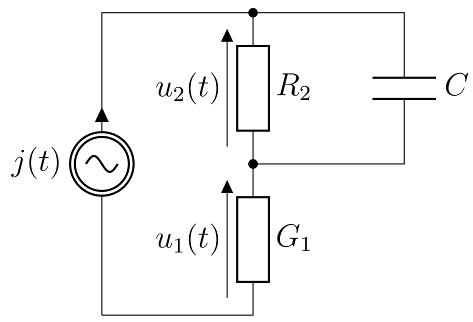
**Zadanie 1**

Obliczyć wartość pojemności $C$ i rezystancji $R_2$ dla których napięcie $u_2(t)$ jest opóźnione w fazie względem napięcia $u_1(t)$ o kąt $\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad i amplituda napięcia $u_1(t)$ jest $k = 5\sqrt{2}$ razy mniejsza od amplitudy napięcie $u_2(t)$. Wyznaczyć wskazy napięć $U_1$ i $U_2$ oraz przebiegi czasowe napięć $u_1(t)$ i $u_2(t)$ dla obliczonych wartości elementów. Obliczyć moc czynną i bierną dostarczaną do obwodu przez źródło $j(t)$. Dane: $j(t) = 5\sin(\omega t)\,\mathrm{mA}$, $G_1 = 10\,\mathrm{mS}$, $\omega = 2\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.




**Rozwiazanie:**

1. Przyjmujemy spójny system jednostek $\left\{\mathrm{V}, \mathrm{mA}, \mathrm{k\Omega}, \mathrm{mS}, \frac{\mathrm{krad}}{\mathrm{s}}, \mathrm{\mu F}\right\}$.

2. Zapisujemy wydajność źródła prądowego $j(t)$ i zależności między napięciami $u_1(t)$ i $u_2(t)$ w postaci wskazów:

$$J = 5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{mA}$$

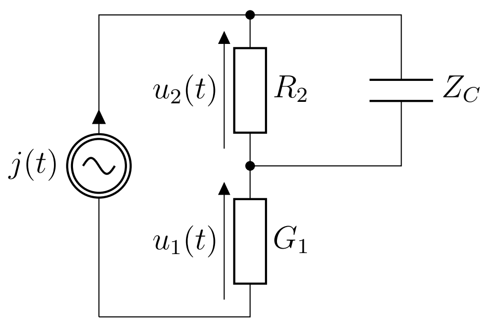
$$\arg(U_2) - \arg(U_1) = \arg\left(\frac{U_2}{U_1}\right) = -\varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{|U_1|}{|U_2|} = \frac{1}{k} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

3. Zapisujemy równania wynikające z prawa Ohma:

$$Z_C = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}$$

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{J}{G_1} \\ U_2 = \dfrac{J}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_C}} \end{cases}$$




4. Przekształcamy powyższe równania:

$$\frac{1}{5\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{4}} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{J}{G_1}}{\frac{J}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{Z_C}}} = \frac{\frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\,\omega C}{G_1} = \frac{1}{G_1}\cdot\sqrt{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\mathrm{arctg}(\omega R_2 C)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{G_1}\cdot\sqrt{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C^2} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} \\ \mathrm{arctg}(\omega R_2 C) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

5. Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{10}\cdot\sqrt{\frac{1}{R_2^2} + 2^2 C^2} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} \\ 2R_2 C = 1 \end{cases}$$

zatem $C = 0{,}5\,\mu\text{F}$, $R_2 = 1\,\text{k}\Omega$ i $Z_C = \dfrac{1}{\mathrm{j} \cdot 2 \cdot 0,5} = -\,\mathrm{j}\ \text{k}\Omega$

6. Korzystając z wcześniejszych równań wyznaczamy wskazy i przebieg czasowe napięć.

   $U_1 = \dfrac{J}{G_1} = \dfrac{5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}}{10} = 0,5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}\ \text{V} \Rightarrow u_1(t) = 0,5\sin(\omega t)\,\text{V}$

   $U_2 = \dfrac{J}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_C}} = \dfrac{5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}}{1+\mathrm{j}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{3\pi}{4}}\ \text{V} \Rightarrow u_2(t) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t - \frac{3\pi}{4})\,\text{V}$

7. Źródło $j(t)$ dostarcza moc zespoloną.

   $S = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \cdot J^* = \frac{1}{2}(\dfrac{J}{G_1} + \dfrac{J}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_C}}) = \frac{1}{2}\,|J|^2 \cdot (\dfrac{1}{G_1} + \dfrac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_C}}) = \frac{1}{2}\left|5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}\right|^2 \cdot (\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{1+\mathrm{j}}) =$
   $7,5 - \mathrm{j}\,6,25\,\text{mVA}$

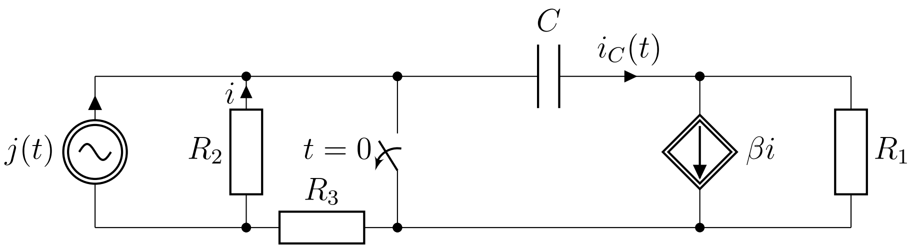
   moc czynna: $P = \operatorname{Re} S = 7{,}5\,\text{mW}$

   moc bierna: $Q = \operatorname{Im} S = -6{,}25\,\text{mVAr}$

**Odpowiedź:** $C = 0{,}5\,\mu\text{F}$, $R_2 = 1\,\text{k}\Omega$, $U_1 = 0,5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}\ \text{V}$, $U_2 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{3\pi}{4}}\ \text{V}$, $u_1(t) = 0,5\sin(\omega t)\,\text{V}$, $u_2(t) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t - \frac{3\pi}{4})\,\text{V}$ $P = 7{,}5\,\text{mW}$, $Q = -6{,}25\,\text{mVAr}$

