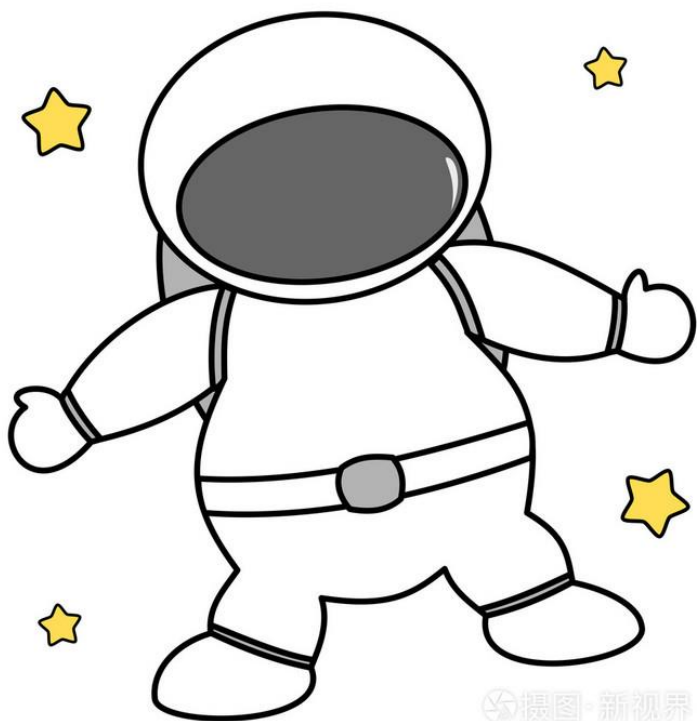




# 112年家族計畫

- ◎ 上課日期：2023年4月26日
- ◎ 教學科目：數學
- ◎ 教學內容：集合論、樣本空間與事件
- ◎ 大學伴：湯詠傑(臺東大學)
- ◎ 小學伴：徐善甯(臺東女中)



