NORMY WEKTORÓW I MACIERZY

Aksjomaty normy: ($\mathbb{V}$ – przestrzeń liniowa, $\mathbb{K}$ - ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$):

1. $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0, \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{V}$,
2. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\, \|\mathbf{x}\|, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{V}$,
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$.

Normy Höldera wektorów ($\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$):

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

Szczególne znaczenie mają normy:

$\|\mathbf{x}\|_1 \quad = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad - \text{ norma pierwsza}$

$\|\mathbf{x}\|_2 \quad = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad - \text{norma euklidesowa}$

$\|\mathbf{x}\|_\infty \quad = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \quad - \text{norma nieskończoność (maksimum)}$

Normy te są równoważne, tzn.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \left\|\mathbf{x}\right\|_a \leqslant \left\|\mathbf{x}\right\|_b \leqslant \beta \left\|\mathbf{x}\right\|_a .$$

Np.

$$\left\|\mathbf{x}\right\|_\infty \leqslant \left\|\mathbf{x}\right\|_1 \leqslant n \left\|\mathbf{x}\right\|_\infty$$

$$\left\|\mathbf{x}\right\|_\infty \leqslant \left\|\mathbf{x}\right\|_2 \leqslant \sqrt{n} \left\|\mathbf{x}\right\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left\|\mathbf{x}\right\|_1 \leqslant \left\|\mathbf{x}\right\|_2 \leqslant \left\|\mathbf{x}\right\|_1$$

Normy macierzy

Macierze – operatory liniowe. Zbiór macierzy $\mathbf{A}$ o wymiarach $m \times n$,

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \to \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m,$$

tworzy przestrzeń liniową $\mathbb{V} = \mathbb{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$. Aksjomaty normy dla $\mathbb{V}$:

1. $\|\mathbf{A}\| \geqslant 0, \quad \|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$,
2. $\|\alpha \mathbf{A}\| \leqslant |\alpha| \, \|\mathbf{A}\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A} \in \mathbb{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right),$
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \ \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right).$

NORMY WEKTORÓW I MACIERZY 3

Normę macierzy nazywamy **indukowaną** przez normę wektora, jeśli

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad (\text{lub:} \quad \|\mathbf{A}\| = \max_{\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|=1\}} \|\mathbf{Ax}\| \ )$$

Dla norm indukowanych:

$$\|\mathbf{AB}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| \, , \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right),$$

gdyż

$$\begin{aligned} \|\mathbf{AB}\| \quad &= \quad \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{ABx}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \left(\frac{\|\mathbf{ABx}\|}{\|\mathbf{Bx}\|} \frac{\|\mathbf{Bx}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right) \\ &\leqslant \max_{\mathbf{y}\neq 0} \frac{\|\mathbf{Ay}\|}{\|\mathbf{y}\|} \cdot \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{Bx}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| \end{aligned}$$

Normy indukowane są **normami zgodnymi**, tzn.

$$\|\mathbf{Ax}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{x}\| \, , \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$$

NORMY WEKTORÓW I MACIERZY 4

Najważniejsze normy indukowane macierzy:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_1 &= \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \quad \text{– norma pierwsza} \\
\|\mathbf{A}\|_2 &= \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} \sqrt{\lambda} \quad \text{– norma spektralna (druga)} \\
\|\mathbf{A}\|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{– norma nieskończoność}
\end{aligned}$$

Np. dla normy nieskończoność:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{Ax}\|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \\
&= \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} \left(|a_{ij}| \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j| \right) \\
&= \left(\max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j| = \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{x}\|_\infty
\end{aligned}$$

Norma euklidesowa macierzy (norma Frobeniusa):

$$\|\mathbf{A}\|_E \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

nie jest indukowana przez żadną normę,

gdyż $\|\mathbf{I}\|_E = \sqrt{n}$, a dla wszystkich norm indukowanych: $\|\mathbf{I}\| = 1$,

– ale jest zgodna z wektorową normą euklidesową:

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leqslant \|\mathbf{A}\|_E \leqslant \sqrt{\min(m,n)} \cdot \|\mathbf{A}\|_2 \,,$$

skąd m.in. wynika:

$$\|\mathbf{Ax}\|_2 \leqslant \|\mathbf{A}\|_E \, \|\mathbf{x}\|_2$$

Promień spektralny (*spectral radius*) macierzy $\mathbf{A}$:

$$\mathrm{sr}\,(\mathbf{A}) \triangleq \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(\mathbf{A})} |\lambda|$$

Dla dowolnej (zgodnej) normy macierzy $\mathbf{A}$ mamy:

$$\mathrm{sr}\,(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\|$$

gdyż

$$\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{v}\| \geqslant \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{v}\|\,,$$

czyli dla każdej pary $(\lambda, \mathbf{v})$:

$$\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{v}\| \geqslant |\lambda|\,\|\mathbf{v}\|\,,$$

skąd wynika

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathbf{A}) \quad |\lambda| \leqslant \|\mathbf{A}\|$$

czyli

$$|\lambda|_{max} = \mathrm{sr}\,(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\|$$

UKŁAD ALGEBRAICZNYCH RÓWNAŃ LINIOWYCH

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{A} \neq 0$$

Metody rozwiązywania układów równań liniowych można podzielić na dwie podstawowe grupy:

1. **Metody skończone** – wynik otrzymujemy po skończonej, określonej liczbie przekształceń zależnej od wymiarowości zadania.
2. **Metody iteracyjne** – startując z przybliżenia początkowego (znanego, założonego) w kolejnych iteracjach poprawiamy przybliżenie rozwiązania. Nie znana jest liczba iteracji (potrzebna do osiągnięcia założonej dokładności).

UWARUNKOWANIE UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH

a) **Przypadek zaburzenia wektora** $\mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A}\left(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\right) &= \left(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}\right) \\ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{x} &= \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \\ \delta\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\cdot\delta\mathbf{b} \end{aligned}$$

Dla dowolnych norm zgodnych: $\|\delta\mathbf{x}\| \leqslant \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\delta\mathbf{b}\|$,

z kolei:

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}\| \geqslant \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

Dzieląc nierówności stronami:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\mathbf{A}\| \cdot \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}, \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{cond}\left(\mathbf{A}\right) = \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\mathbf{A}\|$$

UWARUNKOWANIE UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH 2

$$\mathrm{cond}\left(\mathbf{A}\right) = \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \left\|\mathbf{A}\right\|$$

Dla norm Höldera:

$$\mathrm{cond}_{\mathrm{p}}\left(\mathbf{A}\right) = \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{\mathrm{p}} \left\|\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{p}} \geqslant 1,$$

gdyż

$$1 = \|I\|_p = \left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right\|_p \leqslant \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_p \left\|\mathbf{A}\right\|_p$$

