Wykład 13
Macierz w postaci kanonicznej Jordana cd.

Wektory dołączone

Niech λ - wartość własna o krotności $k > 1$ i $\dim N_\lambda^{(1)} < k \leqslant n = \dim V$.

Macierze $A - \lambda \cdot E$, $(A - \lambda \cdot E)^2$, $(A - \lambda \cdot E)^3$, ... są macierzami pewnych przekształceń liniowych z V w V.

$N_\lambda^{(1)}$ - zbiór wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ uzupełniony o wektor $\mathbb{O}$ tworzy podprzestrzeń niezmienniczą przestrzeni V, $N_\lambda^{(1)} = \ker(A - \lambda \cdot E)$

Definiujemy ciąg podprzestrzeni niezmienniczych przekształcenia $\phi : V \to V$:

$N_\lambda^{(2)} = \ker(A - \lambda \cdot E)^2$

$\vdots$

$N_\lambda^{(m)} = \ker(A - \lambda \cdot E)^m$

$N_\lambda^{(1)} \subset N_\lambda^{(2)} \subset \cdots \subset N_\lambda^{(m)} \subset \cdots \subset V$

Ten ciąg musi się stabilizować, bo $\dim V < \infty$, czyli istnieje takie s, że $N_\lambda^{(s)} = N_\lambda^{(s+1)} = \cdots = V$.

Można pokazać, że $\dim N_\lambda^{(s)} \leqslant k$ (krotność wartości własnej λ).

Rozważamy elementy zbioru $N_\lambda^{(2)} - N_\lambda^{(1)}$ czyli **wektory dołączone rzędu pierwszego** przekształcenia ϕ odpowiadające wartości własnej λ.

$$v \in N_\lambda^{(2)} - N_\lambda^{(1)} \;\Leftrightarrow\; ((A - \lambda \cdot E)^2 \cdot v = \mathbb{O} \;\wedge\; (A - \lambda \cdot E) \cdot v \neq \mathbb{O}) \;\Leftrightarrow$$

$(A - \lambda \cdot E) \cdot v$ jest wektorem własnym przekształcenia ϕ.

Zauważmy, że

$$\phi(v) = A \cdot v = (A - \lambda \cdot E + \lambda \cdot E) \cdot v = (A - \lambda \cdot E) \cdot v + \lambda \cdot v.$$

Ogólnie:

$N_\lambda^{(m)} - N_\lambda^{(m-1)}$ - zbiór **wektorów dołączonych rzędu** $(m-1)$ przekształcenia ϕ odpowiadających wartości własnej λ.

$v \in N_\lambda^{(m)} - N_\lambda^{(m-1)} \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda \cdot E)^{(m-1)} \cdot v$ jest wektorem własnym przekształcenia ϕ.

Rozważamy układ wektorów

$$\{(A - \lambda \cdot E)^{(s-1)} \cdot v, (A - \lambda \cdot E)^{(s-2)} \cdot v, \ldots, (A - \lambda \cdot E) \cdot v, v\}, \tag{1}$$

gdzie $(A - \lambda \cdot E)^{(s-1)} \cdot v$ - wektor własny, $(A - \lambda \cdot E)^{(s-2)} \cdot v$ - wektor dołączony pierwszego rzędu, ..., v - wektor dołączony rzędu $(s-1)$.

Jeśli v_i jest i-tym wektorem w tym ciągu, to $\phi(v_i) = v_{i-1} + \lambda \cdot v_i$.

Uwaga. Układ (1) jest liniowo niezależny.
Jeśli układ $\Big((A-\lambda\cdot E)^{(s-1)}\cdot v, (A-\lambda\cdot E)^{(s-2)}\cdot v, \ldots, (A-\lambda\cdot E)\cdot v, v, u_1, u_2, \ldots u_{n-l}\Big)$ jest bazą przestrzeni liniowej V, dim$V$=n, to macierz przekształcenia ϕ w takiej bazie ma postać

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right]$$

Twierdzenie 1 (Jordana) *Jeżeli V jest n-wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$, a $\phi : V \to V$ - przekształceniem liniowym, to istnieje baza przestrzeni V, w której macierz przekształcenia ϕ ma tzw.* ***postać kanoniczną Jordana****:*

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_p \end{bmatrix}, \textit{gdzie } K_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

lub $K_i = [\lambda_i]$, λ_i - wartości własne przekształcenia ϕ, K_i - klatka Jordana.

