Analiza, Wykład: Całki niewłaściwe

Wojciech Domitrz
(slajdy: Ewa Stróżyna, Wojciech Domitrz)

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Całki niewłaściwe I rodzaju (w przedziale nieskończonym)

Jeśli $f \in R[a, b]$, to f jest ograniczona na $[a, b]$ i przedział $[a, b]$ jest skończony.

Całki niewłaściwe I rodzaju (w przedziale nieskończonym)

Jeśli $f \in R[a, b]$, to f jest ograniczona na $[a, b]$ i przedział $[a, b]$ jest skończony.

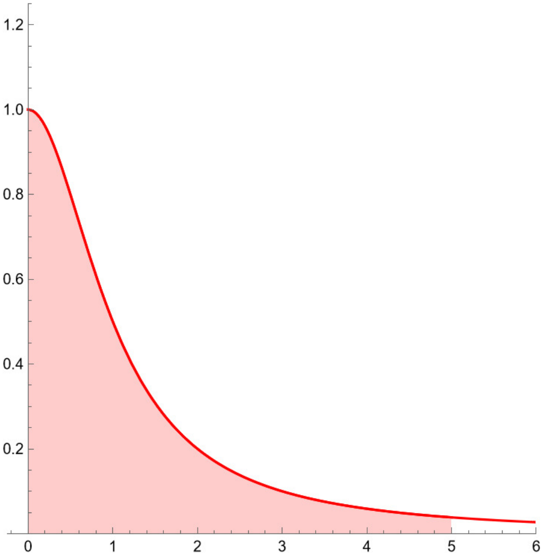
Definicja (Całka niewłaściwa I-go rodzaju)

Załóżmy, że funkcja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, T]$ dla każdego $T > a$.
Jeśli istnieje granica właściwa (skończona):

$$\lim_{T \to +\infty} \int_a^T f(x)\, dx$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, +\infty)$ i oznaczamy $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$. Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa jest zbieżna. Jeśli powyższa granica nie istnieje lub jest niewłaściwa (równa $\pm\infty$) to mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

Całki niewłaściwe I rodzaju



Całki niewłaściwe I rodzaju

Definicja

Dla funkcji $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ takiej, że $f \in R[S, a]$ dla każdego $S < a$, całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ to liczba

$$\lim_{S \to -\infty} \int_{S}^{a} f(x)\, dx,$$

o ile granica istnieje i jest skończona.

Całki niewłaściwe I rodzaju

Definicja

Dla funkcji $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ takiej, że $f \in R[S, a]$ dla każdego $S < a$, całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ to liczba

$$\lim_{S \to -\infty} \int_{S}^{a} f(x)\,dx,$$

o ile granica istnieje i jest skończona.

Dla funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takiej, że $f \in R[S, T]$ dla każdych $S < T$, całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ to liczba

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

o ile obie całki niewłaściwe są zbieżne ($c \in \mathbb{R}$).

Przykłady:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ jest zbieżna dla $\alpha > 1$ i rozbieżna dla $\alpha \leqslant 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{T\to+\infty} \int_1^T \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{T\to+\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^T =$$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(T^{1-\alpha}-1\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \end{cases} \qquad \alpha \neq 1$$

$$\alpha = 1: \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{T\to+\infty} \int_1^T \frac{dx}{x} = \lim_{T\to+\infty} \left. \ln|x| \right|_1^T =$$
$$\lim_{T\to+\infty} \ln T = +\infty$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} =$
$= \lim_{S\to-\infty} \int_S^0 \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \frac{dx}{x^2+1} =$
$= \lim_{S\to-\infty} \ \operatorname{arctg} x \ \Big|_S^0 + \lim_{T\to+\infty} \ \operatorname{arctg} x \ \Big|_0^T ==$
$\lim_{S\to-\infty}[\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} S] + \lim_{T\to+\infty}[\operatorname{arctg} T - \operatorname{arctg} 0] =$
$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-x}\, dx = \lim_{T\to+\infty} -e^{-x}|_0^T =$
$= \lim_{T\to+\infty}(1 - e^{-T}) = 1$

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx = \lim_{T\to+\infty} \int_1^T \frac{\ln x}{x^3}\, dx = (\star)$

$$\int_1^T \frac{\ln x}{x^3}\, dx = \left\| \begin{array}{cc} f = \ln x & g' = \frac{1}{x^3} \\ f' = \frac{1}{x} & g = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right\| = -\frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^T + \frac{1}{2}\int_1^T \frac{dx}{x^3} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\Big|_1^T = -\frac{\ln T}{2T^2} - \frac{1}{4T^2} + \frac{1}{4}$$

$$(\star) = \lim_{T\to+\infty} \left[\frac{1}{4} - \frac{\ln T}{2T^2} - \frac{1}{4T^2}\right] = \frac{1}{4}$$

bo korystając z Twierdzenia de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{\ln T}{2T^2} = \|\ H\ \| = \lim_{T\to+\infty} \frac{\frac{1}{T}}{4T} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{4T^2} = 0$$

Tw. (kryterium porównawcze)

Jeśli $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a, T]$, $\forall\, T > a$ oraz

$$\forall\, x \geqslant a \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \tag{1}$$

to ze zbieżności $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ wynika zbieżność $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych I rodzaju

Tw. (kryterium porównawcze)

Jeśli $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a, T]$, $\forall\, T > a$ oraz

$$\forall\, x \geqslant a \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \tag{1}$$

to ze zbieżności $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ wynika zbieżność $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Dowód (1): Niech $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ oraz $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ dla $x \geq a$. Wtedy z (1) wynika, że dla każdego $T \geq a$

$$0 \leq F(T) \leq G(T). \tag{2}$$

Jeżeli całka $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} G(T)$ jest zbieżna to z (2) otrzymujemy $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{T\to\infty} F(T) \leq \lim_{T\to\infty} G(T)$. $\square$

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych I rodzaju

Tw. (kryterium porównawcze)

Jeśli $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a, T]$, $\forall\, T > a$ oraz

$$\forall\, x \geqslant a \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \tag{1}$$

to ze zbieżności $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ wynika zbieżność $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Dowód (1): Niech $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ oraz $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ dla $x \geq a$. Wtedy z (1) wynika, że dla każdego $T \geq a$

$$0 \leq F(T) \leq G(T). \tag{2}$$

Jeżeli całka $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} G(T)$ jest zbieżna to z (2) otrzymujemy $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{T\to\infty} F(T) \leq \lim_{T\to\infty} G(T)$. $\square$

Wniosek

Przy założeniach poprzedniego twierdzenia jeżeli $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ jest rozbieżna to $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ jest rozbieżna.

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych I rodzaju

Tw. (kryterium ilorazowe)

Jeśli $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a, T]$, $\forall\, T > a$, $f, g > 0$ oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0$$

to całki $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ i $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych I rodzaju

Tw. (kryterium ilorazowe)

Jeśli $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a, T]$, $\forall\, T > a$, $f, g > 0$ oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0$$

to całki $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ i $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Uwaga:

Powyższe kryteria są również prawdziwe dla $f, g : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$, $f, g < 0$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$, wtedy

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0\,, \quad K \in \mathbb{R}$$

Przykłady:

(1) Pokazać, że $\int_1^{+\infty} \frac{(3-\sin 2x)\cdot x}{5(x+1)(x^2+1)}\, dx$ jest zbieżna

$\forall\, x \geqslant 1 \quad 0 \leqslant \frac{(3-\sin 2x)\cdot x}{5(x+1)(x^2+1)} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{3-\sin 2x}{5} \cdot \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+x^2} \leqslant$
$\leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ jest zbieżna $(\alpha > 1) \Rightarrow$ całka zbieżna (K.P.)

Przykłady:

(1) Pokazać, że $\int_1^{+\infty} \frac{(3-\sin 2x)\cdot x}{5(x+1)(x^2+1)}\, dx$ jest zbieżna

$\forall\, x \geqslant 1 \quad 0 \leqslant \frac{(3-\sin 2x)\cdot x}{5(x+1)(x^2+1)} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{3-\sin 2x}{5} \cdot \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+x^2} \leqslant$
$\leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ jest zbieżna $(\alpha > 1) \Rightarrow$ całka zbieżna (K.P.)

(2) Zbadać zbieżność całki $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x \cdot \operatorname{arctg}(x^2)\cdot[(x+1)\cdot\sqrt[3]{x}+2x+3]}{\ln(x+1)\cdot[x^2\cdot\sqrt{x}+2\sqrt{x}+3]}\, dx$

Ponieważ $\frac{x\cdot\sqrt[3]{x}}{x^2\cdot\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$ to przyjmujemy $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$, $f, g > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\, dx =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \cdot \operatorname{arctg}(x^2) \cdot \frac{[(x+1)\sqrt[3]{x}+2x+3]\cdot x^{\frac{7}{6}}}{x^2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \cdot \operatorname{arctg}(x^2) \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{13}{6}}+3x^{\frac{7}{6}}}{x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+3} = \frac{\pi}{2} \in (0,+\infty)$$

bo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \left\|\ H\ \right\| = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

i całka $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{7}{6}}}$ jest zbieżna $(\alpha > 1) \Rightarrow$ całka zbieżna (K.I.).

Definicja

Całkę zbieżną $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

Definicja

Całkę zbieżną $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

Uwaga:

Całka jest warunkowo zbieżna, gdy $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna i $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ jest rozbieżna.

Definicja

Całkę zbieżną $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

Uwaga:

Całka jest warunkowo zbieżna, gdy $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna i $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ jest rozbieżna.

Twierdzenie

Jeśli $f \in R[a, T]$ i całka $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna.

Przykład:

Zbadać zbieżność całki $\int_1^{+\infty} \mathrm{tgh}\, x \cdot \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2+x^2}\, dx$

$\forall\, x \geqslant 1 \quad 0 \leqslant |f(x)| = |\mathrm{tgh}\, x| \cdot |\cos 2x| \cdot \frac{\sqrt{x}}{2+x^2} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

i całka $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ jest zbieżna $(\alpha > 1) \Rightarrow$
całka bezwzględnie zbieżna (K.P.) $\Rightarrow$ całka zbieżna (Tw.)

Wartość główna całki niewłaściwej I rodzaju

Wartość główna całki niewłaściwej I rodzaju

Definicja

Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f \in R[a, b]$ dla dowolnego $[a, b] \subset \mathbb{R}$ oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} f(x)\, dx$$

to tę granicę nazywamy *wartością główną* całki $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ i oznaczamy $P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ lub $P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Definicja

Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f \in R[a, b]$ dla dowolnego $[a, b] \subset \mathbb{R}$ oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} f(x)\, dx$$

to tę granicę nazywamy *wartością główną* całki $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ i oznaczamy $P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ lub $P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Uwaga:

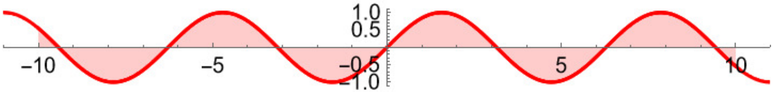
Jeśli całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ jest zbieżna, to istnieje jej wartość główna $P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$. Implikacja przeciwna nie zachodzi.

Przykłady:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx = \int_{-\infty}^{0} \sin x \, dx + \int_{0}^{+\infty} \sin x \, dx$ - rozbieżna, bo

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \sin x \, dx = \lim_{T\to+\infty} \ \left(-\cos x\right) \Big|_0^T = \lim_{T\to+\infty}(1-\cos T)$$ - nie istnieje

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \sin x \, dx = \lim_{T\to+\infty} \ \left(-\cos x\right) \Big|_{-T}^{T} = -\lim_{T\to+\infty}[\cos T - \cos(-T)] = 0$$



