# Szeregi potęgowe

ANA2 - AiR

Ewa Stróżyna

$n \in \mathbb{N}\,,\ f_n : X \to \mathbb{R}\,,\ X \subset \mathbb{R}$

Definiujemy *ciąg funkcyjny*:

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \quad f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

$n \in \mathbb{N}, \ f_n : X \to \mathbb{R}, \ X \subset \mathbb{R}$

Definiujemy *ciąg funkcyjny*:

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \quad f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

**Definicja**

Ciąg $(f_n)$ jest *zbieżny punktowo* do funkcji $f$ na zbiorze $X$ (ozn. $f_n \to f$), jeśli

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \to f(x)$$

tzn.

$$\forall x \in X \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_{\varepsilon,x} \ \forall n > n_{\varepsilon,x} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Przykłady:

(1) $f_n(x) = x^n\,, \quad x \in [0,1]$ – funkcje ciągłe

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,, \qquad f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [0,1) \\ 1\,, & x = 1 \end{cases}$ – funkcja nieciągła

Przykłady:

(1) $f_n(x) = x^n\,, \quad x \in [0,1]$ – funkcje ciągłe

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,, \qquad f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [0,1) \\ 1\,, & x = 1 \end{cases}$ – funkcja nieciągła

(2) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n^2}\,, \quad x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \equiv 0$

Uwaga:

Ciąg funkcji ciągłych, różniczkowalnych, całkowalnych może być zbieżny punktowo do funkcji nieciągłej, nieróżniczkowalnej, niecałkowalnej.

**Definicja**

Ciąg $(f_n)$ jest *zbieżny jednostajnie* do funkcji $f$ na zbiorze $X$ (ozn. $f_n \rightrightarrows f$), jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \quad \forall\, n > n_\varepsilon \quad \forall\, x \in X \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

## Definicja

Ciąg $(f_n)$ jest *zbieżny jednostajnie* do funkcji $f$ na zbiorze $X$ (ozn. $f_n \rightrightarrows f$), jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \quad \forall\, n > n_\varepsilon \quad \forall\, x \in X \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

## Twierdzenie

(1) $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$

(2) Jeśli $f_n \rightrightarrows f$, to $f_n \to f$.

(3) Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ i $f_n$ – ciągłe (różniczkowalne, całkowalne) w $X$, to $f$ – ciągła (różniczkowalna, całkowalna) w $X$.

Przykłady:

(1) $f_n(x) = x^n \to f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [0,1) \\ 1\,, & x = 1 \end{cases} \qquad x \in [0,1]$

ciąg $f_n$ nie zbiega jednostajnie do funkcji $f$, bo $f$ jest nieciągła.

Przykłady:

(1) $f_n(x) = x^n \to f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [0,1) \\ 1\,, & x = 1 \end{cases} \qquad x \in [0,1]$

ciąg $f_n$ nie zbiega jednostajnie do funkcji $f$, bo $f$ jest nieciągła.

(2) $0 \leqslant \sin \frac{x}{n^2} \leqslant \sin \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\,, \qquad x \in [0,1]$

$\Rightarrow 0 \leqslant \sup |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n^2} \Rightarrow$
$\lim_{n\to\infty} (\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|) = 0$

$\Rightarrow$ zbieżność jednostajna.

## Szeregi funkcyjne

## Szeregi funkcyjne

$(f_n)$ – ciąg funkcyjny, $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Tworzymy ciąg sum częściowych: $S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$.

## Szeregi funkcyjne

$(f_n)$ – ciąg funkcyjny, $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Tworzymy ciąg sum częściowych: $S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$.

### Definicja

Ciąg $(S_n)$ nazywamy *szeregiem funkcyjnym* o wyrazie ogólnym $f_n(x)$ i oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest *zbieżny* (*zbieżny jednostajnie*) do funkcji $S(x)$ na zbiorze $X$, jeśli $S_n \to S$ $(S_n \rightrightarrows S)$.

