Całki funkcji zmiennej zespolonej

ANA2 - AiR

Ewa Stróżyna

Całka funkcji zmiennej zespolonej

Całka funkcji zmiennej zespolonej

Niech $\breve{AB}$ będzie łukiem zwykłym skierowanym o parametryzacji $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ zgodnej z kierunkiem łuku, tzn. $A = (x(\alpha), y(\alpha),)$, $B = (x(\beta), y(\beta))$.

Δ_n – ciąg normalny podziałów przedziału $[\alpha, \beta]$, tzn: $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ i średnica $\delta_n \to 0$, gdy $n \to \infty$, gdzie $\delta_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k$

Każdemu punktowi t_k podziału odpowiada punkt $z_k = z(t_k)$ na łuku, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $\xi_k \in z_{k-1}\breve{}z_k$ jest dowolnym punktem pośrednim.

Całka funkcji zmiennej zespolonej

Niech $\breve{AB}$ będzie łukiem zwykłym skierowanym o parametryzacji $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ zgodnej z kierunkiem łuku, tzn. $A = (x(\alpha), y(\alpha),)$, $B = (x(\beta), y(\beta))$.

Δ_n – ciąg normalny podziałów przedziału $[\alpha, \beta]$, tzn: $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ i średnica $\delta_n \to 0$, gdy $n \to \infty$, gdzie $\delta_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k$

Każdemu punktowi t_k podziału odpowiada punkt $z_k = z(t_k)$ na łuku, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $\xi_k \in z_{k-\breve{}1} z_k$ jest dowolnym punktem pośrednim.

Tworzymy sumy całkowe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

dla funkcji $f(z)$ zadanej na łuku $\breve{AB}$.

Definicja

Jeśli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[\alpha, \beta]$ ciąg sum całkowych (S_n) zbieżny jest do tej samej granicy właściwej, niezależnej od wyboru punktów ξ_k, to tę granicę nazywamy *całką funkcji* $f(z)$ *wzdłuż łuku* $\breve{AB}$ i oznaczamy

$$\int_{\breve{AB}} f(z)\, dz$$

Definicja

Jeśli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[\alpha, \beta]$ ciąg sum całkowych (S_n) zbieżny jest do tej samej granicy właściwej, niezależnej od wyboru punktów ξ_k, to tę granicę nazywamy *całką funkcji* $f(z)$ *wzdłuż łuku* $\breve{AB}$ i oznaczamy

$$\int_{\breve{AB}} f(z)\, dz$$

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(z)$ jest ciągła na łuku gładkim lub kawałkami gładkim $\breve{AB}$, to $\int_{\breve{AB}} f(z)\, dz$ istnieje.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(z)$ jest ciągła na łuku zwykłym gładkim $\breve{AB}$ o parametryzacji $z = z(t)$ zgodnej z kierunkiem łuku, to

$$\int_{\breve{AB}} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(z)$ jest ciągła na łuku zwykłym gładkim $\breve{AB}$ o parametryzacji $z = z(t)$ zgodnej z kierunkiem łuku, to

$$\int_{\breve{AB}} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

Uwaga:

(1) Łuk $\breve{BA}$ jest skierowany przeciwnie do łuku $\breve{AB}$.

(2) Jeśli $A = B$, to łuk jest zamknięty (krzywa Jordana) i całkę oznaczamy $\int_{\breve{AB}} f(z)\,dz = \oint_{C^+} f(z)\,dz$ dla krzywej C skierowanej dodatnio i $\int_{\breve{AB}} f(z)\,dz = \oint_{C^-} f(z)\,dz$ dla krzywej C skierowanej ujemnie.

Własności całki:

(1) $\int_{\breve{AB}}[f(z)+g(z)]\,dz = \int_{\breve{AB}} f(z)\,dz + \int_{\breve{AB}} g(z)\,dz$

$\int_{\breve{AB}} kf(z)\,dz = k\int_{\breve{AB}} f(z)\,dz\,,\ \ k\in\mathbb{C}$

(2) $\int_{\breve{AB}} f(z)\,dz = -\int_{\breve{BA}} f(z)\,dz$

$\oint_{C^+} f(z)\,dz = -\oint_{C^-} f(z)\,dz$

gdzie C – dowolna krzywa Jordana kawałkami gładka

(3) $L=\bigcup_{k=1}^{n} L_k\,,\ \ L_k$ – łuki zwykłe

$\int_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{L_k} f(z)\,dz$

(4) Jeśli $f(z)$ – ograniczona na $\breve{AB}$, $M=\sup_{z\in\breve{AB}}|f(z)|$ i l – długość łuku $\breve{AB}$, to

$\left|\int_{\breve{AB}} f(z)\,dz\right| \leqslant M\cdot l$

Definicja

Mówimy, że $F(z)$ jest *funkcją pierwotną* funkcji $f(z)$ w obszarze D, jeśli

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D$$

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(z)$ jest ciągła w obszarze D i ma w tym obszarze funkcję pierwotną $F(z)$, to całka krzywoliniowa wzdłuż dowolnego łuku zwykłego $\breve{AB} \subset D$ nie zależy od drogi całkowania i wyraża się wzorem

$$\int_{\breve{AB}} f(z)\, dz = \left. F(z) \right|_A^B = F(B) - F(A)$$

Przykłady:

(1) $K(z_0, r): \ z(t) = z_0 + re^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$

$$\oint_{K^+(z_0,r)} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{(re^{it})^n}\, dt = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{it(1-n)}\, dt =$$
$$= \frac{i}{r^{n-1}} \cdot \ \frac{e^{it(1-n)}}{i(1-n)} \ \Big|_0^{2\pi} = 0\,, \quad n \neq 1$$

$n = 1: \ \ i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$, stąd:

$$\oint_{K^+(z_0,r)} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0\,, & n \neq 1 \\ 2\pi i\,, & n = 1 \end{cases}$$

(2) $\int_{\bar{AB}} \mathrm{Re}\,(z)\,dz$, gdzie $\bar{AB}$ - odcinek o początku $A = 0$ i końcu $B = 1 + i$.

$z(t) = z_1 + (z_2 - z_1) \cdot t\,, t \in [0, 1]$ - parametryzacja odcinka o początku z_1 i końcu z_2, więc

$$z(t) = (1 + i)t\,, \quad t \in [0, 1]\,, \quad z'(t) = 1 + i$$

$$\int_{\bar{AB}} \mathrm{Re}\,(z)\,dz = \int_0^1 \mathrm{Re}\,[(1 + i)t](1 + i)\,dt = \int_0^1 t \cdot (1 + i)\,dt =$$
$$= (1 + i)\int_0^1 t\,dt = (1 + i) \quad \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1+i}{2}$$

(3) $\int_{\breve{AB}} |z|\, dz$, gdzie $\breve{AB}$ – lewy półokrąg $|z| = 1$ skierowany od punktu $z = i$ do punktu $z = -i$

$\breve{AB}: \ z(t) = e^{it}\ , \ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]\ , \ z'(t) = ie^{it}$

$\int_{\breve{AB}} |z|\, dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 1 \cdot ie^{it}\, dt = i \cdot \ \frac{e^{it}}{i}\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \ (\cos t + i \sin t)\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} =$
$= -2i$

(3) $\int_{\breve{AB}} |z|\, dz$, gdzie $\breve{AB}$ – lewy półokrąg $|z| = 1$ skierowany od punktu $z = i$ do punktu $z = -i$

$\breve{AB}: \ z(t) = e^{it}\ , \ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]\ , \ z'(t) = ie^{it}$

$\int_{\breve{AB}} |z|\, dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 1 \cdot ie^{it}\, dt = i \cdot \ \frac{e^{it}}{i} \ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \ (\cos t + i \sin t) \ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} =$
$= -2i$

(4) $\int_C z \sin z\, dz$, gdzie C – dowolny łuk zwykły o początku $z_1 = 0$ i końcu $z_2 = i$

$f(z) = z \sin z$ – ciągła, więc ma funkcję pierwotną $F(z)$, całkujemy przez części i otrzymujemy $F(z) = \sin z - z \cos z + C$, więc

$\int_C z \sin z\, dz = \ \sin z - z \cos z \ \Big|_0^i = \sin i - i \cos i = -ie^{-1}$

Całki z funkcji holomorficznych

Całki z funkcji holomorficznych

Tw. (podstawowe Cauchy'ego)

Jeśli D jest obszarem jednospójnym, $K \subset D$ jest kawałkami gładką krzywą zamkniętą zwykłą, to dla każdej funkcji holomorficznej w D

$$\oint_{K^+} f(z)\,dz = \oint_{K^-} f(z)\,dz = 0$$

Całki z funkcji holomorficznych

Tw. (podstawowe Cauchy'ego)

Jeśli D jest obszarem jednospójnym, $K \subset D$ jest kawałkami gładką krzywą zamkniętą zwykłą, to dla każdej funkcji holomorficznej w D

$$\oint_{K^+} f(z)\,dz = \oint_{K^-} f(z)\,dz = 0$$

Niech $C_1, \ldots C_n$ będą rozłącznymi konturami leżącymi wewnątrz konturu C.

Tw. (uogólnione tw. Cauchy'ego)

Jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna wewnątrz i na brzegu obszaru D ograniczonego krzywymi $C_0, C_1, \ldots, C_n$, to

$$\oint_{C_0^+} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k^+} f(z)\,dz$$

Wniosek

Jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze D z wyjątkiem punktu $z_0 \in D$, to

$$\oint_{C_1^+} f(z)\, dz = \oint_{C_2^+} f(z)\, dz$$

gdzie $C_1, C_2 \subset D$ są dowolnymi krzywymi zawierającymi punkt z_0.

Wniosek

Jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze D z wyjątkiem punktu $z_0 \in D$, to

$$\oint_{C_1^+} f(z)\, dz = \oint_{C_2^+} f(z)\, dz$$

gdzie $C_1, C_2 \subset D$ są dowolnymi krzywymi zawierającymi punkt z_0.

Twierdzenie

Jeśli $f(z)$ jest funkcją holomorficzną w obszarze jednospójnym D oraz $z_0 \in D$ - dowolny, ustalony punkt, to funkcja $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta\,,\ z \in D$, jest funkcją holomorficzną górnej granicy całkowania i

$$F'(z) = f(z) \qquad \forall\, z \in D$$

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D to całka wzdłuż *dowolnej* drogi łączącej punkty z_1 i z_2 w tym obszarze wyraża się wzorem

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

gdzie $F(z)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $f(z)$ w D.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D to całka wzdłuż *dowolnej* drogi łączącej punkty z_1 i z_2 w tym obszarze wyraża się wzorem

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

gdzie $F(z)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $f(z)$ w D.

Przykłady:

(1) $\int_C z \sin z \, dz$, gdzie C - dowolny łuk zwykły o początku $z_1 = 0$ i końcu $z_2 = i$.

Funkcja podcałkowa jest holomorficzna, więc ma funkcję pierwotną $F(z)$, całkujemy przez części

$$\int_C z \sin z \, dz = \quad \sin z - z \cos z \,\Big|_0^i = \sin i - i \cos i = -ie^{-1}$$

(2) $\oint_{C^+} \frac{2i}{z^2+1}\, dz$, gdzie

(a) $C: \ |z-2| = 1$

(b) $C: \ |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| = 2$

(c) $C: \ |z-i| = 1$

(a) $\oint_{C^+} \frac{2i}{z^2+1}\, dz = 0$

z tw. podstawowego Cauchy'ego, bo funkcja podcałkowa holomorficzna w obszarze jednospójnym zawierającym C.

(2) $\oint_{C^+} \frac{2i}{z^2+1}\, dz$, gdzie

(a) $C: \ |z-2| = 1$

(b) $C: \ |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| = 2$

(c) $C: \ |z-i| = 1$

(a) $\oint_{C^+} \frac{2i}{z^2+1}\, dz = 0$

z tw. podstawowego Cauchy'ego, bo funkcja podcałkowa holomorficzna w obszarze jednospójnym zawierającym C.

(b) $\oint_{C^+} f(z)\, dz = \oint_{K^+(i,\frac{1}{4})} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\, dz +$
$+ \oint_{K^+(-i,\frac{1}{4})} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\, dz = 2\pi i - 0 + 0 - 2\pi i = 0$

(2) $\oint_{C^+} \frac{2i}{z^2+1}\, dz$, gdzie

(a) $C: \ |z-2| = 1$

(b) $C: \ |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| = 2$

(c) $C: \ |z-i| = 1$

(a) $\oint_{C^+} \frac{2i}{z^2+1}\, dz = 0$

z tw. podstawowego Cauchy'ego, bo funkcja podcałkowa holomorficzna w obszarze jednospójnym zawierającym C.

