Algebra liniowa

Z_1

1. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiór:
   (a) $\{z \in \mathbb{C}: \ |z-1|+|z+1|=2\}$

   (b) $\{z \in \mathbb{C}: \ |z-1|+|z+1|=4\}$

   (c) $\{z \in \mathbb{C}: \ |z+1-j| \leqslant |z-\frac{5j-5}{1+2j}|\}$

   (d) $\left\{z \in \mathbb{C}: \frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z+2j) \leqslant \frac{3}{4}\pi\right\}$

   (e) $\{z \in \mathbb{C}: 0 \leqslant \arg((1-j)z^2) \leqslant \pi\}$

   (f) $\{z \in \mathbb{C}: \ |4jz+(1-j\sqrt{3})^3| < 8\}$

   (g) $\{z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Im}((\overline{z})^3) < 0\}$

   (h) $\{z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Re}\frac{1-z}{1+z} = 1\}$

2. Sprawdzić, że:
   (a) jeśli $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\phi_1 + j\sin\phi_1)$, $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\phi_2 + j\sin\phi_2)$, to:

   $$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\phi_1+\phi_2) + j\sin(\phi_1+\phi_2))$$

   $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\phi_1-\phi_2) + j\sin(\phi_1-\phi_2)).$$

   (b) jeśli $z = |z| \cdot (\cos\phi + j\sin\phi)$, to $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\phi + j\sin n\phi)$ (**wzór Moivre'a**)

   W szczególności: $(cos\phi + j\sin\phi)^n = \cos n\phi + j\sin n\phi$.

3. Wyznaczyć $\cos 4\alpha$ i $\sin 4\alpha$ w zależności od $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$. (wskazówka: skorzystać ze wzoru Moivre'a i wzoru Newtona).

4. Obliczyć następujące wyrażenia:
   (a) $(\frac{j-2}{j+3})^{99}$

   (b) $(1+j)^{50}(-\sqrt{3}+j)^{60}$

   (c) $\frac{(1+j\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3}-j)^{10}}$

   (d) $(\sqrt{6}-\sqrt{2}+j(\sqrt{6}+\sqrt{2}))^{24}$

   (e) $(\sqrt{2-\sqrt{2}}+j\sqrt{2+\sqrt{2}})^{16}$

   (f) $(1+\cos\alpha+j\sin\alpha)^{10}$ dla $\alpha \in \langle 0;\pi)$

5. Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi $(\sqrt{3}j-1)^n = (\sqrt{3}j+1)^n$?