Analiza, Wykład: Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej cz. 2

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Strózyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Tw. (I. warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Jeśli f jest ciągła w punkcie x_0 i istnieje pochodna f' w pewnym sąsiedztwie $S(x_0, r)$, to jeśli:

(1) $\exists\, \delta > 0 \;\; f'(x) < 0 \text{ dla } (x_0 - \delta, x_0) \text{ i } f'(x) > 0 \text{ dla } (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow$ f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe,

(2) $\exists\, \delta > 0 \;\; f'(x) > 0 \text{ dla } (x_0 - \delta, x_0) \text{ i } f'(x) < 0 \text{ dla } (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow$ f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe,

(3) $\exists\;\; \delta > 0\, \forall\, x \in S(x_0, \delta) \;\; f'(x) > 0 \text{ lub}$
$\exists\;\; \delta > 0\, \forall\, x \in S(x_0, \delta) \;\; f'(x) < 0 \Rightarrow f$ nie ma w punkcie x_0 ekstremum.

Tw. (I. warunek wystarczający istnienia ekstremum)

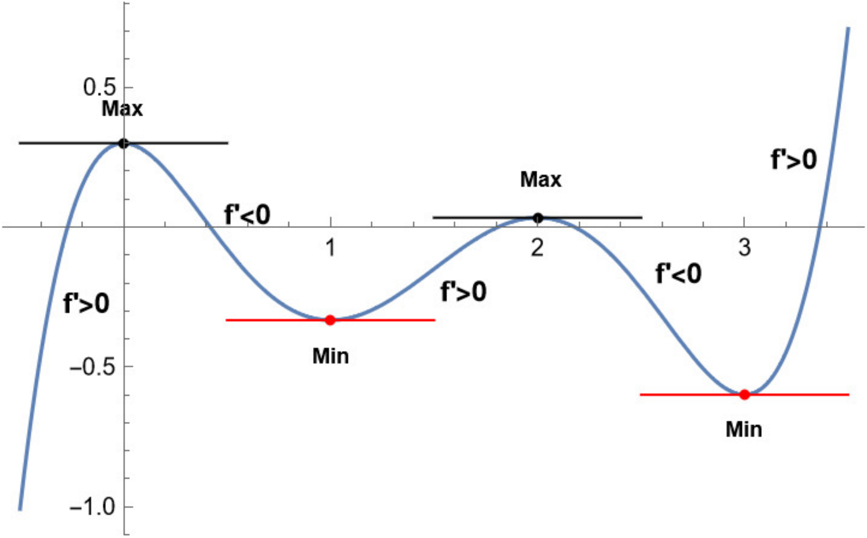
Jeśli f jest ciągła w punkcie x_0 i istnieje pochodna f' w pewnym sąsiedztwie $S(x_0, r)$, to jeśli:

(1) $\exists\, \delta > 0 \;\; f'(x) < 0$ dla $(x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $(x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow$ f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe,

(2) $\exists\, \delta > 0 \;\; f'(x) > 0$ dla $(x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $(x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow$ f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe,

(3) $\exists\;\; \delta > 0\, \forall\, x \in S(x_0, \delta) \;\; f'(x) > 0$ lub
$\exists\;\; \delta > 0\, \forall\, x \in S(x_0, \delta) \;\; f'(x) < 0 \Rightarrow f$ nie ma w punkcie x_0 ekstremum.

Dowód: Z Twierdzenia Lagrange'a wynika, że dla każdego $x \in S(x_0, r)$ istnieje c leżący między x_0 i x taki,że $f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$. Z tej uwagi otrzymujemy wszystkie punkty tezy. $\square$


0.5
Max
f'<0
1
Max
2
f'>0
3
f'>0
f'<0
f'>0
Min
−0.5
Min
−1.0

Przykład:

(1) $f(x) = \sin|x| = \begin{cases} \sin x, & x \geqslant 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$

ma w punkcie $x = 0$ ekstremum, bo funkcja jest ciągła w $x = 0$ i

Przykład:

(1) $f(x) = \sin|x| = \begin{cases} \sin x, & x \geqslant 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$
ma w punkcie $x = 0$ ekstremum, bo funkcja jest ciągła w $x = 0$ i
$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ -\cos x, & x < 0 \end{cases}$ zmienia znak w $x = 0$.

Przykład:

(1) $f(x) = \sin|x| = \begin{cases} \sin x, & x \geqslant 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$
ma w punkcie $x = 0$ ekstremum, bo funkcja jest ciągła w $x = 0$ i
$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ -\cos x, & x < 0 \end{cases}$ zmienia znak w $x = 0$.

(2) $f(x) = \sin x$ nie ma ekstremum w $x = 0$, bo funkcja ciągła i
$f'(x) = \cos x > 0 \; \forall\, x \in S(0, \frac{\pi}{4})$.

Przykład:

(1) $f(x) = \sin|x| = \begin{cases} \sin x, & x \geqslant 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$

ma w punkcie $x = 0$ ekstremum, bo funkcja jest ciągła w $x = 0$ i $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ -\cos x, & x < 0 \end{cases}$ zmienia znak w $x = 0$.

(2) $f(x) = \sin x$ nie ma ekstremum w $x = 0$, bo funkcja ciągła i $f'(x) = \cos x > 0 \ \forall\, x \in S(0, \frac{\pi}{4})$.

(3) $f(x) = x^2 + \sqrt{x^5}, \quad D_f = [0, +\infty)$

$f'(x) = 2x + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} > 0 \ x \in (0, +\infty)$ i $f'(0+) = 0$
$\forall\ x \in (0, +\infty)\ f(0) = 0 < f(x)$ czyli f ma minimum w $x = 0$.

(4) $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}, \quad D_f = [-1, 1]$

$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$ - minimum lokalne

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$ - maksimum lokalne

W punktach $x = -1$ i $x = 1$ funkcja f nie jest różniczkowalna, ale $f(-1) = 0 > x\sqrt{1-x^2}$ dla $x \in (-1, 0)$ oraz $f(1) = 0 < x\sqrt{1-x^2}$ dla $x \in (0, 1)$.
Stąd $f(-1) = 0$ to maksimum lokalne oraz $f(1) = 0$ to minimum lokalne.

Uwaga

Jeśli w pewnym (skończonym lub nieskończonym) przedziale funkcja $f(x)$ jest ciągła i ma tylko jedno ekstremum wewnątrz przedziału i jeśli jest to maksimum (minimum), to jest ono wartością największą (najmniejszą) tej funkcji w tym przedziale.

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale domkniętym

Z Twierdzenie Waierstrassa funkcja ciągła w pewnym przedziale $[a, b]$ musi osiągać w tym przedziale wartość największą i najmniejszą. Wartości te funkcja osiąga albo w punktach ekstremum wewnątrz przedziału, albo na końcach przedziału.

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale domkniętym

Z Twierdzenie Waierstrassa funkcja ciągła w pewnym przedziale $[a, b]$ musi osiągać w tym przedziale wartość największą i najmniejszą. Wartości te funkcja osiąga albo w punktach ekstremum wewnątrz przedziału, albo na końcach przedziału.

