8

數學B④ 學習卷

2-5 二項式定理

答案
一、A A B B D A
二、1. $n+1$　2. $C_r^n x^{n-r} y^r$　3. $r+1$　4. C_r^n
5. 14　6. 128　7. 4^n
三、1. $32x^5+240x^4+720x^3+1080x^2+810x+243$
2. 1215　3. (1)256　(2)128　(3)128

科　年　班　號

姓名：

總　分

一、選擇題（24%，每題 4 分）

★進階題

(A) 1. 下列選項何者為 $(x+y)^3$ 的展開式？
(A) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$　(B) $x^3-3xy^2-3x^2y+y^3$　(C) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
(D) $x^3-3xy^2+3x^2y-y^3$。【課本例題 1】

解 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

(A) 2. $C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=$　(A) 2^n-1　(B) 2^n+1　(C) 2^n　(D) 2^{n-1}。【課本例題 4】

解 $\because$ $C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n$
$\therefore$ $C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n-C_0^n=2^n-1$

(B) 3. 已知 $a=C_1^8+C_3^8+C_5^8+C_7^8$，則 $a=$　(A)256　(B)128　(C)64　(D)32。
【課本例題 4】

解 由公式可得 $C_1^8+C_3^8+C_5^8+C_7^8=\dfrac{2^8}{2}=2^7=128$
故 $a=128$

(B) 4. 由二項式定理知：$(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n$，則 $1+2\times C_1^n+2^2\times C_2^n+\cdots$
$+2^n\times C_n^n=$　(A) 2^n　(B) 3^n　(C) 4^n　(D) 5^n。

解 由二項式定理知：
$(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n$
又令 $x=2$ 代入上式
可得 $(1+2)^n=1+2\times C_1^n+2^2\times C_2^n+\cdots+2^n\times C_n^n=3^n$

(D) 5. 將 $(x+2)^{10}$ 展開時，x^7 之係數為　(A)64　(B)128　(C)256　(D)960。
【課本例題 3】

解 $(x+2)^{10}$ 展開式中的一般項為 $C_r^{10}\times x^{10-r}\times 2^r=C_r^{10}\times 2^r\times x^{10-r}$
令 $10-r=7$　$\Rightarrow$　$r=3$
故 x^7 之係數為 $C_3^{10}\times 2^3=\dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}\times 8=960$

(A) 6. 將 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$ 展開時，x 項的係數為　(A) -3　(B) -1　(C)1　(D)3。
【課本例題 3】

解 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$ 展開式中的一般項為 $C_r^3x^{3-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=C_r^3(-1)^r\times x^{3-2r}$
令 $3-2r=1$　$\Rightarrow$　$r=1$
故 x 項的係數為 $C_1^3(-1)^1=-3$

二、填充題（49%，每格 7 分）

已知 $(x+y)^n=C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}y+C_2^nx^{n-2}y^2+\cdots+C_r^nx^{n-r}y^r+\cdots+C_{n-1}^nxy^{n-1}+C_n^ny^n$，其中 n 為正整數，r 為非負整數。請根據上述展開式回答下列 1～4 題：【課本 P74】

1. $(x+y)^n$ 展開式的項數共有 ___$n+1$___ 項。

解 $(x+y)^n$ 展開式共有 $n+1$ 項

2. $(x+y)^n$ 展開式中的一般項為 ___$C_r^nx^{n-r}y^r$___。

解 $(x+y)^n$ 展開式中的一般項為 $C_r^nx^{n-r}y^r$

3. $C_r^nx^{n-r}y^r$ 是 $(x+y)^n$ 展開式中的第 ___$r+1$___ 項。

解 $C_r^nx^{n-r}y^r$ 是 $(x+y)^n$ 展開式中的第 $r+1$ 項

4. $(x+y)^n$ 展開式中的第 $r+1$ 項係數為 ___C_r^n___。

解 $(x+y)^n$ 展開式中的第 $r+1$ 項為 $C_r^nx^{n-r}y^r$
故 C_r^n 稱為該項的係數

5. 右圖是巴斯卡三角形的部分圖形，則 $a+b+c=$ ____14____ 。

1

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　a　b　c　1

1　5　10　10　5　1

解 $a=1+3=4$ ， $b=3+3=6$ ， $c=3+1=4$

$\therefore\quad a+b+c=4+6+4=14$

1

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

1　5　10　10　5　1

6. $C_0^7+C_1^7+C_2^7+C_3^7+C_4^7+C_5^7+C_6^7+C_7^7=$ ____128____ 。 【課本例題 4】

解 $C_0^7+C_1^7+C_2^7+\cdots+C_7^7=(1+1)^7=2^7=128$

★7. 由二項式定理知： $(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n$ ，

則 $C_0^n+3C_1^n+3^2C_2^n+\cdots+3^nC_n^n=$ ____4^n____ 。

解 由二項式定理知：

$$(1+3)^n=C_0^n\times1^n\times3^0+C_1^n\times1^{n-1}\times3^1+C_2^n\times1^{n-2}\times3^2+\cdots+C_n^n\times1^0\times3^n$$
$$=C_0^n+3C_1^n+3^2C_2^n+\cdots+3^nC_n^n$$
$$=\text{原式}=(1+3)^n=4^n$$

三、計算題（27%，每題 9 分）

1. 試利用二項式定理展開 $(2x+3)^5$ 。 【課本例題 1】

解 [答： $32x^5+240x^4+720x^3+1080x^2+810x+243$]

利用二項式定理得

$$(2x+3)^5=C_0^5(2x)^5\times3^0+C_1^5(2x)^4\times3^1+C_2^5(2x)^3\times3^2+C_3^5(2x)^2\times3^3+C_4^5(2x)^1\times3^4+C_5^5(2x)^0\times3^5$$
$$=32x^5+240x^4+720x^3+1080x^2+810x+243$$

2. 試求 $(3x-y^2)^6$ 的展開式中 x^4y^4 項的係數。 【課本例題 2】

解 [答：1215]

$\because\quad (3x-y^2)^6$ 的一般項為 $C_r^6\times(3x)^{6-r}\times(-y^2)^r$

$\therefore\quad$ 令 $r=2$

可得 $C_2^6\times(3x)^4\times(-1)^2\times(y^2)^2=1215x^4y^4$

故 x^4y^4 項的係數為 1215

3. 試求下列各式之值：

(1) $C_0^8+C_1^8+C_2^8+\cdots+C_8^8$ （3 分）

(2) $C_0^8+C_2^8+\cdots+C_6^8+C_8^8$ （3 分）

(3) $C_1^8+C_3^8+\cdots+C_7^8$ （3 分） 【課本例題 4】

解 [答：(1)256　(2)128　(3)128]

(1)由公式可得 $C_0^8+C_1^8+C_2^8+\cdots+C_8^8=2^8=256$

(2)由公式可得 $C_0^8+C_2^8+\cdots+C_6^8+C_8^8=\dfrac{2^8}{2}=2^7=128$

(3)由公式可得 $C_1^8+C_3^8+\cdots+C_7^8=\dfrac{2^8}{2}=2^7=128$