POLE MAGNETYCZNE

- Siła Lorentza i elektrodynamiczna
- Dipol magnetyczny
- Wektor indukcji magnetycznej, prawo Ampere'a
- Potencjał wektorowy pola magnetycznego
- Prawo Biota-Savarta
- Wektor natężenia pola magnetycznego, magnetyzacja

POLE MAGNETYCZNE

Siła Lorentza

Działa na ładunek *q*, poruszający się z prędkością ***v*** w polu magnetycznym o indukcji ***B***

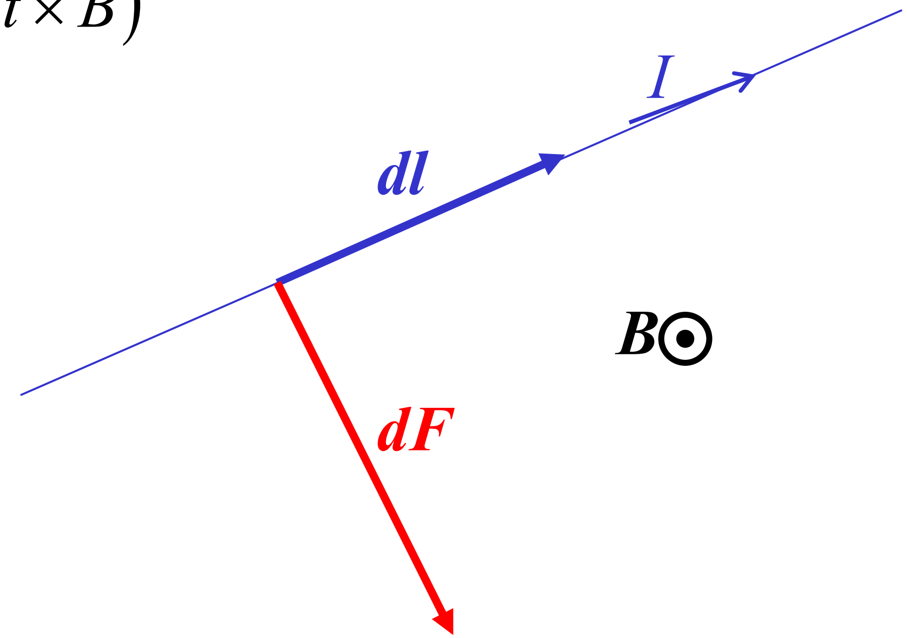
$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

