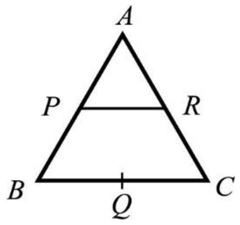
112-1 期末考 解析

一、單選題：(25 小題，每題 4 分，共 100 分)

1. (　　) 如圖，已知△ABC 為正三角形，P、Q、R 是三邊的中點，則 $\overrightarrow{PR}=$



(A) $\overrightarrow{PA}$　(B) $\overrightarrow{BQ}$　(C) $\overrightarrow{BC}$　(D) $\overrightarrow{CQ}$

【龍騰自命題】

解答　B

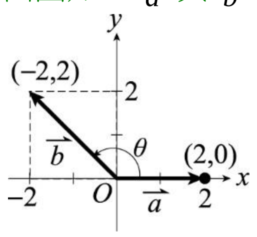
解析　向量要「大小相等，方向相同」才相等

2. (　　) 若 $\overrightarrow{a}=(2,0)$，$\overrightarrow{b}=(-2,2)$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角 θ 為　(A)銳角　(B)鈍角　(C)直角　(D)平角

【隨堂卷】

解答　B

解析　由圖知，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角 θ 為鈍角



3. (　　) 與 $\overrightarrow{a}=(12,5)$ 同方向的單位向量為　(A) $\left(-\dfrac{12}{13},-\dfrac{5}{13}\right)$　(B) $(12,5)$　(C) $\left(\dfrac{12}{13},\dfrac{5}{13}\right)$　(D) $\left(\dfrac{5}{13},\dfrac{12}{13}\right)$

【隨堂卷】

解答　C

解析　$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{12^2+5^2}=13$，與 $\overrightarrow{a}=(12,5)$ 同方向的單位向量為 $\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}=\dfrac{(12,5)}{13}=\left(\dfrac{12}{13},\dfrac{5}{13}\right)$

4. (　　) 已知坐標平面上兩點 $A(9,4)$、$B(5,3)$，則 $\overrightarrow{AB}=$

(A) $(3,-2)$　(B) $(4,1)$　(C) $(-3,2)$　(D) $(-4,-1)$

【隨堂卷】

解答　D

解析　$\overrightarrow{AB}=(5,3)-(9,4)=(-4,-1)$

5. (　　) 點 $P(5,-2)$ 到圓 $C: x^2+y^2+2x+6y-2=0$ 的切線段長為　(A) $\sqrt{10}$　(B) $\sqrt{17}$　(C) 4　(D) 5

【隨堂卷】

解答　D

解析　切線段長為 $\sqrt{5^2+(-2)^2+2\times5+6\times(-2)-2}=\sqrt{25+4+10-12-2}=\sqrt{25}=5$

6. (　　) 若圓 C：$x^2+y^2-8x+6y=0$，則圓 C 之直徑為何？　(A)6　(B)8　(C)10　(D)12

【110 數(B)歷屆試題】

解答　C

解析　圓 C：$x^2+y^2-8x+6y=0$

$\Rightarrow\ (x^2-8x+4^2)+(y^2+6y+3^2)=4^2+3^2$

$\Rightarrow\ (x-4)^2+(y+3)^2=25=5^2$

得圓 C 半徑為 5　$\Rightarrow$　直徑 $=2\times5=10$

〔另解〕

圓一般式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

其半徑 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

$\therefore$　此題直徑 $=2\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(-8)^2+6^2-4\times0}=\sqrt{100}=10$

7. (　　) 設兩向量 $\overrightarrow{a}=(x-1,1)$、$\overrightarrow{b}=(x+2,2)$。若滿足內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=6$ 之 x 有兩解 α、β，則 $\alpha+\beta=$

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

【106 數(A)歷屆試題】

解答 A

解析 由 $\overrightarrow{a}=(x-1,1)$，$\overrightarrow{b}=(x+2,2)$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=6$

得 $(x-1,1)\cdot(x+2,2)=6 \quad\Rightarrow\quad (x-1)(x+2)+1\times2=6 \quad\Rightarrow\quad x^2+x-6=0$