Przykład Niech ϕ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym o macierzy $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$. Wyznaczyć postać kanoniczną Jordana macierzy A oraz bazę $\mathcal{B}$, w której macierz przekształcenia ϕ ma postać kanoniczną.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Wielomiany macierzy

Definicja 1 *Niech $\mathbb{K}$ - ciało, $a_i \in \mathbb{K}$ dla $i = 0, \ldots, m$. Funkcję $\psi : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\psi(A) = a_m \cdot A^m + a_{m-1} \cdot A^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot E$ nazywamy* ***wielomianem macierzy****.*

Uwaga. Można traktować $\psi(A)$ jako wartość zwykłego wielomianu

$$\psi(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

dla macierzy A.

Definicja 2 *Macierze kwadratowe stopnia n są* ***podobne****, jeśli istnieje macierz nieosobliwa C stopnia n, taka że $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$ ($\Leftrightarrow B = C^{-1} \cdot A \cdot C$).*

Uwaga. Macierze przekształcenia liniowego w różnych bazach są podobne.

Wniosek 2 *Jeżeli J jest postacią kanoniczną Jordana macierzy A, to macierze A i J są podobne.*

Twierdzenie 3 *Jeżeli macierze A i B są podobne, to dla dowolnego wielomianu f macierze $f(A)$ i $f(B)$ są podobne.*

Przypomnienie. Niech $B = N \cdot A \cdot N^{-1}$, wtedy $B^k = N \cdot A^k \cdot N^{-1}$.

Wniosek 4 *Jeżeli J jest postacią kanoniczną Jordana macierzy A, a f - dowolnym wielomianem, to $f(A) = C \cdot f(J) \cdot C^{-1}$.*

Uwaga. Jeżeli $J = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_p \end{bmatrix}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$ $J^m = \begin{bmatrix} K_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_p^m \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 5 *Dla dowolnej klatki Jordana $K = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$ stopnia p i dowolnego wielomianu f:*

$$f(K) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(p-1)}(\lambda)}{(p-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(p-2)}(\lambda)}{(p-2)!} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 6 (Hamiltona-Cayleya) *Jeśli f jest wielomianem charakterystycznym macierzy A, to $f(A) = [0]_{n\times n}$.*

Przykład. Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\phi((x, y, z, t)) = (y - x, y - x, t, t)$.

a) Znaleźć taką bazę $\mathcal{B}$, by ϕ miało w tej bazie macierz w postaci kanonicznej Jordana. Podać macierz przekształcenia ϕ w tej bazie.

b) Wyznaczyć wzór przekształcenia ϕ^{120}, wyznaczyć wartości i wektory własne dla ϕ^{120}.

Funkcje macierzy (nie obowiązują na egzaminie)

Definiujemy $f(A)$, gdy f niekoniecznie jest wielomianem.

Założenie. Funkcja f jest funkcją zmiennej rzeczywistej rozwijalną w szereg Taylora w otoczeniu punktu x_0, czyli

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Jeżeli zamiast x wstawimy klatkę Jordana K stopnia p, to dla $m \geqslant p$

$$(K - \lambda \cdot E)^m = [0]_{n \times n},$$

gdzie λ - wartość własna.

Definicja 3 ***Funkcją*** f ***klatki Jordana*** *K stopnia p odpowiadającej wartości własnej λ nazywamy macierz*

$$f(K) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{f^{(i)}(\lambda)}{i!}(K - \lambda \cdot E)^i = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(p-1)}(\lambda)}{(p-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(p-2)}(\lambda)}{(p-2)!} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Jeśli $J = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_s \end{bmatrix}$, to $f(J) = \begin{bmatrix} f(K_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(K_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(K_s) \end{bmatrix}$,

a jeśli $A = C \cdot J \cdot C^{-1}$, to $f(A) = C \cdot f(J) \cdot C^{-1}$.