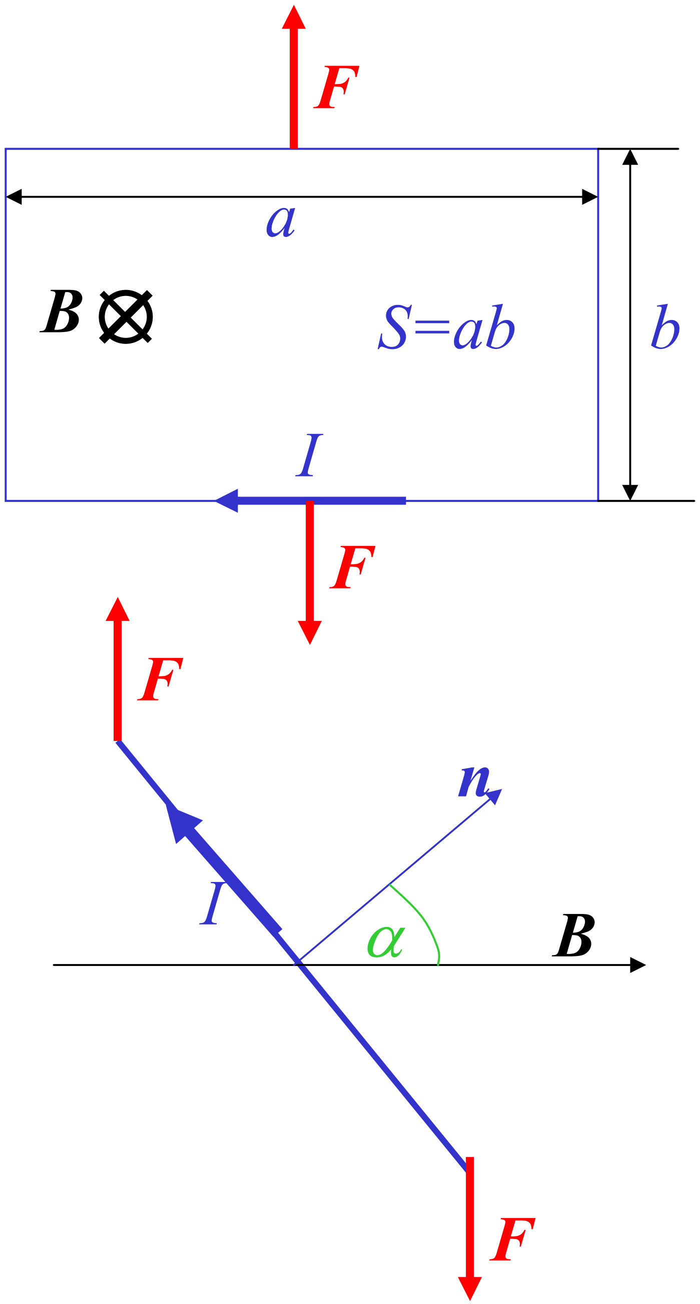
Siła elektrodynamiczna

Wskutek działania siły Lorentza na poruszające się z prędkością ***v*** ładunki, tworzące płynący w przewodniku prąd elektryczny, na element długości przewodnika ***dl***, umieszczony w polu magnetycznym o indukcji ***B***, działa siła

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} = I\left(\vec{v}dt \times \vec{B}\right)$$

$$\boxed{d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}}$$





DIPOL MAGNETYCZNY

Zamknięty obwód z prądem w zewnętrznym polu magnetycznym

$$\left|\vec{F}\right| = BIa$$

$$M_F = 2BIa\frac{b}{2}\sin\alpha = Iab\sin\alpha = ISB\sin\alpha$$

Moment magnetyczny $\boxed{\vec{\mu} = IS\vec{n}}$

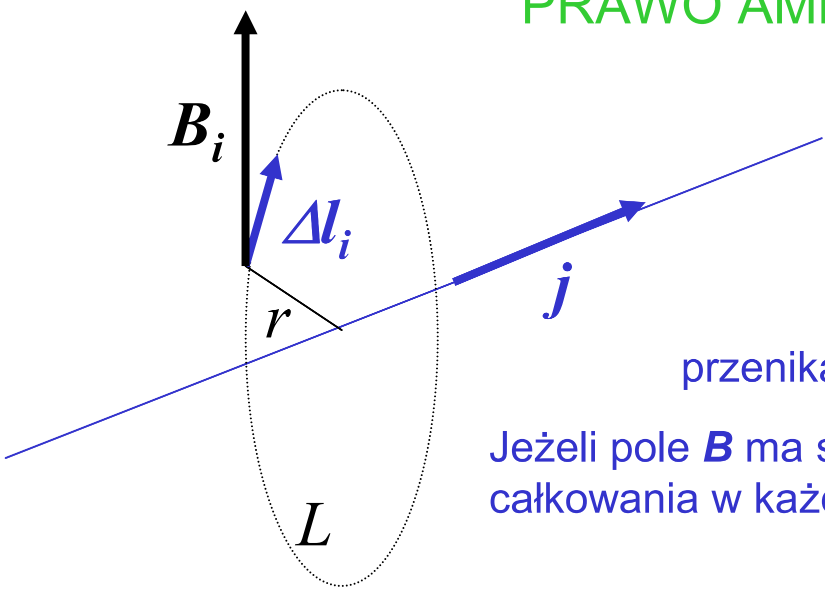
$$M_F = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Energia potencjalna dipola magnetycznego w polu magnetycznym jest równa pracy, którą należy wykonać, by obrócić ramkę od kąta $\pi/2$ do α.

$$E_p = \int_{\pi/2}^{\alpha} M_F d\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha} \mu B \sin\alpha d\alpha = -\mu B\cos\alpha$$

$$\boxed{E_p = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}}$$

PRAWO AMPERE'A



$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\vec{B}_i\cdot\Delta\vec{l}_i \equiv \boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

przenikalność magnetyczna próżni

Jeżeli pole ***B*** ma stałą wartość i jest styczne do konturu całkowania w każdym punkcie, to
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 I$$

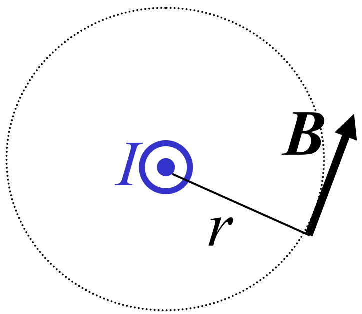
Postać różniczkowa prawa Ampere'a

$$\lim_{S\to 0}\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \lim_{S\to 0}\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \mu_0 \vec{j}\cdot\vec{S}$$

$$\lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \left(rot\vec{B}\right)_z = \mu_0 j_z$$

$$\boxed{rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Pole magnetyczne jest polem wirowym