Dla macierzy Hilberta

$$\mathbf{H}_n = (h_{ij}), \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1,2,...,n,$$

mamy:

$\mathrm{cond}_2(\mathbf{H}_6) = 1.5 \cdot 10^7$,

$\mathrm{cond}_2(\mathbf{H}_{10}) = 1.6 \cdot 10^{13}$.

b) Zaburzenia elementów macierzy $\mathbf{A}$ i wektora $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A}+\delta\mathbf{A},\mathbf{b}+\delta\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}+\delta\mathbf{x}, \quad \det\left(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A}\right)\neq 0$$

$$\left(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\right)=\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{x}+\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\delta\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{x}=\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{x}+\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\delta\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{x}=\delta\mathbf{b}$$

$$\delta\mathbf{x}=-\mathbf{A}^{-1}\left(\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\delta\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{x}-\delta\mathbf{b}\right)$$

Stąd

$$\|\delta\mathbf{x}\|\leqslant\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\|\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\delta\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{x}-\delta\mathbf{b}\|$$

$$\|\delta\mathbf{x}\|\leqslant\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\left(\|\delta\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|+\|\delta\mathbf{A}\|\,\|\delta\mathbf{x}\|+\|\delta\mathbf{b}\|\right)$$

Grupując składniki z $\|\delta\mathbf{x}\|$ po lewej stronie:

$$\left(1-\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\|\delta\mathbf{A}\|\right)\|\delta\mathbf{x}\|\leqslant\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\|\delta\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|+\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\|\delta\mathbf{b}\|$$

UWARUNKOWANIE UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH 4

$$\left(1 - \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\delta\mathbf{A}\|\right) \|\delta\mathbf{x}\| \leqslant \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| + \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\delta\mathbf{b}\|$$

Zakładając $\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{A}\| < 1$ i dzieląc stronami przez nawias dostajemy

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leqslant \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{b}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{A}\|}$$

Dzieląc stronami przez $\|\mathbf{x}\|$ i mnożąc oraz dzieląc $\|\delta\mathbf{A}\|$ i $\|\delta\mathbf{b}\|$ przez $\|\mathbf{A}\|$:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|}}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}},$$

Ponieważ $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$, to stąd

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}} = \frac{\operatorname{cond}(\mathbf{A}) \left(\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}\right)}{1 - \operatorname{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}$$

UKŁAD RÓWNAŃ Z MACIERZĄ TRÓJKĄTNĄ

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n-1}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Wyznaczanie rozwiązania:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}}, \\
x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\
&\vdots \\
x_k &= \frac{b_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}}, \quad k = n-1, n-2, ..., 1
\end{aligned}
$$

UKŁAD RÓWNAŃ Z MACIERZĄ TRÓJKĄTNĄ 2

Jeśli $\widetilde{x}$ - rozwiązanie numeryczne, to można pokazać, że

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\,\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b},$$

gdzie

$$\frac{|\delta a_{kj}|}{|a_{kj}|} \leqslant (n-j+2)\cdot eps, \quad k = 1, 2, ..., n-1, \quad j = k+1, ..., n$$

$$\frac{|\delta a_{kk}|}{|a_{kk}|} \leqslant 2\cdot eps, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

z czego wynika:

$$\|\delta\mathbf{A}\|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{2} + 1\right)\cdot eps\cdot a \;\cong\; O\left(\frac{1}{2}n^2\right)\cdot eps\cdot a,$$

gdzie

$$a = \max_{i,j}|a_{ij}|$$

Ponieważ $\|\mathbf{A}\|_\infty \geqslant a$, to

$$\frac{\|\delta\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} \leqslant O\left(\frac{1}{2}n^2\right) eps$$

Liczba operacji arytmetycznych: $D = O(\frac{1}{2}n^2)$, $M = O(\frac{1}{2}n^2)$

Dwa etapy:

1. **Eliminacja zmiennych** – w wyniku przekształceń macierzy $\mathbf{A}$ i wektora $\mathbf{b}$ otrzymamy równoważny układ równań z macierzą trójkątną górną.
2. **Postępowanie odwrotne** (ang. "back-substitution") – stosujemy algorytm rozwiązania układu z macierzą trójkątną.

Etap eliminacji zmiennych.

Wyjściowy układ równań (górne indeksy – krok metody):

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)}x_1 & + & a_{22}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1}^{(1)}x_1 & + & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)}
\end{array}$$

ELIMINACJA GAUSSA 2

Krok 1 – wyzerowanie kolumny pierwszej oprócz elementu w wierszu 1:

$$l_{i1} \triangleq \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2, 3, ..., n$$

pierwszy wiersz $\mathbf{w}_1$ mnożymy przez l_{i1} i odejmujemy od wiersza i-tego $\mathbf{w}_i$, kolejno dla $i = 2, 3, ..., n$:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i - l_{i1}\mathbf{w}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)}, \ j = 1, 2, ..., n \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)}, \qquad\qquad i = 2, 3, ..., n \end{aligned}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\ & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ & & . & . & . & . & . & . & . \\ & & a_{n2}^{(2)}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}$$

Krok 2 – wyzerowanie kolumny drugiej z wyjątkiem elementów w wierszach 1 i 2:

$$l_{i2} \triangleq \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \quad i = 3, 4, ..., n$$

Drugi wiersz $\mathbf{w}_2$ mnożymy kolejno przez l_{i2} i odejmujemy od i-tego wiersza $\mathbf{w}_i$, $i = 3, 4, ..., n$,

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i - l_{i2}\mathbf{w}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} a_{ij}^{(3)} &= a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)}, \quad j = 2, 3, ..., n \\ b_i^{(3)} &= b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}, \qquad\qquad i = 3, 4, ..., n \end{aligned}$$

uzyskując układ równań

$$\mathbf{A}^{(3)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(3)}$$

ELIMINACJA GAUSSA 4

Po $\mathbf{k-1}$ krokach otrzymujemy układ równań:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 + & \cdots & + & a_{1k}^{(1)}x_k & + & \cdots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & & a_{22}^{(2)}x_2 + & \cdots & + & a_{2k}^{(2)}x_k & + & \cdots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & & . & & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & & a_{kk}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{kn}^{(k)}x_n & = & b_k^{(k)} \\
 & & & & & a_{k+1,k}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{k+1,n}^{(k)}x_n & = & b_{k+1}^{(k)} \\
 & & & & & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & & a_{nk}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{nn}^{(k)}x_n & = & b_n^{(k)}
\end{array}
$$

tzn. **w k-tym kroku** eliminujemy zmienną x_k z równań $k+1$, $k+2$,...,n – odejmując od każdego z nich, kolejno, równanie k-te pomnożone przez

$$l_{ik} \triangleq \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, k+2, ..., n.$$

$$
\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i - l_{ik}\mathbf{w}_k \quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
a_{ij}^{(k+1)} & = a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad j = k, k+1, ..., n \\
b_i^{(k+1)} & = b_i^{(k)} - l_{ik}b_k^{(k)}, \qquad\qquad i = k+1, k+2, ..., n
\end{array}
$$

