112年家族計畫

◎ 上課日期：2023年5月31日

◎ 教學科目：數學

◎ 教學內容：廣義角三角函數

◎ 大學伴：湯詠傑(臺東大學)

◎ 小學伴：徐善甯(臺東女中)

Talk Times

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※

QUESTION TIMES








※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※

Homework Times








※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※

Class Times

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※

先來進行小考啦！

來做個kahoot

前測考題解析

1 - Quiz

試求 $\sqrt{3}\tan 30^\circ + \sqrt{2}\sin 45^\circ - \cos 60^\circ$ 之值。

Sol: $\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$

$= 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ///

- $\frac{1}{2}$
- 1
- $\frac{3}{2}$ ✓
- 2

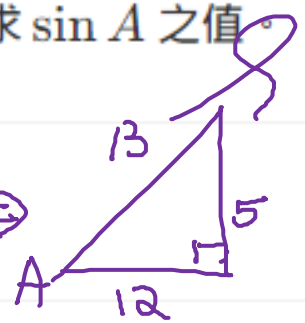
2 - Quiz

設直角三角形ABC中，$\angle C$ 為一直角，且 $12\sin A = 5\cos A$，試求 $\sin A$ 之值

- $\frac{5}{12}$
- $\frac{5}{13}$
- $\frac{12}{13}$
- $\frac{12}{5}$

Sol:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{5}{12} = \tan A \Rightarrow$$



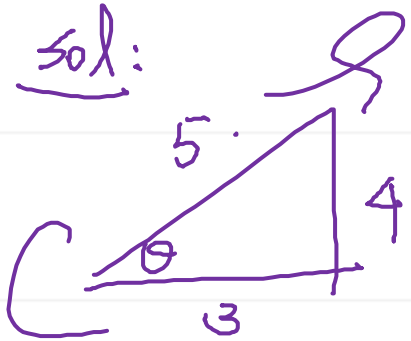
$$\Rightarrow \sin A = \frac{5}{13}$$

3 - Quiz

若 θ 為銳角且 $\tan\theta = \frac{4}{3}$ ，則 $\sin^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta = ?$

- $\frac{1}{5}$
- $\frac{1}{25}$
- $-\frac{1}{5}$
- $-\frac{1}{25}$

sol:



$\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$

$(\frac{4}{5})^2 - 4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot(\frac{3}{5})^2$

$= \frac{16}{25} - \frac{48}{25} + \frac{27}{25} = -\frac{5}{25}$

$= -\frac{1}{5}$

4 - Quiz

設 $\angle A$ 為銳角，且 $\sin A \cos A = \frac{7}{18}$，則 $\sin^3 A + \cos^3 A = ?$

- $\frac{22}{27}$
- $\frac{15}{9}$
- $\frac{25}{18}$
- $\frac{17}{36}$

Sol: Recall: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Step 1: $\sin A+\cos A$.

$(\sin A+\cos A)^2=1+2\cos A\sin A$

$=1+2\cdot\frac{7}{18}=\frac{16}{9}$.

$\therefore \sin A+\cos A=\frac{4}{3}$.

Step 2. $\sin^3 A+\cos^3 A$

$=(\frac{4}{3})^3-3\cdot\frac{7}{\cancel{18}_{9}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{3}$

$=\frac{64}{27}-\frac{42}{27}=\frac{22}{27}$ ///

5 - Quiz

設 θ 為銳角，已知 $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1}{7}$，試求 $\tan\theta=$?

- $\frac{2}{3}$
- $\frac{4}{3}$
- $\frac{3}{2}$
- 2

Sol: Hint: $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\cdot\frac{1/\cos\theta}{1/\cos\theta}=\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=\frac{1}{7}$$

$$7\tan\theta-7=\tan\theta+1$$

$$\Rightarrow 6\tan\theta=8 \Rightarrow \tan\theta=\frac{4}{3}$$

6 - Quiz

試求 $\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \ldots + \cos^2 80 = ?$

- $\frac{1}{2}$
- 1
- 2
- 4 ✓

Hint: 1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

2) $\cos\theta=\sin(90^\circ-\theta)$.

