Stany nieustalone w obwodach SLS

- Uwzględniamy fakt, że zjawiska w obwodzie mają swój początek w czasie: $t \in [t_0, +\infty)$, najczęściej $t_0 = 0$.
- Obwód opisany jest równaniami różniczkowymi (L, C, M):
  - Skupiony – zwyczajnymi
  - Liniowy – liniowymi
  - niezmienniczy (Stacjonarny) – o stałych współczynnikach
- Przebiegi u, i zależą *tylko* od *warunków początkowych*:
  - $i = C\mathrm{D}u$ – warunkiem początkowym jest *napięcie*
  - $u = L\mathrm{D}i$ – warunkiem początkowym jest *prąd* (podobnie M)

  i od pobudzeń dla $t > t_0$, a nie zależą od historii ($t < t_0$).
- Stan nieustalony trwa w obwodzie od chwili t_0 aż do chwili, gdy pomijalny stanie się wpływ składowej przejściowej x_p:
  $$x(t) = x_p(t) + x_u(t)$$
  (być może nieskończenie długo, albo wcale go nie ma!).
- Składową ustaloną x_u dla pobudzenia stałego lub okresowego można wyznaczać poznanymi już metodami.
- Chwila początkowa t_0 jest na ogół związana z *komutacją*.

Komutacje

Komutacja…

…to natychmiastowe włączenie, wyłączenie lub przełączenie elementu lub podobwodu w pewnej chwili t_0.

- przełączenie idealnego klucza (który się zwiera, rozwiera lub przełącza w nieskończenie krótkim czasie),
- skokowa zmiana pobudzenia, np. źródło o SEM lub wydajności prądowej proporcjonalnej do *funkcji skoku jednostkowego* (funkcji Heaviside'a) $\mathbf{1}(t - t_0)$:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

  (por. także pobudzenie sygnałem prostokątnym)
- skokowa zmiana wartości elementu niestacjonarnego
- przejście punktu pracy elementu nieliniowego o odcinkami liniowej ch-ce z jednego odcinka ch-ki na drugi

Prawo komutacji

W chwili komutacji prądy i napięcia w obwodzie mogą zmieniać się skokowo. Jednak nie wszystkie... Na podstawie przesłanek fizycznych żądamy, aby żaden element nie pobierał w żadnej chwili nieskończonej mocy p. Dla elementów gromadzących energię w mamy $p = \mathrm{D}w$, więc energia musi być ciągła:

- $w_C = \frac{1}{2}Cu^2 \Longrightarrow$ musi być ciągłe *napięcie*
- $w_L = \frac{1}{2}Li^2 \Longrightarrow$ musi być ciągły *prąd* (podobnie M)

Prawo komutacji

Przy dowolnych komutacjach w każdym *realnie istniejącym* obwodzie SLS napięcia na pojemnościach i prądy w indukcyjnościach (także sprzężonych) są *ciągłe*:

$$\forall t : \quad u_C(t^-) = u_C(t^+) \quad \wedge \quad i_L(t^-) = i_L(t^+)$$

Wzory obowiązują dla *każdej* chwili t, nie tylko dla $t = t_0$. Niespełnienie prawa świadczy o nadmiernej idealizacji obwodu.

Schematy zastępcze elementów w chwili komutacji: C

Z prawa komutacji wynika, że $u_C(t_0^-) = u_C(t_0^+)$. A zatem w przedziale czasu $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ dla $\epsilon \to 0$ zachodzi $u_C(t) = \mathrm{const} = u_C(t_0)$. Pojemność w chwili komutacji zachowuje się jak źródło napięcia stałego o SEM równej warunkowi początkowemu. Pojemność z zerowym warunkiem początkowym w chwili komutacji zachowuje się jak zwarcie.

Pojemność z niezerowym warunkiem początkowym...

...jest dla $t = t_0^+$ równoważna pojemności z zerowym warunkiem początkowym, połączonej szeregowo ze źródłem napięcia stałego o SEM równej niezerowemu warunkowi początkowemu $u_C(t_0)$.

