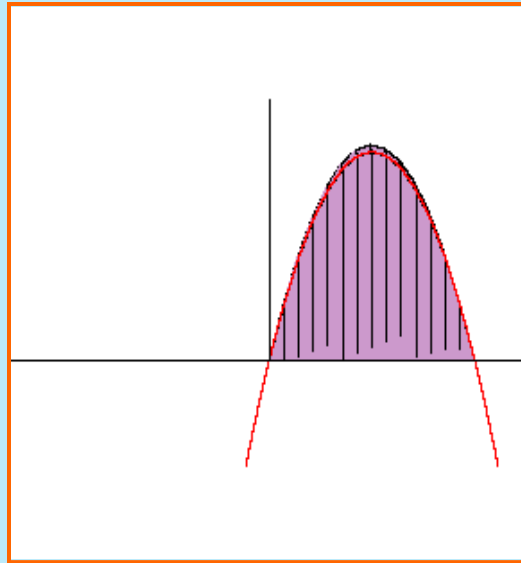
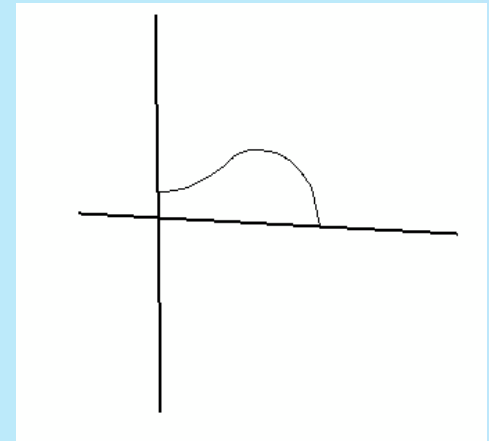


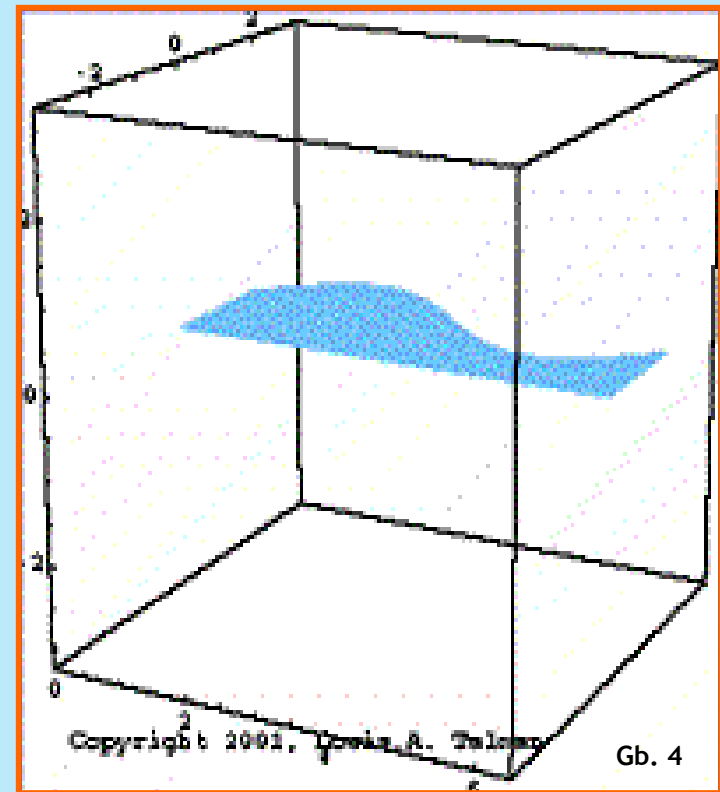
Volume Benda Putar



Bola lampu di samping dapat dipandang sebagai benda putar jika kurva di atasnya diputar menurut garis horisontal. Pada pokok bahasan ini akan dipelajari juga penggunaan integral untuk menghitung volume benda putar.



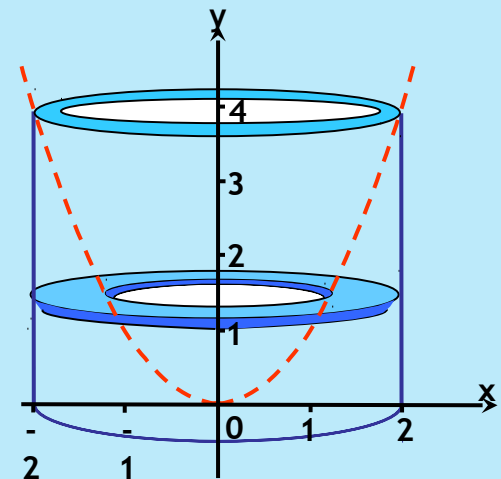
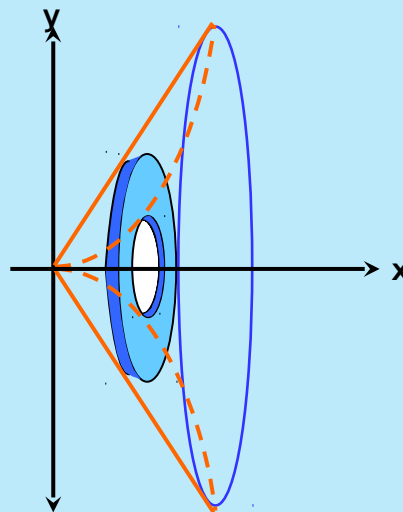
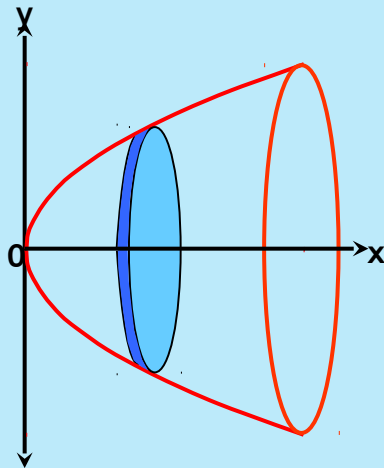
Suatu daerah jika di putar mengelilingi garis tertentu sejauh 360° , maka akan terbentuk suatu benda putar.



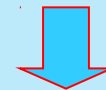
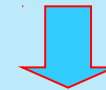
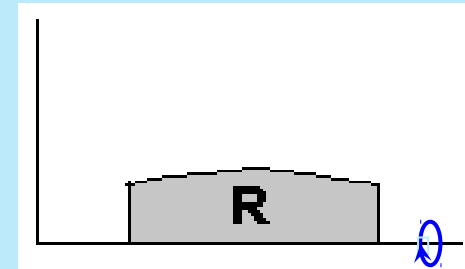
Gb. 4

Dalam menentukan volume benda putar yang harus diperhatikan adalah bagaimana bentuk sebuah partisi jika diputar. Berdasarkan bentuk partisi tersebut, maka metode yang digunakan untuk menentukan volume benda putar dibagi menjadi :

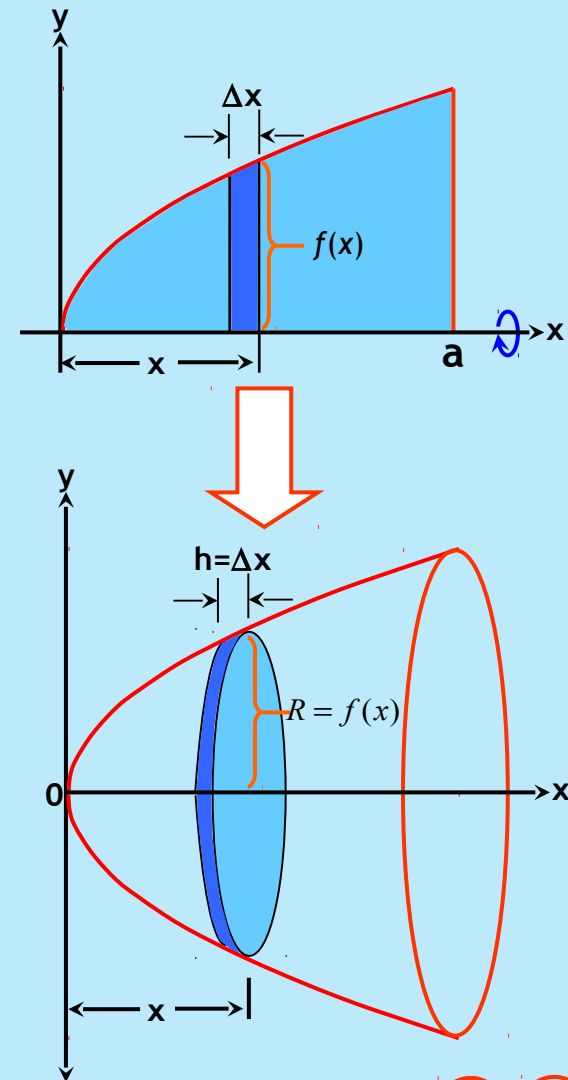
1. Metode cakram
2. Metode cincin
3. Metode kulit tabung



Metode cakram yang digunakan dalam menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume mentimun dengan memotong-motongnya sehingga tiap potongan berbentuk cakram.



