

4-4 單元小考解析

一、單選題：(6 小題，每格 4 分，共 24 分)

1. () 在同一直角坐標平面上， $y = \log_2 x$ 與 $y = 2^x$ 的圖形共有幾個交點？ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

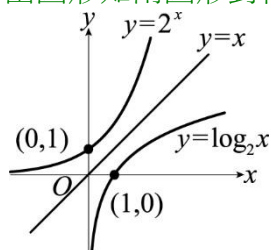
【學習卷】

解答

A

解析

由圖形知兩圖形對稱於直線 $y = x$ 且沒有交點



2. () 下列有關 $\log_a b$ 與 $\log_a c$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 之敘述，何者為真？ (A) 若 $b > c$ ，則 $\log_a b > \log_a c$ (B) 若 $\log_a b > \log_a c$ ，則 $b > c$ (C) $\log_a b$ 為遞增函數 (D) 若 $0 < a < 1$ 且 $b > 7$ ，則 $\log_a b < 0$

【學習卷】

解答

D

解析

(A) 當 $a > 1$ 時 \Rightarrow 若 $b > c$ ，則 $\log_a b > \log_a c$ ，此敘述才成立

(B) 當 $a > 1$ 時 \Rightarrow 若 $\log_a b > \log_a c$ ，則 $b > c$ ，此敘述才成立

(C) 當 $a > 1$ 時 \Rightarrow $\log_a b$ 為遞增函數，此敘述才成立

(D) 當 $0 < a < 1$ 時 \Rightarrow $\log_a b$ 為遞減函數， $\log_a b < \log_a 7 < \log_a 1 = 0 \Rightarrow \log_a b < 0$

\therefore 選項(D)為真

3. () 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則對數函數 $f(x) = \log_a x$ 的圖形必通過點 $(a, 1)$ 及點 (A) $(1, 0)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(0, 1)$ (D) $(0, -1)$

【學習卷】

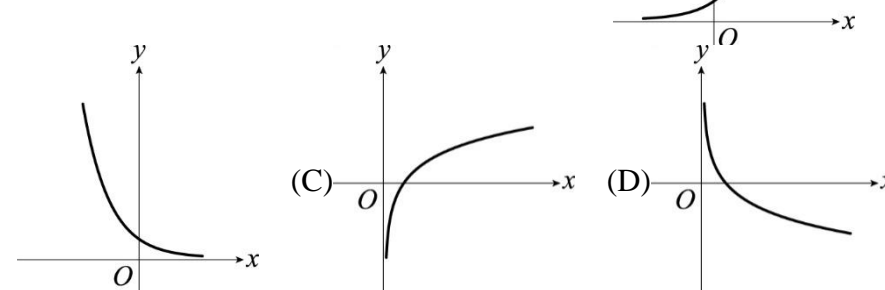
解答

A

解析

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則對數函數 $f(x) = \log_a x$ 的圖形必通過點 $(a, 1)$ 及點 $(1, 0)$

4. () 下列何者可能是 $f(x) = \log_2 x$ 的圖形？ (A) (B)

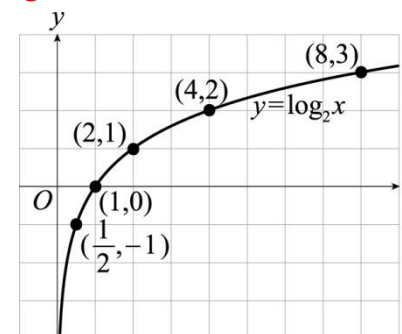


【學習卷】

解答

C

解析



5. () 設 $a = 3\log_4 3$ 、 $b = 2\log_2 3$ 、 $c = \log_2 8$ ，則 (A) $a > b > c$ (B) $b > c > a$ (C) $c > b > a$ (D) $b > a > c$

【學習卷】

解答

B

解析

$a = 3\log_4 3 = \log_4 27$ ， $b = 2\log_2 3 = \log_2 9 = \log_4 81$ ， $c = \log_2 8 = \log_4 64$

\therefore 底數 $4 > 1$ ， $y = \log_4 x$ 為遞增函數，又 $81 > 64 > 27$

$\therefore b > c > a$

6. () 已知 $f(x) = \log_2 x$ ，若 $f(a) = 2$ 且 $f(b) = 4$ ，則 $f(ab) =$ (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

【學習卷】

解答

C

解析

$f(ab) = \log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b = f(a) + f(b) = 2 + 4 = 6$

二、填充題：(7 小題，每格 7 分，共 49 分)

1. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，若 $\log_a 3 + \log_a 27 = 4$ ，則 $a =$ _____。

【學習卷】

解答

3

解析 $\log_a 3 + \log_a 27 = 4$
 $\Rightarrow \log_a (3 \times 27) = 4$
 $\Rightarrow \log_a 81 = 4$
 即 $a^4 = 81$
 所以 $a = 3$

2. 設函數 $f(x) = \log_a x$ 且 $a > 1$ ，則 $f(x)$ 為_____函數。(填入遞增或遞減)