Z powyższych uwag wynika, że jeśli chcemy znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji ciągłej na $[a, b]$ i różniczkowalnej w (a, b), to:

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale domkniętym

Z Twierdzenie Waierstrassa funkcja ciągła w pewnym przedziale $[a, b]$ musi osiągać w tym przedziale wartość największą i najmniejszą. Wartości te funkcja osiąga albo w punktach ekstremum wewnątrz przedziału, albo na końcach przedziału.

Z powyższych uwag wynika, że jeśli chcemy znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji ciągłej na $[a, b]$ i różniczkowalnej w (a, b), to:

• znajdujemy punkty krytyczne (takie, w których pochodna zeruje się) i obliczamy wartości funkcji w tych punktach,

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale domkniętym

Z Twierdzenie Waierstrassa funkcja ciągła w pewnym przedziale $[a, b]$ musi osiągać w tym przedziale wartość największą i najmniejszą. Wartości te funkcja osiąga albo w punktach ekstremum wewnątrz przedziału, albo na końcach przedziału.

Z powyższych uwag wynika, że jeśli chcemy znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji ciągłej na $[a, b]$ i różniczkowalnej w (a, b), to:

• znajdujemy punkty krytyczne (takie, w których pochodna zeruje się) i obliczamy wartości funkcji w tych punktach,

• obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału, czyli $f(a)$ i $f(b)$,

Wartość najmniejsza i największa funkcji na przedziale domkniętym

Z Twierdzenie Waierstrassa funkcja ciągła w pewnym przedziale $[a, b]$ musi osiągać w tym przedziale wartość największą i najmniejszą. Wartości te funkcja osiąga albo w punktach ekstremum wewnątrz przedziału, albo na końcach przedziału.

Z powyższych uwag wynika, że jeśli chcemy znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji ciągłej na $[a, b]$ i różniczkowalnej w (a, b), to:

• znajdujemy punkty krytyczne (takie, w których pochodna zeruje się) i obliczamy wartości funkcji w tych punktach,

• obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału, czyli $f(a)$ i $f(b)$,

• porównujemy otrzymane wartości funkcji: największa z nich jest wartością największą $f(x)$ na $[a, b]$, a najmniejsza jest wartością najmniejszą $f(x)$ na $[a, b]$.

Przykład:

(1) Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ w $[0, \frac{5}{2}]$.

f - ciągła w $[0, \frac{5}{2}]$ i różniczkowalna w $(0, \frac{5}{2})$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \iff x_1 = -1 \notin (0, \frac{5}{2}),\ x_2 = 2 \in (0, \frac{5}{2}),$

Przykład:

(1) Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ w $[0, \frac{5}{2}]$.

f - ciągła w $[0, \frac{5}{2}]$ i różniczkowalna w $(0, \frac{5}{2})$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \iff x_1 = -1 \notin (0, \frac{5}{2}),\ x_2 = 2 \in (0, \frac{5}{2}),$

$f(2) = -19,\ f(0) = 1,\ f(\frac{5}{2}) = -16\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 5/2} f(x) = 1, \quad \min_{0 \leqslant x \leqslant 5/2} f(x) = -19$$

(2) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x\,, \quad x \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$

$$
\begin{aligned}
& f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2\cos\tfrac{3}{2}x \cos\tfrac{1}{2}x = 0 \\
& \iff \ \cos\tfrac{3}{2}x = 0 \ \vee \ \cos\tfrac{1}{2}x = 0 \\
& \iff \ \tfrac{3}{2}x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \ \vee \ \tfrac{1}{2}x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge \ k \in \mathbb{Z} \\
& \iff \ x = \tfrac{\pi}{3}(2k+1) \ \vee \ x = \pi(2k+1) \ \wedge \ k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ x \in \left(0, \tfrac{3}{2}\pi\right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow x_1 = \tfrac{\pi}{3} \ \vee \ x_2 = \pi
\end{aligned}
$$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,,\ f(\pi) = 0\,,\ f(0) = 0\,,\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2 \Rightarrow$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \min_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2} f(x) = -2$$

Tw. (wzór Taylora)

Jeśli funkcja f ma ciągłe pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie w przedziale domkniętym o końcach x_0 i x oraz ma pochodną rzędu n wewnątrz tego przedziału, to istnieje taki punkt c leżący między x_0 i x, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad f^{(0)} = f$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

Dowód: Niech $p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t - x_0)^k + r(t - x_0)^n$. Wtedy $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ dla $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Stałą r dobieramy w ten sposób, aby $p(x) = f(x)$. Niech $g(t) = f(t) - p(t)$. Wtedy $g(x_0) = 0 = g(x)$. Stąd z Tw. Rolle'a istnieje x_1 między x i x_0 taki, że $g'(x_1) = 0$, ale również $g'(x_0) = 0$. Stąd z Tw. Rolle'a istnieje x_2 między x_1 i x_0 taki, że $g''(x_2) = 0$, ale również $g''(x_0) = 0$. Powtarzając w ten sposób otrzymujemy, że istnieje x_n między x_{n-1} i x_0 taki, że $g^{(n)}(x_n) = 0$. Ale $g^{(n)}(x_n) = f^{(n)}(x_n) - n!r$ czyli $r = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}$. Niech $c = x_n$. Wtedy $f(x) = p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$. $\square$

Wzór Maclaurina

Jeśli $x_0 = 0$ i $0 < \Theta < 1$ to:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!} x^n =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!} x^n$$

Wzór Maclaurina

Jeśli $x_0 = 0$ i $0 < \Theta < 1$ to:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!} x^n =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!} x^n$$

Uwaga:

Twierdzenie Taylora dla $n = 1$ jest twierdzeniem Lagrange'a.

Wzór Maclaurina

Jeśli $x_0 = 0$ i $0 < \Theta < 1$ to:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!} x^n =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!}x^n$$

Uwaga:

Twierdzenie Taylora dla $n = 1$ jest twierdzeniem Lagrange'a.

Przykład:

Zapisać wzór Taylora dla funkcji $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$, $n = 3$.

$$f(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \tfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-1)^3$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2\,,\ \ f^{(k)}(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^k$$

$$2^x = 2 + 2\ln 2 \cdot (x-1) + (\ln 2)^2 \cdot (x-1)^2 + \tfrac{2^c \cdot (\ln 2)^3}{3!}(x-1)^3$$

$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2\,,\ f^{(k)}(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^k$

$2^x = 2 + 2\ln 2 \cdot (x-1) + (\ln 2)^2 \cdot (x-1)^2 + \frac{2^c \cdot (\ln 2)^3}{3!}(x-1)^3$

Uwaga

We wzorze Taylora (Maclaurina)

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = R_n, \quad \text{gdzie} \quad c = x_0 + \Theta(x-x_0)$$

nazywamy *resztą*, a

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

wielomianem Taylora.

Wzór Taylora pozwala przedstawić w sposób przybliżony (aproksymować) dowolną funkcję za pomocą wielomianu oraz szacować powstały przy tym błąd.