Perhatikan daerah di samping diputar terhadap sumbu-x akan menjadi gambar yang di bawahnya. Untuk menghitung volume benda putar yang terbentuk diambil sebuah partisi yang tegak lurus terhadap sumbu putar. Partisi yang diambil berbentuk cakram. Bentuk cakram di samping dapat dianggap sebagai tabung dengan jari-jari $R = f(x)$, tinggi $h = \Delta x$. Sehingga volumenya dapat diaproksimasi sebagai $\Delta V \approx \pi R^2 h$ atau $\Delta V \approx \pi f(x)^2 \Delta x$.



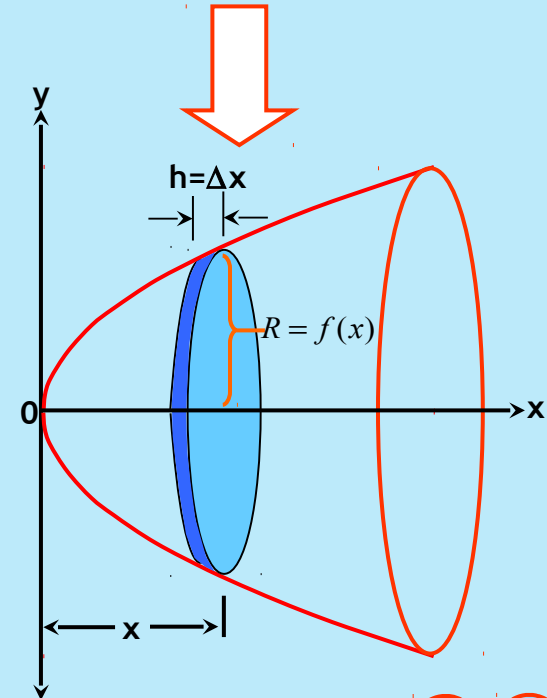
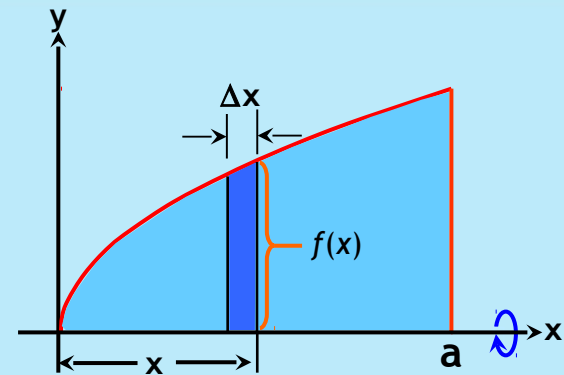
Dengan cara jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam integral diperoleh:

$$V \approx \sum \pi f(x)^2 \Delta x$$

$$V = \lim \sum \pi f(x)^2 \Delta x$$

$$V = \pi \int_0^a [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b R^2 dx$$



