

Algebra liniowa
 Z_2

1. Rozwiązać równania:

(a) $z^6 = \frac{(-\sqrt{3}-j)^3}{(1-j)^6}$

(b) $z^6 = (2 + 4j)^6$

(c) $z^{11} = \bar{z}$

(d) $4z = (\bar{z})^3$

2. Które pierwiastki 12 stopnia z 1 są zarazem pierwiastkami 8 stopnia z 1?

3. Obliczyć iloczyn wszystkich pierwiastków zespolonych

(a) piątego stopnia;

(b) szóstego stopnia

z liczby $1 + 2j$. Ile wynosi suma tych pierwiastków w obu przypadkach?

4. Obliczyć iloczyn wszystkich zespolonych rozwiązań równania $(\bar{z}^3 + j)(z^5 - 32) = 0$. Ile spośród tych rozwiązań spełnia warunek $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z^2) \leq 0$?

5. Rozłożyć wielomian na czynniki nierozkładalne:

(a) $w(x) = x^8 - 256$ w $\mathbb{C}[x]$ i w $\mathbb{R}[x]$,

(b) $w(x) = x^4 + 6x^2 + 25$ w $\mathbb{C}[x]$ i w $\mathbb{R}[x]$.

6. Wiedząc, że liczba $-2 + j$ jest rozwiązaniem równania $x^4 + 2x^3 + 2x + 15 = 0$, wyznaczyć pozostałe rozwiązania tego równania, a następnie wielomian $w(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 15$ zapisać w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych w dziedzinie zespolonej.

7. Odpowiedzieć na pytania:

(a) Czy istnieje wielomian stopnia 4 o współczynnikach rzeczywistych nierozkładalny w $\mathbb{R}[x]$?

(b) Czy wielomian stopnia 7 o współczynnikach rzeczywistych w $\mathbb{C}[x]$ może mieć tylko pierwiastki zespolone nierzeczywiste?

(c) Czy istnieje wielomian stopnia 9 o współczynnikach rzeczywistych w $\mathbb{C}[x]$, który ma dokładnie 3 różne pierwiastki zespolone?