112年家族計畫

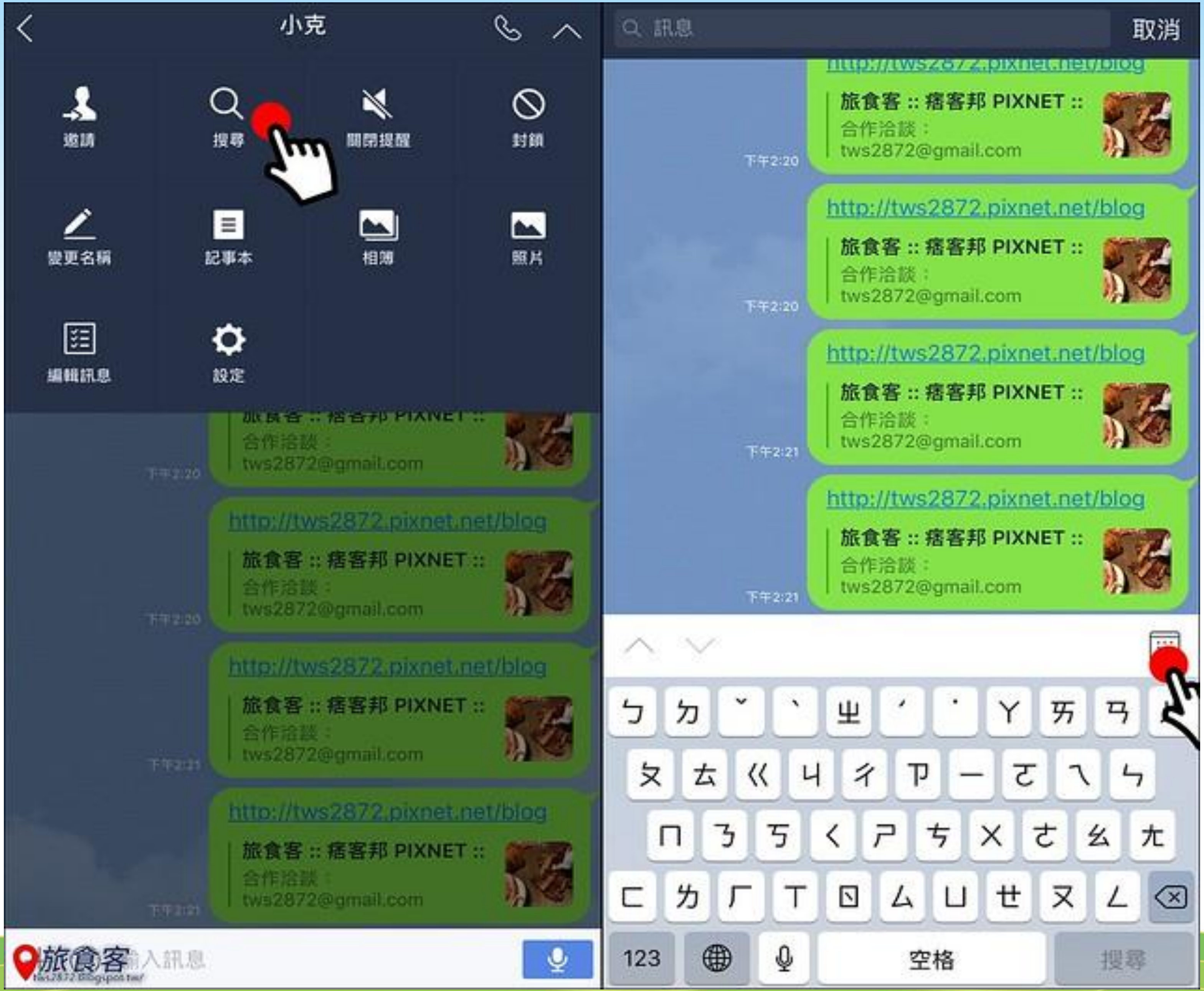
◎ 上課日期：2023年5月24日

◎ 教學科目 ：數學

◎ 教學內容：銳角三角函數

◎ 大學伴：湯詠傑(臺東大學)

◎ 小學伴：徐善甯(臺東女中)



Talk Times

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※

QUESTION TIMES

Homework Times

Class Times

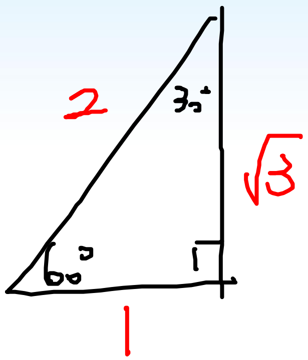
※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※

三角形邊角關係

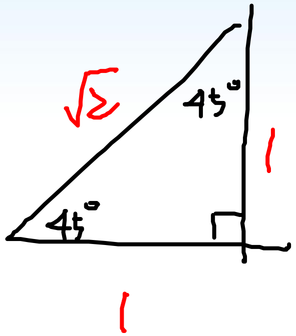
※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※

Recall：三角形的比.