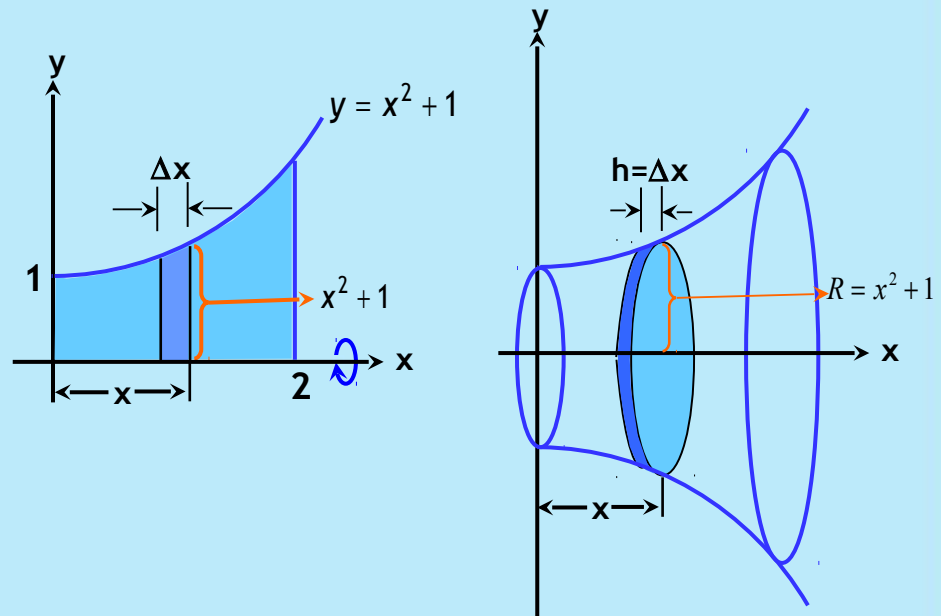
Contoh

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2 + 1$, sumbu x , sumbu y , garis $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360° .

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya.
2. Tentukan bentuk irisannya.
3. Masukkan dalam rumusnya



$$V = \int_0^2 \pi R^2 dx$$

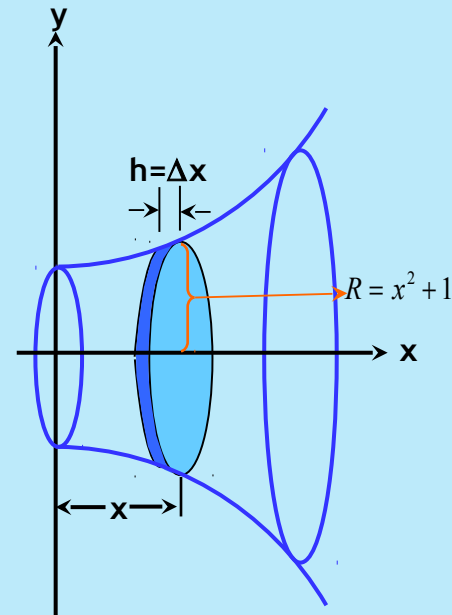
$$V = \int_0^2 \pi (f(x))^2 dx$$

$$V = \int_0^2 \pi (x^2 + 1)^2 dx$$

$$V = \int_0^2 \pi (x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x \right]_0^2$$

$$V = \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 - 0 \right) = 13\frac{11}{15} \pi$$



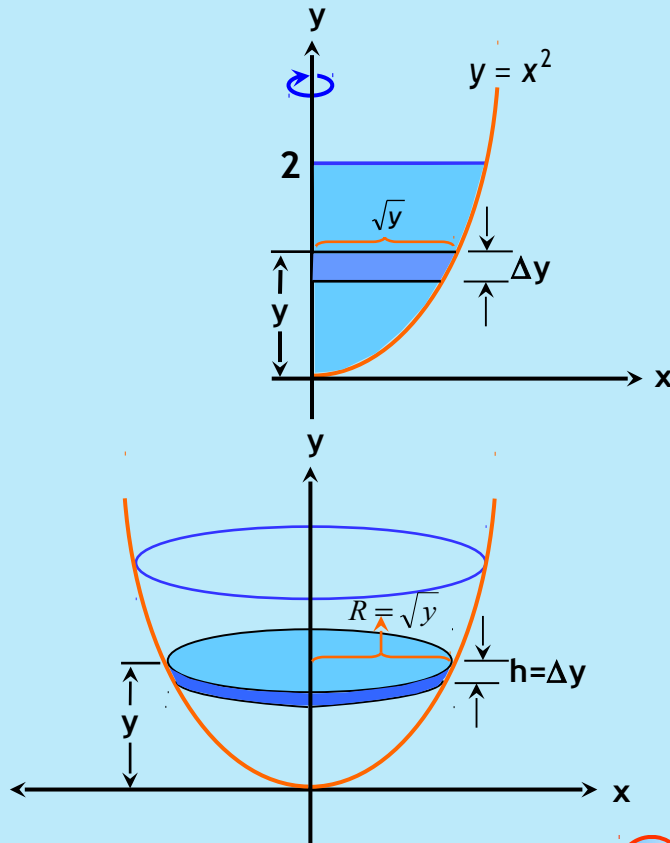
Contoh

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu y , garis $y = 2$ diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360° .

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Tentukan bentuk irisannya.
3. Masukkan dalam rumusnya



Karena diputar terhadap sumbu-y maka integralnya dalam fungsi $x=f(y)$

$$V = \int_0^2 \pi (f(y))^2 dy$$

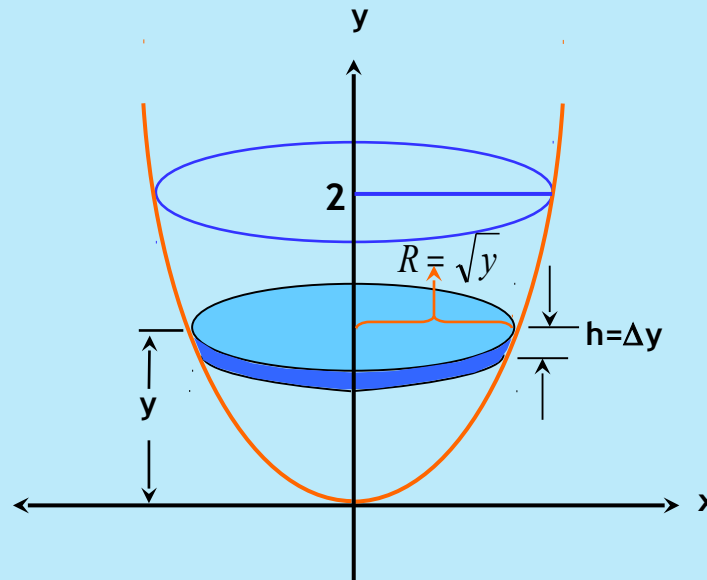
$$V = \int_0^2 \pi y dy$$

$$V = \pi \int_0^2 y dy$$

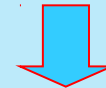
$$V = \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^2$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{2} \times 4 - 0 \right)$$

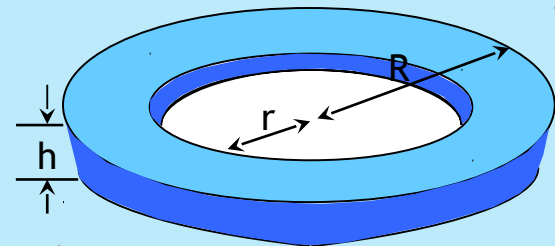
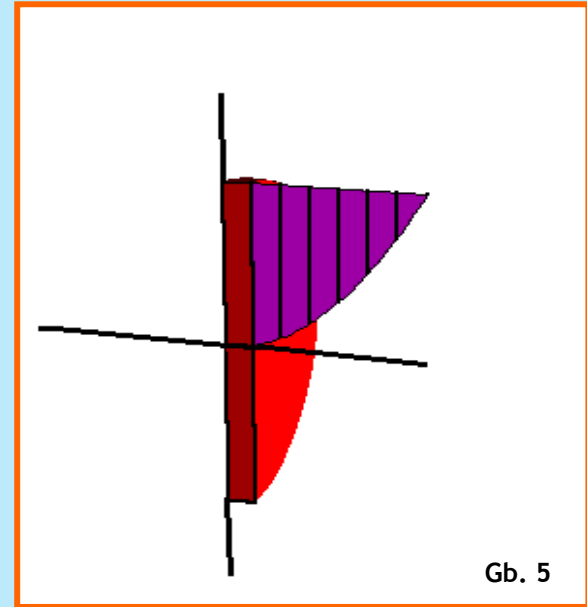
$$V = 2\pi$$



Metode cincin yang digunakan dalam menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume bawang bombay dengan memotong-motongnya yang potongannya berbentuk cincin.



Menghitung volume benda putar dengan menggunakan metode cincin dilakukan dengan memanfaatkan rumus volume cincin seperti gambar di samping, yaitu $V = \pi(R^2 - r^2)h$



