

Exercise 6 參考解答

一、單選題：(100 小題，每題 1 分，共 100 分)

1. () 若圓 $x^2 + y^2 - 6x + 2ay - 7 = 0$ 的圓心在 x 軸上，則此圓的面積為何？ (A) 4π (B) 16π (C) 49π (D) 64π

【111 數(B)歷屆試題】

解答

B

解析

\because 圓心在 x 軸上

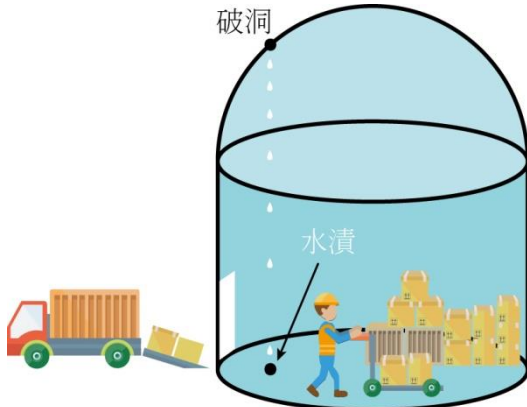
\therefore 圓心 $(3, -a)$ 的 y 坐標為 0，即 $a = 0$

\Rightarrow 圓： $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$

得半徑 $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 - 4 \times (-7)} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4$

圓面積： $\pi \times 4^2 = 16\pi$

2. () 有一座屋頂為半球型的高塔倉庫，四周的牆壁為直徑 6 公尺（假設忽略牆壁厚度）、高度 4 公尺的圓柱體。屋頂因老舊毀損破了一個小洞，導致屋外大雨屋內小雨的狀況，地板因漏水而形成的水漬離牆壁最近的距離為 1 公尺。現在屋頂必須進行維護，請幫忙推算破洞處距離地板有多高？



- (A) 5.6 公尺 (B) 5.9 公尺 (C) 6.2 公尺 (D) 6.5 公尺 (E) 6.8 公尺

【素養題】

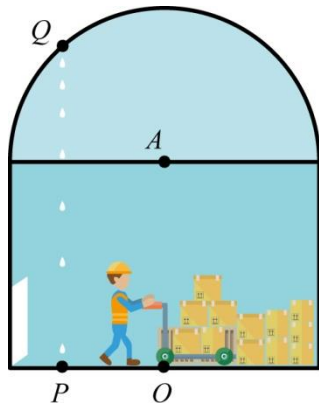
解答

C

解析

設地板中心點位置為 $O(0,0)$ 、地板上水漬位置為 $P(-2,0)$

設包含 \overline{OP} 且垂直地板的平面與建築物截面如圖所示：



設屋頂半圓形圓心為 $A(0,4)$ ，屋頂破洞位置為點 $Q(-2,y)$

則屋頂半圓形為方程式 $x^2 + (y-4)^2 = 3^2$ 的部分， Q 點代入

$\Rightarrow (-2)^2 + (y-4)^2 = 3^2$ ，可得 $y = 4 \pm \sqrt{5}$ (\because 屋頂高於牆壁 $\therefore 4 - \sqrt{5}$ 不合)

\Rightarrow 破洞處距離地板 $\overline{PQ} = y = 4 + \sqrt{5} \approx 6.236$

3. () 已知直線 $L: 5x + 12y = 26$ 與圓 $C: x^2 + y^2 = a$ 相切，則 $a =$

(A)8 (B)4 (C)1 (D)2

【light 講義-綜合評量】

解答

B

解析

因為

$$\begin{matrix} (x^2+y^2=a) \\ =0 \\ =r^2 \end{matrix}$$

圓心 $M(0,0)$ ，且 $a=r^2$ ，因為圓與直線相切，所以 $r=d$

$$\text{又圓心 } M \text{ 到直線 } L \text{ 的距離 } d = \frac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \frac{|5 \times 0 + 12 \times 0 - 26|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\text{因此 } a = r^2 = d^2 = 2^2 = 4$$

4. () 一直線 $L: 3x+4y-6=0$ 與圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 交於 $A、B$ 兩點，則 $\overline{AB} =$
(A) $2\sqrt{3}$ (B) 2 (C) 1 (D) $\sqrt{3}$

【light 講義-綜合評量】

解答

A

解析

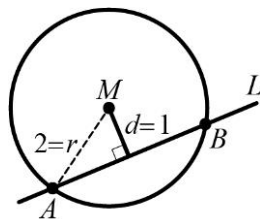
因為

$$\begin{matrix} (x-1)^2+(y-2)^2=4 \\ =0 \\ =r^2 \end{matrix}$$

圓心 $M(1,2)$ ，半徑 $r=2$

$$\text{設圓心 } M \text{ 到直線 } L \text{ 的距離為 } d, \text{ 則 } d = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{由圖知: } \overline{AB} = 2 \times \sqrt{r^2 - d^2} = 2 \times \sqrt{2^2 - 1^2} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$



5. () 一圓以點 $P(3,0)$ 為圓心且與直線 $4x-3y+3=0$ 相切，則該圓半徑為何？ (A)5 (B)4
(C)3 (D)2

【light 講義-綜合評量】

解答

C

解析

圓的半徑為圓心到直線的距離，即 $r = d = \frac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$r = \frac{|4 \times 3 - 3 \times 0 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|12 + 0 + 3|}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

6. () 判斷下列各方程式中，何者在平面坐標上的圖形為圓？ (A) $y = x^2 + 1$ (B)
 $x^2 + (y-1)^2 + 1 = 0$ (C) $x^2 + y^2 - 5 = -1$ (D) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$

【light 講義-綜合評量】

解答

C

解析

(A) $y = x^2 + 1$ 圖形為拋物線 (B) $x^2 + (y-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = -1 < 0 \Rightarrow$ 沒有圖形
(C) $x^2 + y^2 - 5 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ 圖形為一圓 (D) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow$ 圖形為一點

7. () 試求圓心為 $(-2,1)$ ，半徑為 4 之圓方程式為 (A) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ (B)
 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ (C) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ (D) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$

解答

D

解析

∵ 圓心為 $(-2, 1)$ ，半徑為 4，由圓標準式： $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
 得 $[x-(-2)]^2 + (y-1)^2 = 4^2$ ∴ 圓方程式為 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$

8. () 一直線 $L: x+y=3$ 截圓 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$ 於 A, B 兩點，則 \overline{AB} 線段長為何？ (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) 2 (D) $\sqrt{10}$

【松山家商段考題 light 講義-類題】

解答

D

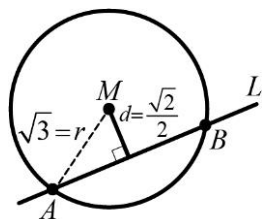
解析

因為

$$\underbrace{(x-1)^2}_{=0} + \underbrace{(y-1)^2}_{=0} = \underbrace{3}_{=r^2}$$

圓心 $M(1, 1)$ ，半徑 $r = \sqrt{3}$ ，設圓心 M 到直線 L 的距離為 d ，則 $d = \frac{|1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

由圖知： $\overline{AB} = 2 \times \sqrt{r^2 - d^2} = 2 \times \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2 \times \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{10}$



9. () 圓 $2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + k = 0$ 與 x 軸相切，則 $k =$ (A) 8 (B) -8 (C) $\frac{25}{8}$ (D) $-\frac{25}{8}$

【龍騰自命題】

解答

A

解析

∵ 圓 $2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + k = 0$ 與 x 軸相切

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + k = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 恰有一組解}$$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + k = 0$ 二根相等

由判別式知： $(-8)^2 - 4 \times 2 \times k = 0$

即 $64 - 8k = 0$ ∴ $k = 8$

〈另解〉

$$\text{圓 } x^2 + y^2 - 4x - \frac{5}{2}y + \frac{k}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \text{圓心 } (2, \frac{5}{4}), \text{ 半徑 } = \frac{1}{2} \sqrt{16 + \frac{25}{4} - 2k}$$

$$\therefore \text{圓與 } x \text{ 軸相切} \quad \therefore \text{半徑} = \frac{5}{4}$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \sqrt{16 + \frac{25}{4} - 2k} = \frac{5}{4} \Rightarrow k = 8$$

10. () 若一圓之切線方程式為 $3x + 4y = 23$ ，已知圓心為 $(-2, 1)$ ，則切點為 (A) $(1, 5)$ (B) $(9, -1)$ (C) $(-3, 8)$ (D) $(5, 2)$

