集　　合

集合的意義

集合，是一種不可精確定義的最基本的數學概念。就一般而言，凡是具有某種特殊性質的聚合，都可稱為集合。總之，集合就是將一堆東西集中收集起來的一個整體。

Example：

(1)台灣全體的公民。

(2)平面上的所有點。

(3)台東大學全校的學生。

(4) $x^2-x-12=0$ 的所有解。

(5)台東大學應數系一年級的全體學生。

- 成員關係的概念是集合論的主要概念之一。構成集合整體的基本單位稱為元素。
- 通常我們用大寫英文字母表示某個集合整體，
- 用小寫英文字母表示集合整體內的元素。

集合的表示法

- 以大寫字母**A、B、C、…**等作為集合的名稱，並將所有元素列在一個大括號{ }內。

範例 1-1

請舉例說明集合與元素。

解

$A=\{a,b,c\}$表示集合 A 是由三個元素 a、b、c 所組成的集合。

$B=\{$太陽,星星,月亮$\}$表示集合 B 是由三個元素太陽、星星、月亮所組成的集合。

常用的集合表示法:

(1)列舉法或表列式：把集合中的每個元素一一列舉出來，並寫在大括號內。

例如：

- 12生肖的集合可表示為{鼠, 牛, 虎, 兔, 龍, 蛇, 馬,羊, 猴, 雞, 狗, 豬}。
- $x^2 - x - 12 = 0$ 的解集合為{-3,4}。

(2)描述法或結構式：若某一種「特性」是屬於集合中的部分（或全部）元素所具有，我們可以將此特性，利用文字或數學符號加以描述來表示此集合，

通常會在{ }內加上「｜」或「:」的符號，在符號「｜」或「:」的右邊說明此「特性」的限制條件。

例如：

- 所有正整數的集合可表示為$\{x \mid x \in N, N$為自然數所成的集合$\}$
- 投一枚骰子，出現小於或等於點數4的集合可表示為$\{x \mid 1 \leqq x \leqq 4, x \in N\}$。

範例 1-2

請舉例說明集合的限制條件。

解

$N=\{x \mid x\text{是正整數}\}$表示集合 N 是由 x 所組成，而 x 的限制條件為正整數。

$A=\{x \mid 2<x<5\ ，\ x\in \mathrm{R}\}$表示集合 A 是由 x 所組成，而 x 的限制條件為介於 2 到 5 之間的所有實數。

常用的符號

(1)「$\in$」表示「屬於」，「$\notin$」表示「不屬於」。

- 若元素*a*為集合*S*的元素，則可將這種成員關係表示成 $a \in S$，並讀作「*a*屬於集合*S*」。
- 若元素*b*不屬於集合*S*，則可記作 $b \notin S$，並讀成「*b*不屬於集合*S*」。

範例 1-3

請舉例說明集合的「屬於」與「不屬於」的性質。

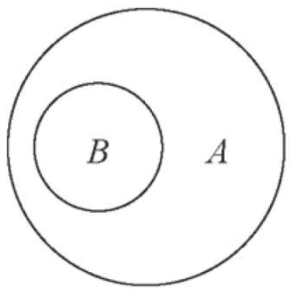
解

若有兩集合；$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,4\}$。

我們不難發現，$1\in A$，但是，$1\notin B$。

(2)「⊆」表示「包含於」。
「B ⊆ A 」 表示「集合B 包含於集合A」，亦即集合B 裡的所有元素都屬於集合A的元素。此時，我們稱集合B是集合A的「子集合」

圖示如下：



(3)若A ⊆ B 且 B ⊆ A ，則A = B。這也代表集合A與集合B裡面的元素都相同，也稱為「集合相等」。

符號「$\subset$」的使用上要留意!!

