AUTOMATYKA I ROBOTYKA - SEMESTR 2

ANA2. ZESTAW 2. - Rozwiązania

Zad. 1. Wykazać zbieżność jednostajną szeregów funkcyjnych

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Korzystamy z kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej: aby wykazać zbieżność jednostajną musimy oszacować $|f_n(x)|$ przez wyraz ogólny szeregu liczbowego zbieżnego

$$\left| \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2} \right| \leqslant \frac{1}{1+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}$ jest jednostajnie zbieżny.

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{(n^2+x^2)^2}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Tutaj również korzystamy z kryterium Weierstrassa:

$$\left| \frac{\ln(1+nx)}{(n^2+x^2)^2} \right| \leqslant \frac{nx}{(n^2+x^2)^2} \leqslant \frac{\frac{1}{2}(n^2+x^2)}{(n^2+x^2)^2} = \frac{1}{2(n^2+x^2)} \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{(n^2+x^2)^2}$ jest jednostajnie zbieżny.

Zad. 2. Zbadać dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n(x^2+1)^n}$$

Zastosujemy tutaj kryterium Cauchy'ego dla szeregów liczbowych, potraktujemy szereg funkcyjny jako szereg liczbowy dla ustalonego x, granica, którą otrzymamy będzie zależała od x.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2|x|}{\sqrt[n]{n}(x^2+1)} = \frac{2|x|}{x^2+1} < 1 \Rightarrow$ szereg zbieżny

$\frac{2|x|}{x^2+1} < 1 \iff (|x|-1)^2 > 0 \iff |x| \neq 1 \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

W związku z tym, że kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga zbieżności szeregu, gdy granica jest równa 1, czyli dla $x = \pm 1$, musimy jeszcze sprawdzić zbieżność szeregów w tych punktach.

$x = 1: \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - szereg harmoniczny - rozbieżny

$x = -1: \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (-1)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - szereg anharmoniczny - zbieżny

Stąd obszar zbieżności $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Zad. 3. Wyznaczyć promienie zbieżności i przedziały zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n$$

Skorzystamy z twierdzenia Cauchy - Hadamarda: $\lambda = \frac{1}{R}, \ 0 < R < \infty$

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \ \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{(n+1)2^n} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Musimy jeszcze sprawdzić zbieżność szergu na końcach przedziału:

$x = -\frac{1}{2}: \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ - szereg anharmoniczny, zbieżny

$x = \frac{1}{2}: \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ - szereg harmoniczny, rozbieżny

Ostatecznie przedział zbieżności $X = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$$

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln(n+1)}{(n+1)\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 1 \Rightarrow (-1, 1)$

Granicę ilorazu logarytmów najłatwiej wyznaczyć korzystając z tw. de l'Hospitala po wcześniejszym przejściu do dziedziny rzeczywistej:

$x \geqslant 2: \ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

Badamy zbieżność szeregu na końcach przedziału:

$x = 1: \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ skorzystamy z kryterium całkowego zbieżności szeregu:

Sprawdzamy założenia kryterium całkowego:

$f(x) = \frac{\ln x}{x} > 0\,,\ x \geqslant 2$
$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0\,,\ x > e \Rightarrow f$ - malejąca od pewnego miejsca

$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_2^{T} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \ \frac{1}{2}\ln^2 x \,\Big|_2^T =$
$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2}(\ln^2 T - \ln^2 2) = +\infty \Rightarrow$ całka rozbieżna $\Rightarrow$ szereg rozbieżny

$x = -1: \ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ pokażemy z kryterium Leibniza, że szereg jest zbieżny:

$\frac{\ln n}{n} > 0\,,\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ i ciąg monotonicznie dąży do 0.

$f(x) = \frac{\ln x}{x}\,,\ x \geqslant 2: \ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,,$
$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0\,,\ x > e \Rightarrow f$ - malejąca od pewnego miejsca.

Czyli przedział zbieżności $X = [-1, 1)$.

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} x^{2n}$$

W tym przykładzie skorzystamy z kryterium d'Alemberta dla szeregów liczbowych, traktując szereg funkcyjny jako szereg liczbowy dla ustalonego x i otrzymując granicę zależną od x:

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(2n+3)6^n x^{2n+2}}{n(2n+1)6^n x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+3)}{6n(2n+1)} |x|^2 =$
$= \frac{|x|^2}{6} < 1$

$\frac{|x|^2}{6} < 1 \iff |x| < \sqrt{6} \Rightarrow (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$

Końce przedziału:

$x = \sqrt{6}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} (\sqrt{6})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} n(2n+1) \Rightarrow$ szereg rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, czyli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$x = -\sqrt{6}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} (-\sqrt{6})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} n(2n+1) \Rightarrow$ szereg rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny.

Przedział zbieżności: $X = (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

$$\text{(d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{3^n + 2^n}$$

Przekształcimy najpierw wyraz ogólny szeregu:

$\frac{(6-2x)^n}{3^n+2^n} = \frac{2^n(3-x)^n}{3^n+2^n} = \frac{(-1)^n 2^n}{3^n+2^n}(x-3)^n$, $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{3^n+2^n}$

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n+2^n}} = \frac{2}{3} \Rightarrow R = \frac{3}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(3 - \frac{3}{2}, 3 + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

λ obliczymy z tw. o 3 ciągach:

$\frac{2}{3} \leftarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{2\cdot 3^n}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n+2^n}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n}} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3}$

Końce przedziału:

$x=\frac{3}{2}:\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{3^n+2^n}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+2^n}$ - szereg rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny:

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+2^n}=1\neq 0$

$x=\frac{9}{2}:\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{3^n+2^n}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{3^n+2^n}$ - szereg rozbieżny, bo $\lim_{n\to\infty}a_n$ nie istnieje, nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego.