ELIMINACJA GAUSSA 5

Po $n-1$ krokach uzyskujemy układ równań

$$\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)},$$

gdzie

$\mathbf{A}^{(n)}$ – trójkątna górna

ROZKŁAD LU

Krok 1 eliminacji Gaussa jest równoważny pomnożeniu ukł. równań przez $\mathbf{L}^{(1)}$,

$$[\ \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} \ \Rightarrow \ \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}\ ] \iff \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}, \quad \text{gdzie}$$

$$\mathbf{L}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ogólnie, krok k-ty odpowiada pomnożeniu przez macierz $\mathbf{L}^{(k)}$:

$$\mathbf{L}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & \mathbf{0} & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

ROZKŁAD LU 2

Odwrotność $\mathbf{L}^{(k)}$: $(\mathbf{L}^{(k)})^{-1} = (\mathbf{L}^{(k)})^{D} = \mathrm{dop}(\mathbf{L}^{(\mathrm{k})})^{\mathrm{T}}$ (gdyż $\det \mathbf{L} = 1$)
($\mathrm{dop}(\mathbf{A})$ - macierz dopełnień algebraicznych $\mathbf{A}$)

Np. dla $\mathbf{L}^{(1)}$ mamy:

$$\mathbf{L}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{dop}(\mathbf{L}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Ogólnie dla macierzy $\mathbf{L}^{(k)}$:

$$(\mathbf{L}^{(k)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & \mathbf{0} & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

ROZKŁAD LU 3

Pomnożenie macierzy $\mathbf{L}^{(k)}$ prawostronnie przez macierz $\mathbf{L}^{(j)}$, $\text{dla } j > k$, np. $\mathbf{L}^{(1)}$ przez $\mathbf{L}^{(2)}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{31} & -l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{n1} & -l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Analogicznie, pomnożenie macierzy $(\mathbf{L}^{(k)})^{-1}$ prawostronnie przez $(\mathbf{L}^{(j)})^{-1}$, $\text{dla } j > k$, np. $(\mathbf{L}^{(1)})^{-1}$ przez $(\mathbf{L}^{(2)})^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ROZKŁAD LU 4

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{L}^{(n-2)}\cdots\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}, \qquad \mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{L}^{(n-2)}\cdots\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

Tak więc, w wyniku eliminacji Gaussa otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbf{U} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{A}^{(n)} &= [\mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{L}^{(n-2)}\cdots\mathbf{L}^{(1)}]\mathbf{A}^{(1)} \\ &= [\mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{L}^{(n-2)}\cdots\mathbf{L}^{(1)}]\mathbf{A}\end{aligned}$$

Mnożąc stronami przez odwrotność macierzy dostajemy:

$$[\mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{L}^{(n-2)}\cdots\mathbf{L}^{(1)}]^{-1} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A}$$

Oznaczając teraz

$$\mathbf{L} \stackrel{\mathrm{df}}{=} [\mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{L}^{(n-2)}\cdots\mathbf{L}^{(1)}]^{-1}$$

mamy

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

$$\mathbf{L} = \left(\mathbf{L}^{(1)}\right)^{-1}\cdots\left(\mathbf{L}^{(n-1)}\right)^{-1}$$

ROZKŁAD LU 5

Mamy:

$$\mathbf{L} = \left(\mathbf{L}^{(1)}\right)^{-1} \cdots \left(\mathbf{L}^{(n-1)}\right)^{-1}, \qquad \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{L}^{(n-2)} \cdots \mathbf{L}^{(1)},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L^{-1}} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ -l_{31} & -l_{32} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -l_{n1} & -l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad [\ \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \ \rightarrow \mathbf{y} \ \Rightarrow \ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}\ ]$$

Uwaga:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{(n)} &= \mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{L}^{(n-2)} \cdots \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{Lb}^{(n)} &= \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

czyli mając $\mathbf{b}^{(n)}$ rozwiązujemy tylko: $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}^{(n)}$.

Nakład na rozkład LU: $D, M = O(\frac{1}{3}n^3)$ $(+$ rozwiązanie 2 układów równań trójkątnych: $D, M = O(n^2)$)

ROZKŁAD LU – Przykład

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{3} & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2 - l_{21}\mathbf{w}_1 \\ l_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_3 - l_{31}\mathbf{w}_1 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{17}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \end{array}\right]$$

zapis $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{2}{3} & \mathbf{\frac{1}{3}} & -1 & \frac{17}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \quad l_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = 2, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_3 - l_{32}\mathbf{w}_2 \quad \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{17}{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \Longrightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $x = [19 \;\; -7 \;\; -8]^T$

ELIMINACJA GAUSSA Z CZĘŚCIOWYM (KOLUMNOWYM) WYBOREM ELEMENTU GŁÓWNEGO

Na początku k-tego kroku:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{1k}^{(1)}x_k & + & \cdots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & & & a_{kk}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{kn}^{(k)}x_n & = & b_k^{(k)} \\
 & & & & & & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & & & a_{ik}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{in}^{(k)}x_n & = & b_i^{(k)} \\
 & & & & & & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & & & a_{nk}^{(k)}x_k & + & \cdots & + & a_{nn}^{(k)}x_n & = & b_n^{(k)}
\end{array}
$$

jako element główny wybieramy:

$$
\left|a_{ik}^{(k)}\right| = \max_j \left\{ \left|a_{jk}^{(k)}\right|, \quad j = k, k+1, ..., n \right\},
$$

zamieniamy wiersz i-ty z k-tym, dalej stosujemy algorytm standardowy k-tego kroku.

ELIMINACJA GAUSSA Z CZĘŚCIOWYM (KOLUMNOWYM) WYBOREM ELEMENTU GŁÓWNEGO 2

Pełny wybór elementu głównego: element główny o maksymalnym module spośród wszystkich elementów podmacierzy $k \times k$ z prawego dolnego rogu macierzy $\mathbf{A}_k$.