(b) $\oint_{C^+} f(z)\, dz = \oint_{K^+(i,\frac{1}{4})} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz +$
$+ \oint_{K^+(-i,\frac{1}{4})} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz = 2\pi i - 0 + 0 - 2\pi i = 0$

(c) $\oint_{C^+} f(z)\, dz = \oint_{C^+} \frac{dz}{z-i} - \oint_{C^+} \frac{dz}{z+i} = \oint_{K^+(i,1)} \frac{dz}{z-i} - 0 = 2\pi i$

(3) Obliczyć całki Fresnela $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ i $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ wiedząc, że całka Poissona: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Aby obliczyć całki Fresnela korzystamy z funkcji pomocniczej $f(z) = e^{iz^2}$ i z konturu całkowania $C = J_1 + \Gamma + J_2$, gdzie J_1, J_2 – promienie okręgu $|z| = R$, Γ – łuk tego okręgu:

$z(t) = Re^{it}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$f(z)$ – holomorficzna w $\mathbb{C}$, więc jest holomorficzna na C i wewnątrz C.

Z twierdzenia podstawowego Cauchy'ego:

$$\int_{J_1} f(z)\,dz + \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_{J_2} f(z)\,dz = 0$$

Na J_1: $z = x\,,\ dz = dx\,,\ x \in [0, R]$, więc $\int_{J_1} f(z)\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx$

Na Γ: $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2it}} \cdot Rie^{it}\,dt = Ri \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2it}} \cdot e^{it}\,dt$

więc

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant |Ri| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{iR^2 e^{2it}}\right| \cdot |e^{it}|\,dt =$$
$$= R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{-R^2 \sin 2t + iR^2 \cos 2t}\right|\,dt = R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2t}\,dt$$

czyli $\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2t}\,dt$ i
$\sin 2t \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot 2t$ dla $2t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, więc

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4}{\pi}R^2 t}\,dt = -\frac{\pi}{4R} \left[e^{-\frac{4}{\pi}R^2 t}\right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= -\frac{\pi}{4R}\left[e^{-R^2} - 1\right] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1-e^{-R^2}}{R}$$

stąd $\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\,dz = 0$

Na J_2: $z = -re^{i\frac{\pi}{4}}$, $r \in [-R, 0]$, $z'(r) = -e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\int_{J_2} f(z)\, dz = -\int_{-R}^{0} e^{ir^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\, dr = \int_{R}^{0} e^{ir^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\, dr =$$
$$= \int_{R}^{0} e^{ir^2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\, dr =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_{R}^{0} e^{-r^2}\, dr = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_{0}^{R} e^{-r^2}\, dr$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{J_2} f(z)\, dz = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$$
(z całki Poissona)

Przechodząc do granicy $R \to \infty$ w
$\int_{J_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma} f(z)\, dz + \int_{J_2} f(z)\, dz = 0$ otrzymujemy:

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\, dx - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i) = 0$$

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$$

$\int_0^{\infty} (\cos x^2 + i \sin x^2)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$ stąd:

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

Wzór całkowy Cauchy'ego i jego uogólnienie

Wzór całkowy Cauchy'ego i jego uogólnienie

Funkcje holomorficzne mają taką własność, że z ich wartości na krzywej zamkniętej wynika ich wartość w jednospójnym obszarze przez tę krzywą ograniczonym.

Wzór całkowy Cauchy'ego i jego uogólnienie

Funkcje holomorficzne mają taką własność, że z ich wartości na krzywej zamkniętej wynika ich wartość w jednospójnym obszarze przez tę krzywą ograniczonym.

Niech D – obszar jednospójny i $f(z)$ – funkcja holomorficzna w D, $\partial D = C$.

Pokażemy, że

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Jest to tzw. *wzór całkowy Cauchy'ego*.

Funkcja podcałkowa $\frac{f(z)}{z-z_0}$ jest nieholomorficzna tylko w punkcie $z = z_0$ leżącym wewnątrz krzywej C.

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{K^+(z_0,R)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz =$$
$$= \oint_{K^+(z_0,R)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + f(z_0)\oint_{K^+(z_0,R)} \frac{dz}{z-z_0} = I_1 + f(z_0)\cdot 2\pi i$$

Aby udowodnić wzór całkowy Cauchy'ego wystarczy pokazać, że całka $I_1 = 0$.

Funkcja podcałkowa $\frac{f(z)}{z-z_0}$ jest nieholomorficzna tylko w punkcie $z = z_0$ leżącym wewnątrz krzywej C.

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{K^+(z_0,R)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz =$$
$$= \oint_{K^+(z_0,R)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + f(z_0)\oint_{K^+(z_0,R)} \frac{dz}{z-z_0} = I_1 + f(z_0)\cdot 2\pi i$$

Aby udowodnić wzór całkowy Cauchy'ego wystarczy pokazać, że całka $I_1 = 0$.

