WYKŁAD 6

Wzór Taylora i Maclaurina

Twierdzenie 1. (Taylora) Jeżeli funkcja f ma ciągłe pochodne do $n-1$ rzędu, $n \geqslant 1$, włącznie w przedziale domkniętym o końcach x i x_0 oraz ma pochodną n–tego rzędu wewnątrz tego przedziału, to istnieje punkt c z wnętrza tego przedziału taki, że

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots++\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\cdot(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

wzór Taylora z n–tą pochodną dla funkcji f i punktu x_0,
ostatni składnik – n–ta reszta wzoru Taylora.

Po przeniesieniu składnika $f(x_0)$ na prawą stronę wzór Taylora można zapisać w postaci:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-x_0)^n.$$

Pomijając ostatni składnik otrzymujemy przybliżenie

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

Wartość bezwzględna błędu przybliżenia nie przekracza

$$\frac{|f^{(n)}(c)|}{n!} \cdot |x-x_0|^n.$$

Dla $x_0 = 0$ wzór Taylora – zwany wówczas wzorem Maclaurina – ma postać

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot x^n, c \text{ -- między } 0 \text{ i } x;$$

a przybliżenie

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

Ważne przykłady rozwinięć wg wzoru Maclaurina

1. Dla funkcji $f(x) = e^x$ wzór Maclaurina dla dowolnego n i $x \in \mathbb{R}$ ma postać

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{e^c}{n!} x^n$$

   c leży między 0 i x

2. Dla $f(x) = \sin x$: dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$:

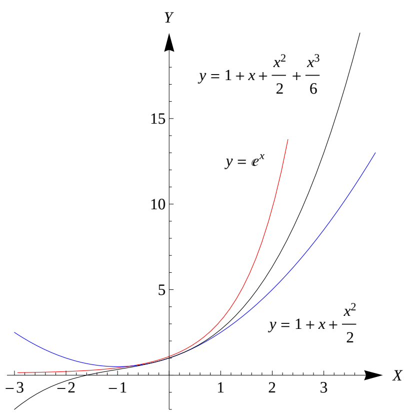
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{\sin\left((n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{(n-1)!}x^{(n-1)} + \frac{\sin\left(c + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n$$

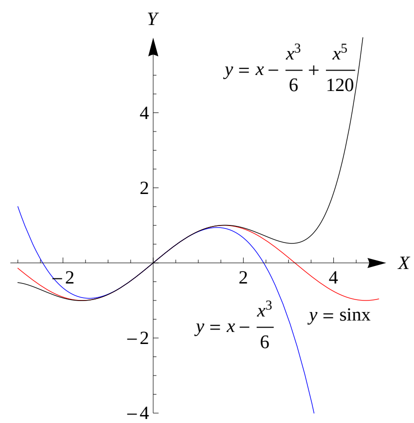
   c leży między 0 i x.

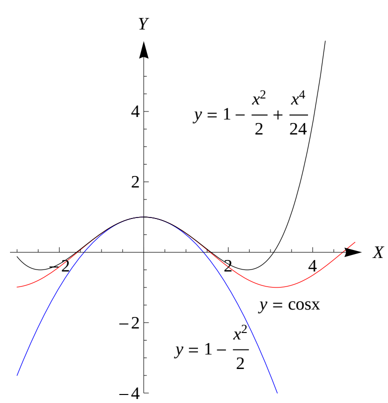
3. Dla $f(x) = \cos x$: dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{\cos\left((n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{(n-1)!}x^{(n-1)} + \frac{\cos\left(c + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n$$

   c leży między 0 i x.







Twierdzenie 2. (II WW istnienia ekstremum) Jeżeli funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodne do n – tego rzędu włącznie, pochodna $f^{(n)}$ jest ciągła w punkcie x_0 i n jest liczbą parzystą oraz

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ oraz } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, natomiast minimum właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Całka nieoznaczona

Definicja 1. Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale X, jeśli zachodzi równość $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in X$.

Operacja wyznaczania funkcji pierwotnej jest operacją odwrotną do operacji różniczkowania.

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale X, to

1. każda funkcja postaci $F+C$, $C \in \mathbb{R}$, jest funkcją pierwotną funkcji f na tym przedziale;
2. jeżeli F_1 jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f na przedziale X, to $F_1 = F + C_0$ dla pewnego $C_0 \in \mathbb{R}$.

Ostatnie zdanie przestaje być prawdziwe, gdy X nie jest przedziałem.

Operacje wyznaczania funkcji pierwotnej funkcji f na przedziale X nazywamy całkowaniem.

Definicja 2. Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f na danym przedziale nazywamy całką nieoznaczoną funkcji f i oznaczamy przez $\int f(x)dx$.

x – zmienna całkowania;
f – funkcja podcałkowa;
$f(x)dx$ – wyrażenie podcałkowe.

Uwaga 1. Jeśli F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f, to

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

Twierdzenie 4. (O istnieniu funkcji pierwotnej) Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale X, to posiada w tym przedziale funkcję pierwotną.

Z reguł różniczkowania wynikają wzory:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \ , \ \int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx \ , \ A \in \mathbb{R}$$

Wzory podstawowe

Z definicji funkcji pierwotnej i wzorów na pochodne funkcji elementarnych wynikają następujące wzory podstawowe:

$$\int 0dx = C$$
$$\int dx = x + C$$
$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$
$$\int e^x dx = e^x + C,$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$$
$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$
$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

Twierdzenie 5. (o całkowaniu przez części) Jeżeli funkcje f , f' , g , g' są ciągłe na przedziale X, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Tw. o całkowaniu przez części można stosować więcej niż jeden raz.