$S(x)$ jest *sumą* szeregu funkcyjnego: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

np. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,, \qquad x \in (-1,1)$

$f_n(x) = x^n\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = S(x)$

np. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $\quad x \in (-1,1)$

$f_n(x) = x^n$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = S(x)$

**Definicja**

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na zbiorze $X$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

np. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $\quad x \in (-1,1)$

$f_n(x) = x^n$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = S(x)$

### Definicja

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na zbiorze $X$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

### Twierdzenie

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest zbieżny na $X$, to $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ też jest zbieżny na $X$.

**Tw. (kryterium Weierstrassa)**

Jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , $a_n \geqslant 0$ jest zbieżny oraz $|f_n(x)| \leqslant a_n \ \forall\, x \in X \ \forall\, n > n_0$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w zbiorze $X$.

## Tw. (kryterium Weierstrassa)

Jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , $a_n \geqslant 0$ jest zbieżny oraz $|f_n(x)| \leqslant a_n \ \ \forall\, x \in X \ \ \forall\, n > n_0$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w zbiorze $X$.

Przykłady:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$ , $\qquad X = \mathbb{R}$

$\left|\frac{\cos nx}{n^2+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – zbieżny $\Rightarrow$ szereg funkcyjny jednostajnie zbieżny.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $\quad X = (0, +\infty)$

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| = \frac{x}{1+n^4x^2} \leqslant \frac{x}{2n^2x} = \frac{1}{2n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – zbieżny $\Rightarrow$ szereg funkcyjny jednostajnie zbieżny.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $\quad X=(0,+\infty)$

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| = \frac{x}{1+n^4x^2} \leqslant \frac{x}{2n^2x} = \frac{1}{2n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – zbieżny $\Rightarrow$ szereg funkcyjny jednostajnie zbieżny.

## Szeregi potęgowe

### Definicja

Szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

nazywamy *szeregiem potęgowym* o wyrazie ogólnym

$$f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$$

Jeśli $x_0 = 0$, to szereg jest postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Uwaga:

Szereg potęgowy jest zawsze zbieżny w swoim środku $x = x_0$ lub $x = 0$.

Uwaga:

Szereg potęgowy jest zawsze zbieżny w swoim środku $x = x_0$ lub $x = 0$.

Uwaga:

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $x_0 \neq 0$, to jest zbieżny bezwzględnie w przedziale $(-|x_0|, |x_0|)$.

Uwaga:

Szereg potęgowy jest zawsze zbieżny w swoim środku $x = x_0$ lub $x = 0$.

Uwaga:

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $x_0 \neq 0$, to jest zbieżny bezwględnie w przedziale $(-|x_0|, |x_0|)$.

Dowód:

Wybierzmy $x$ takie, że $|x| < |x_0|$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ – zbieżny $\Rightarrow$ $(a_n x_0^n)$ – ciąg ograniczony $\Rightarrow$ $|a_n x_0^n| < M$ dla $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n x^n| = \left|a_n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \cdot x_0^n\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \Rightarrow$ szereg zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ – zbieżny

## Definicja

*Przedział zbieżności*

$$X = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}\}$$

*Promień zbieżności*

$$R = \sup\{|x| : \ x \in X\}$$

## Definicja

*Przedział zbieżności*

$$X = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}\}$$

*Promień zbieżności*

$$R = \sup\{|x| : \ x \in X\}$$

## Uwaga

Jeśli promień zbieżności:

(1) $R = 0$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny tylko dla $x = 0$,

(2) $R = +\infty$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

(3) $0 < R < +\infty$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $(-R, R)$ i jest rozbieżny w $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$.

**Twierdzenie**

Jeśli promień zbieżności $R > 0$, to:

(1) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny bezwzględnie w $(-R, R)$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale domkniętym $\subset (-R, R)$.

## Twierdzenie

Jeśli promień zbieżności $R > 0$, to:

(1) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny bezwzględnie w $(-R, R)$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale domkniętym $\subset (-R, R)$.

## Twierdzenie

Jeśli promień zbieżności $R > 0$, to suma szeregu $S(x)$ jest funkcją ciągłą w $(-R, R)$.