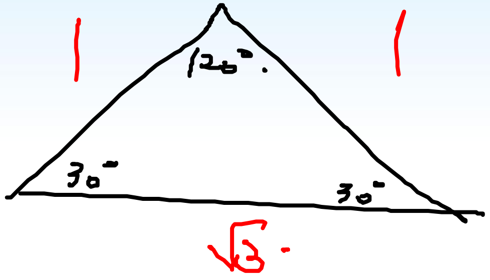
case1：$30^\circ-60^\circ-90^\circ$



case2：$45^\circ-45^\circ-90^\circ$



case3：$30^\circ-30^\circ-120^\circ$.

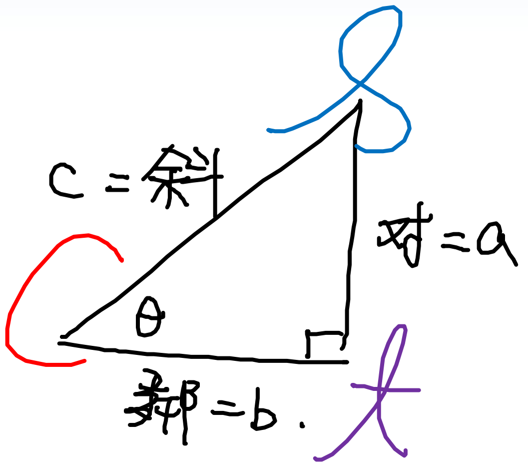


銳角三角函數

Def: 三角函數 (Triangular Function)

1) 由角與其邊長比值的「對應關係」, is called the「三角函數」.

2) Definition:



(正弦) $\sin\theta = \dfrac{對}{斜} = \dfrac{a}{c}$

(餘弦) $\cos\theta = \dfrac{鄰}{斜} = \dfrac{b}{c}$

(正切) $\tan\theta = \dfrac{對}{鄰} = \dfrac{a}{b}$

(餘割) $\csc\theta = \dfrac{斜}{對} = \dfrac{c}{a}$

(正割) $\sec\theta = \dfrac{斜}{鄰} = \dfrac{c}{b}$

(餘切) $\cot\theta = \dfrac{鄰}{對} = \dfrac{b}{a}$

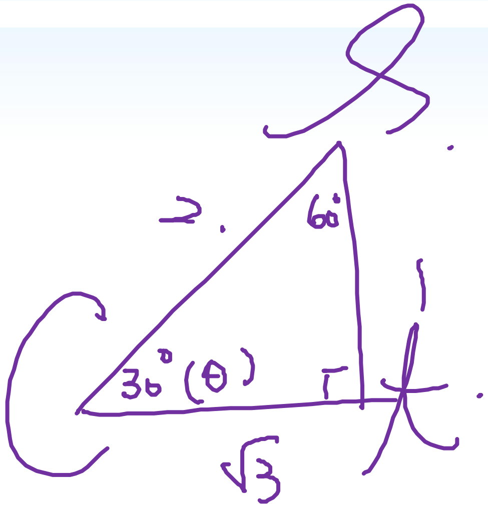
Cor: 已知一個三角函數值, 即可求得另外五個三角函數值.

例題 1

試求 $\sin 30°$, $\cos 30°$, $\tan 30°$ 的值.