【龍騰自命題】

解答

A

解析

設垂直切線 $3x + 4y = 23$ 的直線為 $4x - 3y = k$

將圓心 $(-2, 1)$ 代入

$$4(-2) - 3 \times 1 = -11 = k$$

\therefore 垂直切線的直線為 $4x - 3y = -11$
 $\Rightarrow 4x - 3y = -11$ 與切線 $3x + 4y = 23$ 的交點即為切點

$$\begin{cases} 4x - 3y = -11 \\ 3x + 4y = 23 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 5 \quad \therefore \text{切點}(1,5)$$

11. () 點 $P(-1, -3)$ 至圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ 之切線段長為 (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

【學習卷】

解答

B

解析

切線段長 $t = \sqrt{(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 - r^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-2)^2 - 13} = \sqrt{16} = 4$

12. () 已知圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 與直線 $3x - 4y = 25$ 交於 A 、 B 兩點且 $\overline{AB} = 24$ ，則此圓半徑為 (A)5 (B)12 (C)13 (D)25

【學習卷】

解答

C

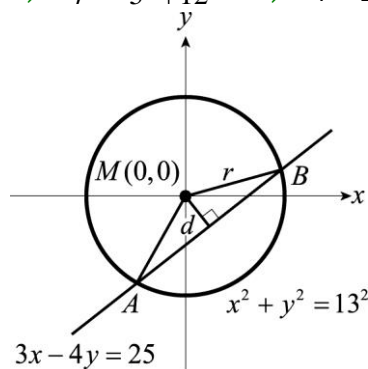
解析

圓心 $M(0,0)$ 到直線距離 $d = \frac{|0-0-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$

又 $\overline{AB} = 2\sqrt{r^2 - d^2} \Rightarrow 24 = 2\sqrt{r^2 - 5^2}$

$\Rightarrow 12 = \sqrt{r^2 - 5^2}$ 兩邊平方得 $12^2 = r^2 - 5^2$

$\Rightarrow r^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow r = \pm 13$ ，但 $r > 0$ ，故圓的半徑為 13



13. () 設 $a > 0$ ，已知直線 $L: x + y - 2 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 = a^2$ 相切（相交於一點），則實數 $a =$ (A)1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D)2

【學習卷】

解答

B

解析

由 $x^2 + y^2 = a^2$ ，得圓心 $M(0,0)$ ，半徑 $r = a$

因為直線 L 與圓相切，所以 $d(M, L) = r$ ，即 $\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = a$ ，整理得 $2 = \sqrt{2}a$ ，故 $a = \sqrt{2}$

14. () 坐標平面上有一圓與直線 $L: 3x + 4y - 5 = 0$ 相切，且圓心為 $(3,4)$ ，則此圓的半徑為 (A)20 (B)15 (C)5 (D)4

【龍騰自命題】

解答

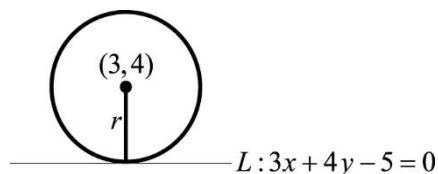
D

解析

\therefore 圓與直線 L 相切

\therefore 半徑即圓心到直線 L 的距離

$r = d = \frac{|3 \times 3 + 4 \times 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$



15. () 自點 $P(6,9)$ 至圓 $C: x^2 + y^2 + 3x - 5y - 26 = 0$ 之切線段長為 (A)2 (B)3 (C)4 (D)8

【龍騰自命題】

解答

D

解析

$$\sqrt{6^2 + 9^2 + 3 \times 6 - 5 \times 9 - 26} = \sqrt{36 + 81 + 18 - 45 - 26} = 8$$

16. () 點 $(1,1)$ 到圓 $x^2 + y^2 = 1$ 的切線段長為 (A)1 (B) $\sqrt{2}$ (C)3 (D)4

【龍騰自命題】

解答

A

解析

$$\text{點}(1,1)\text{到圓 } x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ 的切線段長為 } \sqrt{1^2 + 1^2 - 1} = 1$$

17. () 過 $P(-3,0)$ 且與 $x^2 + y^2 = 9$ 相切的直線方程式為 (A) $x + y = 3$ (B) $y = -3$ (C) $x + 3 = 0$ (D) $y = 3$

【龍騰自命題】

解答

C

解析

$$\text{將點 } P(-3,0) \text{ 代入圓方程式得 } (-3)^2 + 0^2 = 9$$

\therefore 點 $P(-3,0)$ 在圓上，即 P 點為切點

又通過 P 點的半徑在 x 軸上，所以切線垂直 x 軸，故切線為 $x + 3 = 0$

18. () 下列哪一點在圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$ 的外部？ (A) $(-1,2)$ (B) $(2,-1)$ (C) $(1,3)$ (D) $(-3,4)$

【龍騰自命題】

解答

B

解析

$$(A) (-1)^2 + 2^2 + 4 \times (-1) - 6 \times 2 - 5 = -16 < 0, \text{ 點在圓內 } (B) 2^2 + (-1)^2 + 4 \times 2 - 6 \times (-1) - 5 = 14 > 0, \text{ 點在圓外 } (C) 1^2 + 3^2 + 4 \times 1 - 6 \times 3 - 5 = -9 < 0, \text{ 點在圓內 } (D) (-3)^2 + 4^2 + 4 \times (-3) - 6 \times 4 - 5 = -16 < 0 \text{ 點在圓內}$$

19. () 與 $3x - 4y + 10 = 0$ 垂直，且與圓 $x^2 + y^2 = 25$ 相切的直線方程式為 (A) $4x + 3y \pm 5 = 0$ (B) $3x - 4y \pm 5 = 0$ (C) $4x + 3y \pm 25 = 0$ (D) $3x - 4y \pm 25 = 0$

【龍騰自命題】

解答

C

解析

設與圓相切的直線方程式為 $L: 4x + 3y + k = 0$ (\because 與 $3x - 4y + 10 = 0$ 垂直)

圓 $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow$ 圓心 $M(0,0)$ ，半徑 $r = 5$

$$d(M,L) = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 5 = r \Rightarrow |k| = 25 \Rightarrow k = \pm 25$$

\therefore 切線方程式為 $4x + 3y \pm 25 = 0$

20. () 設一直線 $L: ax - y + 12 = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 = 36$ 相交，則 a 的範圍為 (A) $a \geq \sqrt{3}$ 或 $a \leq -\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$ (C) $a \geq 3$ 或 $a \leq -3$ (D) $-3 \leq a \leq 3$

【龍騰自命題，進階卷】

解答

A

解析

$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow \text{圓心 } M(0,0), \text{ 半徑 } r = 6$$

\because 圓與直線相交

$$\therefore d(M,L) = \frac{|a \times 0 - 0 + 12|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} \leq 6 = r \Rightarrow 12 \leq 6\sqrt{a^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 2 \leq \sqrt{a^2 + 1} \Rightarrow 4 \leq a^2 + 1 \Rightarrow a^2 \geq 3 \Rightarrow a \geq \sqrt{3} \text{ 或 } a \leq -\sqrt{3}$$

21. () 平行 $x + 2y = 0$ ，且與圓 $x^2 + y^2 + 2x = 0$ 相切之切線方程式為 (A) $x + 2y \pm \sqrt{5} = 0$ (B) $x +$

$$2y \pm 2\sqrt{5} = 0 \quad (C)x + 2y + 1 \pm \sqrt{5} = 0 \quad (D)x + 2y + 2 \pm \sqrt{5} = 0$$

【龍騰自命題，進階卷】

解答

C

解析

$$\text{設切線 } L: x + 2y + k = 0, \text{ 又 } x^2 + y^2 + 2x = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$$

圓心 $M(-1,0)$ ，半徑 $r=1$

\therefore 相切

$$\therefore d(M,L) = r \Rightarrow \frac{|-1+0+k|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-1+k|}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\therefore |k-1| = \sqrt{5} \Rightarrow k-1 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow k = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore L: x + 2y + 1 \pm \sqrt{5} = 0$$

22. () 設直線 $3x - 4y + 5 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 - 6x + 8y = a$ 相切，則 $a =$ (A)9 (B)11 (C)24 (D)39

【龍騰自命題，進階卷】

解答

B

解析

$$\text{圓 } x^2 + y^2 - 6x + 8y = a \Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = a+25$$