Wybór elementu podstawowego (częściowy) stosujemy zawsze, gdyż *prowadzi to również do mniejszych błędów numerycznych.*

Macierz przestawień $\mathbf{P}_{(k,i)}$ – różna od jednostkowej jedynie położeniem dwóch jedynek:

$$\mathbf{P}_{(k,i)} = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & & & & \cdots & & & & 0 & 0 \\
0 & \ddots & & & & & & & & & 0 \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & 0 & & & \\
\vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
 & & & 0 & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
0 & & & & & & & & & \ddots & 0 \\
0 & 0 & & & & \cdots & & & & 0 & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \cdots \mathrm{k-ty\ wiersz} \\ \\ \\ \\ \cdots \mathrm{i-ty\ wiersz} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccc}
\qquad\qquad & \vdots & \qquad\qquad & \vdots & \\
 & \mathrm{k-ta} & & \mathrm{i-ta} & \mathrm{kolumna}
\end{array} &
\end{array}$$

Pomnożenie macierzy $\mathbf{A}$ przez $\mathbf{P}_{(k,i)}$

– **lewostronnie**: przestawia w $\mathbf{A}$ wiersz k-ty z i-tym,

– **prawostronne**: przestawia kolumnę k-tą z i-tą $\left(\det\mathbf{P}_{(k,i)} = -1, (\mathbf{P}_{(k,i)})^{-1} = \mathbf{P}_{(k,i)}\right)$

ELIMINACJA GAUSSA Z CZĘŚCIOWYM (KOLUMNOWYM) WYBOREM ELEMENTU GŁÓWNEGO 4

Mamy algorytm:

$$\mathbf{A}^{(n)} = (\mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{P}^{(n-1)})\cdots(\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{P}^{(2)})(\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{P}^{(1)})\mathbf{A}^{(1)}$$

Ze względu na zamiany wierszy, **rozkład dotyczy nie oryginalnej macierzy $\mathbf{A}$, ale macierzy $\mathbf{PA}$**, gdzie $\mathbf{P}$ to macierz wszystkich zamian wierszy:

$$\mathbf{LU} = \mathbf{PA}\ , \qquad \text{gdzie}\ \ \mathbf{P} = \mathbf{P}^{(n-1)}\mathbf{P}^{(n-2)}\ldots\mathbf{P}^{(1)}$$

Dowód zależności $\mathbf{LU} = \mathbf{PA}$ oraz wyprowadzenie postaci macierzy $\mathbf{L}$:

Ponieważ $\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{U}$, $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}$, to, przykładowo dla n=4 (4×4 macierz $\mathbf{A}$):

$$\mathbf{U} = (\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{P}^{(3)})(\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{P}^{(2)})(\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{P}^{(1)})\mathbf{A} =$$

$$= \mathbf{L}^{(3)}\mathbf{P}^{(3)}\mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{P}^{(3)}\mathbf{P}^{(3)})\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P}^{(3)}\mathbf{P}^{(3)}\mathbf{P}^{(2)})\mathbf{P}^{(1)}\mathbf{A} =$$

$$= \mathbf{L}^{(3)}\left(\mathbf{P}^{(3)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{P}^{(3)}\right)\left(\mathbf{P}^{(3)}\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P}^{(3)}\right)\left(\mathbf{P}^{(3)}\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P}^{(1)}\right)\mathbf{A} =$$

$$= \tilde{\mathbf{L}}^{(3)}(\tilde{\mathbf{L}}^{(2)})(\tilde{\mathbf{L}}^{(1)})(\mathbf{P})\mathbf{A}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{(3)} \left(\mathbf{P}^{(3)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{P}^{(3)}\right) \left(\mathbf{P}^{(3)}\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P}^{(3)}\right) \left(\mathbf{P}^{(3)}\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P}^{(1)}\right) \mathbf{A} =$$

$$= \tilde{\mathbf{L}}^{(3)}(\tilde{\mathbf{L}}^{(2)})(\tilde{\mathbf{L}}^{(1)})(\mathbf{P})\mathbf{A}$$

Definiując

$$\mathbf{L} = (\tilde{\mathbf{L}}^{(3)}\tilde{\mathbf{L}}^{(2)}\tilde{\mathbf{L}}^{(1)})^{-1} = (\tilde{\mathbf{L}}^{(1)})^{-1}(\tilde{\mathbf{L}}^{(2)})^{-1}(\tilde{\mathbf{L}}^{(3)})^{-1}$$

mamy

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{P}\mathbf{A}$$

Ogólnie

$$\tilde{\mathbf{L}}^{(k)} = \mathbf{P}^{(n-1)} \ \ldots \ \mathbf{P}^{(k+2)}\mathbf{P}^{(k+1)}\mathbf{L}^{(k)}\mathbf{P}^{(k+1)}\mathbf{P}^{(k+2)} \ \ldots \ \mathbf{P}^{(n-1)}$$

$$(\tilde{\mathbf{L}}^{(k)})^{-1} = \mathbf{P}^{(n-1)} \ \ldots \ \mathbf{P}^{(k+2)}\mathbf{P}^{(k+1)}(\mathbf{L}^{(k)})^{-1}\mathbf{P}^{(k+1)}\mathbf{P}^{(k+2)} \ \ldots \ \mathbf{P}^{(n-1)}$$

Pokażemy, że $(\tilde{\mathbf{L}}^{(k)})^{-1}$ jest macierzą $(\mathbf{L}^{(k)})^{-1}$ z elementami przestawionymi jedynie w kolumnie k, zgodnie z przestawieniem wierszy w następnych krokach od $(k+1)$-szego do ostatniego (identycznie jest dla $\tilde{\mathbf{L}}^{(k)}$ i $\mathbf{L}^{(k)}$).

ELIMINACJA GAUSSA Z CZĘŚCIOWYM (KOLUMNOWYM) WYBOREM ELEMENTU GŁÓWNEGO 6

$$(\tilde{\mathbf{L}}^{(k)})^{-1} = \mathbf{P}^{(n-1)} \;\ldots\; \mathbf{P}^{(k+2)}\mathbf{P}^{(k+1)}(\mathbf{L}^{(k)})^{-1}\mathbf{P}^{(k+1)}\mathbf{P}^{(k+2)} \;\ldots\; \mathbf{P}^{(n-1)}$$

Ilustracja (dla n=3): załóżmy, że w kroku $k = 2$ **zamieniamy wiersze 2 i 3**:

$$\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{L}^{(1)})^{-1}\mathbf{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \\ l_{21} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & 1 & 0 \\ l_{21} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & 1 & 0 \\ l_{21} & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\tilde{\mathbf{L}}^{(1)})^{-1}$$

1. przemnożenie $(\mathbf{L}^{(1)})^{-1}$ lewostronnie przez $\mathbf{P}^{(2)}$: zamiana wierszy 2 i 3,
2. przemnożenie $(\mathbf{L}^{(1)})^{-1}$ prawostronnie przez $\mathbf{P}^{(2)}$: zamiana kolumn 2 i 3

Efekt w macierzy $(\mathbf{L}^{(1)})^{-1}$: zamiana elementów jedynie w pierwszej kolumnie tj. **zamiana wierszy w poprzednio wyznaczonej części macierzy** $\mathbf{L}$.

Reguła praktyczna:

w rozkładzie LU z częściowym wyborem elementu głównego, **przestawiając w kroku** k wiersze w macierzy $\mathbf{A}^{(k)}$, *należy identycznie przestawić części wierszy* w ***dotychczas wyznaczonej*** *części macierzy* $\mathbf{L}$ (kolumny od 1 do $k-1$).

