Analiza prostego obwodu *RC* (pierwszego rzędu)

Obwód R-C pobudzamy źródłem $e(t)\mathbf{1}(t)$, liczymy $u(t)$ na C:

$$\bar{u}(s) = \bar{e}(s)\frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC}+R} = \frac{\bar{e}(s)/\tau}{s+\frac{1}{\tau}}, \qquad \tau = RC.$$

$$e(t) = E_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}(s) = \frac{E_0}{s}, \quad \bar{u}(s) = \frac{E_0}{\tau}\frac{1}{s(s+\frac{1}{\tau})} \quad \Rightarrow$$

$$u(t) = \frac{E_0}{\tau}\left(-\frac{1-e^{-t/\tau}}{-\frac{1}{\tau}}\right)\mathbf{1}(t) = (-E_0 e^{-t/\tau} + E_0)\mathbf{1}(t)$$

$$e(t) = E_m \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \bar{e}(s) = E_m\frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{u}(s) = \frac{E_m}{\tau}\frac{s}{(s+\frac{1}{\tau})(s^2+\omega^2)} = \frac{E_m}{\tau}\left(\frac{-\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{\omega^2}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$u(t) = E_m\left(\frac{-\frac{1}{\tau^2}}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}e^{-t/\tau} + \frac{\frac{1}{\tau^2}}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\cos\omega t + \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\sin\omega t\right)\mathbf{1}(t)$$

Składową ustaloną można policzyć znanymi metodami DC/AC.
Składowa przejściowa – wykładnicza (U_0, U_∞, τ).

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Dla typowych pobudzeń w układach skupionych transformaty Laplace'a są funkcjami wymiernymi ($l < m$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$):

$$W(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \ldots + \alpha_l s^l}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \ldots + \beta_{m-1} s^{m-1} + s^m} =$$

$$= \frac{L(s)}{(s + a_1)^{n_1} \ldots (s + a_k)^{n_k} (s^2 + p_1 s + q_1)^{n_{k+1}} \ldots (s^2 + p_r s + q_r)^{n_{k+r}}}$$

$W(s)$ można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych:

$$s + a \longrightarrow \frac{A}{s+a}$$

metoda residuów!

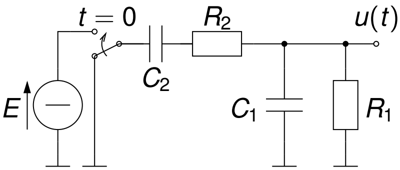
$$(s + a)^n \longrightarrow \frac{A_1}{s+a} + \frac{A_2}{(s+a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(s+a)^n}$$

$$s^2 + ps + q \longrightarrow \frac{Bs+C}{s^2+ps+q}$$

$$(s^2 + ps + q)^n \longrightarrow \frac{B_1 s+C_1}{s^2+ps+q} + \frac{B_2 s+C_2}{(s^2+ps+q)^2} + \ldots + \frac{B_n s+C_n}{(s^2+ps+q)^n}$$

Współczynniki A_i, B_i oraz C_i rozkładu można wyznaczyć, sprowadzając wszystkie ułamki proste do wspólnego mianownika i porównując licznik otrzymanej sumy z $L(s)$.

Analiza prostego obwodu RC (drugiego rzędu)



$$\bar{u}(s) = \frac{E}{s} \cdot \frac{\frac{R_1 \frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}}}{\frac{R_1 \frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} + R_2 + \frac{1}{sC_2}}$$

$$= \frac{\frac{E}{s}\frac{R_1}{sC_1}}{\frac{R_1}{sC_1} + (R_1 + \frac{1}{sC_1})(R_2 + \frac{1}{sC_2})}$$

$$= \frac{ER_1C_2}{sR_1C_2 + (1 + sR_1C_1)(1 + sR_2C_2)}$$

$$= \frac{ER_1C_2}{s^2R_1R_2C_1C_2 + s(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2) + 1} = \frac{E\gamma}{(s+a)(s+b)}$$

Ze wzorów Viete'a wynika, że $a, b > 0$. Napięcie $u(t)$ będzie zatem sumą dwóch przebiegów wykładniczych. Wzór ogólny jest *bardzo* skomplikowany $\Longrightarrow$ wcześnie wstawiajmy liczby!

