

一、計算題

1. 化簡下列各式：

(1) $10^3 \times 10^7$

(2) $(\sqrt{6} + \sqrt{7})^{2021} (\sqrt{6} - \sqrt{7})^{2021}$

【super 講義-基本題-學生練習】

解答

(1) 10^{10}

(2) -1

解析

(1) $10^3 \times 10^7 = 10^{3+7} = 10^{10}$

(2) $(\sqrt{6} + \sqrt{7})^{2021} (\sqrt{6} - \sqrt{7})^{2021} = [(\sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{6} - \sqrt{7})]^{2021} = (6 - 7)^{2021} = (-1)^{2021} = -1$

2. 試化簡下列各式：

(1) $4 \times 4^2 \times 4^2$ 。

(2) $(3^2)^{-3}$ 。

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4^3$ 。

【light 講義-老師講解】

解答

(1) 1024 (2) $\frac{1}{729}$

(3) 8

解析

(1) $4 \times 4^2 \times 4^2 = 4^{1+2+2} = 4^5 = 1024$

(2) $(3^2)^{-3} = 3^{2 \times (-3)} = 3^{-6} = \frac{1}{729}$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4^3 = \left(\frac{1}{2} \times 4\right)^3 = 2^3 = 8$

3. 試化簡下列各式：

(1) $27^{\frac{2}{3}}$

(2) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$

(3) $81^{-1.5}$ 。

【light 講義-學生練習】

解答

(1) 9 (2) $\frac{3}{4}$

(3) $\frac{1}{729}$

解析

(1) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

(2) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3^2}{4^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$

(3) $81^{-1.5} = 81^{-\frac{3}{2}} = (9^2)^{-\frac{3}{2}} = 9^{-3} = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$

4. 試求下列各式之值：

(1) $5^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0$

(2) $2^{-3} + \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$

(3) $\left(\frac{1}{16}\right)^2 \times 8^3$

【課本習題】

解答

(1) 2

(2) $\frac{11}{16}$

(3) 2

解析

(1) $5^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 + 1 = 2$

(2) $2^{-3} + \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{2^3} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{9}{16} = \frac{2}{16} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$

$$(3) \left(\frac{1}{16}\right)^2 \times 8^3 = \left(\frac{1}{2^4}\right)^2 \times (2^3)^3 = (2^{-4})^2 \times (2^3)^3 = 2^{-8} \times 2^9 = 2^{-8+9} = 2^1 = 2$$

5. 設 $3^{x^2-1} = 81^{x-1}$ ，則 x 之值為何？

【super 講義-基本題-老師講解】

解答 $x=1$ 或 $x=3$

解析 原式 $\Rightarrow 3^{x^2-1} = 3^{4(x-1)}$
 $\Rightarrow x^2 - 1 = 4(x-1) \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
 $\Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$
 $\therefore x=1$ 或 $x=3$

6. 設 $x + x^{-1} = 3$ ，則 $x^2 + x^{-2} = ?$

【super 講義-進階題-學生練習】

解答 7

解析 $x^2 + x^{-2} = (x + x^{-1})^2 - 2 \times x \times x^{-1} = 3^2 - 2 = 7$

7. 試比較下列各數之大小：

(1) $a = 3^{150}$ ， $b = 5^{100}$ ， $c = 9^{50}$

(2) $a = \sqrt[15]{5}$ ， $b = \sqrt[10]{4}$ ， $c = \sqrt[6]{2}$

【super 講義-進階題-學生練習】

解答 (1) $a > b > c$

(2) $b > c > a$

解析 (1) $a = (3^3)^{50} = 27^{50}$

$$b = 5^{100} = (5^2)^{50} = 25^{50}$$

$$c = 9^{50}$$

故 $a > b > c$

$$(2) a = \sqrt[15]{5} = 5^{\frac{1}{15}} = (5^2)^{\frac{1}{30}}$$

$$b = \sqrt[10]{4} = 4^{\frac{1}{10}} = (4^3)^{\frac{1}{30}}$$

$$c = \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}} = (2^5)^{\frac{1}{30}}$$

$$\therefore 4^3 > 2^5 > 5^2 \Rightarrow (4^3)^{\frac{1}{30}} > (2^5)^{\frac{1}{30}} > (5^2)^{\frac{1}{30}}$$

即 $b > c > a$

8. 設 $a^{2x} = 3$ ，則 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = ?$

【super 講義-進階題-老師講解】

解答 $\frac{7}{3}$

解析 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{(a^x + a^{-x})(a^{2x} - 1 + a^{-2x})}{a^x + a^{-x}} = a^{2x} - 1 + a^{-2x} = 3 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

9. 現代智慧型手機幾乎人手一支，在等車、用餐等場合時常可見人們低頭玩遊戲的場景。坊間有幾款遊戲標榜輕鬆簡單打發時間用，遊戲內容概述如下：玩家任意將 2 隻 1 級的怪獸移至一起就能進化成 1 隻 2 級怪獸；將 2 隻 2 級怪獸移至一起就能進化成 1 隻 3 級怪獸，以此類推，而遊戲宣稱，若能合成 10 級怪獸，每隻 10 級怪獸加贈 1 隻限量版怪獸。今有一玩家現有 1024 隻 1 級怪獸，請問他全部完成合成後，可以獲得幾隻限量版怪獸？

【素養題】

解答 2 隻限量版怪獸

解析 每 2 隻可以合成一隻下一級怪獸

也就是 2 級需要 2 隻 1 級，3 級需要 4 隻 1 級（4 隻 1 級合成 2 隻 2 級再合成 1 隻 3 級），4 級需要 8 隻 1 級（8 隻 1 級合成 4 隻 2 級，4 隻 2 級再合成 2 隻 3 級，2 隻 3 級再合成 1 隻 4 級）

以此類推，可觀察得每隻 n 級（ $n > 1$ ）怪獸需要 2^{n-1} 隻 1 級怪獸來合成

故假設 $2^{n-1} = 1024 = 2^{10}$ ，又每隻 10 級怪獸可得 1 隻限量版， $2^{10} = 2 \times 2^9$

所以可得 2 隻 10 級怪獸，即為可得 2 隻限量版怪獸