

## 統測數學 Test 4

◎ 計算題(每題 10 分，超過 100 分以 100 分計)

1. 設方程式  $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$  之解為  $x$ ，則  $x = ?$  **0**

2. 指數不等式  $3^{x^2-10} \leq (\frac{1}{27})^{x+2}$  的解集合為？  **$\{x | -4 \leq x \leq 1\}$**

3. 設  $\log_2 \frac{100}{3} - 3 \log_2 \sqrt[3]{15} = a + b \log_2 3 + c \log_2 5$ ，其中  $a, b, c$  為實數，則  $a + b + c = ?$  **1**

4. 設  $\alpha, \beta$  為方程式  $\log_2 x = \log_x 2$  的兩根，則  $\alpha^3 + \beta^3 = ?$   **$\frac{65}{8}$**

5. 若  $124^x = 4, 31^y = 8$ ，則  $\frac{3}{y} - \frac{2}{x}$  之值為何？ **2**

6. 已知  $1 \leq \log_2(\log_3 x) \leq 2$ ，則  $x$  的範圍為何？  **$9 \leq x \leq 81$**

7. 已知  $\log 3.49 \approx 0.5428$ ，若  $\log N \approx 4.5428$ ，則  $N = ?$  **34900**

8. 試問  $(\frac{1}{3})^{20}$  的值從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數？ **10**

9. 將甲、乙、丙、丁、戊五人排成一列，試求下列情況的方法數。

(1) 甲、乙相鄰 **48** (2) 甲不排首 **96**

10. 任意將 2 個紅球、2 個白球、4 個綠球排成一排，試求下列情況的方法數。

(1) 最左邊是白球 **105** (2) 4 個綠球均分開 **30**

11. 平面上有一個凸十二邊形，其對角線數量共有幾條？ **54**

12. 求正整數 504 的正因數個數。 **24**

13. 集合  $S = \{a, \{b\}, \{c, d\}, \emptyset, \{\emptyset, e\}\}$  共有多少個子集合？ **32**

14. 投擲兩顆均勻骰子，再出現點數和為 7 的條件下，其中有一顆為 4 點的機率為何？  **$\frac{1}{3}$**

15. 假設錢包裡有 500 元鈔票 3 張，100 元鈔票 5 張，今自錢包中隨機取出鈔票 2 張，令  $x$  表示 2 張鈔票幣值的和，則  $x$  的數學期望值  $E(x) = ?$  **500**

Solution:

1.  $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$ . Let  $t = 2^x$

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \iff (t-1)(t+3) = 0$$

$$\therefore t = 1, -3 \quad \begin{cases} t=1 \iff 2^x=1 & \therefore x=0 \\ t=-3 \iff 2^x=-3 & \times \end{cases}$$

2.  $3^{x^2-10} \leq 3^{-3x-6}$

$$\iff x^2 - 10 \leq -3x - 6$$

$$\iff x^2 + 3x - 4 \leq 0 \iff (x-1)(x+4) \leq 0 \iff -4 \leq x \leq 1$$

$$\iff \{x \mid -4 \leq x \leq 1\}$$

3.  $\log_2 100 - \log_2 3 - 3 \log_2 15^{\frac{1}{3}} = \log_2 100 - \log_2 3 - \log_2 15$

$$= \log_2 100 - 2 \log_2 3 - \log_2 5 = \log_2 4 + \log_2 25 - 2 \log_2 3 - \log_2 5$$

$$= 2 + 2 \log_2 5 - 2 \log_2 3 - \log_2 5 = 2 - 2 \log_2 3 + \log_2 5$$

$$\therefore a=2, b=-2, c=1.$$

$$\therefore a+b+c=1$$

$$4. \log_2 x = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$\Leftrightarrow r = \log_2 x \Leftrightarrow r = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = \pm 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r=1. \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x=2. \\ r=-1. \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x=2^{-1} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125}{8} - \frac{60}{8} = \frac{65}{8} //$$

$$5. \log_2 124^x = \log_2 4 \Rightarrow x \log_2 124 = 2 \Rightarrow \frac{2}{x} = \log_2 124$$

$$\log_2 31^y = \log_2 8 \Rightarrow y \log_2 31 \Rightarrow \frac{3}{y} = \log_2 31$$

$$\therefore \frac{3}{y} - \frac{2}{x} = \log_2 124 - \log_2 31 = \log_2 4 = 2 //$$

$$6. \log_2(\log_3 x) \geq 1 \Leftrightarrow \log_3 x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 3^2 = 9.$$

$$\log_2(\log_3 x) \leq 2 \Leftrightarrow \log_3 x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 3^4 = 81.$$

$$\therefore 9 \leq x \leq 81 //$$

$$7. 4 + \lg 3.49 = 4 + 0.5428 = 4.5428.$$

$$\therefore N = 3.49 \times 10000 = 34900 //$$

$$8. \lg\left(\frac{1}{3}\right)^{20} = 20(-\lg 3) \approx 20 \cdot (-0.4771) = -9.542$$

$$= 10 + 0.458$$

$$\therefore |-10| = 10 = n //$$

$$9. a) 4! \times 2! = 48 //$$

$$b) \text{全一排列首} = 5! - 4! = 120 - 24 = 96 //$$

$$10. a) 1 \cdot \frac{7!}{2!4!} = 105 //$$

$$b) \text{線插空隙} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot {}^5P_4 \cdot \frac{1}{4!} = 30 //$$

$$11. C_2^{12} - 12 = \frac{12 \cdot 11}{2} - 12 = 66 - 12 = 54 //$$

$$12. 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 (5) //$$

13.  $S$  中有  $a, \{b\}, \{c, d\}, \emptyset, \{\emptyset, e\}$  5 个 element

$$\Rightarrow \text{有 } 2^5 = 32 //$$

14.  $A$ : 点数和为 7  $A \cap B$ : 有一骰子 4 点.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} //$$

$$15. \mu = 500 \cdot \frac{3}{8} + 100 \cdot \frac{5}{8} = \frac{2000}{8}$$

$$\therefore E(X) = 2\mu = 2 \cdot \frac{2000}{8} = \frac{2000}{4} = 500 //$$