$\cos^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ+\cos^2 30^\circ+\cos^2 40^\circ+\cos^2 50^\circ+\cos^2 60^\circ+\cos^2 70^\circ+\cos^2 80^\circ$

$=\cos^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ+\cos^2 30^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 30^\circ+\sin^2 20^\circ+\sin^2 10^\circ$

$=1\times 4=4$ //

7 - Quiz

若 $\cos\theta = \tan\theta$，則 $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = ?$

- $\sqrt{5}-1$
- $\sqrt{5}+1$
- $\sqrt{3}-1$
- $\sqrt{3}+1$

Step 1 $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$= \frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$= \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$= \frac{2}{\sin\theta}$

Step 2 $\cos\theta = \tan\theta \Rightarrow \cos^2\theta = \sin\theta$

$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\therefore 1 - \sin^2\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow \sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (負不合)

$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

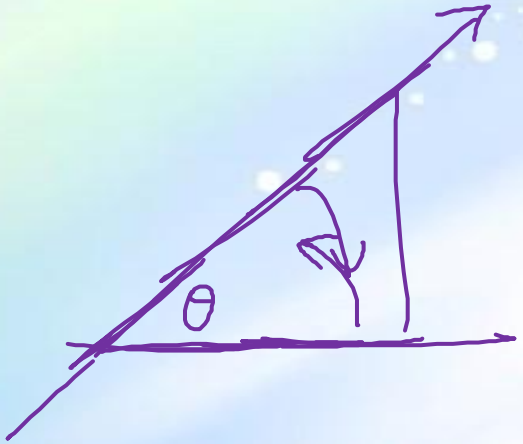
Step 3 $\frac{2}{\sin\theta} = \frac{2}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

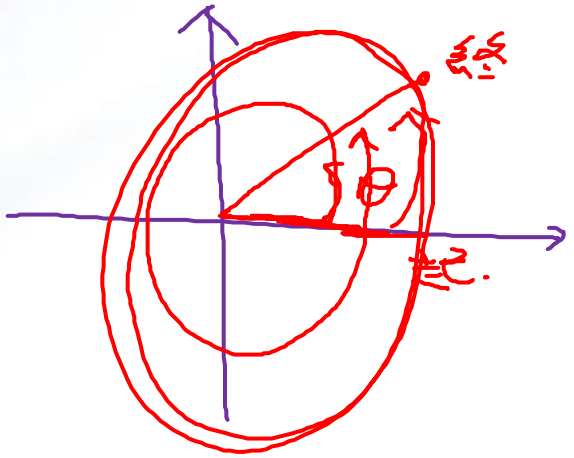
$= \frac{4}{\sqrt{5}-1} \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$

$= \frac{4(\sqrt{5}+1)}{4} = \sqrt{5}+1$

ANY QUSETIONS ?

