $7x-24y+85=0$, $x-5=0$

解析：已知圓心 $O(2,1)$

$$\text{令 } L: y-5=m(x-5) \Rightarrow mx-y-5m+5=0$$

$$d(O, L) = \frac{|2m-1-5m+5|}{\sqrt{m^2+1}} = 3 \Rightarrow m = \frac{7}{24}$$

另一條為鉛垂線

$$\therefore L: 7x-24y+85=0 \text{ 或 } x-5=0$$

10. 求過 $(-2,4)$ 且與 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 相切的直線方程式為_____。

答案： $3x+4y-10=0$ 或 $x+2=0$

$$\text{解析：} x^2+y^2+2x-4y+4=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=1$$

圓心 $O(-1,2)$ ，設過 $(-2,4)$ 的方程式 $L: y-4=m(x+2)$

$$\Rightarrow mx-y+2m+4=0$$

$$d(O, L) = \frac{|-m-2+2m+4|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore L: 3x+4y-10=0 \text{ 或 } x+2=0$$