$\Rightarrow\quad (x+3)(x-2)=0 \qquad \therefore\quad x=-3$ 或 2

故可設 $\alpha=-3$，$\beta=2$，則 $\alpha+\beta=-3+2=-1$

8. (　　) 設 $\left|\overrightarrow{a}\right|=5$、$\left|\overrightarrow{b}\right|=6$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 30°，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$

(A) $-15\sqrt{3}$　(B) 15　(C) $15\sqrt{2}$　(D) $15\sqrt{3}$

【學習卷】

解答 D

解析 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta=5\times6\times\cos30^\circ=5\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$

9. (　　) 若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$，則 $\overrightarrow{EA}=$

(A) $3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$　(B) $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}$　(C) $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{c}$　(D) $-4\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$

【龍騰自命題】

解答 D

解析 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

$=(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})+(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+(-\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$

$=4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$

$\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AE}=-4\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$

10. (　　) 若 $A(-4,8)$、$B(-2,6)$、$C(2,3)$為平行四邊形 $ABCD$ 的三個頂點，求 $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|=$

(A)7　(B)8　(C)9　(D)10

【龍騰自命題】

解答 D

解析 $\because$　$ABCD$ 為平行四邊形，設 $D(x,y)$

$\therefore$　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \quad\Rightarrow\quad (-2-(-4),6-8)=(2-x,3-y) \quad\Rightarrow\quad (x,y)=(0,5)$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(2,3)-(-4,8)+(0,5)-(-2,6)=(8,-6)$

$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$

11. (　　) 以 $A(2,1)$、$B(4,-5)$為直徑端點的圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則 $d+e+f=$

(A) 5　(B) 1　(C) 0　(D) 2

【super 講義-綜合評量】

解答 B

解析 圓心 $M(x,y)$為 $A(2,1)$、$B(4,-5)$的中點，

即 $M(x,y)=\left(\dfrac{2+4}{2},\dfrac{1+(-5)}{2}\right)=(3,-2)$

半徑 $r=\overline{MA}=\sqrt{(3-2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$

由圓的標準式知：

圓方程式為 $(x-3)^2+(y+2)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad x^2-6x+9+y^2+4y+4=10$

$x^2+y^2-6x+4y+3=0$

$\therefore\quad d+e+f=-6+4+3=1$

12. (　　)一邊長為 a 之正方形與一圓有相同周長，設圓面積為 A，則下列何者正確？ (A) $A=\dfrac{4a^2}{\pi^2}$　(B) $A=\dfrac{a^2}{\pi}$　(C) $A=a^2$　(D) $A=\dfrac{4a^2}{\pi}$

【101 數(A)歷屆試題】

解答 D

解析 $\because$　正方形周長 = 圓周長 $\quad\Rightarrow\quad 4a=2\pi r \quad\Rightarrow\quad r=\dfrac{2a}{\pi}$

$\therefore$　圓面積 $A=\pi r^2=\pi\left(\dfrac{2a}{\pi}\right)^2=\dfrac{4a^2}{\pi}$

13. (　　)以原點為圓心，則通過二直線 $3x+2y=4$ 與 $2x+3y=1$ 交點的圓方程式為　(A) $x^2+y^2=5$　(B) $x^2+y^2=8$　(C) $x^2+y^2=6$　(D) $x^2+y^2=9$

【課本自我評量】

解答　A

解析　$\begin{cases} 3x+2y=4 \cdots\cdots ① \\ 2x+3y=1 \cdots\cdots ② \end{cases}$

① ×2、② ×3 得 $\begin{cases} 6x+4y=8 \\ 6x+9y=3 \end{cases}$

計算得 $5y=-5$，得 $\begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$，即 $(x, y)=(2, -1)$

半徑 $r=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$，圓心 $(0,0)$

由圓的標準式得 $(x-0)^2+(y-0)^2=(\sqrt{5})^2$，計算得 $x^2+y^2=5$

14. (　　)已知直線 L：$2x-y+3=0$，且圓 C：$(x-2)^2+(y+3)^2=20$，若 P 為圓 C 上任一點，則 P 點到直線 L 之最大距離 $=$　(A) $2\sqrt{5}$　(B) $4\sqrt{5}$　(C) $6\sqrt{5}$　(D) $8\sqrt{5}$

