

統測數學 Test 1

計算題：每題 10 分，共 100 分

切記：計算過程比答案更重要，沒有計算過程不給分。

- (13,4) (1,-2) (-3,4)
1. 已知 $A(7, 1)$ 、 $B(-1, 1)$ 、 $C(5, 4)$ 為平行四邊形的其中三個頂點，試求第四個頂點為何？
 2. 某旅行社招攬旅行團，預定人數 30 人時每人收費 40000 元，若每增加一人則每人團費可減少 1000 元，試問旅行團應加收多少人，才能使收入達到最多？ 5人
 3. 設 k 為實數，且 $kx^2 + 4x + (k + 3)$ 的值恆為負，求在 k 之範圍中最大整數為何？ -5
 4. 若座標平面上三點 $A(-2, 6)$ 、 $B(10, 2)$ 與 $C(k, k + 4)$ 三點共線，則 $k = ?$ 1
 5. 已知兩點 $A(-1, 2)$ 、 $B(3, 4)$ ，則線段 \overline{AB} 的垂直平分線方程式為何？ $2x + y - 5 = 0$
【直線方程式必須化成 $ax + by + c = 0$ 的形式， $a:b:c$ 為最簡單整數比且 $a > 0$ ，否則扣 3 分】
 6. 已知一直線 L 之斜率為 -2 ，且與點 $(2, 0)$ 之距離為 $\sqrt{5}$ ，又 L 不通過第三象限，則 L 之方程式為何？ $2x + y - 9 = 0$
【直線方程式必須化成 $ax + by + c = 0$ 的形式， $a:b:c$ 為最簡單整數比且 $a > 0$ ，否則扣 3 分】
 7. 設 $x^3 - 10x^2 + 9x + 6 = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$ ，則 $a + b + c + d = ?$ -8
 8. 設 $f(x)$ 為實係數多項式，若以 $x - 1$ 與 $x + 1$ 除之分別得到餘式 2 與 -2 ，則以 $x^2 - 1$ 除之其餘式為何？ $2x$
 9. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，若 $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ 且 $f(0) = 12$ ，則 $f(5) = ?$ -48
 10. 分解 $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = (x + a)(x + b)(cx + d)$ ，其中 $a < b$ ， $c \neq 1$ ，則 $abcd = ?$ -6

Solution:

$$\begin{array}{lll} \text{Q1. } A+B=C+D_1 & A+C=B+D_2 & A+D_3=B+C_1 \\ (6,2)=(5+x,4+y) & (12,5)=(-1+x,1+y) & (1)+x,1+y)=(4,5) \\ \Rightarrow D_1=(1,-2) & \Rightarrow D_2=(13,4) & \Rightarrow D_3=(-3,4) \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{D可能为 } (1,-2), (13,4), (-3,4) //$$

Q2. 設增加 x 人.

$$y = (30+x)(4000-100x)$$

利用极值概念. $x = \frac{-30+40}{2} = 5(\text{人}) //$

Q3. 恒真 $\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} k < 0 \\ 16 - 4 \cdot k(k+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 0 \\ 16 - 4k^2 - 12k < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4k^2 + 12k - 16 > 0 \\ k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + 3k - 4 > 0 \\ k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(k+4) > 0 \\ k < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k < -4, k > 1 \\ k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow k < -4 //$$

Q4. 三共綫: $M_{AB} = M_{BC}$.

$$\therefore \frac{2-6}{10-(-2)} = \frac{k+4-2}{k-10} \Leftrightarrow \frac{-4}{12} = \frac{k+2}{k-10}$$

$$\therefore \frac{-1}{3} = \frac{k+2}{k-10} \quad \therefore -k+10=3k+6 \quad \therefore 4k=4 \quad \therefore k=1 //$$

Q5. "垂直" "平分" 綫 \Rightarrow 是 AB 中點且和 AB 垂直的直綫.

$$\therefore M = \frac{A+B}{2} = (1, 3).$$

$$M_{AB} = \frac{4-2}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \quad \therefore M_L = -2.$$

$$\therefore L: y = -2x + b \xrightarrow{(1,3)} 3 = -2 + b \Rightarrow b = 5.$$

$$\therefore y = -2x + 5 \Leftrightarrow L: 2x + y - 5 = 0 //$$

Q6. $L \notin \Pi. \Rightarrow$  • $b > 0, m < 0$.

$$L: y = -2x + b \Leftrightarrow 2x + y - b = 0.$$

$$d((2,0), L) = \sqrt{5} = \frac{|2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Leftrightarrow 5 = |4 - b| \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - b = 5. \\ 4 - b = -5. \end{cases}$$

$$\therefore b = -1, 9 \text{ (負不合)} \quad \therefore b = 9.$$

$$\therefore L: y = -2x + 9 \Leftrightarrow L: 2x + y - 9 = 0 //$$

Q7. 利用連續綜合除法.

$$\begin{array}{r|l} 1 & -10+9+6 \\ +1 & -9+0 \\ \hline 1 & -9+0 \\ +1 & -8 \\ \hline 1 & -8 \\ +1 & \\ \hline 1 & -7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ =d. \\ \\ =c \\ \\ =b \end{array}$$

$a=1 \quad \underline{-7=b}$

$$\therefore a+b+c+d = 1-7-8+b = -9 //$$

Q8. $f(x) = (x+1) \cdot g_1(x) + 2.$

$$= (x+1) \cdot g_2(x) - 2$$

$$= (x+1)(x-1) \cdot g(x) + (ax+b)$$

利用餘式定理.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 2 = a+b. \\ f(-1) = -2 = -a+b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2. \\ b=0. \end{cases}$$

$$\therefore r(x) = 2x //$$

Q9. 利用因式定理.

$$\text{Let } f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3).$$

$$\because f(0) = 12 \quad \because 12 = a \cdot (-1)(-2)(-3) \Rightarrow a = -2.$$

$$\therefore f(x) = -2(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\therefore f(5) = -2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = -48 //$$

Q10. 利用一次因式檢驗法.

解. Leader coefficient (取正): 1, 2.

Constant coefficient (正負皆取): $\pm 1, \pm 3$.

得一次因式有 $x+1, x-1, x+3, x-3, 2x+1, 2x-1, 2x+3, 2x-3$
共 8 个.

$$\because f(1)=0, f(-3)=0, f'(-\frac{1}{2})=0.$$

$$\therefore \text{原多項式可分解为 } (x-1)(x+3)(2x+1).$$

$$\therefore a=-1, b=3, c=2, d=1$$

$$\therefore abcd = -6$$