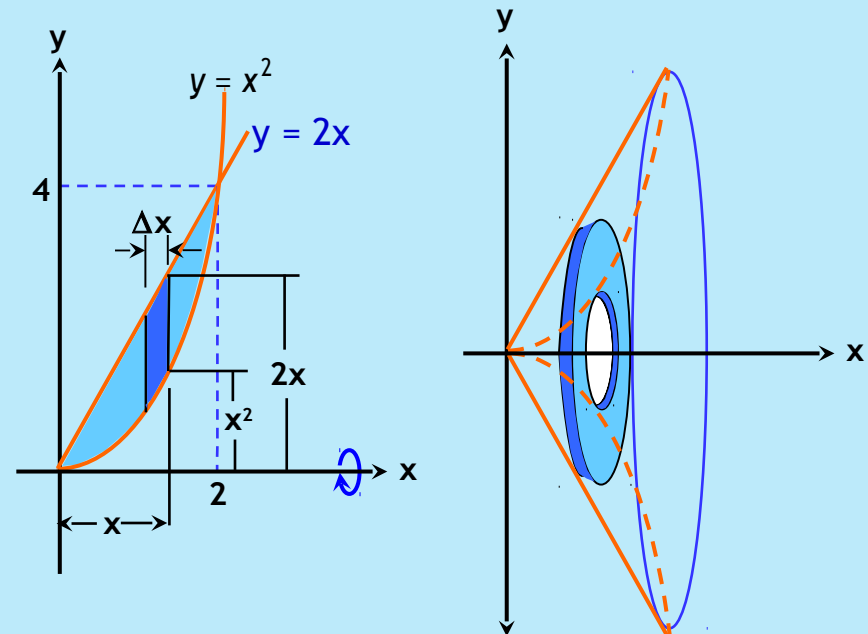
Contoh

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2x$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360° .

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Tentukan bentuk irisannya.
3. Masukkan dalam rumusnya



$$V = \pi \int_a^b (R^2 - r^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^2 ((2x)^2 - (x^2)^2) dx$$

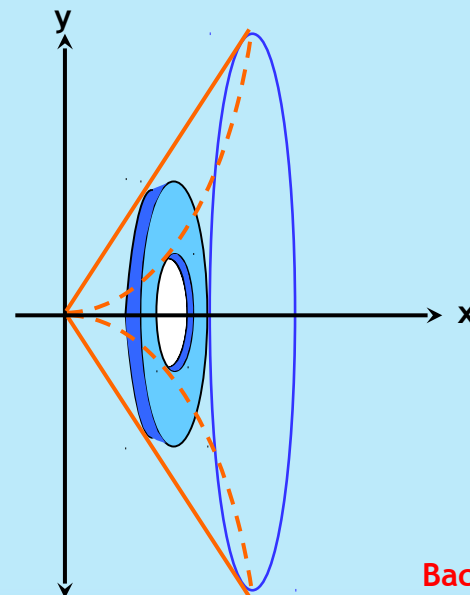
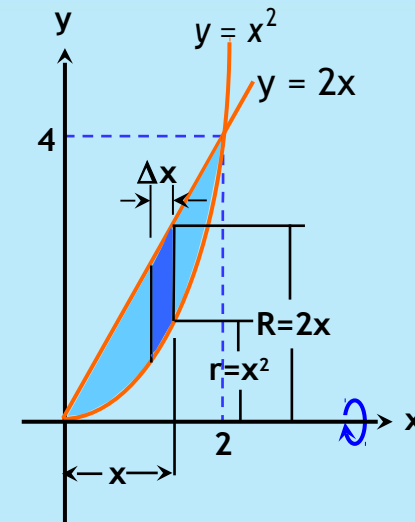
$$V = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2$$

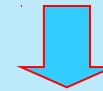
$$V = \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right)$$

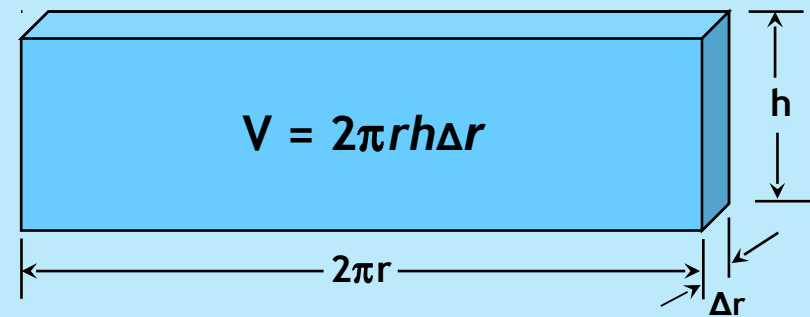
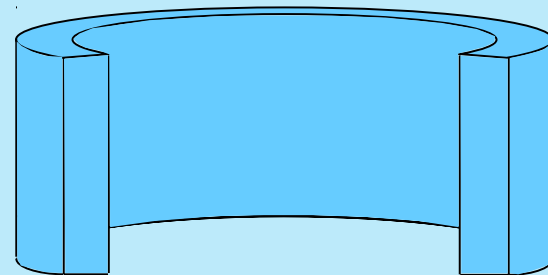
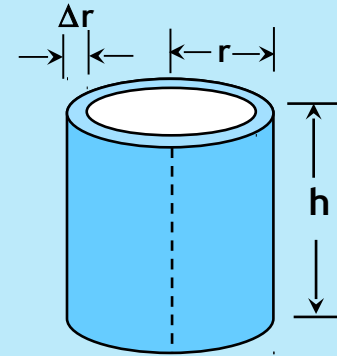
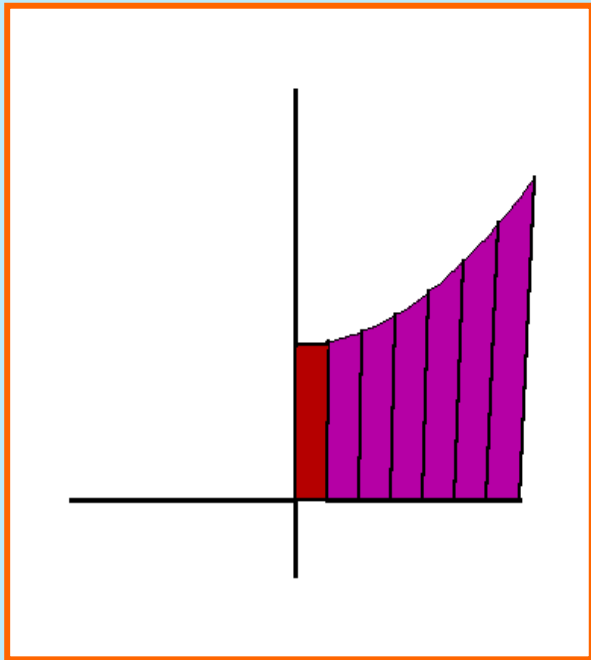
$$V = \pi \left(\frac{160 - 96}{15} \right)$$

