**Metody Probabilistyczne i Statystyka**

$Z_{10}$

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X, Y)$ ma rozkład dyskretny o funkcji prawdopodobieństwa danej tabelą:

| $X \setminus Y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.1 | 0 |
| 1 | 0.2 | 0.2 | 0.1 |
| 2 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

   Znaleźć funkcje prawdopodobieństwa zmiennych losowych $Z = \max(X, Y) - \min(X, Y)$ oraz $(U, V) = (|X \cdot Y|, X^2 + Y^2)$.

2. Zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne o tym samym rozkładzie takim, że

$$P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}, \;\; P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

   Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $Z = |X - Y|$.

3. Zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne i każda z nich ma rozkład geometryczny z parametrem $p$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$. Czy jest to rozkład geometryczny?

4. Wektor $(X, Y)$ ma rozkład jednostajny w kwadracie $[0; 2] \times [0; 2]$. Wyznaczyć dystrybuantę oraz gęstość zmiennej losowej $Z = X + Y$.

5. Zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne, $X \sim N(-2, 3)$, $Y \sim N(2, 4)$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $Z = X - Y$.

6. Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X, Y)$ ma rozkład normalny o gęstości

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x^2 + 2x(y+1) + \frac{3}{2}(y+1)^2\right]\right\}.$$

   Wyznaczyć gęstość wektora $(Z, T) = (2X + Y + 1, 2X - Y - 1)$. Obliczyć $P(Z > 1)$.

7. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = [-2; 3]$, a $P$ jest prawdopodobieństwem geometrycznym, określone są zmienne losowe:

$$X(\omega) = \begin{cases} -1 & \omega \in [-2; 0] \\ 1 & \omega \in (0; 3] \end{cases}, \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \in [-2; 1] \\ 1 & \omega \in (1; 2) \\ 2 & \omega \in [2; 3] \end{cases}.$$

   Obliczyć $E(Y|X = 1)$ oraz $E(X|Y = 1)$.

8. Zmienne losowe $X$ i $Y$ mają rozkłady dyskretne takie, że $S_X = \{-1, 0, 1\}$, $S_Y = \{0, 1\}$. Wiadomo ponadto, że

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{3}{8},$$
$$P(Y = 0|X = -1) = P(Y = 0|X = 1) = \frac{2}{3}, \;\; P(Y = 0|X = 0) = 1.$$

   Wyznaczyć rozkład łączny zmiennej losowej $(X, Y)$. Wyznaczyć rozkład warunkowy zmiennej losowej $X$ pod warunkiem zdarzenia $\{X + Y = 0\}$ oraz obliczyć $V(X|X + Y = 0)$.

9. Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X, Y)$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/4 & , \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \quad \wedge \quad 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 1/8 & , \quad 0 < x \leqslant 2 \quad \wedge \quad -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & , \quad \text{wp.p.} \end{cases} .$$

Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu warunkowego zmiennej $X$ przy warunku $\left\{Y < \frac{1}{2}\right\}$.

10. Wektor $(X, Y)$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x, y) = (x + y) \cdot \mathbf{1}_D(x, y), \text{ gdzie } D = \{(x, y) : 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1\}.$$

Wyznaczyć gęstość rozkładu warunkowego zmiennej losowej $X$ pod warunkiem $\{Y = y\}$. Obliczyć $E\left(X|Y = \frac{1}{3}\right)$.

11. Wektor $(X, Y)$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x, y) = 6xy \cdot \mathbf{1}_D(x, y), \quad \text{gdzie } D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}.$$

Wyznaczyć funkcję $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla której wyrażenie $E\left(Y - h(X)\right)^2$ ma najmniejszą wartość.