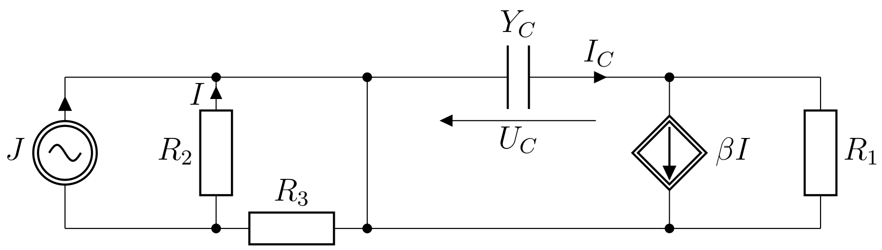
**Zadanie 2**

Wyznaczyć i naszkicować przebieg prądu $i_C(t)$. Dane: $j(t) = \begin{cases} J_m \cos(\omega t + \varphi) & t < 0 \\ J_0 & t > 0 \end{cases}$, $J_m = 10\sqrt{2}\,\mathrm{mA}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}$, $J_0 = 6\,\mathrm{mA}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 0{,}5\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 2\,\mathrm{nF}$, $\beta = 2\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{mA}}$, $\omega = 1\,\frac{\mathrm{Mrad}}{\mathrm{s}}$.




**Rozwiazanie:** *metoda operatorowa*

1. Przyjmujemy spójny system jednostek { V, mA, kΩ, mS, $\frac{\mathrm{Mrad}}{\mathrm{s}}$, nF, µs }.
2. Rozwiązujemy dla $t < 0$ - stosując metodę wskazową.




$J = J_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi} = 10\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{4}}\ \mathrm{mA}$

$Y_C = \mathrm{j}\,\omega C = \mathrm{j}\,1\cdot 2 = \mathrm{j}\,2\,\mathrm{mS}$

(a) układ równań z dzielników prądowych $\begin{cases} I_C = \beta I \dfrac{Y_C}{\frac{1}{R_1} + Y_C} \\ I = -J \dfrac{R_3}{R_2 + R_3} \end{cases}$

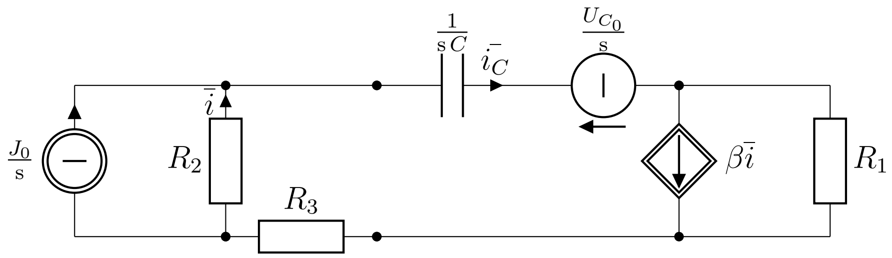
(b) wyznaczamy wskaz prądu $I_C$ i odpowiadający mu przebieg czasowy $i_C^-(t)$

$I_C = \beta \cdot -J \dfrac{R_3}{R_2 + R_3} \dfrac{Y_C}{\frac{1}{R_1} + Y_C} = 2 \cdot -10\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{4}} \dfrac{0,5}{0,5 + 0,5} \dfrac{\mathrm{j}\,2}{\frac{1}{0,5} + \mathrm{j}\,2} = 10\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{mA} \rightarrow i_C^-(t) = 10\sin(\omega t)\,\mathrm{mA}$

(c) wyznaczamy wskaz napięcia

$U_C = \dfrac{I_C}{Y_C} = \dfrac{10\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{j}\,2} = -5\,\mathrm{V} \rightarrow u_C^-(t) = 5\cos(\omega t - \pi)\,\mathrm{V}$

3. Rozwiązanie układu po komutacji



(a) na podstawie rozwiązania z poprzedniego punktu wyznaczamy napięcia na kondensatorze w momencie komutacji

$U_{C_0} = u_C^-(0) = -5\,\mathrm{V}$

(b) układ równań z praw Kirchhoffa

$\begin{cases} \frac{J_0}{\mathrm{s}} + \bar{i} - \bar{i_C} = 0 \\ \bar{i}R_2 + \bar{i_C}R_3 + (\bar{i_C} - \beta\bar{i})R_1 + \frac{U_{C_0}}{\mathrm{s}} + \bar{i_C} \cdot \frac{1}{\mathrm{s}\,C} = 0 \end{cases}$

(c) wyznaczamy transformatę Laplace'a prądu $\bar{i_C}$

$\bar{i_C} = \frac{4}{\mathrm{s}+1}\,\mathrm{mA}$

(d) wyznaczamy prąd $i_C(t)$ jako odwrotną transformatę Laplace'a

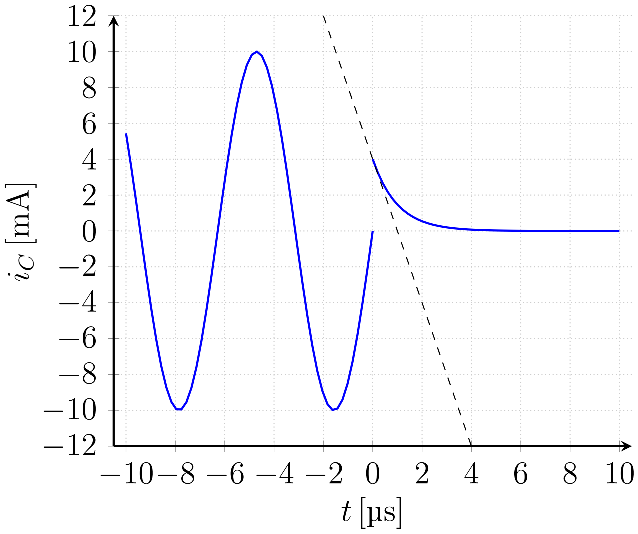
$i_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\bar{i_C}\right] = 4\,\mathrm{e}^{-t} \cdot \mathbb{1}(t)\,\mathrm{mA}$

4. Podsumowując:

$$i_C(t) = \begin{cases} 10\sin(t)\,\mathrm{mA} & t < 0\,\mathrm{\mu s} \\ 4\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{mA} & t > 0\,\mathrm{\mu s} \end{cases}$$