Przykłady:

(1) $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$

przybliżenie funkcji wielomianem Maclaurina:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Błąd przybliżenia:

$$R_n = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1$$

Przykłady:

(1) $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$

przybliżenie funkcji wielomianem Maclaurina:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Błąd przybliżenia:

$$R_n = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1$$

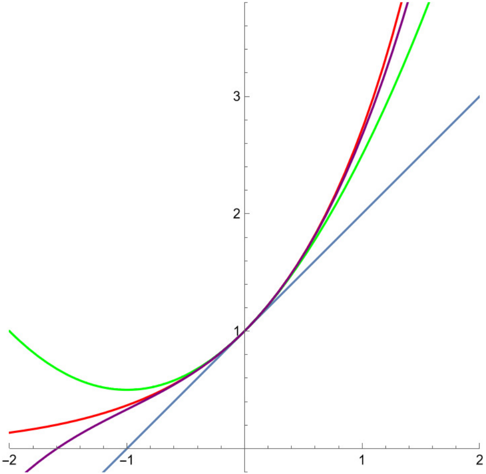
Wartość błędu zależy od n i od x, np.:

$$n = 3,\ x = 1: \quad R_3 = \frac{1}{4!} e^{\Theta} < \frac{1}{4!} e < \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}$$

$$n = 5,\ x = 1: \quad R_5 = \frac{1}{6!} e^{\Theta} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240}$$

Stąd wzory przybliżone:

$$e^x \approx 1 + x,\ e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2},\ e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$



(2) $f(x)=\sin x \Rightarrow f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f^{(k)}(0)=\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ , \quad f'(0)=1$
$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ , \quad f''(0)=0$
$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ , \quad f'''(0)=-1$
$\vdots$
$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\ , \quad f^{(k)}(0)=\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

przybliżenie funkcji wielomianem Maclaurina:

$$\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

Błąd przybliżenia:

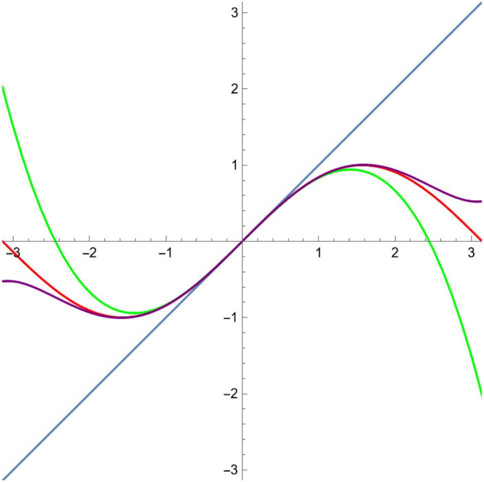
$$R_{2m} = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin\left[\Theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \Theta < 1$$

Stąd

$$|R_{2m}| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Wzory przybliżone:

$$\sin x \approx x,\ \sin x \approx x - \frac{x^3}{6},\ \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$



(3) $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\cdot\tfrac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\cdot\tfrac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = 0$$
$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\tfrac{\pi}{2}\right), \quad f^{(k)}(0) = \cos\left(k\tfrac{\pi}{2}\right)$$

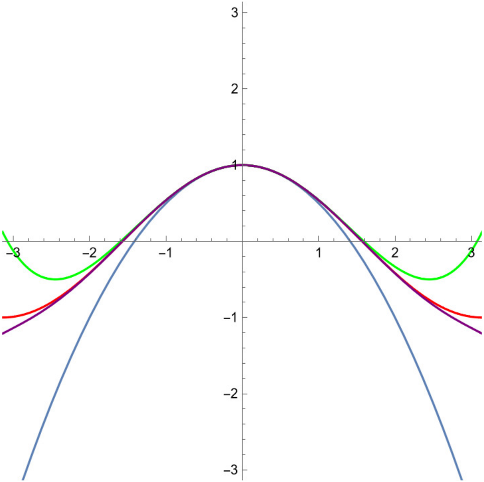
Stąd

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$|R_{2m+1}| \leqslant \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

Wzory przybliżone:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \ \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \ \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$



(4) $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1$$
$$f''(x) = -x^{-2}, \quad f''(1) = -1$$
$$f'''(x) = 2x^{-3}, \quad f'''(1) = 2!$$

$$f^{(4)} = -2 \cdot 3x^{-4}\,, \quad f^{(4)}(1) = -3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}\,, \quad f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

po podstawieniu $x := x - 1$:

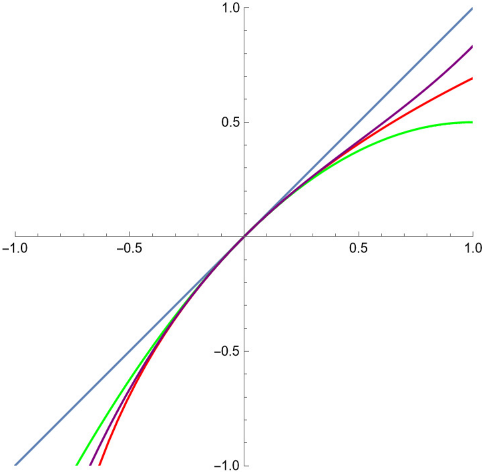
$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

Reszta:

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}\,, \quad 0 < \theta < 1\,, \quad R_n \to 0 \iff -1 < x \leqslant 1$$

Wzory przybliżone:

$$\ln(1+x) \approx x,\ \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2},\ \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$



(5) Obliczyć z dokładnością do 10^{-6} przybliżoną wartość $\cos 5^\circ$.

(5) Obliczyć z dokładnością do 10^{-6} przybliżoną wartość $\cos 5^\circ$.

$5^\circ = \frac{2\pi}{360} \cdot 5 = \frac{\pi}{36}$, wzór Maclaurina:

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2!36^2} + \frac{\pi^4}{4!36^4} - \ldots \pm \frac{\pi^{2n}}{(2n)!36^{2n}}$$

szacujemy reszty i $|R_5| \leqslant \frac{x^6}{6!} = \frac{\pi^6}{6!36^6} < 10^{-6}$, więc wystarczy wziąć trzy pierwsze wyrazy:

$$\cos 5^\circ \approx 1 - \frac{\pi^2}{2!36^2} + \frac{\pi^4}{4!36^4} \approx 0,996195$$

(6) Obliczyć z dokładnością do 10^{-6} przybliżoną wartość $\sin 49^\circ$.

Skorzystamy z wzoru Taylora:

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!}\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\sin\left(a+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + R_n$$

$$|R_n| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Im mniejsze jest $|x-a|$, tym mniej wyrazów trzeba uwzględnić, aby uzyskać żądaną dokładność:

$$x = 49^\circ\,,\ a = 45^\circ \Rightarrow x = \frac{49\pi}{180}\,,\ a = \frac{45\pi}{180} \Rightarrow x-a = \frac{\pi}{180}(49-45) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-a = \frac{\pi}{45}$$

$$\sin 49^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{\pi}{1!\cdot 45} - \frac{\pi^2}{2!\cdot 45^2} + \ldots \pm \frac{\pi^n}{n!\cdot 45^n}\right] + R_n$$

$$|R_n| \leqslant \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!\cdot 45^{n+1}}$$

Szacujemy reszty:

$$|R_3| \leqslant \frac{\pi^4}{4!\cdot 45^4} < 10^{-6}$$

Stąd:

$$\sin 49^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{\pi}{1!\cdot 45} - \frac{\pi^2}{2!\cdot 45^2} + \frac{\pi^3}{6\cdot 45^3}\right] \approx 0,754709$$

We wzorze Maclaurina trzeba uwzględnić znacznie więcej wyrazów.