(θ) (θ) (θ)

sol:



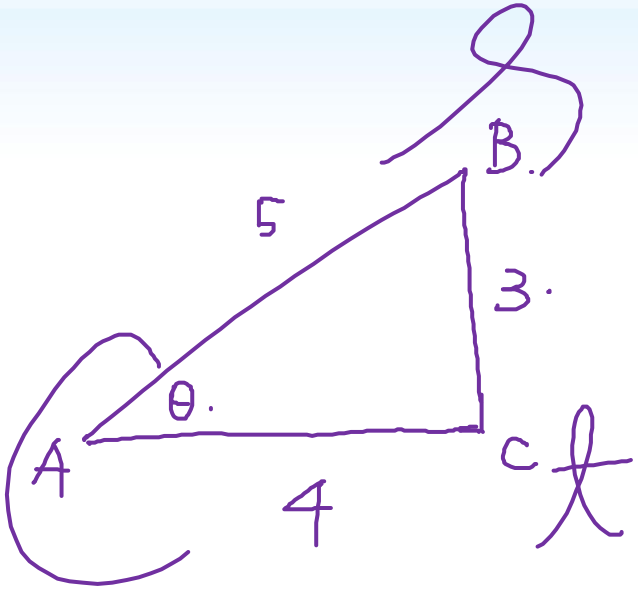
$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

例題 2

設直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角，三邊長 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CA}=4$, 試求 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 的值.



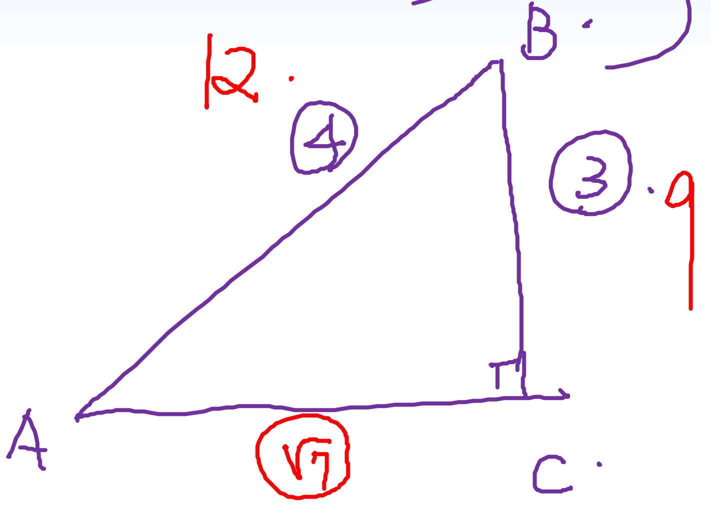
$$\begin{cases} \sin A = \dfrac{3}{5} \\ \cos A = \dfrac{4}{5} \\ \tan A = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

//.

例題 3

設直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，斜邊 $\overline{AB}=12$，$\sin A=\frac{3}{4}$，試求 $\overline{BC}$ 的邊長．

sol：



$4:3=12:x$

$36=4x \Rightarrow x=9$

三角恆等式

Thm：倒數關係 (補)

Suppose $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Then

1) $\sin\theta \cdot \csc\theta = 1$.

2) $\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$.

3) $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$.

Thm: 商數关係.

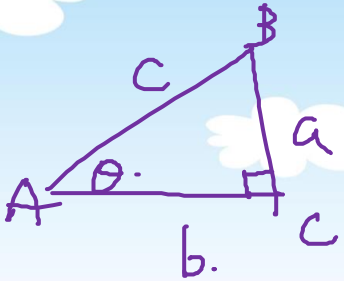
Suppose $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Then

1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cos\theta \neq 0$.

2) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\sin\theta \neq 0$.

proof: $\triangle ABC$中, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$.

$\angle ACB = 90^\circ$.



Let $\angle A = \theta$. Then

$\sin\theta = \sin A = \dfrac{a}{c}$

$\cos\theta = \cos A = \dfrac{b}{c}$

$\therefore \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \tan A$ //

Thm：平方关係.

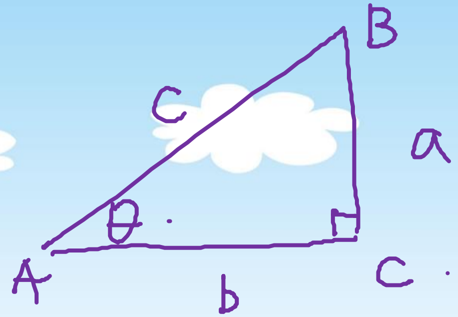
Suppose $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

2) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

3) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

proof：



$\sin\theta = \dfrac{a}{c}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{b}{c}$.

$\because a^2 + b^2 = c^2$.

$\therefore \dfrac{a^2+b^2}{c^2} = 1$. $\Rightarrow \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = 1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ //

Thm: 餘角關係 (正餘互換).

