23

zad. 1

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) =$

$\boxed{\text{suma szeregu : } \lim_{n\to\infty} S_n}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$ *

$\frac{1}{(n-1)(n+2)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+2} = \frac{(A+B)n + 2A - B}{(n-1)(n+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n+2)}$

$S_n = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2}\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{7} + \dots + \right.$

$\left. + \cancel{\frac{1}{n-5}} - \cancel{\frac{1}{n-2}} + \cancel{\frac{1}{n-4}} + \frac{1}{n-1} + \cancel{\frac{1}{n-3}} - \frac{1}{n} + \cancel{\frac{1}{n-2}} - \frac{1}{n+1} + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+2}\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{11}{18}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = 1 - 1 + 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots +$

$+ \frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n!}\right) = 1$

zad. 2.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$a_n = \sin^2 \frac{1}{n}$, kryterium porównawcze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin^2 \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \text{zbieżny (z szeregu Dirichleta)}$$

bo $\sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$, więc $\left(\sin \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2}$

$\overset{k.p.}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ - zbieżny

b) $a_n = \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 5^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{(n+1)\, n! \cdot n^n}{(n+1)^n (n+1)\, n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 5 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 5 \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{e}$$

$\frac{5}{e} > 1 \overset{k.d'A}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżny

c) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

$$\lim_{n} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \overset{\text{K. d'A}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - zbieżny}$$

e) $a_n = \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

$$\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \leq \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \overset{\text{K.P.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ zbieżny}$$

b) $a_n = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}}$

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{1}{n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n^3 + n^2} - \sqrt{n^3}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n^3}} = b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ - zbieżny} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - zbieżny}$$

(szereg Dirichleta)

f) $a_n = \frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[1 + \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^n}_{\to 0}\right] \cdot 5^n}{\left[1 + \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0}\right] \cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty \neq 0$$

warunek konieczny nie jest spełniony

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - rozbieżny

02.04.2015 Zad. 3.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad a_n = \frac{\sin 2^n}{n^2}$

badamy zbieżność bezwzględną

$$|a_n| = \left|\frac{\sin 2^n}{n^2}\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \rightarrow \text{zbieżne}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, więc też warunkowo zbieżny

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\sum (-1)^{n+1} b_n$ z kryterium Leibniza

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$\{b_n\}$ musi być nierosnący

$$b_{n+1} - b_n \leq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0$$

$\overset{K.L.}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - zbieżny

badamy zbieżność bezwzględną:

$$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum n^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \text{rozbieżny}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - nie jest zbieżny bezwzględnie, jest zbieżny warunkowo

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \sin n$

$\Rightarrow \lim a_n \neq 0$ $\Downarrow$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin n$ – nie istnieje – nie jest spełniony warunek konieczny; $\Rightarrow$ nie jest zbieżny
nie jest zbieżny bezwzględnie

d) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ nie jest spełniony warunek konieczny

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny