Wykład 5
Własności przekształceń liniowych cd.

Wniosek 1 *Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ jest nieosobliwe $\Leftrightarrow$*

$$\ker\phi = \{\mathbb{O}_V\}$$

$\Leftrightarrow r(\phi) =dimV$ (jeżeli V ma skończony wymiar).

Definicja 1 *Przekształcenie liniowe nieosobliwe $\phi : V \to W$ nazywamy **izomorfizmem**, jeśli jest "na", tzn.* Im$\phi = W$. *V i W nazywamy wtedy przestrzeniami **izomorficznymi**.*

Uwaga. Jeżeli przestrzenie liniowe V i W są izomorficzne, to dim$V$ =dim$W$. Jeśli $\phi : V \to W$ - izomorfizm przestrzeni liniowych i $\{v_1, \ldots, v_n\}$ - baza przestrzeni V, to $\{\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)\}$ - baza przestrzeni W.
Uwaga. Jeżeli dim$V$ =dim$W < \infty$ (przestrzenie skończonego wymiaru), to dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ następujące warunki są równoważne:

1. ϕ jest nieosobliwe,
2. ϕ jest izomorfizmem.

Twierdzenie 2 *Każda przestrzeń liniowa wymiaru n nad ciałem $\mathbb{K}$ jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbb{K}^n$.*

Macierze

Niech V, W - przestrzenie liniowe skończonego wymiaru nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$:
$(v_1, \ldots, v_n)$ - baza V, $(w_1, \ldots, w_m)$ - baza W.

$\phi : V \to W$ - dowolne przekształcenie liniowe, jest ono wyznaczone (jednoznacznie) przez $\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)$.
Każdy z wektorów $\phi(v_i) \in W$ jest kombinacją liniową wektorów z bazy W:

$$\begin{aligned}
\phi(v_1) &= a_{11}w_1 \oplus a_{21}w_2 \oplus \cdots \oplus a_{m1}w_m \\
\phi(v_2) &= a_{12}w_1 \oplus a_{22}w_2 \oplus \cdots \oplus a_{m2}w_m \\
&\vdots \\
\phi(v_n) &= a_{1n}w_1 \oplus a_{2n}w_2 \oplus \cdots \oplus a_{mn}w_m
\end{aligned}$$

Ze współczynników a_{ij} tworzymy tablicę prostokatną o m wierszach i n kolumnach:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Nazywamy ją macierzą przekształcenia ϕ w bazach $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ i $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$, ozn. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$.

Kolumny macierzy $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$ są złożone ze współrzędnych wektorów $\phi(v_i)$ w bazie $\mathcal{B}$.

Definicja 2 ***Macierzą** o m wierszach i n kolumnach o elementach z ciała $\mathbb{K}$ nazywamy funkcję $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$, $(i, j) \mapsto a_{ij}$.*

Oznaczenie. Macierz wymiaru $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

Jeśli $m = n$, to A **macierz kwadratowa** stopnia n.
Macierz zerowa: $a_{ij} = 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$ $\forall j = 1, \ldots, n$.

Określamy działania na macierzach tak, aby odpowiadały działaniom na przekształceniach liniowych.

Definicja 3 ***Sumą macierzy*** *$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy macierz*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Definicja 4 ***Iloczynem macierzy*** *$A = [a_{ij}]_{m\times n}$* ***przez element*** *$\alpha \in \mathbb{K}$ nazywamy macierz*

$$\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}.$$

Uwaga. Zbiór macierzy wymiaru $m\times n$ o elementach z ciała $\mathbb{K}$ (ozn. $M_{m\times n}(\mathbb{K})$) z dodawaniem i mnożeniem przez skalar zdefiniowanymi jak wyżej jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$.

Jest ona izomorficzna z przestrzenią liniową $\mathbb{K}^{m\cdot n}$ nad ciałem $\mathbb{K}$.

$M_n(\mathbb{K})$ - zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała $\mathbb{K}$.