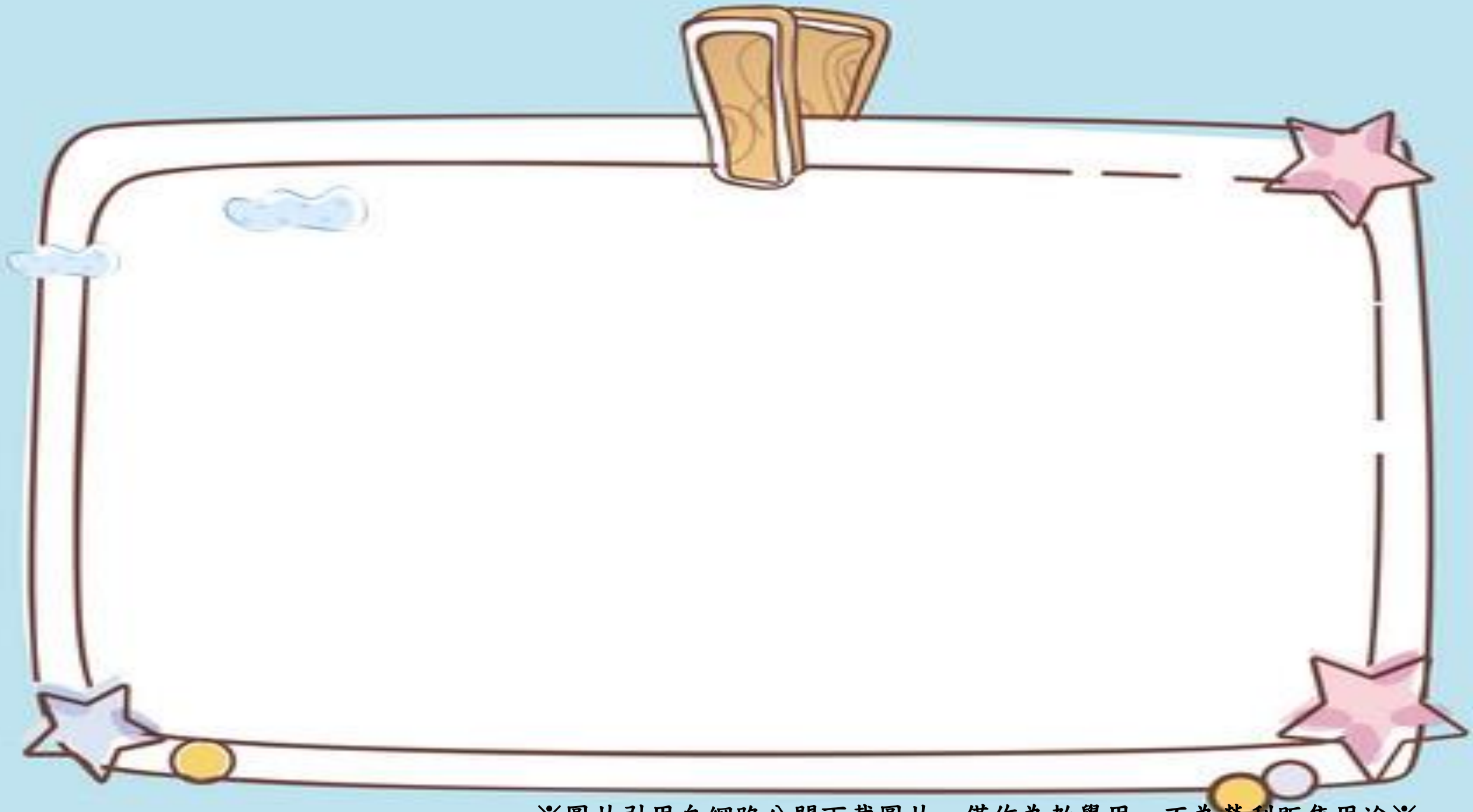
# *Talk Times*

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※



# ***Question Times***

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※



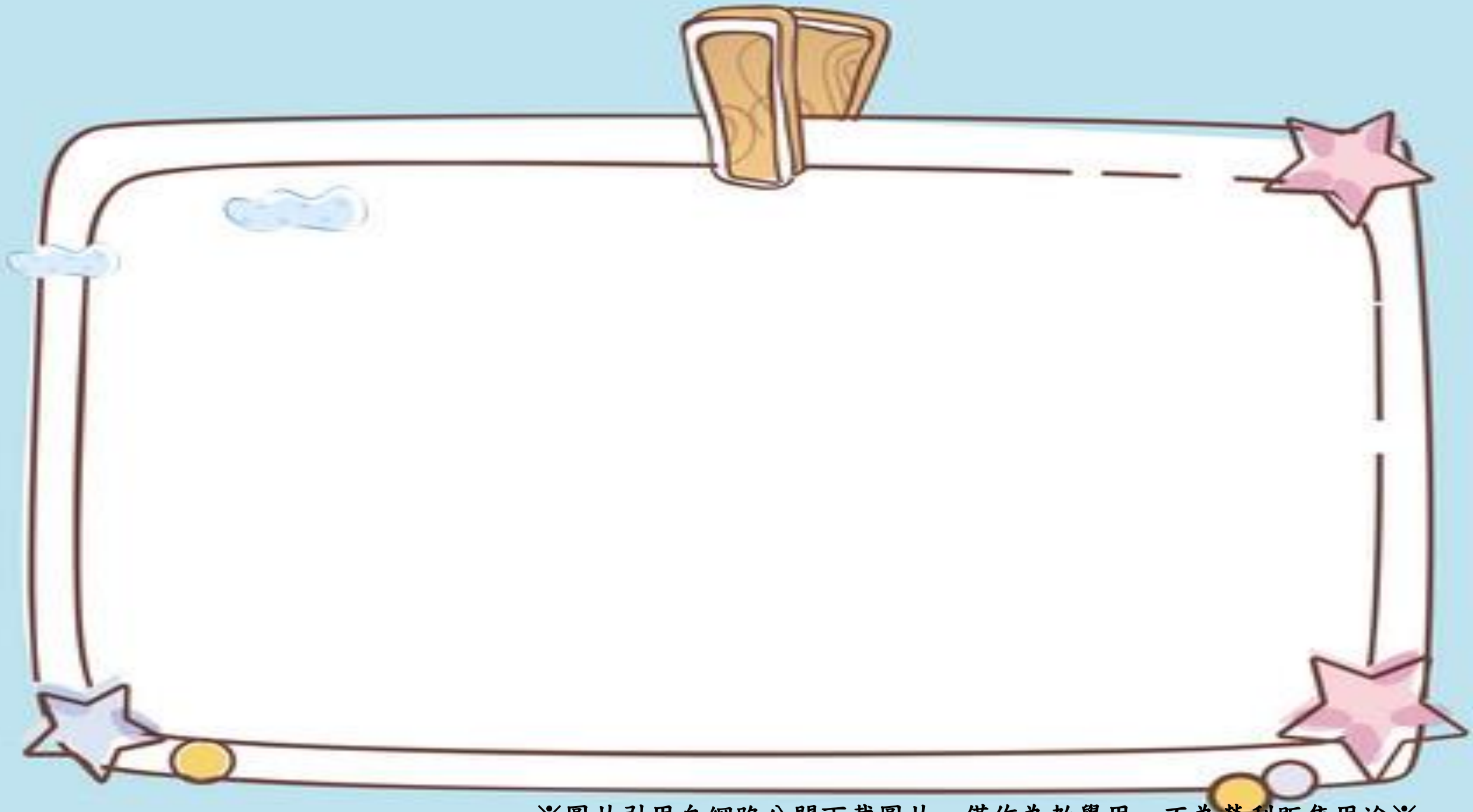
※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※





# Homework Times

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※



※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※



進入今日主題之前  
我們先接續上次考題

### 3 - Quiz

下列何者可表示成兩個<sup>prime</sup>質數的乘積？



$$39 = 3 \times 13$$



$$40 = 2 \times 5$$



$$41 = 1 \times 41 \text{ (本身)}$$



$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

Recall : 1~100中, 有25个質數.

