Metody Probabilistyczne i Statystyka - wykład 8

Niezależność zmiennych losowych
Dwuwymiarowy rozkład jednostajny
Dwuwymiarowy rozkład normalny

27 kwietnia 2025

Niezależność zmiennych losowych

Zmienne losowe są niezależne, jeśli zdarzenia opisywane przez te zmienne są niezależne.

Niezależność zmiennych losowych

Zmienne losowe są niezależne, jeśli zdarzenia opisywane przez te zmienne są niezależne.

Przypomnienie

Zdarzenia A i B są niezależne, jeśli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Niezależność zmiennych losowych

Definicja

Jednowymiarowe zmienne losowe X, Y *określone na przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *nazywamy* **niezależnymi**,

Niezależność zmiennych losowych

Definicja

Jednowymiarowe zmienne losowe X, Y *określone na przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *nazywamy* **niezależnymi**, *jeżeli dla wszystkich zbiorów* $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ *zachodzi równość*

Niezależność zmiennych losowych

Definicja

Jednowymiarowe zmienne losowe X, Y określone na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywamy **niezależnymi**, *jeżeli dla wszystkich zbiorów $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ zachodzi równość*

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1) \cdot P(Y \in B_2).$$

Niezależność zmiennych losowych

Definicja

Jednowymiarowe zmienne losowe X, Y określone na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywamy **niezależnymi**, *jeżeli dla wszystkich zbiorów $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ zachodzi równość*

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1) \cdot P(Y \in B_2).$$

Zmienne losowe, które nie są niezależne, nazywamy **zależnymi**.

Przykład 1.

Rzucamy 2 razy monetą. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi określonymi następująco:

Przykład 1.

Rzucamy 2 razy monetą. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi określonymi następująco:

$$X = \begin{cases} 1 & , \quad \text{gdy w 1. rzucie wypadnie orzeł} \\ 0 & , \quad \text{gdy w 1. rzucie wypadnie reszka} \end{cases},$$

Niezależność zmiennych losowych

Przykład 1.

Rzucamy 2 razy monetą. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi określonymi następująco:

$$X = \begin{cases} 1 & , \quad \text{gdy w 1. rzucie wypadnie orzeł} \\ 0 & , \quad \text{gdy w 1. rzucie wypadnie reszka} \end{cases} ,$$

$$Y = \begin{cases} 1 & , \quad \text{gdy w 2. rzucie wypadnie orzeł} \\ 0 & , \quad \text{gdy w 2. rzucie wypadnie reszka} \end{cases} .$$

Zbadać, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

Niezależność zmiennych losowych

Twierdzenie

Zmienne losowe X, Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$

Niezależność zmiennych losowych

Twierdzenie

Zmienne losowe X, Y *są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich* $x, y \in \mathbb{R}$

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Niezależność zmiennych losowych

Twierdzenie

Zmienne losowe X, Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Przykład 2.

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony dystrybuantą

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 1 \quad \vee \quad y < 0 \\ y & x \geqslant 1 \quad \wedge \quad 0 \leqslant y < 1 \\ 1 & x \geqslant 1 \quad \wedge \quad y \geqslant 1 \end{cases}.$$

Zbadać niezależność zmiennych losowych X i Y.

Niezależność zmiennych losowych o rozkładach dyskretnych

Twierdzenie

Zmienne losowe X i Y o rozkładach dyskretnych są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

Niezależność zmiennych losowych o rozkładach dyskretnych

Przykład 3.

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny. Zbadać niezależność zmiennych losowych X i Y, gdy funkcja prawdopodobieństwa jest postaci:

(a)

$X \setminus Y$	-1	0
0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$

(b)

$X \setminus Y$	-1	0
0	$1/3$	$1/3$
1	$1/6$	$1/6$

Niezależność zmiennych losowych o łącznym rozkładzie ciągłym

Twierdzenie

Zmienne losowe X i Y o łącznym rozkładzie ciągłym są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

Niezależność zmiennych losowych o łącznym rozkładzie ciągłym

Twierdzenie

Zmienne losowe X i Y o łącznym rozkładzie ciągłym są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

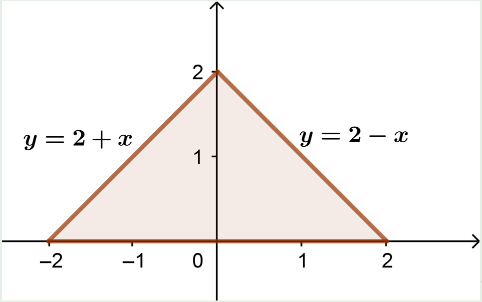
$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

prawie wszędzie.