(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$ - całka rozbieżna, bo

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= \lim_{T\to+\infty} [\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x]\big|_0^T =$$
$$= \lim_{T\to+\infty} [[\ln(T^2+1) + \operatorname{arctg} T] = +\infty$$
$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx =$$
$$\lim_{T\to+\infty} [\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x]\big|_{-T}^{T} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$ - całka rozbieżna, bo

$\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_0^{T} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx =$
$= \lim_{T\to+\infty}[\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}\, x]|_0^T =$
$= \lim_{T\to+\infty}[[\ln(T^2+1) + \mathrm{arctg}\, T] = +\infty$
$P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx =$
$\lim_{T\to+\infty}[\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}\, x]|_{-T}^{T} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx$ - całka rozbieżna, bo

$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_0^{T} \cos x\,dx = \lim_{T\to+\infty} \sin x|_0^T =$
$= \lim_{T\to+\infty} \sin T$ - granica nie istnieje

$P\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \cos x\,dx = \lim_{T\to+\infty} \sin x|_{-T}^{T} =$
$\lim_{T\to+\infty}[\sin T - \sin(-T)] = \lim_{T\to+\infty} 2\sin T$ - wartość główna całki też nie istnieje

Całka niewłaściwa II-go rodzaju (funkcji nieograniczonej)

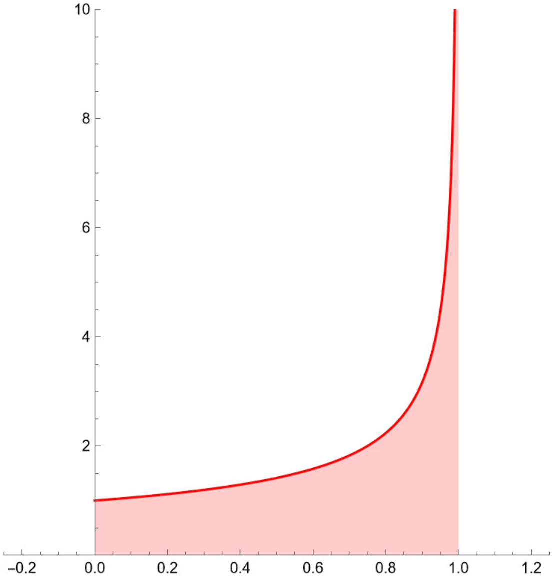
Definicja (całka niewłasciwa II rodzaju)

Jeśli $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ jest nieograniczona w lewostronnym sąsiedztwie punktu b $(b - \varepsilon, b)$ i $f \in R[a, c]$ dla każdego $a < c < b$ oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

to tę granicę nazywamy *całką niewłaściwą* funkcji f w przedziale $[a, b)$ i oznaczamy $\int_a^b f(x)\, dx$. Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa jest zbieżna. Jeśli powyższa granica nie istnieje lub jest niewłaściwa (równa $\pm\infty$) to mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

Całki niewłaściwe II rodzaju



Całka niewłaściwa II-go rodzaju (funkcji nieograniczonej)

Analogicznie definiujemy:

Definicja

Dla funkcji $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ nieograniczonej w prawostronnym sąsiedztwie a czyli w przedziale $(a, a + \varepsilon)$, takiej, że $f \in R[d, b]$ dla każdego $a < d < b$ całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\, dx$ to liczba

$$\lim_{d \to a^+} \int_d^b f(x)\, dx,$$

o ile granica istnieje i jest skończona.