Property : 1) 1不是質數, 也不是合數,

2) 2是最小的質數, 也是唯一的偶數.

3) 最小的合數是4.



#### 4 - Quiz

若  $3a - 2b + 11$  的平方根為  $\sqrt{17}$  和  $-\sqrt{17}$ ，則  $6a - 4b - 11$  的值為多少？



8

$$\Leftrightarrow \sqrt{3a-2b+11} = \pm\sqrt{17}$$



6

$$\Leftrightarrow |3a-2b+11| = 17$$

$$\Leftrightarrow 3a-2b=6$$



3

$$\therefore 6a-4b-11 = 2(3a-2b) - 11$$



1

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot 6 - 11 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Remark: If  $x^2 = a$ , then

$x = \sqrt{a}$  or  $x = -\sqrt{a}$  is called the 「平方根」.

2, “平方根”加正負號

### 5 - Quiz

A菌的大小約3.2微米，B病毒的大小約64奈米，試問A菌的大小是B病毒的幾倍？(1 微米 (um) =  $1 \times 10^{-6}$  公尺，奈米 (nm) =  $1 \times 10^{-9}$  公尺)



5

$$3.2 \mu\text{m} = 3.2 \times (1 \times 10^{-6}) \text{ m}$$



50

$$64 \text{ nm} = 64 \times (1 \times 10^{-9}) \text{ m}$$



500

$$\therefore \frac{A}{B} = \frac{3.2 \times (1 \times 10^{-6})}{64 \times (1 \times 10^{-9})} = \frac{32 \times 10^{-7}}{64 \times 10^{-9}} = 0.5 \times 10^2 = 50 //$$



20

## 6 - Quiz

將  $(\frac{2}{3})^{100}$  表成小數時，(小數點後第幾位開始出現不為0之數字?)

→ 看首報: Consider  $\log a = n + \log b \Rightarrow$    
 $\left. \begin{array}{l} n \geq 0: \text{位數} \\ \text{存 } n+1 \text{ 位數} \\ n < 0: \text{第} \\ |n| \text{ 位起不為 } 0 \end{array} \right\}$    
 一定化成  $\oplus$

Remark: 常用對數值.

$$\log 1 = 0 \quad \log 2 \approx 0.3010$$

$$\log 3 \approx 0.4771 \quad \log 7 \approx 0.8451$$

$$\log 10 = 1.$$

Def:  $10^b = r \Leftrightarrow b = \log r$ , 其中  $\log r$  is called the 「常用對數」.

Thm: 對數律. Let  $r, s > 0$ .  $t \in \mathbb{R}$ .

$$1) \log r + \log s = \log rs$$

$$2) \log r - \log s = \log \frac{r}{s}$$

$$3) \log r^t = t \log r.$$



16

$$\log \left(\frac{2}{3}\right)^{100} \\ = 100 \log \frac{2}{3}$$

$$= 100 (\log 2 - \log 3)$$

$$\approx 100 (0.3010 - 0.4771)$$

$$= -17.61 = -18 \oplus 0.39.$$

$$\therefore |-18| = 18 \Rightarrow \text{第 } 18 \text{ 位開始}$$



17



18



19

# 7 - Quiz

設  $a, b$  是正數，求  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$  之最小值。

Hint:  $x = \frac{b}{a}, y = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ .

Note:  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$  : 倒數和

$$\therefore \frac{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}$$

$$\therefore \frac{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}{2} \geq \sqrt{1} = 1$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 //$$

Thm: 算几不等式.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \text{ 等号成立於 } a=b.$$

Remark: 使用時機.

1) 正數 2) 相加

3) 相乘 4) 倒數和.

# 8 - Quiz

活力早餐店豆漿一杯15元，水煎包一個10元。小丸子帶80元，買了x杯豆漿，y個水煎包，若她兩種都要買，但80元不一定要全部用完，且每一種買法的機會都相等，則 $x > y$ 的機率為何？



$\frac{5}{16}$

By Question, we get.  $15x + 10y \leq 80$  ( $x \geq 1, y \geq 1$ ).



$\frac{3}{8}$

x	1	2	3	4
y	1~6	1~5	1~3	1~2



$\frac{7}{16}$

$\Rightarrow (1.1)(1.2) \cdots (1.6), (2.1) \cdots (2.5), (3.1) \cdots (3.3), (4.1), (4.2)$ .



