



數學 B ④ 學習卷

3-3 數學期望值

答案

一、D A D C C C

二、1. 1

2. 10

3. 920

4. 6

5. {4, 5, 6}

6. $\frac{7}{2}$

7. 2

三、1. (1) $\frac{4}{9}$ (2) 80 元 2. (1) 19 元 (2) 31 元 3. (1) 0.001 (2) 9900 元 (3) 90 元

科 年 班 號

姓名：

總 分

一、選擇題 (24%，每題 4 分)

★進階題

(D) 1. 設 $\{A, B, C\}$ 為樣本空間 S 的一個分割，若 $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ，則 $P(C) =$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{5}{12}$ 。

解 $\because \{A, B, C\}$ 為樣本空間 S 的一個分割

$$\Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(C) = 1$$

$$\therefore P(C) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

(A) 2. 小君擲一顆公正骰子，若擲出奇數點可得 6 元，擲出偶數點須付 4 元，則擲一次公正骰子所得金額的期望值為 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) -1 元。【課本例題 1】

解 出現奇數點、偶數點的機率均為 $\frac{1}{2}$ ，且報酬分別為 6 元與 -4 元

$$\text{故 } E = 6 \times \frac{1}{2} + (-4) \times \frac{1}{2} = 3 + (-2) = 1 \text{ (元)}$$

(D) 3. 袋中有 100 元鈔票 5 張，500 元鈔票 3 張，1000 元鈔票 2 張。阿香今自袋中任取 1 張鈔票，則所得金額的期望值為 (A) 200 (B) 300 (C) 350 (D) 400 元。

【課本例題 2】

解 阿香任取 1 張鈔票所得金額的期望值為

$$E = 100 \times \frac{5}{10} + 500 \times \frac{3}{10} + 1000 \times \frac{2}{10} = 400 \text{ (元)}$$

(C) 4. 設袋中有 50 元硬幣 2 個，10 元硬幣 3 個，今自袋中任取 2 個，若每個硬幣取到的機會均等，則所得金額的期望值為 (A) 48 (B) 50 (C) 52 (D) 54 元。

【課本例題 2】

解 分析：先算任取 1 個硬幣的期望值，再乘以 2

$$p_1 \text{ (取到 50 元)} = \frac{2}{5}, m_1 = 50$$

$$p_2 \text{ (取到 10 元)} = \frac{3}{5}, m_2 = 10$$

$$\therefore \text{期望值 } E = \left(50 \times \frac{2}{5} + 10 \times \frac{3}{5} \right) \times 2 = (20 + 6) \times 2 = 52 \text{ (元)}$$

(C) 5. 袋中有 5 元硬幣 3 枚、10 元硬幣 4 枚，已知自袋中任取 1 枚所得金額的期望值為 $\frac{55}{7}$ 元，則自袋中隨機取出 3 枚硬幣所得金額的期望值為 (A) 15 (B) 20

(C) $\frac{165}{7}$ (D) 30 元。

【課本例題 2】

解 解析見回末

(C) 6. 某次平時考的考題共有 20 題，皆為 4 選 1 的選擇題，每題答對給 5 分，答錯給 0 分。若某生全部用猜的作答，且選答任一選項的機率相等。則此次平時考，該生得分的期望值為 (A) 0 (B) 10 (C) 25 (D) 50 分。

解 解析見回末

二、填充題 (49%，每格 7 分)

1. 小倩擲一枚均勻硬幣，若出現正面可得 4 元，出現反面須付出 2 元，則擲一次硬幣可得金額的期望值為 1 元。【課本例題 1】

解 出現正、反面的機率均為 $\frac{1}{2}$ ，且報酬分別為 4 元與 -2 元

$$\text{故期望值 } E = 4 \times \frac{1}{2} + (-2) \times \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1 \text{ (元)}$$

2. 承上題，小倩擲十次可得金額的期望值為 10 元。【課本例題 1】

解 擲一次平均可得 1 元，則
擲十次的期望值為 $1 \times 10 = 10$ (元)

3. 自裝有百元鈔 3 張，千元鈔 2 張的袋中，隨機一次取出 2 張，若每張被取到的機率均等，則所得金額之和的期望值為 920 元。【課本例題 2】

解

取法	2 張百元	2 張千元	1 張百元、1 張千元
所得 (元)	$m_1 = 200$	$m_2 = 2000$	$m_3 = 1100$
機率	$p_1 = \frac{C_2^3}{C_2^5} = \frac{3}{10}$	$p_2 = \frac{C_2^2}{C_2^5} = \frac{1}{10}$	$p_3 = \frac{C_1^3 \times C_1^2}{C_2^5} = \frac{6}{10}$

$$\therefore \text{所求期望值 } E = m_1 \times p_1 + m_2 \times p_2 + m_3 \times p_3 = 200 \times \frac{3}{10} + 2000 \times \frac{1}{10} + 1100 \times \frac{6}{10} = 920 \text{ (元)}$$

