Metody Probabilistyczne i Statystyka

Z_3

1. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny z nośnikiem $\{-2,-1,1,3\}$ i funkcją prawdopodobieństwa
$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & , \quad x \in \{-2,-1\} \\ \frac{x}{a^2} & , \quad x \in \{1,3\} \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases},$$
gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć a oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.

2. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny o dystrybuancie
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \frac{1}{8} & , \quad 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{1}{2} & , \quad 2 \leqslant x < 3 \\ \frac{3}{4} & , \quad 3 \leqslant x < 4 \\ 1 & , \quad x \geqslant 4 \end{cases}.$$
Wyznaczyć nośnik oraz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Obliczyć $P(X^2 - X = 0)$ oraz $P\left(X^2 - 5X + 6 \leqslant 0\right)$.

3. Niech $\Omega = \{0,1,2,3\}$ i niech $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{4}$ dla każdej $\omega \in \Omega$. Dla zmiennych losowych $X(\omega) = \sin\left(\dfrac{\pi\omega}{2}\right)$ i $Y(\omega) = \cos\left(\dfrac{\pi\omega}{2}\right)$:
   (a) Wyznaczyć funkcje prawdopodobieństwa. Czy X i Y mają te same rozkłady?
   (b) Obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

4. Niech $\Omega = [-4;3]$ i niech P będzie prawdopodobieństwem geometrycznym. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $X(\omega) = \begin{cases} \omega + 3 & , \quad -4 \leqslant \omega \leqslant -1 \\ 2 & , \quad -1 < \omega \leqslant 0 \\ 2 - \omega & , \quad 0 < \omega \leqslant 2 \\ 0 & , \quad 2 < \omega \leqslant 3 \end{cases}$.

5. Wśród 10 monet dwie mają orły po obu stronach, reszta jest symetryczna. Losujemy jedną monetę i rzucamy nią. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę rzutów. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, jeśli:
   (a) Rzucamy do momentu wypadnięcia pierwszego orła.
   (b) Rzucamy do momentu wypadnięcia pierwszego orła, ale nie więcej niż trzy razy.
   (c) Rzucamy do momentu wypadnięcia drugiego orła.

6. Która z poniższych funkcji jest dystrybuantą jednowymiarowej zmiennej losowej?
   (a) **(1/2 pkt.)** $F(t) = \mathrm{arctg(t)}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$;
   (b) **(1/2 pkt.)** $F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1 - e^{-2t} & , \quad t \geqslant 0 \end{cases}$;
   (c) **(1/2 pkt.)** $F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases}$;

(d) **(1/2 pkt.)** $F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{4}\right) & , \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & , \quad t \geqslant 1 \end{cases}$.

7. Rzucamy prawidłową kostką sześcienną do momentu, w którym suma wyrzuconych oczek przekroczy 6. Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Wyznaczyć $F_X(1),\ F_X(2),\ F_X(7)$.