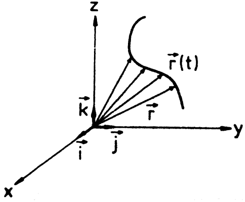
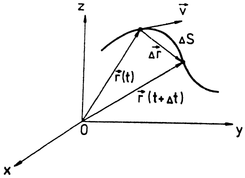
Opis ruchu



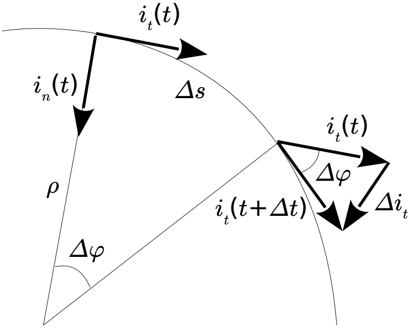


- tor ruchu - linia zakreślana przez poruszający się punkt
- równanie toru - postać jawna: $z = f(x, y)$, uwikłana $\phi(x, y, z) = 0$ lub parametryczna: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
- położenie $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$
- prędkość $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

$$\vec{v} = v\vec{i}_t \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{i}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{i}_t + v\frac{d\vec{i}_t}{dt}$$

- przyspieszenie $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$
- droga $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

Składowa styczna i normalna przyspieszenia



s - droga, ρ - promień krzywizny

$$\Delta s = \rho \Delta\varphi$$

$$|\Delta\vec{i}_t| = 2|\vec{i}_t| \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \xrightarrow{\Delta\varphi\to 0} \Delta\varphi$$

$$\vec{v} = v\vec{i}_t \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{i}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{i}_t + v\frac{d\vec{i}_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec{i}_t}{dt} = \frac{d\vec{i}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{i}_t}{ds}$$

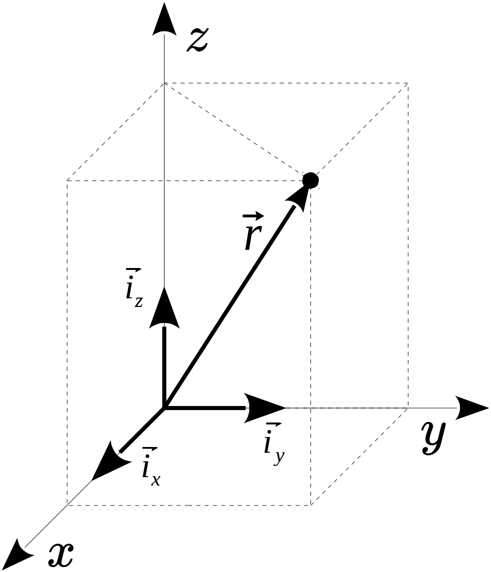
$$\frac{d\vec{i}_t}{ds} \approx \frac{\Delta\vec{i}_t}{\Delta s} \approx \frac{\vec{i}_n|\Delta\vec{i}_t|}{\Delta s} = \vec{i}_n\frac{\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi} = \vec{i}_n\frac{1}{\rho}$$

$$\vec{a} = \vec{i}_t\frac{dv}{dt} + \vec{i}_n\frac{v^2}{\rho} = \vec{i}_t a_t + \vec{i}_n a_n$$

składowa styczna: $a_t = \frac{dv}{dt}$

składowa normalna: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

Układ współrzędnych kartezjańskich



położenie:

$$\vec{r} = [x, y, z] =$$

$$= x\vec{i}_x + y\vec{i}_y + z\vec{i}_z$$

prędkość:

$$\vec{v} = v_x\vec{i}_x + v_y\vec{i}_y + v_z\vec{i}_z =$$

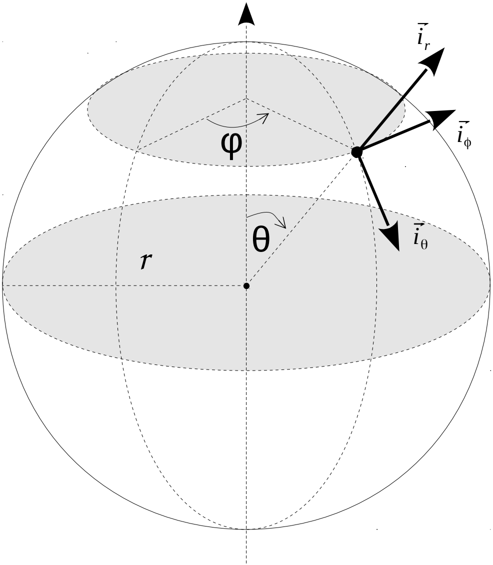
$$= \dot{x}\vec{i}_x + \dot{y}\vec{i}_y + \dot{z}\vec{i}_z$$

przyspieszenie:

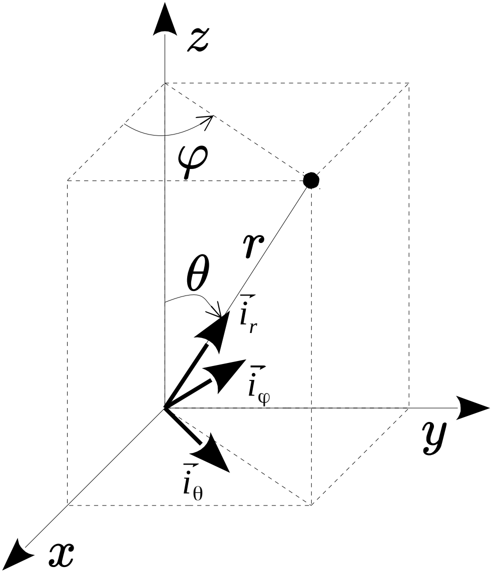
$$\vec{a} = a_x\vec{i}_x + a_y\vec{i}_y + a_z\vec{i}_z =$$

$$= \ddot{x}\vec{i}_x + \ddot{y}\vec{i}_y + \ddot{z}\vec{i}_z$$

Układ współrzędnych sferycznych



Układ współrzędnych sferycznych



sferyczny $\longrightarrow$ kartezjański

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

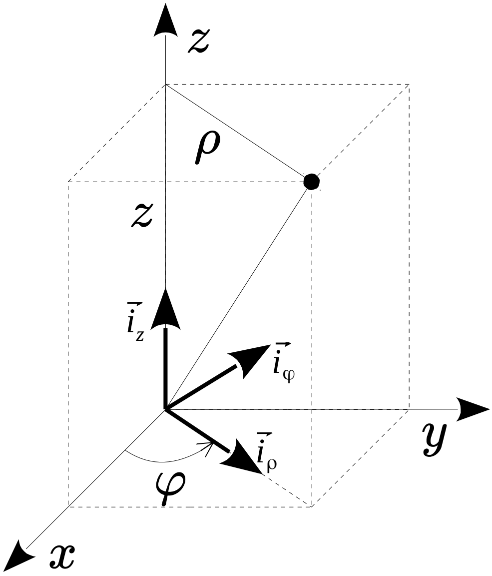
kartezjański $\longrightarrow$ sferyczny

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Układ współrzędnych walcowych



walcowy $\rightarrow$ kartezjański

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

kartezjański $\rightarrow$ walcowy

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

Opis ruchu w układzie biegunowym

wersory: $|\vec{i}_r| = |\vec{i}_\varphi| = 1$

$$\Delta\vec{i}_r = \vec{i}_r(t+\Delta t) - \vec{i}_r(t)$$

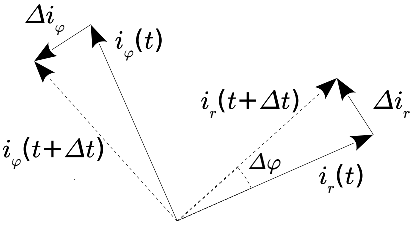
$$\Delta\vec{i}_r \xrightarrow{\Delta\varphi\to 0} \vec{i}_\varphi \Delta\varphi$$

$$\frac{d\vec{i}_r}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{i}_r}{\Delta t} = \vec{i}_\varphi \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{i}_r}{dt} = \dot{\varphi}\vec{i}_\varphi$$