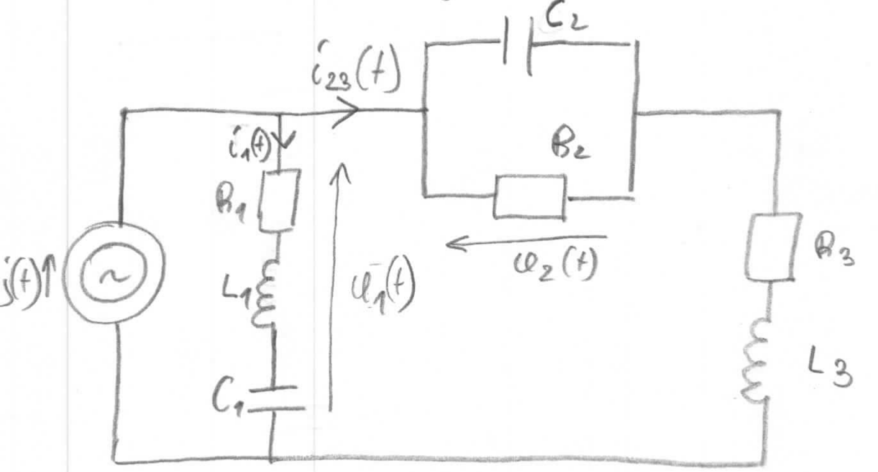
**Odpowiedź:**

$$i_C(t) = \begin{cases} 10\sin(t)\,\mathrm{mA} & t < 0\,\mathrm{\mu s} \\ 4\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{mA} & t > 0\,\mathrm{\mu s} \end{cases}$$



Zad. 1.

Wyznaczyć wskazy prądów $i_1(t)$ i $i_{23}(t)$ i naszkicować ich wykresy wskazowe. Następnie wyznaczyć wskazy napięć $u_1(t)$, $u_2(t)$ i $u_3(t)$ i naszkicować ich wykresy wskazowe.




Dane:

$j(t) = 13 \sin \omega t$ [mA]

$\omega = 250 \frac{krad}{s}$

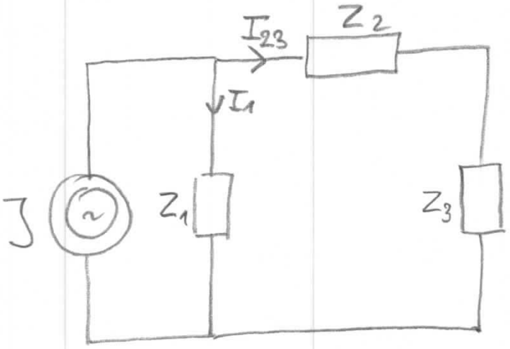
$R_1 = R_2 = R_3 = 1$ [kΩ]

$C_1 = C_2 = 4$ [nF]

$L_1 = L_3 = 4$ [mH]

Zad. 1a.

Aby uprościć analizę układu, możemy przedstawić go w postaci wskazowej:




gdzie $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} =$

$= R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)$

$$Z_2 = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{\frac{R_2}{\cancel{j\omega C_2}}}{\frac{j\omega R_2 C_2 + 1}{\cancel{j\omega C_2}}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

$$Z_3 = R_3 + j\omega L_3$$

W tym miejscu, przed podstawieniem wartości liczbowych, warto jest zdefiniować konwencję jednostek.

Z danych zadania mamy: • mA i kΩ, co wymusza stosowanie V,

• uF, mH i $\frac{krad}{s}$, co dla zachowania spójności jednostek wymusza zmianę. Ponieważ jednostką impedancji są kΩ => pulsacja powinna być wyrażona w $\frac{Mrad}{s}$ $\left(\frac{Mrad}{s} \cdot mH = k\Omega, \frac{1}{\frac{Mrad}{s} \cdot uF} = k\Omega\right)$.

Ostatecznie mamy:

$$\left\{V, mA, k\Omega, mS, \frac{Mrad}{s}, mH, uF\right\}$$

Dla takiej konwencji impedancje $Z_1$, $Z_2$ i $Z_3$ przyjmują wartości:

$Z_1 = 1 + j\left(\frac{1}{4}\cdot 4 - \frac{1}{\frac{1}{4}\cdot 4}\right) = 1\ [k\Omega]$ (jak nazywa się stan w którym znajduje się dwójnik $Z_1$?)

$$Z_2 = \frac{1}{1 + j\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 4} = \frac{1}{1+j}\cdot\frac{1-j}{1-j} = \frac{1}{2} - j\cdot\frac{1}{2}\ [k\Omega]$$

$$Z_3 = 1 + j\,\frac{1}{4}\cdot 4 = 1 + j\ [k\Omega]$$

Teraz, korzystając ze wzoru na dzielnik prądowy można wyznaczyć prądy $I_1$ i $I_{23}$:

$$\underline{\underline{I_1}} = J \cdot \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 + (Z_2 + Z_3)} = J \cdot \frac{\frac{3}{2} + j\frac{1}{2}}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}j} \cdot \frac{\frac{5}{2} - j\frac{1}{2}}{\frac{5}{2} - j\frac{1}{2}} = J \cdot \frac{\frac{16}{4} + j\frac{2}{4}}{\frac{26}{4}} = J\left(\frac{8}{13} + j\frac{1}{13}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} j(t) = 13 \sin \omega t \,[mA] = 13 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) [mA] \\ \Downarrow \\ J = 13 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -13j \,[mA] \end{array} \right\} = -13j\left(\frac{8}{13} + j \cdot \frac{1}{13}\right) =$$

$$= \underline{\underline{1 - j \cdot 8 \;[mA]}}$$

$$\underline{\underline{I_{23}}} = J \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + (Z_2 + Z_3)} = -13j \cdot \frac{1}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}j} = -13j \cdot \left(\frac{5}{13} - j\frac{1}{13}\right) = \underline{\underline{-1 - j5 \;[mA]}}$$

lub z PPK

$$\underline{\underline{I_{23}}} = J - I_1 = -13j - (1 - j8) = \underline{\underline{-1 - j5 \;[mA]}}$$

---

Napięcia:

z prawa Ohma:

$$\underline{\underline{U_1}} = I_1 \cdot Z_1 = (1 - j \cdot 8) \cdot 1 = \underline{\underline{1 - j \cdot 8 \;[V]}}$$

z prawa Ohma:

$$\underline{\underline{U_2}} = I_{23} \cdot Z_2 = (-1 - j5) \cdot \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-3 - 2j \;[V]}}$$

lub np. z dzielnika napięciowego:

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = (1 - j8) \cdot \frac{\frac{1}{2}(1 - j)}{\frac{1}{2}(3 + j)} = (1 - j8) \cdot \left(\frac{1}{5} - j\frac{2}{5}\right) = -3 - 2j \;[V]$$

z prawa Ohma:

$$\underline{\underline{U_3}} = I_{23} \cdot Z_3 = (-1 - j5) \cdot (1 + j) = \underline{\underline{4 - 6j \;[V]}}$$

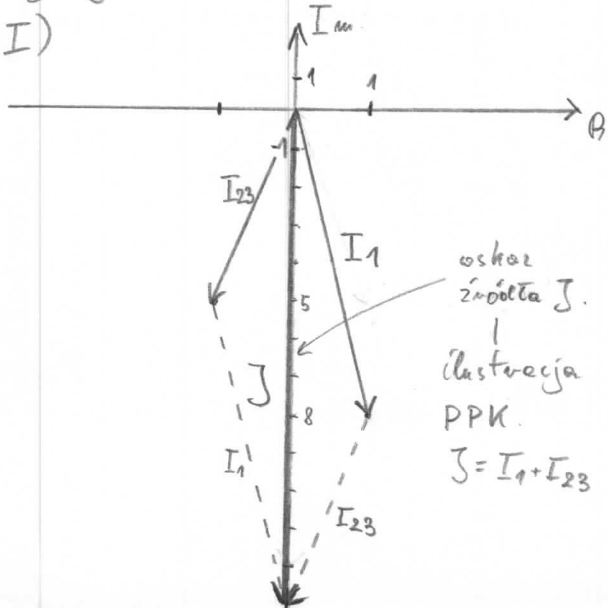
lub z NPK:

$$U_3 = U_1 - U_2 = 1 - j \cdot 8 - (-3 - 2j) = 4 - 6j \;[V]$$

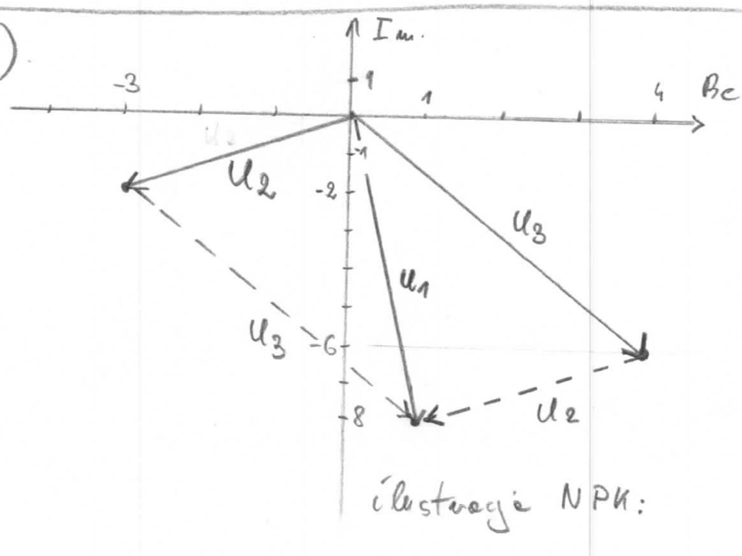
---

Wykresy wskazowe:

I)




U)

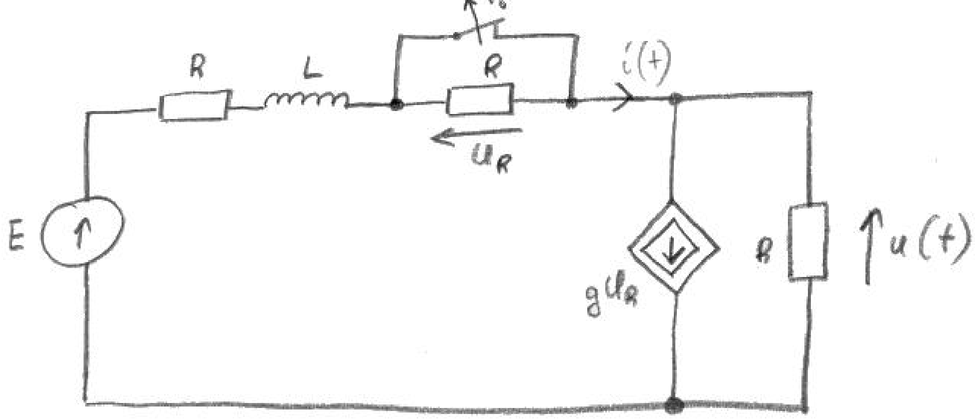



ilustracja NPK:

$U_1 = U_2 + U_3$

ZAD. 8.

Wiadomo, że do chwili $t_0 = 0$ w obwodzie panował stan ustalony. W chwili $t_0$ otwarto klucz. Wyznaczyć i naszkicować przebiegi napięcia $u(t)$ i prądu $i(t)$ dla $t \in (-\infty; +\infty)$.




Dane:

$E = 4V$

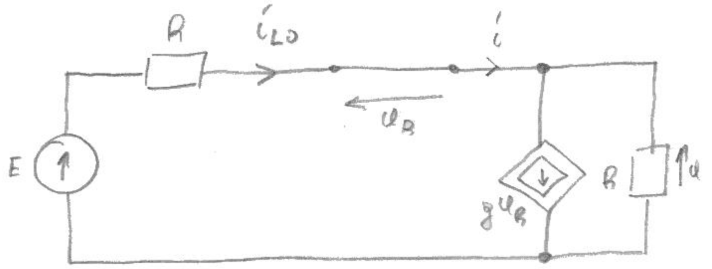
$R = 1 k\Omega$

$g = \frac{1}{2} mS$

$L = 5 mH$

W pierwszym kroku przeanalizujemy układ w stanie ustalonym dla $t < t_0$. 1.
Wyznaczymy wartości sygnałów $u(t)$ oraz $i(t)$ dla $t < t_0$ oraz wyznaczymy warunki początkowe dla analizy metodą operatorową.
W tym wypadku będzie to prąd płynący przez indukcyjność.
Dzięki temu będziemy mogli wyznaczyć operatorowy schemat zastępczy indukcyjności z niezerowym warunkiem początkowym.

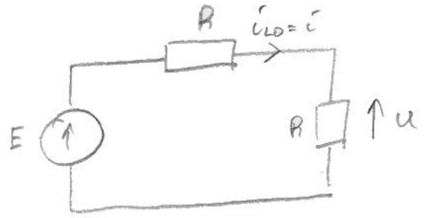
$t < t_0$ )




$u_R = 0 \Rightarrow g u_R = 0$

$\Downarrow$

Źródło prądowe sterowane jest wyłączone → możemy je zastąpić rozwarciem.



