

單元小考 1-2 解析

一、單選題：(6 小題，每題 4 分，共 24 分)

1. () 若 b 為 48 與 4 的等比中項，則 b 值為 (A) $\pm 2\sqrt{3}$ (B) $\pm 4\sqrt{3}$ (C) $\pm 7\sqrt{3}$ (D) $\pm 8\sqrt{3}$

【學習卷】

解答

D

解析

設 b 為 48 與 4 的等比中項，則 $b = \pm\sqrt{48 \times 4} = \pm\sqrt{192} = \pm 8\sqrt{3}$

2. () 若一等比數列的首項為 2，公比為 -3，則此數列第 5 項為 (A) -162 (B) 162 (C) -54 (D) 54

【學習卷】

解答

B

解析

首項 $a_1 = 2$ ，公比 $r = -3$ ，由公式 $a_n = a_1 r^{n-1}$

得 $a_5 = a_1 r^4 = 2 \times (-3)^4 = 162$

\therefore 第 5 項為 162

3. () 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = (-2)a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ ，則此數列的一般項 a_n 為 (A) $a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$ (B) $a_n = 3 \times (2)^{n-1}$ (C) $a_n = -3 \times (-2)^{n-1}$ (D) $a_n = -3 \times (2)^{n-1}$

【學習卷】

解答

A

解析

由定義知數列 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，且首項為 3，公比為 -2

$\therefore a_n = a_1 r^{n-1} = 3 \times (-2)^{n-1}$

4. () 已知一等比數列第 3 項為 $-\frac{1}{16}$ ，第 6 項為 $\frac{1}{2}$ ，則此等比數列的第 10 項為 (A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7

【學習卷】

解答

C

解析

$a_3 = -\frac{1}{16}$ ， $a_6 = \frac{1}{2}$

$\therefore a_6 = a_3 \times r^3 \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{16} \times r^3 \Rightarrow r^3 = -8 \Rightarrow r = -2$

而 $a_{10} = a_6 \times r^4 = \frac{1}{2} \times (-2)^4 = 8$ \therefore 第 10 項為 8

5. () 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = (-2)a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ ， a_5 之值為 (A) 12 (B) 24 (C) 48 (D) 144

【學習卷】

解答

C

解析

由 $a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$ 得 $a_5 = 3 \times (-2)^{5-1} = 48$

6. () 已知一等比數列，首項為 7，第 5 項為 112，則其公比為 (A) $\pm\sqrt{3}$ (B) ± 2 (C) $\pm\sqrt{5}$ (D) ± 4

【學習卷】

解答

B

解析

$$a_1 = 7, a_5 = 112$$

$$\therefore a_5 = a_1 \times r^4 \Rightarrow 112 = 7 \times r^4 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

\therefore 公比為 ± 2

二、填充題：(7 小題，每題 7 分，共 49 分)

1. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 首項為 a_1 ，公比為 $r \neq 1$ 的等比數列，則前 n 項的和 $S_n =$ _____。

【學習卷】

解答

$$\frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad (\text{或} \quad \frac{a_1(r^n-1)}{r-1})$$

解析

設數列 $\langle a_n \rangle$ 首項為 a_1 ，公比為 r 的等比數列，前 n 項和以 S_n 表示，則

$$\text{當公比 } r \neq 1 \text{ 時， } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad (\text{或} \quad \frac{a_1(r^n-1)}{r-1})$$

2. 等比數列 $2, -2\sqrt{3}, 6, -6\sqrt{3}, \dots$ 之第 9 項為 _____。

【學習卷】

解答

$$162$$

解析

$$a_1 = 2, r = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\text{則 } a_9 = a_1 \times r^8 = 2 \times (-\sqrt{3})^8 = 162$$

\therefore 第 9 項為 162

3. 一等比級數首項為 4，公比為 $\frac{1}{2}$ ，則前 10 項的和為 _____。

【學習卷】

解答

$$\frac{1023}{128}$$

解析

$$a_1 = 4, r = \frac{1}{2}, n = 10$$

$$\text{由等比級數的和 } S_n = \frac{a_1 \times (1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_{10} = \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \times \left(\frac{1023}{1024} \right) = \frac{1023}{128}$$