4. 同時投擲兩枚均勻的硬幣，若出現兩正面可得 12 元，若恰出現一正面可得 8 元，若出現兩反面須賠 4 元，則此次投擲所得金額之期望值為 6 元。【課本例題 1】

解 $12 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{2} + (-4) \times \frac{1}{4} = 3 + 4 + (-1) = 6$ (元)

5. 設 $\{A, B\}$ 為樣本空間 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一個分割，若 $A = \{1, 2, 3\}$ ，則 $B = \underline{\{4, 5, 6\}}$ 。

解 $\because \{A, B\}$ 為樣本空間 S 的一個分割
則 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$
 $\therefore B = \{4, 5, 6\}$

6. 擲一顆公正的骰子一次，則其出現點數的期望值為 $\underline{\frac{7}{2}}$ 點。【課本例題 1】

解 擲一顆公正的骰子，可能出現的點數為 1、2、3、4、5、6
且每一個點數出現的機率均為 $\frac{1}{6}$
故擲一公正骰子一次出現點數的期望值 $E = (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$ (點)

7. 某次考試選擇題為單選題，每題有 5 個選項，若每題答對給 8 分，則答錯應扣 $\underline{2}$ 分才公平。(答對給分與答錯扣分公平，表示期望值 $E = 0$)

解

作答	對	錯
得分	8 分	x 分
機率	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

公平 \Rightarrow 期望值 $E = 0$
 $E = 8 \times \frac{1}{5} + x \times \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow x = -2$
 \therefore 答錯應扣 2 分

三、計算題 (27%，每題 9 分)

1. 自裝有 4 個紅球、5 個白球的袋中，一次取出兩個球，每個球被取到的機率相同。若取出兩球同色可得 180 元，試求：
- (1) 取出兩球同色的機率。(4 分)
- (2) 取出兩球同色可得金額的期望值。(5 分)

解 [答：(1) $\frac{4}{9}$ (2) 80 元]

- (1) 取出兩球同色的機率為 $p = \frac{C_2^4 + C_2^5}{C_2^9} = \frac{6+10}{36} = \frac{4}{9}$
- (2) 取出兩球同色可得金額的期望值 $E = 180 \times \frac{4}{9} = 80$ (元)

2. 某市為了籌措經費而發行公益彩券 1000 張，且決定每張彩券售價為 50 元，其中獎金為 1000 元、500 元、100 元的彩券分別有 8 張、20 張、10 張，試求：
- (1) 購買一張彩券的獎金期望值。(4 分)
- (2) 當你購買一張彩券時，你預期會損失多少元？(5 分) 【課本例題 3】

解 [答：(1) 19 元 (2) 31 元]

- (1) 購買一張彩券的獎金期望值 $E = 1000 \times \frac{8}{1000} + 500 \times \frac{20}{1000} + 100 \times \frac{10}{1000} = 19$ (元)
- (2) \because 每張彩券售價為 50 元，故每購買一張彩券時預期會損失 $50 - 19 = 31$ 元

3. 根據統計資料，一個高中生一年內生存的機率為 0.999，現在某位高中生投保高中學生平安保險，保額為 10000 元，一年保費 100 元，試求：
- (1) 此高中生在一年內死亡的機率。(3 分)
- (2) 若此高中生在一年內死亡，則保險公司損失多少元？(3 分)
- (3) 保險公司獲益的期望值是多少元？(3 分) 【課本例題 4】

解 [答：(1) 0.001 (2) 9900 元 (3) 90 元]

- (1) 此高中生在一年內死亡的機率為 $1 - 0.999 = 0.001$
- (2) 若此高中生在一年內死亡，則保險公司損失 $10000 - 100 = 9900$ 元
- (3) 若此高中生在一年內依然生存，則保險公司賺 100 元
 \therefore 保險公司獲益的期望值 $E = 100 \times 0.999 + (-9900) \times (0.001) = 99.9 - 9.9 = 90$ (元)

選擇題第 5、6 題解析

5. \because 任取 3 枚的期望值會等於取 1 枚之期望值再乘以 3
故所求為 $\frac{55}{7} \times 3 = \frac{165}{7}$ (元)

6. \because 每題猜對的機率為 $\frac{1}{4}$ ，猜錯的機率為 $\frac{3}{4}$
 \therefore 每題得分的期望值為 $5 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 0 \times \left(\frac{3}{4}\right)$
故該生得分的期望值 $E = 20 \times \left[5 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 0 \times \left(\frac{3}{4}\right)\right] = 20 \times \frac{5}{4} = 25$ (分)