Przykłady:

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ jest zbieżna dla $\alpha < 1$ i rozbieżna dla $\alpha \geqslant 1$.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c \to 0^+} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_c^1 =$

$= \lim_{c \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - c^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1 \end{cases} \qquad \alpha \neq 1$

$\alpha = 1: \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \to 0^+} \left. \ln|x| \right|_c^1 =$
$= \lim_{c \to 0^+} (-\ln c) = +\infty$

Przykłady:

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ jest zbieżna dla $\alpha < 1$ i rozbieżna dla $\alpha \geqslant 1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0^+} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_c^1 =$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - c^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1 \end{cases} \qquad \alpha \neq 1$$

$$\alpha = 1: \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0^+} \left. \ln|x| \right|_c^1 =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}(-\ln c) = +\infty$$

(2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} =$

$$= \lim_{a\to 0^-} \int_{-1}^a \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{a\to 0^-} \left. \left(-2\sqrt{-x}\right) \right|_{-1}^a + \lim_{b\to 0^+} \left. \left(2\sqrt{x}\right) \right|_b^1 = 4$$

(3) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$
$= \lim_{a\to -1^+} \int_{a}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{b\to 1^-} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$
$= \lim_{a\to -1^+} \arcsin x\Big|_a^0 + \lim_{b\to 1^-} \arcsin x\Big|_0^b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$

(3) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$
$= \lim_{a\to -1^+} \int_{a}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{b\to 1^-} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$
$= \lim_{a\to -1^+} \arcsin x|_a^0 + \lim_{b\to 1^-} \arcsin x|_0^b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$

(4) $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

$$\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \left\| \begin{array}{c} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\, dt \\ x = 0 \iff t = 0 \\ x = 2 \iff t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\| = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{\cos t}\, dt =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\sin t\, dt =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} u = \cos t \\ du = -\sin t\, dt \\ t = 0 \iff u = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \iff u = 0 \end{array} \right\| = -8\int_1^0 (1-u^2)\, du =$$

$$= 8\int_0^1 (1-u^2)\, du = 8 \left[u - \frac{u^3}{3}\right] \Big|_0^1 = \frac{16}{3}$$

Uwaga:

W tym przykładzie w wyniku zamiany zmiennej całkowania dana całka niewłaściwa została przekształcona w całkę właściwą, którą obliczamy bez stosowania przejścia granicznego.

Może się też zdarzyć sytuacja odwrotna: przy zamianie zmiennej całkowania całka właściwa może stać się całką niewłaściwą.

Uwaga:

W tym przykładzie w wyniku zamiany zmiennej całkowania dana całka niewłaściwa została przekształcona w całkę właściwą, którą obliczamy bez stosowania przejścia granicznego.

Może się też zdarzyć sytuacja odwrotna: przy zamianie zmiennej całkowania całka właściwa może stać się całką niewłaściwą.

Tw. (kryterium porównawcze)

Jeśli $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ są nieograniczone w lewostronnym sąsiedztwie punktu b i $f, g \in R[a, c]$, $\forall\, c < b$ oraz $\forall\, x \in [a, b) \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, to:

(1) $\int_a^b g(x)\, dx$ jest zbieżna $\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx$ jest zbieżna,

(2) $\int_a^b f(x)\, dx$ jest rozbieżna $\Rightarrow \int_a^b g(x)\, dx$ jest rozbieżna.

Tw. (kryterium ilorazowe)

Jeśli $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a, c]$, $\forall\, c < b$, $f, g > 0$ oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0$$

to całki $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Tw. (kryterium ilorazowe)

Jeśli $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a,c]$, $\forall\, c < b$, $f, g > 0$ oraz istnieje granica właściwa

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0$$

to całki $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Uwaga:

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$, $f, g < 0$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$, wtedy

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0\,, \quad K \in \mathbb{R}$$

Definicja

Całkę zbieżną $\int_a^b f(x)\,dx$ nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka $\int_a^b |f(x)|\,dx$.
W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

Definicja

Całkę zbieżną $\int_a^b f(x)\,dx$ nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka $\int_a^b |f(x)|\,dx$.
W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

Uwaga:

Całka jest warunkowo zbieżna, gdy $\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna i $\int_a^b |f(x)|\,dx$ jest rozbieżna.

Definicja

Całkę zbieżną $\int_a^b f(x)\,dx$ nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli zbieżna jest całka $\int_a^b |f(x)|\,dx$.
W przeciwnym przypadku całka jest *warunkowo zbieżna*.

Uwaga:

Całka jest warunkowo zbieżna, gdy $\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna i $\int_a^b |f(x)|\,dx$ jest rozbieżna.