$\frac{1}{2}$

共  $6+5+3+2$  種. = 16 種. (全部)

Consider  $x > y$ , 有 (2.1)(3.1)(3.2)(4.1)(4.2) 這 5 種 (符合)

$$\therefore p = \frac{5}{16}$$



## 9 - Quiz

已知 $\text{pH}$ 值 $= -\log[\text{H}^+]$ ，若有一種洗面乳A標示其 $\text{pH}=5$ ，洗面乳B標示其 $\text{pH}$ 值為6，請問算洗面乳A中氫離子濃度約為洗面乳B中氫離子濃度的幾倍？



1.2



2



6



10

$$A: 5 = -\log[\text{H}^+]. \quad B: 6 = -\log[\text{H}^+].$$

$$\Rightarrow \log[\text{H}^+] = -5. \quad \Rightarrow \log[\text{H}^+] = -6.$$

$$\Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-5}. \quad \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-6}.$$

$$\therefore \frac{A}{B} = \frac{10^{-6}}{10^{-5}} = 10$$

## 10 - Quiz

坐標平面上有一直線 $3x + 4y = 12$ ，則在此直線上的點滿足到兩坐標軸等距離的共有幾個？

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x=y. \\ \text{(正)} \end{array} \text{ or } \begin{array}{l} x=-y. \\ \text{(反)} \end{array}$$



1



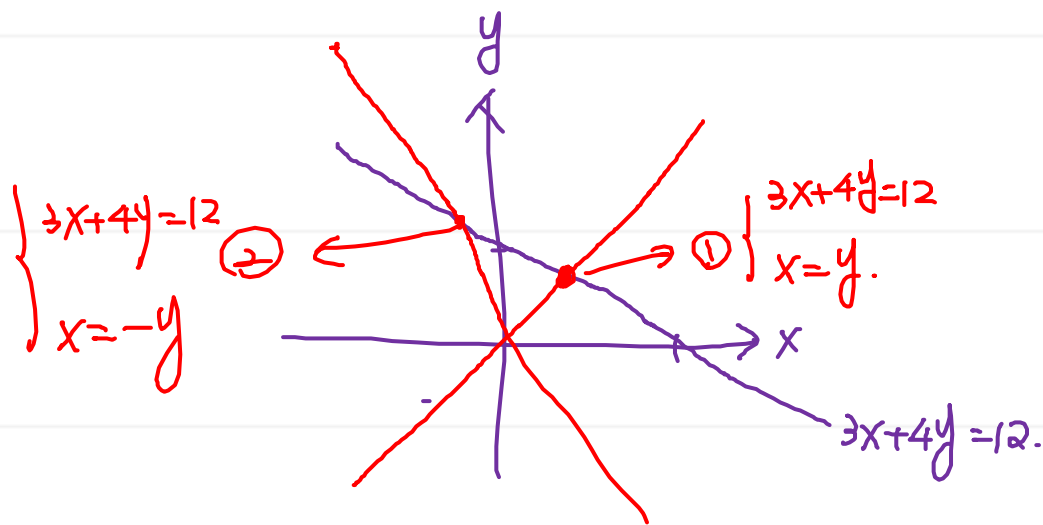
2



3



0





# Class Times

開始上課啦

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※

# 一、集合的基本概念

## 1. 何謂集合(set)

Ex: 東女      Ex: 家

集合為滿足某些特定條件所形成的群體，稱為「集合」。其中集合中的每一個成員為集合的元素 ~~(number)~~ <sup>element</sup>。若 $x$ 為集合 $A$ 中的一個元素，以符號  $x \in A$  表示，稱作「 $x$ 屬於 $A$ 」；反之，若 $x$ 不為集合 $A$ 中的一個元素，以符號  $x \notin A$  表示，稱作「 $x$ 不屬於 $A$ 」。

## 2. 集合表示法

### (1) 文氏圖

用以表示集合的一種草圖。

### (2) 列舉法

Ex:  $\{1, 2, 3\}$

將集合中的元素逐一系列出，放置於 $\{ \}$ 中。

### (3) 敘述法(構式法)

形如  $\{ \text{對象} \mid \text{條件} \}$  的描述方式。

Ex:  $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$      $\{n \mid \underline{n \text{ is odd}}\}$      $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 2x - 1\}$

### (4) 集合內重複的元素只寫一次。

① 原因：元素無順序之分。

② 重複元素只算一個。



### 3. 子集合(子集)

#### (1) 空集合

##### ① 定義

沒有集合的元素，以符號 $\emptyset$ 或 $\{ \}$ 表示。

##### ② 性質

I. 可以作為元素 (使用符號:  $\emptyset \in A$ )

II. 可以作為集合 (使用符號:  $\emptyset \subseteq A$ )

" $\emptyset$  必須是集合的元素"

$$\begin{aligned} \text{Ex: } A &= \{1, 2\} \\ B &= \{1, 2, 3, 4\} \\ A &\subset B \end{aligned}$$

#### (2) 定義(子集)

若集合 $A$ 和 $B$ 滿足「在 $A$ 中的所有元素皆在 $B$ 中」，則稱 $A$ 為 $B$ 的子集合，記為  $A \subseteq B$  (亦可寫成  $A \subset B$ )

~~3~~ 空集合為 任何集合的子集合。

$$\text{Ex: } A = \{\emptyset, \{1, 2\}, 3\}$$

$$\textcircled{1} \emptyset \in A \quad \textcircled{2} \emptyset \subseteq A$$

#### (4) 子集合的個數

若集合 $A$ 有 $n$ 個元素，則集合 $A$ 有  $2^n$  個元素。

〈說明〉  $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$

$$\text{Ex: } A = \{1, \{2, 3\}, 4\}$$

$$\textcircled{1} \emptyset \notin A \quad \textcircled{2} \emptyset \subseteq A \quad \textcircled{3} \{2, 3\} \subseteq A$$

F                      T                      F

• 此定理為二項式定理的應用。

e. g. 若集合 $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ，則集合 $A$ 有 8 個子集合。



# 《例題 1》集合基本概念

Remark: 元素用  $\in$ . 集合用  $\subseteq$ .

