

Metody Probabilistyczne i Statystyka

Z_7

1. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny w przedziale $[-1; 3]$. Wyznaczyć dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej $Z = X - \lfloor X \rfloor$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x .
2. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości $f_X(x) = 2x \cdot \mathbf{1}_{(0;1)}(x)$. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej

$$Y = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < X < \frac{1}{2} \\ 1 - X & , \quad \frac{1}{2} \leq X < 1 \end{cases}.$$

3. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ i niech $P(\{k\}) = 0.1$ dla każdego $k \in \Omega$. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa wektora (X, Y) , jeśli

$$X(k) = \cos(k\pi), \quad Y(k) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Obliczyć $P(X = Y)$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny dany tabelą:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$a - 1/16$	$1/4 - a$	0
0	$1/8$	$3/16$	$1/8$
1	$a + 1/16$	$1/16$	$1/4 - a$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest nieznanne.

- (a) Jakie wartości może mieć parametr a ?
 - (b) Wyznaczyć a wiedząc, że $P(X > 2Y) = \frac{7}{16}$.
 - (c) Obliczyć $F_{XY}(0, 0)$ oraz $F_{XY}(1, -1)$.
5. Wektor (X, Y) ma rozkład dyskretny o dystrybuancie

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad \vee \quad y < 0 \\ 1/4, & x \in [0; 2) \quad \wedge \quad y \in [0; 1) \\ 1/2, & x \in [0; 2) \quad \wedge \quad y \geq 1 \\ 3/4, & x \geq 2 \quad \wedge \quad y \in [0; 1) \\ 1, & x \geq 2 \quad \wedge \quad y \geq 1 \end{cases}.$$

Wyznaczyć tabelę z funkcją prawdopodobieństwa rozkładu łącznego wektora (X, Y) . Następnie wyznaczyć funkcje prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych.

6. Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) dana jest wzorem

$$F(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right) & x \geq 2 \quad \wedge \quad y \geq 2 \\ 0 & x < 2 \quad \vee \quad y < 2 \end{cases}.$$

Wyznaczyć dystrybuanty brzegowe. Obliczyć prawdopodobieństwa: $P(X > 2)$, $P(1 < X \leq 3, 1 < Y \leq 4)$, $P(X = 2, Y = 2)$.

7. Wektor (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} a & , \quad -2 \leq x \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 1/2 & , \quad 0 < x \leq 1 \quad \wedge \quad 0 < y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases} ,$$

gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć stałą a . Obliczyć $F_{XY}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

8. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq x \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases} .$$

Wyznaczyć gęstości brzegowe. Obliczyć $P(X + Y \leq 2)$.