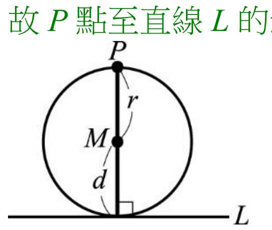
【龍騰自命題】

解答　B

解析　圓心 $M(2, -3)$，半徑 $r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$d(M,L)=\dfrac{|2\times 2-(-3)+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$　⇒　圓與直線相切

故 P 點至直線 L 的最大距離 $=d+r=2\sqrt{5}+2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$



15. (　　)已知圓 C：$x^2+y^2-16=0$，直線 L：$3x+4y-5=0$，設圓 C 與直線 L 相交於 P、Q 兩點，則弦 $\overline{PQ}$ 之長為　(A) $2\sqrt{15}$　(B) $3\sqrt{2}$　(C) $4\sqrt{3}$　(D) $6\sqrt{2}$

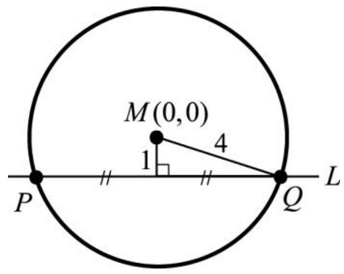
【龍騰自命題】

解答　A

解析　$x^2+y^2-16=0$　⇒　$x^2+y^2=16=4^2$，圓心 $M(0,0)$，$r=4$

$d(M,L)=\dfrac{|0+0-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-5|}{5}=1$

∴　$\overline{PQ}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\times\sqrt{4^2-1^2}=2\sqrt{15}$



16. (　　)下圖為某餐廳的價目表，今日每份餐點價格均為價目表價格的九折。若恂恂今日在此餐廳點了橙汁雞丁飯後想再點第二份餐點，且兩份餐點的總花費不超過 200 元，則她的第二份餐點最多有幾種選擇？

吻仔魚養生粥	蕃茄蛋炒飯	鳳梨蛋炒飯	酥炸排骨飯	和風燒肉飯	蔬菜海鮮麵	香脆炸雞飯	清蒸鱈魚飯	香烤鯛魚飯	紅燒牛腩飯	橙汁雞丁飯	白酒蛤蜊麵	海鮮墨魚麵	嫩烤豬腳飯
60元	70元	70元	80元	80元	90元	90元	100元	100元	110元	120元	120元	140元	150元

(A)5　(B)7　(C)9　(D)11

【104 會考歷屆試題】

解答　C

解析　設第二份餐點的價格為 x 元，則

$(120+x)\times 0.9\le 200$　⇒　$108+0.9x\le 200$

⇒　$0.9x\le 92$　⇒　$x\le 102.2\cdots$

∴　恂恂的第二份餐點可以點 100 元含 100 元以下的共 9 種

17. (　　)若 α、β 為方程式 $2x^2+4x-5=0$ 的兩根，則 $\alpha^2+\beta^2=$　(A)20　(B) -1　(C)1　(D)9

【龍騰自命題】

解答　D

解析　$\begin{cases} 兩根和\ \alpha+\beta=-\dfrac{4}{2}=-2 \\ 兩根積\ \alpha\beta=\dfrac{-5}{2} \end{cases} \Rightarrow (\alpha+\beta)^2=(-2)^2$

$\Rightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=4 \Rightarrow \alpha^2+2\times(\dfrac{-5}{2})+\beta^2=4 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=9$

18. (　　) 設 α、β 為 $x^2+6x+1=0$ 之兩根，則下列敘述何者正確？　(A)$\alpha>0$　(B)$\beta>0$　(C)$\alpha+\beta>0$　(D)$\alpha\times\beta>0$

【龍騰自命題】

解答　D

解析　$\alpha+\beta=\dfrac{-6}{1}=-6<0$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{1}=1>0 \Rightarrow \alpha<0，\beta<0$

19. (　　) 不等式 $\dfrac{19-4x}{3}\geq 3x$ 的解為　(A) $x\leq-\dfrac{19}{13}$　(B) $x\geq\dfrac{19}{13}$　(C) $x\leq\dfrac{19}{13}$　(D) $x\geq-\dfrac{19}{13}$

