Metody Probabilistyczne i Statystyka - wykład 6.

Rozkłady funkcji jednowymiarowych zmiennych losowych

29 marca 2025

Założenie:

Niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $g(X)$ jest zmienną losową jednowymiarową.

Twierdzenie

Jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, to zmienna losowa $Y = g(X)$ ma rozkład dyskretny.

Twierdzenie

Jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, to zmienna losowa $Y = g(X)$ ma rozkład dyskretny. Ponadto

$$S_Y = g(S_X) \text{ i } P(Y = y) = \sum_{x \in S_X : g(x) = y} P(X = x).$$

Twierdzenie

Jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, to zmienna losowa $Y = g(X)$ ma rozkład dyskretny. Ponadto

$$S_Y = g(S_X) \text{ i } P(Y = y) = \sum_{x \in S_X : g(x) = y} P(X = x).$$

Przykład 1.

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie dyskretnym takim, że

$$S_X = \{-4, -3, \ldots, 3, 4\} \text{ oraz } P(X = x) = \frac{1}{9} \text{ dla każdego } x \in S_X.$$

Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = |X|$.

Uwaga:

Jeśli X ma rozkład ciągły, to zmienna losowa $g(X)$ nie musi mieć rozkładu ciągłego.

Uwaga:

Jeśli X ma rozkład ciągły, to zmienna losowa $g(X)$ nie musi mieć rozkładu ciągłego.

Przykład 2.

Zmienna losowa X ma rozkład $U([-2;2])$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = g(X)$, gdzie:

(a)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ 1 & , \quad x \geqslant -1 \end{cases} ;$$

(b)

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x < -1 \\ 0 & , \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \geqslant 1 \end{cases} .$$

Twierdzenie

Jeśli $X \sim U([c; d])$ *i* $Y = aX + b$, *gdzie* $a \neq 0$, *to:*

Twierdzenie

Jeśli $X \sim U([c; d])$ *i* $Y = aX + b$, *gdzie* $a \neq 0$, *to:*

1) $a > 0 \Rightarrow Y \sim U([c \cdot a + b; d \cdot a + b])$

Twierdzenie

Jeśli $X \sim U([c;d])$ *i* $Y = aX + b$, *gdzie* $a \neq 0$, *to:*

1) $a > 0 \Rightarrow Y \sim U([c \cdot a + b; d \cdot a + b])$
2) $a < 0 \Rightarrow Y \sim U([d \cdot a + b; c \cdot a + b])$.

Twierdzenie

Jeśli $X \sim U([c;d])$ *i* $Y = aX + b$*, gdzie* $a \neq 0$*, to:*

1) $a > 0 \Rightarrow Y \sim U([c \cdot a + b; d \cdot a + b])$
2) $a < 0 \Rightarrow Y \sim U([d \cdot a + b; c \cdot a + b])$.

Przykład 3.

Niech $T_f \sim U([95; 104])$ będzie temperaturą podaną w stopniach Fahrenheita. Wtedy $T_c = \frac{5}{9} \cdot (T_f - 32)$ jest temperaturą w stopniach Celsjusza. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej T_c.

Twierdzenie

Jeśli $X \sim N(m, \sigma^2)$ *i* $Y = aX + b$*, gdzie* $a \neq 0$*, to*

$$Y \sim N\left(am + b;\ a^2\sigma^2\right).$$

Twierdzenie

Jeśli $X \sim N(m, \sigma^2)$ *i* $Y = aX + b$, *gdzie* $a \neq 0$, *to*

$$Y \sim N\left(am + b;\ a^2\sigma^2\right).$$

W szczególności, jeśli $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$, *to*

$$Y \sim N\left(\frac{1}{\sigma}m - \frac{m}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2\right),$$

Twierdzenie

Jeśli $X \sim N(m, \sigma^2)$ *i* $Y = aX + b$, *gdzie* $a \neq 0$, *to*

$$Y \sim N\left(am + b;\ a^2\sigma^2\right).$$

W szczególności, jeśli $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$, *to*

$$Y \sim N\left(\frac{1}{\sigma}m - \frac{m}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2\right),$$

czyli

$$Y \sim N(0, 1).$$

Twierdzenie

Jeśli $X \sim N(m, \sigma^2)$ *i* $Y = aX + b$, *gdzie* $a \neq 0$, *to*

$$Y \sim N\left(am + b;\ a^2\sigma^2\right).$$

W szczególności, jeśli $Y = \frac{X - m}{\sigma}$, *to*

$$Y \sim N\left(\frac{1}{\sigma}m - \frac{m}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2\right),$$

czyli

$$Y \sim N(0, 1).$$

Przykład 4.

Niech $X \sim N(-1, 9)$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $Z = 3X - 1$.

Twierdzenie

Jeśli X ma rozkład ciągły i $Y = g(X)$, to

$$F_Y(y) = P\left(g(X) \leqslant y\right) = \int_{\{x: g(x) \leqslant y\}} f_X(x)\, dx.$$

Rozkłady funkcji jednowymiarowych zmiennych losowych

Twierdzenie

Jeśli X ma rozkład ciągły i $Y = g(X)$, to

$$F_Y(y) = P\left(g(X) \leqslant y\right) = \int_{\{x: g(x) \leqslant y\}} f_X(x)\, dx.$$

Przykład 5.

Niech $X \sim U\left([-1, 2]\right)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = X^2$.

Generowanie liczb pseudolosowych o zadanym rozkładzie:

Jeśli liczby x_i zostały wylosowane zgodnie z rozkładem jednostajnym z przedziału $[0;1]$, to liczby $F^{-1}(x_i)$ można traktować jako liczby wylosowane zgodnie z rozkładem o dystrybuancie F.