

統測數學 Test 3

◎ 計算題(每題 10 分，共 100 分)

1. 已知一等差數列 $1, 3, 5, 7, \dots$ ，求此等差數列前 50 項之和為何？ 2500
2. 從 1 到 100 之間，能被 2 或 5 整除的自然數的總和為多少？ 3050
3. 設四正數 a, b, c, d 成等比數列，且 $a < b < c < d$ ， $a + d = 28$ ， $b + c = 12$ ，求 c 之值為何？ 9
4. 於 16 與 81 之間插入三數，使成等比數列，又此數列各項均為正，則所插入的第三數為何？ 54
5. 怡婷連續五年以每年年初存入 100000 元之計畫存款，而銀行答應以年利率 6% 之複利計算，試求第五年結束時之總存款約為多少元？【 $(1.06)^5 = 1.338$ 】 597133
6. 若方程式 $x^2 + (k - 2)x + (2 - k) = 0$ 有實數解，則 k 之範圍為何？ $k \leq -2, k \geq 2$
7. 設方程式 $x^2 + 4x + 3 = 0$ 的兩根為 α, β ，若一新方程式，其根為 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ ，則新方程式為何？
 $x^2 + x - 12 = 0$
8. 若二元一次方程組 $\begin{cases} 2x + ay = -6 \\ bx - y = 3 \end{cases}$ 為無限多組解，則 $a + b = ?$ 1
9. 已知平面上兩點 $A(1, -2)$ 和 $B(2, 1)$ 在直線 $ax + 3y + 5 = 0$ 的同一側，則 a 的範圍為何？
 $a < -4, a > 1$
10. 在面積 3000 平方公尺的建築用地上，以不超過 4000 萬元的建築物建造甲、乙兩種不同形式的住宅，已知甲種每戶占地 200 平方公尺，造價 800 萬元、可獲利 400 萬元；乙種每戶占地 300 平方公尺，造價 200 萬元、獲利 500 萬元。則在此建地建築甲、乙兩種住宅，總共最多可獲利多少萬元？ 5200 萬。

Solution:

1. $d=2$. $a_n=2n-1$. $\therefore a_{50}=99$

$$S_{50} = \frac{(1+99) \times 50}{2} = 2500 //$$

2. $a_1=2$. $a_n=100 \Rightarrow n=50$ $S_{50} = \frac{102 \times 50}{2} = 51 \times 50 = 2550$

$$b_1=5 \quad b_n=100 \Rightarrow n=20 \quad S_{20} = \frac{105 \times 20}{2} = 105 \times 10 = 1050$$

$$c_1=10 \quad c_n=100 \Rightarrow n=10. \quad S_{10} = \frac{110 \times 10}{2} = 550$$

$$\therefore S = S_{50} + S_{20} - S_{10} = 3050 //$$

3. Assume the number is

$$a, ar, ar^2, ar^3.$$

$$\therefore \begin{cases} a+ar^3=28 \\ ar+ar^2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+r^3)=28 \\ ar(1+r)=12 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{r^3+1}{r+r^2} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}. \quad 3r^3+3=7r+7r^2$$

$$\therefore 3r^3-7r^2-7r+3=0. \xrightarrow[r=3]{\text{十字相乘法}} (r-3)(3r^2+2r-1)=0.$$

$$\therefore (r-3)(r+1)(3r-1)=0 \quad \therefore r=3, -1, \frac{1}{3} \Rightarrow r=3$$

$$\therefore a=1 \quad \therefore c=ar^2=1 \cdot 3^2=9 //$$

$$4. a_1 = 16. a_5 = a_1 \cdot r^4 = 8).$$

$$r^4 = \frac{8}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad \therefore b_3 = a_4 = a_1 \cdot r^3 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 //$$

$$5. \$ = 100000 \times (1+6\%)^5 + \dots + 100000(1+6\%)$$

$$= 100000 \cdot (1.06 + \dots + 1.06^5)$$

$$= 100000 \cdot \frac{1.06(1.06^5 - 1)}{1.06 - 1} = 100000 \cdot \frac{1.06 \times 0.338}{0.06}$$

$$\approx 100000 \times 5.97133 = 597133 //$$

$$6. D \geq 0.$$

$$(k-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2-k) \geq 0. \Rightarrow k^2 - 4k + 4 - 8 + 4k \geq 0.$$

$$\therefore k^2 - 4 \geq 0$$

$$\therefore k \leq -2, k \geq 2 //$$

$$7. \begin{cases} \alpha + \beta = -4 \\ \alpha\beta = 3. \end{cases}$$

$$(x - (\alpha + \beta))(x - \alpha\beta) = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x^2 + x - 12 = 0 //$$

$$8. \frac{2}{b} = \frac{9}{-1} = \frac{-6}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \quad \therefore a+b = 1 \quad \text{///}$$

$$9. (a-b+5)(2a+3+5) > 0$$

$$(a-1) \cdot 2(a+4) > 0 \Rightarrow (a-1)(a+4) > 0$$

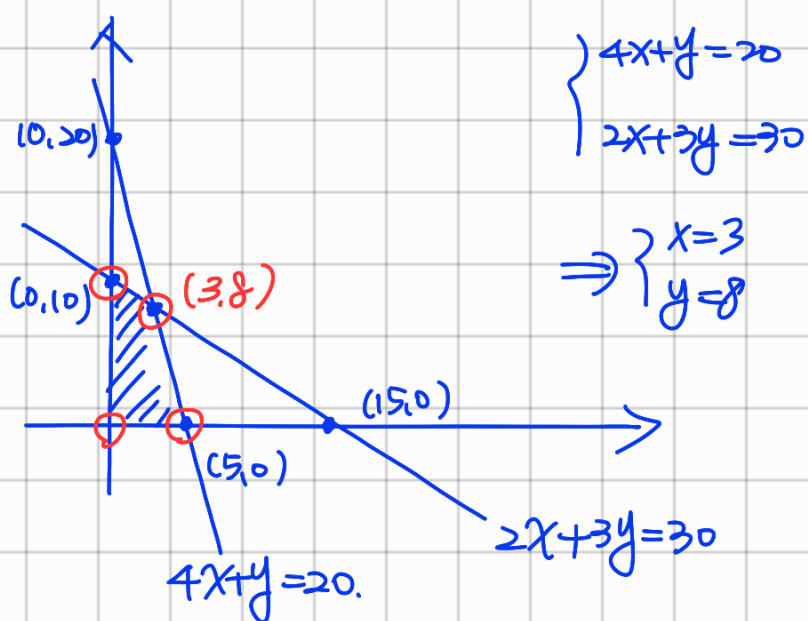
$$\therefore a < -4, a > 1 \quad \text{///}$$

10.

	总	造	利	Let
甲	200	800	400	x
乙	300	200	500	y
	3000	4000		$f(x,y) = 400x + 500y$

$$\Rightarrow \begin{cases} 200x + 300y \leq 3000 \\ 800x + 200y \leq 4000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 30 \\ 4x + y \leq 20 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 15 \\ \hline y & 10 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 5 \\ \hline y & 20 & 0 \end{array}$$



$$\begin{cases} 4x + y = 20 \\ 2x + 3y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 8 \end{cases}$$

(x, y)	$f(x, y)$
$(0, 10)$	5000
$(3, 8)$	5200 ✓
$(5, 0)$	2000

///