Ilustracja na przykładzie przestawienia wierszy 3 i 4 w kroku $k=3$:

$$\mathbf{P}_{(3,4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{n1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{41} & l_{42} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{21} & l_{n2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{n1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{41} & l_{42} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{21} & l_{n2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład od początku: w kroku $k=2$ przestawienie wierszy $\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}_{(2,n)}$:

$$(\mathbf{L}^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}_{(2,n)}(\mathbf{L}^{(1)})^{-1}\mathbf{P}_{(2,n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{n1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{21} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

dalej w kroku $k=3$ przestawiamy wiersze 3 i 4 ($\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}_{(3,4)}$):

$$\mathbf{P}_{(3,4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{n1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{41} & l_{42} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{21} & l_{n2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{n1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{41} & l_{42} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{21} & l_{n2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{itd.}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(n-1)} \cdots \mathbf{P}^{(3)}\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P}^{(1)}$$

Uwaga: $\mathbf{P}_{(j,k)} = \mathbf{P}^T_{(j,k)} = \mathbf{P}^{-1}_{(j,k)}$, **ale**: $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$

ELIMINACJA GAUSSA Z CZĘŚCIOWYM (KOLUMNOWYM) WYBOREM ELEMENTU GŁÓWNEGO – Przykład

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \quad \begin{aligned} l_{21} &= \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{2}{3} \\ l_{31} &= \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{17}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \quad \mathbf{P}^{(2)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{1}{3} & \mathbf{\frac{2}{3}} & -1 & \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{17}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \quad l_{32} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \end{array}\right]$$

$$\text{Otrzymaliśmy}: \ \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{(2)}\mathbf{A} = \mathbf{PA}$$

ROZKŁAD LU Z PEŁNYM WYBOREM ELEMENTU GŁÓWNEGO

Każdy (k-ty) krok algorytmu eliminacji Gaussa zaczynamy od wyboru elementu głównego spośród elementów $a_{jp}^{(k)}$ $(k \leqslant j, p \leqslant n)$:

$$\left|a_{il}^{(k)}\right| = \max_{j,p} \left\{ \left|a_{jp}^{(k)}\right|, \quad j, p = k, k+1, ..., n \right\}.$$

Najpierw dokonujemy zamiany kolumn k-tej i l-tej – co oznacza identyczną *zamianę miejscami składowych w wektorze* $\mathbf{x}$.

Następnie dokonujemy zamiany wierszy – jak w algorytmie z wyborem częściowym, w efekcie uzyskujemy macierz trójkątną górną:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(n)} = (\mathbf{L}^{(n-1)}\mathbf{P}^{(n-1)}) \cdots (\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{P}^{(2)})(\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{P}^{(1)})\mathbf{A}^{(1)}\bar{\mathbf{P}}^{1}\bar{\mathbf{P}}^{2} \cdots \bar{\mathbf{P}}^{n-1},$$

gdzie $\mathbf{P}$ i $\bar{\mathbf{P}}$ to macierze wszystkich zamian wierszy i kolumn:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(n-1)}\mathbf{P}^{(n-2)} \cdots \mathbf{P}^{(1)}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}^{(1)}\bar{\mathbf{P}}^{(\mathbf{2})} \cdots \bar{\mathbf{P}}^{(n-1)}.$$

Finalny rozkład dotyczy nie $\mathbf{A}$, ale macierzy $\mathbf{PA\bar{P}}$: $\mathbf{LU} = \mathbf{PA\bar{P}}$.

Postać przekształconego układu równań: $\mathbf{LU\bar{x}} = \mathbf{Pb}, \qquad \text{gdzie} \;\; \bar{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}.$

ROZKŁAD LU Z PEŁNYM WYBOREM ELEMENTU GŁÓWNEGO – Przykład

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \bar{\mathbf{P}}^{(1)} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{6} & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} l_{21} = \frac{1}{2} \\ l_{31} = \frac{1}{6} \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{11}{3} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}^{(2)} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{6} & \mathbf{\frac{5}{6}} & \frac{1}{2} & \frac{11}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{array}\right] \Rightarrow l_{32} = \frac{3}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{11}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{19}{5} \end{array}\right]$$

$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{P}\mathbf{A}\bar{\mathbf{P}}$, $\mathbf{b}^{(3)} = [2\ \frac{11}{3}\ \frac{19}{5}]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{U}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^{(3)}$ $(\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{P}}\mathbf{x} = [x_3\ x_2\ x_1]^{\mathrm{T}})$:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{19}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = [19\ -7\ -8]^{\mathrm{T}}$$

ROZKŁAD LU – błędy numeryczne

Można pokazać, że

$$\widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{PA} + \mathbf{E} \quad (\widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{PA\bar{P}} + \bar{\mathbf{E}})$$

gdzie $\widetilde{\mathbf{L}}$ i $\widetilde{\mathbf{U}}$ to macierze rozkładu uzyskane w arytmetyce zmiennopozycyjnej,

$$\|\mathbf{E}\|_\infty \underset{1}{\leqslant} O(n^2) \cdot eps \cdot g_n$$

gdzie

$$g_n = \max_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} |a_{ij}^{(k)}| \quad \leqslant \quad 2^{n-1} a, \qquad a = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$$

Podane szacowanie na g_n jest bardzo konserwatywne, w praktyce można przyjąć

$$g_n \leqslant \beta(n) \cdot a$$

gdzie $\beta(n)$ jest stałą (w ogólności zależną od n) znacznie mniejszą od 2^{n-1} (np. przy całkowitym wyborze elementu głównego w praktyce g_n bardzo rzadko przekracza $8a$).

OSZACOWANIE BŁĘDÓW ZAOKRĄGLEŃ ROZWIĄZANIA UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH

Niech: $\tilde{x}$ – numeryczne rozwiązanie układu równań liniowych $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ metodą rozkładu LU (eliminacji Gaussa) z częściowym wyborem elementu głównego.

Można pokazać, że $\tilde{x}$ jest równoważne dokładnemu rozwiązaniu układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ z zaburzoną macierzą **A**,tzn.

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\tilde{x} = \mathbf{b},$$

gdzie

$$\frac{\|\delta\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} \leqslant O\left(n^3\right) \cdot \beta(n) \cdot eps$$

Dowodzi to numerycznej stabilności algorytmu rozwiązania układu równań liniowych metodą rozkładu LU (eliminacji Gaussa) z częściowym wyborem elementu głównego.

