Zasady dynamiki

Isaak Newton (1686 r.)

I (**zasada bezwładności**) Istnieje taki układ odniesienia, w którym ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, jeśli nie działają na nie żadne siły zewnętrzne, lub działające siły się równoważą.

II (**równanie ruchu**) Przyspieszenie ciała jest proporcjonalne do przyłożonej siły.

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Dla ruchu obrotowego:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

III (**zasada akcji i reakcji**) Względem każdego działania (akcji) siły istnieje równe co do wartości i przeciwnie zwrócone przeciwdziałanie (reakcja) siły.

Układy inercjalne. Zasada bezwładności

Układ odniesienia, o którym mówi 1. zasada dynamiki, nazywa się układem inercjalnym. Istnieje nieskończenie wiele układów inercjalnych, poruszających się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Z wcześniejszych rozważań:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0 + \omega^2 \vec{r'} - 2(\vec{\omega} \times \vec{v'}) - \vec{\varepsilon} \times \vec{r'}$$

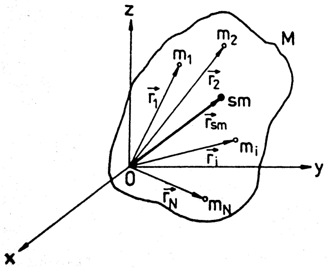
Dla układu inercjalnego: $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$, $a_0 = 0$.
Wniosek: $\vec{a'} = \vec{a} \Rightarrow \vec{F'} = \vec{F}$

Siła jest niezmiennicza względem transformacji Galileusza, tzn. jest jednakowa we wszystkich układach inercjalnych.

We wszystkich inercjalnych układach odniesienia, w tych samych warunkach, zjawiska mechaniczne przebiegają jednakowo.

Masa bezwładna

Masa bezwładna jest miarą bezwładności ciała, tzn. oporu, jaki ciało stawia sile, zmieniającej stan jego ruchu (w odróżnieniu do *masy grawitacyjnej* opisującej oddziaływania grawitacyjne między ciałami).



Dla dyskretnego rozkładu N punktowych mas m_i:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

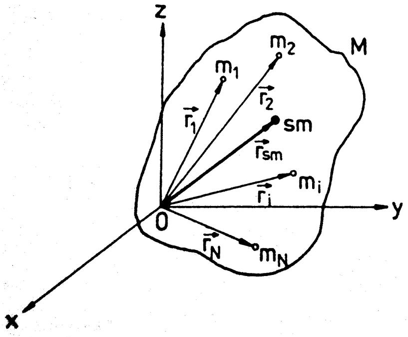
Dla rozkładu ciągłego o gęstości $\rho(\vec{r})$:

$$M = \int dm$$

$$dm = \rho(\vec{r})dV$$

$$M = \int_V \rho(\vec{r})dV$$

Środek masy



Środek masy dyskretnego układu N punktowych mas m_i:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Środek masy bryły sztywnej o ciągłej gęstości $\rho(\vec{r})$:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}dm = \frac{1}{M}\int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV$$

Pęd

Dla punktu materialnego:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Dla układu punktów materialnych

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

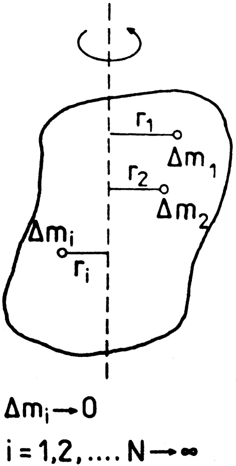
$$\vec{p} = M\vec{v}_{CM}$$

II zasada dynamiki dla ruchu postępowego

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},\ m = const \Rightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$\vec{F}$ jest wypadkową sił zewnętrznych. Wypadkowa sił zewnętrznych, działających między częściami składowymi układu, wynosi zero, gdyż znoszą się one na mocy III zasady dynamiki.

Moment bezwładności



Moment bezwładności I dla punktu materialnego leżącego w odległości r od osi obrotu:

$$I = mr^2$$

Moment bezwładności (rozkład dyskretny)

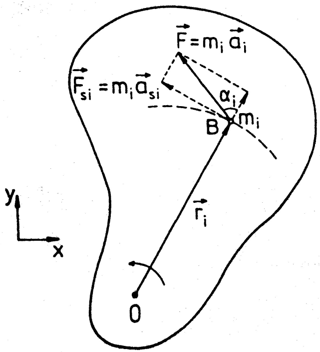
$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Moment bezwładności (rozkład ciągły)

$$I = \int_V r^2 dm$$

Masa bezwładna i moment bezwładności są wielkościami addytywnymi.