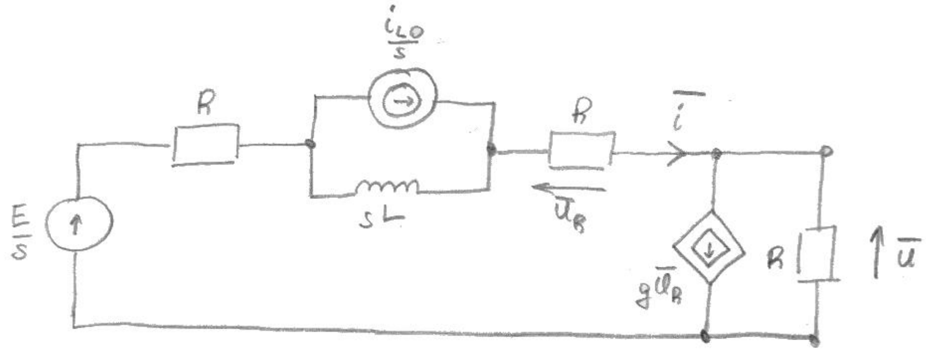

$\Downarrow$

$$i_{L0} = i = \frac{E}{2R}$$

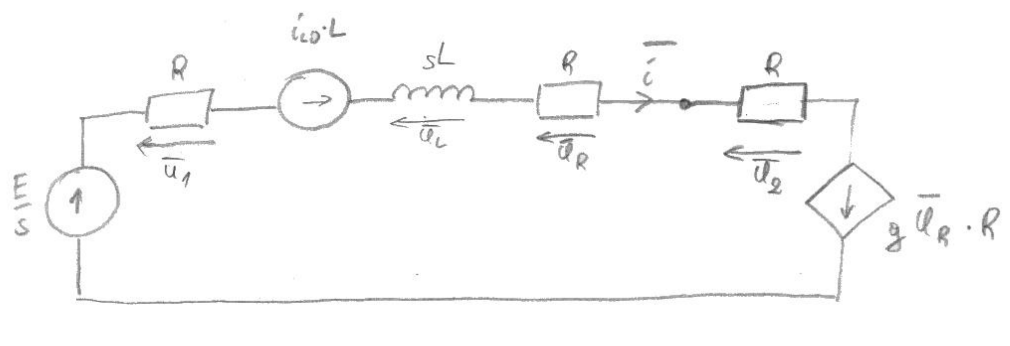
$$u = i \cdot R = \frac{E}{2}$$

Możemy teraz przejść do analizy $t > t_0$ i wyznaczyć i rozwiązać równania operatorowe dla operatorowego schematu zastępczego:

$t > t_0$ )




Zamieniając oba źródła prądowe na równoważne napięciowe otrzymujemy schemat:




Należy przy tym zwrócić uwagę, że $\bar{u}_2 \neq \bar{u}$. => na potrzeby wyznaczenia napięcia $\bar{u}$ będziemy musieli wrócić do poprzedniej postaci schematu.

NPK dla tego schematu możemy zapisać w postaci:

$$\frac{E}{s} - \bar{u}_1 + \frac{E}{2R} L - \bar{u}_L - \bar{u}_R - \bar{u}_2 + g\,\bar{u}_R \cdot R = 0 \Rightarrow \frac{E}{s} - R\bar{i} + \frac{E}{2R} L - sL\bar{i} - R\bar{i} - R\bar{i} + g R\bar{i} R = 0$$

W tym miejscu dobrze jest podstawić wartości liczbowe.

Aby to zrobić, zdefiniujmy najpierw spójny układ jednostek.

Z danych zadania mamy: V, kΩ (mS) i mH.

Istotna w tym wypadku jest jeszcze jednostka czasu.

Należy pamiętać, że $\frac{H}{\Omega} = s \Rightarrow \frac{mH}{k\Omega} = \mu s$

Analogicznie dla pojemności mamy: $F \cdot \Omega = s \Rightarrow \frac{\mu s}{k\Omega} = nF$ -> gdyby w zadaniu występowała pojemność to spójną jednostką byłby nF

Ostatecznie konwencja przyjmuje postać: $\{V, k\Omega, mS, mH, \mu s\}$. =>

NPK:

$$\frac{4}{s} - \bar{i} + 10 - s5\bar{i} - \bar{i} - \bar{i} + \frac{1}{2}\bar{i} = 0$$

$$\bar{i}\left(\frac{5}{2} + s5\right) = \frac{4}{s} + 10 \Rightarrow \bar{i} = \frac{\frac{4}{s} + 10}{s \cdot 5 + \frac{5}{2}} = \frac{\frac{4}{s5} + 2}{s + \frac{1}{2}} = \frac{2}{s + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{4}{5}}{s\left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

Teraz korzystając z tablic transformat Laplace'a możemy wyznaczyć odwrotne transformaty Laplace'a obu składników prądu $\bar{i}$.

$$\frac{1}{s(s+b)} = \frac{1}{(s+0)(s+b)} \xrightarrow{L^{-1}} -\frac{e^{0} - e^{-bt}}{0 - b} = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$$

$$i(t) = \left[2 \cdot e^{-\frac{t}{2}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)\right] \cdot 1(t) = \left[\frac{8}{5} + \left(2 - \frac{8}{5}\right) \cdot e^{-\frac{t}{2}}\right] \cdot 1(t)$$

Ostatecznie dla $t \in (-\infty; +\infty)$ mamy:

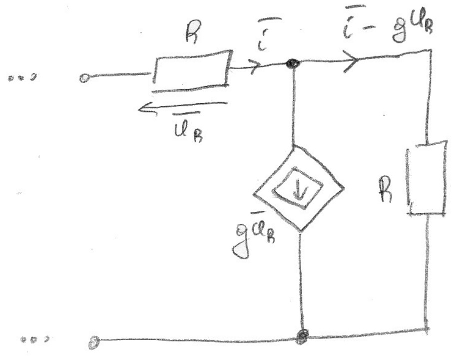
$$i(t) = \begin{cases} 2\,mA & \text{dla } t < 0 \\ \frac{2}{5} e^{-\frac{t}{2\mu s}} + \frac{8}{5} \ [mA] & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

co można alternatywnie zapisać:

$$i(t) = 2 \cdot 1(-t) + \left(\frac{2}{5} e^{-\frac{t}{2\mu s}} + \frac{8}{5}\right) \cdot 1(t) \ [mA]$$