ROZKŁAD LL^T (CHOLESKY'EGO – BANACHIEWICZA)

Macierz symetryczna $\mathbf{A}$ jest dodatnio określona, jeśli:

$$\forall \mathbf{x} \neq 0 \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$$

Twierdzenie: *Dla każdej symetrycznej dodatnio określonej macierzy* $\mathbf{A}$ *istnieje dokładnie jedna trójkątna macierz* $\mathbf{L}$ *o dodatnich elementach diagonalnych taka, że*:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T.$$

ROZKŁAD LL^T (CHOLESKY'EGO – BANACHIEWICZA) 2

Wyznaczenie rozkładu $\mathbf{LL}^T$ – rozwiązujemy sekwencyjnie układ $(n^2+n)/2$ równań:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

skąd kolumnami w dół, poczynając od elementu a_{11} (w każdej kolumnie zaczynamy od elementu diagonalnego):

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11}^2 \quad \Longrightarrow \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ a_{j1} &= l_{j1} l_{11} \quad \Longrightarrow \quad l_{j1} = a_{j1} \,/\, l_{11}, \quad j = 2, 3, ..., n \\ a_{22} &= l_{21}^2 + l_{22}^2 \quad \Longrightarrow \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\ a_{j2} &= l_{j1} \cdot l_{21} + l_{j2} \cdot l_{22} \quad \Longrightarrow \quad l_{j2} = (a_{22} - l_{j1} \cdot l_{21}) \,/\, l_{22}, \quad j = 3, 4, ..., n \\ & \text{itd.} \end{aligned}$$

ROZKŁAD LL^T (CHOLESKY'EGO – BANACHIEWICZA) 3

Ogólnie dla $i = 1, 2, 3, ..., n$:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + ... + l_{ii}^2 \\ a_{ji} &= l_{j1} \cdot l_{i1} + l_{j2} \cdot l_{i2} + ... + l_{ji} \cdot l_{ii}, \quad j = i+1, i+2, ..., n \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy algorytm:

$$\begin{aligned} l_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\ l_{ji} &= \frac{a_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot l_{ik}}{l_{ii}}, \quad i = 1, 2, ..., n, \;\; j = i+1, i+2, ..., n. \end{aligned}$$

Nakład obliczeń dla wyznaczenia macierzy $\mathbf{L}$ wynosi:

M $= O(\frac{1}{6}n^3)$, D $= O(\frac{1}{6}n^3)$, oraz n pierwiastkowań.

Uwaga: macierze $\mathbf{L}$ z rozkładów $\mathbf{LU}$ i $\mathbf{LL}^T$, mimo identycznego oznaczenia "$\mathbf{L}$" symbolizującego macierz dolną trójkątną, **to macierze różne**.

ROZKŁAD LL^T – Przykład

Wyznaczyć rozkład $\mathbf{LL}^T$ macierzy **A**,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Stąd kolejne równania skalarne:

$$\begin{aligned}
1 &= l_{11}^2 \quad \Rightarrow \quad l_{11} = 1, \\
2 &= l_{21}l_{11} \quad \Rightarrow \quad l_{21} = 2 \,/\, 1 = 2, \\
4 &= l_{31}l_{11} \quad \Rightarrow \quad l_{31} = 4 \,/\, 1 = 4, \\
13 &= l_{21}^2 + l_{22}^2 \quad \Rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{13 - 4} = 3, \\
23 &= l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} \quad \Rightarrow \quad l_{32} = (23 - 8)/3 = 5, \\
77 &= l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \quad \Rightarrow \quad l_{33} = \sqrt{77 - 16 - 25} = 6
\end{aligned}$$

i uzyskana macierz $\mathbf{L}$ ma postać:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

ROZKŁAD LDL^T

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{L}}\mathbf{D}\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_{21} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{l}_{21} & \cdots & \bar{l}_{n1} \\ 0 & 1 & & \bar{l}_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Elementy rozkładu LDL^T wyznaczamy podobnie jak rozkładu LL^T, tzn. z równania macierzowego, np. w postaci:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ \bar{l}_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{11}\bar{l}_{21} & \cdots & d_{11}\bar{l}_{n1} \\ 0 & d_{22} & & d_{22}\bar{l}_{n2} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

rozwiązujemy równania skalarne kolejno kolumnami macierzy $\mathbf{A}$ (jak dla LL^T):

$$\begin{aligned} a_{11} &= d_{11} \quad \Rightarrow \quad d_{11} = a_{11}, \\ a_{j1} &= d_{11}\bar{l}_{j1} \quad \Rightarrow \quad \bar{l}_{j1} = a_{j1} \,/\, d_{11}, \qquad j = 2, 3, ..., n, \end{aligned}$$

ROZKŁAD LDL^T 2

$$
\begin{aligned}
a_{22} &= d_{11}\bar{l}_{21}^2 + d_{22} \quad \Rightarrow \quad d_{22} = a_{22} - d_{11}\bar{l}_{21}^2, \\
a_{j2} &= \bar{l}_{j1} d_{11} \bar{l}_{21} + \bar{l}_{j2} d_{22} \quad \Rightarrow \quad \bar{l}_{j2} = (a_{j2} - \bar{l}_{j1} d_{11} \bar{l}_{21}) \ / \ d_{22}, \quad j = 3, 4, ..., n, \\
& \text{itd.}
\end{aligned}
$$

Daje to następujący algorytm:

$$
\begin{aligned}
d_{ii} &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{l}_{ik}^2 d_{kk}, \\
\bar{l}_{ji} &= (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{l}_{jk} d_{kk} \bar{l}_{ik}) / d_{ii}, \quad i = 1, ..., n, \ j = i+1, ..., n,
\end{aligned}
$$

określony dla macierzy nieosobliwych ($d_{ii} \neq 0$), w szczególności dodatnio określonych ($d_{ii} > 0$).

Nakład obliczeń jest podobny jak dla rozkładu LL^T: M, D $= O(\frac{1}{6}n^3)$.

ROZKŁAD LDL^T 3

W ogólności, **rozkład LDL^T istnieje dla dowolnych macierzy symetrycznych** – elementy d_{ii} mogą przyjmować dowolne wartości.

Posiadające dobre własności numerycznie algorytmy rozkładu LDL^T stosują przestawianie wierszy (i kolumn, dla symetrii), uzyskujemy wówczas rozkład

$$\mathbf{PAP} = \mathbf{LDL}^T,$$

gdzie macierz $\mathbf{P}$ jest macierzą przestawień.

Alternatywą jest tzw. blokowy rozkład LDL^T, gdzie na diagonali macierzy $\mathbf{D}$ występują elementy macierzowe o wymiarach 1×1 lub 2×2.

Procedura "ldl" pakietu MATLAB umożliwia wykonywanie rozkładu LDL^T w obu wymienionych wersjach (dla dowolnych macierzy symetrycznych).