\Rightarrow 圓心 $(3, -4)$ ，半徑為 $\sqrt{a+25}$

由圓心 $(3, -4)$ 到切線 $3x - 4y + 5 = 0$ 之距離等於半徑 $\sqrt{a+25}$

$$\Rightarrow \frac{|3 \times 3 - 4(-4) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \sqrt{a+25}$$

$$\Rightarrow 6 = \sqrt{a+25} \Rightarrow 36 = a+25 \Rightarrow a = 11$$

23. () 與直線 $y = 2x$ 平行，且與圓 $x^2 + y^2 = 9$ 相切的直線方程式為 (A) $y = 2x + 9$ (B) $y = 2x \pm 3$
(C) $y + 2x \pm 3\sqrt{5} = 0$ (D) $2x - y \pm 3\sqrt{5} = 0$

【龍騰自命題，進階卷】

解答

D

解析

圓的切線與直線 $y = 2x$ 平行

$$\text{故設切線為 } y = 2x + k \Rightarrow 2x - y + k = 0$$

圓心 $(0,0)$ 到切線的距離為半徑長 3

$$\Rightarrow \frac{|0-0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 3 \Rightarrow |k| = 3\sqrt{5} \Rightarrow k = \pm 3\sqrt{5}$$

$$\text{切線方程式為 } y = 2x \pm 3\sqrt{5} \Rightarrow 2x - y \pm 3\sqrt{5} = 0$$

24. () 過點 $P(1,2)$ 且與圓 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$ 相切的直線方程式為 (A) $x - 2y - 5 = 0$ (B) $2x - y - 5 = 0$ (C) $x + 2y - 5 = 0$ (D) $2x + y - 5 = 0$

【龍騰自命題】

解答

C

解析

$$\text{圓心為 } M(-1, -2), \text{ 且 } (1+1)^2 + (2+2)^2 = 20 \Rightarrow P(1,2) \text{ 在圓上}$$

設 $Q(x,y)$ 為所求切線 L 上的任意一點

因為 $P(1,2)$ 是切點

$$\text{所以 } \overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{PQ}, \text{ 故 } \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$\text{即 } (1 - (-1), 2 - (-2)) \cdot (x - 1, y - 2) = 0$$

$$\text{計算得 } 2(x-1) + 4(y-2) = 0$$

$$\text{整理得所求切線 } L: 2x + 4y - 10 = 0 \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

25. () 已知一圓的圓心 $(1, -2)$ ，半徑為 4，則此圓的方程式為 (A) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ (B) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ (C) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ (D) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

【龍騰自命題】

解答

D

解析

圓心 $(h,k) = (1, -2)$ ，半徑 $r = 4$

$$\text{又 } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + [y - (-2)]^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

26. () 由圓 $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 16$ 所圍成之面積為 (A) 4π (B) 8π (C) 12π (D) 16π

【龍騰自命題】

解答

D

解析

$$(x+2)^2 + (y-6)^2 = 16 = r^2$$

$$\text{圓面積} = \pi r^2 = \pi \times 16 = 16\pi$$

27. () 圓 $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ 之圓心坐標為 (A)(3, -4) (B)(-3, 4) (C)(-3, -4) (D)(3, 4)

【龍騰自命題】

解答

A

解析

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = -21 + 3^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow \text{圓心為}(3, -4)$$

28. () 若一圓之方程式為 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$ ，則該圓之半徑為 (A) $\sqrt{6}$ (B)2 (C) $2\sqrt{2}$ (D)3

【龍騰自命題】

解答

C

解析

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = -5 + 9 + 4 = 8$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{8})^2$$

$$\Rightarrow \text{半徑 } r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

29. () 圓 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 之圓心坐標為 (A)(-2, -1) (B)(-2, 1) (C)(2, -1) (D)(2, 1)

【龍騰自命題】

解答

B

解析

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow [x - (-2)]^2 + (y-1)^2 = 4$$

$$\text{又}(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\therefore \text{圓心}(h, k) = (-2, 1)$$

30. () 一圓 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 通過A(1,1)、B(3,0)、C(0,2)三點，則 $d + 2e + 3f =$ (A)18 (B)20 (C)23 (D)27

【龍騰自命題，進階卷】

解答

C

解析

$$\text{圓 } x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

$$\text{過點}(1,1)\text{代入} \Rightarrow d + e + f = -2$$

$$(3,0)\text{代入} \Rightarrow 3d + f = -9$$

$$(0,2)\text{代入} \Rightarrow 2e + f = -4$$

$$\Rightarrow d = -9, e = -11, f = 18$$

$$\Rightarrow d + 2e + 3f = -9 + 2 \times (-11) + 3 \times 18 = 23$$

31. () 圓 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 之圓心與點(4,5)所連成之直線的斜率等於 (A)2 (B)4 (C)6 (D)8

【龍騰自命題，進階卷】

解答

B

解析

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 12 + 4 + 9 = 25 \Rightarrow \text{圓心}(2, -3)$$

$$\text{圓心與點}(4,5)\text{所連成之直線斜率等於} \frac{5 - (-3)}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4$$

32. () 下列哪一方程式所表示的圖形為一圓？ (A) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 15 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ (C) $y^2 = -(x-1)^2$ (D) $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$

【龍騰自命題，進階卷】

解答

D

解析

(A) $D = (-6)^2 + 4^2 - 4 \times 15 = 36 + 16 - 60 = -8 < 0$ ，不是圓 (B) $D = (-2)^2 + 4^2 - 4 \times 5 = 4 + 16 - 20 = 0$ ，為一點 (C) $y^2 = -(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 0$ ，為一點 (D) $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ ，為一圓

33. () 圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ 之半徑長為 4，且圓心在直線 $y = bx$ 上，則 $a + b =$ (A) -13 (B) -14 (C) -15 (D) -16

【龍騰自命題，進階卷】

解答

A

解析

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 - a$
半徑為 4 $\Rightarrow r^2 = 4^2 = 5 - a \Rightarrow a = -11$
又圓心為 $(1, -2)$ 在 $y = bx$ 上
 $\therefore -2 = b \times 1, b = -2 \Rightarrow a + b = -13$

34. () 已知方程式 $ax^2 + 2y^2 - 4x + 3ay - 7 = 0$ 之圖形為一圓，則此圓半徑為 (A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (D) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【龍騰自命題，進階卷】

解答

A

解析

$ax^2 + 2y^2 - 4x + 3ay - 7 = 0$ 為一圓，半徑 r
則 $a = 2$ (x^2 與 y^2 項係數必相等)
 $\therefore 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{7}{2} = 0$ ，令 $d = -2, e = 3, f = -\frac{7}{2}$
 $\therefore r = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + e^2 - 4f} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 3^2 - 4 \times (-\frac{7}{2})} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 9 + 14} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

35. () 點 $P(-2, 3)$ 到圓 $C: x^2 + y^2 = 4$ 的切線段長為 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) $\sqrt{13}$

【隨堂卷】

解答

B

解析

切線段長為 $\sqrt{(-2)^2 + 3^2 - 4} = \sqrt{9} = 3$

36. () 坐標平面上圓 $C: x^2 + (y+1)^2 = 9$ 與下列哪條直線相切？ (A) $y = 2$ (B) $x = 2$ (C) $y = -2$ (D) $x = -2$

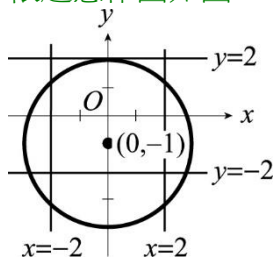
【隨堂卷】

解答

A

解析

$x^2 + (y+1)^2 = 9 \Rightarrow$ 圓心 $(0, -1)$ ，半徑 $r = 3$
依題意作圖如圖



(A) $y = 2$ 與圓 C 相切 (B) $x = 2$ 與圓 C 相割 (C) $y = -2$ 與圓 C 相割 (D) $x = -2$ 與圓 C 相割

割

37. () 設方程式 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + k = 0$ (k 為實數) 的圖形為一圓, 則 k 的範圍為 (A) $k < 5$ (B) $k > 5$ (C) $k > 13$ (D) $k < 13$

【隨堂卷】

解答

D

解析

圖形為一圓 \Rightarrow 圓的判別式 $> 0 \Rightarrow (-6)^2 + 4^2 - 4k > 0$
 $\Rightarrow 52 - 4k > 0 \Rightarrow 4k < 52 \Rightarrow k < 13$

38. () 點 $P(5, -2)$ 到圓 $C: x^2 + y^2 + 2x + 6y - 2 = 0$ 的切線段長為 (A) $\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{17}$ (C) 4 (D) 5

【隨堂卷】

解答

D

解析

切線段長為 $\sqrt{5^2 + (-2)^2 + 2 \times 5 + 6 \times (-2) - 2} = \sqrt{25 + 4 + 10 - 12 - 2} = \sqrt{25} = 5$

39. () 下列哪一個點在圓 $C: (x+2)^2 + y^2 = 25$ 的內部? (A) (2, 3) (B) (0, 4) (C) (3, 2) (D) (1, 4)

【隨堂卷】

解答

B

解析

將點代入圓 (A) (2, 3) $\Rightarrow (2+2)^2 + 3^2 = 25$, 點在圓 C 上 (B) (0, 4) $\Rightarrow (0+2)^2 + 4^2 = 20 < 25$, 點在圓 C 內 (C) (3, 2) $\Rightarrow (3+2)^2 + 2^2 = 29 > 25$, 點在圓 C 外 (D) (1, 4) $\Rightarrow (1+2)^2 + 4^2 = 25$, 點在圓 C 上

40. () 已知圓 C 與直線 L 交於 A 、 B 兩點, 且弦 \overline{AB} 的長度為 24。若圓心到直線 L 的距離為 5, 則圓的半徑為 (A) 25 (B) 19 (C) 26 (D) 13

【隨堂卷】

解答

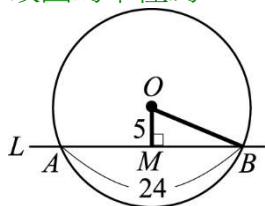
D

解析

依題意作圖如圖, $\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 24 = 12$

在 $\triangle BOM$ 中, $\overline{OB} = \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{OM}^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

故圓的半徑為 13



41. () 坐標平面上一圓 $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ 與下列哪一條直線相切? (A) $x-2=0$ (B) $y+3=0$ (C) $y+2=0$ (D) $x=0$

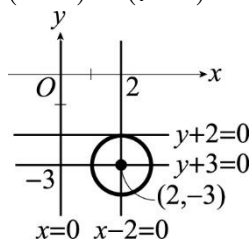
【隨堂卷】

解答

C

解析

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1 \Rightarrow$ 圓心為 (2, -3), 半徑為 1, 如圖



(A) $x-2=0 \Rightarrow$ 與圓 C 交於 2 點 (B) $y+3=0 \Rightarrow$ 與圓 C 交於 2 點 (C) $y+2=0 \Rightarrow$ 與圓 C 交於 1 點 \Rightarrow 相切 (D) $x=0 \Rightarrow$ 與圓 C 沒有交點

42. () 若平面上有一圓 C , 以 $A(2, 5)$ 、 $B(2, 9)$ 為一直徑的兩端點, 則下列敘述何者正確? (A)

圓的半徑為 4 (B)圓的面積為 16 平方單位 (C)圓心為(2,7) (D)圓的周長為 2π

【隨堂卷】

解答

C

解析

(A)直徑 $\overline{AB} = \sqrt{(2-2)^2 + (9-5)^2} = 4$, 半徑 $r = \frac{1}{2}\overline{AB} = 2$

(B)面積 $\pi r^2 = \pi \times 2^2 = 4\pi$ (平方單位) (C)圓心為 \overline{AB} 中點, 即 $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{5+9}{2}\right) = (2, 7)$

(D)周長 $= 2\pi r = 2\pi \times 2 = 4\pi$

43. () 下列何者是圓 $C: x^2 + y^2 + 4x + 4y + 7 = 0$ 的標準式? (A) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 3$ (B) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$ (C) $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 1$ (D) $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 5$

【隨堂卷】

解答

B

解析

將 $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 7 = 0$ 分別對 x 、 y 做配方

$$\Rightarrow (x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) = -7 + 4 + 4$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$$

44. () 下列何者是以原點為圓心、半徑為 4 的圓方程式? (A) $x^2 + y^2 = 4$ (B) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$ (C) $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$ (D) $x^2 + y^2 = 16$

【隨堂卷】

解答

D

解析

圓心為(0,0), 半徑為 4, 依圓的標準式 $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 4^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

45. () 假設圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$, 其圓心為 (h, k) 、半徑為 r , 則 $h - k - r =$ (A)2 (B)4 (C)6 (D)8

【課本自我評量】

解答

A

解析

$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$, 整理得 $(x^2 - 10x) + (y^2 + 2y) = -10$

配方得 $(x-5)^2 + (y+1)^2 = -10 + 25 + 1$, 計算得 $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 4^2$

故圓心 $(h, k) = (5, -1)$, $r = 4$, 所以 $h - k - r = 5 - (-1) - 4 = 2$

46. () 設過 $(-1, 1)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(3, -1)$ 三點之圓方程式為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, 則 $d + e + f =$ (A)14 (B)2 (C)-14 (D)-2

【課本自我評量】

解答

C

解析

將 $(-1, 1)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(3, -1)$ 分別代入 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 得

$$\begin{cases} 1+1-d+e+f=0 \\ 0+0+0+0+f=0 \\ 9+1+3d-e+f=0 \end{cases}, \text{計算得} \begin{cases} 2-d+e=0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ f=0 \\ 10+3d-e=0 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① + ② 得 $12 + 2d = 0$, 得 $d = -6$ 代回①得 $e = -8$

所以 $d + e + f = (-6) + (-8) + 0 = -14$

47. () 若氣象局最初發布某一颱風之暴風圈其外緣以圓方程式表示： $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$, 因受大氣環流影響, 經過數小時後颱風中心(即圓心, 坐標 (h, k)) 向西和向北各移動一單位(即新圓心坐標為 $(h-1, k+1)$), 且暴風半徑增為原來的 1.5 倍, 則新暴風圈外緣之圓方程式為何? (A) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 6^2$ (B) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 6^2$ (C)

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 6^2 \quad (\text{D}) (x+3)^2 + (y+4)^2 = 6^2$$

【課本自我評量】

解答

B

解析

原始圓方程式為 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$

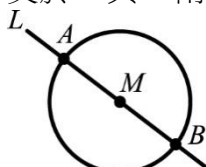
所以圓心為 $(-2, 3)$ ，半徑 $r = 4$

則新圓心為 $(h-1, k+1) = (-3, 4)$

又新半徑為原來的 1.5 倍，所以新半徑 $= 4 \times 1.5 = 6$

由圓的標準式，得新暴風圈外緣之圓方程式為 $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 6^2$

48. () 如圖所示，已知平面上有一圓 $C: (x-a)^2 + (y+a)^2 = 1$ 。若直線 $L: 3x+4y+5=0$ 與圓 C 相交於 A 與 B 兩點，且 \overline{AB} 恰為圓 C 的直徑，則 a 之值為



(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

【課本自我評量】

解答

D

解析

$(x-a)^2 + (y+a)^2 = 1$ ，其圓心為 $(a, -a)$

若 L 與圓相交於直徑 \overline{AB} ，則 L 必通過圓心 $(a, -a)$

將 $(a, -a)$ 代入 $L: 3x+4y+5=0$

得 $3a-4a+5=0$ ，計算得 $a=5$

49. () 在坐標平面上，若圓 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - k = 0$ 與 y 軸相切，則 $k =$
(A)4 (B)-4 (C)9 (D)-9

【課本自我評量】

解答

D

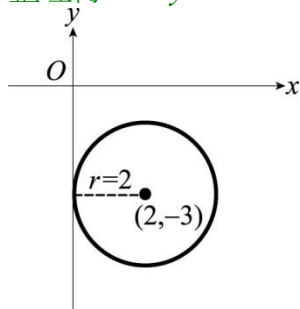
解析

圓 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - k = 0$ 可知圓心為 $(2, -3)$ ，又與 y 軸相切

由圖知，半徑 $r = 2$ ，由圓標準式得 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2^2$

展開得 $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 4$

整理得 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ ，所以 $k = -9$



50. () 已知圓 $x^2 + y^2 = 9$ 與直線 $y = x - k$ ，則當 k 為下列何值時，圓與直線不相交？ (A)-5 (B)0
(C)2 (D)4

【課本自我評量】

解答

A

解析

圓 $x^2 + y^2 = 9$ ，可知圓心為 $(0, 0)$ ，半徑 $r = 3$

直線 $y = x - k$ ，移項可得 $x - y - k = 0$

因為圓與直線不相交，所以圓心到直線的距離大於半徑

即 $\frac{|0-0-k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} > 3$ ，計算得 $\frac{|-k|}{\sqrt{2}} > 3$ ，計算得 $|k| > 3\sqrt{2}$

則 $k < -3\sqrt{2}$ 或 $k > 3\sqrt{2}$ ，故選 $k = -5$

51. () 過點 $A(5,0)$ 向圓 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ 作二切線，令二切點為 P 、 Q ，圓心為 M ，則四邊形 $APMQ$ 面積為 (A)2 平方單位 (B)4 平方單位 (C)6 平方單位 (D)8 平方單位

