Wykład 9
Układy równań liniowych cd.

Twierdzenie 1 ***(Kroneckera-Capellego)***

1. *Układ równań liniowych* $A \cdot X = B$ *posiada rozwiązanie* $\Leftrightarrow r(A) = r(A|B)$.
2. *Jeśli* $r(A) = r(A|B) = n$ *to układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*
3. *Jeśli* $r(A) = r(A|B) = k < n$ *to układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od* $n - k$ *parametrów, które mogą przyjmować dowolne wartości z* $\mathbb{K}$.

Przykład. Przedyskutować rozwiązalność układu w zależności od parametru a.

$$\begin{cases} (1+a)x + 2y + (1-a)z + t = 0 \\ 4x + (8+a)y - 4z + 4t = 3 \\ ax + 2ay - z + at = -a \end{cases}$$

Metoda wyznacznikowa rozwiązania układu równań liniowych

Jeżeli $r(A) = r(A|B) = k < n$, to usuwamy z układu $A \cdot X = B$ te równania, w których współczynniki przy niewiadomych nie wchodzą do niezerowego minora stopnia k (ustalony minor).

Następnie po lewej stronie pozostawiamy te zmienne, których współczynniki weszły do tego ustalonego niezerowego minora. Pozostałe składniki przenosimy na prawą stronę.

Ze względu na zmienne po lewej stronie układ jest układem Cramera. Pozostałe zmienne (jest ich $n - k$) traktujemy jako parametry.

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

Uwaga. Następujące operacje wierszowe nie zmieniają rozwiązania:

1. zamiana wierszy miejscami
2. mnożenie wiersza przez skalar różny od $\mathbb{O}$
3. dodanie do wiersza kombinacji liniowej pozostałych wierszy

Znalezienie rozwiązania jako sumy rozwiązań

Uwaga. Każde rozwiązanie układu $A \cdot X = B$ jest postaci $X_B + X_0$, gdzie X_B - jakiekolwiek rozwiązanie szczególne układu $A \cdot X = B$ i X_0 - pewne rozwiązanie układu $A \cdot X = \mathbf{0}$.

X_0 można przedstawić jako kombinację liniową wektorów z bazy przestrzeni $\ker\phi$ ($\Leftrightarrow$ wektorów z bazy przestrzeni rozwiązań układu $A \cdot X = \mathbf{0}$).

Uwaga. Układ $A \cdot X = B$ można także rozwiązać znajdując układ fundamentalny rozwiązań odpowiadającego mu układu jednorodnego $A \cdot X = \mathbf{0}$ oraz jedno rozwiązanie szczególne układu $A \cdot X = B$ (np. można je zgadnąć).

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Przez operacje wierszowe doprowadzamy macierz rozszerzoną układu $A \cdot X = B$, czyli macierz $[A|B]$ do postaci schodkowej (trapezowej).

Jeżeli istnieje wiersz, w którym są same zera oprócz ostatniej kolumny, to układ jest sprzeczny.

W przeciwnym przypadku niewiadome odpowiadające kolumnom wiodącym (czyli tym, w których są schodki) wyrażamy przez pozostałe, które traktujemy jako parametry. Wyznaczamy niewiadome począwszy od ostatniego równania, wstawiając już wyznaczone do pozostałych równań.

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Przykład. Wyznaczyć jądro, obraz, podać ich bazy dla podanego przekształcenia liniowego. Czy przekształcenie jest nieosobliwe, czy jest *na*?

$\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $\phi((x, y, z, t, w)) = (2x - z + t, x + y - 2z, 0, t - w)$.