Stąd: $X=\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$.

$$\text{(e)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n\cdot\ln n}$$

$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\ \right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n2^n\ln n}{(n+1)2^{n+1}\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=$
$=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2\Rightarrow(-1,3)$.

Końce przedziału:

$x=-1:\ \ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}\Rightarrow$ szereg zbieżny z kryterium Leibniza.

$x=3:\ \ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ skorzystamy z kryterium całkowego:

$f(x)=\frac{1}{x\ln x}>0\,,\ x\geqslant 2\,,\ \ f'(x)=\frac{-(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}<0\Rightarrow$ - funkcja malejąca

$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{T\to\infty}\int_2^T\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{T\to\infty}\ \ln|\ln|x||\ \Big|_2^T=$
$=\lim_{T\to\infty}\ln|\ln|T|-\ln|\ln 2|=+\infty\Rightarrow$ całka rozbieżna $\Rightarrow$ szereg rozbieżny

$\int\frac{dx}{x\ln x}=\left\|\ y=\ln x\ \right\|=\int\frac{dy}{y}=\ln|\ln|x||+C$

Przedział zbieżności: $X=[-1,3)$.

$$\text{(f)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^{n+2}$$

Zastosujemy kryterium d'Alemberta dla szeregów liczbowych:

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^{n+1}(n+1)(x-1)^{n+3}}{4^n(n+2)(x-1)^{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot |x-1| =$
$= 4|x-1| < 1$

$4|x-1| < 1 \iff |x-1| < \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

Końce przedziału:

$x = \frac{3}{4}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+2} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n+1} \Rightarrow$ szereg rozbieżny, bo warunek konieczny nie jest spełniony: $\lim_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje.

$x = \frac{5}{4}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ - szereg harmoniczny, rozbieżny

$\Rightarrow X = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

Zad. 4. Znaleźć sumy szeregów potęgowych

$$\text{(a)} \quad x + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \ldots$$

Szukamy sumy $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

Skorzystamy z tw. o całkowaniu i różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie, musimy najpierw sprawdzić, czy promień zbieżności jest > 0:

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4n+1]{\frac{1}{4n+1}} = 1 \Rightarrow R > 0 \Rightarrow$ - szereg jest zbieżny dla $x \in (-1, 1)$

$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4} \Rightarrow S(x) = \int \frac{dx}{1-x^4} = \int \frac{dx}{(1+x^2)(1-x)(1+x)} =$

$= -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\ \frac{x+1}{x-1}\ \right| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x + C$

$S(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\ \frac{x+1}{x-1}\ \right| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x$

$$\text{(b)}\qquad \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{4n+2}}{4n+2} + \ldots$$

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+2}$ i $R > 0$ (jak wyżej, $x \in (-1,1)$)

Różniczkujemy szereg wyraz po wyrazie:

$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+1} = \frac{x}{1-x^4} \Rightarrow S(x) = \int \frac{x}{1-x^4}\, dx =$
$= -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{4}\ln\left|\ \frac{x^2+1}{x^2-1}\ \right| + C$

$S(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\ \frac{x^2+1}{x^2-1}\ \right|$

$$\text{(c)}\qquad \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{(n-1)\cdot n} + \ldots$$

$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)n}$, $R = 1$ (jak wyżej, $x \in (-1,1)$)

$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1}$

$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$

$S'(x) = \int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| + C$, $S'(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S'(x) = \ln|1+x|$

$S(x) = \int \ln|1+x|\, dx = (x+1)\ln|x+1| - (x+1) + C$

$S(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow S(x) = (x+1)\ln|x+1| - x$

Zad. 5. Obliczyć sumę szeregu liczbowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{3^n}$$

Można tę sumę obliczyć tak, jak w przykładzie z wykładu, różniczkując sumę szeregu potęgowego wyraz po wyrazie lub możemy całkować szukaną sumę wyraz po wyrazie:

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$

Promień zbieżności $R > 0$, bo:

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)} = 1 \Rightarrow R = 1$

$\int S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1} = S_1(x)$

$\int S_1(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x} = S_2(x)$

Teraz aby otrzymać sumę $S(x)$ musimy zróżniczkować dwa razy otrzymaną funkcję:

$S_1(x) = S_2'(x) = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$

$S(x) = S_1'(x) = \frac{(2-2x)(1-x)^2+2(2x-x^2)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$

Promień zbieżności szeregu po scałkowaniu lub zróżniczkowaniu wyraz po wyrazie pozostaje taki sam, więc w naszym przykładzie przedział zbieżności to $(-1, 1)$.

Wybieramy z tego przedziału $x = \frac{1}{3}$ i podstawiamy do otrzymanej sumy uzyskując sumę szergu liczbowego:

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{3^n} = S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{27}{4}$