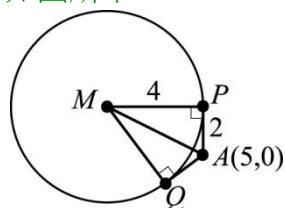
【課本自我評量】

解答

D

解析

如圖所示：



$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$

$$\text{圓之半徑 } r = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+44} = 4, \text{ 切線段長 } \overline{AP} = \sqrt{25+0-10-0-11} = 2$$

$$\text{四邊形 } APMQ \text{ 面積} = \triangle AMP \times 2 = \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 4\right) \times 2 = 8$$

52. () 以 $A(2,1)$ 、 $B(4,-5)$ 為直徑端點的圓方程式為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，則 $d + e + f =$ (A)5 (B)1 (C)0 (D)2

【super 講義-綜合評量】

解答

B

解析

圓心 $M(x, y)$ 為 $A(2,1)$ 、 $B(4,-5)$ 的中點，

$$\text{即 } M(x, y) = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+(-5)}{2}\right) = (3, -2)$$

$$\text{半徑 } r = \overline{MA} = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$$

由圓的標準式知：

$$\text{圓方程式為 } (x-3)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 10$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$$

$$\therefore d + e + f = -6 + 4 + 3 = 1$$

53. () 圓 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 過 $A(-1,1)$ 及 $B(1,3)$ 兩點且圓心在 x 軸，則 $h+k+r =$ (A)2 (B) $2+\sqrt{10}$ (C) $3+\sqrt{10}$ (D)12

【super 講義-綜合評量】

解答

B

解析

設圓心 $M(x, 0)$ ，則

$$\overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (0-1)^2 = (x-1)^2 + (0-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 9 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{即圓心 } M(2, 0), \text{ 又半徑 } r = \overline{MA} \Rightarrow r = \sqrt{(2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$$

由標準式知：

$$\text{圓方程式為 } (x-2)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{10})^2 \text{ 與 } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\text{比較得 } h = 2, k = 0, r = \sqrt{10}$$

$$\text{所以 } h + k + r = 2 + 0 + \sqrt{10} = 2 + \sqrt{10}$$

54. () 在坐標平面上，若圓 $x^2 + y^2 + 8x - 8y + k = 0$ 與 x 軸相切，則 $k =$ (A)9 (B)16 (C)25 (D)4

【super 講義-綜合評量】

解答

B

解析

$x^2 + y^2 + 8x - 8y + k = 0$ 與 x 軸相切 \Rightarrow 圓心 $\left(-\frac{8}{2}, -\frac{-8}{2}\right) = (-4, 4)$ ，半徑為 4

由圓標準式得 $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 4^2$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$$

與 $x^2 + y^2 + 8x - 8y + k = 0$ 比較係數

$$\therefore k = 16$$

55. () 一圓以點 $P(3, 2)$ 為圓心且與直線 $4x - 3y + 1 = 0$ 相切，則該圓半徑為何？ (A) $\frac{6}{7}$ (B) $\frac{7}{5}$
(C) $\frac{5}{3}$ (D) 2

【super 講義-綜合評量】

解答

B

解析

\therefore 圓與直線相切，

\therefore 圓心 $P(3, 2)$ 到直線 $L: 4x - 3y + 1 = 0$ 的距離等於圓的半徑

$$\text{即 } d(P, L) = \frac{|4 \times 3 - 3 \times 2 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{5} = r$$

故圓半徑為 $\frac{7}{5}$

56. () 與直線 $L: x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ 相切，且圓心在原點之圓方程式為 (A) $x^2 + y^2 = 4$ (B) $x^2 + y^2 = 16$ (C) $x^2 + y^2 = 3$ (D) $x^2 + y^2 = 1$

【super 講義-綜合評量】

解答

A

解析

圓心 $M(0, 0)$ ，直線 $L: x - \sqrt{3}y - 4 = 0$

\therefore 直線 L 與圓相切

$$\therefore d = r \Rightarrow \frac{|0 + 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow r = 2$$

\therefore 圓方程式為 $x^2 + y^2 = 4$

57. () 設圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ 的半徑長為 3，且圓心在直線 $y = bx + 3$ 上，則 (A) $a = 4, b = -5$ (B) $a = -4, b = -5$ (C) $a = -4, b = 5$ (D) $a = 4, b = 5$

【super 講義-綜合評量】

解答

B

解析

圓心 $M\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (1, -2)$

將圓心 $M(1, -2)$ 代入直線 $y = bx + 3 \Rightarrow -2 = b + 3 \Rightarrow b = -5$

又半徑為 $\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4a} = 3$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 4 - a} = 3 \Rightarrow 5 - a = 9 \Rightarrow a = -4$$

$$\therefore a = -4, b = -5$$

58. () 若 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k + 1 = 0$ 表示一圓，則 k 的範圍為何？ (A) $2 < k < 4$ (B) $0 < k < 3$ (C) $k < 2$ 或 $k > 3$ (D) $k < 0$ 或 $k > 4$

【107 數(B)歷屆試題】

解答

D

解析

$$x^2 + y^2 + kx + 2y + (k + 1) = 0 \Rightarrow d = k, e = 2, f = k + 1$$

圓的判別式 $d^2 + e^2 - 4f > 0$ 即為一圓

$$\Rightarrow k^2 + 2^2 - 4(k+1) > 0 \Rightarrow k^2 - 4k > 0$$

$$\Rightarrow k(k-4) > 0 \Rightarrow k < 0 \text{ 或 } k > 4$$

59. () 若氣象局最初發布某一颱風之暴風圈其外緣以圓方程式表示： $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ ，因受大氣環流影響，經過數小時後颱風中心（即圓心）坐標 (h, k) 向西和向北各移動一單位（即新圓心坐標為 $(h-1, k+1)$ ），且暴風半徑增為原來的1.5倍，問新暴風圈外緣之圓方程式為何？ (A) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 1 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$ (C) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 19 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 31 = 0$

【102 數(A)歷屆試題】

解答

B

解析

圓 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

$$\Rightarrow \text{圓心為 } (h, k) = \left(-\frac{4}{2}, -\frac{-6}{2}\right) = (-2, 3)$$

$$\text{半徑為 } \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-6)^2 - 4(-3)} = 4$$

$$\text{則新圓心為 } (h-1, k+1) = (-3, 4)$$

$$\text{新半徑為 } 4 \times 1.5 = 6$$

$$\text{故所求圓方程式為 } (x+3)^2 + (y-4)^2 = 6^2$$

$$\text{展開得 } x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$$

60. () 已知圓的面積為 9π ，圓的方程式為 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + k = 0$ ，則 k 之值為何？ (A) -7 (B) -14 (C) -21 (D) -28

【101 數(B)歷屆試題】

解答

B

解析

$$\text{原式} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y + \frac{k}{2} = 0$$

$$\text{半徑 } r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 2^2 - 4 \times \frac{k}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{8-2k}$$

$$\text{圓面積 } \pi r^2 = 9\pi \Rightarrow \pi \left(\frac{1}{2}\sqrt{8-2k}\right)^2 = 9\pi \Rightarrow \frac{1}{4}(8-2k) = 9 \Rightarrow 8-2k = 36$$

$$\therefore k = -14$$

61. () 平面上一圓方程式為 $C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 以及一直線方程式為 $L: ax + by = 1$ ，下列何組數據 (a, b) 使得 C 及 L 的關係為相交於兩點？ (A) (3, 4) (B) (3, -4) (C) (8, 6) (D) (12, -5)

【107 數(A)歷屆試題】

解答

B

解析

$$C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1^2 \Rightarrow \text{圓心 } M(3, 2), \text{ 半徑 } r = 1, L: ax + by - 1 = 0$$

$$\therefore C \text{ 與 } L \text{ 要交於兩點} \quad \therefore d(M, L) < r$$

$$\text{即 } \frac{|3a + 2b - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1 \Rightarrow |3a + 2b - 1| < \sqrt{a^2 + b^2} \dots\dots ①$$

$$(A) (3, 4) \text{ 代入 } ① \Rightarrow |9 + 8 - 1| \ngtr 5$$

$$(B) (3, -4) \text{ 代入 } ① \Rightarrow |9 - 8 - 1| < 5$$

$$(C) (8, 6) \text{ 代入 } ① \Rightarrow |24 + 12 - 1| \ngtr 10$$

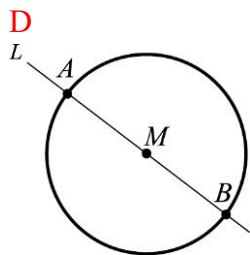
$$(D) (12, -5) \text{ 代入 } ① \Rightarrow |36 - 10 - 1| \ngtr 13$$

