第二次小考 解析

一、單選題：(8 小題，每題 5 分，共 40 分)

1. (　　) $C_0^{10}-C_1^{10}+C_2^{10}-C_3^{10}+\cdots-C_9^{10}+C_{10}^{10}=$　(A)1　(B)0　(C)2　(D)4

【龍騰自命題】

解答　B

解析　因為 $C_0^{10}+C_2^{10}+C_4^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=C_1^{10}+C_3^{10}+C_5^{10}+\cdots+C_9^{10}$

所以 $C_0^{10}-C_1^{10}+C_2^{10}-C_3^{10}+\cdots-C_9^{10}+C_{10}^{10}=(C_0^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10})-(C_1^{10}+C_3^{10}+\cdots+C_9^{10})=0$

2. (　　) $(x+y)^5$ 的二項展開式共有　(A) 2 項　(B) 4 項　(C) 5 項　(D) 6 項

【隨堂卷】

解答　D

解析　$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

共有 6 項

3. (　　) 由 8 件不同的事物，任選 1 件、2 件、……或 8 件的組合總數為　(A)127　(B)128　(C)255　(D)256

【龍騰自命題】

解答　C

解析　$C_1^8+C_2^8+C_3^8+\cdots\cdots+C_8^8=2^8-1=255$

4. (　　) 設 $a=C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}$，$b=C_1^9+C_3^9+C_5^9+C_7^9+C_9^9$，則 $a+b=$　(A)1279　(B)1280　(C)1565　(D)1566

【龍騰自命題】

解答　A

解析　$\because\ C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}=1024$

$\therefore\ a=1024-1=1023$

$b=\dfrac{2^9}{2}=2^8=256 \quad\Rightarrow\quad a+b=1023+256=1279$

5. (　　) 將 $(x+2)^{10}$ 展開時，x^7 之係數為　(A)64　(B)128　(C)256　(D)960

【學習卷】

解答　D

解析　$(x+2)^{10}$ 展開式中的一般項為 $C_r^{10}\times x^{10-r}\times 2^r=C_r^{10}\times 2^r\times x^{10-r}$

令 $10-r=7 \quad\Rightarrow\quad r=3$

故 x^7 之係數為 $C_3^{10}\times 2^3=\dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}\times 8=960$

6. (　　) 在 $(x+\dfrac{3}{x})^6$ 的展開式中，x^4 的係數為　(A)18　(B)1458　(C)162　(D)486

【龍騰自命題】

解答　A

解析　$(x+\dfrac{3}{x})^6$ 的一般項為 $C_r^6x^{6-r}(\dfrac{3}{x})^r$

$x^{6-r}\cdot x^{-r}=x^{6-2r}=x^4 \quad\Rightarrow\quad r=1$

x^4 的係數為 $C_1^6 3^1=6\times 3=18$

7. (　　) $(\dfrac{a}{x^2}-\sqrt{3}x)^6$ 展開後常數項的係數為 270，則 $a=$　(A)$\pm\sqrt{7}$　(B)$\pm\sqrt{5}$　(C)$\pm\sqrt{3}$　(D)$\pm\sqrt{2}$

【龍騰自命題，進階卷】

解答　D

解析　$(\dfrac{a}{x^2}-\sqrt{3}x)^6$ 的一般項為 $C_r^6(\dfrac{a}{x^2})^r(-\sqrt{3}x)^{6-r} \quad\Rightarrow\quad x^{-2r}\cdot x^{6-r}=x^{6-3r}=x^0 \quad\Rightarrow\quad r=2$

常數項係數 $=C_2^6\times a^2\times(-\sqrt{3})^4=270 \quad\Rightarrow\quad 15\times a^2\times 9=270 \quad\Rightarrow\quad a^2=2$

$\therefore\ a=\pm\sqrt{2}$

8. (　　) 71^{72} 除以 100 之餘數為　(A)11　(B)21　(C)31　(D)41

【龍騰自命題，進階卷】

解答　D

解析　利用二項式定理

$71^{72}=(70+1)^{72}$

$$=\underbrace{C_0^{72}70^{72}+C_1^{72}70^{71}+C_2^{72}70^{70}+\cdots\cdots+C_{70}^{72}70^2}_{\text{可被 }100\text{ 整除}}+C_{71}^{72}70+C_{72}^{72}$$

$\therefore$ 71^{72}除以 100 之餘數，即為$C^{72}_{71}70+C^{72}_{72}=5041$除以 100 之餘數
$5041\div 100$ 之餘數為 41，則所求之餘數為 41

二、填充題：(10 小題，每題 4 分，共 40 分)

1. 在$(x+y)^9$的展開式中，x^4y^5的係數為____________。

【龍騰自命題】

解答 126

解析 $(x+y)^9$的一般項為$C^9_r x^r y^{9-r}$
$x^r y^{9-r}=x^4y^5 \Rightarrow r=4$
x^4y^5的係數為$C^9_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

2. 設 r 為整數，已知$(x+y)^{10}$展開式中之第 $2r+1$ 項與第 $r+3$ 項係數相等，則此項係數為____________。

【龍騰自命題】

解答 210

解析 $(x+y)^{10}$展開式中，第 $2r+1$ 項與第 $r+3$ 項之係數相等
$\Rightarrow C^{10}_{2r}=C^{10}_{r+2} \Rightarrow 2r=r+2$ 或 $2r+(r+2)=10 \Rightarrow r=2$ 或 $r=\dfrac{8}{3}$
但已知 r 為整數，則可得 $r=2$
故此項係數為$C^{10}_{2\times2}=C^{10}_{2+2}=C^{10}_4=210$

