Metody Probabilistyczne i Statystyka
Z_8

1. Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y) dana jest wzorem
$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{y}\right) & x\geqslant 2 \quad\wedge\quad y\geqslant 2\\ 0 & x<2 \quad\vee\quad y<2\end{cases}.$$
Wykazać, że zmienne losowe X i Y są niezależne. Korzystając z tego faktu obliczyć $P(1<X\leqslant 3, 1<Y\leqslant 4)$.

2. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathcal{F},P)$, gdzie $\Omega=[0;2]$, a P jest prawdopodobieństwem geometrycznym, określone są zmienne losowe:
$$X(\omega)=\begin{cases}0 & , & \omega\in[0;1)\\ 1 & , & \omega=1\\ 2 & , & \omega\in(1;2]\end{cases},\qquad Y(\omega)=\begin{cases}-1 & , & \omega\in[0;1.5]\\ 1 & , & \omega\in(1.5;2]\end{cases}.$$
Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej losowej (X,Y). Sprawdzić, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

3. Rzucamy 1 raz sześcienną kostką do gry. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi określonymi następująco:
$$X=\begin{cases}0, & \text{gdy wypadnie parzysta liczba oczek}\\ 1, & \text{gdy wypadnie nieparzysta liczba oczek}\end{cases},$$
$$Y=\begin{cases}1, & \text{gdy wypadnie liczba oczek podzielna przez 3}\\ 2, & \text{gdy wypadnie liczba oczek niepodzielna przez 3}\end{cases}.$$
Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa rozkładu łącznego wektora (X,Y). Sprawdzić, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

4. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X\sim U([0;2])$, $Y\sim U([0;1])$. Obliczyć $P(Y<X^2)$.

5. Niech X i Y oznaczają czas pracy (w dniach) dwóch serwerów na uczelni. Z doświadczenia wynika, że wektor (X,Y) ma rozkład ciągły z gęstością
$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x-y} & , & x>0,\ y>0\\ 0 & , & \text{w p.p.}\end{cases}.$$
   (a) Sprawdzić, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
   (b) Obliczyć $P(1<X\leqslant 3, 1\leqslant Y<2)$ oraz $P(Y>1|X\leqslant 2)$.
   (c) Obliczyć prawdopodobieństwo, że łączny czas pracy obu serwerów będzie przekraczał 100 dni.

6. Wektor losowy (X,Y), gdzie X oznacza wzrost (w cm), a Y wagę (w kg) dzieci w pewnym wieku, ma rozkład normalny o gęstości
$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{36\pi}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{162}\cdot\left[9(x-153)^2-12(x-153)(y-48)+\frac{25}{4}(y-48)^2\right]\right\}.$$
   (a) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

(b) Wyznaczyć gęstości rozkładów brzegowych.

(c) Jaki rozkład ma wzrost dzieci w tym wieku? Ile procent dzieci ma wzrost mniejszy niż 160 cm?

(d) Jaki jest rozkład wagi dzieci w tym wieku? Ile procent dzieci waży więcej niż 36 kg?

7. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny taki, że $S_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $P(X = k) = \frac{1}{5}$ dla każdego $k \in S_X$. Niech $Y = X^2$. Wykazać, że X i Y są nieskorelowane, ale nie są niezależne.

8. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na zbiorze $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$. Obliczyć $E(2X + 3Y)$ oraz $V(X + Y)$.

9. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład $N\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)$. Obliczyć: $E(X(X + 3Y))$, $V(6X + Y - 3)$ oraz $\mathrm{cov}(X + 4Y, 2X - 4Y)$.

10. Ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ losujemy dwie liczby. Niech X oznacza pierwszą wylosowaną liczbę, a Y drugą. Wyznaczyć współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y, jeśli

    (a) losujemy ze zwracaniem;

    (b) losujemy bez zwracania.

11. Pewna firma sprzedaje miesięcznie towar za średnio 30 000 zł z odchyleniem standardowym 3000 zł. Miesięczne koszty wynoszą średnio 20 000 zł z odchyleniem standardowym 4000 zł. Współczynnik korelacji między przychodem uzyskanym ze sprzedaży, a poniesionymi kosztami oszacowano na 0.75. Obliczyć wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe miesięcznego zysku tej firmy.