4. 等比級數 $\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 2 + \dots + 18$ ，則此級數共有 _____ 項。

【學習卷】

解答

$$5$$

解析

$$a_1 = \frac{2}{9}, r = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{9}} = 3, a_n = 18$$

$$\text{由 } a_n = a_1 r^{n-1} \text{ 得 } 18 = \frac{2}{9} \times 3^{n-1} \Rightarrow 3^{n-1} = 81 = 3^4 \Rightarrow n-1 = 4$$

$$\therefore n = 5$$

故此級數共有 5 項

5. 一有限等比級數之末項為 1296，公比為 6，和為 1555，則其首項為 _____。

【學習卷】

解答

$$1$$

解析

$$\because a_1 r^n = a_1 r^{n-1} \times r = a_n \times r$$

$$\therefore S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} = \frac{a_n \times r - a_1}{r - 1}$$

$$\Rightarrow 1555 = \frac{1296 \times 6 - a_1}{6 - 1} \Rightarrow a_1 = 1296 \times 6 - 1555 \times 5 = 1$$

即首項為1

6. 在-2與486之間插入四個數，使成等比數列，則插入四個數中的第二個數為_____。

【學習卷】

解答

-18

解析

設此數列公比為 r ，插入四個數後，共6項

則首項 $a_1 = -2$ ，第6項 $a_6 = 486$

$$\because a_6 = a_1 \times r^5 \Rightarrow 486 = (-2) \times r^5 \Rightarrow r^5 = -243 \Rightarrow r = -3$$

又插入的第二個數為第3項

$$\text{即 } a_3 = a_1 \times r^2 = (-2) \times (-3)^2 = -18$$

\therefore 插入的第二個數為-18

7. 一等比數列，首項為7，第6項為1701，則公比 $r =$ _____。

【學習卷】

解答

3

解析

$$a_6 = a_1 \times r^{6-1}$$

$$\Rightarrow 1701 = 7 \times r^5 \Rightarrow r^5 = 243 \Rightarrow r = 3$$

三、計算題：(3 小題，每格 9 分，共 27 分)

1. 假設某人向銀行辦理儲蓄存款，年利率為10%，試問若每年年初均存入10000元，則第二年年底本利和為多少元？

(複利計息公式：若 A_n 為本利和， P 為本金， r 為利率， n 為期數，則 $A_n = P(1+r)^n$)

【學習卷】

解答

23100 元

解析

$$\text{第一年初存入的10000元(已存了二年)} \Rightarrow A_2 = 10000(1+10\%)^2 = 12100$$

$$\text{第二年初存入的10000元(已存了一年)} \Rightarrow A_1 = 10000(1+10\%)^1 = 11000$$

$$\therefore \text{本利和 } A = A_1 + A_2 = 11000 + 12100 = 23100 \text{ (元)}$$

2. 若 a 為正整數，且1、 a 、 $2a$ 為等比數列，試求 $a^2 + 1$ 之值。

【學習卷】

解答

5

解析

1、 a 、 $2a$ 為等比數列

$$\Rightarrow r = \frac{a}{1} = \frac{2a}{a} \text{ (} r \text{ 為公比)}$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 \times 2a \Rightarrow a^2 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a = 0$$

$$\Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ 或 } a = 2 \text{ (} a = 0 \text{ 不合)}$$

$$\therefore a^2 + 1 = 5$$

3. 試求等比級數 $(-2) + \frac{4}{3} + \left(-\frac{8}{9}\right) + \frac{16}{27} + \cdots$ 至第6項的和。

【學習卷】

解答

$$-\frac{266}{243}$$

解析

$$\because a_1 = -2, a_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{公比 } r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{4}{3}}{-2} = -\frac{2}{3}$$

由等比級數求和公式得

$$S_6 = \frac{a_1(1-r^6)}{1-r} = \frac{(-2) \times \left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^6\right]}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{(-2) \times \left(1 - \frac{64}{729}\right)}{\frac{5}{3}} = -\frac{266}{243}$$

\therefore 此級數前 6 項的和為 $-\frac{266}{243}$