3. 在$(x-3)^8$的展開式中，x^5的係數為____________。

【龍騰自命題】

解答 -1512

解析 $(x-3)^8$的一般項為$C^8_r x^r(-3)^{8-r}$
$x^r=x^5 \Rightarrow r=5$
x^5的係數為$C^8_5(-3)^{8-5}=56\times(-27)=-1512$

4. 化簡$C^n_0-C^n_1+C^n_2-C^n_3+\cdots+(-1)^n C^n_n=$____________。

【super 講義-實力評量】

解答 0

解析 由二項式定理知：
$(1+x)^n=C^n_0+C^n_1x+C^n_2x^2+C^n_3x^3+\cdots+C^n_nx^n$
令$x=-1$代入得$0=C^n_0-C^n_1+C^n_2-C^n_3+\cdots+(-1)^n C^n_n=$原式
$\therefore$ 原式$=0$

5. $C^{11}_1+C^{11}_3+C^{11}_5+C^{11}_7+C^{11}_9+C^{11}_{11}=$____________。

【light 講義-綜合評量】

解答 1024

解析 由公式可得$C^{11}_1+C^{11}_3+C^{11}_5+C^{11}_7+C^{11}_9+C^{11}_{11}=\dfrac{2^{11}}{2}=1024$

6. 設 n 為正整數，若$500<C^n_1+C^n_2+C^n_3+\cdots\cdots+C^n_n<800$，則 $n=$____________。

【進階卷，龍騰自命題】

解答 9

解析 因為$C^n_1+C^n_2+C^n_3+\cdots\cdots+C^n_n=2^n-C^n_0=2^n-1$
故 $500<2^n-1<800$
即 $501<2^n<801$ 又 $2^8=256$，$2^9=512$，所以 $n=9$

7. 利用二項式定理，則$C^{10}_0-2\times C^{10}_1+2^2\times C^{10}_2-2^3\times C^{10}_3+\cdots+2^{10}\times C^{10}_{10}=$____________。

【super 講義-實力評量】

解答 1

解析 由二項式定理知：
$(1-2)^{10}$
$=C^{10}_0\times1^{10}+C^{10}_1\times1^9\times(-2)+C^{10}_2\times1^8\times(-2)^2+C^{10}_3\times1^7\times(-2)^3+\cdots+C^{10}_{10}\times(-2)^{10}$
$=C^{10}_0-2\times C^{10}_1+2^2\times C^{10}_2-2^3\times C^{10}_3+\cdots+2^{10}\times C^{10}_{10}$
故所求$=(-1)^{10}=1$

8. 在$(x+3y)^5$的展開式中，x^4y項的係數為____________。

【light 講義-綜合評量】

解答 15

解析 可將 x 看成第一項，$3y$ 看成第二項

一般項為 $C_r^5(x)^{5-r}(3y)^r$

因為求 x^4y 項，所以取 $r=1$

組合數 C_r^5	$C_1^5=5$
$(x)^{5-r}$	$(x)^4=x^4$
$(3y)^r$	$(3y)^1=3y$
相乘	$15x^4y$

因為 x^4y 項的係數來自於展開式中的 $C_1^5(x)^4(3y)^1=15x^4y$

所以 x^4y 項的係數為 15

9. 在 $(2x-3y)^5$ 的展開式中，x^2y^3 項的係數為____________。

【super 講義-實力評量】

解答 -1080

解析 $\because$ $(2x-3y)^5$ 展開式中的一般項為

$C_r^5\times(2x)^{5-r}\times(-3y)^r=C_r^5\times 2^{5-r}\times(-3)^r\times x^{5-r}\times y^r$

$\therefore$ 令 $r=3$，則 x^2y^3 項的係數為 $C_3^5\times 2^2\times(-3)^3=-1080$

10. 設 n 為正整數，若 $100<C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots+C_n^n<200$，則 n 之值為____________。

【super 講義-實力評量】

解答 7

解析 $\because$ $C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots+C_n^n=2^n-1$，則

原式 $\Rightarrow$ $100<2^n-1<200$ $\Rightarrow$ $101<2^n<201$

又 $2^6=64$，$2^7=128$，$2^8=256$

$\therefore$ $n=7$

三、計算題：(2 小題，每題 10 分，共 20 分)

1. 利用二項式定理展開 $(x^2-2y)^5$。

【龍騰自命題】

解答 $x^{10}-10x^8y+40x^6y^2-80x^4y^3+80x^2y^4-32y^5$

解析 $(x^2-2y)^5=C_0^5(x^2)^5(-2y)^0+C_1^5(x^2)^4(-2y)^1+C_2^5(x^2)^3(-2y)^2+C_3^5(x^2)^2(-2y)^3$

$+C_4^5(x^2)^1(-2y)^4+C_5^5(x^2)^0(-2y)^5$

$=x^{10}-10x^8y+40x^6y^2-80x^4y^3+80x^2y^4-32y^5$

2. 試求 $\left(\frac{1}{x^2}-2x\right)^6$ 展開式中 x^3 項的係數。

【課本習題】

解答 -192

解析 $\left(\frac{1}{x^2}-2x\right)^6$ 展開式的一般項為 $C_r^6\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-r}(-2x)^r=C_r^6\left(x^{-2}\right)^{6-r}(-2)^r x^r=C_r^6(-2)^r x^{-12+3r}$

令 $-12+3r=3$，計算得 $r=5$

故 x^3 項的係數為 $C_5^6(-2)^5=-192$