# Wykład czwarty

## Pochodna funkcji

Zał. Funkcja $f$ jest określona w pewnym otoczeniu $O$ punktu $x_0$ ; $\Delta x \neq 0$ – przyrost argumentu $x$ taki, że $x_0 + \Delta x \in O$.
Ułamek: $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nazywamy ilorazem różnicowym.

**Definicja 1.** Liczbę $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nazywamy pochodną funkcji $f$ w punkcie $x_0$ i oznaczamy przez $f'(x_0)$.

Pochodne jednostronne (obliczane przy pomocy odpowiednich granic jednostronnych) funkcji $f$ oznaczamy przez: $f'(x_0^-)$ , $f'(x_0^+)$.

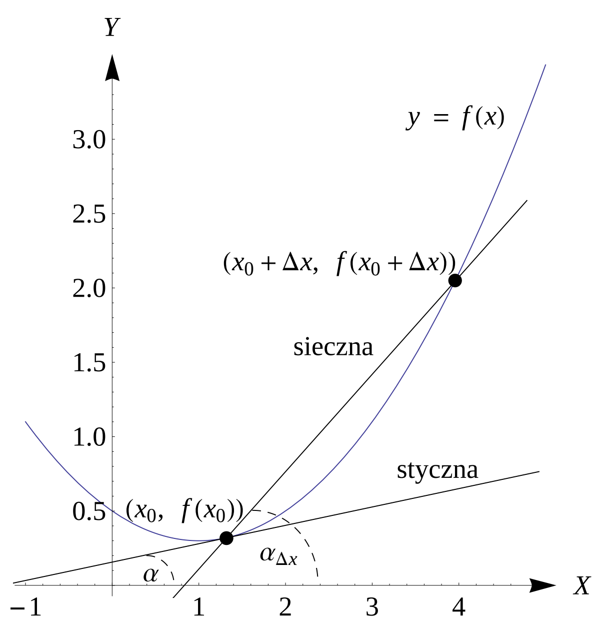
Funkcję $f'$ nazywamy pochodną funkcji $f$.

### Interpretacja geometryczna pochodnej

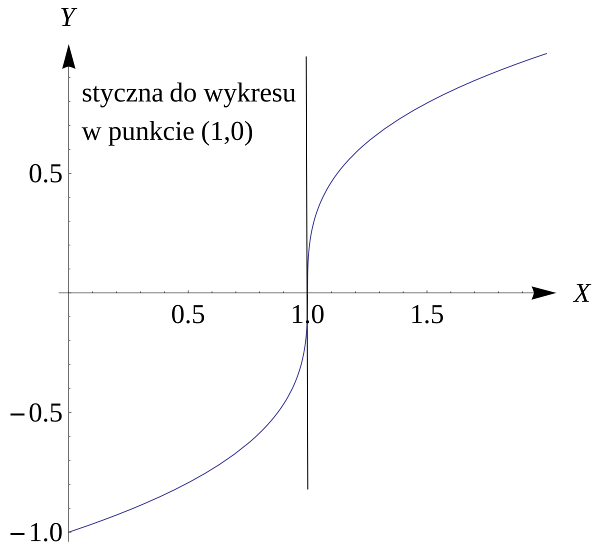
Równanie siecznej wykresu $f$ przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ ma postać: $y - f(x_0) = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot (x - x_0)$.

Granicznym położeniem tej siecznej ($\Delta x \to 0$) jest styczna do wykresu funkcji $f$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Jeśli $f'(x_0)$ istnieje, to równanie tej stycznej:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$




**Uwaga 1.** Jeżeli $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ jest niewłaściwa, to styczną do wykresu $f$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest prosta $x = x_0$.




**Obliczanie pochodnych**

**Twierdzenie 1.** (**o działaniach arytmetycznych na pochodnych**)Jeżeli funkcje $f$ i $g$ posiadają pochodne $f'$, $g'$, to prawdziwe są wzory