Relacja między $\mathbf{LDL}^T$ i $\mathbf{LL}^T$ (istnieje, gdy $d_{ii} > 0 \Leftrightarrow x^T\mathbf{A}x > 0,\ x \neq 0$):

$$\overline{\mathbf{L}}\mathbf{D}\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_{21} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11}=l_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}=l_{22}^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_{nn}=l_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{l}_{21} & \cdots & \bar{l}_{n1} \\ 0 & 1 & & \bar{l}_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_{21} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{l}_{21} & \cdots & \bar{l}_{n1} \\ 0 & 1 & & \bar{l}_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{LL}^T,$$

tzn. $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\{{l_{ii}}^2\}$, $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\,[\mathrm{diag}\{l_{ii}\}]^{-1}$, $\mathbf{L} = \overline{\mathbf{L}} \cdot \mathrm{diag}\{\sqrt{\mathrm{d_{ii}}}\}$.

ROZKŁAD LDL^T a ROZKŁAD LU

Relacja rozkładów $\mathbf{LDL}^T$ i $\mathbf{LU}$ (*istnieje dla macierzy symetrycznych*):

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{L}}\mathbf{D}\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_{21} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{l}_{21} & \cdots & \bar{l}_{n1} \\ 0 & 1 & & \bar{l}_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_{21} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{11} & d_{11}\bar{l}_{21} & \cdots & d_{11}\bar{l}_{n1} \\ 0 & d_{22} & & d_{22}\bar{l}_{n2} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{L}}\mathbf{U}$$

ITERACYJNE POPRAWIANIE ROZWIĄZANIA

$\mathbf{x}^{(1)}$ – numeryczne rozwiązanie układu równań $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{b}, \quad \text{z reguły } \mathbf{r}^{(1)} \neq 0$$

Oznaczając rozwiązanie dokładne przez $\widehat{\mathbf{x}}$ mamy:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}^{(1)} = \widehat{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x} \\
&\mathbf{A}\left(\mathbf{x}^{(1)} - \delta\mathbf{x}\right) = \mathbf{b} \\
&\mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{b} = \mathbf{r}^{(1)}
\end{aligned}$$

W celu poprawienia dokładności wyniku rozwiązujemy układ równań wzgl. $\delta\mathbf{x}$:

1. obliczamy resztę $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{b}$,
2. rozwiązujemy $\mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \mathbf{r}^{(1)}$ korzystając z rozkładu $\mathbf{LU}$ $(\mathbf{LL}^T)$ – już znany (mały nakład obliczeń); uzyskujemy kolejne przybliżenie rozwiązania $\mathbf{x}^{(2)}$:
$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} - \delta\mathbf{x},$$
3. obliczamy resztę $\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{b}$, jeśli jest istotnie mniejsza od $\mathbf{r}^{(1)}$ i nadal zbyt duża, to postępowanie powtarzamy, itd.

Wektory reszt $\mathbf{r}^{(i)}$ należy obliczać w podwyższonej precyzji.

OBLICZANIE WYZNACZNIKA MACIERZY

Uwaga:

$$\mathbf{P}_{(k,i)} = \mathbf{P}^T_{(k,i)} = \mathbf{P}^{-1}_{(k,i)}, \qquad \det \mathbf{P}_{(k,i)} = -1$$

ale w ogólności $\mathbf{P}$ jest macierzą kilku przestawień, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(n-1)} \cdots \mathbf{P}^{(1)}$

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}, \qquad \det \mathbf{P} = (-1)^p$$

gdzie p jest liczbą przestawień (zamian) wierszy przy faktoryzacji LU

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{P}^T\mathbf{P}) \cdot \det \mathbf{A} = \det \mathbf{P}^T \cdot \det(\mathbf{PA}) = (-1)^p \det(\mathbf{LU})$$

$$= (-1)^p \det \mathbf{L} \cdot \det \mathbf{U} = (-1)^p \det \mathbf{U} = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} u_{ii},$$

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{LL}^T) = (\det \mathbf{L})^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii} \right)^2$$

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{LDL}^T) = \det \mathbf{D} = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$

OBLICZANIE MACIERZY ODWROTNEJ

Korzystając z rozkładów, bezpośrednio:

$\mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U})^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}$ – przestawienie kolumn)

$(\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1} = (\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{L}^{-1} = (\mathbf{L}^{-1})^T)\mathbf{L}^{-1}$

Dla macierzy trójkątnych:

– macierz odwrotna do macierzy trójkątnej (górnej, dolnej) jest trójkątna,

– obliczenie odwrotności $\mathbf{Y}$ macierzy trójkatnej jest efektywne – liczymy z równania definicyjnego; np. dla $\mathbf{L}$ (kolumnami, jak w rozkładzie $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$):

$$\mathbf{L}\mathbf{Y} = \mathbf{I} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 &= l_{11}y_{11} \quad \Rightarrow \quad y_{11} = 1/l_{11}, \\ 0 &= l_{21}y_{11} + l_{22}y_{21} \quad \Rightarrow \quad y_{21} = (-l_{21}y_{11}) \;/\; l_{22}, \\ 0 &= l_{31}y_{11} + l_{32}y_{21} + l_{33}y_{31} \quad \Rightarrow \quad y_{31} = -(l_{31}y_{11} + l_{32}y_{21}) \;/\; l_{33}, \end{aligned}$$

OBLICZANIE MACIERZY ODWROTNEJ 2

$$
\begin{aligned}
0 &= l_{31}y_{11} + l_{32}y_{21} + l_{33}y_{31} \quad \Rightarrow \quad y_{31} = -(l_{31}y_{11} + l_{32}y_{21}) \,/\, l_{33}, \\
&\vdots \\
0 &= l_{n1}y_{11} + \cdots + l_{nn}y_{n1} \quad \Rightarrow \quad y_{n1} = -(l_{n1}y_{11} + \cdots + l_{n,n-1}y_{n-1,1}) \,/\, l_{nn}, \text{ itd.}
\end{aligned}
$$

Nakład obliczeń:

– na policzenie jednej macierzy odwrotnej: M, D $= O(\frac{1}{6}n^3)$,

– obliczenie ilorazu macierzy: M, D $= O(\frac{1}{3}n^3)$

Stąd **obliczenie macierzy odwrotnej**, np. :

– stosując rozkład $\mathbf{LU}$ wymaga nakładu M, D $= O(n^3)$
($O(\frac{1}{3}n^3)$ wyznaczenie rozkładu $+\, 2 \cdot O(\frac{1}{6}n^3)$ obliczenie odwrotności macierzy trójkątnych $+\, O(\frac{1}{3}n^3)$ przemnożenie macierzy *plus* przestawienie kolumn),

– stosując rozkład $\mathbf{LL}^T$ wymaga nakładu M, D $= O(\frac{5}{6}n^3)$ (*plus* n pierwiastkowań)

OBLICZANIE MACIERZY ODWROTNEJ 3

Korzystając z rozkładów, rozwiązując układy równań:

np. dla rozkładu $\mathbf{LU}$: $\quad \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{PAA}^{-1} = \mathbf{PI} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{LUA}^{-1} = \mathbf{PI}$

Oznaczając:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

mamy

$$\mathbf{LUA}^{-1} = \mathbf{PI} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{LU} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \quad & \mathbf{y}_n \end{matrix} \end{array} = \mathbf{P} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \quad & \mathbf{e}_n \end{matrix} \end{array} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{LUy}_1 & = \mathbf{Pe}_1 \\ \mathbf{LUy}_2 & = \mathbf{Pe}_2 \\ \quad \vdots & = \quad \vdots \\ \mathbf{LUy}_n & = \mathbf{Pe}_n \end{cases}$$

OBLICZANIE MACIERZY ODWROTNEJ 3

Nakład obliczeń: $O(\frac{1}{2}n^2) \cdot 2 \cdot n = O(n^3)$ plus $O(\frac{1}{3}n^3)$ (rozkład $\mathbf{LU}$).