Tw. (II. warunek wystarczający dla ekstremum)

Niech funkcja f ma w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ pochodne do rzędu n włącznie, $f^{(n)}$ niech będzie ciągła w x_0 i $f^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k = 1, \ldots, n-1$ oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Wtedy:

(1) jeśli n jest nieparzyste, to f nie ma ekstremum w x_0,

(2) jeśli n jest parzyste, to f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$ lub maksimum lokalne właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Tw. (II. warunek wystarczający dla ekstremum)

Niech funkcja f ma w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ pochodne do rzędu n włącznie, $f^{(n)}$ niech będzie ciągła w x_0 i $f^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k = 1, \dots, n-1$ oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Wtedy:

(1) jeśli n jest nieparzyste, to f nie ma ekstremum w x_0,

(2) jeśli n jest parzyste, to f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$ lub maksimum lokalne właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Dowód:

Wynika z tw. Taylora i z tw. o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej.

Jeśli $x \in S(x_0, r)$, to istnieje c leżące między x_0 i x takie, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

Jeśli x - bliskie x_0, to $f^{(n)}(c)$ ma taki sam znak jak $f^{(n)}(x_0)$.

Jeśli x - bliskie x_0, to $f^{(n)}(c)$ ma taki sam znak jak $f^{(n)}(x_0)$.

Przykłady:

(1) $f(x) = x^2(x-1)^2$

$$f'(x) = 2x(x-1)^2 + x^2 \cdot 2(x-1) = 2x(x-1)(2x-1) = 0 \iff$$
$$\iff x = 0 \lor x = 1 \lor x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$$

$f''(0) > 0 \Rightarrow f(0) = 0$ - minimum lokalne

$f''(1) > 0 \Rightarrow f(1) = 0$ - minimum lokalne

$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$ - maksimum lokalne

(2) $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad x = 0$

$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x, \quad f'(0) = 0$

$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, \quad f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad f^{(4)}(0) > 0 \Rightarrow f(0) = 4$ minimum lokalne właściwe.

Definicja (wypukłość, wklęsłośc, punkt przegięcia)

Niech funkcja f ma pochodną w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0. Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wypukła* w punkcie x_0, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in S(x_0, \delta) \qquad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Definicja (wypukłość, wklęsłośc, punkt przegięcia)

Niech funkcja f ma pochodną w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0. Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wypukła* w punkcie x_0, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in S(x_0, \delta) \qquad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wklęsła* w punkcie x_0, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in S(x_0, \delta) \qquad f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Definicja (wypukłość, wklęsłosc, punkt przegięcia)

Niech funkcja f ma pochodną w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0. Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wypukła* w punkcie x_0, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in S(x_0, \delta) \qquad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wklęsła* w punkcie x_0, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in S(x_0, \delta) \qquad f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Krzywa $y = f(x)$ jest wypukła (wklęsła) na przedziale otwartym, jeśli jest wypukła (wklęsła) w każdym jego punkcie.

Definicja (wypukłość, wklęsłośc, punkt przegięcia)

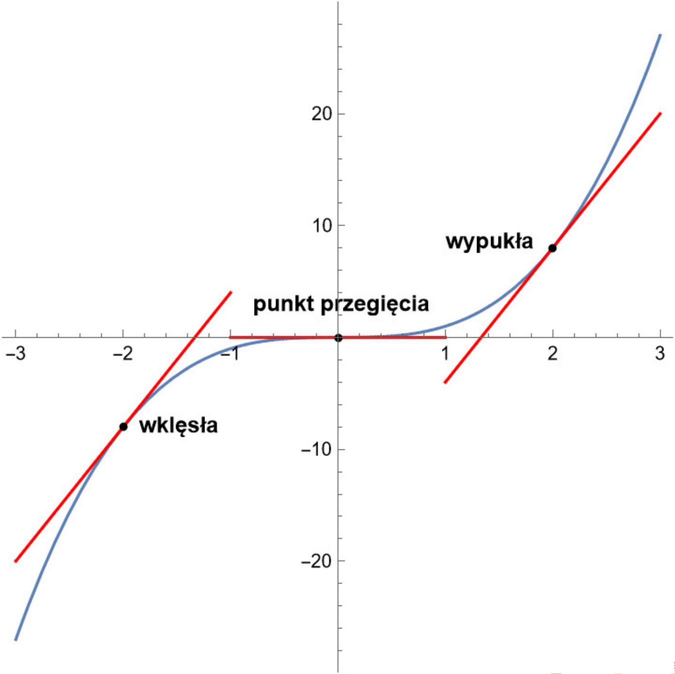
Niech funkcja f ma pochodną w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0. Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wypukła* w punkcie x_0, jeśli

$$\exists\,\delta > 0\ \ \forall\,x \in S(x_0, \delta) \qquad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

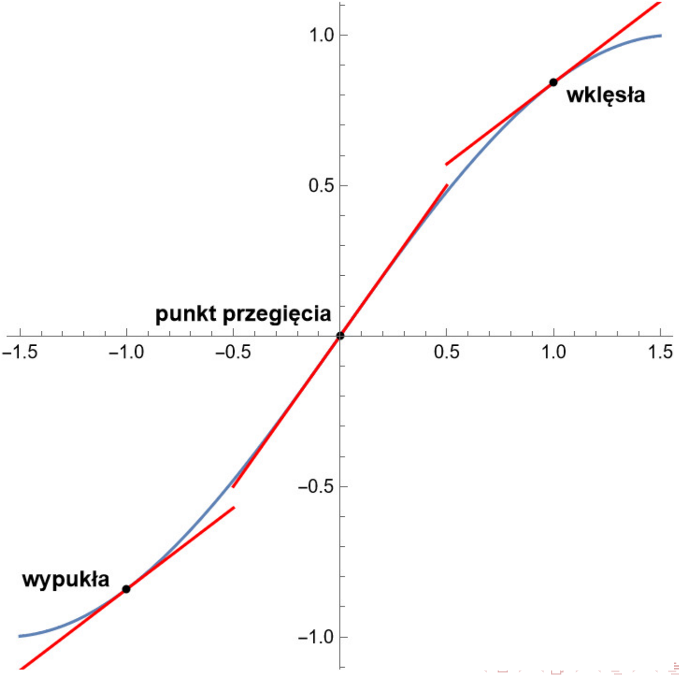
Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest *wklęsła* w punkcie x_0, jeśli

$$\exists\,\delta > 0\ \ \forall\,x \in S(x_0, \delta) \qquad f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Krzywa $y = f(x)$ jest wypukła (wklęsła) na przedziale otwartym, jeśli jest wypukła (wklęsła) w każdym jego punkcie.
Punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy *punktem przegięcia* krzywej $y = f(x)$, jeśli f jest ciągła w x_0 oraz krzywa jest wypukła w lewostronnym sąsiedztwie x_0 i wklęsła w prawostronnym sąsiedztwie x_0 lub na odwrót.



