

Metody Probabiistyczne i Statystyka

Z_4

1. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o dystrybuancie

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ a\sqrt{x} + b & , \quad 1 \leq x < 4 \\ 1 & , \quad x \geq 4 \end{cases}.$$

Wyznaczyć stałe a i b oraz gęstość zmiennej losowej X . Obliczyć $P(X^2 \leq 4)$.

2. Sprawdzić, czy istnieje $a \in \mathbb{R}$, przy którym funkcja

$$f(x) = (ax - 1) \cdot \mathbf{1}_{(0;1)}(x)$$

jest gęstością rozkładu jednowymiarowej zmiennej losowej.

3. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} a & , \quad x \in [-1; 0) \\ b(x^2 + x) & , \quad x \in [0; 1] \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases},$$

gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Wiadomo, że $P(X < 0) = \frac{1}{6}$.

(a) Wyznaczyć a i b oraz dystrybuantę zmiennej losowej X .

(b) Obliczyć $P\left(|X| > \frac{1}{2}\right)$.

4. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę wylosowaną z odcinka $[0; 3]$. Obliczyć $P(X^2 - 5X + 6 > 0)$ oraz EX .

5. Rzucamy niesymetryczną monetą ($P(O) = p \in (0; 1)$) do momentu wyrzucenia orła lub dwóch reszek z rzędu. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

6. Uрна zawiera pięć kul: dwie oznaczone są symbolem 1 zł, dwie symbolem 5 zł i jedna 15 zł. Przystępując do gry uczestnik płaci 10 zł. Jego wygraną stanowi suma uzyskana na dwóch losowo wybranych kulach. Czy tak opisana gra jest sprawiedliwa?

Uwaga: W tym przypadku gra jest sprawiedliwa, jeśli wygrana jest równa kwocie, którą uczestnik wpłacił, aby przystąpić do gry.

7. Dwaj studenci umówili się na Placu Politechniki między godziną 16⁰⁰ i 17⁰⁰. Niech T oznacza czas oczekiwania osoby, która przyszła pierwsza, na drugą. Wyznaczyć dystrybuantę oraz gęstość zmiennej losowej T . Obliczyć ET .