Zwróćmy uwagę, że pojemność z niezerowym warunkiem początkowym, rozpatrywana w przedziale czasu $t \geqslant 0$, jest elementem *źródłowym*, gdyż nie może na niej wystąpić napięcie $u \equiv 0$ (podobny wniosek obowiązuje dla L).

Schematy zastępcze elementów w chwili komutacji: L

Z prawa komutacji wynika, że $i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+)$. A zatem w przedziale czasu $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ dla $\epsilon \to 0$ zachodzi $i_L(t) = \text{const} = i_L(t_0)$. Indukcyjność w chwili komutacji zachowuje się jak źródło stałoprądowe o wydajności równej warunkowi początkowemu. Indukcyjność z zerowym warunkiem początkowym w chwili komutacji zachowuje się jak rozwarcie.

Indukcyjność z niezerowym warunkiem początkowym...

...jest dla $t = t_0^+$ równoważna indukcyjności z zerowym warunkiem początkowym, połączonej równolegle ze źródłem prądu stałego o wydajności równej niezerowemu warunkowi początkowemu $i_L(t_0)$.

Przedstawione modele C i L w połączeniu z prawami Kirchhoffa pozwalają na określenie *dowolnych* napięć i prądów w *dowolnym* obwodzie SLS tuż po komutacji, dla *dowolnych* pobudzeń, przy zadanych warunkach początkowych.

Podstawowe założenia metody operatorowej

- Analizujemy obwody *liniowe* pobudzane sygnałami określonymi na „dodatniej" półosi czasu ($t > t_0$).
- „Zapominamy" o przeszłości, a patrzymy w przyszłość:
  - *Całą* dotychczasową „historię" obwodu reprezentujemy w postaci warunków początkowych (u_C, i_L).
  - Ew. niezerowe warunki początkowe reprezentujemy źródłami napięciowymi ($u_C(t_0)$) albo prądowymi ($i_L(t_0)$).
  - Nie jest teraz ważne, jakie *były przedtem* pobudzenia: wszystkie źródła możemy wyzerować dla $t < t_0$, mnożąc je przez $\mathbf{1}(t - t_0)$ (także te reprezentujące warunki pocz.).

  Dostajemy obwód z *zerowymi warunkami początkowymi* (ZWP) i wszystkimi źródłami pomnożonymi przez $\mathbf{1}(t - t_0)$.
- Do analizy obwodu stosujemy metodę operatorową, opartą na tzw. *jednostronnym* przekształceniu Laplace'a.
  - sygnał sinusoidalny $\longleftrightarrow$ liczba zespolona (wskaz)
  - sygnał okresowy $\longleftrightarrow$ ciąg zespolony (szereg Fouriera)
  - sygnał *dowolny* określony dla $t > t_0$ $\longleftrightarrow$ funkcja zespolona (transformata Laplace'a)

Przekształcenie Laplace'a (jednostronne)

Dla uproszczenia wzorów założymy chwilowo, że $t_0 = 0$.

Przekształcenie Laplace'a (oznaczane literą $\mathcal{L}$)...

...przyporządkowuje funkcji $x(t)$ zmiennej rzeczywistej t jej $\mathcal{L}$-transformatę $\bar{x}(s)$, będącą funkcją zmiennej zespolonej s:

$$\bar{x}(s) = \mathcal{L}\left[x(t)\right] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

Założymy, że całka Laplace'a jest zbieżna w pewnym obszarze płaszczyzny s (np. $\Re\mathfrak{e}\, s > \sigma_0$). W zastosowaniach praktycznych nie spotyka się innych sygnałów. Transformata odwrotna $\mathcal{L}^{-1}\left[\bar{x}(s)\right]$, zadana skomplikowanym wzorem całkowym, jest:

- tożsamościowo równa zeru dla $t < 0$ (funkcja *oryginalna*),
- równa $x(t)$ dla $t > 0$ za wyjątkiem punktów nieciągłości.