Moment siły



Dla punktu materialnego, leżącego w odległości $\vec{r}$ od nieruchomej osi obrotu, na który działa siła $\vec{F}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Dla bryły sztywnej

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F} = r_i m_i a_i \sin\alpha_i \vec{i}_z =$$

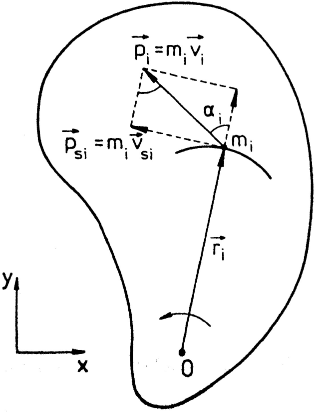
$$= m_i r_i^2 \frac{a_i \sin\alpha_i}{r_i} \vec{i}_z = I_i \varepsilon \vec{i}_z = I_i \vec{\varepsilon}$$

$$\vec{M} = \sum_i^N \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \sum_i^N I_i = I \vec{\varepsilon}$$

Moment pędu

Dla punktu materialnego o pędzie $\vec{p}$, leżącego w odległości $\vec{r}$ od nieruchomej osi obrotu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



Dla bryły sztywnej

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p} = r_i m_i v_i \sin\alpha_i \vec{i}_z =$$

$$= m_i r_i^2 \frac{v_i \sin\alpha_i}{r_i} \vec{i}_z = I_i \omega \vec{i}_z = I_i \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{L}_i = \vec{\omega} \sum_i^N I_i = I\vec{\omega}$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Zasady zachowania

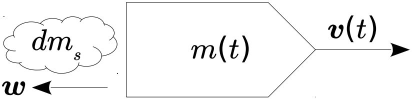
Zasada zachowania pędu

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const$$

Zasada zachowania momentu pędu

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

Przykład: ruch ciał o zmiennej masie



$\vec{v}(t)$ - prędkość rakiety
$m(t)$ - masa rakiety
$m_s(t)$ - masa spalonego paliwa (masa gazów wylotowych)

$\vec{w}$ - prędkość strumienia gazów wylotowych względem rakiety
$\mu = -\frac{dm}{dt} > 0$ - szybkość spalania paliwa
$\vec{F}$ - siły zewnętrzne
$d\vec{p}$ - zmiana pędu w czasie dt

$$\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$$

$$\vec{p}(t+dt) = (m(t)+dm)\left(\vec{v}(t)+d\vec{v}\right) + dm_s\left(\vec{v}(t)+\vec{w}\right)$$

$$dm_s = -dm$$

$$dm d\vec{v} \ll m(t)d\vec{v}$$

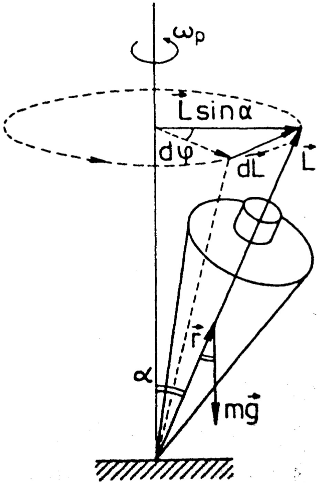
$$d\vec{p} = m(t)d\vec{v} + dm_s\vec{w} = m(t)d\vec{v} - dm\vec{w}$$

równanie Mieszczerskiego (1897 r.)

$$\vec{F} = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{w}\frac{dm}{dt}$$

Przykład: precesja bąka (ruch precesyjny)

Ruch wirowy osi symetrii obracającej się bryły sztywnej wokół kierunku pola grawitacyjnego



$\vec{L}$ - moment pędu bryły sztywnej w ruchu obrotowym wokół osi symetrii
I - moment bezwładności bryły sztywnej w ruchu obrotowym wokół osi symetrii
$\vec{\omega}$ - prędkość kątowa bryły sztywnej w ruchu obrotowym wokół osi symetrii
$\vec{\omega}_p$ - prędkość kątowa precesji
$\vec{r}$ - położenie środka masy

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = mgr\sin\alpha$$

$$dL = L\sin\alpha d\varphi \Rightarrow \frac{dL}{dt} = L\sin\alpha\frac{d\varphi}{dt}$$

$$L\sin\alpha\frac{d\varphi}{dt} = mgr\sin\alpha$$

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{I\omega}$$

Układy nieinercjalne

Układ odniesienia, w którym nie jest spełniona I zasada dynamiki, nazywa się układem nieinercjalnym (np. poruszający się z przyspieszeniem względem dowolnego układu inercjalnego).