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※



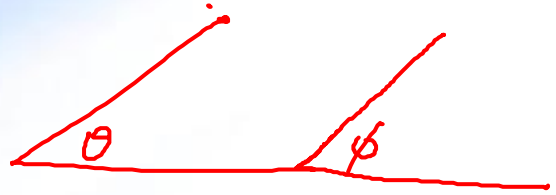


觀念一：同界角

Def:同界角

1）何謂同界角？

兩個有向角具有相同的始邊與終邊。



2）最大負同界角：所有負同界角中最大的角。

3）最小正同界角：所有正同界角中最小的角。

4）一個θ角都有無限多個同界角。

Thm:同界角的判別法則：

兩個角相差360度的整數倍。

$\theta=20^\circ$ $\theta_1=380^\circ$ $\theta_2=740^\circ$

$\theta_3=-340^\circ$

觀念二：廣義角三角函數

Def：廣義角三角函數

(1) $\sin\theta = \frac{y}{r}$

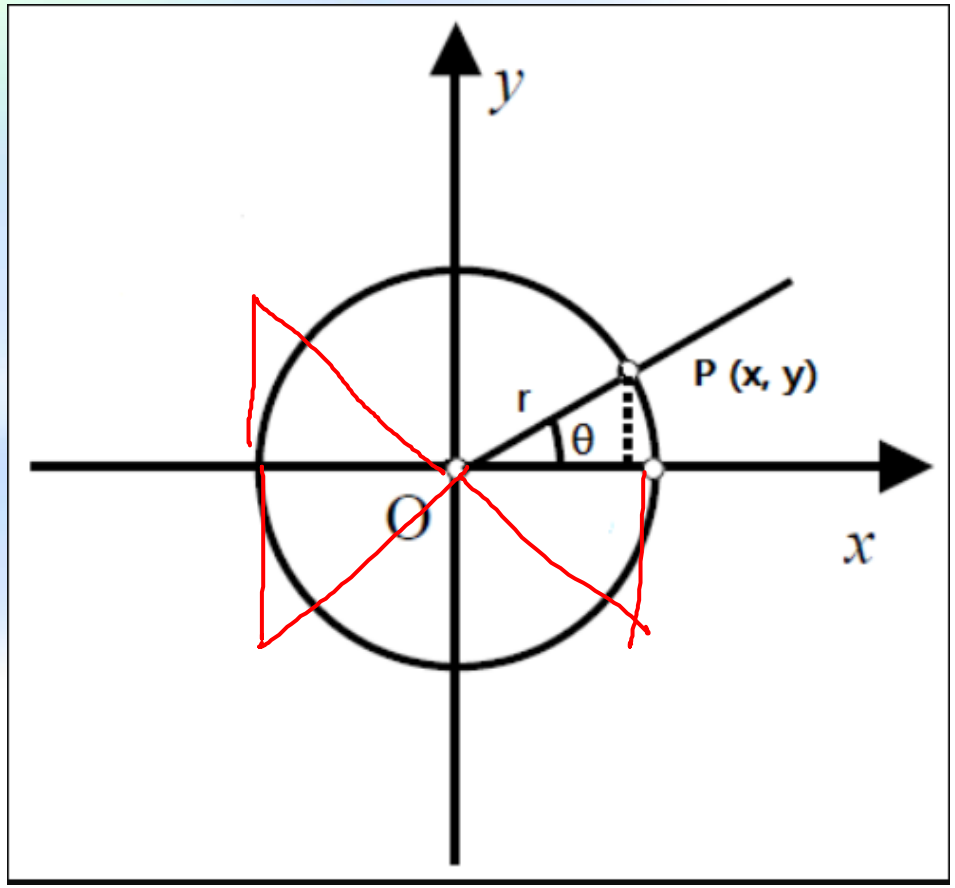
(2) $\cos\theta = \frac{x}{r}$

(3) $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$

(4) $\cot\theta = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

(5) $\sec\theta = \frac{r}{x}$ $(x \neq 0)$

(6) $\csc\theta = \frac{r}{y}$ $(y \neq 0)$



Remark：正負號由P點的x、y決定。

(原因：$r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

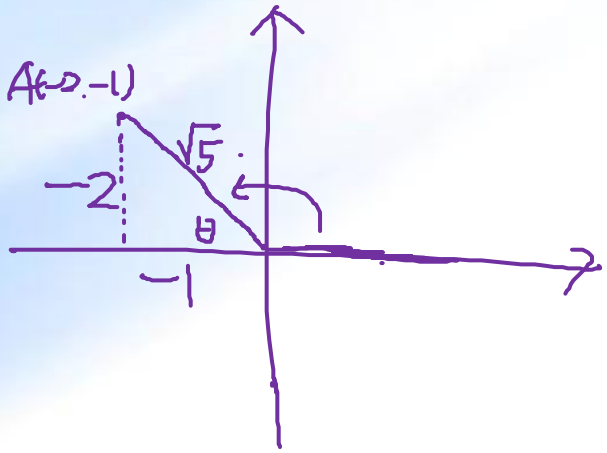
例題 1

設 θ 為一標準位置角，$A(-2, -1)$ 是 θ 終邊上一點，試求 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 的值.

$\sin\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$.