Pole od przewodnika prostoliniowego z prądem

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B = B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Ponieważ nie istnieją swobodne ładunki magnetyczne, z prawa Gaussa wynika, że

$$\boxed{div\vec{B} = 0}$$

POTENCJAŁ WEKTOROWY POLA MAGNETYCZNEGO

Ponieważ pole ***B*** jest wirowe, tj. jego rotacja nie jest tożsamościowo równa zeru, nie jest ono gradientem żadnego pola skalarnego (gdyż rotacja gradientu jest tożsamościowo równa zeru), więc ***B*** nie jest polem potencjalnym (zachowawczym).

Można jednak wprowadzić **potencjał wektorowy *A***

$$\boxed{\vec{B} = rot\vec{A}, \text{ z cechowaniem } div\vec{A} = 0}$$

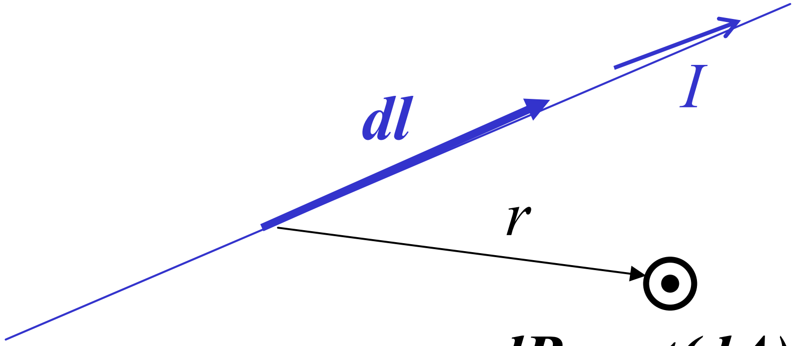
Uwaga: $\forall \vec{u} \quad div(rot\vec{u}) = 0 \Rightarrow div\vec{B} = div(rot\vec{A}) = 0$

Równanie Poissona dla potencjału wektorowego

$$rot\vec{B} = rot(rot\vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \underbrace{(\nabla \cdot \vec{A})}_{=div\vec{A}=0}\nabla - \underbrace{(\nabla \cdot \nabla)}_{=\nabla^2}\vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}} \Rightarrow \nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z$$



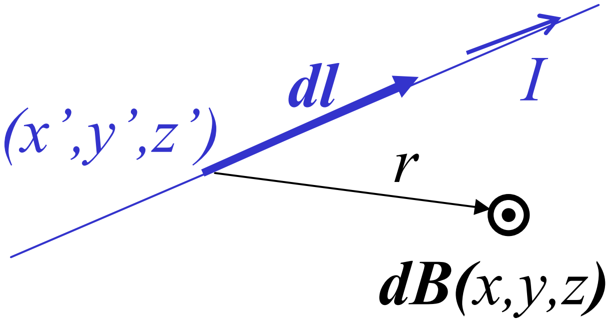
dB=rot(dA)

Potencjał wektorowy pola magnetycznego, pochodzący od elementu przewodnika dl.

Równanie Poissona ma rozwiązanie analogiczne jak równanie Poissona dla potencjału elektrycznego ładunku punktowego

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}}{r}$$

PRAWO BIOTA-SAVARTA



Pole w punkcie *(x,y,z)* pochodzące od elementu ***dl*** długości przewodnika, zaczepionego w punkcie *(x',y',z')*

$$d\vec{B} = rot\left(d\vec{A}\right) = rot\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}}{r}\right), \qquad d\vec{l} = \left[dx', dy', dz'\right]$$