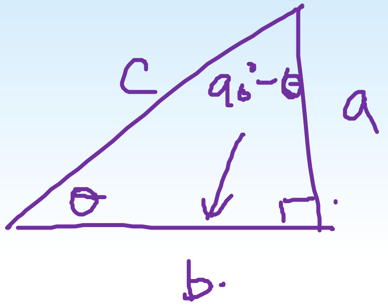
Suppose $0^\circ < \theta < 90^\circ$, we get

1) $\begin{cases} \sin\theta = \cos(90^\circ - \theta) \\ \cos\theta = \sin(90^\circ - \theta) \end{cases}$

2) $\begin{cases} \tan\theta = \cot(90^\circ - \theta) \\ \cot\theta = \tan(90^\circ - \theta) \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sec\theta = \csc(90^\circ - \theta) \\ \csc\theta = \sec(90^\circ - \theta) \end{cases}$.

e.g.



$\begin{cases} \sin\theta = \frac{a}{c}. \\ \sin(90^\circ - \theta) = \frac{b}{c}. \end{cases}$

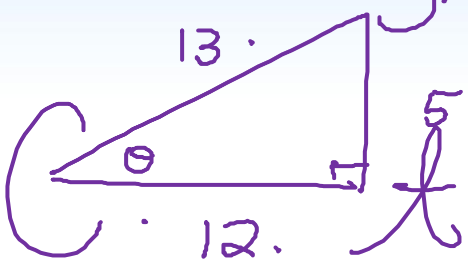
$\begin{cases} \cos\theta = \frac{b}{c}. \\ \cos(90^\circ - \theta) = \frac{a}{c} \end{cases}$

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※

例題 4

☆: Cor.

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$，且 $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$，試求 $\cos\theta$ 與 $\tan\theta$ 的值．



$\cos\theta = \dfrac{12}{13}$

$\tan\theta = \dfrac{5}{12}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \dfrac{5}{12}$

例題 5

已知 $0° < \theta < 90°$，試證：$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$.

proof：

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \quad //$$

練. Find.

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta} = ?$$

$$\frac{\cos^2\theta + \cos\theta\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cancel{\cos\theta}(\cos\theta + \sin^2\theta)}{\sin\theta\cancel{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot\theta + \sin\theta \quad //$$

例題 6

$\sin\theta > \cos\theta \Rightarrow 45^\circ < \theta < 90^\circ$

$a-b \Rightarrow ab.$

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$，若 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{5}$，試求下列各值：

Recall: $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

(1) $\sin\theta\cos\theta$.　(2) $\sin\theta + \cos\theta$.　(3) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$. $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

1) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \frac{1}{25} = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta.$

$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta. \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \frac{24}{25}$

$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{12}{25}$ //.

2) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta. = 1 + 2\cdot\frac{12}{25}$

$= \frac{49}{25}$

$\Rightarrow \sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ //.

3) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

$= (\sin\theta - \cos\theta)^3 + 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)$

$= \left(\frac{1}{5}\right)^3 + 3\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{1}{5}$

$= \frac{1}{125} + \frac{36}{125} = \frac{37}{125}$ //

銳角三角函數值

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※

Remark:
銳角三角函數值.

	15°	30°	45°	60°	75°
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$.	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$.	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\tan\theta$	$2-\sqrt{3}$.	$\frac{\sqrt{3}}{3}$.	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$.
$\cot\theta$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\sec\theta$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
$\csc\theta$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

Cor:

1) increasing: $\sin\theta$, $\tan\theta$, $\sec\theta$.

2) decreasing: $\cos\theta$, $\cot\theta$, $\csc\theta$.

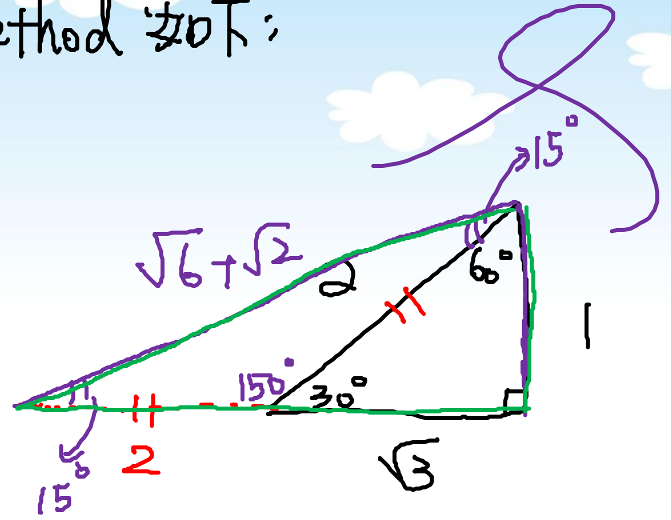
3). 分界点在 <u>45°</u>.