Ponadto jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ jest zbieżny, to funkcja $S(x)$ jest ciągła lewostronnie w $x = R$, a jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ jest zbieżny, to funkcja $S(x)$ jest ciągła prawostronnie w $x = -R$

Ponadto jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ jest zbieżny, to funkcja $S(x)$ jest ciągła lewostronnie w $x = R$, a jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ jest zbieżny, to funkcja $S(x)$ jest ciągła prawostronnie w $x = -R$

## Wyznaczanie promienia zbieżności

Ponadto jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ jest zbieżny, to funkcja $S(x)$ jest ciągła lewostronnie w $x = R$, a jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ jest zbieżny, to funkcja $S(x)$ jest ciągła prawostronnie w $x = -R$

## Wyznaczanie promienia zbieżności

## Twierdzenie

Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ lub $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, to promień zbieżności $R$ jest równy:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < +\infty \\ 0, & \lambda = +\infty \\ +\infty, & \lambda = 0 \end{cases}$$

Przykłady:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , $\quad a_n = \frac{1}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = +\infty \Rightarrow X = \mathbb{R}$

Przykłady:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , $\quad a_n = \frac{1}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = +\infty \Rightarrow X = \mathbb{R}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ , $\quad a_n = n!$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 0 \Rightarrow X = \{0\}$

Przykłady:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , $\quad a_n = \frac{1}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = +\infty \Rightarrow X = \mathbb{R}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ , $\quad a_n = n!$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 0 \Rightarrow X = \{0\}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$ , $\quad a_n = \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 2 \Rightarrow (-2, 2)$

Przykłady:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\quad a_n = \frac{1}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = +\infty \Rightarrow X = \mathbb{R}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$, $\quad a_n = n!$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 0 \Rightarrow X = \{0\}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$, $\quad a_n = \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 2 \Rightarrow (-2, 2)$

$x = 2:$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ – szereg harmoniczny

$x = -2:$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ – szereg anharmoniczny

$\Rightarrow X = [-2, 2)$

Uwaga:

Można również wyznaczać obszar zbieżności szeregów funkcyjnych korzystając z kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego, a potem badając zbieżność szeregów liczbowych dla punktów, dla których powyższe kryteria nie rozstrzygają zbieżności (tzn. gdy $g = 1$).

Uwaga:

Można również wyznaczać obszar zbieżności szeregów funkcyjnych korzystając z kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego, a potem badając zbieżność szeregów liczbowych dla punktów, dla których powyższe kryteria nie rozstrzygają zbieżności (tzn. gdy $g = 1$).

Przykłady:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$, $\quad u_n = \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$

$$g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} 3^{n-1}\sqrt{n}}{x^n 3^n \sqrt{n+1}} \right| =$$
$$= \frac{|x|}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|x|}{3}$$

Jeśli $g < 1 \equiv \frac{|x|}{3} < 1 \equiv |x| < 3 \equiv -3 < x < 3$, to z kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny (bezwzględnie), dla $|x| > 3$ jest rozbieżny.

Zbieżność w $x = 3$, $x = -3$ badamy oddzielnie:

$x = -3: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ – szereg rozbieżny ($\alpha < 1$),

$x = -3: \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – szereg zbieżny (kryterium Leibniza)

$\Rightarrow X = (-3, 3]$

Jeśli $g < 1 \equiv \frac{|x|}{3} < 1 \equiv |x| < 3 \equiv -3 < x < 3$, to z kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny (bezwzględnie), dla $|x| > 3$ jest rozbieżny.

Zbieżność w $x = 3$, $x = -3$ badamy oddzielnie:

$x = -3 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ – szereg rozbieżny $(\alpha < 1)$,

$x = -3 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – szereg zbieżny (kryterium Leibniza)

$\Rightarrow X = (-3, 3]$

Jeśli $g < 1 \equiv \frac{|x|}{3} < 1 \equiv |x| < 3 \equiv -3 < x < 3$, to z kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny (bezwzględnie), dla $|x| > 3$ jest rozbieżny.