「$\subset$」這個符號在有些書中等同於「$\subseteq$」，但在有些書中卻代表著「$\subsetneq$」(包含於，但不等於)。

範例 1-4

請舉例說明集合的「包含」性質。

解

若有兩集合；$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,4\}$。

因為集合 B 裡的所有元素都在集合 A 裡重複，所以我們可以說 $B \subset A$。

範例 1-5

請舉例說明集合的「集合相等」性質。

解

若有兩集合；$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$。

因為 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，所以我們可以說 $A=B$。

集合的類型

有限集合

在一個有限集合內的元素個數是有限的、能夠數得完的。我們一般生活所見的集合都是屬於有限集合。

範例 1-6

請舉例說明有限集合。

解

集合 $A=\{$ 全校學生 $\}$，則集合 A 為一個有限集合。

無限集合

在一個無限集合內的元素個數是無限多的、無法數完的。常見的無限集合有自然數集合或非負整數集合　{ 0，1，2，……}。

範例 1-7

請舉例說明無限集合。

解

集合 $A=\{$整數$\}$，因為整數有無限多個，所以集合 A 為一個無限集合。

空集合

- 若某一個集合內不存在任何一個元素，則稱「空集合」，以符號 Ø 或 { }表示。
- 例如：A為所有偶數所成的集合，B為所有奇數所成的集合。
  A與B沒有共同的元素，此時為了集合理論的完整，我們引入了空集合。

- 空集合：我們稱不含任何元素的集合為空集合。記為 $\emptyset$ 或{ } 。
- 空集合是任何一個集合的子集合。

範例 1-8

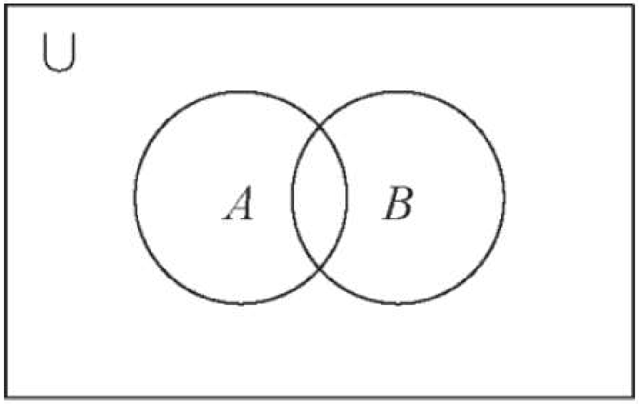
請舉例說明空集合。

解

集合 $A=\phi$或{ }，代表著集合 A 為一個空集合。

宇集合

「宇集合」是指將所有可能的結果收集在一起的集合，以符號「**U**」表示。習慣上，我們常以一個矩形來表示宇集合 **U**，而其它有關的集合，就畫在此長方形內，此種圖示表示法也稱為「文氏圖」**Venn Diagram**。圖示如下：



範例 1-9

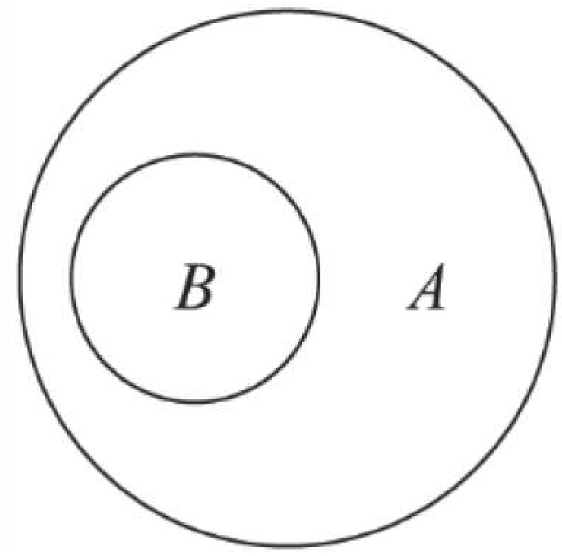
請舉例說明宇集合。

解

某班學生 40 人，數學成績及格的有 15 人，英文及格的有 20 人，兩科都及格的有 12 人。若我們將數學及格的學生定義為集合 A，而英文及格的學生定義為集合 B，那麼，$U=\{$全班40位同學$\}$就是集合 A 與集合 B 的宇集合。

