

1-1 等差數列與等差級數

一、等差數列

1. 何謂數列

將一串數字排成一行(無須排序)，即稱為「數列」。

此數列的第一個數稱為「_____」或「_____」、第二個數稱為「_____」…依此類推。
第 n 個數稱為「_____」，亦稱作「_____」或「_____」，以符號 $\langle a_n \rangle$ 表示。

$$\langle a_n \rangle : a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

※ 習慣上，我們會以一般項來代表一個數列，而且如果知道了一個數列的一般項，也就相當於知道了全部的數列。

2. 等差數列

(1) 定義

若一數列滿足「相鄰兩項的差值為定值」，則稱此數列為「等差數列」。

此差值即稱為公差，通常以 d 表示。

(2) 公式

I. 公差： $d = \text{後項} - \text{前項}$

II. 項數： $\frac{a_n - a_1}{d} + 1$

III. 一般項： $a_n = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

〈說明〉

(3) 等差中項

若 a 、 b 、 c 三數成等差數列，則 b 稱為 a 與 c 的等差中項，即 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

〈說明〉

3. 遞迴數列

(1) 何謂遞迴關係式

用來描述數列中項與項之間的變化關係。

若數列的第 n 項是由其前一項所決定的，這種一般項的表示法，即稱為「遞迴關係式」。

此種數列即稱為「遞迴數列」。

e. g. 費波那契數列。

$$\langle a_n \rangle : \begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$$

(2) 等差遞迴數列

$$\langle a_n \rangle : \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d, n \geq 2 \end{cases}$$

〈說明〉

二、等差級數

1. 何謂級數

將數列 $\langle a_n \rangle$ 中的前 n 項用「+」號連接而成的式子稱為級數，以符號 S_n 表示。

即 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (前 n 項的和)。

2. 公式

若 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列， a_1 為首項、 d 為公差，則：

$$(1) S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

$$(2) S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n \text{ (中項} \times \text{項數)}$$

$$(3) S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1) \times d]}{2}$$

$$(4) \text{遞迴式} : \begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

〈說明〉

3. 常用的級數和公式

$$(1) 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

三、黃金比例

1. 何謂黃金比例？

長、寬之間的比例約為 1.618，即符合「黃金比例」。

2. 由費波那契提出。

e. g. 鸚鵡螺、帕德嫩神殿、《蒙娜麗莎》、公司商標

〈說明〉