Analogicznie dla wersora $\vec{i}_\varphi$ (uwaga na przeciwne zwroty wektorów $\vec{\Delta} i_\varphi$ i $\vec{i}_r$):

$$\frac{d\vec{i}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{i}_r$$

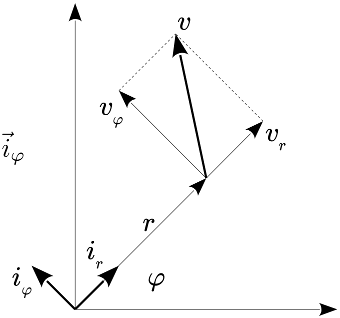


Alternatywnie: wersory $\vec{i}_r$ i $\vec{i}_\varphi$ w układzie kartezjańskim:
$\vec{i}_r = [\cos\varphi, \sin\varphi]$,
$\vec{i}_\varphi = [-\sin\varphi, \cos\varphi]$

$$\frac{d\vec{i}_r}{dt} = [-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}] = \dot{\varphi}\vec{i}_\varphi$$

Opis ruchu w układzie biegunowym

położenie: $\vec{r} = r\vec{i}_r$
prędkość: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$



$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{i}_r) = \dot{r}\vec{i}_r + r\dot{\vec{i}}_r = \dot{r}\vec{i}_r + r\dot{\varphi}\vec{i}_\varphi = v_r\vec{i}_r + v_\varphi\vec{i}_\varphi$$

składowa radialna prędkości: $v_r = \dot{r}$
składowa transwersalna prędkości: $v_\varphi = r\dot{\varphi}$

przyspieszenie: $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{i}_r + r\dot{\varphi}\vec{i}_\varphi\right) = \ddot{r}\vec{i}_r + \dot{r}\dot{\vec{i}}_r + \ddot{\varphi}r\vec{i}_\varphi + \dot{\varphi}\dot{r}\vec{i}_\varphi + \dot{\varphi}r\dot{\vec{i}}_\varphi$$

$$= \ddot{r}\vec{i}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{i}_\varphi + \ddot{\varphi}r\vec{i}_\varphi + \dot{\varphi}\dot{r}\vec{i}_\varphi - \dot{\varphi}^2 r\vec{i}_r = \left(\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r\right)\vec{i}_r + \left(\ddot{\varphi}r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\vec{i}_\varphi = a_r\vec{i}_r + a_\varphi\vec{i}_\varphi$$

składowa radialna przyspieszenia: $a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r$
składowa transwersalna przyspieszenia: $a_\varphi = \ddot{\varphi}r + 2\dot{r}\dot{\varphi}$

Opis ruchu w układzie biegunowym

Prędkość

$$\vec{v} = v_r \vec{i}_r + v_\varphi \vec{i}_\varphi$$

prędkość radialna:

$$v_r = \dot{r}$$

prędkość transwersalna:

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = r\omega$$

Przyspieszenie

$$\vec{a} = a_r \vec{i}_r + a_\varphi \vec{i}_\varphi$$

przyspieszenie radialne:

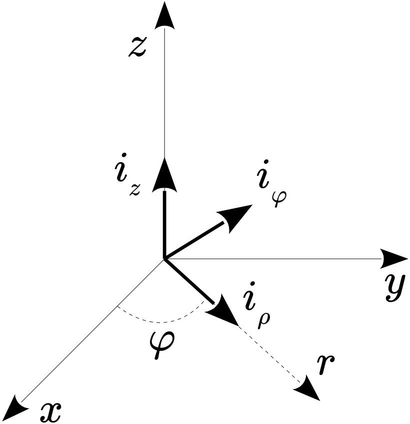
$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r = \ddot{r} - \omega^2 r$$

przyspieszenie transwersalne:

$$a_\varphi = \ddot{\varphi} r + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \varepsilon r + 2\dot{r}\omega$$

$\omega = \dot{\varphi}$ - prędkość kątowa
$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ - przyspieszenie kątowe
$\ddot{r}$ - przyspieszenie liniowe
$-\omega^2 r$ - przyspieszenie dośrodkowe
$2\dot{r}\omega$ - przyspieszenie Coriolisa

Prędkość kątowa



Układ współrzędnych walcowych:

$$\vec{i}_z = \vec{i}_\rho \times \vec{i}_\varphi$$
$$\vec{i}_\rho = \vec{i}_\varphi \times \vec{i}_z$$
$$\vec{i}_\varphi = \vec{i}_z \times \vec{i}_\rho$$

Układ obraca się wokół osi z:
$\vec{r} = \rho\vec{i}_\rho$, $\rho = const \Rightarrow$

$$\Rightarrow v = v_\varphi$$

$$\vec{v} = \rho\dot{\varphi}\vec{i}_\varphi = \rho\dot{\varphi}(\vec{i}_z \times \vec{i}_\rho) = (\dot{\varphi}\vec{i}_z) \times (\rho\vec{i}_\rho)$$

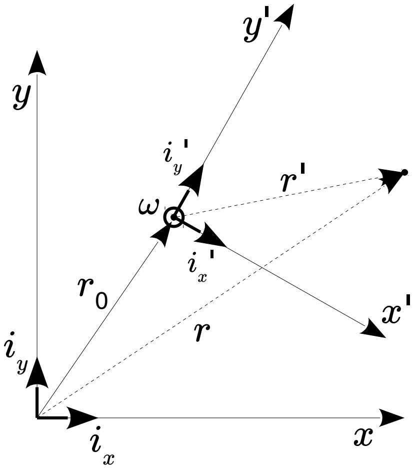
prędkość kątowa: $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{i}_z$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Prawdziwe dla dowolnego wektora u o stałej długości, w układzie obracającym się wokół osi Oz.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}$$

Transformacje prędkości i przyspieszenia



Z wcześniejszych rozważań:

$$|\vec{i}'_x| = |\vec{i}'_y| = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\vec{i}'_x}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}'_x, \; \frac{d\vec{i}'_y}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}'_y$$

Opis w układzie Oxy

$$\vec{r} = \vec{i}_x x + \vec{i}_y y$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}_x \frac{dx}{dt} + \vec{i}_y \frac{dy}{dt}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Opis w układzie $Ox'y'$

$$\vec{r'} = \vec{i}'_x x' + \vec{i}'_y y'$$
$$\vec{v'} = \frac{\delta \vec{r'}}{\delta t} = \vec{i}'_x \frac{dx'}{dt} + \vec{i}'_y \frac{dy'}{dt}$$
$$\vec{a'} = \frac{\delta \vec{v'}}{\delta t}$$

Ruch układu $Ox'y'$ w Oxy

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}, \; \vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt}$$

Transformacja prędkości

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r'} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i'}_x x' + \vec{i'}_y y') = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'}_x + \frac{dy'}{dt}\vec{i'}_y\right) + \left(x'\frac{d\vec{i'}_x}{dt} + y'\frac{d\vec{i'}_y}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{\delta\vec{r'}}{\delta t} + \vec{\omega} \times (\vec{i'}_x x' + \vec{i'}_y y') = \frac{\delta\vec{r'}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

Powyższy związek prawdziwy jest dla dowolnego wektora $\vec{u}'$

$$\frac{d\vec{u'}}{dt} = \frac{\delta\vec{u'}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{u'} \Rightarrow \frac{d\vec{v'}}{dt} = \frac{\delta\vec{v'}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{v'}$$

transformacja Galileusza (dodawanie prędkości): $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v'}$

Transformacja przyspieszenia

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v'}}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r'}}{dt} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r'}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \left(\frac{\delta\vec{v'}}{\delta t} + (\omega \times \vec{v'})\right) + \vec{\omega} \times \left(\frac{\delta\vec{r'}}{\delta t} + (\omega \times \vec{r'})\right) + \vec{\varepsilon} \times \vec{r'}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \Rightarrow \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'}) = \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r'}) - \vec{r'}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}) = -\omega^2\vec{r'}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \left(\vec{a'} + (\vec{\omega} \times \vec{v'})\right) + \left((\vec{\omega} \times \vec{v'}) - \omega^2\vec{r'}\right) + \vec{\varepsilon} \times \vec{r'}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a'} - \omega^2\vec{r'} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v'}) + \vec{\varepsilon} \times \vec{r'}$$

przyspieszenie dośrodkowe: $\vec{a}_d = -\omega^2\vec{r'}$
przyspieszenie Coriolisa: $\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \times \vec{v'})$
przyspieszenie Eulera: $\vec{a}_E = \vec{\varepsilon} \times \vec{r'} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'}$