設集合  $A = \{w, x, y, z\}$ ，則下列敘述何者錯誤？

(A)  $\phi \subset A$  (B)  $w \in A$  (C)  $\{y, z\} \subseteq A$

【解】

C

$$x \in [0, 1)$$

$$x \in (0, 1)$$

$$x \in [0, 1]$$

## 《例題 2》求子集的個數

設集合  $A = \{x, y, z\}$ ，試寫出  $A$  的所有子集，並計算所有子集個數。

【解】

$$2^3 = 8.$$

$\{\}$	$\{x\}$	$\{x, y\}$	$\{x, y, z\}$
	$\{y\}$	$\{x, z\}$	$C_3^3$
	$\{z\}$	$\{y, z\}$	
$C_0^3$	$C_1^3$	$C_2^3$	

#### 4. 集合的相等

設 $A$ 、 $B$ 為兩個集合。若  $A \subset B$  and  $B \subset A$ ，則稱 $A$ 、 $B$ 為兩集合相等，符號記為 $A=B$ 。

#### 5. 集合的運算

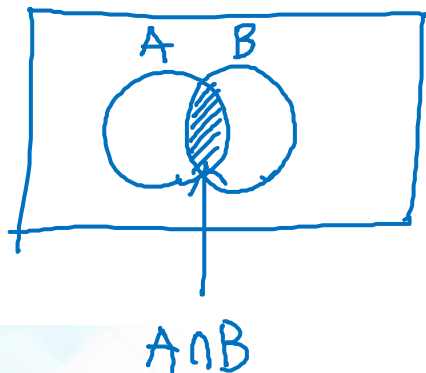
##### (1) 交集

##### ① 定義

設集合 $A$ 與 $B$ 的交集為 $A$ 與 $B$ 兩集合中共同元素所形成的集合，以符號記為  
 $A \cap B = \{x \in A, x \in B\}$ 。

② 口訣：你有我也有。

##### ③ 文氏圖



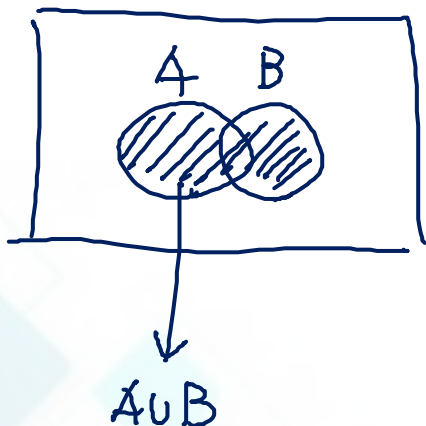
## (2) 聯集

### ① 定義

設集合 $A$ 與 $B$ 的聯集為 $A$ 與 $B$ 兩集合中所有元素所形成的集合，以符號記為  
 $A \cup B = \{x \in A, x \in B\}$ 。

### ② 口訣：只要有就有。

### ③ 文氏圖



$$\text{Ex: } A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

### (3) 差集

#### ① 定義

集合A對B的差集為在A中但不在B中所形成的集合，以符號記為

$$A - B = \{x \in A, x \notin B\}.$$

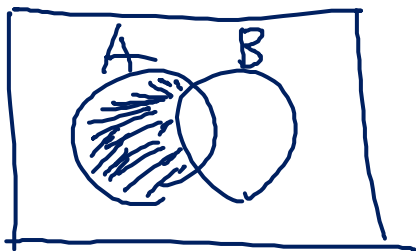
#### ② 口訣：我有你沒有。

$$\text{Ex: } A = \{1, 2\}$$

$$B = \{1, 3\}$$

$$A - B = \{2\} \neq B - A.$$

#### ③ 文氏圖



### (4) 補集

#### ① 字集

若每一個集合都是某一個集合U的子集，則我們稱U是「字集」。

也就是說，字集是最大的集合，以符號U表示。

$$\text{Ex: } A = \{1, 2\}$$

$$B = \{1, 3\}$$

$$U = \{1, 2, 3\}$$



② 定義

集合 $A$ 的補集為 集合 $A$ 以外的元素 所形成的集合，以符號記為

$$A' = A^c = \bar{A} = \{x | x \notin A\}.$$

③ 口訣：除了我以外。

④ 文氏圖



$$\text{Ex: } A = \{1, 2\}$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$A' = \{3, 4, 5\}.$$

$$A' \cup A = U$$

## 6. 笛摩根定律

$$(1) (A \cup B)' = \underline{A' \cap B'}$$

$$(2) (A \cap B)' = \underline{A' \cup B'}$$

• 關係：交集變聯集，聯集變交集

$$\text{Ex: } U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad A = \{1, 2\} \quad B = \{2, 4\}$$