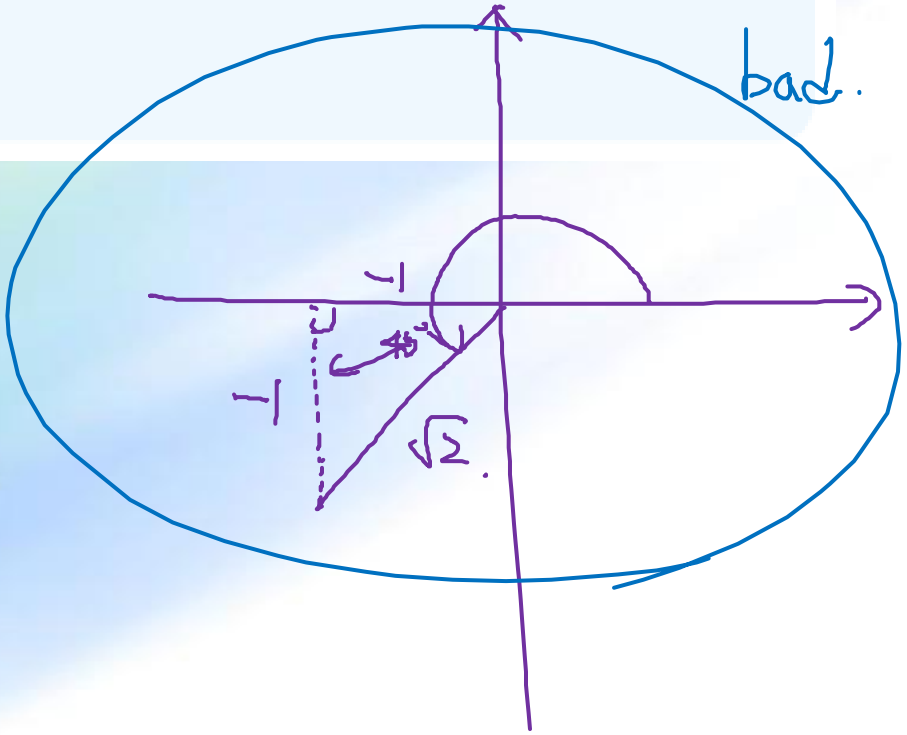
$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = \frac{-2}{-1} = 2$.



例題 ②

試求 $\sin 225°$，$\cos 225°$，$\tan 225°$ 的值.



$\sin 225° = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

$\cos 225° = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\tan 225° = \frac{-1}{-1} = 1$.

$\sin(225°) = \sin(90°\times 2 + 45°)$

$= -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

例題 3

試求 $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\tan 120°$ 的值.

$\sin 120° = \sin(90° \times 1 + 30°)$

$= \cos 30° = \frac{1}{2}$

$\sin 120° = \sin(90° \times 2 - 60°)$

$= \sin 60° = \frac{1}{2}$

例題 4

試求 $\sin(-90°)$, $\cos(-90°)$, $\tan(-90°)$ 的值.

$\sin(-90°) = \sin(90°\times 0 - 90°)$

$= -\sin 90° = -1.$

$\cos(-90°) = \cos(90°\times 0 - 90°)$

$= -\cos 90° = 0.$

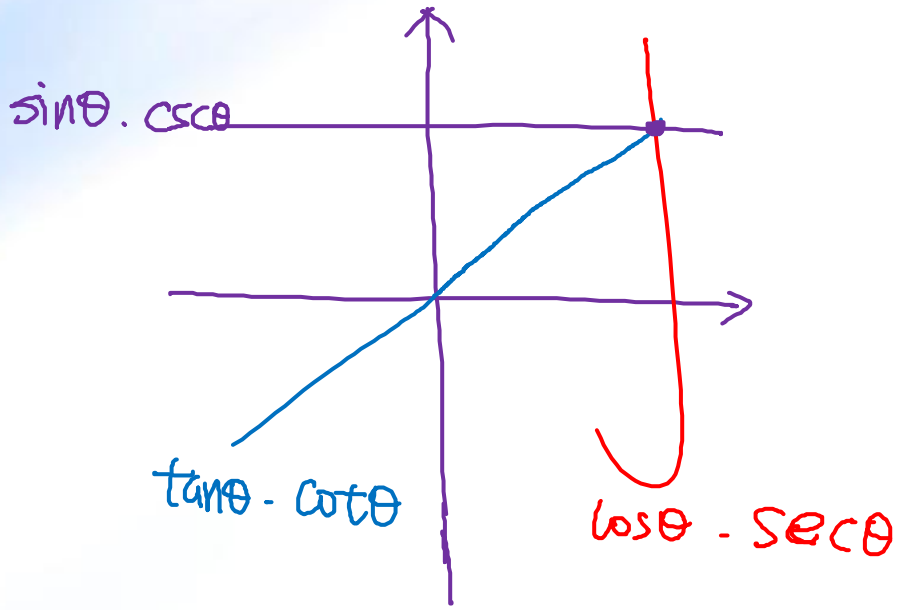
$\tan(-90°) = \tan(90°\times 0 - 90°) = \tan 90° = \#$ (不存在)