Zbieżność w $x = 3$, $x = -3$ badamy oddzielnie:

$x = -3: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ – szereg rozbieżny ($\alpha < 1$),

$x = -3: \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – szereg zbieżny (kryterium Leibniza)

$\Rightarrow X = (-3, 3]$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$, $\qquad u_n = \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$

$$g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+8)^3 n^2}{(n+1)^2} \right| =$$

$$= |x+8|^3 \lim_{n\to\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = |x+8|^3$$

$|x+8|^3 < 1 \equiv |x+8| < 1 \equiv -1 < x+8 < 1 \equiv -9 < x < -7$

$x = -9:$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ – zbieżny (kryterium Leibniza),

$x = -7:$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – szereg zbieżny $(\alpha > 1)$

$\Rightarrow X = [-9, -7]$

## Twierdzenie

Jeśli promień zbieżności $R > 0$, to $\forall\, x \in (-R, R)$ prawdziwe są równości:

$$\int_0^x S(t)\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$S'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

przy czym promienie zbieżności szeregów po prawej stronie są równe $R$.

Przykłady:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \cdot \lambda = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R_1 = R$

Przykłady:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \cdot \lambda = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R_1 = R$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

$\lambda_2 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot (n+1)}{a_n \cdot n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \cdot \lambda = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R_2 = R$

Przykłady:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \cdot \lambda = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R_1 = R$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

$\lambda_2 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot (n+1)}{a_n \cdot n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \cdot \lambda = \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow R_2 = R$

(3) Wykazć, że $\forall\, x \in (-1, 1] \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n = \ln(1+x)$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,\ |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}\,,\ |x| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n = \frac{1}{1+t}\,, \quad t \in (-1,1)$

$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\right)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n\,dt =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} =$
$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}\,, \quad x \in (-1,1)$

$\int_0^x \frac{dt}{t+1} = \left.\ln|1+t|\right|_0^x = \ln(1+x)$

$\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}\,, \quad x \in (-1,1)$

$x = 1:\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ – zbieżny $\Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ – ciągła w $x = 1$ (lewostronnie) i $\ln(1 + x)$ – funkcja ciągła w $x = 1 \Rightarrow S(1) = \ln 2$

Stąd: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$

$x = 1:\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ – zbieżny $\Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ – ciągła w $x = 1$ (lewostronnie) i $\ln(1+x)$ – funkcja ciągła w $x = 1 \Rightarrow S(1) = \ln 2$

Stąd: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$

(4) Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,\quad R = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\,,\quad R = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n\,,$
$x \in (-1, 1)$

$x = \frac{1}{2}:\ \ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{(\frac{1}{2})^3} = 16$

# Szereg Taylora

## Szereg Taylora

Załóżmy, że $x_0 \in D_f$ i $f$ ma pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu $Q(x_0, r)$.

## Szereg Taylora

Załóżmy, że $x_0 \in D_f$ i $f$ ma pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu $Q(x_0, r)$.

$n \in \mathbb{N}$ – dowolne, ustalone, wtedy:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n, c \in (x, x_0)$$

$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \qquad n \to \infty$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

Jeśli w $Q(x_0, r)$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, to *szereg Taylora* funkcji $f$ w otoczeniu punktu $x_0$ zadany jest wzorem:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

Jeśli w $Q(x_0, r)$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, to *szereg Taylora* funkcji $f$ w otoczeniu punktu $x_0$ zadany jest wzorem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Jeśli $x_0 = 0$, to otrzymujemy *szereg Maclaurina*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Jeśli $x_0 = 0$, to otrzymujemy *szereg Maclaurina*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

## Uwagi

(1) Jeśli w pewnym otoczeniu punktu $x_0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, to

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

tzn. rozwinięcie funkcji w szereg Taylora w otoczeniu $x_0$ jest jednoznaczne.

(2) Jeśli w $Q(x_0, r)$ pochodne funkcji $f$ są ograniczone, tzn. $\exists\, M > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in Q(x_0, r) \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant M$, to $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Przykłady:

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ jest sumą szeregu Maclaurina $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ dla $x \in (-1, 1)$. Stąd np.:

$$f(x) = \frac{1}{x+4} = \frac{1}{4(1+\frac{x}{4})} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{4})} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{4}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{4^{n+1}}, \quad \left|\frac{x}{4}\right| < 1 \iff |x| < 4$$

Przykłady:

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ jest sumą szeregu Maclaurina $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ dla $x \in (-1, 1)$. Stąd np.:

$$f(x) = \frac{1}{x+4} = \frac{1}{4(1+\frac{x}{4})} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{4})} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{4}\right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{4^{n+1}}, \quad \left|\frac{x}{4}\right| < 1 \iff |x| < 4$$

(2) $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$ – szereg Maclaurina

Stąd np.:
$$f(x) = x^2 \cdot \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{n+2}}{n}, \quad x \in (-1, 1]$$

Przykłady:

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ jest sumą szeregu Maclaurina $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ dla $x \in (-1,1)$. Stąd np.:

$$f(x) = \frac{1}{x+4} = \frac{1}{4(1+\frac{x}{4})} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{4})} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{4}\right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{4^{n+1}}, \quad |\tfrac{x}{4}| < 1 \iff |x| < 4$$

(2) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1]$ – szereg Maclaurina

Stąd np.:
$$f(x) = x^2 \cdot \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{n+2}}{n}, \quad x \in (-1,1]$$

i możemy wyznaczyć pochodne dowolnego rzędu, np. $f^{(53)}(0)$:

$$a_{53}x^{53} \Rightarrow a_{53} = \frac{f^{(53)}(0)}{53!} \Rightarrow f^{(53)}(0) = a_{53} \cdot 53! = \frac{(-1)^{52}}{51} \cdot 53! = \frac{53!}{51}$$

(3) $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ (-1)^k\,, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Stąd

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(3) $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ (-1)^k\,, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Stąd

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(4) Analogicznie: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(3) $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \tfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ (-1)^k\,, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Stąd

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(4) Analogicznie: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(5) $f(x) = e^x$, niech $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ – zbieżny $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{nx^{n-1}}{n!} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!} = h(x) \Rightarrow h(x) = C \cdot e^x$$

bo: $\frac{dh}{dx} = h(x) \Rightarrow \ln|h| = x + C \Rightarrow h(x) = C \cdot e^x$ oraz
$h(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

Stąd $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

bo: $\frac{dh}{dx} = h(x) \Rightarrow \ln|h| = x + C \Rightarrow h(x) = C \cdot e^x$ oraz $h(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

Stąd $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(6) Wyznaczyć rozwinięcie w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 1$ funkcji $f(x) = xe^x$

$$f(x) = [(x-1)+1] \cdot e^{(x-1)+1} = e[(x-1)+1] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} =$$
$$= e\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n, \text{ gdzie}$$

$$a_n = \begin{cases} e\,, & n = 0 \\ e\left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right], & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(7) $f(x) = \sin^2 x$ rozwinąć w szereg Maclaurina

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$

bo: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ i $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

(7) $f(x) = \sin^2 x$ rozwinąć w szereg Maclaurina

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$

bo: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ i $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

(8)
$f(x) = \ln(1+3x+2x^2) = \ln(1+x)(1+2x) = \ln(1+x) + \ln(1+2x)$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$

$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n x^n}{n}, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Stąd:

$\ln(1+3x+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1+2^n) \frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

(9) Zapisać szereg Maclaurina dla funkcji $f(x) = \frac{x-3}{(x+1)^2}$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1+x)^2}\,, \quad x \in (-1,1)$

$$f(x) = \frac{x-3}{(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1}\,, \quad x \in (-1,1)$$

(9) Zapisać szereg Maclaurina dla funkcji $f(x) = \frac{x-3}{(x+1)^2}$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1+x)^2}\,, \quad x \in (-1,1)$$

$$f(x) = \frac{x-3}{(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^{n} - 3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^{n-1} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1}\,, \quad x \in (-1,1)$$

(10) Korzystając z odpowiedniego szeregu, obliczyć z dokładnością do $0,0001$ wyrażenie $\ln 1,1$.

Uwaga:

W celu obliczenia przybliżonej wartości funkcji z żądaną dokładnością posługujemy się szeregami w tych przypadkach, gdy szereg jest przemienny. Wtedy błąd przybliżenia jest mniejszy od bezwzględnej wartości pierwszego z odrzuconych wyrazów.

W pozostałych przypadkach korzystamy z wzoru Taylora lub Maclaurina.

Uwaga:

W celu obliczenia przybliżonej wartości funkcji z żądaną dokładnością posługujemy się szeregami w tych przypadkach, gdy szereg jest przemienny. Wtedy błąd przybliżenia jest mniejszy od bezwzględnej wartości pierwszego z odrzuconych wyrazów.