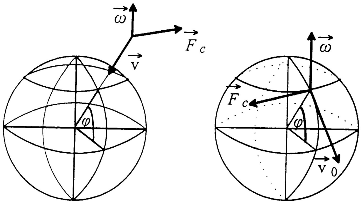
W układach nieinercjalnych nie jest również spełniona II zasada dynamiki, ponieważ występują w nich **siły pozorne**, których nie można przypisać oddziaływaniu określonych ciał.

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0 + \omega^2 \vec{r'} - 2(\vec{\omega} \times \vec{v'}) - \vec{\varepsilon} \times \vec{r'}$$

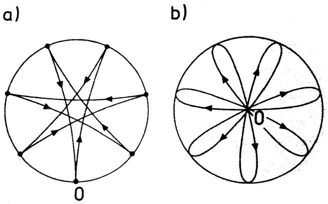
$$m\vec{a}' = m\vec{a} - \overbrace{m\vec{a}_0}^{\substack{\text{siła d'Alemberta} \\ \text{(bezwładności)}}} + \underbrace{m\omega^2 \vec{r'}}_{\text{siła odśrodkowa}} - \overbrace{2m(\vec{\omega} \times \vec{v'})}^{\text{siła Coriolisa}} - \underbrace{m(\vec{\varepsilon} \times \vec{r'})}_{\text{siła Eulera}}$$

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{bezw} + \vec{F}_{odsr} + \vec{F}_C + \vec{F}_E$$

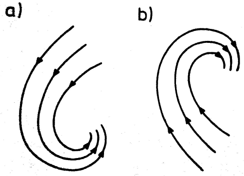
Przykład: siła Coriolisa



Wschodnie odchylenie ciał swobodnie spadających. Na półkuli północnej wschodnie odchylenie pocisków balistycznych poruszających się na północ, zachodnie odchylenie dla poruszających się na południe (i odwrotnie na półkuli południowej).

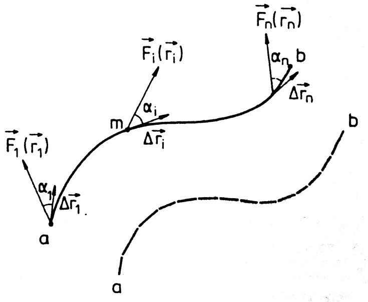


Rozety zakreślane przez ciężarek wahadła Faucaulta (dla różnych warunków początkowych ruchu wahadła).



Różne kierunki pasatów (wiatrów wiejących od zwrotnika ku równikowi): NE na półkuli północnej (a), SE na południowej (b).

Praca, siły zachowawcze, energia potencjalna



$$W_{ab} \approx \sum_{i=0}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=0}^{n} = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

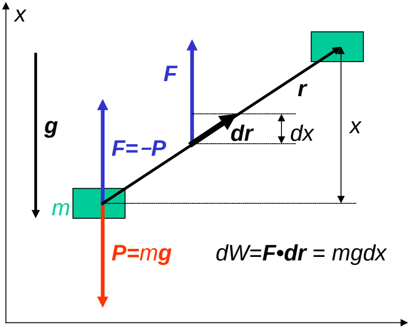
$$W_{ab} = \int_a^b dW = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Jeżeli praca wykonana przez siłę przy przemieszczaniu ciała po dowolnej drodze zamkniętej wynosi zero, taką siłę nazywamy **zachowawczą**. W polu siły zachowawczej praca nie zależy od drogi, tylko od punktu początkowego i końcowego.

Energia potencjalna: praca wykonana przeciwko sile zachowawczej i zmagazynowana w ciele.

dla przypadku jednowymiarowego: $F(x) = -\dfrac{dE_p}{dx}$

Przykład: energia potencjalna w jednorodnym polu sił ciężkości



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = mgdx$$

$$W = \int_0^x mgdx = mgx = E_p$$

Wartość pracy nie zależy od drogi, tylko od różnicy wysokości x.

Energia kinetyczna. Zasada zachowania energii

Praca wykonana przez siłę zachowawczą jest równa zmianie energii kinetycznej.

$$W = \int_a^b \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_a^b m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = m \int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} =$$

$$= m \int_{v_0}^{v} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \left. \frac{mv^2}{2} \right|_{v_0}^{v} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = E_k - E_{k0}$$

Całkowita energia mechaniczna

$$E = E_k + E_p$$

Zasada zachowania energii mechanicznej: w polu siły zachowawczej całkowita energia mechaniczna pozostaje stała.