20
10
wypukła
punkt przegięcia
−3
−2
−1
1
2
3
wklęsła
−10
−20


1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5
wklęsła
punkt przegięcia
wypukła

Tw. (warunek wystarczający)

Niech funkcja f ma w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nieograniczonym) drugą pochodną. Wtedy jeśli:

(1) $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) > 0$, to $y = f(x)$ jest wypukła na (a, b),

Tw. (warunek wystarczający)

Niech funkcja f ma w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nieograniczonym) drugą pochodną. Wtedy jeśli:
(1) $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) > 0$, to $y = f(x)$ jest wypukła na (a, b),
(2) $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) < 0$, to $y = f(x)$ jest wklęsła na (a, b).

Tw. (warunek wystarczający)

Niech funkcja f ma w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nieograniczonym) drugą pochodną. Wtedy jeśli:
(1) $\forall\, x \in (a, b) \quad f''(x) > 0$, to $y = f(x)$ jest wypukła na (a, b),
(2) $\forall\, x \in (a, b) \quad f''(x) < 0$, to $y = f(x)$ jest wklęsła na (a, b).

Dowód: Z Tw. Taylora mamy
$\forall\, x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \quad \exists\, c \in (x_0, x) \,\vee\, c \in (x, x_0)$
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(c)(x - x_0)^2.$
Jeśli $f''(c) > 0$ to $f(x) =$
$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(c)(x - x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
czyli f jest wypukła w x_0.
Jeśli $f''(c) < 0$ to $f(x) =$
$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(c)(x - x_0)^2 < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
czyli f jest wklęsła w x_0.

(1) $f(x) = x^3$ jest wypukła w $(0, +\infty)$ i wklęsła w $(-\infty, 0)$, bo $f'(x) = 3x^2, \ f''(x) = 6x$ i $f''(x) > 0$ dla $x > 0, \ f''(x) < 0$ dla $x < 0$.
Stąd punkt $(0, 0)$ jest punktem przegięcia $f(x) = x^3$.

(2) $f(x) = 2^x$ jest wypukła na całym $\mathbb{R}$, bo
$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^2 > 0$

(3) $f(x) = \ln x$ jest wklęsła w $(0, +\infty)$, bo
$\forall\, x > 0 \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Tw. (warunek wystarczający dla punktu przegięcia)

Jeśli:

(1) f jest ciągła w punkcie x_0,

(2) f'' istnieje w pewnym sąsiedztwie $S(x_0, r)$ punktu x_0,

(3) $\exists\, \delta > 0$
$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \;\; f''(x) > 0 \;\wedge\; f''(x) < 0 \;\; \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$
lub na odwrót, to

$(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$.

Tw. (warunek wystarczający dla punktu przegięcia)

Jeśli:

(1) f jest ciągła w punkcie x_0,

(2) f'' istnieje w pewnym sąsiedztwie $S(x_0, r)$ punktu x_0,

(3) $\exists\, \delta > 0$
$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \;\; f''(x) > 0 \;\wedge\; f''(x) < 0 \;\; \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$
lub na odwrót, to

$(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$.

Przykłady:

(1) $f(x) = \sin x\,,\quad x_0 = 0$

$f'(x) = \cos x\,,\; f''(x) = -\sin x$

$f''(x) < 0 \text{ dla } x > 0 \;\wedge\; f''(x) > 0 \text{ dla } x < 0 \Rightarrow (0, 0)$ - punkt przegięcia

(2) $f(x) = |\ln x|, \quad x_0 = 1$

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & x \geqslant 1 \\ -\ln x, & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ -\frac{1}{x}, & x < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x > 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ dla } x > 1,$$

$f''(x) > 0 \text{ dla } x < 1 \Rightarrow (1, 0)$ - punkt przegięcia.

Tw. (warunek konieczny dla punktu przegięcia)

Jeśli f'' istnieje w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$, f'' jest ciągła w x_0 oraz $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$, to $f''(x_0) = 0$.

Tw. (warunek konieczny dla punktu przegięcia)

Jeśli f'' istnieje w pewnym otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$, f'' jest ciągła w x_0 oraz $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$, to $f''(x_0) = 0$.

Dowód:

Załóżmy, że $f''(x_0) \neq 0$. Ponieważ f'' jest ciągła w x_0, to z tw. o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej:

$\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in Q(x_0, \delta) \quad f''(x) > 0$ jeśli $f''(x_0) > 0$
lub

$\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in Q(x_0, \delta) \quad f''(x) < 0$ jeśli $f''(x_0) < 0$

więc $y = f(x)$ jest wypukła lub wklęsła w całym otoczeniu $Q(x_0, \delta)$ wbrew założeniu, że $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia.

Przykład:

Krzywa $y = \cosh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$ nie ma punktów przegięcia, bo

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad y'' = 2(e^{2x} + e^{-2x}) = 4\cosh 2x \neq 0$$

Badanie funkcji

Badanie funkcji

(1) Dziedzina

(2) Cechy szczególne

(3) Granice na końcach dziedziny

(4) Asymptoty

(5) Monotoniczność i ekstrema

(6) Wypukłość, wklęsłość, punkty przegięcia

(7) Wykres

Przykłady:

(1) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim_{x\to0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = [\frac{\infty}{\infty}] =$
$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = +\infty \Rightarrow x = 0$ - asymptota pionowa prawostronna.

$\lim_{x\to0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$

Przykłady:

(1) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = [\frac{\infty}{\infty}] =$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = +\infty \Rightarrow x = 0$ - asymptota pionowa prawostronna.

$\lim_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$k = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) =$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1 = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] \Rightarrow$
$y = x + 1$ - asymptota ukośna obustronna

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x},$$
$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\frac{x-1}{x},$$
$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$$
$$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$$
$$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$,
$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$
$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$
$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$,
$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$
$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$
$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$
$f'(x) < 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} < 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1)$.

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$,
$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$
$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$
$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$
$f'(x) < 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} < 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1)$.
Stąd f maleje w przedziale $(0, 1)$ i $f(1) = e$ jest minimum lokalnym.

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$,
$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$
$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$
$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$
$f'(x) < 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} < 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1)$.
Stąd f maleje w przedziale $(0, 1)$ i $f(1) = e$ jest minimum lokalnym.
$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$,

$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$

$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$

$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$

$f'(x) < 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} < 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1)$.

Stąd f maleje w przedziale $(0, 1)$ i $f(1) = e$ jest minimum lokalnym.