觀念三：象限角的正負號

Lem: 象限角的正負號

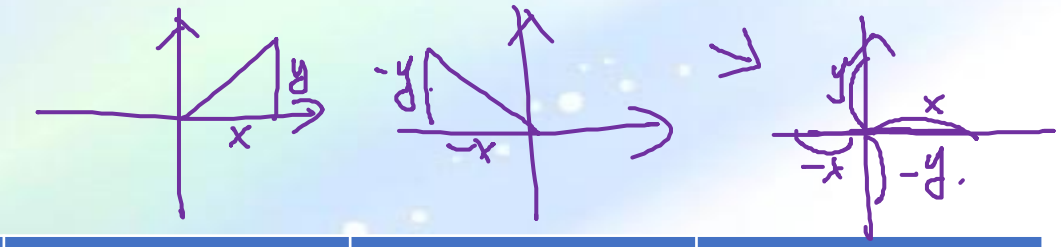
	I	II	III	IV
$\frac{y}{r}$ $\sin\theta$、$\csc\theta$	+	+	−	−
$\frac{x}{r}$ $\cos\theta$、$\sec\theta$	+	−	−	+
$\frac{y}{x}$ $\tan\theta$、$\cot\theta$	+	−	+	−

Remark: 才字記法



觀念四：軸上角的函數

Thm：軸上角的函數值



	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0°	0	1	0	X	1	X
90°	1	0	X	0	X	1
180°	0	-1	0	X	-1	X
270°	-1	0	X	0	X	-1

觀念五：廣義角化簡至銳角

Cor:廣義角化簡至銳角

設平面上有一個廣義角A：

Step1. 將角A化成$90° \times n \pm \theta$的形式(n為整數)。

→一律視為銳角

Step2. 決定函數：$\begin{cases} n\text{為}\text{偶數}：\text{函數不變} \\ n\text{為}\text{奇數}：\text{正餘互換} \end{cases}$。

Step3. θ角照抄

Step4. 依原函數決定正負號。

e. g. 將下列三角函數的廣義角化簡至銳角，並求出其三角函數值。

（1）$\sin 450°$　（2）$\tan 570°$　（3）$\cos(-390°)$

$\sin 450° = \sin(90° \times 5 + 0°)$

$= \cos 0° = 1$

2) $\tan 570° = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos(-390°) = \cos(90° \times (-4) - 30°)$

$= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-390°) = \cos(90° \times (-5) + 60°)$

$= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

例題 6

已知 $\sin\theta=0.7$，試求下列各值：

(1) $\sin(-\theta)$.

(2) $\sin(180^\circ-\theta)$.

(3) $\cos(90^\circ+\theta)$.

1) $\sin(-\theta)=\sin(90^\circ\times 0-\theta)$

$=-\sin\theta=-0.7$

2) $\sin(180^\circ-\theta)=\sin(90^\circ\times 2-\theta)$

$=\sin\theta=0.7$

3) $\cos(90^\circ+\theta)$

$=\cos(90^\circ\times 1+\theta)$.

$=-\sin\theta=-0.7$

例題 7

試求 $\sin 930^\circ$ 的值.

(x) → (u)

$\sin 930^\circ = \sin 210^\circ$

$= \sin(90^\circ \times 2 + 30^\circ)$

$= -\sin 30^\circ$

$= -\frac{1}{2}$

$\sin(90^\circ \times 3 - 60^\circ)$

$= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

例題 8

若 α 為銳角且 $\tan\alpha=2$，試求 $\sin(180°-\alpha)$ 的值.

