Metody Probabilistyczne i Statystyka - Wykład 5.

Wybrane rozkłady jednowymiarowych zmiennych losowych

24 marca 2025

1. Rozkłady dyskretne

Rozkład jednopunktowy

Definicja

Zmienna losowa X ma rozkład **jednopunktowy** *skupiony w punkcie a, jeśli $S_X = \{a\}$ oraz*

$$P(X = a) = 1.$$

Wtedy

$$EX = a, \ \ Var(X) = 0.$$

Uwaga

Każdą stałą można utożsamiać ze zmienną losową o rozkładzie jednopunktowym.

Rozkład dwumianowy

Doświadczenie:

Wykonujemy n doświadczeń w schemacie Bernoulliego, z prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie równym p.

Niech X oznacza liczbę sukcesów. Wtedy zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy z parametrami n i p.

Rozkład dwumianowy

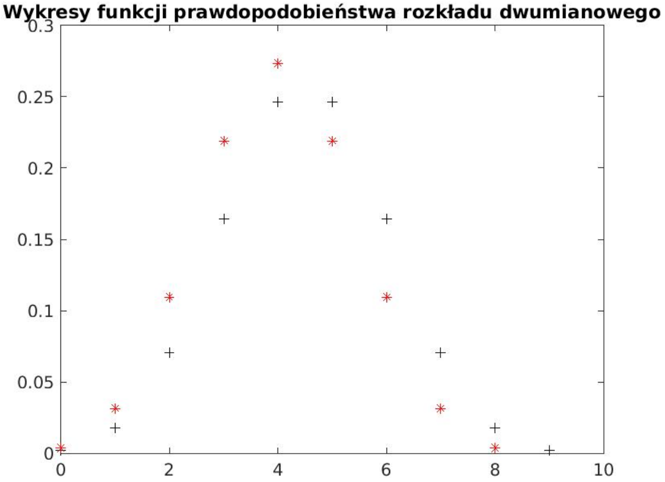
Definicja

Zmienna losowa X ma rozkład **dwumianowy (Bernoulliego)** *z parametrami n i p ($X \sim B(n, p)$), gdzie $p \in (0, 1)$ i $n \in \mathbb{N}$, jeśli $S_X = \{0, 1, \ldots, n\}$ oraz dla każdego $k \in S_X$*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Jeśli $X \sim B(n, p)$, to $EX = n \cdot p$, $Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

Rozkład dwumianowy



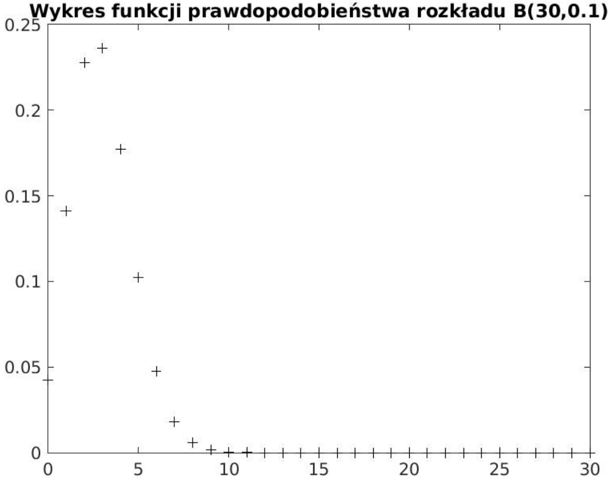
- Rozkład $B(9, 0.5)$ - krzyżyki
- Rozkład $B(8, 0.5)$ - gwiazdki

Definicja

Najbardziej prawdopodobną wartością *zmiennej losowej* X *(najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów) jest każda liczba całkowita* k *taka, że*

$$(n+1) \cdot p - 1 \leqslant k \leqslant (n+1) \cdot p.$$

Rozkład dwumianowy



Rozkład geometryczny

Doświadczenie:

Wykonujemy doświadczenia w schemacie Bernoulliego do momentu pojawienia się pierwszego sukcesu.

Niech X oznacza numer doświadczenia, w którym po raz pierwszy pojawił się sukces i niech p będzie prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie. Wtedy zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z parametrem p.

Rozkład geometryczny

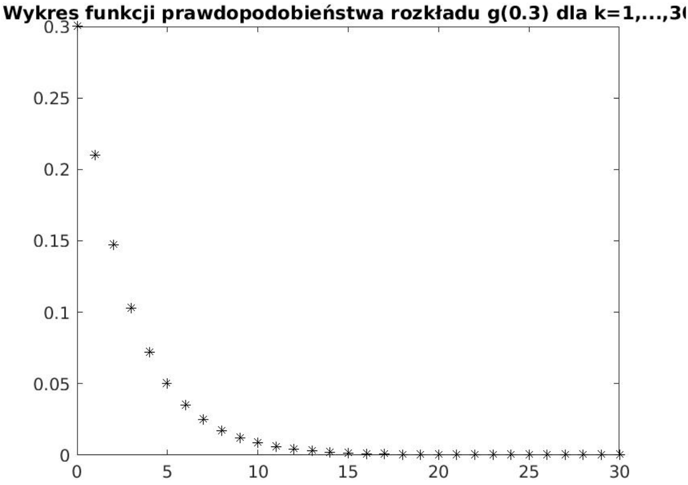
Definicja

Zmienna losowa X ma rozkład **geometryczny** *z parametrem $p \in (0,1)$ ($X \sim g(p)$), jeśli $S_X = \mathbb{N}$ oraz dla każdego $k \in S_X$*

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

Jeśli $X \sim g(p)$, to $EX = \frac{1}{p}$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Rozkład geometryczny



Rozkład geometryczny

Twierdzenie

Własność braku pamięci rozkładu geometrycznego: *Jeśli X ma rozkład geometryczny z parametrem p, to dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$*

$$P(X > n + m | X > n) = (1 - p)^m = P(X > m).$$

Przykład 1.

Rzucamy prawidłową kostką sześcienną do momentu wypadnięcia pierwszej szóstki. Wiedząc, że rzuciliśmy już 30 razy obliczyć prawdopodobieństwo, że w kolejnych 20 rzutach nadal nie będzie szóstki.