$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

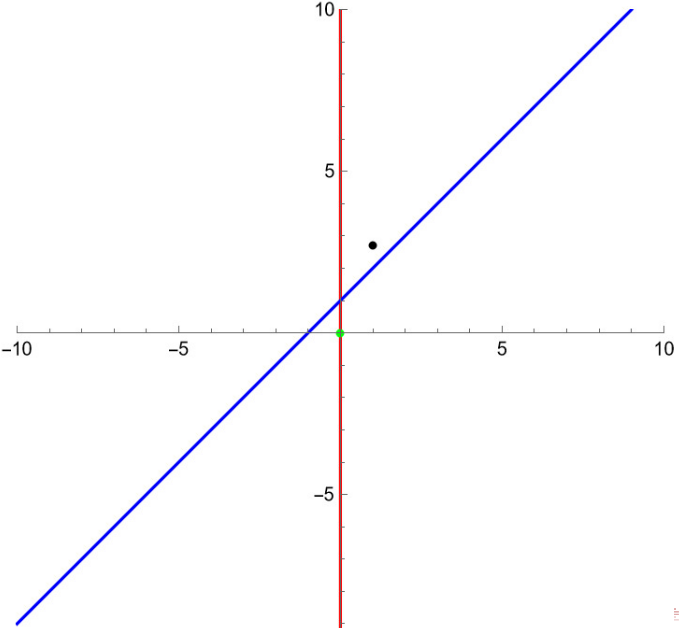
$f''(x) = 0 \iff \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$ nie ma rozwiązań.

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$,
$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = 0 \iff x = e$
$f'(x) > 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \iff x(x-1) > 0$
$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
Stąd f rośnie w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(1, +\infty)$
$f'(x) < 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} < 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1)$.
Stąd f maleje w przedziale $(0, 1)$ i $f(1) = e$ jest minimum lokalnym.
$f''(x) = (1 - \frac{1}{x}) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}}$
$f''(x) = 0 \iff \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$ nie ma rozwiązań.
$f''(x) > 0 \iff \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} > 0 \iff x > 0$
Stąd $f(x)$ wypukła dla $x \in (0, +\infty)$
$f''(x), 0 \iff \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} < 0 \iff x < 0$
Stąd $f(x)$ wklęsła dla $x \in (-\infty, 0)$

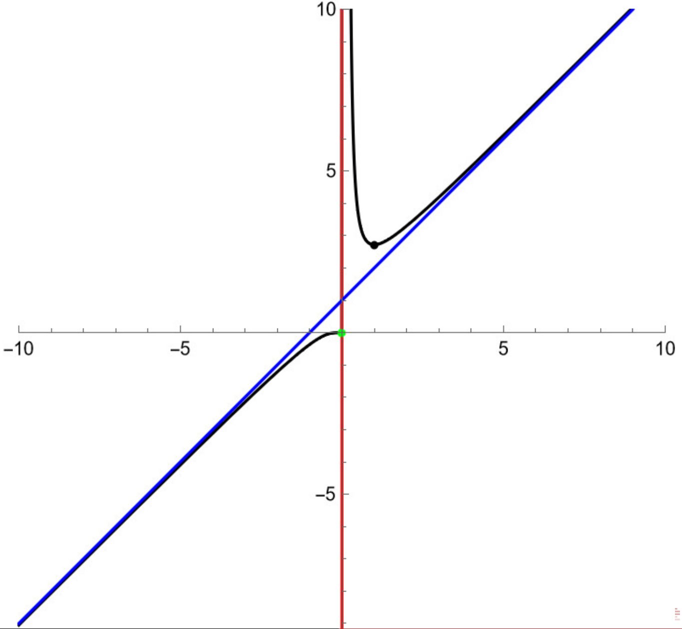
$$f(x) = x e^{\frac{1}{x}} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	X	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	X	$+$	e	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$	X	$+\infty \searrow$	e	$\nearrow +\infty$

Wykres $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ (asymptoty, granice, ekstrema)



Wykres $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$



(2) $f(x) = xe^x$, $\quad D = \mathbb{R}$ - brak asymptot pionowych
$f(0) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} =$
$= \lim_{x\to-\infty} -e^x = 0 \Rightarrow y = 0$ - asymptota pozioma lewostronna

Badamy istnienie asymptoty ukośnej prawostronnej $y = mx + k$

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ - brak asymptoty ukośnej prawostronnej.

Badamy monotoniczność i ekstrema funkcji

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$
$f'(x) = e^x(x+1) = 0 \iff x = -1$
$f'(x) = e^x(x+1) > 0 \iff x+1 > 0 \iff x \in (-1, +\infty)$
Stąd $f(x)$ rośnie w przedziale $(-1, +\infty)$.
$f'(x) = e^x(x+1) < 0 \iff x \in (-\infty, -1)$
Stąd $f(x)$ maleje w przedziale $(-\infty, -1)$.
Stąd $f(-1) = -e^{-1}$ jest minimum lokalnym.

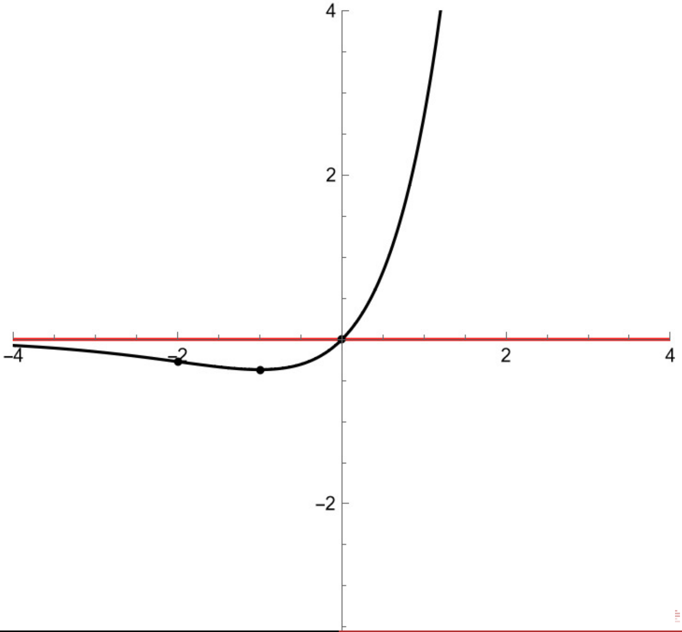
Badamy wypukłość, wklęsłość i punkty przegięcia

$f''(x) = 2e^x + xe^x = e^x(x+2)$
$f''(x) = 0 \iff x = -2,\ f(-2) = -2e^{-2},\quad f''(x) > 0 \iff x \in (-2, +\infty),\quad f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -2)$
Stąd $f(x)$ jest wypukła w $(-2, +\infty)$ i wklęsła w $(-\infty, -2)$, oraz $(-2, -2e^{-2})$ jest punktem przegięcia.
Wykres

Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty, -1)$ i rosnąca dla $x \in (-1, +\infty)$.

Wykres funkcji jest wklęsły dla $x \in (-\infty, -2)$ i wypukły dla $x \in (-2, +\infty)$.