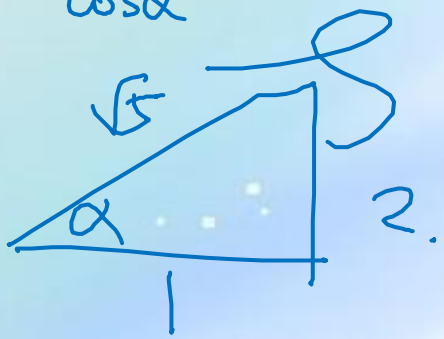
$\sin(180°-\alpha)$

$=\sin(90°\times 2-\alpha)$

$=\sin\alpha$

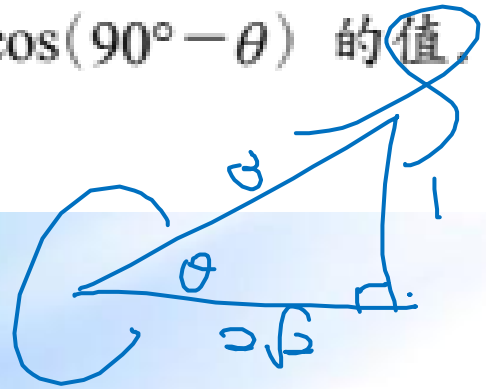
$=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2 \Rightarrow \sin\alpha=2\cos\alpha$.



隨堂練習

已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，試求 $\sin(90°+\theta)+\cos(90°-\theta)$ 的值。

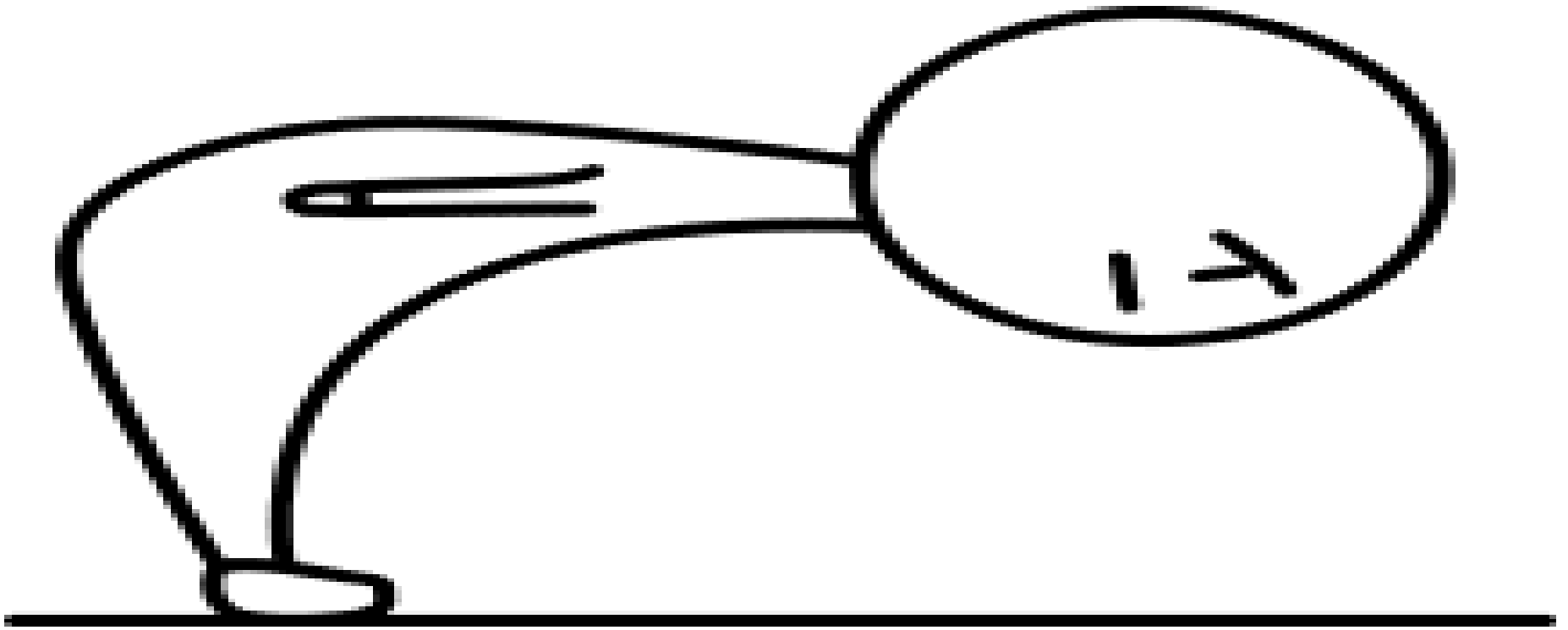


$\sin(90°+\theta)+\cos(90°-\theta)$

$=\sin(90°\times1+\theta)+\cos(90°\times1-\theta)$

$=\cos\theta+\sin\theta=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$ //

講到這裡，有沒有問題？



下台一鞠躬

~Thank you~

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※