62. () 已知平面上有一圓 $C: (x-a)^2 + (y+a)^2 = 1$ 。若直線 $L: 3x + 4y + 1 = 0$ 與圓 C 相交於 A 與 B

兩點，且 \overline{AB} 恰為圓 C 的直徑，則 a 之值為 (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 1

【105 數(A)歷屆試題】

解答



解析

$(x-a)^2 + (y+a)^2 = 1$ ，其圓心為 $M(a, -a)$

若 L 與圓相交於直徑 \overline{AB} ，則 L 必通過圓心 $(a, -a)$

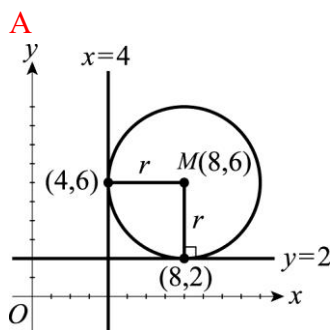
$(a, -a)$ 代入 $L: 3x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow 3a - 4a + 1 = 0 \therefore a = 1$

63. () 若一圓與直線 $x = 4$ 相切於點 $(4, 6)$ ，且與直線 $y = 2$ 相切於點 $(8, 2)$ ，則此圓的方程式為何？

(A) $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 16$ (B) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 9$ (C) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$ (D) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 36$

【104 數(A)歷屆試題】

解答



解析

由圖可知圓心為 $(8, 6)$ ，且 $r = 4$

\therefore 圓方程式為 $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 4^2$

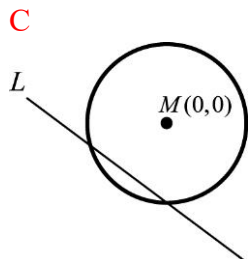
即 $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 16$

64. () 設點 P 在圓 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上移動， P 點與直線 $L: 3x + 4y + 4 = 0$ 最長距離為 M ，最短距離為 m ，則 $M - m =$

(A) 0 (B) 1.6 (C) 1.8 (D) 2

【102 數(A)歷屆試題】

解答



解析

圓 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的

圓心 $M(0, 0)$ ，半徑 $r = 1$

$d(M, L) = \frac{|0 + 0 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5} < 1 = r$

即 L 與圓相割

由圖形知最短距離 m 為 0 (P 點在 L 上)

最長距離 M 為 $r + d(M, L) = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$

故 $M - m = \frac{9}{5} = 1.8$

65. () 圓 $C : (x+5)^2 + (y-5)^2 = 5$ 的半徑為 (A) 5 (B) $\sqrt{5}$ (C) $2\sqrt{25}$ (D) 25

【學習卷】

解答

B

解析

$(x+5)^2 + (y-5)^2 = 5$ 的半徑為 $\sqrt{5}$

66. () 以 $(0,0)$ 為圓心，半徑是 $\sqrt{7}$ 的圓方程式為 (A) $x^2 + y^2 = 7$ (B) $x^2 + y^2 = \sqrt{7}$ (C) $(x-1)^2 + y^2 = 14$ (D) $x^2 + y^2 = 7\sqrt{7}$

【學習卷】

解答

A

解析

\because 圓心為 $(0,0)$ ，半徑為 $\sqrt{7}$

由圓的標準式 \Rightarrow 圓方程式為 $x^2 + y^2 = 7$

67. () 設 $A(-1,-4)$ 、 $B(3,2)$ ，則以 \overline{AB} 為直徑之圓方程式為 (A) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 11 = 0$ (C) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 11 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0$

【學習卷】

解答

D

解析

圓心 M 為直徑 \overline{AB} 的中點 $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-4+2}{2}\right) = (1, -1)$

半徑 $r = \overline{AM} = \sqrt{(1+1)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{13}$

故圓方程式為 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

即 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0$

68. () 點 $P(5,-2)$ 與圓 $C : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$ 的關係為 (A) 點在圓上 (B) 點在圓外 (C) 點在圓內 (D) 以上皆非

【學習卷】

解答

A

解析

將 $P(5,-2)$ 代入圓 C 方程式左式，得 $(5-3)^2 + (-2+2)^2 = 4$

所以點 $P(5,-2)$ 在圓 C 上

69. () 圓 $x^2 + y^2 + 18x - 12y + 17 = 0$ 的圓心為 (A) $(-9,6)$ (B) $(9,-6)$ (C) $(9,6)$ (D) $(-9,-6)$

【學習卷】

解答

A

解析

$x^2 + y^2 + 18x - 12y + 17 = 0 \Rightarrow$ 設 $d = 18$ ， $e = -12$

\therefore 圓心 $= \left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right) = \left(-\frac{18}{2}, -\frac{(-12)}{2}\right) = (-9, 6)$

70. () 圓心 $(-3,6)$ ，半徑為 5 的圓方程式為 (A) $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 20 = 0$ (C) $x^2 + y^2 + 6x - 12y - 20 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 20 = 0$

【學習卷】

解答

B

解析

圓心 $(-3,6)$ ，半徑為 5 $\Rightarrow (x+3)^2 + (y-6)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 - 25 = 0$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 12y + 20 = 0$

71. () 方程式 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ 所表的圖形為一圓，則其面積為 (A) 169π (B) 100π (C) 13π (D) 10π

解答

D

解析

$$\text{圓 } x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow \text{設 } d = -6, e = -4, f = 3$$

$$\text{則半徑 } r = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f} = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-4)^2 - 4 \times 3} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \text{圓面積} = \pi \times r^2 = \pi \times (\sqrt{10})^2 = 10\pi$$

72. () 圓方程式 $3x^2 + 3y^2 - 6x + 5y - 1 = 0$ ，其半徑為 (A) $\frac{\sqrt{83}}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{93}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{73}}{6}$ (D) 5

【學習卷】

解答

C

解析

$$3x^2 + 3y^2 - 6x + 5y - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + \frac{5}{3}y - \frac{1}{3} = 0, \text{設 } d = -2, e = \frac{5}{3}, f = -\frac{1}{3}$$

$$\text{則半徑 } r = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{25}{9} + \frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{73}}{3} = \frac{\sqrt{73}}{6}$$

73. () 若圓 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + k = 0$ 的半徑為 $\frac{5}{2}$ ，則 k 值為 (A) -3 (B) -6 (C) 4 (D) 6

【學習卷】

解答

B

解析

$$\text{原式} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y + \frac{k}{2} = 0, \text{設 } d = -2, e = 3, f = \frac{k}{2}$$

$$\text{則半徑 } r = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 3^2 - 4 \times \frac{k}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13 - 2k} = 5 \Rightarrow 13 - 2k = 25 \therefore k = -6$$

74. () 若圓 $C: x^2 - 2kx + y^2 - 2y = 4$ 的半徑為 3，且圓心 (a, b) 在第一象限，則 $a + b =$ (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8

【104 數(B)歷屆試題】

解答

A

解析

$$x^2 - 2kx + y^2 - 2y = 4 \Rightarrow (x - k)^2 + (y - 1)^2 = 4 + k^2 + 1^2$$

$$\Rightarrow (x - k)^2 + (y - 1)^2 = k^2 + 5 \quad (k^2 + 5 > 0, \text{恆為圓方程式}),$$

$$\text{已知 } r^2 = 3^2 = k^2 + 5 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

$$\text{當 } k = 2, \text{圓心} = (k, 1) = (2, 1) \text{ 在第一象限}$$

$$\text{當 } k = -2, \text{圓心} = (k, 1) = (-2, 1) \text{ 在第二象限}$$

$$\text{依題意知圓心} = (2, 1) = (a, b) \Rightarrow a = 2, b = 1 \therefore a + b = 3$$

75. () 已知平面上有一圓 $C: (x - a)^2 + y^2 = 1$ 與直線 $L: y = x$ 相交於兩點，則 a 可能為下列何者？ (A) $a = -2$ (B) $a = 1$ (C) $a = 2$ (D) $a = 3$

【103 數(B)歷屆試題】

解答

B

解析

$$\text{圓 } C: (x - a)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \text{圓心 } M(a, 0), \text{半徑 } r = 1$$

$$\text{直線 } L: y = x \Rightarrow x - y = 0$$

$$\text{圓心到直線 } L \text{ 的距離 } d = \frac{|a - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{圓與直線相交於兩點}$$

$$\therefore d < r \Rightarrow \frac{|a|}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow |a| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2},$$

