Algebra liniowa

Z_8

1. Rozwiązać te z podanych układów równań, które są układami Cramera.

a) $\begin{cases} 3x - y + 3z + t = -4 \\ 4x + 3y + z + 2t = 0 \\ 2x + 4y + 3z - t = -3 \\ x - 2y + 4z - t = -6 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ -x + 3y + 2z = 1 \\ x + 2y + 5z = -1 \end{cases}$

2. Dla jakich wartości parametrów a, b podane układy są układami Cramera?

a) $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$, c) $\begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b - 1 \end{cases}$.

3. Wykazać, że dla dowolnych 4 punktów leżących na płaszczyźnie, takich że żadne dwa nie leżą na prostej równoległej do osi y, istnieje dokładnie jeden wielomian $f \in \mathbb{R}[x]_3$, którego wykres przechodzi przez te punkty. *Wskazówka*: wykorzystać zad. 4h) z zestawu dodatkowego 1.

4. Znaleźć współrzędne wektora $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ w bazie $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right)$ przestrzeni liniowej rzeczywistych macierzy symetrycznych stopnia 2.

5. Dane są wektory przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$:

(a) $X_1 = (1,2,1)$, $X_2 = (1,2,0)$, $X_3 = (0,2,1)$, $X_4 = (0,2,0)$
$Y_1 = (1,2,0)$, $Y_2 = (1,2,1)$, $Y_3 = (1,3,1)$, $Y_4 = (1,3,2)$

(b) $X_1 = (2,1,2)$, $X_2 = (1,3,1)$, $X_3 = (1,-2,1)$, $X_4 = (3,-1,3)$
$Y_1 = (1,2,0)$, $Y_2 = (2,2,1)$, $Y_3 = (-1,1,-1)$, $Y_4 = (1,-3,-1)$

(c) $X_1 = (1,2,3)$, $X_2 = (3,1,1)$, $X_3 = (2,-1,-2)$, $X_4 = (1,-3,-5)$
$Y_1 = (0,1,2)$, $Y_2 = (1,1,1)$, $Y_3 = (1,0,-1)$, $Y_4 = (1,-1,-3)$

(I) Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni liniowej $\mathrm{Lin}(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

(II) Czy istnieje takie przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że $\phi(X_i) = Y_i$ dla każdego $i \in \{1,2,3,4\}$?

(III) Czy przekształcenie ϕ spełniające warunki z punktu (II) jest wyznaczone jednoznacznie?

(IV) Jeśli przekształcenie ϕ z punktu (II) istnieje i jest wyznaczone jednoznacznie, znaleźć wzór tego przekształcenia.

Zadania 6-8 też dotyczą układów Cramera i są przeznaczone do samodzielnego poćwiczenia

6. Dla jakich wartości parametru a wielomian $x^2 + ax + a^2$ jest uzupełnieniem wielomianów $x^2 - 2x + 3$, $2x^2 - x + 1$ do bazy przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$?

7. Znaleźć wielomian $f \in \mathbb{R}[x]_3$, dla którego zachodzi: $f(-2) = -4$, $f(-1) = -1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 8$.

8. Wyznaczyć rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste nad $\mathbb{R}$: $\dfrac{4x^2 - 3x + 5}{(x-1)^2(x+1)}$.