Wykład 10
Liniowa geometria analityczna w $\mathbb{R}^3$

Definicja 1 ***Wektorem zaczepionym*** $\overrightarrow{P_1P_2}$ *nazywamy uporządkowaną parę punktów* (P_1, P_2)*.* P_1 *nazywamy* ***początkiem wektora*** *lub* ***punktem zaczepienia****,* P_2 *-* ***końcem wektora****.*

Wektor nazywamy **swobodnym**, jeśli jego początek nie jest umiejscowiony w określonym punkcie przestrzeni. Wektor taki **nie ulega zmianie** jeśli jego początek zostanie przesunięty pod warunkiem, że jego długość, kierunek i zwrot nie zmieniają się.

Każdy wektor zaczepiony można przekształcić w wektor swobodny *zapominając* o jego początku, a każdy wektor swobodny w zaczepiony wskazując konkretny punkt zaczepienia wektora.
Uwaga. Wektory swobodne $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ są równe jeśli ich współrzędne są równe:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a_x = b_x \wedge a_y = b_y \wedge a_z = b_z.$$

Oznaczenia. $|\overrightarrow{a}|$ - długość wektora, $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Definicja 2 *Wektor* $\overrightarrow{a}$ *nazywamy* ***wersorem****, gdy* $|\overrightarrow{a}| = 1$.

Kąt między niezerowymi wektorami $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$: Jeśli $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$, to kąt między wektorami $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ (ozn. $\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$) jest to **mniejszy** z kątów utworzonych przez półproste P_1P_2 i P_1P_3.

Jeśli półproste P_1P_2 i P_1P_3 pokrywają się oraz wektory $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ mają ten sam zwrot, to $\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$, jeśli zaś $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ mają przeciwne zwroty, to $\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi$.

Działania: $[a_x, a_y, a_z] + \alpha \cdot [b_x, b_y, b_z] = [a_x + \alpha \cdot b_x, a_y + \alpha \cdot b_y, a_z + \alpha \cdot b_z]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definicja 3 ***Iloczyn skalarny*** *niezerowych wektorów* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *jest to liczba rzeczywista (ozn.* $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}$*) równa:* $|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$*. Jeśli* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *lub* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$*, to przyjmujemy* $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = 0$.

Własności iloczynu skalarnego

1. $|\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}| \leqslant |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|$
2. $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{a}$
3. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{c}$
4. $(\lambda \cdot \overrightarrow{a}) \circ \overrightarrow{b} = \lambda \cdot (\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b})$
5. $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{a} \geqslant 0$, $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
6. jeśli $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$, to $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.

Definicja 4 *Wektory* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *są* ***ortogonalne****, jeśli* $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = 0$.

Uwaga. Jeśli $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, to $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy są prostopadłe.

Definicja 5 ***Iloczynem wektorowym*** *niezerowych wektorów* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *nazywamy wektor* $\overrightarrow{c}$ *taki, że*

1. $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$

2. $\overrightarrow{c}$ *jest ortogonalny do* $\overrightarrow{a}$ *i do* $\overrightarrow{b}$

3. *jeżeli* $\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{0}$, *to* $\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} > 0$, *tzn. układ* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ *ma orientację zgodną z układem* $OXYZ$.

Jeśli $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *lub* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, *to przyjmuje się* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$.

Oznaczenie. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ - iloczyn wektorowy.

Uwaga. $|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ to pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

Własności iloczynu wektorowego

(1) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ dla $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ $\Leftrightarrow$ wektory $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ są *kolinearne* (tzn. $\overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{b}$)

(2) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$

(3) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$

(4) $(\lambda \cdot \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

(5) jeśli $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$, to $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left[\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right] =$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$,

gdzie $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ - wersory osi (odpowiednio) OX, OY, OZ.

Definicja 6 ***Iloczynem mieszanym*** *wektorów* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *nazywamy liczbę* $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c}$:

$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Uwaga. $|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c}|$ - objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$

$Ax + By + Cz + D = 0$ - równanie ogólne płaszczyzny, gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ i $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ - wektor normalny płaszczyzny (wektor prostopadły do płaszczyzny).

Odległość punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Położenie dwóch płaszczyzn

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn π_1 i π_2 o równaniach:

$$\begin{array}{c} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}$$

badamy korzystając z twierdzenia Kroneckera-Capellego:

1. π_1 i π_2 są równoległe (i różne), gdy $r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 1$ i $r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} = 2$
2. π_1 i π_2 pokrywają się, gdy $r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} = 1$
3. π_1 i π_2 są nierównoległe, gdy $r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 2$. Wtedy przecinają się wzdłuż prostej

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

- równanie krawędziowe prostej.

Pęk płaszczyzn

Dana jest prosta $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.
Przez prostą l przechodzą inne płaszczyzny (pęk płaszczyzn). Można je opisać równaniem:

$$\lambda \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

gdzie $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

Prosta w $\mathbb{R}^3$

Równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$

$$l : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_x \\ y = y_0 + t \cdot v_y \\ z = z_0 + t \cdot v_z \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$