子集合

- 設A、B為兩集合，若集合 B 中的所有元素為集合 A 中所有元素的一部分（或全部），則稱 B 為 A 的一個子集合。



範例 1-10

請舉例說明子集合。

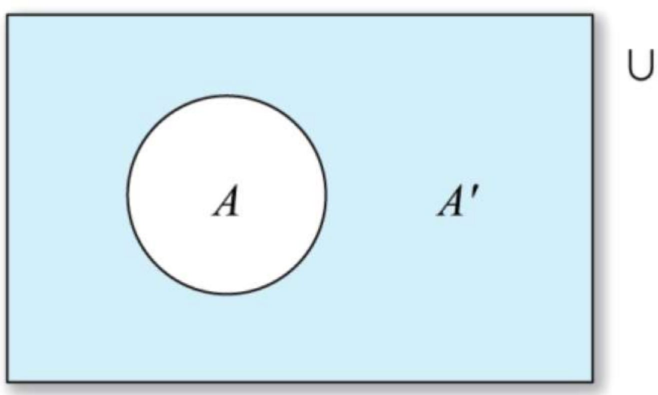
解

集合 $A=\{2,4,6,8,10\}$，集合 $B=\{4,6\}$，則 B 是 A 的一個子集合。

補集

對某一集合 A 而言，在宇集合 U 內不屬於集合 A 的其餘元素所組成的集合稱為 A 之補集，符號可以表為「A^c」、「A’」或「$\bar{A}$」表示。

圖示如下：



範例 1-11

請舉例說明補集合。

解

某班學生 40 人，數學成績及格的有 15 人，若我們將數學及格的學生定義為集合 A，而剩下的 25 位數學成績不及格的同學就是集合 A 的補集合，記為 $\overline{A}$。

集合與集合間的關係

- 「相等」與「包含」是集合間的兩種基本關係，也是集合論中的兩個基本概念。以下，先歸納兩個集合間的相等關係的定義。
- 給定兩個集合 A 與 B，假設 A 與 B 具有同樣的元素，則 A 等於B。也就是說，集合A的每一個元素都是集合 B 的元素，且集合 B 的每一個元素也都是集合 A的元素，所以集合A 與 B 是相等的，並記作A=B。否則，稱集合 A 與 B 是不相等的，並記作A≠B。

範例 1-12

請舉例說明「相等」與「不相等」的集合關係。

解

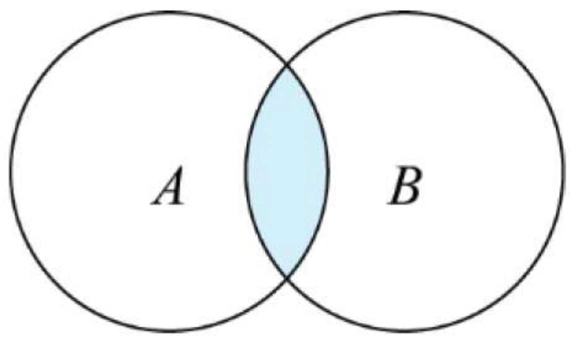
(1) $\{a, b, c\} = \{c, b, a\} = \{a, c, b\} = \{a, a, b, c, c\}$

(2) 設 $P = \{a, c, d, e\}$ 與 $Q = \{a, b, c\}$，於是 $P \neq Q$。

集合的運算

交集

- 設 A，B 為兩集合，則在集合A 且在集合B 的元素（即 A與B 所共有的元素）所成的集合，稱為A與B的交集，以符號A∩B表示之。



$A \cap B$

範例 1-13

若 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，請求 $A\cap B$ 為何？

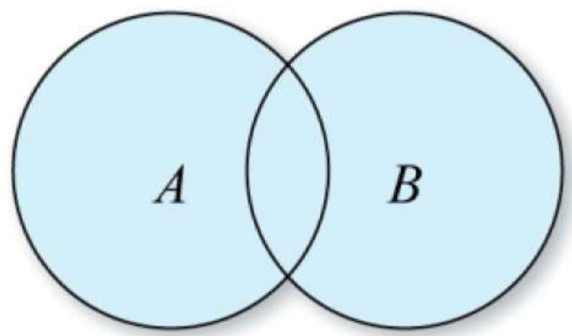
解

將集合 A 與 B 相同的元素放在一起，

所以，$A\cap B=\{2,3,4\}$。

聯集

設 A，B 為兩集合，則在集合A 或在集合B的元素（即A 與B 所有的元素全部混在一起）所成的集合，稱為A 與B 的聯集，以符號A∪B表示之。



$A \cup B$

範例 1-14

若 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,4,9,10\}$，請求 $A\cup B$ 為何？