Analogiczną analizę należy przeprowadzić, żeby wyznaczyć przebieg napięcia $u(t)$
Skorzystamy przy tym z wyznaczonego wcześniej wzoru na prąd $\bar{i}$:

$$\bar{i} = \frac{\frac{4}{s5} + 10}{s + \frac{1}{2}}$$




$$u = \left(\bar{i} - g\bar{u}_R\right)\cdot R = \bar{i}\,R\left(1 - gR\right) = \bar{i}\,\frac{1}{2} =$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{s+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{5}\cdot\frac{1}{s(s+\frac{1}{2})}$$

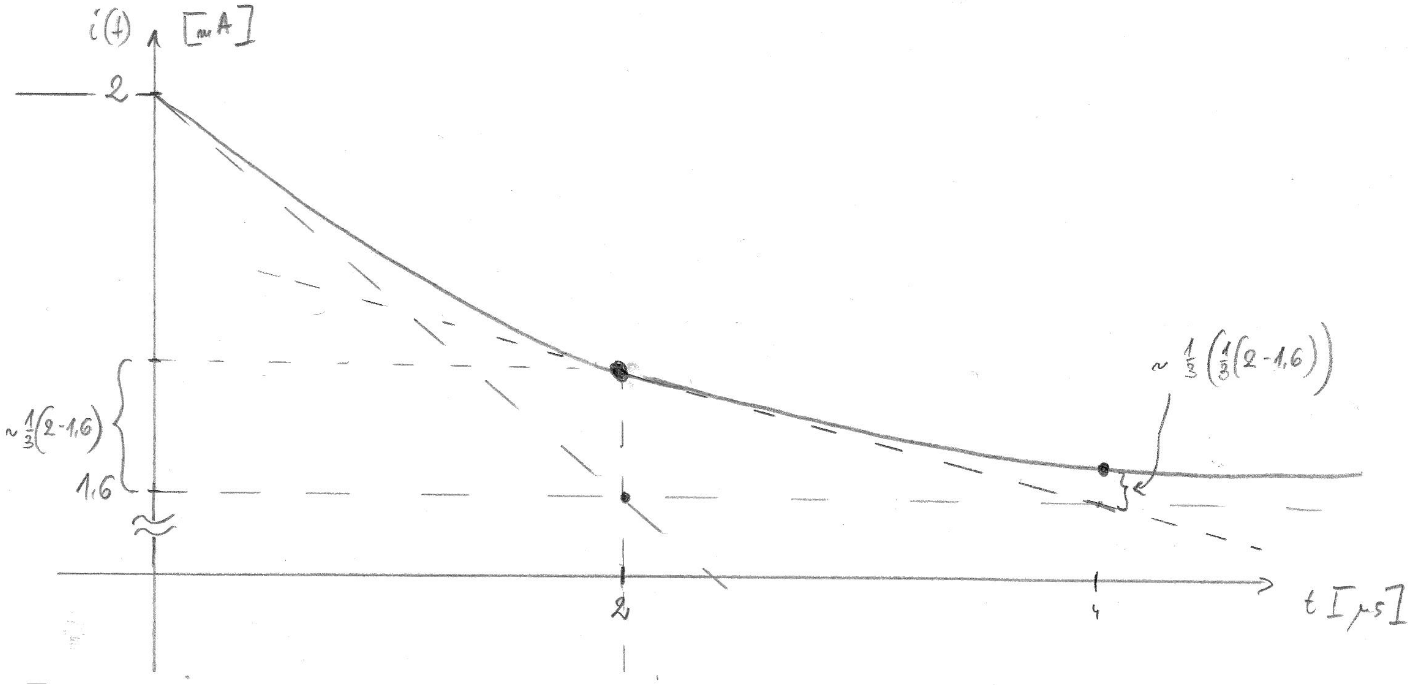
$$u(t) = \left[1\cdot e^{-\frac{t}{2}} + \frac{2}{5}\cdot 2\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]\cdot \mathbb{1}(t) =$$

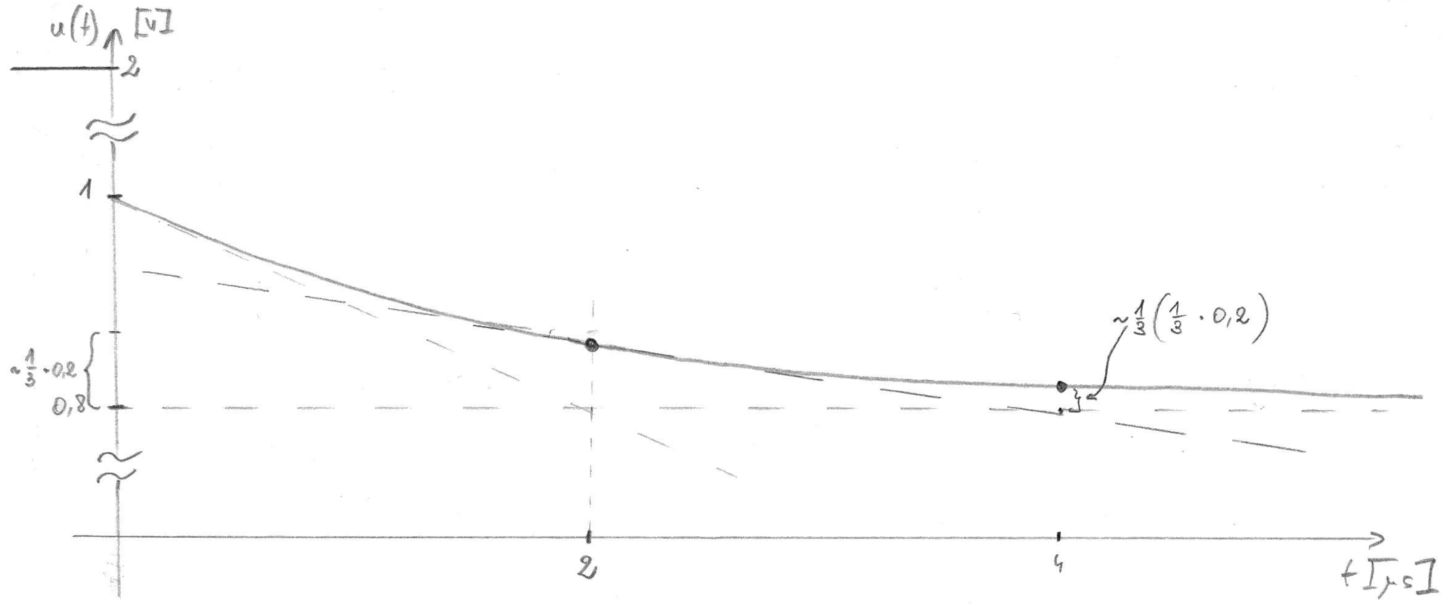
$$= \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{2}}\right)\cdot \mathbb{1}(t)$$