W pozostałych przypadkach korzystamy z wzoru Taylora lub Maclaurina.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$x = 0,1$$

$$\ln 1,1 = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \ldots$$

$$\left| -\frac{(0,1)^4}{4} \right| < 0,0001$$

Stąd

$$\ln 1,1 \approx 0,1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{3} \approx 0,0953$$

Stąd

$\ln 1,1 \approx 0,1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{3} \approx 0,0953$

(11) Obliczyć j.w. $\sqrt[4]{17}$.

$f(x) = x^m$ szereg Taylora $x_0 = 1$, $f(1) = 1$

$f'(x) = mx^{m-1}$, $f'(1) = m$

$f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$, $f''(1) = m(m-1)$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots(m-k+1)x^{m-k}$

$f^{(k)}(1) = m(m-1)\ldots(m-k+1)$

$x^m =$
$$= 1 + m(x-1) + \frac{m(m-1)}{2}(x-1)^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}(x-1)^n + \ldots$$

Podstawiając $x - 1 = t$ otrzymujemy szereg Maclaurina

$$(1+t)^m = 1 + mt + \frac{m(m-1)}{2}t^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}t^n + \ldots$$

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$x^m =$
$= 1+m(x-1)+\frac{m(m-1)}{2}(x-1)^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}(x-1)^n+\ldots$

Podstawiając $x-1=t$ otrzymujemy szereg Maclaurina

$$(1+t)^m = 1 + mt + \frac{m(m-1)}{2}t^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}t^n + \ldots$$

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$$

zbieżność szeregu dwumiennego:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

z kryterium d'Alemberta:

$g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(m-n)x}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-n+m}{n+1}\right| =$
$= |x| < 1 \Rightarrow x \in (-1,1)$

$x = \frac{1}{16}\,,\ m = \frac{1}{4}$

$2\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left[1 + \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2} + \ldots\right]$

$a_1 = 1\,,\ a_2 \approx 0,01562\,,\ a_3 \approx -0,00037\,,\ a_4 \approx 0,00001$

$2a_4 < 0,0001$ stąd

$\sqrt[4]{17} \approx 2(a_1 + a_2 + a_3) \approx 2,0305$

$x = \frac{1}{16}\,,\;\; m = \frac{1}{4}$

$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left[1 + \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2} + \ldots\right]$

$a_1 = 1\,,\;\; a_2 \approx 0,01562\,,\;\; a_3 \approx -0,00037\,,\;\; a_4 \approx 0,00001$

$2a_4 < 0,0001$ stąd

$\sqrt[4]{17} \approx 2(a_1 + a_2 + a_3) \approx 2,0305$

(12) Wyznaczyć rozwinięcie funkcji $\operatorname{arctg} x$ w szereg Maclaurina korzystając z całkowania szeregu wyraz po wyrazie i z wzoru $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + \ldots$

$R = 1\,,\quad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x =$
$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\,,\quad x \in (-1,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\,,\quad |x| \leqslant 1$$

(13) Napisać szereg Maclaurina dla funkcji $f(x) = \arcsin$ korzystając z tego, że $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ rozwijamy w szereg dwumienny:
$x = -t^2\,, \; m = -\frac{1}{2}$

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot t^{2n} + \ldots$$

powyższy szereg całkujemy wyraz po wyrazie w granicach od 0 do $x$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \qquad |x| \leqslant 1$$

(14) Rozwijając w szereg Maclaurina funkcje podcałkowe napisać rozwinięcia w szereg całek:

(a) $\int \sin x^2 \, dx$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$$

całkujemy szereg wyraz po wyrazie

$$\int \sin x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^{11}}{5! \cdot 11} - \frac{x^{15}}{7! \cdot 15} + \ldots + C \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(14) Rozwijając w szereg Maclaurina funkcje podcałkowe napisać rozwinięcia w szereg całek:

(a) $\int \sin x^2 \, dx$

$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$

całkujemy szereg wyraz po wyrazie

$\int \sin x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^{11}}{5! \cdot 11} - \frac{x^{15}}{7! \cdot 15} + \ldots + C \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(b) $\int \sqrt{x} e^x \, dx$

