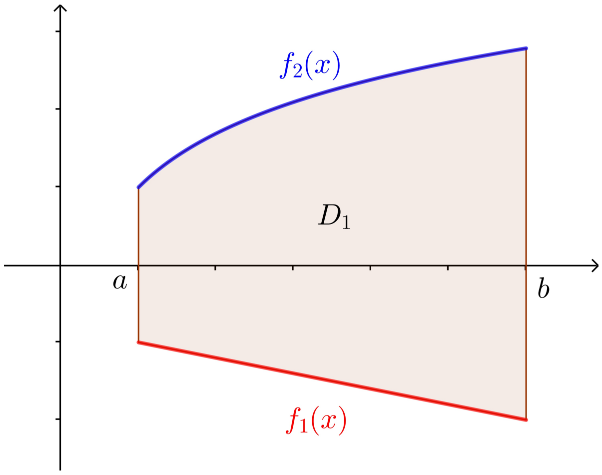
Metody Probabilistyczne i Statystyka
Z_0

1. Całka podwójna

Definicja 1. *Zbiór* $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ *nazywamy* **obszarem normalnym** *względem osi* OX*, jeśli*

$$D_1 = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\},$$

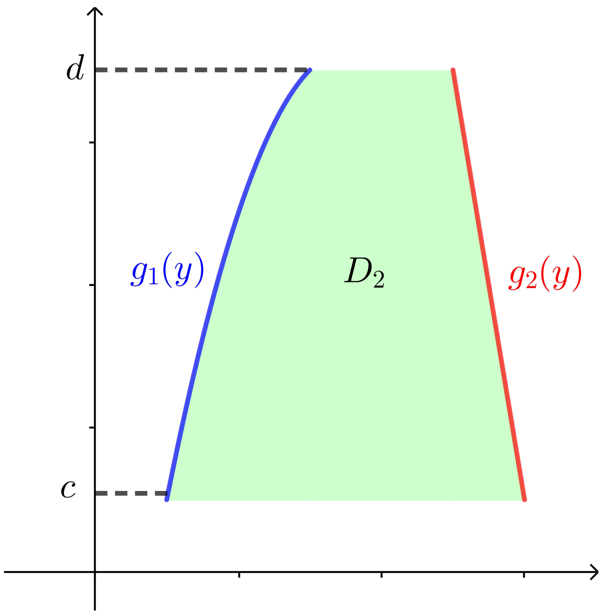
gdzie f_1 *i* f_2 *są funkcjami ciągłymi w przedziale* $[a; b]$.



Definicja 2. *Zbiór* $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ *nazywamy* **obszarem normalnym** *względem osi* OY*, jeśli*

$$D_2 = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d,\ g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)\},$$

gdzie g_1 *i* g_2 *są funkcjami ciągłymi w przedziale* $[c; d]$.



Uwagi:

- Jeśli funkcja f jest ciągła w obszarze normalnym D_1, to

$$\iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \overset{ozn.}{=} \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

- Jeśli funkcja f jest ciągła w obszarze normalnym D_2, to

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \overset{ozn.}{=} \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Powyższe całki nazywamy **całkami iterowanymi**.

1.1 Obliczyć całki:

(a) $\iint_D xy\,dxdy$, gdzie $D = [0;2] \times [1;4]$;

(b) $\iint\limits_D 3\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$, $y - x = 2$.

1.2 Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(x,y) = \frac{3}{4} \cdot x \cdot \mathbf{1}_D(x,y)$, gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x = 2$, $y = x$ oraz krzywą $xy = 1$.

(a) Obliczyć $\iint_D f(x,y)\,dxdy$,

(b) Wyznaczyć funkcje $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

Uwaga:

$$\mathbf{1}_D(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{ gdy} (x,y) \in D \\ 0 & , \text{ gdy} (x,y) \notin D \end{cases}.$$

2. Przeciwobrazy

Definicja 3. *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją określoną na zbiorze X, o wartościach w zbiorze Y.* **Przeciwobrazem** *zbioru $C \subset Y$ nazywamy zbiór*

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : \; f(x) \in C\}.$$

2.1 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(x) = x^2$. Wyznaczyć:

$$f^{-1}\left([0;4)\right), \; f^{-1}\left((-2;-1)\right) \; f^{-1}\left((0;1]\right).$$

2.2 Dla podanych poniżej funkcji f wyznaczyć $f^{-1}\left((-\infty;t]\right)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$:

(a) $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \cos x$,

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$,

(c) $f : [0;1] \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \in \left[0; \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{8}; \frac{4}{8}\right] \cup \left[\frac{6}{8}; \frac{7}{8}\right] \\ 1 & , \; x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{2}{8}\right] \cup \left(\frac{4}{8}; \frac{5}{8}\right] \cup \left(\frac{7}{8}; 1\right] \\ 2 & , \; x \in \left(\frac{2}{8}; \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; \frac{6}{8}\right) \end{cases}$,

(d) $f : [-1;3] \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \begin{cases} 3/2 & , \; x = -1 \\ x^2 & , \; x \in (-1;0) \\ x & , \; x \in [0;1] \\ 1 & , \; x \in (1;2) \\ 2 & , \; x \in [2;3] \end{cases}$.