Wykład 6
Iloczyn macierzy

Mnożenie macierzy definiujemy tak, aby było zgodne z superpozycją przekształceń liniowych.

Definicja 1 ***Iloczynem macierzy*** *$B = [b_{ij}]_{p\times m}$ i $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy macierz*

$$C = B \cdot A = [c_{ij}]_{p\times n}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}.$$

Uwaga. Iloczyn $B \cdot A$ jest określony, gdy macierz B ma tyle kolumn, ile wierszy ma macierz A.
Uwaga. Elementy i-tego wiersza macierzy B mnożymy odpowiednio przez elementy j-tej kolumny macierzy A i dodajemy do siebie - dostajemy element c_{ij}.

Niech V, W, U - skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{K}$, niech $\phi : V \to W$, $\psi : W \to U$ - przekształcenia liniowe.

Wtedy $\psi \circ \phi : V \to U$ też jest przekształceniem liniowym i zachodzi:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\psi \circ \phi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi),$$

gdzie $\mathcal{A}$ - baza V, $\mathcal{B}$ - baza W, $\mathcal{C}$ - baza U.

Własności działań na macierzach

Zakładamy, że macierze A, B, C są takie, że działania są określone.

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
5. $\alpha \cdot (B + C) = \alpha \cdot B + \alpha \cdot C, \quad \alpha \in \mathbb{K}$
6. mnożenie macierzy **nie** jest przemienne tzn. istnieją macierze A i B takie, że $A \cdot B \neq B \cdot A$

Macierz jednostkowa stopnia n: $E_n = [e_{ij}]_{n\times n}$, $e_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$
E_n jest elementem neutralnym mnożenia macierzy (dla wszystkich macierzy, dla których to mnożenie jest określone).

Twierdzenie 1 *Niech $\phi : V \to W$ - przekształcenie liniowe, $\mathcal{A}$ - baza V, $\mathcal{B}$ - baza W. Niech $v \in V$, $w \in W$. Wtedy*

$$\phi(v) = w \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi) \cdot v_{\mathcal{A}} = w_{\mathcal{B}}$$

Oznaczenie. $v_{\mathcal{A}}$ - wektor v z V zapisany w bazie $\mathcal{A}$.

Macierz zmiany bazy

Niech $id : V \to V$ - przekształcenie (liniowe) identycznościowe,
$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ - bazy przestrzeni liniowej V. Wtedy macierz

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id)$$

nazywamy **macierzą przejścia od bazy** $\mathcal{A}$ **do bazy** $\mathcal{B}$ (lub macierzą zmiany bazy z $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$).

Czyli wektory z bazy $\mathcal{B}$ wyrażamy przez wektory z bazy $\mathcal{A}$.

Uwaga. $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id) \cdot v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{A}}$.

Uwaga.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id_V"] \arrow[rrr, bend left, "id_W \circ \phi \circ id_V"] & V \arrow[r, "\phi"] & W \arrow[r, "id_W"] & W \\
\mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2
\end{tikzcd}$$

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{A}_2}(\phi) = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(id_W) \cdot M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{A}_1}(\phi) \cdot M_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2}(id_V).$$