【龍騰自命題，進階卷】

解答　C

解析　原式 $\Rightarrow 19-4x\geq 9x \Rightarrow 13x\leq 19 \Rightarrow x\leq\dfrac{19}{13}$

20. (　　) 某甲以年利率 10% 複利向銀行借款十萬元，則 3 年後需歸還銀行本利和共多少元？(複利計息公式：若 A 為本利和，P 為本金，r 為利率，n 為期數，則 $A=P(1+r)^n$)　(A)131100　(B)133100　(C)131300　(D)11330

【super 講義-綜合評量】

解答　B

解析　$A=100000\times(1+10\%)^3=100000\times\left(\dfrac{11}{10}\right)^3=133100$ (元)

21. (　　) 一等差級數和為 318，首項為 -12，公差為 7，則此級數共有　(A)11 項　(B)12 項　(C)13 項　(D)14 項

【學習卷】

解答　B

解析　由公式 $S_n=\dfrac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$

得 $318=\dfrac{n}{2}\left[2\times(-12)+(n-1)\times 7\right] \Rightarrow 636=n\times(7n-31)$

$\Rightarrow 7n^2-31n-636=0 \Rightarrow (7n+53)(n-12)=0$

$\Rightarrow n=12$ 或 $-\dfrac{53}{7}$ (不合)　$\therefore$ 此級數共有 12 項

22. (　　) 設一等差級數首項為 5，公差為 7，和為 365，則此級數共有幾項？　(A)10　(B)7　(C)9　(D)11

【super 講義-綜合評量】

解答　A

解析　由 $S_n=\dfrac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right] \Rightarrow 365=\dfrac{n}{2}\left[2\times 5+(n-1)\times 7\right]$

$\Rightarrow 730=n\times(7n+3) \Rightarrow 7n^2+3n-730=0$

$\Rightarrow (7n+73)(n-10)=0 \Rightarrow n=10$ 或 $-\dfrac{73}{7}$ (不合)

$\therefore$ 此級數共有 10 項

23. (　　) 若首項為 a，公比為 0.1 的等比級數，其前 4 項的和為 111.1，則 $a=$　(A)999　(B)99　(C)1000　(D)100

【龍騰自命題，進階卷】

解答　D

解析　$r=0.1=\dfrac{1}{10}$，$S_4=111.1=\dfrac{1111}{10}$

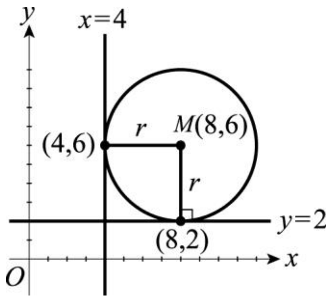
$S_4=\dfrac{a[1-(\frac{1}{10})^4]}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{1111}{10} \Rightarrow \dfrac{10}{9}a\times\dfrac{9999}{10000}=\dfrac{1111}{10} \Rightarrow \dfrac{1}{1000}a=\dfrac{1}{10} \Rightarrow a=100$

24. (　　) 若一圓與直線 $x=4$ 相切於點 $(4,6)$，且與直線 $y=2$ 相切於點 $(8,2)$，則此圓的方程式為何？　(A) $(x-8)^2+(y-6)^2=16$　(B) $(x-6)^2+(y-8)^2=9$　(C) $(x-4)^2+(y-2)^2=25$　(D) $(x-2)^2+(y-4)^2=36$

【104 數(A)歷屆試題】

解答　A

解析



由圖可知圓心為$(8,6)$，且$r=4$

$\therefore$ 圓方程式為$(x-8)^2+(y-6)^2=4^2$

即$(x-8)^2+(y-6)^2=16$

25.（　　）設$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$為兩非零向量，若$2\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$垂直$\overrightarrow{b}$，試求$t$值為 (A)$\dfrac{2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}$ (B)$\dfrac{-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}$ (C)$\dfrac{-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|^2}$ (D)$\dfrac{2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|^2}$

【super 講義-綜合評量】

解答　B

解析　兩向量互相垂直，內積為零

$\because$ $(2\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$ $\Rightarrow$ $(2\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=0$

$\Rightarrow$ $2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$ $\Rightarrow$ $t\left|\overrightarrow{b}\right|^2=-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$

$\therefore$ $t=\dfrac{-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}$