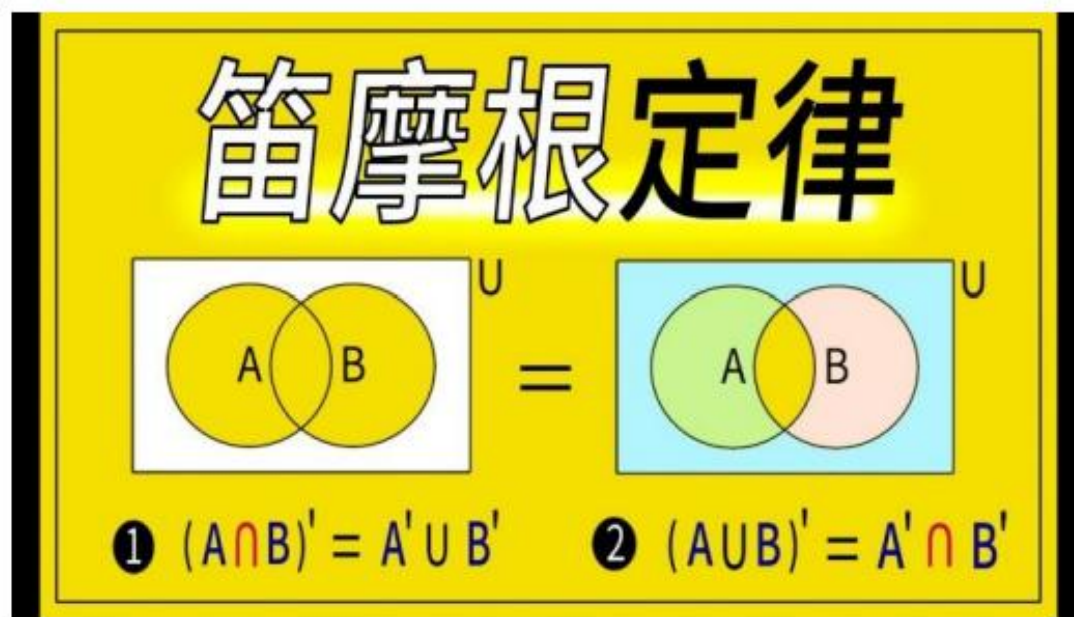
$$1) A \cup B = \{1, 2, 4\} \quad 3) A \cap B = \{2\}$$

$$2) (A \cup B)' = \{3, 5, 6\} \quad 4) (A \cap B)' = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

$$5) A' = \{3, 4, 5, 6\} \quad 6) B' = \{1, 3, 5, 6\}$$

$$7) \underline{A' \cap B'} = \{3, 5, 6\}$$
$$= \underline{(A \cup B)'}$$

$$8) \underline{A' \cup B'} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$
$$= \underline{(A \cap B)'}$$



### 《例題 3》集合的運算

設字集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，又其中質數所成之集合  $A = \{2, 3, 5, 7\}$ ，6 的因數所成之集合  $B = \{1, 2, 3, 6\}$ ，試求下列各式：

- (1)  $A \cup B$       (2)  $(A \cup B)'$       (3)  $A - B$       (4)  $B - A$

Remark:  $A - B \neq B - A$ .

【解】 1)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ .

3)  $A - B = \{5, 7\}$

2)  $(A \cup B)' = \{4, 8, 9\}$ .

$A' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$B' = \{4, 5, 7, 8, 9\}$ .

$A' \cap B' = \{4, 8, 9\}$

4)  $B - A = \{1, 6\}$ .

## 7. 集合的元素個數

(1) 若集合 $A$ 有有限(finite)個元素，則以符號 $n(A)$ 表示集合 $A$ 的元素個數。

e.g.  $A = \{1, 2\}$ ,  $n(A) = 2$ 。

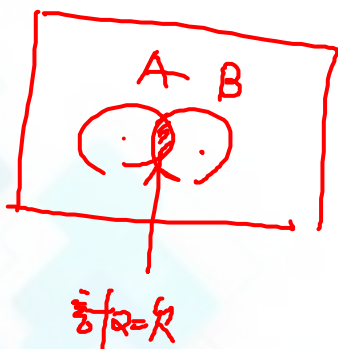
## (2) 排容原理(取捨原理)

設集合 $A$ 、 $B$ 與 $C$ 為有限集合，則：

$$\textcircled{1} \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\textcircled{2} \quad n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

〈說明〉



$$\underline{\text{Ex: } \mathbb{N}} \quad \underline{\text{Ex: } \mathbb{R}} \quad \underline{\text{Ex: } \mathbb{Q}}$$

$$\underline{\text{Ex: } A = \{\phi, \underline{1, 2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{\{ \phi \}}, \underline{5}\}}$$

$$n(A) = \cancel{7} 6$$

$$\underline{\text{Ex: } A = \{\phi, \underline{1}, \underline{\{ \phi \}}, \underline{2}\}, \underline{3}, \underline{\{ \phi \}}, \underline{4}\}}$$

$$n(A) = \cancel{6} 5$$

$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

→ graph! exercise!

