1-1 等差數列與等差級數

一、等差數列

1. 何謂數列

將一串數字排成一列(無須排序)，即稱為「數列」。

此數列的第一個數稱為「__________」或「_______」、第二個數稱為「__________」…依此類推。

第n個數稱為「__________」，亦稱作「__________」或「_______」，以符號〈a_n〉表示。

$$\langle a_n \rangle : a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \cdots\ ,\ a_n$$

※ 習慣上，我們會以一般項來代表一個數列，而且如果知道了一個數列的一般項，也就相當於知道了全部的數列。

2. 等差數列

(1) 定義

若一數列滿足「相鄰兩項的差值為定值」，則稱此數列為「等差數列」。

此差值即稱為公差，通常以d表示。

(2) 公式

I. 公差：$d=$後項$-$前項

II. 項數：$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$

III. 一般項：$a_n=$______________________$=$______________________。

〈說明〉

(3) 等差中項

若a、b、c三數成等差數列，則b稱為a與c的等差中項，即$b=$______________。

〈說明〉

3. 遞迴數列

（1）何謂遞迴關係式

用來描述數列中項與項之間的變化關係。

若數列的第n項是由其前一項所決定的，這種一般項的表示法，即稱為「遞迴關係式」。

此種數列即稱為「遞迴數列」。

e.g. 費波那契數列。

$$\langle a_n \rangle : \begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ n \geq 3 \end{cases}$$

（2）等差遞迴數列

$$\langle a_n \rangle : \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d, \ n \geq 2 \end{cases}$$

〈說明〉

二、等差級數

1. 何謂級數

將數列〈a_n〉中的前n項用「＋」號連接而成的式子稱為級數，以符號S_n表示。

即$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$(前$n$項的和)。

2. 公式

若〈a_n〉為等差數列，a_1為首項、d為公差，則：

（1）$S_n = \frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$

（2）$S_n = (\frac{a_1+a_n}{2}) \times n$（中項×項數）

（3）$S_n = \frac{n[2a_1+(n-1)\times d]}{2}$

（4）遞迴式：$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

〈說明〉

3. 常用的級數和公式

（1）$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

（2）$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

（3）$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

三、黃金比例

1. 何謂黃金比例？
長、寬之間的比例約為 1.618，即符合「黃金比例」。

2. 由費波那契提出。
e.g. 鸚鵡螺、帕德嫩神殿、《蒙娜麗莎》、公司商標
〈說明〉