Ostatecznie dla $t \in (-\infty; +\infty)$ mamy:

$$u(t) = 2\cdot \mathbb{1}(-t) + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{2}}\right)\cdot \mathbb{1}(t)\,[V]$$

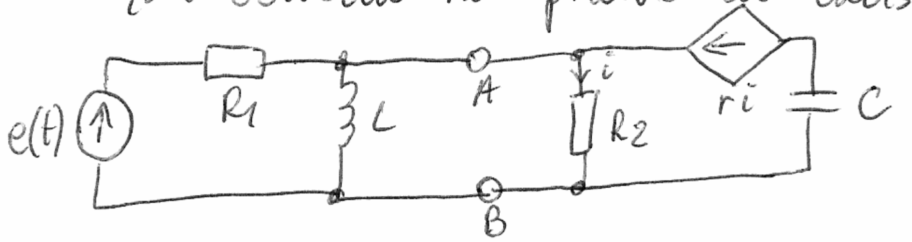
Wykresy:




Jak widać w chwili to mamy skok wartości napięcia u(t). Nie powinno nas to jednak dziwić, bo prawo komutacji mówi tylko o ciągłości prądu płynącego przez indukcyjność (tak jak w wypadku i(t)) oraz o ciągłości napięcia na pojemności, a te sytuacje tutaj nie występują.

Zadanie 1. Wyznaczyć moc czynną i bierną wydzielane w części obwodu na prawo od zacisków A, B.




$R_1 = 1\,\Omega$ $\quad e(t) = 2{,}5 \sin \omega t$ [V]

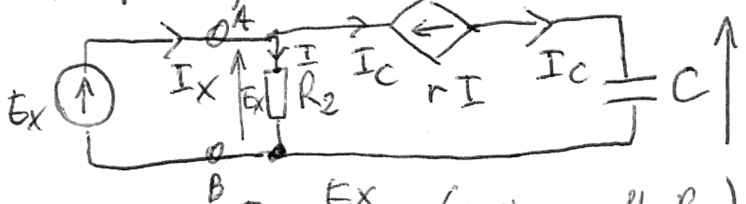
$R_2 = 2\,\Omega$

$r = 3$ V/A $\quad \omega = 10^4$ rad/s

$L = 100\,\mu H$

$C = 100\,\mu F$

Rozwiązanie. Liczymy impedancję zastępczą $Z_{AB}$ elementów po prawej stronie zacisków A, B:




$U_C = E_X - rI$ (N.P.K.)

$$I = \frac{E_X}{R_2} \quad \text{(P. Ohma dla } R_2\text{)}$$

$$I_C = \frac{U_C}{Z_C} = \frac{E_X - rI}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C\, E_X \left(1 - r/R_2\right)$$

$$\text{P.P.K.}: \quad I_X = I + I_C = E_X\left[\frac{1}{R_2} + j\omega C\left(1 - r/R_2\right)\right]$$

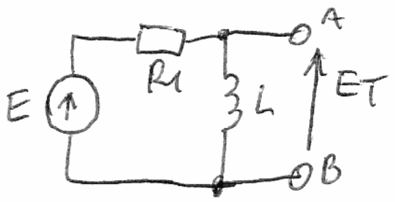
Z definicji:

$$Z_{AB} = \frac{E_X}{I_X} = \left[\frac{1}{R_2} + j\omega C\left(1 - r/R_2\right)\right]^{-1} = \ldots = \frac{R_2}{1 + j\omega C(R_2 - r)}$$

Podst. dane liczbowe:

$$Z_{AB} = \frac{2}{1 + j\,10^4 \cdot 10^{-4}(2-3)} = \frac{2}{1-j} = 1 + j \ [\Omega]$$

Elementy na lewo od A, B zast. źródłem Thévenina:



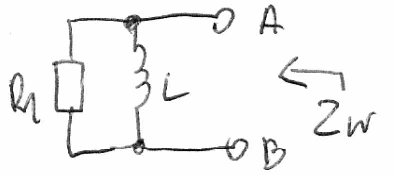

Dzielnik napięciowy:

$$E_T = E\frac{Z_L}{Z_L + R_1} = E\frac{j\omega L}{j\omega L + R_1} = -2{,}5j\,\frac{j\,10^4 \cdot 10^{-4}}{j\,10^4 \cdot 10^{-4} + 1}$$

$E = 2{,}5\, e^{-j\pi/2} = -2{,}5j$ [V]

$$E_T = \frac{2{,}5}{j+1} = \frac{2{,}5(1-j)}{1^2+1^2} = 1{,}25\,(1-j) \ [V]$$

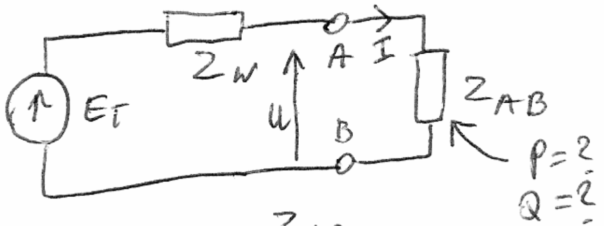
Impedancja wewnętrzna źródła zastępczego:




$$Z_W = R_1 \parallel Z_L = \frac{R_1\, j\omega L}{R_1 + j\omega L} = \frac{1 \cdot j 10^4 \cdot 10^{-4}}{1 + j 10^4 \cdot 10^{-4}} = \frac{j}{1+j}$$

$$Z_W = \frac{j(1-j)}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}(1+j) \quad [\Omega]$$