《例題 4》集合元素的個數

A

B

$A \cap B$

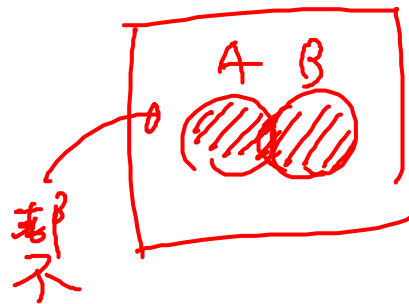
二年八班有 40 位學生，他們其中有 10 人喜歡慢跑，有 18 人喜歡打籃球，同時喜歡慢跑和打籃球的有 8 人，試問：

- (1) 喜歡慢跑或打籃球的有幾人？
- (2) 兩項運動都不喜歡的有幾人？

【解】

$$\begin{aligned} 1) \quad n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 10 + 18 - 8 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 40 - n(A \cup B) \\ &= 40 - 20 \\ &= 20 \end{aligned}$$





## 二、樣本空間

### 1. 試驗

ex: 擲骰子\*1. 投擲的過程.

對於不確定結果的事物上，利用觀察並且找出其可能的結果，則稱此過程為「隨機試驗」，簡稱「試驗」。

### 2. 樣本空間

ex: 擲一顆骰子.  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  每個元素即為「樣本點」

以試驗所產生可能的結果而形成的集合，稱為「樣本空間」，以符號 $S$ 表示之。

### 3. 樣本

樣本空間中的每一個元素即為樣本，亦叫作「樣本點」。

### 《例題 5》樣本空間

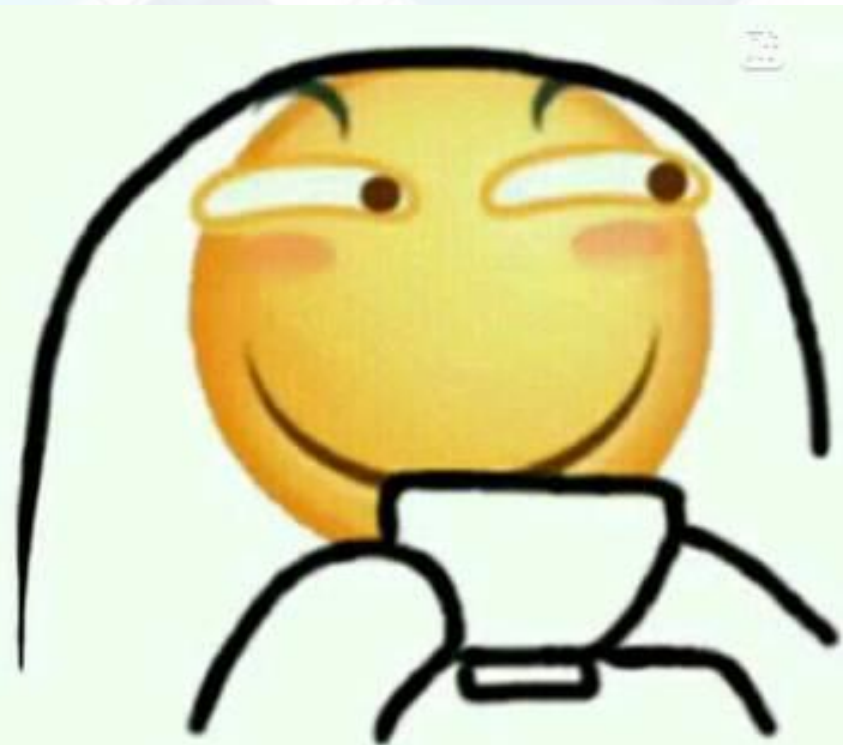
由一條燈泡的生產線上，隨機抽取 3 個燈泡來進行其是否為良品的實驗，請寫出其樣本空間  $S$ ，並求出  $n(S)$ 。

【解】

良:  $\checkmark$  不良:  $\times$

$$S = \{ (v, v, v) \quad (v, x, v) \quad (v, v, x) \quad (x, v, v) \quad (x, x, v) \quad (x, v, x) \quad (v, x, x) \quad (x, x, x) \}$$

$$\therefore n(S) = 8 //$$



事情似乎变得有趣起来

# Break Time



# Kahoot Times

名人知多少

※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※



### 三、事件

#### 1. 何謂事件

樣本空間 $S$ 中的每一個子集稱為事件。

若 $n(S) = \alpha$ ，則 $S$ 共有 $2^\alpha$ 個事件。

→ 和子集的概念相同。  
→ 樣本(試驗的所有結果)