$$\lim_{t \to 0^+} u(t) = \lim_{s \to \infty} \frac{sE\gamma}{s^2 + (a+b)s + ab} = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$$

Analiza szeregowego obwodu *r-L-C* (drugiego rzędu)

Do obwodu r-L-C (z ZWP) w chwili $t = 0$ dołączamy SEM E.

$$\bar{i}(s) = \frac{E/s}{r + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{E/L}{s^2 + \frac{r}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Oznaczmy: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\rho = \sqrt{L/C}$, $Q = \rho/r$. Wówczas:

$$\Delta = \frac{r^2}{L^2} - \frac{4}{LC} > 0 \Leftrightarrow \frac{r}{L} > 2\omega_0 \Leftrightarrow \frac{r}{\omega_0 L} > 2 \Leftrightarrow \frac{r}{\rho} > 2 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

$Q < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{(s+a)(s+b)} \Longrightarrow$ suma przebiegów wykładniczych (jak w poprzednim przykładzie) – przebieg aperiodyczny

$Q = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{(s+a)^2} \Longrightarrow$ przebieg aperiodyczny krytyczny

$Q > \frac{1}{2}$ $\frac{1}{(s+a)^2+\omega^2} \Longrightarrow$ przebieg oscylacyjny tłumiony, gdzie:

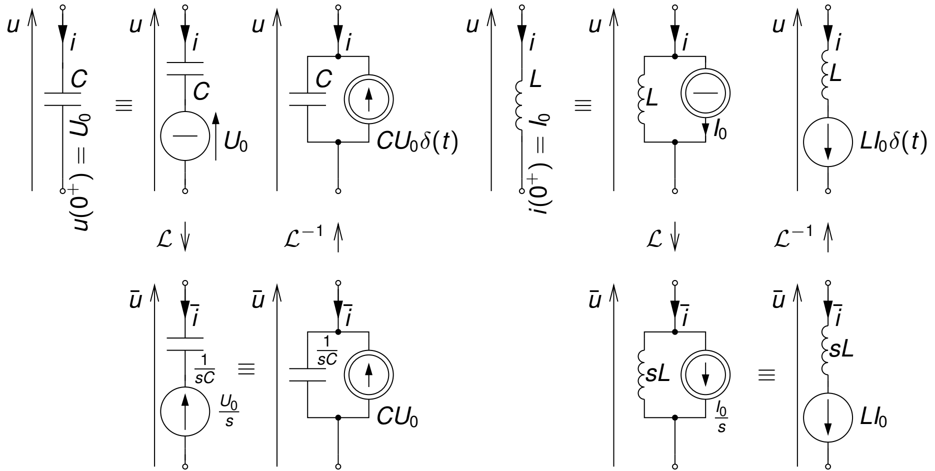
$\omega = \omega_s = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ – pulsacja drgań swobodnych

$a = \alpha = \omega_0/(2Q)$ – współczynnik tłumienia.

Pierwiastki mianownika są pierwiastkami równania ch-nego.

Stan ustali się $\Longleftrightarrow$ wszystkie leżą w lewej półpłaszczyźnie s.

Równoważna reprezentacja warunków początkowych



„Równoważne" źródła operatorowe CU_0 i LI_0 nie spełniają warunku $\lim_{s\to\infty} \bar{x}(s) = 0$, więc nie są $\mathcal{L}$-transformatami *funkcji*.

Dystrybucja delta Diraca i jej funkcje aproksymujące

δ Diraca jest *dystrybucją* – uogólnieniem funkcji, takim, że:

$$\forall t \neq 0: \ \delta(t) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{d}t = 1$$

Interpretacja: nieskończenie krótki impuls o „polu” równym 1 („wstrzyknięcie” ładunku lub strumienia w chwili komutacji).

Parametryzowana rodzina funkcji $\delta_\varepsilon(t)$ aproksymujących $\delta(t)$:

$$\delta_\varepsilon(t) \overset{\text{np.}}{=} \frac{\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{dla } 0 \leqslant t < \varepsilon \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[\delta_\varepsilon(t)] = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 1$$

Jeśli funkcja ma skok, to jej pochodna zawiera δ: $\mathrm{D}\mathbf{1}(t) = \delta(t)$.