Rekonstrukcja obwodu



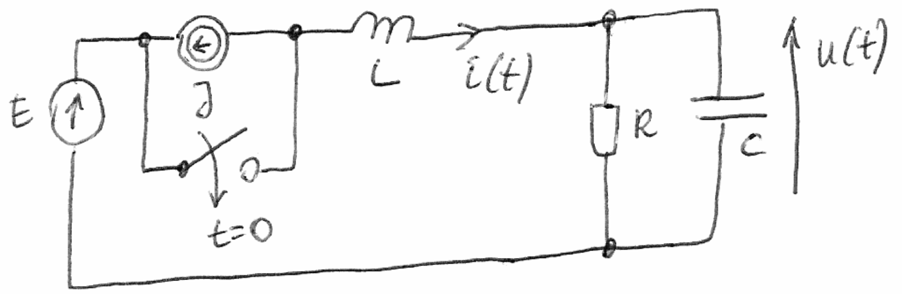

$$U = E_T \frac{Z_{AB}}{Z_{AB} + Z_W} = 1{,}25(1-j)\frac{1+j}{1+j+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j} = \frac{5}{6}(1-j) \; [V]$$

$$I = \frac{E_T}{Z_{AB} + Z_W} = \frac{1{,}25(1-j)}{1+j+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j} = -\frac{5}{6}j \; [V]$$

$$P = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[U I^*\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{5}{6}(1-j)\cdot\frac{5}{6}j\right] = \frac{25}{72} \; [W]$$

$$Q = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[U I^*\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[\frac{5}{6}(1-j)\cdot\frac{5}{6}j\right] = \frac{25}{72} \; [VAr]$$

Zadanie 2. W obwodzie liniowym jak na rysunku dla $t<0$ panował stan ustalony. Wyznaczyć przebieg prądu $i(t)$ dla $t \in (-\infty, +\infty)$.



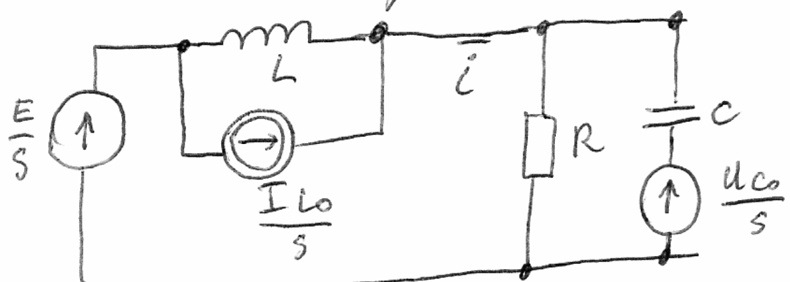

Dane:
$E = 1V$,
$J = 1A$,
$L = 1H$,
$C = 1F$,
$R = \frac{1}{2}\Omega$.

Rozwiązanie.

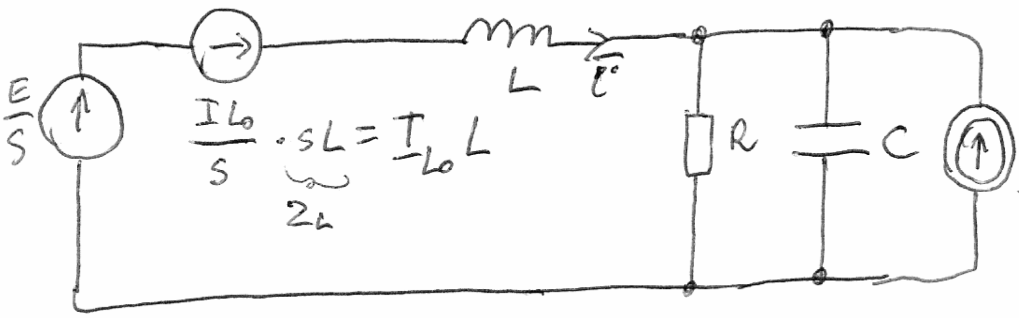
Stan ustalony dla $t \le 0$: $i = -J = -1A \overset{ozn.}{=} I_{L0}$

$$u = -JR = -\frac{1}{2}V \overset{ozn}{=} U_{C0}$$

Stan nieustalony dla $t>0$: schemat operatorowy:




Stosujemy zamianę źródeł dla $I_{C0}$, $U_{C0}$:




$$\frac{I_{L0}}{s}\cdot \underbrace{sL}_{Z_L} = I_{L0}L$$

$$\frac{\frac{U_{C0}}{s}}{Z_C} = \frac{U_{C0}}{s}\cdot sC = U_{C0}C$$

Stosujemy zasadę superpozycji:

$$\bar{i} = \underbrace{\frac{\frac{E}{s} + I_{L0}L}{sL + \frac{R}{1+sRC}}}_{\text{źródła napięciowe: } \frac{E}{s},\ I_{L0}L} - \underbrace{U_{C0}C\,\frac{\frac{1}{sL}}{\frac{1}{sL} + sC + \frac{1}{R}}}_{\text{źródło prądowe } U_{C0}C}$$

dzielnik prądowy na admitancjach

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika:

$$\bar{i} = \frac{\left(\frac{E}{s} + I_{L0} L\right)(1+sRC) + RC\,U_{C0}}{s^2LRC + sL + R} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{s} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{2}s\right) + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}(s^2+2s+1)} = \frac{-s^2 - \frac{1}{2}s + 2}{s(s+1)^2} \overset{\text{zał.}}{\equiv} \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

Rozkład $\bar{i}$ na ułamki proste:

$$A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs \equiv -s^2 - \frac{1}{2}s + 2$$

$$As^2 + 2As + A + Bs^2 + Bs + Cs \equiv \ldots$$

Przyrównujemy współczynniki przy tych samych potęgach $s$:

$s^0$: $A = 2$

$s^2$: $(A+B) = -1$, stąd $B = -1-2 = -3$

$s^1$: $(2A+B+C) = -\frac{1}{2}$, stąd $C = -\frac{1}{2} - 4 + 3 = -3/2$

Zatem $\bar{i} = \frac{2}{s} + \frac{-3}{s+1} - \frac{1{,}5}{s+1}$

Korzystamy z tablic transf. Laplace'a, wyznaczamy transformaty odwrotne:

$$i(t) = \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\{\bar{i}\} = \left[2 - 3e^{-t} - 1{,}5\,t e^{-t}\right] \mathbb{1}(t) & (\text{dla } t>0) \\ I_{L0} = -1 & (\text{dla } t \leq 0) \end{cases}$$

czyli dla $t \in (-\infty, +\infty)$:

$$i(t) = (2 - 3e^{-t} - 1{,}5\,t e^{-t})\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(-t) \quad [A]$$