

Metody Probabilistyczne i Statystyka

Z_2

1. Po upływie pewnego czasu T każda komórka może zginąć, przeżyć albo podzielić się na dwie z prawdopodobieństwami odpowiednio: $1/4$, $1/4$, $1/2$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po upływie czasu $2T$ będą dwie komórki, jeśli na początku była jedna komórka?
2. Wśród 18 monet jest 16 symetrycznych dwustronnych, jedna dwustronna niesymetryczna ($P(O) = 1/3$) oraz jedna z podwójnym orłem. Wylosowano jedną monetę, rzucono nią 4 razy i otrzymano 4 orły. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowano monetę z podwójnym orłem.
3. Test na obecność pewnego wirusa w organizmie człowieka daje poprawną odpowiedź w 90% przypadków, gdy wirus jest rzeczywiście obecny, i w 70% przypadków, gdy wirus nie jest obecny. W przypadku pewnego pacjenta wynik testu był:

- (a) pozytywny (test wskazał obecność wirusa w organizmie pacjenta);
- (b) negatywny.

Wiadomo, że na 100 osób w całej populacji wirusem zarażona jest jedna osoba. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pacjent jest zarażony.

4. Kot łapie k myszy dziennie z prawdopodobieństwem $p_k = e^{-1} \cdot \frac{1}{k!}$, $k = 0, 1, \dots$. Każda złapana mysz ucieka z prawdopodobieństwem $1/2$, a jeśli jej się to nie uda, to kot ją zjada. Wprowadźmy zdarzenia:

A_k — kot złapał danego dnia k myszy

B_j — kot zjadł danego dnia j myszy.

Obliczyć prawdopodobieństwa: $P(B_j|A_k)$, $P(B_j)$, $P(A_k|B_j)$.

5. Pan Roman może mieć i synów, $i = 0, 1, \dots, 4$, z prawdopodobieństwami równymi odpowiednio: $p_0 = 0.4$, $p_1 = p_2 = 0.2$, $p_3 = p_4 = 0.1$. Każdy z tych synów może mieć i synów z tymi samymi prawdopodobieństwami, niezależnie od ojca i braci. Obliczyć prawdopodobieństwo, że protoplasta rodu będzie miał dokładnie 2 wnuków.
6. Urządzenie składa się z n podzespołów pracujących niezależnie ($n \geq 2$). Prawdopodobieństwo, że i -ty podzespół ($i = 1, 2, \dots, n$) ulegnie awarii w czasie pracy wynosi q_i . Konserwator wykrywa i usuwa awarię każdego z podzespołów niezależnie od siebie, z prawdopodobieństwem p . Jakie jest prawdopodobieństwo, że po przeglądzie dokonany przez konserwatora, co najmniej jeden z podzespołów pozostał niesprawny?
7. Pani Aniela ma troje dzieci. Zdefiniujmy zdarzenia: A - wszystkie dzieci mają tą samą płeć; B - jest co najwyżej jeden chłopiec; C - w rodzinie jest chłopiec i dziewczynka.

Wykorzystując schemat Bernoulliego, przy założeniu, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca jest takie samo jak dziewczynki:

- (a) Pokazać, że A nie zależy od B , a B nie zależy od C ;
- (b) Sprawdzić, czy A nie zależy od C ;
- (c) Sprawdzić, czy zdarzenia A, B, C są niezależne zespołowo.