Niezależność zmiennych losowych o łącznym rozkładzie ciągłym

Przykład 4.

Wektor losowy (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4} \cdot 1_D(x,y)$, gdzie D jest narysowanym trójkątem:



Zbadać niezależność zmiennych losowych X i Y.

Dwuwymiarowy rozkład jednostajny

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład jednostajny w obszarze* $D \subset \mathbb{R}^2$ *(ozn.* $(X, Y) \sim U(D)$*) takim, że*

Dwuwymiarowy rozkład jednostajny

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład jednostajny w obszarze* $D \subset \mathbb{R}^2$ *(ozn.* $(X, Y) \sim U(D)$*) takim, że* $|D| < \infty$,

Dwuwymiarowy rozkład jednostajny

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład jednostajny w obszarze* $D \subset \mathbb{R}^2$ *(ozn.* $(X, Y) \sim U(D)$*) takim, że* $|D| < \infty$, $|D| \neq 0$, *jeśli dla każdego punktu* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Dwuwymiarowy rozkład jednostajny

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład jednostajny w obszarze* $D \subset \mathbb{R}^2$ *(ozn.* $(X, Y) \sim U(D)$*) takim, że* $|D| < \infty$, $|D| \neq 0$, *jeśli dla każdego punktu* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad (x, y) \notin D \\ \frac{1}{|D|} & , \quad (x, y) \in D \end{cases} .$$

Dwuwymiarowy rozkład jednostajny

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład jednostajny w obszarze* $D \subset \mathbb{R}^2$ *(ozn.* $(X, Y) \sim U(D)$*) takim, że* $|D| < \infty$, $|D| \neq 0$, *jeśli dla każdego punktu* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad (x, y) \notin D \\ \frac{1}{|D|} & , \quad (x, y) \in D \end{cases}.$$

Twierdzenie

Jeśli (X, Y) *ma rozkład jednostajny w obszarze* D*, to dla dowolnego* $A \subset \mathbb{R}^2$

$$P((X, Y) \in A) = \frac{|A \cap D|}{|D|}.$$

Przykład 5.

Wektor (X, Y) ma rozkład jednostajny w zbiorze $D = [-1; 1] \times [0; 1]$. Wyznaczyć gęstości brzegowe i sprawdzić, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

Twierdzenie

Wektor (X, Y) *ma rozkład jednostajny w prostokącie* $[a; b] \times [c; d]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

Rozkład jednostajny

Twierdzenie

Wektor (X, Y) *ma rozkład jednostajny w prostokącie* $[a; b] \times [c; d]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne losowe* X *i* Y *są niezależne oraz*

Rozkład jednostajny

Twierdzenie

Wektor (X, Y) *ma rozkład jednostajny w prostokącie* $[a; b] \times [c; d]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne losowe* X *i* Y *są niezależne oraz* X *ma rozkład jednostajny w przedziale* $[a; b]$*,*

Rozkład jednostajny

Twierdzenie

Wektor (X, Y) *ma rozkład jednostajny w prostokącie* $[a; b] \times [c; d]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne losowe* X *i* Y *są niezależne oraz* X *ma rozkład jednostajny w przedziale* $[a; b]$, *natomiast* Y *ma rozkład jednostajny w przedziale* $[c; d]$.

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład normalny z parametrami* $m \in \mathbb{R}^2$ *i*

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład normalny z parametrami* $m \in \mathbb{R}^2$ *i* C, *gdzie pause* C *jest symetryczną macierzą kwadratową stopnia* 2,

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład normalny z parametrami* $m \in \mathbb{R}^2$ *i* C*, gdzie pause* C *jest symetryczną macierzą kwadratową stopnia 2, dodatnio określoną, jeśli dla każdego* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład normalny z parametrami* $m \in \mathbb{R}^2$ *i* C, *gdzie pause* C *jest symetryczną macierzą kwadratową stopnia* 2, *dodatnio określoną, jeśli dla każdego* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{detC}} \cdot$$

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład normalny z parametrami* $m \in \mathbb{R}^2$ *i* C*, gdzie pause* C *jest symetryczną macierzą kwadratową stopnia* 2*, dodatnio określoną, jeśli dla każdego* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{detC}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2detC} \cdot\right.$$