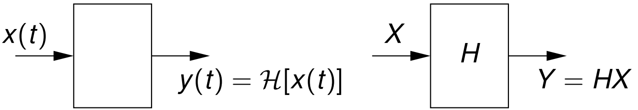
Delta „wyłuskuje” wartość funkcji w miejscu wystąpienia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = x(t_0) \Rightarrow \mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-st_0}$$

Czwórniki jako układy transmisyjne

Czwórnik transmisyjny może pracować w różnych kontekstach:

- pobudzenie oryginalne przy z.w.p. (met. operatorowa)
- pobudzenie sinusoidalne w stanie ust. (met. wskazowa)
- pobudzenie stałe w stanie ust. (analiza DC)
- pobudzenie okresowe w stanie ust. (szereg Fouriera)



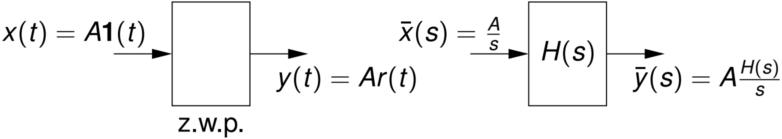
r-nie transmisyjne

Czwórnik o transmitancji H dokonuje operacji $\mathcal{H}$ na sygnale:

skupiony	$\Rightarrow$	H wymierna (por. ukł. opóźn.)
liniowy i bezźródłowy	$\Rightarrow$	$\mathcal{H}$ liniowa
stacjonarny	$\Rightarrow$	$\mathcal{H}$ niezmiennicza w czasie
realnie istniejący	$\Rightarrow$	$\mathcal{H}$ przyczynowa

Charakterystyki czasowe - odpowiedź jednostkowa

Odpowiedź jednostkowa (skokowa) $r(t)$ – na pobudzenie będące funkcją skoku jednostkowego (Heaviside'a). Stała $A \neq 0$ – tylko po to, żeby jednostki się zgadzały.



Zauważmy, że $\mathcal{L}[r(t)] = H(s)/s$, a zatem:

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{s\to 0}(s\frac{H(s)}{s}) = \lim_{\omega\to 0} H(\mathrm{j}\omega)$$

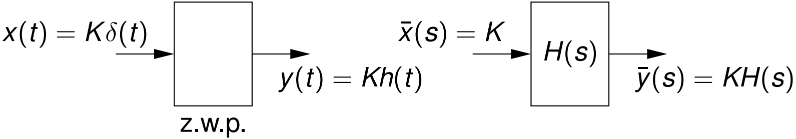
$$\lim_{t\to 0^+} r(t) = \lim_{s\to\infty}(s\frac{H(s)}{s}) = \lim_{\omega\to\infty} H(\mathrm{j}\omega)$$

Zachowanie dla małych/dużych częstotliwości możemy określić na bazie odpowiedzi jednostkowej dla dużych/małych czasów.

Przykład – dzielnik całkujący RC (filtr LP): $H(s) = \frac{1/\tau}{s+1/\tau}$, więc $r(t) = (1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})\mathbf{1}(t) \Rightarrow H(0) = r(\infty) = 1, H(\infty) = r(0^+) = 0$.

Charakterystyki czasowe - odpowiedź impulsowa

Odpowiedź impulsowa $h(t)$ – na pobudzenie dystrybucją delta (Diraca). Stała $K \neq 0$ – tylko po to, żeby jednostki się zgadzały.

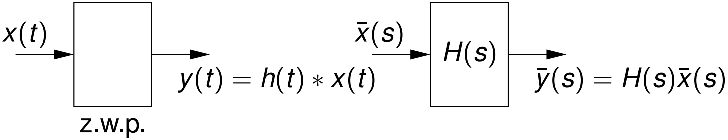


Takiego pobudzenia nie da się zrealizować w praktyce.
Zauważmy, że $\mathcal{L}[h(t)] = H(s)$. Przykład – dzielnik całkujący RC: $H(s) = \frac{1/\tau}{s+1/\tau}$, więc $h(t) = \frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathbf{1}(t)$ (pochodna $r(t)$).
Właściwości i związki między charakterystykami czasowymi:

- Dla $t < 0$ mamy $r(t) = 0$ i $h(t) = 0$ – przyczynowość
- $h(t) = \mathrm{D}r(t) = r^{'}(t) + r(0^{+})\delta(t)$ – operator D oznacza tu pochodną *dystrybucyjną*
- $r(t) = \int_0^t h(t')\mathrm{d}t' = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\varepsilon}^t h(t')\mathrm{d}t'$
- Jeśli $H(s) = L(s)/M(s)$ i $\mathrm{st}\,L(s) < \mathrm{st}\,M(s)$ ($\leqslant$), to $h(t)$ ($r(t)$) nie ma składników dystrybucyjnych. Na ogół tak jest.

Splot pobudzenia z odpowiedzią impulsową

Konsekwencja twierdzenia Borela:

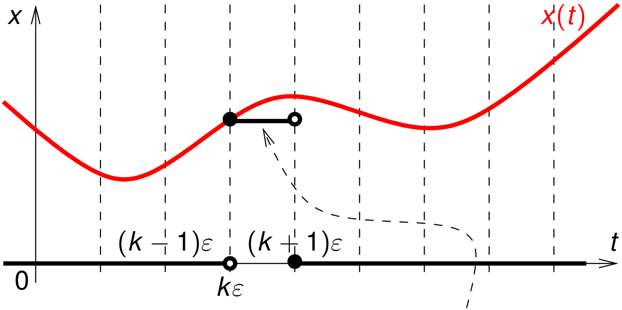


Jeśli $h(t)$ nie ma składników dystrybucyjnych, to:

$$y(t) = \int_0^t h(t - t')x(t')\mathrm{d}t' = \int_0^t h(t')x(t - t')\mathrm{d}t'.$$

Dlaczego?

Splot pobudzenia z odpowiedzią jednostkową – c.d.



$$x_k(t) = x(k\varepsilon)\delta_\varepsilon(t - k\varepsilon)\varepsilon$$

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k\varepsilon)\delta_\varepsilon(t - k\varepsilon)\varepsilon$$

$$y(t) \approx \sum_{k=0}^{t/\varepsilon} x(k\varepsilon)h_\varepsilon(t - k\varepsilon)\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_0^t x(t')h(t - t')\mathrm{d}t' = x(t) * h(t)$$

Stabilność układu transmisyjnego

Stabilność względem pobudzenia

Dostatecznie mała przyczyna wywołuje dowolnie mały skutek:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 : \sup_{t\in[0,\infty)} |x(t)| < \delta \Rightarrow \sup_{t\in[0,\infty)} |y(t)| < \varepsilon$$

Warunki konieczne i dostateczne stabilności:

- Odpowiedź impulsowa ma postać $h(t) = h_0(t) + K\delta(t)$, przy czym $\lim_{t\to\infty} h_0(t) = 0$.
- Wszystkie bieguny $H(s) = L(s)/M(s)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie $\mathfrak{Re}\, s < 0$ oraz $\operatorname{st} L(s) \leqslant \operatorname{st} M(s)$.

Jeżeli na osi urojonej są bieguny, ale pojedyncze, to układ jest niestabilny, ale na granicy stabilności.

Algebraiczne kryteria stabilności

Niech mianownik transmitancji

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{R}$ oraz $a_n > 0$.

Warunek konieczny: $a_k > 0, k = 0, \ldots, n$ (wszystkie współczynniki dodatnie, żadnego nie brakuje).

Dla $n = 1$ i $n = 2$ warunek konieczny jest dostateczny.

Warunek dostateczny: spełniony jest warunek konieczny oraz dodatnie są wszystkie minory główne macierzy Hurwitza

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \ldots & \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \ldots & \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Wystarczy badać co drugi minor. Są też inne kryteria.

Częstotliwościowe kryteria stabilności

Warunek dostateczny: spełniony jest warunek konieczny oraz wykres funkcji $M(\mathrm{j}\omega)$ na płaszczyźnie zespolonej dla $\omega \in [0, \infty)$ przebiega *kolejno* dokładnie n ćwiartek układu współrzędnych, poczynając od pierwszej, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.