AUTOMATYKA I ROBOTYKA - SEMESTR 2

ANA2. ZESTAW 6. - Rozwiązania

Zad. 1. Sprawdzić, czy funkcja f spełnia warunki Cauchy'ego-Riemanna, jeśli

$$\text{(a)} \quad f(z) = z^3 + iz$$

Funkcję $f(z)$ zapiszemy w postaci $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, spełnia ona równania Cauchy-Riemanna (C-R) w punkcie (x_0, y_0), jeśli w tym punkcie spełniony jest układ równań

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^3 + i(x+iy) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 + x)$$

Stąd:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 - y\,, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3 + x$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy - 1 = -6xy - 1 \end{cases} \Rightarrow \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ funkcje } u(x,y)\,,\, v(x,y)$$

spełniają warunki C-R.

$$\text{(b)} \quad f(z) = z \cdot |z|^2$$

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)(x^2+y^2) = (x^3 + xy^2) + i(x^2y + y^3)$$

Stąd:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = x^3 + xy^2\,, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = x^2y + y^3$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \\ 2xy = -2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2y^2 \\ 4xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

Równania C-R są spełnione tylko w punkcie $(0,0)$.

$$\text{(c)} \quad f(z) = \mathrm{Re}(z^2) \cdot \bar{z}$$

$f(x+iy) = (x^2 - y^2)(x - iy) = (x^3 - xy^2) + i(y^3 - x^2 y)$

Stąd:

$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z) = x^3 - xy^2\,, \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z) = -x^2 y + y^3$

$$\left\{ \begin{array}{c} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x^2 - y^2 = -x^2 + 3y^2 \\ -2xy = 2xy \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 = y^2 \\ 4xy = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

Równania C-R są spełnione tylko w punkcie $(0,0)$.

Zad. 2. Obliczyć, jeśli istnieje, pochodną $f'(z)$ oraz zbadać holomorficzność funkcji

$$\text{(a)} \quad f(z) = \mathrm{Im}(z+i)^2$$

Funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w punkcie z_0, jeśli ma pochodną w punkcie z_0 oraz w pewnym jego otoczeniu.

Jeśli funkcje $u(x,y)$, $v(x,y)$ spełniają równania C-R w punkcie (x_0, y_0) oraz są klasy C^1 w tym punkcie, to pochodna $f'(z_0)$ istnieje i zachodzą wzory:

$$f'(z_0) = \quad u_x + i v_x \; \Big|_{(x_0,y_0)} = \quad v_y - i u_y \; \Big|_{(x_0,y_0)}$$

$f(x+iy) = \mathrm{Im}\left[(x + i(y+1))^2\right] = 2x(y+1)$

Stąd:

$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z) = 2xy + 2x\,, \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2y + 2 = 0 \\ 2x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (x,y) = (0,-1)$$

Równania C-R są spełnione tylko w punkcie $(0, -1)$, ponadto, jako wielomiany, funkcje $u\,, v \in C^{\,1}(\mathbb{R}^2)$, stąd pochodna istnieje tylko w punkcie $z = -i$, więc funkcja nie jest holomorficzna.

$$f'(-i) = \quad 2y + 2 + i \cdot 0 \;\Big|_{(x,y)=(0,-1)} = 0$$

$$\text{(b)} \quad f(x+iy) = x + ay + i(bx + cy), \quad \text{gdzie} \;\; a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = -b \end{cases}$$

Funkcje u i v są klasy $C^{\,1}$, więc dla wyznaczonych wartości parametrów funkcja ma pochodną $\forall\, z$, czyli jest holomorficzna.

$$f(z) = x + ay + i(-ax + y) = z - iaz = z + biz \Rightarrow f'(z) = 1 + bi$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 1 + bi$$

$$\text{(c)} \quad f(z) = e^{\bar{z}}$$

$$f(z) = f(x+iy) = e^x \cdot e^{-iy} = e^x(\cos y - i \sin y)$$

Stąd:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y\,, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = -e^x \sin y$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = -e^x \cos y \\ -e^x \sin y = e^x \sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases} \Rightarrow y \in \emptyset \Rightarrow f'(z)$$

nigdzie nie istnieje (nie jest spełniony warunek konieczny, czyli równania C-R), więc funkcja nie jest holomorficzna.

$$\text{(d)} \quad f(x+iy) = x(2-x) + y^2 + i2y(1-x)$$

$u(x,y) = 2x - x^2 + y^2\,, \quad v(x,y) = 2y - 2xy$

$\left\{ \begin{array}{c} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2 - 2x = 2 - 2x \\ 2y = 2y \end{array} \right. \Rightarrow \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\wedge\; u, v \in C^{\,1}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(z)$ istnieje $\forall\, z \in \mathbb{C}$

$f'(z) = u_x + iv_x = 2 - 2x + i(-2y) = -2z + 2$

$f(z) = -(x+iy)^2 + 2(x+iy) = -z^2 + 2z \Rightarrow f'(z) = -2z + 2$

$$\text{(e)} \quad f(z) = \frac{|z|^2}{z}$$

$f(z) = \bar{z} \Rightarrow f'(z)$ nigdzie nie istnieje (więc funkcja nie jest holomorficzna), bo $u(x,y) = x\,,\ v(x,y) = -y$ i równanie $u_x = v_y$ jest sprzeczne.

Zad. 3. Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ wiedząc, że

$$\text{(a)} \quad u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x\,, \quad f(0) = i$$

Musimy najpierw sprawdzić, czy dana funkcja jest harmoniczna. Jeśli tak, to istnieje funkcja harmoniczna z nią sprzężona taka, że $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)\,,\ v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ dla pewnej funkcji holomorficznej $f(z)$.

$\left\{ \begin{array}{c} u_x = 3x^2 - 3y^2 + 1 \\ u_y = -6xy \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u_{xx} = 6x \\ u_{yy} = -6x \end{array} \right. \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u(x,y)$ jest

funkcją harmoniczną.

Funkcje harmoniczne sprzężone są to funkcje spełniające równania C-R, na ich podstawie wyznaczamy szukaną funkcję $v(x,y)$.

$u_x = 3x^2 - 3y^2 + 1 = v_y \Rightarrow v(x,y) = 3x^2y - y^3 + y + C(x)$

$v_x = -u_y \iff 6xy + C'(x) = 6xy \Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v(x,y) = 3x^2y - y^3 + y + C$

$\Rightarrow f(z) = x^3 - 3xy^2 + x + i(3x^2y - y^3 + y + C) = z^3 + z + Ci$

$f(0) = i \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(z) = z^3 + z + i$

$$\text{(b)} \quad v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + 1\,, \quad f(i) = 1 + i$$

$\begin{cases} v_x = 12x^2y - 4y^3 \\ v_y = 4x^3 - 12xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{xx} = 24xy \\ v_{yy} = -24xy \end{cases} \Rightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0 \Rightarrow v(x,y)$ jest funkcją harmoniczną.

$v_y = 4x^3 - 12xy^2 = u_x \Rightarrow u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + C(y)$

$u_y = -v_x \iff -12x^2y + C'(y) = -12x^2y + 4y^3 \Rightarrow C'(y) = 4y^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow C(y) = y^4 + C$

$\Rightarrow u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + C$

$\Rightarrow f(z) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + C + i(4x^3y - 4xy^3 + 1) = z^4 + C + i$

$f(i) = 1 + i \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(z) = z^4 + i$