Twierdzenie

Jeśli $f : [a, b) \to \mathbb{R}, \quad f \in R[a, c] \quad \forall\, c < b$ i całka $\int_a^b |f(x)|\,dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna.

Przykłady:

(1) Pokazać, że całka $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie.

$$\forall\, x \in (0,1] \quad 0 \leqslant \left| \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

i $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ jest zbieżna $(\alpha < 1) \Rightarrow$ całka bezwzględnie zbieżna (K.P.).

Przykłady:

(1) Pokazać, że całka $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie.

$\forall\, x \in (0,1] \quad 0 \leqslant \left| \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$

i $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ jest zbieżna $(\alpha < 1) \Rightarrow$ całka bezwzględnie zbieżna (K.P.).

(2) Zbadać zbieżność całki $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\operatorname{ctg} x)\,dx$

$f(x) = \ln(\operatorname{ctg} x)\,, \quad g(x) = \ln\frac{1}{x}\,, \quad f, g > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\ln \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{x}{\sin x} =$$
$$= 1 = K > 0$$

Stąd obie całki $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\operatorname{ctg} x)\, dx$ i $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln \frac{1}{x}\, dx$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln \frac{1}{x}\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln x\, dx = -\lim_{a\to 0^+} \int_a^{\frac{\pi}{6}} \ln x\, dx =$$
$$= -\lim_{a\to 0^+} \quad (x\ln x - x)\ \Big|_a^{\frac{\pi}{6}} =$$
$$= \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6} + a\ln a - a\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}$$

bo

$$\lim_{a\to 0^+} a\cdot\ln a = \lim_{a\to 0^+} \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} = \left\|\ H\ \right\| = \lim_{a\to 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} =$$
$$= \lim_{a\to 0^+}(-a) = 0$$

więc całka jest zbieżna.

(3) Pokazać, że całka $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$ jest zbieżna bezwzględnie.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} = \|\ H\ \| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} =$
$= 1 = K$

$f(x) = -\ln(\sin x)\,, \quad g(x) = -\ln x\,, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ i

$\int_0^{\frac{1}{2}} (-\ln x)\, dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{\frac{1}{2}} (-\ln x)\, dx =$
$= \lim_{a\to 0^+} \ \left[-x\ln x + x\right] \Big|_a^{\frac{1}{2}} = \lim_{a\to 0^+} \left(a\ln a - a - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$

Z kryterium ilorazowego zbieżna jest całka $\int_0^{\frac{1}{2}} (-\ln\sin x)\, dx$.

Wynika stąd zbieżność całek $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \sin x \, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$ oraz $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\ln(\sin x)] \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln(\sin x)| \, dx$, stąd otrzymujemy zbieżność bezwzględną.

Wartość główna całki niewłaściwej II rodzaju

Wartość główna całki niewłaściwej II rodzaju

Definicja

Jeśli funkcja $f : [a, c) \cup (c, b] \to \mathbb{R}$ jest R - całkowalna w przedziałach domkniętych $[a, c - \varepsilon]$ i $[c + \varepsilon, b]$ dla każdego (dowolnie małego) $\varepsilon > 0$ oraz istnieje granica właściwa (skończona)

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right] =$$

to granicą nazywamy *wartością główną* całki $\int_a^b f(x)\,dx$ i oznaczamy symbolem $P.V. \int_a^b f(x)\,dx$ lub $P \int_a^b f(x)\,dx$.

Uwaga:

Jeśli całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna, to istnieje jej wartość główna $P\ \int_a^b f(x)\,dx$ i jest równa całce niewłaściwej. Implikacja przeciwna nie zachodzi.

Przykład:

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$ - rozbieżna, bo $\alpha = 1$

$$P\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x}\right] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ \ln|x|\ \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ \ln|x|\ \Big|_{\varepsilon}^{1}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln|-\varepsilon| - \ln|\varepsilon|] = 0$$

Wartość główna całki niewłaściwej II rodzaju