

Chapter 3 式的運算

1/15(日)起 1300-1500 點課

Def: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 x^0$ 方程式
多項式

1) a_n : 領導係數

Recall: $x^0 = 1$

2) a_0 : 常數係數

3) 次數: $\deg f(x) = n$

Def: 1) x^0 零次多項式: 常數多項式. e.g. $f(x) = 3$.

2) 零多項式: $f(x) = 0$.

Remark: 未知數出現在分母, 根號, 絕對值內, 他不是多項式.

• 加減法: 同類項相加.

• 乘除法: 遺缺項要補 0.

(分離係數法)

Ex 1. $f(x) = (2a-4)x^4 + (a+b-1)x^3 - ax^2 + 5x + b$.

$\deg f(x) = 2$. leader: p . constant: q .
-2 -1

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-4=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Ex3. $(x^3+2x-1) \cdot (2x^2-3x+5)$.

sol:

$$\begin{array}{r} 1+0+2-1 \\ 2-3+5 \\ \hline 5+0+10-5 \\ -3+0-6+3 \\ \hline 2+0+4-2 \\ 2-3+9-8+13-5 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^5-3x^4+9x^3-8x^2+13x-5.$$

Ex4.

$$\begin{array}{r} 2-1 \\ 1+2-1 \overline{) 2+3-2-5} \\ 2+4-2 \\ \hline -1+0-5 \\ -1-2+1 \\ \hline 2-6 \end{array}$$

$$Q(x) = 2x-1$$

$$Q(2) = 3$$

$$R(x) = 2x-6$$

$$+ \\ R(5) = 4$$

7

Cor. 综合除法

$$\textcircled{1} x-2$$

$$\begin{array}{r} 1+2-3+4 \quad \textcircled{2} \\ \hline +1x^2 +4x^2 +5x^2 \\ \hline \textcircled{1} +4 +5 \quad \textcircled{14} = R(x) \end{array}$$

$$Q(x) = x^2+4x+5$$

$$R(x) = 14$$

Ex5. $38x^4 - 26x^3 - 196x - 13$. 除以 $x-2$ =0 $x=2$.

sol:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 38 & -26 & +0 & -196 & -13 & \\ \hline 76 & +100 & +200 & +8 & & \\ \hline 38 & +50 & +100 & +4 & -5 & \Rightarrow R(x). \end{array}$$

e.g. $2x^3 + 5x^2 - 3$. $g(x) = \underline{2x+1}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & +5 & +0 & -3 & \\ \hline -1 & -2 & +1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & +4 & -2 & -2 & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$\div 2$

$$1+2-1$$

修正.

只有在 $a_1 = 1$ 時成立

若 $a_1 \neq 1 \Rightarrow \frac{Q(x)}{a_1}$

$R(x) = -2$

$Q(x) = x^2 + 2x - 1$

$A = BQ + R$

Ex6. $2x^3 - x^2 + 5x + 6 = a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$.

sol:

Remark: 連續線分除法

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -1 & +5 & +6 & \\ \hline -4 & +10 & -20 & & \end{array} \quad (-2) = g$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -5 & +15 & & \\ \hline -4 & +8 & -24 & & \end{array} \quad (-24) = d \text{ (早)}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -9 & +33 & & \\ \hline -4 & +18 & -36 & & \end{array} \quad (+33) = c$$

(晚) $a = 2, -13 = b$

晚. \leftarrow

Thm: 除法原理.

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

↓ ↓ ↓ ↓
被除式 除式 商式 餘式

Remark: ① $g(x) \neq 0$.

$$\Rightarrow \deg r(x) < \deg g(x).$$

Cor: 1) 若 $g(x)$ 放大 a 倍, 則 $q(x)$ 縮小 a 倍. $r(x)$ 不變.

(縮小) (放大)

2) 若 $f(x)$ 放大 a 倍, 則 $g(x) \cdot q(x)$ 及 $r(x)$ 皆會 放大 a 倍.

(縮小) (縮小)