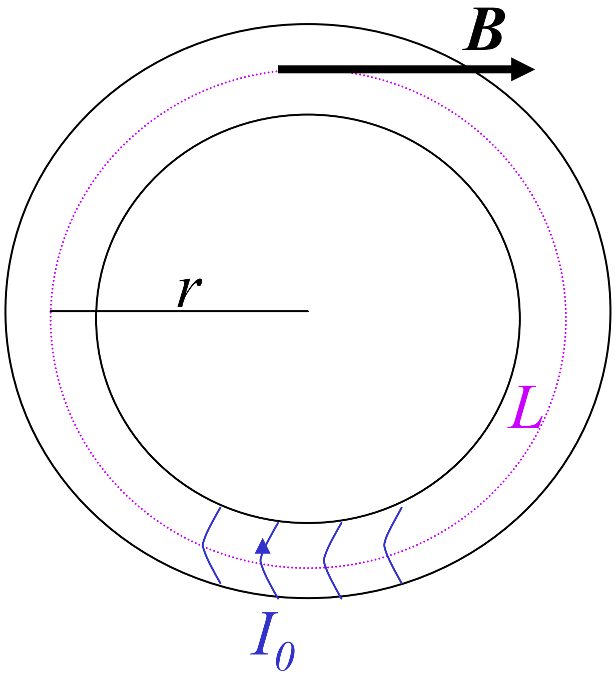
$$r = \sqrt{\left(x-x'\right)^2 + \left(y-y'\right)^2 + \left(z-z'\right)^2}$$

Ponieważ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{d\left(r^{-1}\right)}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial x} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{x-x'}{r} = -\dfrac{r_x}{r^3}, \ldots$ to

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{dx'}{r} & \dfrac{dy'}{r} & \dfrac{dz'}{r} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\begin{bmatrix} -dz'\dfrac{r_y}{r^3} + dy'\dfrac{r_z}{r^3} \\ -dx'\dfrac{r_z}{r^3} + dz'\dfrac{r_x}{r^3} \\ -dy'\dfrac{r_x}{r^3} + dx'\dfrac{r_y}{r^3} \end{bmatrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ dx' & dy' & dz' \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r},} \qquad \vec{r} = \left[x-x', y-y', z-z'\right]$$

POLE MAGNETYCZNE W MAGNETYKACH



Cewka toroidalna z rdzeniem magnetycznym

Ośrodki magnetyczne wykazują istnienie wewnętrznego momentu magnetycznego, zależnego od indukcji magnetycznej w ośrodku. Moment ten powoduje wzrost indukcji ***B*** w porównaniu do tej, jaką miałaby w nieobecności ośrodka.

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I = N_0\left(I_0 + I_M\right)\cdot\mu_0$$

Ilość zwojów cewki

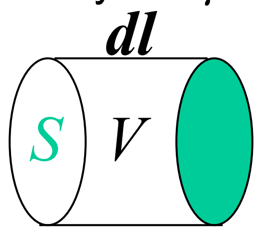
Rzeczywisty prąd w każdym zwoju

Równoważna wartość natężenia prądu, opisująca wpływ zaindukowanego momentu magnetycznego

Niech moment magnetyczny ośrodka w objętości *V* wynosi μ

$$\vec{\mu} \equiv I_M n d\vec{l}\, S$$

gęstość zwojów cewki



Magnetyzacja - moment magnetyczny jednostki objętości

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}}{V} = \frac{\vec{\mu}}{S\left|d\vec{l}\right|} = I_M n \frac{d\vec{l}}{\left|d\vec{l}\right|}$$

$$\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} = I_M n \oint_L \frac{d\vec{l}}{\left|d\vec{l}\right|}\cdot d\vec{l} = I_M n \oint_L dl = 2\pi r I_M n = I_M N_0$$

$$\Rightarrow \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0 N_0 + \mu_0 \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} \Rightarrow \oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)\cdot d\vec{l} = I_0 N_0$$

Natężenie pola magnetycznego

$$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}$$

TRZY WEKTORY MAGNETYCZNE

$$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = N_0 I_0}$$

Prawo Ampere'a w magnetykach, napisane dla wektora natężenia pola magnetycznego, uwzględnia tylko wpływ prądów rzeczywistych, płynących w ośrodku. Wpływ zaindukowanych momentów magnetycznych uwzględnia względna przenikalność magnetyczna.

Dla materiałów paramagnetycznych i diamagnetycznych zakładamy

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}, \quad \mu_r = const$$ względna przenikalność magnetyczna

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B} - \mu_0 \vec{H}\right) = \frac{1}{\mu_0}(\mu_r - 1)\mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} = \chi_m \vec{H}, \quad \chi_m \equiv \mu_r - 1 = const$$ podatność magnetyczna

Dla paramagnetyków χ_m >0 => ***M*** równoległe do ***H***

Dla diamagnetyków χ_m <0 => ***M*** antyrównoległe do ***H***

Związki między wektorami magnetycznymi

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_r \mu_0 \vec{H} \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \\ \vec{M} &= \chi_m \vec{H} \end{aligned}}$$