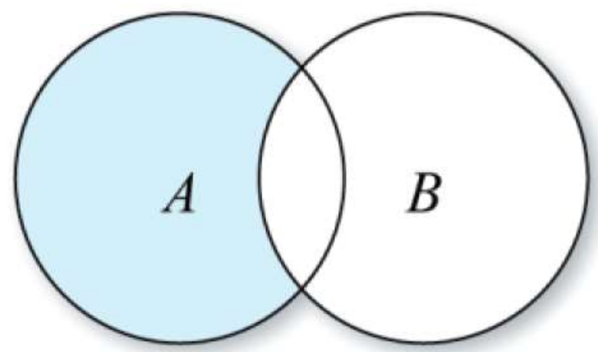
解

將集合 A 與 B 所有元素放在一起且不重複，

所以，$A\cup B=\{1,2,3,4,5,9,10\}$。

差集

設 A，B 為兩集合，則在集合A，但不在集合B 之元素所成的集合，稱為 A 與 B 的差集，以符號 A−B 或 A\B 表示之。



$A - B$

範例 1-15

若 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,4,9,10\}$，請求：

(1) $A-B$ 為何？

(2) $B-A$ 為何？

解

(1) 將集合 A 內與 B 相同的元素扣掉，

所以，$A-B=\{1,5\}$。

(2) 將集合 B 內與 A 相同的元素扣掉，

所以，$B-A=\{9,10\}$。

集合的元素個數表示法

一個集合A中的元素個數，以n(A)或|A|表示。

範例 1-16

請舉例說明一個具有五個元素的集合。

解

$A=\{1,2,3,4,5\}$，則 $n(A)=5$。

範例 1-18

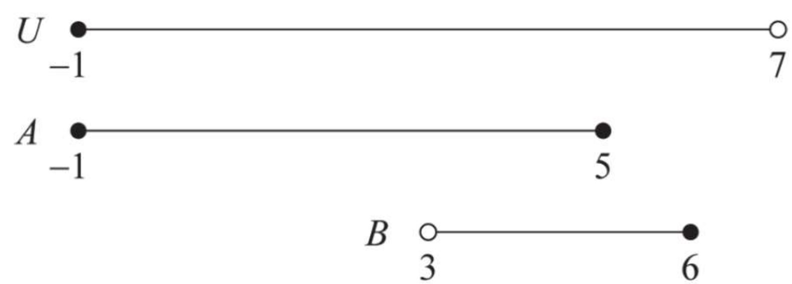
假設 $A=\{x\mid -1\le x\le 5\}$，$B=\{x\mid 3<x\le 6\}$，$U=\{x\mid -1\le x<7\}$，則

(1) $A\cap B=$？　　(2) $A\cup B=$？

(3) $B-A=$？　　(4) $\overline{A}-B=$？

解

先將集合 A、B 與 U 用數線表示如下圖：



實心點代表等於或包含，空心點代表不等於或不包含。

(1) $A\cap B$ 就是取 A 與 B 交集的部份，所以，$A\cap B=\{x\,|\,3<x\le 5\}$。

(2) $A\cup B$ 就是取 A 與 B 聯集的部份，所以，$A\cup B=\{x\,|\,-1\le x\le 6\}$。

(3) $B-A$ 就是取 B 中減去與 A 重疊的部份，所以，
$B-A=\{x\,|\,5<x\le 6\}$。

(4) $\overline{A}-B$ 就是取 A 的補集 $\overline{A}$ 中減去與 B 重疊的部份，而 $\overline{A}=\{x\,|\,5<x<7\}$，
所以，$\overline{A}-B=\{x\,|\,6<x<7\}$。

範例 1-19

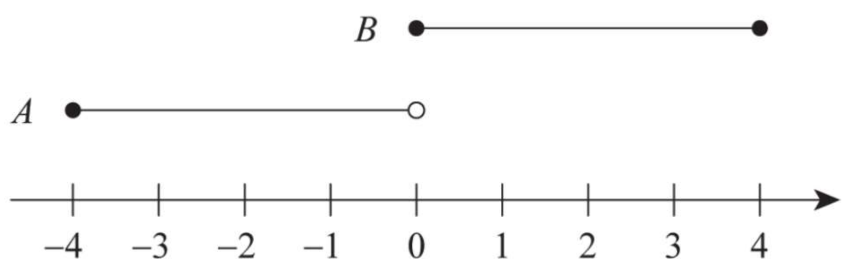
假設 $A=\{x\mid -4\le x<0\}$，$B=\{x\mid 0\le x\le 4\}$，請求出

(1) $A\cup B$

(2) $A\cap B$

解

先將集合 A、B 用數線表示如下圖：



(1) $A\cup B=\{x\mid -4\le x\le 4\}$

(2) $A\cap B=\phi$或$\{\ \}$