Funkcja $f(z)$ jest holomorficzna $\Rightarrow$ $f(z)$ jest ciągła i w punkcie z_0:

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ gdy $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$

Przyjmijmy, że promień okręgu $R < \delta(\varepsilon)$, wtedy $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, gdy $|z - z_0| = R$ i

$$\left|\oint_{K^+(z_0,R)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi\varepsilon$$

stąd

$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$ – *wzór całkowy Cauchy'ego*

$\left| \oint_{K^+(z_0,R)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi\varepsilon$

stąd

$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$ – *wzór całkowy Cauchy'ego*

Przykłady:

(1) Obliczyć całkę po dodatnio skierowanym okręgu $\oint_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz + \oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz =$$
$$= \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i}\, dz + \oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^{iz}}{z-i}}{z+i}\, dz =$$
$$= 2\pi i \left[\left. \frac{e^{iz}}{z+i} \right|_{z=i} + \left. \frac{e^{iz}}{z-i} \right|_{z=-i} \right] = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{2i} + \frac{e^{1}}{-2i} \right) = \pi \left(\frac{1}{e} - e \right)$$

bo

$f_1(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}$ – holomorficzna w jednospójnym otoczeniu $|z-i| = \frac{1}{2}$
$f_2(z) = \frac{e^{iz}}{z-i}$ – holomorficzna w jednospójnym otoczeniu $|z+i| = \frac{1}{2}$

(2) $\oint_{K^+(i,1)} \frac{\sin z}{z-i}\, dz = 2\pi i \cdot \sin i = \pi \left(\frac{1}{e} - e\right)$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i}$

(2) $\oint_{K^+(i,1)} \frac{\sin z}{z-i}\, dz = 2\pi i \cdot \sin i = \pi \left(\frac{1}{e} - e\right)$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i}$

(3) $\oint_{C^+} \frac{dz}{z(z^2-1)}$, gdzie C – kontur, który nie przechodzi przez żaden z punktów $0, 1, -1$

(a) wewnątrz konturu C brak punktów $0, 1, -1 \Rightarrow \oint_{C^+} f(z)\, dz = 0$ z tw Cauchy'ego.

(b) wewnątrz konturu C jest punkt 0, poza nim $1, -1$

$$I_1 = \oint_{C_0^+} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \oint_{C_0^+} \frac{\frac{1}{z^2-1}}{z}\, dz = 2\pi i \cdot \left. \frac{1}{z^2-1} \right|_{z=0} = -2\pi i$$

(c) wewnątrz konturu C jest punkt 1, poza nim $0, -1$

$$I_2 = \oint_{C_1^+} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \oint_{C_1^+} \frac{\frac{1}{z(z+1)}}{z-1}\, dz = 2\pi i \cdot \left. \frac{1}{z(z+1)} \right|_{z=1} = \pi i$$

(d) wewnątrz konturu C jest punkt -1, poza nim $0, 1$

$$I_3 = \oint_{C_2^+} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \oint_{C_2^+} \frac{\frac{1}{z(z-1)}}{z+1}\, dz = 2\pi i \cdot \left. \frac{1}{z(z-1)} \right|_{z=-1} = \pi i$$

Jeśli wewnątrz konturu jest np. punkt 1 i -1, a 0 poza nim, to
$\oint_{C^+} f(z)\, dz = \oint_{C_1^+} f(z)\, dz + \oint_{C_2^+} f(z)\, dz = 2\pi i$
w pozostałych przypadkach analogicznie.

(c) wewnątrz konturu C jest punkt 1, poza nim $0, -1$

$$I_2 = \oint_{C_1^+} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \oint_{C_1^+} \frac{\frac{1}{z(z+1)}}{z-1}\, dz = 2\pi i \cdot \left. \frac{1}{z(z+1)} \right|_{z=1} = \pi i$$

(d) wewnątrz konturu C jest punkt -1, poza nim $0, 1$

$$I_3 = \oint_{C_2^+} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \oint_{C_2^+} \frac{\frac{1}{z(z-1)}}{z+1}\, dz = 2\pi i \cdot \left. \frac{1}{z(z-1)} \right|_{z=-1} = \pi i$$

Jeśli wewnątrz konturu jest np. punkt 1 i -1, a 0 poza nim, to
$\oint_{C^+} f(z)\, dz = \oint_{C_1^+} f(z)\, dz + \oint_{C_2^+} f(z)\, dz = 2\pi i$
w pozostałych przypadkach analogicznie.