故 a 可能為 1

76. () 若直線 $L: x - y = 1$ 與圓 $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ 交於 A 、 B 兩點，則線段 \overline{AB} 之長為何？

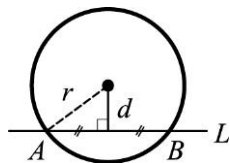
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【101 數(B)歷屆試題】

解答

A

解析



圓 $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow$ 半徑 $r = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2 - 4 \times 1} = 1$

圓心 $(-1, -1)$ ，又圓心到直線

$L: x - y = 1$ 的距離 $d = \frac{|-1 - (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \overline{AB} = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}$

77. () 設直線 $L: kx + 3y + 10 = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 = 4$ 沒有交點，則常數 k 的範圍為何？ (A)

$-4 < k < 4$ (B) $-2 < k < 2$ (C) $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ (D) $k < -\sqrt{2}$ 或 $k > \sqrt{2}$

【101 數(C)歷屆試題】

解答

A

解析

圓 $C: x^2 + y^2 = 4$ 的圓心 $M(0, 0)$ ，半徑 $r = 2$

$d(M, L) = \frac{|k \times 0 + 3 \times 0 + 10|}{\sqrt{k^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{k^2 + 9}}$

\therefore 圓 C 與直線 L 沒有交點

$\therefore d(M, L) > r \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{k^2 + 9}} > 2 \Rightarrow \sqrt{k^2 + 9} < 5$

$\Rightarrow k^2 + 9 < 25 \Rightarrow k^2 - 16 < 0 \Rightarrow (k - 4)(k + 4) < 0$

$\therefore -4 < k < 4$

78. () 若圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + k = 0$ 與直線 $x - y = 0$ 相切，則 $k =$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

【課本自我評量】

解答

C

解析

圓心 $(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}) = (1, -2)$ ，半徑 $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4k} = \frac{1}{2}\sqrt{20 - 4k}$

利用圓心到切線的距離等於半徑，即 $\frac{|1 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{20 - 4k}$

計算得 $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{20 - 4k}}{2}$ ，計算得 $6 = \sqrt{40 - 8k}$

等號兩式平方得 $36 = 40 - 8k$ ，所以 $k = \frac{1}{2}$

79. () 圓 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ 的半徑為 (A) 2 (B) 3 (C) 9 (D) 4

【龍騰自命題】

解答

B

解析

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + [y - (-3)]^2 = 3^2$$

$$\text{又}(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\therefore \text{半徑 } r = 3$$

80. () 由圓 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ 所圍成之面積為 (A) 9π (B) 3π (C) 4π (D) 6π

【龍騰自命題】

解答

A

解析

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 = r^2$$

$$\text{面積} = \pi r^2 = \pi \times 9 = 9\pi$$

81. () 圓 $2x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - k = 0$ 之半徑為 2，則 $k =$ (A) 9 (B) -9 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

【龍騰自命題】

解答

C

解析

$$\text{圓 } 2x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - k = 0, \text{ 半徑 } 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 2y - \frac{k}{2} = 0, \text{ 令 } d = 3, e = -2, f = -\frac{k}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + e^2 - 4f} = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + (-2)^2 - 4 \times (-\frac{k}{2})} = 2$$

$$\Rightarrow 13 + 2k = 16$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

82. () 若方程式 $x^2 + y^2 + 2kx - 6y + (k^2 + k + 1) = 0$ 的圖形為一點，則此點坐標為 (A) (4,3) (B) (-4,3) (C) (-8,3) (D) (8,3)

【龍騰自命題】

解答

C

解析

$$x^2 + y^2 + 2kx - 6y + (k^2 + k + 1) = 0 \text{ 是一點}$$

$$\Rightarrow (x+k)^2 + (y-3)^2 = -k^2 - k - 1 + k^2 + 3^2 = 0$$

$$\Rightarrow 8 - k = 0 \Rightarrow k = 8$$

$$\text{此點 } (-k, 3) = (-8, 3)$$

83. () 在坐標平面上有一圓，設圓心在第四象限且圓與兩坐標軸相切，若圓心在直線 $3x - 5y = 16$ 上，則此圓方程式為 (A) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ (B) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$ (C) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 16$ (D) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$

【龍騰自命題】

解答

B

解析

$$\text{設半徑為 } r$$

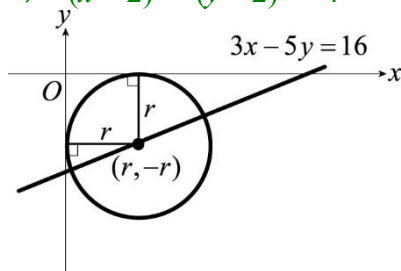
$$\text{則圓心為 } (r, -r) \text{ 代入 } 3x - 5y = 16$$

$$3r + 5r = 16 \Rightarrow r = 2$$

$$\therefore \text{圓心為 } (2, -2), \text{ 半徑為 } 2$$

$$\text{方程式為 } (x-2)^2 + [y - (-2)]^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$



84. () 圓 C 的圓心坐標為 $(1, -1)$ ，且通過點 $P(-5, 6)$ ，則圓 C 之方程式為 (A) $(x-1)^2 + (y+1)^2$

$$= \sqrt{85} \quad (B)(x-1)^2 + (y+1)^2 = 85 \quad (C)(x+1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{85} \quad (D)(x+1)^2 + (y-1)^2 = 85$$

【龍騰自命題】

解答

B

解析

∵ 圓心為(1, -1)

∴ 設圓方程式 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = r^2$

將(-5,6)代入得 $(-5-1)^2 + (6+1)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 85$ 代回圓方程式

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 85$

85. () 設圓方程式為 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$ ，且平面上有一點 $P(2,1)$ ，則下列何者正確？ (A) 圓心為(2,3) (B) 半徑為 2 (C) P 點在圓內 (D) P 點在圓外

【龍騰自命題】

解答

D

解析

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = -11 + 2^2 + 3^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$

∴ 圓心為(2, -3)，半徑為 $\sqrt{2}$

點 $P(2,1)$ 代入 $\Rightarrow (2-2)^2 + (1+3)^2 = 16 > (\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow P$ 點在圓外

86. () 若 k 為任意實數，方程式 $x^2 + y^2 + 2kx - 2y + 5 = 0$ 的圖形為一點，則 $k =$ (A) ± 1 (B) ± 2 (C) ± 3 (D) ± 4

【龍騰自命題】

解答

B

解析

判別式 $D = (2k)^2 + (-2)^2 - 4 \times 5 = 0$

$\Rightarrow 4k^2 - 16 = 0 \Rightarrow k = \pm 2$

87. () 圓 $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ 之圓心到 x 軸的距離為 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

【龍騰自命題】

解答

A

解析

$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$

$\Rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 11 + 4^2 + 3^2 = 36$

\Rightarrow 圓心(4, -3)

\Rightarrow 圓心到 x 軸的距離為 $|-3| = 3$

88. () 方程式 $x^2 + y^2 - 2kx + 2y + k + 1 = 0$ 圖形為一圓，則 k 的範圍為 (A) $0 < k < 1$ (B) $k > 0$ (C) $k > 1$ (D) $k < 0$ 或 $k > 1$

【龍騰自命題】

解答

D

解析

圓 $x^2 + y^2 - 2kx + 2y + k + 1 = 0$

令 $d = -2k$, $e = 2$, $f = k + 1$

∴ 此方程式為一圓 $\therefore d^2 + e^2 - 4f > 0$

$\Rightarrow (-2k)^2 + 2^2 - 4(k+1) > 0$

$\Rightarrow 4k^2 - 4k > 0$

$\Rightarrow k(k-1) > 0$

$\therefore k < 0$ 或 $k > 1$

89. () 一圓經過(0,0)、(4,0)及(0,6)三點，則此圓半徑為 (A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{13}$ (C) $\sqrt{14}$ (D) $\sqrt{15}$

【龍騰自命題】

解答

B

解析

過三點(0,0)、(4,0)、(0,6)的圓是以(4,0)與(0,6)的連線段為直徑

\Rightarrow 半徑 $= \frac{1}{2} \sqrt{(4-0)^2 + (0-6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{52} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} = \sqrt{13}$

90. () 下列各方程式的圖形，何者與 y 軸相切？ (A) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ (C) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 4 = 0$