$$V = \frac{64}{15} \pi$$



Metode kulit tabung yang digunakan untuk menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume roti pada gambar disamping.





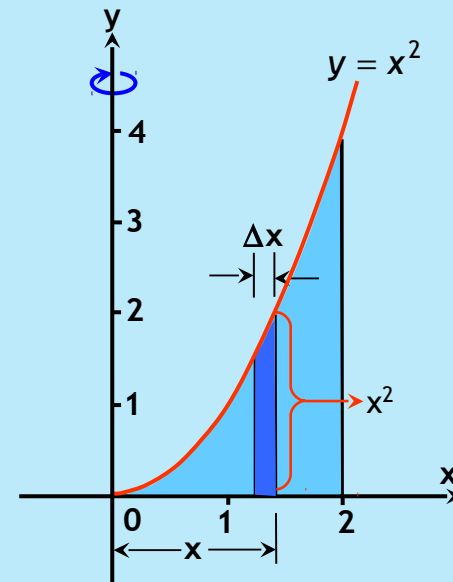
Contoh

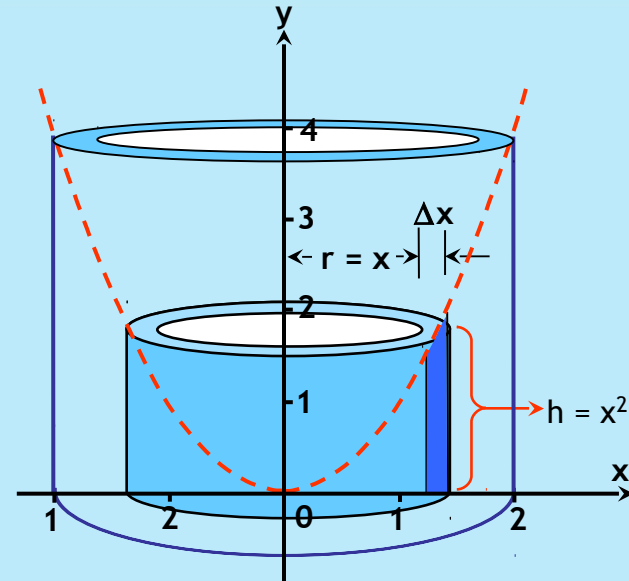
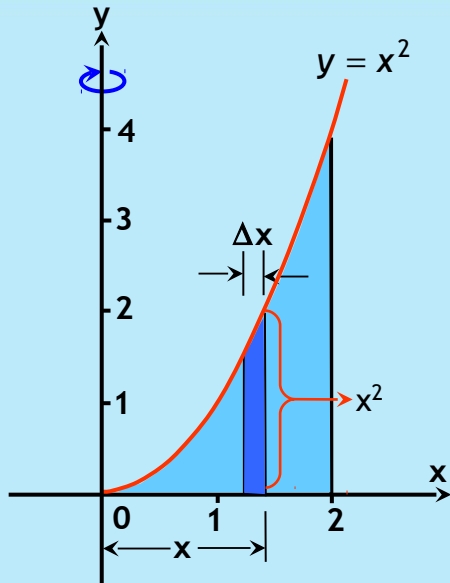
Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, garis $x = 2$, dan sumbu x diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360° .