e.g.

$$\begin{cases} 0^\circ < \theta < 45^\circ \Rightarrow \sin\theta < \cos\theta. \\ 45^\circ < \theta < 90^\circ \Rightarrow \sin\theta > \cos\theta \end{cases}$$

Remark：15°及75°的三角函數值.

method 如下：



斜 $=\sqrt{1^2+(2+\sqrt3)^2}$

$=\sqrt{1+4+4\sqrt3+3}$

$=\sqrt{8+4\sqrt3}$

$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{6+2\sqrt{12}+2}$

$=\sqrt{\sqrt6^2+2\sqrt{12}+\sqrt2^2}$

$=\sqrt{(\sqrt6+\sqrt2)^2}$

$=\sqrt6+\sqrt2$

$\therefore \sin15^\circ=\dfrac{1}{\sqrt6+\sqrt2}\cdot\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{\sqrt6-\sqrt2}$

$=\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{4}=\cos75^\circ$

Break Time

來做個kahoot

$\gcd(a,b)=1$ $\quad c\mid(a+b)$ $\quad 1=ax+by$

$1=\frac{ac}{a+b}+\cdots by$

$c=(a+b)x=ax+bx$

数論, 1102 期中考 2022/4/26

規定: 計算 GCD 時一律採用列表輾轉相除法, 得到 GCD 但是沒有線性組合也不予計分; 解 Diophantine 方程必須用上課所教方式, 直接帶數字嘗試求解, 不予計分。

■ 1 (10pts). 求 $\gcd(135, 243, 558)$ 並將結果寫成這三數的線性組合。

■ 2 (10pts). 求 $9x + 24y - 5z = 1000$ 的所有整數解。

100分=1元

■ 3 (10pts). 某人到銀行去兌換一張 d 元 c 分的支票。出納員出錯, 給了他 c 元 d 分。此人直到用去 23 分後才發覺其錯誤, 此時他還有 $2d$ 元和 $2c$ 分, 請問支票原為多少錢?

$20!=\prod_{p\le 20} p^{\sum_{k=1}^{\infty}\lfloor 20/p^k\rfloor}$ $\quad 10+5+2+1$

■ 4 (15pts). 回憶 Legendre 公式

$$n! = \prod_{p\le n} p^{\sum_{k=1}^{\infty}\lfloor n/p^k\rfloor}$$

$=2^{18}\times 3^{8}\times 5^{4}\times 7^{2}\times 11^{1}\times 13^{1}\times 17^{1}\times 19^{1}$

(a) 利用此公式寫出 20! 的標準質因數分解式。

(b) 1000! 有幾位尾數零? 249

■ 5 (10pts). 如果 $d \mid a$ 和 $a \mid b$, 證明 $(a/d) \mid (b/d)$。

■ 6 (10pts). 如果 a, b, c 都是整數且知 $\gcd(a, b) = 1$ 和 $c \mid (a + b)$, 證明 $\gcd(c, a) = \gcd(c, b) = 1$。

■ 7 (10pts). 如果 p 是一質數滿足 $n < p < 2n$, 證明 $p \mid \binom{2n}{n}$。

$C^{2n}_{n}=\frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$

■ **8** (15pts). 大約 2500 多年前, 中國數學家認爲 n 是質數若且唯若 $n \mid (2^n - 2)$。$n = 341 = 11 \times 31$ 是第一個被發現的錯誤。由於這個結論成功的機率非常高, 數學上稱滿足 $n \mid 2^n - 2$ 的數爲 **pseudoprime**。Pseudoprime 常被用作檢驗是否爲質數的方法。

(*a*) 說明爲何 $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$。 $2^n = (1+1)^n = C_0^n 1^n 1^0 + C_1^n 1^{n-1} 1^1 + \cdots + C_{n-1}^n 1^1 1^{n-1} + C_n^n 1^0 1^n$

