Metody Probabilistyczne i Statystyka - Wykład 3.

Zmienne losowe jednowymiarowe

Ewa Frankiewicz

10 marca 2025

Przykład 1.

Rzucamy 2 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych reszek. Zapisać X jako funkcję zdarzenia elementarnego.

Zmienne losowe jednowymiarowe

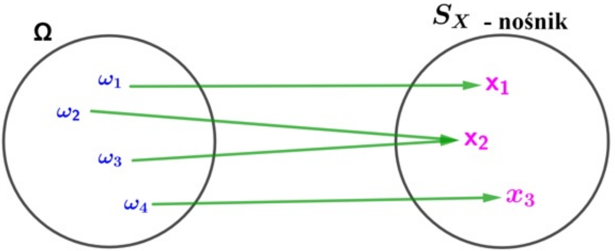
Przykład 2.

Czekamy na autobus mający przyjechać w ciągu godziny. Niech T oznacza czas oczekiwania. Zapisać T jako funkcję zdarzenia elementarnego.

Zmienne losowe jednowymiarowe

Definicja

Jednowymiarową zmienną losową *(o wartościach rzeczywistych), określoną na przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, nazywamy funkcję* $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Zbiór wartości zmiennej losowej, które są przyjmowane z dodatnim prawdopodobieństwem oznaczamy symbolem S_X *i nazywamy* **nośnikiem**.

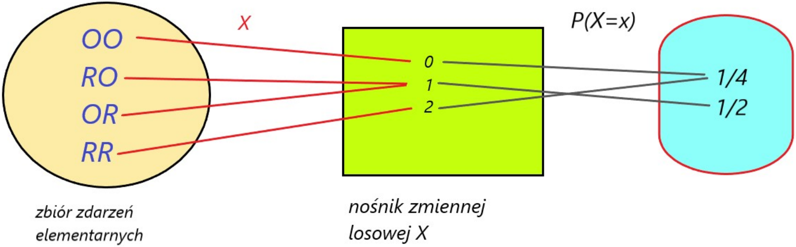


Przykład 2. - c.d.

Wyznaczyć prawdopodobieństwa, z jakimi X przyjmuje poszczególne wartości z nośnika, czyli $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$ dla każdego $x \in S_X$.

Uwaga

Uwaga: Zamiast $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$, będziemy pisać $P(X = x)$.



Rozkład zmiennej losowej określa zbiór jej wartości oraz prawdopodobieństwa, z jakimi te wartości są przyjmowane.

Przykład 2. - c.d.

Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ wyznaczyć $X^{-1}((-\infty; t])$. Wyznaczyć funkcję F_X określoną dla $t \in \mathbb{R}$ wzorem

$$F_X(t) = P\left(X^{-1}((-\infty; t])\right) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant t\}).$$

Dystrybuanta zmiennej losowej

Definicja

Dystrybuantą *jednowymiarowej zmiennej losowej* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *nazywamy funkcję* $F_X : \mathbb{R} \to [0;1]$, *która dla każdego* $t \in \mathbb{R}$ *określona jest wzorem*

$$F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant t\}) = P\left(X^{-1}(-\infty; t]\right).$$

Uwaga

Uwaga: Zamiast $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant t\})$, będziemy pisać $P(X \leqslant t)$.

Uwaga

Dystrybuanta jednoznacznie wyznacza rozkład zmiennej losowej: dwie zmienne losowe mają te same rozkłady wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same dystrybuanty.

Dystrybuanta zmiennej losowej

Twierdzenie

Funkcja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest dystrybuantą jednowymiarowej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, gdy:*

1. $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$
2. F *jest funkcją niemalejącą*
3. F *jest funkcją co najmniej prawostronnie ciągłą.*

Dystrybuanta zmiennej losowej

Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą dystrybuanty:

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i niech $a < b$. Wtedy:

1. $P(X \leqslant a) = F_X(a)$
2. $P(X = a) = F_X(a) - \lim\limits_{t \to a^-} F_X(t)$
3. $P(X < a) = \lim\limits_{t \to a^-} F_X(t)$
4. $P(a \leqslant X < b) = \lim\limits_{t \to b^-} F_X(t) - \lim\limits_{t \to a^-} F_X(t)$
5. $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
6. $P(a < X < b) = \lim\limits_{t \to b^-} F_X(t) - F_X(a)$
7. $P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - \lim\limits_{t \to a^-} F_X(t)$

Definicja

Punktem skokowym *rozkładu zmiennej losowej* X *nazywamy każdą liczbę* $a \in \mathbb{R}$ *taką, że* $P(X = a) > 0$.

Twierdzenie

Liczba a *jest punktem skokowym rozkładu zmiennej losowej* X *wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja* F_X *jest nieciągła w punkcie* a.

Rozkład dyskretny

Definicja

Zmienna losowa X ma rozkład **dyskretny (skokowy)**, *jeśli jej nośnik jest przeliczalny (w szczególności może być skończony).*

Uwaga

Nośnik rozkładu zmiennej losowej X typu dyskretnego ma następujące własności:

1. $P(X = x) > 0$ *dla każdego* $x \in S_X$;
2. $\sum_{x \in S_X} P(X = x) = 1$.

Rozkład dyskretny

Definicja

Funkcję p_X *taką, że* $p_X(x) = P(X = x)$, *nazywamy* **funkcją prawdopodobieństwa** *rozkładu zmiennej losowej* X *typu dyskretnego.*

Uwaga

Funkcja prawdopodobieństwa jednoznacznie wyznacza rozkład zmiennej losowej typu dyskretnego.

Twierdzenie

Jeśli X *ma rozkład dyskretny, to*

$$F_X(t) = \sum_{x \leqslant t} P(X = x)$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Rozkład ciągły

Definicja

Zmienna losowa X o dystrybuancie F_X **ma rozkład ciągły**, *jeżeli istnieje funkcja $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$*

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx.$$

Funkcję f_X nazywamy wtedy **gęstością** *rozkładu zmiennej losowej X.*

Uwaga

Nośnikiem zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym jest zbiór S_X taki, że

$$S_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}.$$

Rozkład ciągły

Twierdzenie

Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest gęstością jednowymiarowej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. $f(x) \geqslant 0$ *prawie wszędzie;*
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Uwaga

Gęstość jednoznacznie wyznacza rozkład zmiennej losowej typu ciągłego.

Rozkład ciągły

Twierdzenie

Jeśli X ma rozkład ciągły, to:

1. F_X *jest funkcją ciągłą w zbiorze* $\mathbb{R}$.
2. $F_X' = f_X$ *w każdym punkcie ciągłości* x *funkcji* f_X.
3. $P(X = a) = 0$ *dla każdego* $a \in \mathbb{R}$.
4. *Dla dowolnych* $a, b \in \mathbb{R}$ *takich, że* $a < b$

$$\begin{aligned} & P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b) = \\ = \quad & P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx = \\ = \quad & \text{pole pod wykresem gęstości pomiędzy punktami } a \text{ i } b. \end{aligned}$$

Przykład 4.

Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1] \\ 2-x, & x \in (1;2] \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases} .$$

1. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X;
2. Obliczyć $P(0.5 < X < 1.5)$.