【龍騰自命題】

解答 C

解析 與 y 軸相切 \Rightarrow 圓心到 y 軸距離等於半徑 (A) 原式 $\Rightarrow (x+1)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow$
與 x 軸相切 (B) 原式 $\Rightarrow (x+2)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{17}{4}$
(C) 原式 $\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow$ 與兩軸相切 (D) 原式 $\Rightarrow (x-\frac{5}{2})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{2}$

91. () 點 $P(6,8)$ 到圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的切線段長為 (A) 4 (B) 10 (C) $\sqrt{10}$ (D) $4\sqrt{6}$

【龍騰自命題】

解答 D

解析 切線段長 $= \sqrt{6^2 + 8^2 - 4} = \sqrt{100 - 4} = 4\sqrt{6}$

92. () 過點 $(1,2)$ 與圓 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的直線方程式為 (A) $x + 2y - 5 = 0$ (B) $2x + y - 5 = 0$ (C) $x + 2y - 3 = 0$ (D) $x - 2y - 8 = 0$

【龍騰自命題】

解答 A

解析 將點 $(1,2)$ 代入 $x^2 + y^2 - 5 = 1^2 + 2^2 - 5 = 0$

故點 $(1,2)$ 在圓上，只有一條切線

\therefore 過點 $(1,2)$ 與圓心連線的斜率 $= \frac{2-0}{1-0} = 2 \quad \therefore$ 過點 $(1,2)$ 的切線斜率 $= -\frac{1}{2}$

切線為 $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$

93. () 過點 $(-2,1)$ 與圓 $x^2 + y^2 = 16$ 相切的直線方程式為 (A) $2x - y + 5 = 0$ (B) $x + 2y = 0$ (C) $2x - y + 16 = 0$ (D) 沒有切線

【龍騰自命題】

解答 D

解析 將點 $(-2,1)$ 代入 $x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow (-2)^2 + 1^2 - 16 = -11 < 0$

故點 $(-2,1)$ 在圓內，所以過點 $(-2,1)$ 沒有切線

94. () 設直線 $x + y = 3$ 交圓 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 於 A, B 兩點，則 \overline{AB} 的長為 (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2

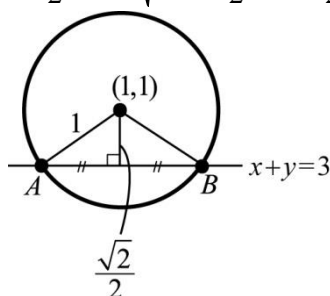
【龍騰自命題】

解答 B

解析 圓心 $(1,1)$ 到直線 $x + y = 3$ 的距離為 $\frac{|1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

半徑 1 為直角三角形的斜邊

故 $\frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{2}$



95. () 已知直線 $L: y = mx + 3$ 與圓 $C: x^2 + y^2 = 3$ 相切，且 $m < 0$ ，則 $m =$ (A) -4 (B) $-2\sqrt{2}$ (C) -2 (D) $-\sqrt{2}$

【龍騰自命題】

解答

D

解析

圓心 $M(0,0)$ ， $r = \sqrt{3}$ \because 相切 $\therefore d(M,L) = r$

$$\frac{|m \times 0 - 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3} \Rightarrow 3 = \sqrt{3} \times \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 9 = 3 \times (m^2 + 1) \Rightarrow m^2 = 2$$

$$\therefore m = \pm \sqrt{2}, \text{ 取 } m = -\sqrt{2}$$

96. () 下列圓方程式何者與直線 $x + 2y - 5 = 0$ 相切於點 $P(3,1)$? (A) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20$ (C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$ (D) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

【龍騰自命題】

解答

D

解析

設過切點 $(3,1)$ 且垂直於切線 $x + 2y - 5 = 0$ 的直線為 $2x - y = k$ ，代入 $(3,1)$ 得 $k = 5$ ，即 $2x - y = 5$ 與 $x + 2y - 5 = 0$ 相切的圓，其圓心必在 $2x - y = 5$ 上

只有圓 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ ，圓心 $(2, -1)$ 代入 $2x - y = 5$ 適合，且圓心 $(2, -1)$ 到 $x + 2y - 5 = 0$ 的距離 = 半徑 = $\sqrt{5}$

故 $x + 2y - 5 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 相切於點 $(3,1)$

97. () 設直線 $L: y = 3x + b$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ 不相交，則 b 的範圍為 (A) $-17 < b < 3$ (B) $b > 3$ 或 $b < -17$ (C) $-3 < b < 17$ (D) $b > 17$ 或 $b < -3$

【龍騰自命題】

解答

B

解析

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

$$\Rightarrow \text{圓心 } M(2, -1), \text{ 半徑 } r = \sqrt{10}$$

\therefore 圓與直線不相交

$$\therefore d(M,L) = \frac{|3 \times 2 - (-1) + b|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} > \sqrt{10} = r \Rightarrow |7 + b| > 10$$

$$\Rightarrow 7 + b > 10 \text{ 或 } 7 + b < -10$$

$$\Rightarrow b > 3 \text{ 或 } b < -17$$

98. () 設 k 為實數，若方程式 $x^2 + y^2 + 2kx - 2y + 5 = 0$ 的圖形為一點，則 k 的範圍為 (A) $k = 2$ 或 $k = -2$ (B) $-2 < k < 2$ (C) $k < 2$ (D) $k > -2$

【super 講義-綜合評量】

解答

A

解析

$\therefore x^2 + y^2 + 2kx - 2y + 5 = 0$ 的圖形為一點

$$\therefore D = d^2 + e^2 - 4f = 0 \Rightarrow (2k)^2 + (-2)^2 - 4 \times 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 16 = 0 \Rightarrow k^2 - 4 = 0 \Rightarrow (k + 2)(k - 2) = 0$$

$$\Rightarrow k = 2 \text{ 或 } -2$$

99. () 平面上三個圓方程式，分別為圓 $A: x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$ ，圓 $B: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$ ，圓 $C: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ ，設三圓的圓心同時以相同速率往 x 軸方向做垂直移動，且 a 、 b 、 c 分別表示圓 A 、 B 、 C 最早碰觸 x 軸所需時間，則下列何者正確？ (A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > a > c$ (D) $c > b > a$

【108 數(A)歷屆試題】

解答

A

解析

$$\text{圓 } A: x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

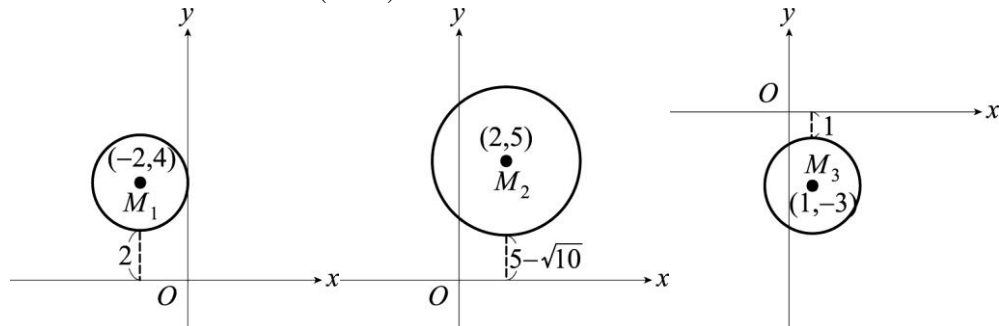
$$\text{圓 } B: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 10$$

圓 $C : (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$

∴ 圓 A 的圓心 M_1 為 $(-2, 4)$ ，半徑 $r_1 = 2$

圓 B 的圓心 M_2 為 $(2, 5)$ ，半徑 $r_2 = \sqrt{10}$

圓 C 的圓心 M_3 為 $(1, -3)$ ，半徑 $r_3 = 2$



由圖得知圓 A 、 B 、 C 與 x 軸最近距離分別為 2 、 $5 - \sqrt{10}$ 、 1

∴ 向 x 軸做垂直移動，且碰觸 x 軸，且 $1 < 5 - \sqrt{10} < 2$ （距離愈遠需時愈久）

∴ $a > b > c$

100. () 若圓 $C : x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ ，則圓 C 之直徑為何？ (A)6 (B)8 (C)10 (D)12

【110 數(B)歷屆試題】

解答

C

解析

圓 $C : x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

$$\Rightarrow (x^2 - 8x + 4^2) + (y^2 + 6y + 3^2) = 4^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25 = 5^2$$

得圓 C 半徑為 $5 \Rightarrow$ 直徑 $= 2 \times 5 = 10$

〔另解〕

圓一般式 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

$$\text{其半徑} = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + e^2 - 4f}$$

$$\therefore \text{此題直徑} = 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{(-8)^2 + 6^2 - 4 \times 0} = \sqrt{100} = 10$$