Wykres $f(x) = xe^x$



(3) $f(x) = xe^{-|x|}$, $D = \mathbb{R}$ - brak asymptot pionowych

$f(-x) = -f(x)$ - funkcja nieparzysta $\Rightarrow$ badamy
$f\big|_{[0,+\infty)} = g \Rightarrow g(x) = xe^{-x}$ dla $x \geq 0$

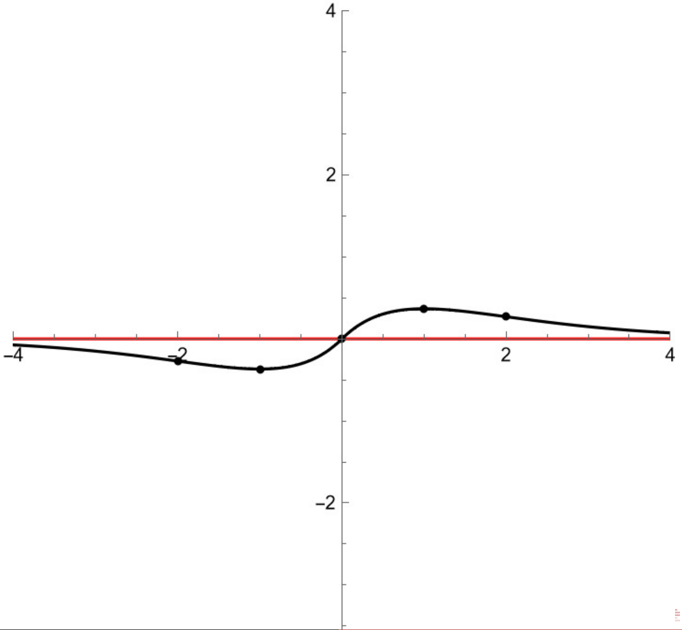
$\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ - asymptota pozioma prawostronna

$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$

$g'(x) > 0 \iff (1-x) > 0 \iff x < 1 \Rightarrow f(x)$ rośnie dla $x < 1$
i $g'(x) < 0 \iff x > 1 \Rightarrow f(x)$ maleje dla $x > 1$
$g(1) = e^{-1}$ to maksimum lokalne.
$g''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2) = 0 \iff x = 2$
$g''(x) < 0 \iff x < 2 \Rightarrow g(x)$ wklęsła dla $x < 2$ i
$g''(x) > 0 \iff x > 2 \Rightarrow g(x)$ wypukła dla $x > 2$ i
$(2, g(2)) = (2, 2e^{-2})$ to punkt przegięcia $g(x)$

Wykres $f(x) = xe^{-|x|}$



(4) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x \quad D=\mathbb{R}$ - brak asymptot pionowych

$f(-x)=f(x)$ - funkcja parzysta, $f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ - funkcja okresowa, bo:

$$f(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\tfrac{1}{2}\sin^2 2x=$$
$$=1-\tfrac{1}{4}(1-\cos 4x)$$
$$f\left(x+k\tfrac{\pi}{2}\right)=1-\tfrac{1}{4}\left[1-\cos 4\left(x+k\tfrac{\pi}{2}\right)\right]=$$
$$=1-\tfrac{1}{4}\left[1-\cos\left(4x+2k\pi\right)\right]=1-\tfrac{1}{4}\left[1-\cos 4x\right]=f(x)\Rightarrow T=\tfrac{\pi}{2}$$

Wystarczy badać funkcję na $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

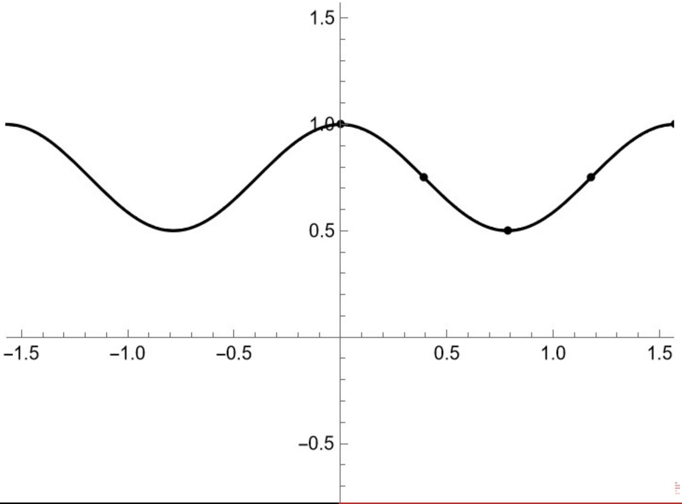
$f(0)=1\,,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$$f'(x)=4\sin^3\cos x-4\cos^3\sin x=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)=$$
$$=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x=0 \iff x=k\tfrac{\pi}{4}\ \wedge\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge$$
$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ - minimum lokalne

$f''(x) = -4\cos 4x = 0 \iff x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \ \wedge \ k \in \mathbb{Z} \ \wedge$
$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \ \vee \ x = \frac{3}{8}\pi$

$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3}{4}, \quad f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \frac{3}{4}$ - punkty przegięcia

Wykres



(5) $f(x) = \frac{\ln(e^2x^2)}{|x|}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow \ f\ \Big|_{(0,+\infty)} = g \Rightarrow g(x) = \frac{2+2\ln x}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{2+2\ln x}{x} = -\infty \Rightarrow x = 0$ - asymptota pionowa prawostronna

$\lim_{x\to +\infty} \frac{2+2\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ -asymptota pozioma prawostronna

$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}\cdot x - 2 - 2\ln x}{x^2} = -\frac{2\ln x}{x^2} > 0 \iff -2x^2\ln x > 0$

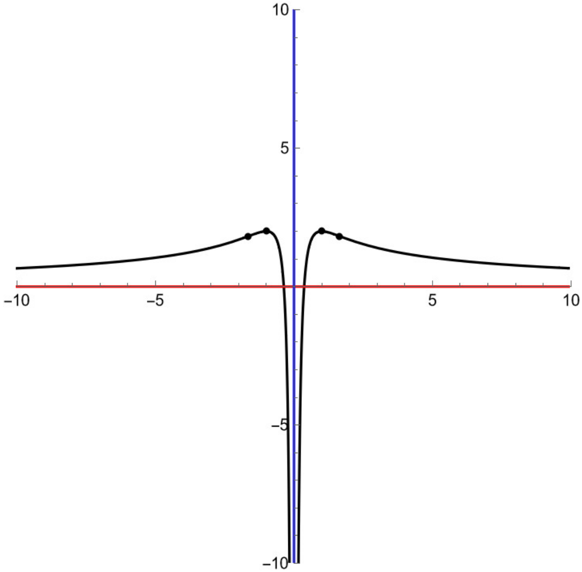
$f' > 0 \iff x < 1 \ \wedge \ f' < 0 \iff x > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(1) = 2$ - maksimum lokalne

$f''(x) = \frac{-2(1-2\ln x)}{x^3} > 0 \iff -2x^3(1-2\ln x) > 0$

$f'' < 0 \iff x < \sqrt{e} \ \wedge \ f'' > 0 \iff x > \sqrt{e} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\sqrt{e}) = \frac{3}{\sqrt{e}}$ - punkt przegięcia

Wykres

Wykres $f(x) = \frac{\ln(e^2x^2)}{|x|}$



(6) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $D = \mathbb{R}$, bo $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leqslant 1$
brak asymptot pionowych

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \quad f(x) \big|_{[0,+\infty)} = g(x)$

$f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 0$ - asymptota pozioma prawostronna

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\cdot|1-x^2|} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & x \in (0,1) \\ -\frac{2}{1+x^2}, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

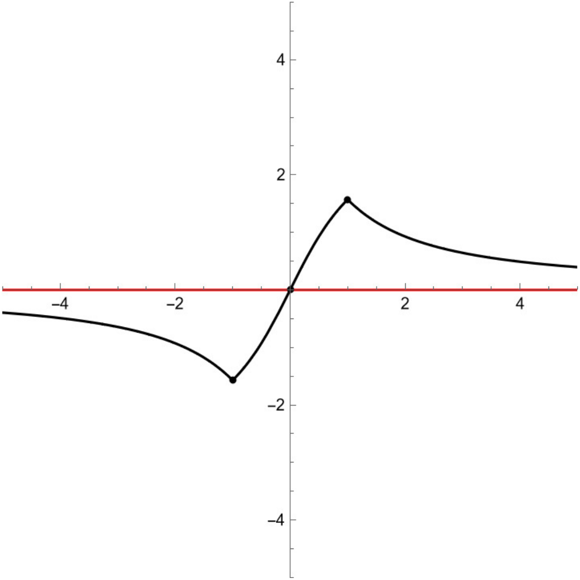
$f' > 0 \iff x < 1 \quad \wedge \quad f' < 0 \iff x > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(1) = \frac{\pi}{2}$ - maksimum lokalne

$f'(1)$ - nie istnieje, bo pochodne jednostronne są różne

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (0,1) \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (1,+\infty) \end{cases} \Rightarrow$$
$\Rightarrow f(1) = \frac{\pi}{2}$ - punkt przegięcia ($f''(1)$ nie istnieje)

Wykres

Wykres $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$



Funkcje hiperboliczne

Funkcje hiperboliczne

(7) $f(x) = \mathrm{sh}\, x = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\quad D = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty$, $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = +\infty$

Asymptoty ukośne $y = mx + k$

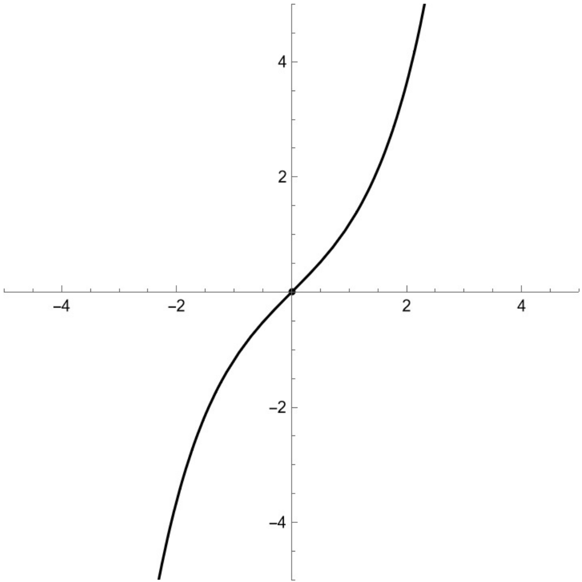
$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
brak asymptot ukośnych

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathrm{ch}\, x = \cosh x > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0 \iff x > 0 \quad \wedge$
$f''(x) < 0 \iff x < 0 \Rightarrow f(0) = 0$ - punkt przegięcia

Wykres

Wykres $f(x) = \sinh x$



(8) $f(x) = \mathrm{ch}\, x = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,, \quad D = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = +\infty$

Asymptoty ukośne $y = mx + k$

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{2} = -\infty$

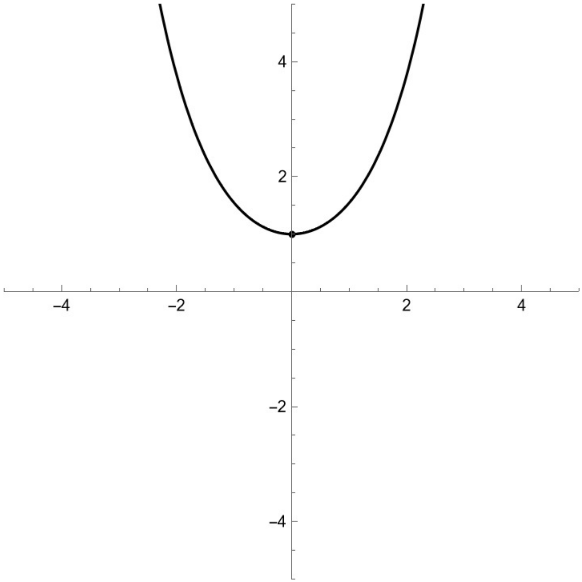
$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{2} = +\infty$
brak asymptot ukośnych

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x > 0 \iff x > 0 \quad \wedge$
$f'(x) < 0 \iff x < 0 \Rightarrow f(0) = 1$ - minimum lokalne

$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

Wykres

Wykres $f(x) = \cosh x$



(9) $f(x) = \operatorname{tgh} x = \operatorname{th} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
$D = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 1$ - asymptota pozioma prawostronna

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(-1+e^{2x})}{e^{-x}(1+e^{2x})} = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -1$ - asymptota pozioma lewostronna

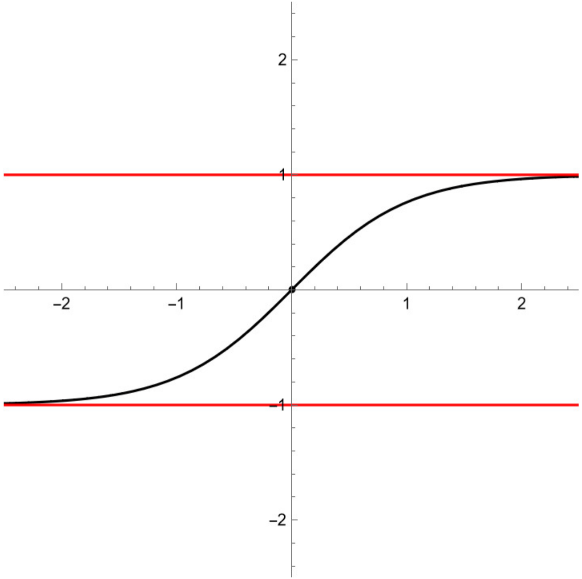
$f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = -\frac{2}{\cosh^3 x} \cdot \sinh x > 0 \iff -2\sinh x \cosh^3 x > 0$

$f'' > 0 \iff x < 0 \quad \wedge \quad f'' < 0 \iff x > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(0) = 0$ - punkt przegięcia

Wykres

Wykres $f(x) = \operatorname{tgh} x$



(10) $f(x) = \mathrm{ctgh}\, x = \mathrm{cth}\, x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cosh x}{\sinh x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{\cosh x}{\sinh x} = -\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ - asymptota pionowa obustronna

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = 1 \Rightarrow y = 1$ - asymptota pozioma prawostronna

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = -1 \Rightarrow y = -1$ - asymptota pozioma lewostronna

$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{1}{\sinh^2 x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f''(x) = \frac{2}{\sinh^3 x} \cdot \cosh x > 0 \iff 2 \sinh^3 x \cosh x > 0$

$f'' > 0 \iff x > 0 \quad \wedge \quad f'' < 0 \iff x < 0 \Rightarrow$ - brak punktu przegięcia, bo $0 \notin D$

Wykres

Wykres $f(x) = \operatorname{ctgh} x$