$\int \sqrt{x} e^x \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \right) dx =$

$= \int \left( x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2!} x^{\frac{5}{2}} + \ldots + \frac{1}{n!} x^{\frac{2n+1}{2}} + \ldots \right) dx =$

$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \ldots + \frac{2}{n!(2n+3)} x^{\frac{2n+3}{2}} + \ldots + C \quad \forall\, x \geqslant 0$

(c) $\int \sqrt{1-x^3}\,dx$

$$\sqrt{1-x^3} =$$
$$= (1-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1!\cdot 2}x^3 - \frac{1}{2!\cdot 2^2}x^6 - \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}x^9 - \ldots$$

Stąd:

$$\int \sqrt{1-x^3}\,dx = x - \frac{x^4}{1!\cdot 2\cdot 4} - \frac{x^7}{2!\cdot 2^2\cdot 7} - \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3\cdot 10}x^{10} - \ldots + C \qquad |x| < 1$$

(c) $\int \sqrt{1-x^3}\, dx$

$\sqrt{1-x^3} =$
$= (1-x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1!\cdot 2} x^3 - \frac{1}{2!\cdot 2^2} x^6 - \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3} x^9 - \ldots$

Stąd:
$\int \sqrt{1-x^3}\, dx = x - \frac{x^4}{1!\cdot 2\cdot 4} - \frac{x^7}{2!\cdot 2^2\cdot 7} - \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3\cdot 10} x^{10} - \ldots + C \qquad |x| < 1$

(15) Za pomocą szeregów obliczyć z dokładnością do $0,001$ przybliżone wartości całek:

(a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

szereg dwumienny: $x = t^4\,,\ \ m = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} t^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} t^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} t^{12} + \ldots \qquad |t| < 1$

Stąd

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad \left[t - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{t^9}{9} - \ldots\right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13\cdot 2^{13}} + \ldots$$

$a_1 = 0,5\,,\ a_2 \approx -0,00313\,,\ a_3 \approx 0,0008$

stąd: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \approx a_1 + a_2 \approx 0,4969$

Stąd

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad \left[t - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{t^9}{9} - \ldots\right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13\cdot 2^{13}} + \ldots$$

$a_1 = 0,5\,,\ a_2 \approx -0,00313\,,\ a_3 \approx 0,0008$

stąd: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \approx a_1 + a_2 \approx 0,4969$

(b) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$

$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots \qquad x \geqslant 0$

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx = \quad \left[x - \frac{x^2}{2!\cdot 2} + \frac{x^3}{4!\cdot 3} - \frac{x^4}{6!\cdot 4} + \ldots\right] \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!\cdot 2} + \frac{1}{4!\cdot 3} - \frac{1}{6!\cdot 4} + \ldots$$

$a_5 < 0,0001$ więc

$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx \approx a_1 + \ldots + a_4 \approx 0,7635$

(c) $\int_1^{1,5} \frac{1}{v} \operatorname{arctg} \frac{v}{4} \, dv$

Podstawiając $x = \frac{v}{4}$ w szeregu Maclaurina dla $\operatorname{arctg} x$ otrzymujemy

$$\operatorname{arctg} \frac{v}{4} = \frac{v}{4} - \frac{v^3}{4^3 \cdot 3} + \frac{v^5}{4^5 \cdot 5} - \frac{v^7}{4^7 \cdot 7} + \dots \qquad |v| \leqslant 4$$

$$\int_1^{1,5} \frac{1}{v} \operatorname{arctg} \frac{v}{4} \, dv = \left[ \frac{v}{4} - \frac{v^3}{4^3 \cdot 3} + \frac{v^5}{4^5 \cdot 5} - \frac{v^7}{4^7 \cdot 7} + \dots \right] \Big|_1^{1,5} =$$
$$\approx 0,125 - 0,00412 + 0,00026 - 0,00002 + \dots$$

$|a_4| < 0,0001$ stąd

$$\int_1^{1,5} \frac{1}{v} \operatorname{arctg} \frac{v}{4} \, dv \approx a_1 + a_2 + a_3 \approx 0,1211$$