Własności prawdopodobieństwa:

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Jeśli A, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, to:

1. $P(\emptyset) = 0$

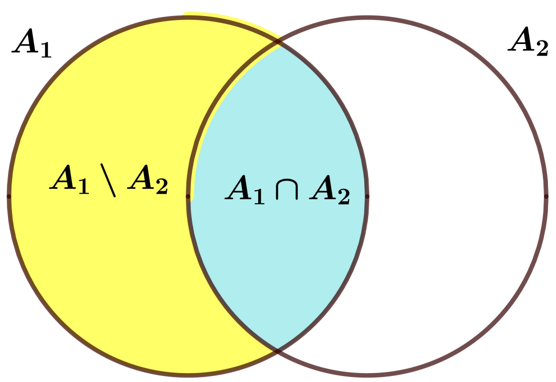
   Dowód: Zbiór zdarzeń elementarnych mozna zapisać jako nieskończoną sumę rozłącznych zbiorów:
   $$\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$$
   Z definicji prawdopodobieństwa wynika więc, że
   $$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots$$
   co oznacza, że $P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots = 0$. Ponieważ $P(\emptyset) \geqslant 0$, więc musi być $P(\emptyset) = 0$.

2. Jeśli $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

   Dowód: Zbiór $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ można zapisać jako nieskończoną sumę rozłącznych zbiorów:
   $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots.$$
   Z definicji prawdopodobieństwa wynika więc, że
   $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

3. $P(A_1 \setminus A_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$

   Dowód: Zauważmy, że zdarzenie A_1 można zapisać jako skończoną sumę rozłącznych zbiorów:
   $$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2).$$

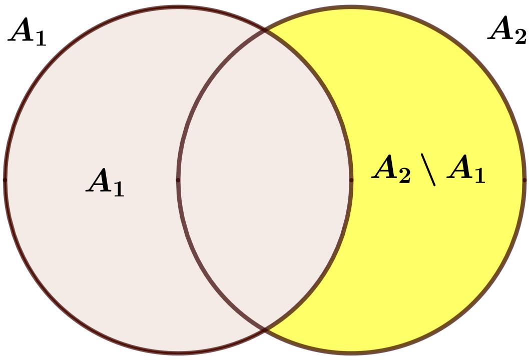


   Na mocy własności 2 mamy więc $P(A_1) = P(A_1 \setminus A_2) + P(A_1 \cap A_2)$ co oznacza, że $P(A_1 \setminus A_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$.

4. (a) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Dowód: Zauważmy, że zdarzenie $A_1 \cup A_2$ można zapisać jako skończoną sumę rozłącznych zbiorów:

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1).$$



Na mocy własności 2 i 3 mamy więc

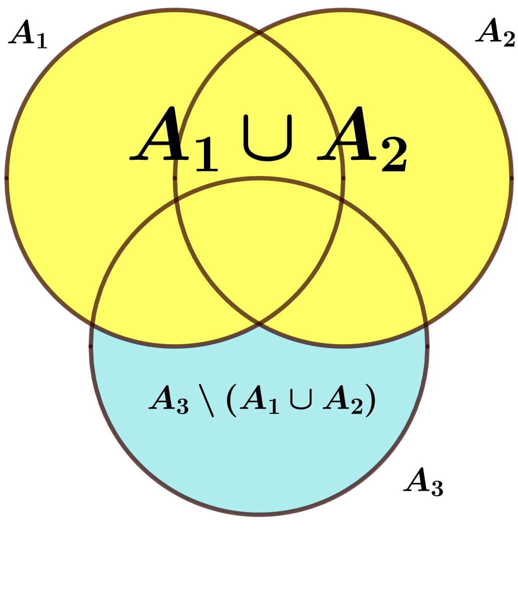
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

(b)

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \\ = \ & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Dowód: Zauważmy, że zdarzenie $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ można zapisać jako skończoną sumę rozłącznych zbiorów:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)).$$



Zatem na mocy własności 2, 3 oraz $4a$

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) = \\ = \; & P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_3 \cup (A_1 \cup A_2)) = \\ = \; & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P((A_3 \cap A_1) \cup (A_3 \cap A_2)) = \\ = \; & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

(c) Zasada włączeń i wyłączeń:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} P(A_i \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

5. $P(A') = 1 - P(A)$

   Dowód: Ponieważ $\Omega = A \cup A'$, gdzie $A \cap A' = \emptyset$, więc na mocy własności 2 mamy $P(\Omega) = P(A) + P(A')$. To oznacza, że $P(A') = 1 - P(A)$.

6. Jeśli $A_2 \subset A_1$, to $P(A_2) \leqslant P(A_1)$

   Dowód: Jeśli $A_2 \subset A_1$, to na mocy własności 3 oraz definicji prawdopodobieństwa

   $$P(A_1 \setminus A_2) = P(A_1) - P(A_2) \geqslant 0.$$

   To oznacza, że $P(A_2) \leqslant P(A_1)$.

7. Dla każdego zdarzenia losowego A

   $$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

   Dowód: Z definicji prawdopodobieństwa wynika, że $P(A) \geqslant 0$. Ponadto, ponieważ $A \subset \Omega$, więc na mocy własności 6

   $$P(A) \leqslant P(\Omega) = 1.$$