(4) $\oint_{C^+} \frac{e^z}{z(z-2i)}\, dz$, gdzie C – okrąg o środku $3i$ i promieniu 2.

$$\oint_{C^+} \frac{e^z}{z(z-2i)}\, dz = \oint_{C^+} \frac{\frac{e^z}{z}}{z-2i}\, dz = 2\pi i \cdot \left. \frac{e^z}{z} \right|_{z=2i} = 2\pi i \cdot \frac{e^{2i}}{2i} =$$
$$= \pi(\cos 2 + i \sin 2)$$

Pochodne wyższych rzędów

Wzór całkowy Cauchy'ego pozwala też wyrazić pochodne $f(z)$ za pomocą całki.

Załóżmy, że $f(z)$ jest holomorficzna w $D \Rightarrow f$ ma pochodną w każdym punkcie tego obszaru, więc

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$, gdzie $C \subset D$ i C obiega punkt z_0,

stąd $f(z_0 + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}\, dz$, tworzymy iloraz różnicowy:

$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{[z-(z_0+\Delta z)]\cdot(z-z_0)}\, dz$, a następnie przechodzimy do granicy $\Delta z \to 0$:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

Powtarzamy to samo kolejny raz:

$$\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} f(z) \cdot \frac{2(z-z_0)-\Delta z}{[z-(z_0+\Delta z)]^2 \cdot (z-z_0)^2}\, dz$$

Przechodzimy do granicy i korzystamy z faktu, że funkcja $\Phi(z_0) = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^p}\, dz$ jest holomorficzna dla $p \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus C$ i funkcji ciągłej na C.

$\Delta z \to 0$:

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\, dz$$

Powtarzamy to samo kolejny raz:

$$\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} f(z) \cdot \frac{2(z-z_0)-\Delta z}{[z-(z_0+\Delta z)]^2 \cdot (z-z_0)^2} \, dz$$

Przechodzimy do granicy i korzystamy z faktu, że funkcja $\Phi(z_0) = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^p} \, dz$ jest holomorficzna dla $p \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus C$ i funkcji ciągłej na C.

$\Delta z \to 0$:

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} \, dz$$

Ogólnie:

Funkcja holomorficzna ma w obszarze jednospójnym pochodne wszystkich rzędów i zachodzi wzór:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz \,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Stąd:

$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$ – *uogólniony wzór całkowy Cauchy'ego*

Stąd:

$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$ – *uogólniony wzór całkowy Cauchy'ego*

Uwaga:

Powyższa własność odróżnia funkcje różniczkowalne zmiennej zespolonej od funkcji różniczkowalnych zmiennej rzeczywistej.

Jeśli funkcja $f(z)$ zmiennej zespolonej ma pochodną rzędu 1 w pewnym obszarze, to ma również pochodne wszystkich rzędów.

Natomiast jeśli funkcja $f(x)$ zmiennej rzeczywistej ma pochodną rzędu 1 w pewnym przedziale, to może nie mieć drugiej pochodnej a pierwsza pochodna może być nieciągła.

Przykłady:

(1) $\oint_{K^+(i,1)} \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \oint_{K^+(i,1)} \frac{\frac{1}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]' \Big|_{z=i} =$

$= 2\pi i \cdot \frac{-2}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{\pi}{2}$

Przykłady:

(1) $\oint_{K^+(i,1)} \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \oint_{K^+(i,1)} \frac{\frac{1}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]' \Big|_{z=i} =$
$= 2\pi i \cdot \frac{-2}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{\pi}{2}$

(2) $\oint_{C^+} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\, dz$, gdzie C – dowolny kontur zawierający punkt i

$f(z) = \cos z$ – holomorficzna, więc

$\oint_{C^+} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)'' \Big|_{z=i} = \pi i \cdot (-\cos z) \Big|_{z=i} =$
$= -\pi i \cdot \cos i = -\frac{\pi i}{2}(e + e^{-1})$

(3) $\oint_{C^+} \frac{e^z}{(z+2)^4}\, dz$, gdzie C – okrąg zawierający punkt -2

$f(z) = e^z$ – holomorficzna, więc

$$\oint_{C^+} \frac{e^z}{(z+2)^4}\, dz = \frac{2\pi i}{3!} \quad (e^z)''' \ \Big|_{z=-2} = \frac{2\pi i}{6} \cdot \quad e^z \ \Big|_{z=-2} = \frac{\pi i}{3} \cdot e^{-2}$$