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Tentukan bentuk irisannya.
3. Masukkan dalam rumusnya





$$V = 2\pi \int_a^b r \cdot h \, dx$$

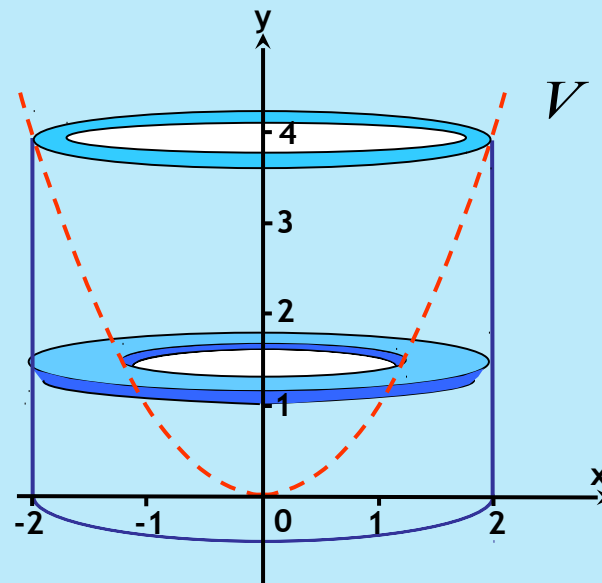
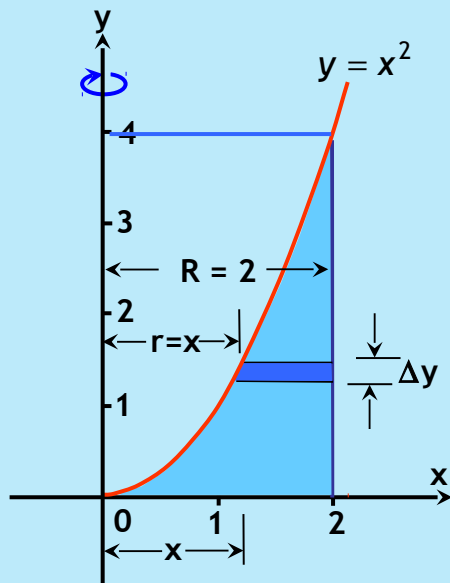
$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 \, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 x^3 \, dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2$$

$$V = 8\pi$$

Jika daerah pada contoh sebelumnya dipartisi secara horizontal dan sebuah partisi diputar mengelilingi sumbu y , maka partisi tersebut membentuk cincin. Volume benda putar tersebut dihitung dengan metode cincin adalah sebagai berikut.



$$V = \pi \int_a^b (R^2 - r^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^4 (4 - y) dx$$

$$V = \pi \left[4y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^4$$

$$V = (16 - 8)\pi$$

$$V = 8\pi$$

Soal 5.

Daerah yang di arsir pada gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu Y sebesar 360° . Jika digunakan metode kulit tabung, maka bentuk integral yang menyatakan volume benda putar tersebut adalah

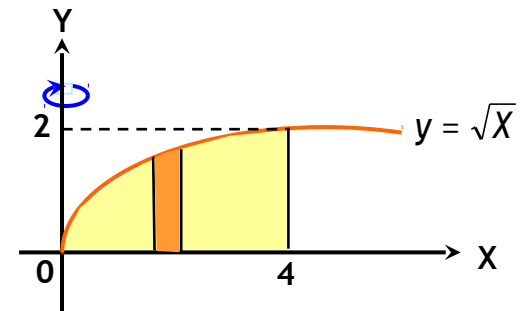
A $v = \pi \int_0^4 x \, dx$

D $v = 2\pi \int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$

B $v = \pi \int_0^4 x^2 \, dx$

E $v = 2\pi \int_0^2 (16 - y) \, dy$

C $v = \pi \int_0^2 y \, dy$



Soal 6.

Daerah yang di arsir pada gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu X sebesar 360° . Volume benda putar yang terjadi adalah

- (A) 4π satuan volum
- (B) 6π satuan volum
- (C) 8π satuan volum
- (D) 12π satuan volum
- (E) 15π satuan volum