Uwaga: bez istotnej potrzeby nie należy wyznaczać i korzystać jawnie z macierzy odwrotnej.

Dla prównania: nakłady obliczeń przy rozwiązaniu układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{Ly} = \mathbf{b} & & \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \\ & / & O\left(\frac{1}{2}n^2\right) & + & O\left(\frac{1}{2}n^2\right) \\ \mathbf{LU} & & & & \\ & \backslash & \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1} & & \mathbf{x} = (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}) \cdot \mathbf{b} \\ & & O\left(\frac{2}{3}n^3\right) & + & O\left(n^2\right) \end{array}$$

Ponadto błędy numeryczne są w pierwszym przypadku mniejsze.

METODY ITERACYJNE

$$\left\{\mathbf{x}^{(i)}\right\}: \qquad \mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{w}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \quad \mathbf{x}^{(0)} \;\; \text{dane}$$

Twierdzenie (Ostrowskiego):
Ciąg $\left\{\mathbf{x}^{(i)}\right\}$określony wzorem $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{w}$ jest dla dowolnego punktu $\mathbf{x}^{(0)}$ zbieżny do punktu $\widehat{\mathbf{x}}$ będącego rozwiązaniem równania $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{w}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{sr}\,(\mathbf{M}) < 1$$

Miary efektywności metod iteracyjnych:

1. *liczba działań arytmetycznych* potrzebnych do wykonania pojedynczej iteracji $\mathbf{x}^{(i)} \longrightarrow \mathbf{x}^{(i+1)}$, wielkość zajmowanej pamięci,
2. *szybkość zbieżności*, tzn. szybkość malenia błędu

$$\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i)} - \widehat{\mathbf{x}}$$

(im $\mathrm{sr}\,(\mathbf{M})$ mniejszy tym metoda *asymptotycznie* szybciej zbieżna)

METODA JACOBIEGO

Dekompozycja: $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$, np.

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{L}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}} + \underset{\mathbf{D}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}} + \underset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{Dx} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Iteracyjna **metoda Jacobiego**:

$$\mathbf{Dx}^{(i+1)} = -\left(\mathbf{L} + \mathbf{U}\right)\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{b} \qquad i = 0, 1, 2, ...$$

Jest to schemat obliczeniowy o strukturze równoległej, gdyż można go zapisać:

$$x_j^{(i+1)} = -\frac{1}{d_{jj}}\left(\sum_{k=1}^{n}(l_{jk} + u_{jk})x_k^{(i)} - b_j\right), \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Warunek dostateczny zbieżności metody Jacobiego:

$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,\ i = 1, 2, ..., n$ – silna diagonalna dominacja wierszowa,

lub

$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, ..., n$ – silna diagonalna dominacja kolumnowa

Uzasadnienie (dla dominacji wierszowej):

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\,,\ i = 1, 2, ..., n \quad \Leftrightarrow \quad |d_{jj}| > \sum_{k=1}^{n} (|l_{jk}| + |u_{jk}|) \qquad (*)$$

Algorytm:

$$x_j^{(i+1)} = -\frac{1}{d_{jj}} \left(\sum_{k=1}^{n} (l_{jk} + u_{jk}) x_k^{(i)} - b_j \right), \qquad j = 1, 2, ..., n$$

METODA JACOBIEGO 3

Zakładając $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (rozwiązanie w zerze, nie zmniejsza ogólności rozważań):

$$|(x_j^{(i+1)})| \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}(|l_{jk}| + |u_{jk}|)|x_k^{(i)}|}{|d_{jj}|}, \quad j = 1, ..., n,$$

Dla każdej składowej wektora $\mathbf{x}$ mamy:

$$|(x_j^{(i+1)})| \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}(|l_{jk}| + |u_{jk}|)}{|d_{jj}|}|x_{max}^{(i)}|, \quad j = 1, ..., n,$$

gdzie $x_{max}^{(i)}$ jest składową wektora $\mathbf{x}^{(i)}$ **o maksymalnym module**. Stąd

$$|(x_{max}^{(i+1)})| \leqslant \alpha |x_{max}^{(i)}|, \quad i = 0, 1, 2, ...$$

gdzie, uwzględniając (*)

$$\alpha = \max_j \left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(|l_{jk}| + |u_{jk}|)}{|d_{jj}|} \right) < 1 ,$$

co implikuje

$$|(x_{max}^{(i)})| \rightarrow_{i\rightarrow\infty} 0, \quad \text{czyli} \;\; \mathbf{x} \rightarrow_{i\rightarrow\infty} \mathbf{0}$$

METODA GAUSSA-SEIDELA

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff (\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x} = -\mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Iteracyjna **metoda Gausssa-Seidela**:

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x}^{(i+1)} = -\mathbf{U}\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{b} \iff \mathbf{D}\mathbf{x}^{(i+1)} = -\mathbf{L}\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{b} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} d_{11}x_1^{(i+1)} \\ d_{22}x_2^{(i+1)} \\ d_{33}x_3^{(i+1)} \\ \vdots \\ d_{nn}x_n^{(i+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(i+1)} \\ x_2^{(i+1)} \\ x_3^{(i+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(i+1)} \end{bmatrix} - (\mathbf{U}\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{b})$$

Oznaczając $\mathbf{w}^{(i)} = \mathbf{U}\mathbf{x}^{i} - \mathbf{b}$ mamy bowiem:

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= -w_1^{(i)}/d_{11}, \\ x_2^{(i+1)} &= (-l_{21} \cdot x_1^{(i+1)} - w_2^{(i)})/d_{22}, \\ x_3^{(i+1)} &= (-l_{31} \cdot x_1^{(i+1)} - l_{32} \cdot x_2^{(i+1)} - w_3^{(i)})/d_{33}, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Warunki zbieżności (porównanie z met. Jacobiego). Testy stopu.