(*b*) 若 p 是一質數, 證明 $p \mid (2^p - 2)$。 $p=$

■ **9** (10pts). 證明有無窮多個 $6n+5$ 形式的質數。

■ **10** (40pts). 如果 $p, p+2$ 都是質數, 則稱它們爲 **twin primes**。

孿生質數 $\Rightarrow (3,5)$ $(5,7)$ $(11,13)$

3,5 11 17, 41, 71, 101, 107,

(*a*) 利用 Sieve of Eratosthenes 篩選法找出所有 ≤ 200 的 twin primes。

(*b*) 如果 $p, p+2$ 是 twin primes, 請問 p 屬於 $6k+r$ 的哪種形式? 利用這個答案證明 $12 \mid (p+p+2)$。

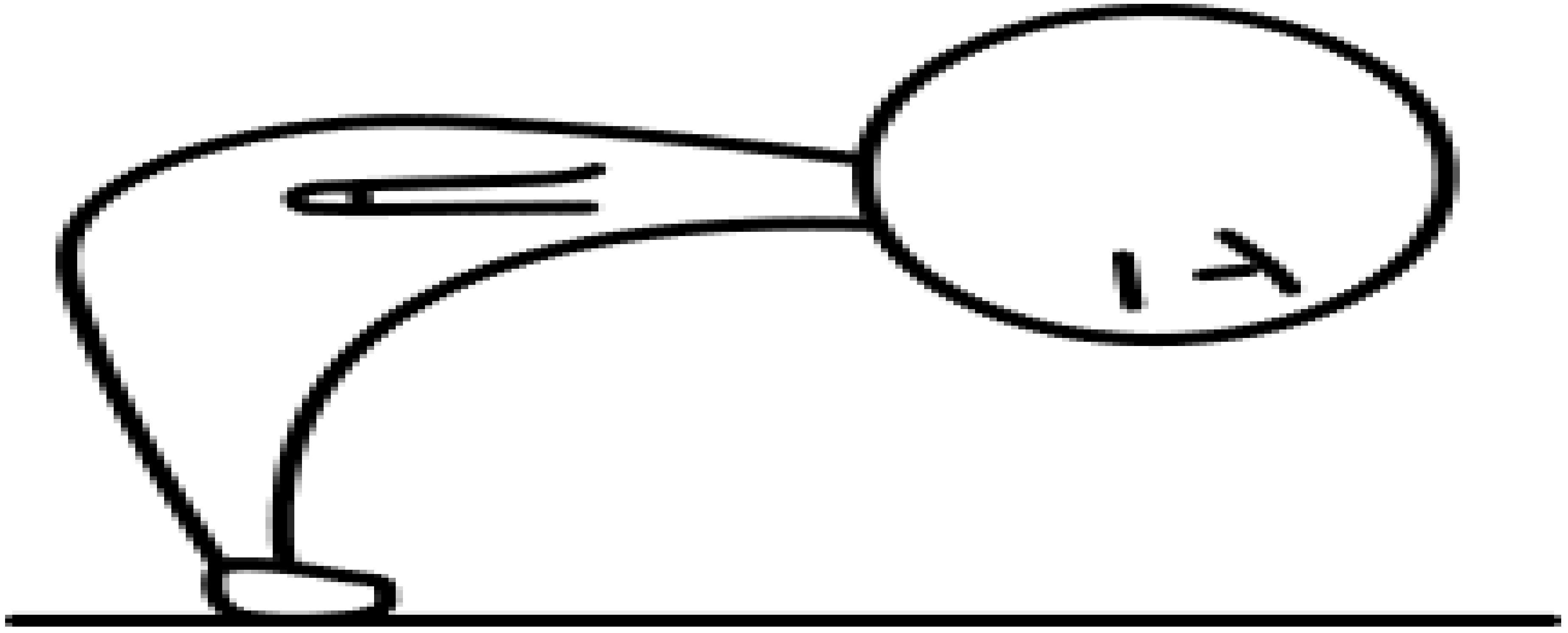
(*c*) 證明除了 3,5,7 外, 不可能 $p, p+2$ 和 $p+4$ 都是質數。

(*d*) 證明 $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+n+1$ 都是合數。爲何要從 $(n+1)!+2$ 開始, 從 $(n+1)!$ 開始不是更直覺?

$(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y^1 +$

$p \mid (2^p - 2) =$

$k+1 = 2^{k+1} - 2 = 2(2^k - 1)$



下台一鞠躬

~Thank you~

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※