Szeregi liczbowe

ANA2 - AiR

Ewa Stróżyna

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – ciąg liczb rzeczywistych.

Definiujemy nowy *ciąg sum częściowych* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$
\begin{gathered}
S_1 = a_1 \\
\vdots \\
S_n = a_1 + \ldots + a_n \\
\vdots
\end{gathered}
$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – ciąg liczb rzeczywistych.

Definiujemy nowy *ciąg sum częściowych* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$
\begin{gathered}
S_1 = a_1 \\
\vdots \\
S_n = a_1 + \ldots + a_n \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Definicja

Ciąg liczbowy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *szeregiem liczbowym* o wyrazie ogólnym a_n i oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Definicja

Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny*, jeśli istnieje granica właściwa

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

W przeciwnym przypadku szereg jest *rozbieżny*.
Liczbę S nazywamy *sumą szeregu* zbieżnego:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Definicja

Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny*, jeśli istnieje granica właściwa

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

W przeciwnym przypadku szereg jest *rozbieżny*.
Liczbę S nazywamy *sumą szeregu* zbieżnego:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Przykłady:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad a_n = q^{n-1}$ – ciąg geometryczny

$$S_n = \begin{cases} 1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n \cdot q & q = 1 \end{cases} \qquad (S_n) \text{ ma granicę } \iff |q| < 1.$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2 \Rightarrow (S_n)$ – rosnący i ograniczony $\Rightarrow$ zbieżny

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2 \Rightarrow (S_n)$ – rosnący i ograniczony $\Rightarrow$ zbieżny

Warunki konieczne zbieżności szeregów liczbowych

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2 \Rightarrow (S_n)$ – rosnący i ograniczony $\Rightarrow$ zbieżny

Warunki konieczne zbieżności szeregów liczbowych

Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Rightarrow$ istnieje $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$n \in \mathbb{N}: \quad S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \Rightarrow$
$S = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_n + a_{n+1}) =$
$= \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = S + \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$

Stąd:

Twierdzenie

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Twierdzenie

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ponadto:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$$

$$n \to \infty : \qquad S = \lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}(S_n + R_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} R_n = S + \lim_{n\to\infty} R_n$$

Twierdzenie

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ponadto:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$$

$$n \to \infty: \qquad S = \lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}(S_n + R_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} R_n = S + \lim_{n\to\infty} R_n$$

Stąd:

Twierdzenie

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$

Przykład:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – szereg harmoniczny

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ – warunek konieczny spełniony, ale:

$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n \neq 0 \Rightarrow$ szereg rozbieżny.

Przykład:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – szereg harmoniczny

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ – warunek konieczny spełniony, ale:

$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n \neq 0 \Rightarrow$ szereg rozbieżny.

Działania na szeregach zbieżnych

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = k \cdot A$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = k \cdot A$$

Warunki wystarczające zbieżności szeregów liczbowych

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = k \cdot A$$

Warunki wystarczające zbieżności szeregów liczbowych

Szeregi o wyrazach nieujemnych

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geqslant 0 \Rightarrow (S_n)$ – ciąg niemalejący.

Uwaga:

Ciąg (S_n) jest zbieżny $\iff$ ograniczony z góry.

Uwaga:

Ciąg (S_n) jest zbieżny $\iff$ ograniczony z góry.

Tw. (kryterium porównawcze)

Jeśli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla $n > n_0$, to:

(1) jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Uwaga:

Ciąg (S_n) jest zbieżny $\iff$ ograniczony z góry.

Tw. (kryterium porównawcze)

Jeśli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla $n > n_0$, to:

(1) jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Przykład:

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$, $\quad \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$, $\; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\sin \frac{1}{n} \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \geqslant 0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – rozbieżny $\Rightarrow$ szereg rozbieżny.

Tw. (kryterium całkowe)

Jeśli funkcja $f(x)$ jest nierosnąca i nieujemna w przedziale $[m, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$, to całka $\int_m^\infty f(x)\,dx$ i szereg $\sum_{n=m}^\infty f(n)$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Tw. (kryterium całkowe)

Jeśli funkcja $f(x)$ jest nierosnąca i nieujemna w przedziale $[m, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$, to całka $\int_m^\infty f(x)\,dx$ i szereg $\sum_{n=m}^\infty f(n)$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Przykład:

Zbadać zbieżność szeregu Dirichleta $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in [1, +\infty)$, $f > 0$, $f'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0 \Rightarrow$

malejąca $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ – zbieżna dla $\alpha > 1$, rozbieżna dla $\alpha \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha \leqslant 1$.

Tw. (kryterium d'Alemberta)

Jeśli $a_n > 0$ i istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to

(1) jeśli $0 \leqslant g < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $g > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Tw. (kryterium d'Alemberta)

Jeśli $a_n > 0$ i istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to

(1) jeśli $0 \leqslant g < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $g > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Tw. (kryterium Cauchy'ego)

Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$, to

(1) jeśli $0 \leqslant g < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $g > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Tw. (kryterium d'Alemberta)

Jeśli $a_n > 0$ i istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to

(1) jeśli $0 \leqslant g < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $g > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Tw. (kryterium Cauchy'ego)

Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$, to

(1) jeśli $0 \leqslant g < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) jeśli $g > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Uwaga:

W obu powyższych twierdzeniach, jeśli $g = 1$, to kryteria nie rozstrzygają zbieżności szeregu.

Przykłady:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}[\operatorname{arctg}(\cos\frac{1}{n})]^{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}[\operatorname{arctg}(\cos\frac{1}{n})]^2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 < 1 \Rightarrow$ szereg zbieżny.

Przykłady:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}[\operatorname{arctg}(\cos\frac{1}{n})]^{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}[\operatorname{arctg}(\cos\frac{1}{n})]^2=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2<1\Rightarrow$ szereg zbieżny.

(2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^{3(n+1)}(2n-5)!}{(2(n+1)-5)!7^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^3}{(2n-4)(2n-3)}=0<1\Rightarrow$ szereg zbieżny.

Szeregi o wyrazach dowolnych

Szeregi o wyrazach dowolnych

Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \;\; a_n > 0$ nazywamy *szeregiem naprzemiennym*.

Szeregi o wyrazach dowolnych

Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \;\; a_n > 0$ nazywamy *szeregiem naprzemiennym*.

Tw. (kryterium Leibniza)

Jeśli (a_n) jest ciągiem nierosnącym i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest zbieżny.

Szeregi o wyrazach dowolnych

Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \;\; a_n > 0$ nazywamy *szeregiem naprzemiennym*.

Tw. (kryterium Leibniza)

Jeśli (a_n) jest ciągiem nierosnącym i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest zbieżny.

Uwaga:

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = S \in \mathbb{R}$, to $|S - S_n| \leqslant a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Przykład:

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$, obliczyć przybliżoną wartość jego sumy z dokładnością do $0,01$.

Ciąg (a_n) jest malejący, bo $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, więc szereg jest zbieżny.

Szukamy n takiego, że $|a_n| \leqslant \frac{1}{100} \Rightarrow n^3 + 1 \geqslant 100$.

Zachodzi to dla $n = 5$, $(126 \geqslant 100)$, stąd:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{28} + \frac{1}{65} \approx -0,41$$

Definicja

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

W przeciwnym przypadku szereg jest *warunkowo zbieżny*.

Definicja

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

W przeciwnym przypadku szereg jest *warunkowo zbieżny*.

Twierdzenie

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Definicja

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

W przeciwnym przypadku szereg jest *warunkowo zbieżny*.

Twierdzenie

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Przykład:

Szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny warunkowo, bo jest zbieżny z kryterium Leibniza i szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny.