ANA1

Z_5

1. Wyznacz równania tych stycznych do krzywej $y = \frac{x^2+1}{x-1}, \quad x \neq 1$, które są równoległe do prostej $x + y = 5$.

2. Wykaż, że:
   (a) $2\mathrm{arctg}x + \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \pi$ dla $x \geq 1$,
   (b) $2x\mathrm{arctg}x \geq \ln(x^2+1)$ dla $x \in \mathbb{R}$,
   (c) $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$ dla $x \geq 0$,
   (d) $\ln x < 2\sqrt{x}$ dla $x > 0$,
   (e) $2x < \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ dla $x \in (0;\ 1)$.

3. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x)$, jeśli:
   (a) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{2}{x}}$,
   (b) $f(x) = \frac{x}{(1+\ln x)^2}$,
   (c) $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$,
   (d) $f(x) = \frac{e^{x^2+1}}{x^2-1}$,
   (e) $f(x) = 2\mathrm{arctg}x - x$.

4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{2+x}{2-x}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

5. Korzystając ze wzoru Maclaurina podaj przybliżenie funkcji
   (a) $f(x) = \sqrt{1+x}$ wielomianem stopnia 4.
   (b) $f(x) = \cos x$ wielomianem stopnia 6.

6. Korzystając ze wzoru Maclaurina wykaż, że nierówność $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ zachodzi dla $x \geq 0$.