#### 2. 基本事件

只有一個樣本點的事件，稱為「基本事件」。

#### 3. 必然事件(全事件)

樣本空間 $S$ 即為「必然事件」。

#### 4. 不可能事件(空事件)

空集合 $\emptyset$ 即為「不可能事件」。

#### 5. 餘事件

事件 $A$ 的餘事件為發生在 $A$ 以外的事件，以符號 $A'$ 表示之。



## 6. 和事件

事件A或事件B發生稱為A與B的和事件，以符號 $A \cup B$ 表示之。

## 7. 積事件

事件A且事件B發生稱為A與B的積事件，以符號 $A \cap B$ 表示之。

## 8. 互斥事件

設集合A、B為兩事件。若  $A \cap B = \phi$ ，則A、B為互斥事件。

### 《例題 6》樣本空間與事件

甲、乙二個袋中均有 10 個球，球上各標示有 1、2、...、10，現從兩袋中隨機各取一球，則二球號碼之差為 5 的樣本空間如下：

$$S = \{(1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10), (6,1), (7,2), (8,3), (9,4), (10,5)\}$$

試求在  $S$  裡：

- (1) 號碼和小於 10 的事件  $A$ 。
- (2) 號碼和大於 12 的事件  $B$ 。
- (3)  $A$  與  $B$  是否為互斥事件？

【解】

$$1) A = \{(1,6), (2,7), (6,1), (7,2)\}$$

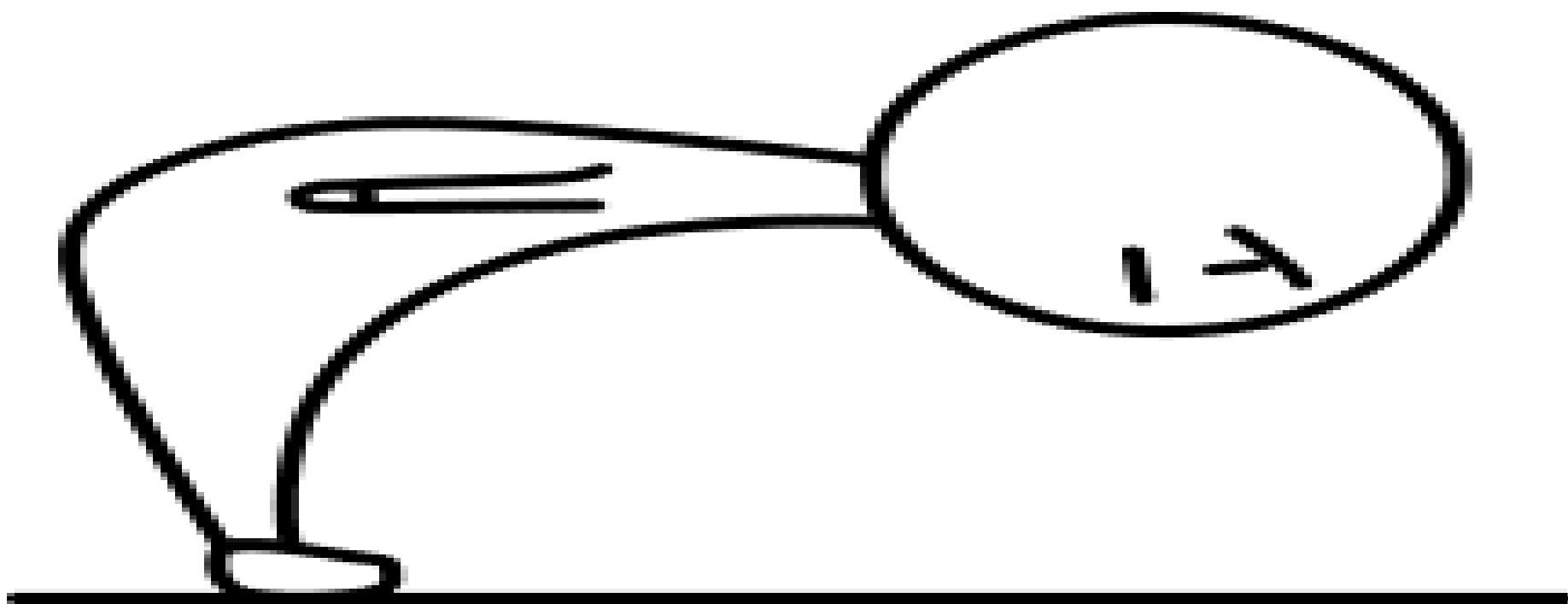
$$2) B = \{(9,4), (10,5), (4,9), (5,10)\}$$

$$3) \because A \cap B = \emptyset \quad \therefore A, B \text{ 為互斥事件}$$

大月  
問  
是  
嗎  
?



※圖片引用自網路公開下載圖片，僅作為教學用，不為營利販售用途※



下台一鞠躬  
~Thank you~