Przekształcenie Laplace'a jest więc „prawie" wzajemnie jednoznaczne: $x(t) \longleftrightarrow \bar{x}(s)$, co pozwala na korzystanie z tablic transformat do obliczania zarówno $\mathcal{L}$, jak i $\mathcal{L}^{-1}$.

Właściwości przekształcenia Laplace'a

porównaj właściwości szeregu Fouriera!

Niech $x(t) \longleftrightarrow \bar{x}(s)$ i $y(t) \longleftrightarrow \bar{y}(s)$ będą sygnałami zerowymi dla $t < 0$. Niech $\alpha, \beta, t_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{C}$.

liniowość	$\alpha x(t) + \beta y(t) \longleftrightarrow \alpha \bar{x}(s) + \beta \bar{y}(s)$
zmiana skali czasu	$x(t/\alpha) \longleftrightarrow \alpha \bar{x}(\alpha s)$
opóźnienie	$x(t - t_0)\mathbf{1}(t - t_0) \longleftrightarrow \bar{x}(s)e^{-st_0}$
modulacja zespolona	$x(t)e^{-\gamma t} \longleftrightarrow \bar{x}(s + \gamma)$
różniczkowanie	$\mathrm{D}x(t)$ (przy ZWP!) $\longleftrightarrow s\bar{x}(s)$
całkowanie	$\int_0^t x(t')\mathrm{d}t' \longleftrightarrow \bar{x}(s)/s$
splot (tw. Borela)	$x(t) * y(t) = \int_0^t x(t')y(t - t')\mathrm{d}t' \longleftrightarrow \bar{x}(s)\bar{y}(s$

Twierdzenia o wartościach granicznych:

- $\lim_{s\to\infty} \bar{x}(s) = 0$
- $\lim_{s\to\infty} s\bar{x}(s) = \lim_{t\to 0^+} x(t)$ – „małe” $t \equiv$ „duże” s
- $\lim_{s\to 0} s\bar{x}(s) = \lim_{t\to +\infty} x(t)$ – „duże” $t \equiv$ „małe” s

Podstawowe operacje na sygnałach oryginalnych

Teoria obwodów...

...to prawa Kirchhoffa i równania elementów.

W układach *liniowych* wykorzystują one następujące operacje:

- prawa Kirchhoffa: sumy (i różnice) napięć i prądów
- równania elementów:
  - sumy (M)
  - pochodne (C, L, M)
  - mnożenie przez stałą (R, G, C, L, M, źródła sterowane)

Musimy umieć efektywnie obliczać iloczyny przez stałą, pochodne i sumy dowolnych przebiegów określonych dla $t > t_0$.

Operacje na sygnałach i ich $\mathcal{L}$-transformatach (*algebraizacja*)

$$\sum x(t) \longleftrightarrow \sum \bar{x}(s), \quad \alpha \cdot x(t) \longleftrightarrow \alpha \cdot \bar{x}(s), \quad \mathrm{D}x(t) \longleftrightarrow s \cdot \bar{x}(s)$$

Operatorowe prawa Kirchhoffa i równania elementów

Dziedzina czasu $t > 0$

PPK	$\sum i = 0$
NPK	$\sum u = 0$
R	$u = Ri$
L	$u = \mathrm{D}Li \qquad \leftarrow$ ZWP
G	$i = Gu$
C	$i = \mathrm{D}Cu \qquad \leftarrow$ ZWP $\downarrow$
M	$u_k = \mathrm{D}L_k i_k + \mathrm{D}M i_{2-k}$
e	$u = e(t)\,\mathbf{1}(t)$
j	$i = j(t)\,\mathbf{1}(t)$
ŹS	$y = \alpha x$
	(podobnie WO, TI, Ż)

$\longleftrightarrow$

Dziedzina $\mathcal{L}$-transformat

PPK	$\sum \bar{i} = 0$	
NPK	$\sum \bar{u} = 0$	
R	$\bar{u} = R\bar{i}$	$= (R)\bar{i}$
L	$\bar{u} = sL\bar{i}$	$= (sL)\bar{i}$
G	$\bar{i} = G\bar{u}$	$= (G)\bar{u}$
C	$\bar{i} = sC\bar{u}$	$= (sC)\bar{u}$
M	$\bar{u}_k = sL_k\bar{i}_k + sM\bar{i}_{2-k}$	
e	$\bar{u} = \bar{e}$	
j	$\bar{i} = \bar{j}$	
ŹS	$\bar{y} = \alpha\bar{x}$	
	(podobnie WO, TI, Ż)	

Równania w obu dziedzinach są *izomorficzne*.