【學習卷】

解答 遞增

解析 若函數 $f(x) = \log_a x$ 且 $a > 1$ ，則 $f(x)$ 為遞增函數

3. 設 $a = \log_{\frac{1}{3}} 4$ 、 $b = \log_{\frac{1}{3}} 5$ 、 $c = \log_{\frac{1}{3}} 8$ ，則 a 、 b 、 c 的大小關係為_____。

【學習卷】

解答 $a > b > c$

解析 \because 底數 $\frac{1}{3} < 1$
 $\therefore y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 為遞減函數

$$\text{又 } 4 < 5 < 8 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 4 > \log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{3}} 8$$

即 $a > b > c$

4. 設函數 $f(x) = \log_a x$ 且 $0 < a < 1$ ，則 $f(x)$ 為_____函數。(填入遞增或遞減)

【學習卷】

解答 遞減

解析 若函數 $f(x) = \log_a x$ 且 $0 < a < 1$ ，則 $f(x)$ 為遞減函數

5. 設 $a = \log_2 15$ 、 $b = \log_2 9$ 、 $c = \log_2 13$ ，則 a 、 b 、 c 的大小關係為_____。

【學習卷】

解答 $a > c > b$

解析 \because 底數 $2 > 1$ $\therefore y = \log_2 x$ 為遞增函數
 又 $9 < 13 < 15 \Rightarrow \log_2 9 < \log_2 13 < \log_2 15$ ，即 $b < c < a \Rightarrow a > c > b$

6. 方程式 $\log_2(x+2) = 3$ 之解為_____。

【學習卷】

解答 $x = 6$

解析 因為 $3 = \log_2 2^3$ ，原式可化為 $\log_2(x+2) = \log_2 2^3 = \log_2 8$
 比較真數，得 $x+2 = 8$ ，即 $x = 6$
 因為 $x = 6$ 滿足真數 $x+2 > 0$
 所以方程式的解為 $x = 6$

7. 對數方程式 $\log_{10} x + \log_{10}(x-3) = 1$ ，則 $x =$ _____。

【學習卷】

解答 5

解析 原式 $\Rightarrow \log_{10}[x(x-3)] = 1 = \log_{10} 10$
 $\Rightarrow x(x-3) = 10$
 $\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$
 $\Rightarrow (x-5)(x+2) = 0$
 $\Rightarrow x = 5$ 或 $x = -2$ (不合 \because 代入使真數小於 0)
 $\therefore x = 5$

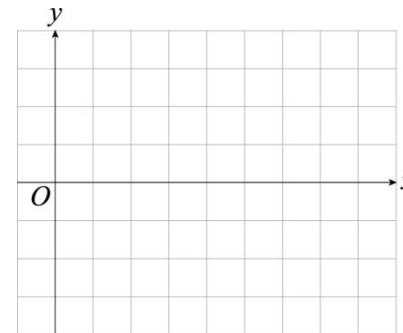
三、計算題：(3 小題，每題 9 分，共 27 分)

1.

(1) 試問 $y = \log_2 x$ 為遞增或是遞減函數？(2 分)

(2) 試問 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 為遞增或是遞減函數？(2 分)

(3) 試將 $y = \log_2 x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形畫在下方直角坐標平面中。(5 分)



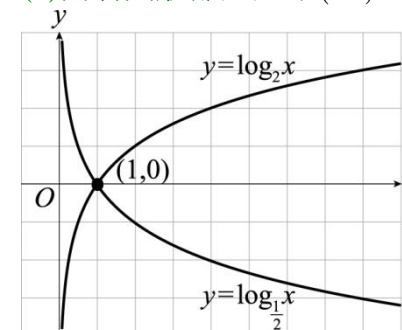
【學習卷】

解答 (1) 遞增函數 (2) 遞減函數 (3) 見解析

解析 (1) $y = \log_2 x$ 為遞增函數

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 為遞減函數

(3) 兩者圖形都通過點 (1, 0)



2. 若 $\log_{10} x = \frac{1}{2}$ 與 $\log_{10} y = -4$ ，則 $\log_{10} x^2 y$ 之值為何？

【學習卷】

解答 -3

解析

$$\log_{10} x^2 y = \log_{10} x^2 + \log_{10} y = 2\log_{10} x + \log_{10} y = 2 \times \frac{1}{2} + (-4) = -3$$

3. 棒球比賽中，若一支加油瓦斯汽笛測得的聲音強度 I 為 10^{-5} (W/m²)，則其產生的噪音是多少分貝？（提示：聲音分貝數公式為 $d(I) = 10 \times \log_{10} \frac{I}{I_0}$ ，其中 $I_0 = 10^{-12}$ (W/m²)）

【學習卷】

解答

70 分貝

解析

由聲音分貝數公式 $d(I) = 10 \times \log_{10} \frac{I}{I_0}$ 可得

$$d(10^{-5}) = 10 \times \log_{10} \frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 10 \times \log_{10} 10^7 = 10 \times 7 = 70 \text{ (分貝)}$$