Wykład dziesiąty

Całki niewłaściwe

Całka niewłaściwa I rodzaju

Zał. $a \in \mathbb{R}$ – ustalona liczba rzeczywista, f – funkcja R – całkowalna na każdym przedziale $\langle a; T\rangle$, $T > a$.
Def. Całką niewłaściwą I rodzaju funkcji f na przedziale $\langle a : +\infty)$ nazywamy granicę

$$\lim_{T\to+\infty}\int_a^T f(x)dx \overset{ozn}{=} \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, jeśli powyższa granica jest właściwa. Jest rozbieżna w pozostałych przypadkach.

Zał. $a \in \mathbb{R}$ – ustalona liczba rzeczywista; funkcja f jest R – całkowalna na każdym przedziale $\langle T; a\rangle$, $T < a$. Wówczas można określić całkę niewłaściwą funkcji f na przedziale $(-\infty; a\rangle$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx \overset{df}{=} \lim_{T\to-\infty}\int_T^a f(x)dx$$

Zał. Funkcja f jest R – całkowalna na każdym przedziale ograniczonym na prostej $\mathbb{R}$. Wówczas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{df}{=} \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

gdzie a jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą.

Uwaga 1. Całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna $\Leftrightarrow$ zbieżne są całki $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ i $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, niezależnie od siebie.

Tw.1.(kryterium porównawcze) Jeżeli funkcje f i h są określone na przedziale $\langle a : +\infty)$, R – całkowalne na każdym przedziale $\langle a : T\rangle$, $T > a$ oraz $0 \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ dla każdego $x \in \langle a : +\infty)$, to

1. jeżeli całka $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.
2. jeżeli całka $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna, to całka $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ jest rozbieżna.

Twierdzenie 1. pozostaje prawdziwe dla przedziałów $(-\infty; a\rangle$.

Całka niewłaściwa II rodzaju

Zał. Funkcja f jest określona w przedziale $\langle a;b)$, gdzie $a < b \in \mathbb{R}$, zmienia się w sposób nieograniczony w lewostronnym sąsiedztwie punktu b i jest R – całkowalna w każdym przedziale $\langle a; b-\epsilon\rangle$, $0 < \epsilon < b-a$.
Def. Całką niewłaściwą II rodzaju funkcji f na przedziale $\langle a;b\rangle$ nazywamy granicę

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \overset{ozn}{=} \int_a^b f(x)dx$$

Zał. Funkcja f jest określona w przedziale $(a;b\rangle$, gdzie $a < b \in \mathbb{R}$, zmienia się w sposób nieograniczony w prawostronnym sąsiedztwie punktu a i jest R – całkowalna w każdym przedziale $\langle a+\epsilon; b\rangle$, $0 < \epsilon < b-a$.

Def. Całkę niewłaściwą II rodzaju funkcji f na przedziale $\langle a;b\rangle$ nazywamy granicę

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx \overset{ozn}{=} \int_a^b f(x)dx$$

Pojęcia zbieżności oraz rozbieżności dla całek II rodzaju definiujemy analogicznie jak dla całek I rodzaju.

Uwaga 2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ jest zbieżna $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

Uwaga 3. Jeżeli istnieją całki niewłaściwe II rodzaju funkcji f na przedziałach $\langle a;c\rangle$ oraz $\langle c;b\rangle$, to istnieje całka niewłaściwa II rodzaju funkcji f na przedziale $\langle a;b\rangle$ i zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Def. Zbieżną całkę niewłaściwą I rodzaju (odp.II rodzaju) funkcji f nazywamy bezwzględnie zbieżną, jeśli jest zbieżna całka funkcji $|f|$. Jeżeli ta ostatnia całka jest rozbieżna, to całka funkcji f jest warunkowo zbieżna.

Uwaga 4. Jeżeli całka niewłaściwa funkcji $|f|$ jest zbieżna i f jest R – całkowalna na każdym odpowiednim podprzedziale przedziału zbieżności, to całka funkcji f jest zbieżna (bezwzględnie).