AUTOMATYKA I ROBOTYKA - SEMESTR 2

**ANA2. ZESTAW 1. - Rozwiązania**

**Zad. 1.** Znaleźć całkę szczególną równania spełniającą podany warunek początkowy

$$\text{(a)} \quad y' = y - y^2, \;\; y(0) = 0.5$$

$\frac{dy}{dx} = y - y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y-1} = \int dx \Rightarrow \ln \left| \frac{y}{y-1} \right| = x + C \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{y}{y-1} = Ce^x \Rightarrow \frac{1/2}{1/2-1} = -1 = C \Rightarrow \frac{y}{y-1} = -e^x \Rightarrow y = \frac{e^x}{e^x+1}$

$$\text{(b)} \quad x \cdot y' = \mathrm{tg} y, \;\; y(1/2) = 5\pi/6$$

$x\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\, y \Rightarrow \int \frac{dy}{\mathrm{tg}\, y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{\cos y}{\sin y}\, dy = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin y| = \ln|x| + C \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin y = Cx$

$\frac{1}{2}C = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \sin y = x \;\wedge\; y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \pi - \arcsin x$, bo taka jest funkcja odwrotna do $\sin y$ na przedziale $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

$$\text{(c)} \quad y' = \frac{y - x}{x}, \;\; y(1) = -2$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$ jest to równanie typu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, do którego stosujemy standardowe podstawienie $u = \frac{y}{x}$, aby sprowadzić je do równania o zmiennych rozdzielonych.

$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u$

$u' \cdot x + u = u - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = -1 \Rightarrow \int du = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow u = -\ln|x| + C \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{y}{x} = -\ln|x| + C \Rightarrow y = -x\ln|x| + Cx \Rightarrow -2 = C \Rightarrow y = -x\ln|x| - 2x$

**Zad. 2.** Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\text{(a)} \quad y' - \frac{2x}{1+x^2} \cdot y = 1 + x^2$$

Równanie jednorodne jest równaniem o zmiennych rozdzielonych:

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} \cdot y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|1+x^2| + C \Rightarrow y = C(1+x^2)$

i jest to całka ogólna równania jednorodnego. Aby wyznaczyć całkę ogólną równania niejednorodnego stosujemy metodę uzmienniania stałej:

$y = C(x) \cdot (1+x^2)$ - wprowadzamy nową funkcję niewiadomą $C(x)$ tak, aby funkcja $y = C(x) \cdot (1+x^2)$ spełniała równanie niejednorodne.

$y' = C'(x) \cdot (1+x^2) + C(x) \cdot 2x$ i podstawiamy $y, y'$ do wyjściowego równania

$C'(x) \cdot (1+x^2) + C(x) \cdot 2x - \frac{2x}{1+x^2} \cdot C(x) \cdot (1+x^2) = 1 + x^2 \Rightarrow C'(x) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow C(x) = x + C$

Podstawiamy otrzymaną funkcję $C(x)$ do $y = C(x) \cdot (1+x^2)$ i otrzymujemy całkę ogólną równania niejednorodnego, która jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego:

$y(x) = (x + C) \cdot (1+x^2) = C(1+x^2) + x(1+x^2)$

$$\text{(b)} \quad y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

Równanie jednorodne: $\frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln|y| = -x^2 + C \Rightarrow y = Ce^{-x^2}$

Aby wyznaczyć całkę szczególną równania niejednorodnego stosujemy metodę uzmienniania stałej, ponieważ np. po lewej stronie równania współczynnik przy $y$ nie jest stały

$y = C(x) \cdot e^{-x^2} \Rightarrow y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2} \cdot (-2x)$

Podstawiamy do równania niejednorodnego $y, y'$:

$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2} \cdot (-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2} \Rightarrow C'(x) = x \Rightarrow$
$\Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + C$

$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + \frac{x^2}{2}e^{-x^2}$

$$\text{(c)} \quad y' + 4y = 5\sin 3x$$

Równanie jednorodne: $\frac{dy}{dx} = -4y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -4\int dx \Rightarrow \ln|y| = -4x + C \Rightarrow$
$\Rightarrow y_0 = Ce^{-4x}$ - całka ogólna równania jednorodnego

Całkę szczególną równania niejednorodnego $y_1$ wyznaczamy stosując metodę przewidywań, bo współczynniki w równaniu są stałe i funkcja po prawej stronie jest odpowiedniej postaci, tzn $f(x) = e^{\alpha x}[W_1(x)\cos\beta x + W_2(x)\sin\beta x]$, gdzie $W_1, W_2$ są wielomianami.