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład normalny z parametrami* $m \in \mathbb{R}^2$ *i* C*, gdzie pause* C *jest symetryczną macierzą kwadratową stopnia 2, dodatnio określoną, jeśli dla każdego* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{detC}} \cdot \exp\Bigg\{-\frac{1}{2detC} \cdot \Big[c_{22}(x - m_1)^2 -$$

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład normalny z parametrami* $m \in \mathbb{R}^2$ *i* C*, gdzie pause* C *jest symetryczną macierzą kwadratową stopnia 2, dodatnio określoną, jeśli dla każdego* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{detC}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2detC} \cdot \left[c_{22}(x - m_1)^2 - \right.\right.$$

$$2c_{12}(x - m_1)(y - m_2) +$$

Definicja

Zmienna losowa (X, Y) *ma rozkład normalny z parametrami* $m \in \mathbb{R}^2$ *i* C*, gdzie pause* C *jest symetryczną macierzą kwadratową stopnia 2, dodatnio określoną, jeśli dla każdego* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{detC}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2detC} \cdot \left[c_{22}(x-m_1)^2 - 2c_{12}(x-m_1)(y-m_2) + c_{11}(y-m_2)^2\right]\right\}.$$

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Znaczenie parametrów m i C:

Jeśli $(X, Y) \sim N\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}\right)$, to

Znaczenie parametrów m i C:

Jeśli $(X, Y) \sim N\left(\left(\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array}\right), \left[\begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{array}\right]\right)$, to

$$m_1 = EX,$$

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Znaczenie parametrów m i C:

Jeśli $(X, Y) \sim N\left(\left(\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array}\right), \left[\begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{array}\right]\right)$, to

$$m_1 = EX, \; m_2 = EY,$$

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Znaczenie parametrów m i C:

Jeśli $(X, Y) \sim N\left(\left(\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array}\right), \left[\begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{array}\right]\right)$, to

$$m_1 = EX, \; m_2 = EY, \; c_{11} = \sigma_1^2 = VX,$$

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Znaczenie parametrów m i C:

Jeśli $(X, Y) \sim N\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}\right)$, to

$$m_1 = EX, \; m_2 = EY, \; c_{11} = \sigma_1^2 = VX, \; c_{22} = \sigma_2^2 = VY$$

Znaczenie parametrów m i C:

Jeśli $(X, Y) \sim N\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}\right)$, to

$$m_1 = EX,\ m_2 = EY,\ c_{11} = \sigma_1^2 = VX,\ c_{22} = \sigma_2^2 = VY$$

$$c_{12} = c_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2,$$

gdzie

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Znaczenie parametrów m i C:

Jeśli $(X, Y) \sim N\left(\left(\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array}\right), \left[\begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{array}\right]\right)$, to

$$m_1 = EX,\ \ m_2 = EY,\ \ c_{11} = \sigma_1^2 = VX,\ \ c_{22} = \sigma_2^2 = VY$$

$$c_{12} = c_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2,$$

gdzie $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$.

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Znaczenie parametrów m i C:

Jeśli $(X, Y) \sim N\left(\left(\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array}\right), \left[\begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{array}\right]\right)$, to

$$m_1 = EX,\ m_2 = EY,\ c_{11} = \sigma_1^2 = VX,\ c_{22} = \sigma_2^2 = VY$$

$$c_{12} = c_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2,$$

gdzie $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$. Zatem, jeśli $(X, Y) \sim N(m, C)$, to

$$C = \left[\begin{array}{cc} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{array}\right].$$

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Twierdzenie

Jeżeli $(X, Y) \sim N\left(\left(\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array}\right), \left[\begin{array}{cc} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{array}\right]\right)$, *to*

Twierdzenie

Jeżeli $(X, Y) \sim N\left(\left(\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array}\right), \left[\begin{array}{cc} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{array}\right]\right)$, *to*

1. X *i* Y *sa niezależne w.tw., gdy* $\rho = 0$

Twierdzenie

Jeżeli $(X, Y) \sim N\left(\left(\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array}\right), \left[\begin{array}{cc} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{array}\right]\right)$, *to*

1. X *i* Y *sa niezależne w.tw., gdy* $\rho = 0$
2. $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ *i* $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$.

Przykład 6.

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o gęstości

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \cdot$$

$$\cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}(x-1)^2 - (x-1)(y+4) + \frac{1}{2}(y+4)^2\right]\right\}.$$

Wyznaczyć parametry m i C oraz gęstości brzegowe.