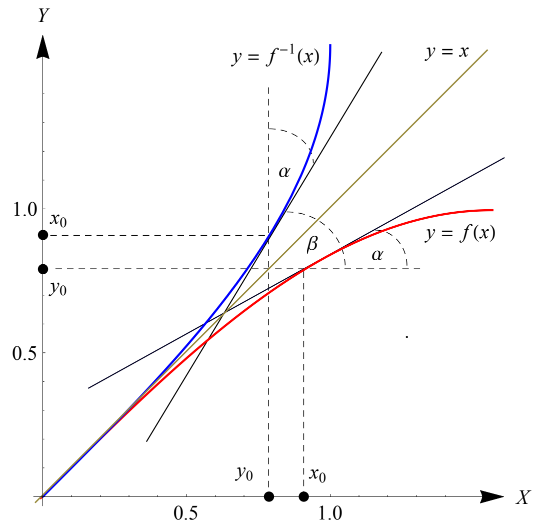
1. $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$ dla każdej liczby rzeczywistej $\alpha$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(f-g)' = f' - g'$
4. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$ , $g \neq 0$

**Pochodne funkcji elementarnych**

1. $(c)' = 0 \quad c$ – funkcja stała
2. $(x^n)' = nx^{n-1}\,, n \in \mathbb{N}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ; $(e^x)' = e^x$

**Twierdzenie 2.** (**o pochodnej funkcji odwrotnej**) Jeżeli funkcja $f$ jest ściśle monotoniczna i posiada pochodną $f'(x) \neq 0$, to funkcja odwrotna $f^{-1}$ posiada pochodną i prawdziwy jest wzór

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{gdzie } y = f(x)$$




$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha, \ \ g'(y_0) = \operatorname{tg}\beta, \ \ \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$

**Twierdzenie 3.** (**o pochodnej funkcji złożonej**) Jeżeli funkcja $f$ ma pochodną w punkcie $x$ i funkcja $g$ ma pochodną w punkcie $y = f(x)$, to funkcja złożona $g \circ f$ ma pochodną w punkcie $x$ i prawdziwy jest wzór

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Powyższy wzór można stosować wielokrotnie.

13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

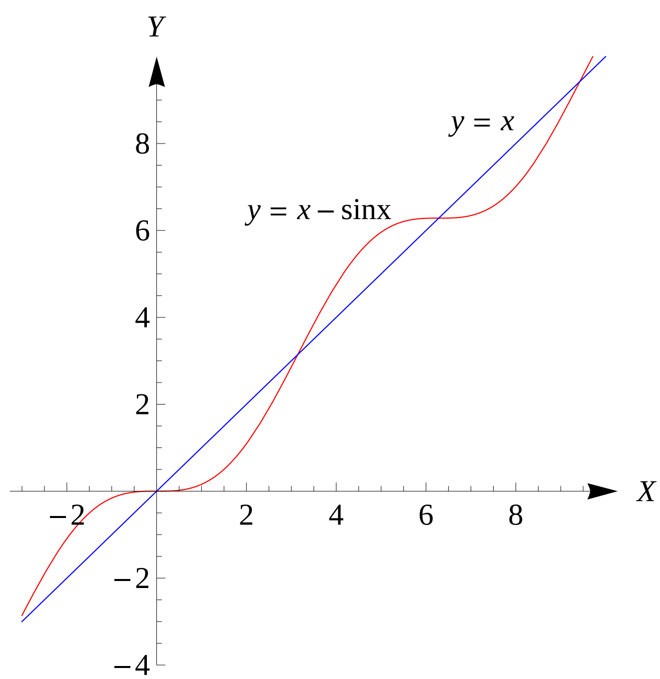
15. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ , $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

**Twierdzenie 4.** (**WK istnienia pochodnej**)Jeżeli $f'(x_0)$ istnieje, to funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0$.

**Uwaga 2.** Jeżeli istnieje pochodna $f'$ w przedziale $P$, to

1. jeżeli funkcja $f$ jest rosnąca na przedziale $P$, to $f' \geqslant 0$ na tym przedziale;

2. jeżeli funkcja $f$ jest malejąca na przedziale $P$, to $f' \leqslant 0$ na tym przedziale.




Funkcja $f(x) = x - \sin x$ jest rosnąca w $\mathbb{R}$. $f'(x) = 0$ dla nieskończenie wielu $x \in \mathbb{R}$.

**Twierdzenie 5.** (**de l'Hospitala**) Jeżeli funkcje $\dfrac{f}{h}$ oraz $\dfrac{f'}{h'}$ są określone na pewnym sąsiedztwie punktu $x_0$ oraz

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$ lub $|\lim\limits_{x \to x_0} h(x)| = +\infty$ ;

2. istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{h'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa)

to istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{h'(x)}$ .