Immitancje *operatorowe* dwójników. . .

. . . SLS pobudzanych sygnałami określonymi dla $t > 0$.

Dla indukcyjności: $Z_L = sL$, dla pojemności: $Y_C = sC$.

Immitancje operatorowe dowolnego dwójnika bezźródłowego

$$\underbrace{\text{impedancja}}_{Z} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\bar{u}}{\bar{i}}\right|_{\text{ZWP}} = \frac{1}{Y} \qquad \underbrace{\text{admitancja}}_{Y} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\bar{i}}{\bar{u}}\right|_{\text{ZWP}} = \frac{1}{Z}$$

Immitancje *operatorowe* są funkcjami zmiennej zespolonej s: $Z = Z(s)$, $Y = Y(s)$. Są to te same funkcje co immitancje *wskazowe*, ale dla innego argumentu ($s = \sigma + \mathrm{j}\omega$ zamiast $\mathrm{j}\omega$).

Operatorowy schemat zastępczy

Układ SLS rozważany dla $t > 0$
$\sum x(t)$, $\alpha \cdot x(t)$, $\mathrm{D}x(t)$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$

Operatorowy schemat zastępczy
$\sum \bar{x}$, $\alpha \cdot \bar{x}$, $s\bar{x}$

Metody rozwiązywania jak dla liniowych układów rezystancyjnych:

- operatorowy odpowiednik prawa Ohma dla immitancji
- równoważność źródeł (niezależnych) rzeczywistych
- łączenie elementów, przejście Y $\leftrightarrow$ Δ
- dzielniki napięciowe i prądowe
- zasada kompensacji
- zasada „przesuwania" („ruchliwości") źródeł
- zasada superpozycji
- twierdzenia o źródłach zastępczych (Thévenina i Nortona)

Szukana transformata Laplace'a $\bar{y}(s)$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

Szukany przebieg $y(t)$ dla $t > 0$

Tablica wybranych transformat Laplace'a

dozwolona na egzaminie!

$x(t),\ t>0$	$\bar{x}(s)$	$x(t),\ t>0$	$\bar{x}(s)$
$\delta(t)$ (delta Diraca)	1	$-\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$
1	$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\dfrac{1}{n!}t^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$	$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}(1-(a-b)t)}{(a-b)^2}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$	$\dfrac{-ae^{-at}+(a-b(a-b)t)\,e^{-bt}}{(a-b)^2}$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
$\dfrac{1}{n!}t^n e^{-at},\ n\in\mathbb{N}$	$\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\dfrac{1}{\omega}e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{1}{(s+a)^2+\omega^2}$
$(1-at)e^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$	$\left(\cos\omega t-\dfrac{a}{\omega}\sin\omega t\right)e^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t\left(1-\dfrac{a}{2}t\right)e^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^3}$	$-\dfrac{(b-c)e^{-at}+(c-a)e^{-bt}+(a-b)e^{-ct}}{(b-c)(c-a)(a-b)}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$	$\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{a(b-c)e^{-at}+b(c-a)e^{-bt}+c(a-b)e^{-ct}}{(b-c)(c-a)(a-b)}$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$-\dfrac{a^2(b-c)e^{-at}+b^2(c-a)e^{-bt}+c^2(a-b)e^{-ct}}{(b-c)(c-a)(a-b)}$	$\dfrac{s^2}{(s+a)(s+b)(s+c)}$

Przy obliczaniu odwrotnej transformaty Laplace'a $\mathcal{L}^{-1}[\bar{x}(s)]$ należy funkcję oryginalną $x(t)$ pomnożyć przez $\mathbf{1}(t)$.