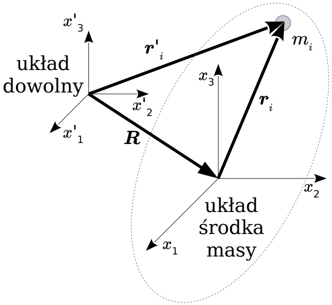
Bryła sztywna - moment pędu



W (nieinercjalnym) układzie środka masy

$$\vec{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] = \sum_{\mu=1}^{3} \omega_\mu \vec{i}_\mu$$

$$\vec{r_i} = [r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}] = \sum_{\mu=1}^{3} r_{i\mu} \vec{i}_\mu$$

Dla i-tego elementu masy:

$$\frac{\vec{L}_i}{m_i} = \vec{r_i} \times \vec{v_i} = \vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) \overset{bac-cab}{=} \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r_i}(\vec{r_i} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r_i} \sum_\nu r_{i\nu}\omega_\nu$$

Dla składowej μ ($\mu = 1, 2, 3$):

$$\frac{L_{i\mu}}{m_i} = \omega_\mu r_i^2 - \sum_\nu r_{i\nu}\omega_\nu r_{i\mu} = \sum_\nu \omega_\nu (r_i^2 \delta_{\mu\nu} - r_{i\mu} r_{i\nu})$$

Bryła sztywna - tensor momentu bezwładności

$$I_{\mu\nu} = \sum_i m_i (r_i^2 \delta_{\mu\nu} - r_{i\mu} r_{i\nu})$$

gdzie δ_{kl} to tzw. delta Kroneckera: $\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \mu = \nu \\ 0 & \text{jeśli } \mu \neq \nu \end{cases}$

Po zmianie oznaczeń r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} na x_i, y_i, z_i:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

Tensor jest symetryczny, tzn. elementy niediagonalne (tzw. momenty dewiacyjne) spełniają: $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$.

Moment pędu: $\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$

Układ osi głównych

Osie główne to 3 wzajemnie prostopadłe osie swobodne, czyli takie, wokół których możliwy jest swobodny obrót bryły (przy braku zewnętrznych momentów). Osie główne przechodzą przez środek masy bryły.

Kierunki osi głównych pokrywają się z wektorami własnymi tensora $\hat{I}$ (macież działając na wektor własny powoduje jedynie zmianę jego długości).

W układzie osi głównych bryły tensor momentu pędu ma postać diagonalną:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Elementy na przekątnej to tzw. **momenty główne**.

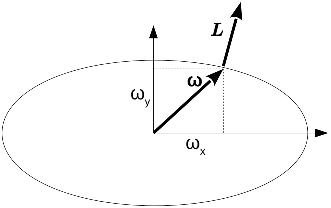
Moment pędu w układzie osi głównych:

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega} = [I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z]$$

Energia kinetyczna w układzie osi głównych

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

$$2E_k = \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \vec{\omega} \cdot \hat{I} \cdot \vec{\omega} = \sum_{\mu\nu} \omega_\mu I_{\mu\nu} \omega_\nu$$



Przy oznaczeniach osi x, y, z:

$$2E_k = \omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z$$

Przy braku sił zewnętrznych $E_k = const$, otrzymujemy elipsoidę bezwładności (w przestrzeni prędkości kątowych). Moment pędu $\vec{L}$ jest gradientem energii kinetycznej w przestrzeni ω, więc jest prostopadły do powierzchni elipsoidy bezwładności.

W ogólności więc wektory $\vec{\omega}$ i $\vec{L}$ **nie są do siebie równoległe**. Jest tak wyłącznie w przypadku, gdy $I_x = I_y = I_z$ (w układzie osi głównych), wtedy elipsoida bezwładności degeneruje się do kuli.

Równania ruchu

w układzie osi głównych

$$L = \hat{I} \cdot \vec{\omega} = \sum_\mu I_\mu \omega_\mu \vec{i}_\mu$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{I} \cdot \vec{\omega}) = \sum_\mu I_\mu (\dot{\omega}_\mu \vec{i}_\mu + \omega_\mu \dot{\vec{i}}_\mu)$$

Podstawiamy $\dot{\vec{i}}_x$ i analogicznie dla wszystkich $\mu = x, y, z$:

$$\dot{\vec{i}}_x = \vec{\omega} \times \vec{i}_x = (\omega_x \vec{i}_x + \omega_y \vec{i}_y + \omega_z \vec{i}_z) \times \vec{i}_x = \omega_z \vec{i}_y - \omega_y \vec{i}_z$$

Otrzymujemy równania Eulera:

$$\begin{cases} M_x = I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y \omega_z \\ M_y = I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_z \omega_x \\ M_z = I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_x \omega_y \end{cases}$$

Najbardziej stabilny obrót jest wokół osi, dla której moment jest największy. Obrót wokół osi z pośrednim momentem głównym jest niestabilny.

Precesja i nutacja

Nutacja - stabilne kołysanie się osi obrotu bryły sztywnej o symetrii osiowej (tzn. $I_x = I_y \neq I_z$) przy braku zewnętrznych momentów sił.

Przykład: nutacja Ziemi o okresie 427 dni.

Precesja - stopniowe obracanie się osi obrotu bryły sztywnej pod wpływem momentu sił.

Przykład: precesja Ziemi o okresie 26000 lat, precesja Larmora momentu magnetycznego atomu w zewnętrznym polu magnetycznym (magnetyczny rezonans jądrowy).