



數學B ④ 學習卷

2-5 二項式定理

答案

一、A A B B D A

二、1. $n+1$

5. 14

三、1. $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$

2. 1215

2. $C_r^n x^{n-r} y^r$

6. 128

3. (1)256 (2)128 (3)128

3. $r+1$

7. 4^n

4. C_r^n

科 年 班 號

姓名：

總 分

一、選擇題 (24%，每題 4 分)

★進階題

(A) 1. 下列選項何者為 $(x+y)^3$ 的展開式？

(A) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ (B) $x^3 - 3xy^2 - 3x^2y + y^3$ (C) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

(D) $x^3 - 3xy^2 + 3x^2y - y^3$ 。

【課本例題 1】

解 $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

(A) 2. $C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n =$ (A) $2^n - 1$ (B) $2^n + 1$ (C) 2^n (D) 2^{n-1} 。 【課本例題 4】

解 $\because C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

$\therefore C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n - C_0^n = 2^n - 1$

(B) 3. 已知 $a = C_1^8 + C_3^8 + C_5^8 + C_7^8$ ，則 $a =$ (A)256 (B)128 (C)64 (D)32。

【課本例題 4】

解 由公式可得 $C_1^8 + C_3^8 + C_5^8 + C_7^8 = \frac{2^8}{2} = 2^7 = 128$

故 $a = 128$

(B) 4. 由二項式定理知： $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n$ ，則 $1 + 2 \times C_1^n + 2^2 \times C_2^n + \cdots + 2^n \times C_n^n =$ (A) 2^n (B) 3^n (C) 4^n (D) 5^n 。

解 由二項式定理知：

$(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n$

又令 $x=2$ 代入上式

可得 $(1+2)^n = 1 + 2 \times C_1^n + 2^2 \times C_2^n + \cdots + 2^n \times C_n^n = 3^n$

(D) 5. 將 $(x+2)^{10}$ 展開時， x^7 之係數為 (A)64 (B)128 (C)256 (D)960。

【課本例題 3】

解 $(x+2)^{10}$ 展開式中一般項為 $C_r^{10} \times x^{10-r} \times 2^r = C_r^{10} \times 2^r \times x^{10-r}$

令 $10-r=7 \Rightarrow r=3$

故 x^7 之係數為 $C_3^{10} \times 2^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \times 8 = 960$

(A) 6. 將 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$ 展開時， x 項的係數為 (A)-3 (B)-1 (C)1 (D)3。

【課本例題 3】

解 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$ 展開式中一般項為 $C_r^3 x^{3-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_r^3 (-1)^r \times x^{3-2r}$

令 $3-2r=1 \Rightarrow r=1$

故 x 項的係數為 $C_1^3 (-1)^1 = -3$

二、填充題 (49%，每格 7 分)

已知 $(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + \cdots + C_r^n x^{n-r} y^r + \cdots + C_{n-1}^n x y^{n-1} + C_n^n y^n$ ，其中 n 為正整數， r 為非負整數。請根據上述展開式回答下列 1~4 題： 【課本 P74】

1. $(x+y)^n$ 展開式的項數共有 $n+1$ 項。

解 $(x+y)^n$ 展開式共有 $n+1$ 項

2. $(x+y)^n$ 展開式中一般項為 $C_r^n x^{n-r} y^r$ 。

解 $(x+y)^n$ 展開式中一般項為 $C_r^n x^{n-r} y^r$

3. $C_r^n x^{n-r} y^r$ 是 $(x+y)^n$ 展開式中的第 $r+1$ 項。

解 $C_r^n x^{n-r} y^r$ 是 $(x+y)^n$ 展開式中的第 $r+1$ 項

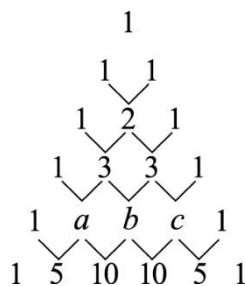
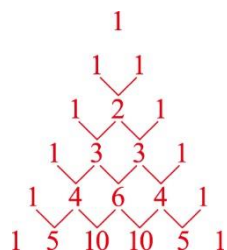
4. $(x+y)^n$ 展開式中的第 $r+1$ 項係數為 C_r^n 。

解 $(x+y)^n$ 展開式中的第 $r+1$ 項為 $C_r^n x^{n-r} y^r$

故 C_r^n 稱為該項的係數

5. 右圖是巴斯卡三角形的部分圖形，則 $a+b+c=$ 14 。

解 $a=1+3=4$ ， $b=3+3=6$ ， $c=3+1=4$
 $\therefore a+b+c=4+6+4=14$



6. $C_0^7 + C_1^7 + C_2^7 + C_3^7 + C_4^7 + C_5^7 + C_6^7 + C_7^7 =$ 128 。

解 $C_0^7 + C_1^7 + C_2^7 + \cdots + C_7^7 = (1+1)^7 = 2^7 = 128$

【課本例題 4】

三、計算題（27%，每題 9 分）

1. 試利用二項式定理展開 $(2x+3)^5$ 。

【課本例題 1】

解 [答： $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$]

利用二項式定理得

$$\begin{aligned} (2x+3)^5 &= C_0^5 (2x)^5 \times 3^0 + C_1^5 (2x)^4 \times 3^1 + C_2^5 (2x)^3 \times 3^2 + C_3^5 (2x)^2 \times 3^3 + C_4^5 (2x)^1 \times 3^4 + C_5^5 (2x)^0 \times 3^5 \\ &= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243 \end{aligned}$$

2. 試求 $(3x-y^2)^6$ 的展開式中 x^4y^4 項的係數。

【課本例題 2】

解 [答： 1215]

$\therefore (3x-y^2)^6$ 的一般項為 $C_r^6 \times (3x)^{6-r} \times (-y^2)^r$

\therefore 令 $r=2$

$$\text{可得 } C_2^6 \times (3x)^4 \times (-1)^2 \times (y^2)^2 = 1215x^4y^4$$

故 x^4y^4 項的係數為 1215

3. 試求下列各式之值：

(1) $C_0^8 + C_1^8 + C_2^8 + \cdots + C_8^8$ (3 分)

(2) $C_0^8 + C_2^8 + \cdots + C_6^8 + C_8^8$ (3 分)

(3) $C_1^8 + C_3^8 + \cdots + C_7^8$ (3 分)

【課本例題 4】

解 [答： (1)256 (2)128 (3)128]

(1)由公式可得 $C_0^8 + C_1^8 + C_2^8 + \cdots + C_8^8 = 2^8 = 256$

(2)由公式可得 $C_0^8 + C_2^8 + \cdots + C_6^8 + C_8^8 = \frac{2^8}{2} = 2^7 = 128$

(3)由公式可得 $C_1^8 + C_3^8 + \cdots + C_7^8 = \frac{2^8}{2} = 2^7 = 128$

★7. 由二項式定理知： $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n$ ，

則 $C_0^n + 3C_1^n + 3^2C_2^n + \cdots + 3^n C_n^n =$ 4^n 。

解 由二項式定理知：

$$(1+3)^n = C_0^n \times 1^n \times 3^0 + C_1^n \times 1^{n-1} \times 3^1 + C_2^n \times 1^{n-2} \times 3^2 + \cdots + C_n^n \times 1^0 \times 3^n$$

$$= C_0^n + 3C_1^n + 3^2C_2^n + \cdots + 3^n C_n^n$$

$$= \text{原式} = (1+3)^n = 4^n$$