$y_1$ przewidujemy w postaci $y_1 = x^k \cdot e^{\alpha x}[V_1(x)\cos\beta x + V_2(x)\sin\beta x]$, gdzie

$k = \begin{cases} 0, & \alpha + i\beta \neq -p \\ 1, & \alpha + i\beta = -p \end{cases}$, $p$ - współczynnik w równaniu $y' + py = f(x)$,

$V_1, V_2$ - wielomiany w postaci ogólnej takie, że $\deg V_1 = \deg V_2 = \max(\deg W_1, \deg W_2)$.

$f(x) = 5\sin 3x \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 3 \Rightarrow \alpha + i\beta = 3i \neq -4 \Rightarrow k = 0$

$y_1(x) = A\sin 3x + B\cos 3x \Rightarrow y_1' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x$

Podstawiamy $y_1, y_1'$ do wyjściowego równania, porównujemy współczynniki przy $\cos 3x$ i $\sin 3x$ otrzymując układ równań liniowych z niewiadomymi $A$ i $B$.

$\begin{cases} 3A + 4B = 0 \\ -3B + 4A = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{20}{29} \\ B = -\frac{15}{29} \end{cases}$

Zatem rozwiązanie równania:

$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Ce^{-4x} + \frac{20}{29}\sin 3x - \frac{15}{29}\cos 3x$

$$\text{(d)} \quad y' - 2y = \cos x - x \sin x$$

Równanie jednorodne: $\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int dx \Rightarrow \ln|y| = 2x + C \Rightarrow$
$\Rightarrow y_0(x) = Ce^{2x}$

Równanie niejednorodne (metoda przewidywań): $f(x) = \cos x - x \sin x \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1, \alpha + i\beta = i \neq 2 \Rightarrow k = 0$

Dlatego $y_1$ przewidujemy w postaci $y_1 = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1' = A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x$

Podstawiamy $y_1, y_1'$ do wyjściowego równania, porównujemy współczynniki przy $\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$ i $x \sin x$ otrzymując układ równań liniowych z niewiadomymi $A$, $B$, $C$ i $D$.

$$\left\{\begin{array}{c} A + D - 2B = 1 \\ -B + C - 2D = 0 \\ C - 2A = 0 \\ -A - 2C = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{6}{25} \\ C = \frac{2}{5} \\ D = \frac{8}{25} \end{array}\right.$$

$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Ce^{2x} + \left(\frac{1}{5}x - \frac{6}{25}\right)\cos x + \left(\frac{2}{5}x + \frac{8}{25}\right)\sin x$

**Zad. 3.** Znaleźć całkę szczególną równania spełniającą podany warunek początkowy

$$\text{(a)} \quad y' + 2y = 5\cos x, \quad y(\pi/2) = 1$$

Równanie jednorodne: $\frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \Rightarrow \ln|y| = -2x + C \Rightarrow$
$\Rightarrow y_0(x) = Ce^{-2x}$

Równanie niejednorodne (metoda przewidywań): $f(x) = 5\cos x \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1, \alpha + i\beta = i \neq -2 \Rightarrow k = 0$

Przewidujemy $y_1(x) = A\cos x + B\sin x$ i po podstawieniu do wyjściowego równania $y_1, y_1'$ i porównaniu współczynników przy $\sin x$ i $\cos x$ dostajemy:

$$\begin{cases} -A+2B=0 \\ B+2A=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}$$

Stąd rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Ce^{-2x} + 2\cos x + \sin x$

Wyznaczymy teraz stałą $C$ korzystając z warunku początkowego $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ i tym samym dostaniemy całkę szczególną równania spełniającą zadany warunek początkowy:

$1 = Ce^{-\pi} + 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y(x) = 2\cos x + \sin x.$

$$\text{(b)} \quad y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} = \frac{x}{2y}, \;\; y(2) = \sqrt{3}$$

Mamy tu do czynienia z nieliniowym równaniem, tzw. równaniem Bernoullie'go. Jego postać ogólna to:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^r \,, \;\; r \neq 0,1$$

Równania tego typu można sprowadzić do równań liniowych za pomocą standardowego podstawienia $u(x) = y(x)^{1-r}$

U nas $r = -1 \Rightarrow u = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{u}$ (ze względu na warunek początkowy) $\Rightarrow$
$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

$\frac{u'}{2\sqrt{u}} - \frac{x}{2(x^2-1)} \cdot \sqrt{u} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \Rightarrow u' - \frac{x}{x^2-1} \cdot u = x$ - równanie liniowe względem zmiennej $u(x)$

Równanie jednorodne: $\frac{du}{dx} = \frac{x}{x^2-1}u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln|u| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C \Rightarrow u = C\sqrt{x^2-1}$

Równanie niejednorodne (metoda uzmienniania stałej): $u = C(x)\sqrt{x^2-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow u' = C'(x)\sqrt{x^2-1} + C(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Podstawiamy $u, u'$ do równania niejednorodnego z niewiadomą funkcją $u(x)$:

$C'(x)\sqrt{x^2-1} + C(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{x}{x^2-1}C(x)\sqrt{x^2-1} = x \Rightarrow C'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow$
$\Rightarrow C(x) = \sqrt{x^2-1} + C$

Stąd $u = (\sqrt{x^2-1} + C)\sqrt{x^2-1} = C\sqrt{x^2-1} + x^2 - 1 = y^2$

Wyznaczamy stałą z warunku początkowego: $y(2) = \sqrt{3} \Rightarrow 3 = C\sqrt{3} + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 0$

i całka szczególna $y = \sqrt{x^2-1}$

**Zad. 4.** Znaleźć całkę szczególną równania spe³niającą podany warunek początkowy

$$\text{(a)} \quad y'' - 4y' = 8x, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = -1$$

Równanie jednorodne jest równaniem drugiego rzędu o stałych współczynnikach, szukamy całek szczególnych tworzących układ podstawowy całek w postaci funkcji $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$ i otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$r^2 - 4r = r(r-4) = 0 \Rightarrow r_1 = 0\,,\, r_2 = 4 \Rightarrow \{1, e^{4x}\}$ - układ podstawowy całek, rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest kombinacją liniową tych funkcji:

$y_0(x) = C_1 + C_2e^{4x}$

Całkę szczególną równania niejednorodnego $y_1$ wyznaczamy stosując metodę przewidywań, bo współczynniki w równaniu są stałe i funkcja po prawej stronie jest odpowiedniej postaci, tzn $f(x) = e^{\alpha x}[W_1(x)\cos\beta x + W_2(x)\sin\beta x]$, gdzie $W_1, W_2$ są wielomianami.

$y_1$ przewidujemy w postaci $y_1 = x^k \cdot e^{\alpha x}[V_1(x)\cos\beta x + V_2(x)\sin\beta x]$, gdzie

$k =$ krotność pierwiastka $\alpha + i\beta$ w równaniu charakterystycznym,

$V_1, V_2$ - wielomiany w postaci ogólnej takie, że $\deg V_1 = \deg V_2 = \max(\deg W_1, \deg W_2)$.

$f(x) = 8x \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \alpha + i\beta = 0 = r_1 \Rightarrow k = 1$

Dlatego przewidujemy $y_1 = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx \Rightarrow y_1' = 2Ax + B \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1'' = 2A$

Podstawiamy $y_1, y_1', y_1''$ do wyjściowego równania:

$2A - 4(2Ax + B) = 8x$ i dostajemy układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{c} -8A = 8 \\ 2A - 4B = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -1 \\ B = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Stąd całka ogólna równania niejednorodnego: $y = C_1 + C_2e^{4x} - x^2 - \frac{1}{2}x$

Wyznaczymy teraz stałe $C_1, C_2$ korzystając z warunku początkowego:

$$\left\{ \begin{array}{c} y = C_1 + C_2e^{4x} - x^2 - \frac{1}{2}x \\ y' = 4C_2e^{4x} - 2x - \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_1 + C_2 = 1 \\ 4C_2 - \frac{1}{2} = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_1 = \frac{9}{8} \\ C_2 = -\frac{1}{8} \end{array} \right.$$

Całka szczególna $y(x) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8}e^{4x} - x^2 - \frac{1}{2}x$

$$\text{(b)} \quad y'' - 2y' + y = 4\sin^2(x/2), \;\; y(0) = 2, \; y'(0) = 1$$

Najpierw przekształcimy prawą stronę równania tak, aby móc zastosować metodę przewidywań:

$f(x) = 4\sin^2 \frac{x}{2} = 2 - 2\cos x\,, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

Równanie charakterystyczne równania jednorodnego: $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow r_1 = r_2 = 1 \Rightarrow y_0(x) = C_1e^x + C_2xe^x$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)\,,\; f_1(x) = 2 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow k = 0$
$f_2(x) = -2\cos x \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow k = 0$

Przewidujemy $y_1(x) = A + B\cos x + C\sin x$, liczymy pierwszą i drugą pochodną, podstawiamy do równania niejednorodnego i porównujemy współczynniki przy funkcjach trygonometrycznych i wyrazy wolne i dostajemy $A = 2$, $B = 0, C = 1$.

Rozwiązanie ogólne: $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + 2 + \sin x$

Następnie liczymy $y'(x)$, podstawiamy warunek początkowy do $y(x), y'(x)$ i wyznaczamy stałe: $C_1 = 0, C_2 = 0$.

Rozwiązanie szczególne: $y(x) = 2 + \sin x$

**Zad. 5.** Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\text{(a)} \quad y'' + y = \mathrm{tg} x$$

W tym przykładzie zastosujemy metodę uzmienniania stałych, ponieważ ze względu na postać funkcji $f(x)$ po prawej stronie równania nie możemy użyć metody przewidywań, równanie jednorodne jest równaniem o stałych współczynnikach, więc znajdziemy jego całkę ogólną korzystając z równania charakterystycznego.

Równanie charakterystyczne równania jednorodnego: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow$
$r_{1,2} = \pm i \Rightarrow y_1(x) = \cos x\,,\ y_2(x) = \sin x \Rightarrow y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Równanie niejednorodne: definiujemy funkcję $y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$.

Aby spełniała ona równanie niejednorodne muszą zachodzić następujące warunki na funkcje $C_1(x), C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)\cdot(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \mathrm{tg}\, x \end{cases}$$

Jest to układ Cramera względem $C_1'(x), C_2'(x)$, a wyznacznik macierzy współczynników przy niewiadomych jest wyznacznikiem Wrońskiego (w naszym zadaniu $W(x) = 1$), który jest niezerowy, bo funkcje $y_1(x), y_2(x)$ tworzą układ podstawowy całek i stąd układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Możemy zastosować wzory Cramera:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \mathrm{tg}\, x & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -\mathrm{tg}\, x \cdot \sin x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$C_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{1} = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$

$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \cdot \cos x\, dx = \left\| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = -\cos x\, dx \end{array} \right\| = \ldots =$
$= -\sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C_1$

$C_2(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x + C_2$

Czyli rozwiązanie ogólne: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sin 2x + \frac{1}{2} \cos x \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right|$

$$\text{(b)} \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$$

Ten przykład rozwiązujemy analogicznie.

Równanie charakterystyczne równania jednorodnego: $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 =$
$= 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$

Równanie niejednorodne: $y(x) = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0 \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x)(e^x + x e^x) = \frac{e^x}{x^2+1} \end{cases}$$

Liczymy wyznacznik Wrońskiego i stosujemy wzory Cramera:

$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$

$C_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ \frac{e^x}{x^2+1} & e^x + x e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = -\frac{x}{x^2+1}$

$C_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x^2+1} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{1}{x^2+1}$

$C_1(x) = -\frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C_1\,, \quad C_2(x) = \operatorname{arctg} x + C_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + xe^x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}e^x \ln|x^2+1|$

**Zad. 6.** Przewidzieć rozwiązanie ogólne równania (bez wyznaczania współczynników)

$$\text{(a)} \quad y''' + y'' - 4y' - 4y = e^x + 3xe^{2x} + \cos x$$

$r^3 + r^2 - 4r - 4 = r^2(r+1) - 4(r+1) = (r+1)(r-2)(r+2) = 0$

$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} + Ae^x + x(Bx+C)e^{2x} + D\cos x + E\sin x$

$$\text{(b)} \quad y''' - 3y' - 2y = e^{-2x} + xe^{-x} + \sin x$$

$r^3 - 3r - 2 = r^3 - 4r + r - 2 = r(r^2-4) + (r-2) = (r-2)(r+1)^2 = 0$

$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x} + Ae^{-2x} + x^2(Bx+C)e^{-x} + D\cos x + E\sin x$

$$\text{(c)} \quad y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x} + e^x + \cos 2x$$

$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = r^2(r-2) + 4(r-2) = (r-2)(r-2i)(r+2i) = 0$

$y(x) = C_1e^{2x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + xAe^{2x} + Be^x + x(C\cos 2x + D\sin 2x)$