Wykład 12
Macierz w postaci kanonicznej Jordana

Niech A - macierz kwadratowa stopnia n o elementach z ciała $\mathbb{K}$.

Jak obliczyć np. A^{100}?

Czasami to nie jest trudne, np.

1. Jeśli A jest macierzą diagonalną tzn. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, to $A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{bmatrix}$.

2. Niech $B = N \cdot A \cdot N^{-1}$, wtedy $B^k = N \cdot A^k \cdot N^{-1}$.

Przykład. Niech A będzie macierzą przekształcenia liniowego $\varphi : V \to V$ w bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni liniowej V, zaś B macierzą tego samego przekształcenia w bazie $\mathcal{B}$.

Uwaga. Jeśli macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

jest macierzą przekształcenia liniowego $\phi : V \to V$ w bazie $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tz. $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi)$, to $\phi(v_1) = a_{11} \cdot v_1$, $\phi(v_2) = a_{22} \cdot v_2, \ldots$, $\phi(v_n) = a_{nn} \cdot v_n$,
czyli

$$\phi(\mathrm{Lin}(v_i)) \subseteq \mathrm{Lin}(v_i)$$

dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

Podprzestrzenie niezmiennicze

Definicja 1 *Podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy* ***podprzestrzenią niezmienniczą*** *względem przekształcenia liniowego $\phi : V \to V$, gdy $\phi(U) \subseteq U$, (czyli $\forall u \in U$ $\phi(u) \in U$).*

Uwaga. Jeżeli U jest podprzestrzenią niezmienniczą przestrzeni V względem przekształcenia liniowego $\phi : V \to V$ i $(v_1, \ldots v_k)$ - baza U oraz $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ - baza V, to macierz przekształcenia ϕ w bazie $\mathcal{A}$ ma postać:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline \mathbf{0} & A_2 \end{array}\right],$$

gdzie A_1 - macierz kwadratowa stopnia k, A_2 - macierz kwadratowa stopnia $n-k$, $\mathbf{0}$ - macierz zerowa.

Dlaczego? Rozważmy i-tą kolumnę macierzy $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi)$, $i \leqslant k$. Zawiera ona współczynniki wektora $\phi(v_i)$. Ponieważ $\phi(v_i) \in U$, to współczynniki przy $v_{k+1}, \ldots, v_n$ są równe zero.

Gdyby dodatkowo przestrzeń $W = \mathrm{Lin}(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ była podprzestrzenią niezmienniczą względem ϕ, to macierz przekształcenia miałaby postać:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A_2 \end{array}\right].$$

Wtedy $V = U \cup W$ i $U \cap W = \{\mathbb{O}\}$.

Wektory własne

Definicja 2 *Wektor $v \in V$, $v \neq \mathbb{O}$, nazywamy **wektorem własnym** przekształcenia $\phi : V \to V$, jeśli istnieje $\lambda \in \mathbb{K}$, takie że $\phi(v) = \lambda \cdot v$. Wtedy λ nazywamy **wartością własną** przekształcenia ϕ, a v - wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.*

Uwaga. Wektor $v \in V$, $v \neq \mathbb{O}$, jest wektorem własnym przekształcenia ϕ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Lin}(v)$ jest jednowymiarową podprzestrzenią przestrzeni V niezmienniczą względem przekształcenia ϕ.

Wielomian charakterystyczny

Niech $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia

$$\phi : V \to V$$

w pewnej bazie $\mathcal{A}$. Wówczas, jeśli v jest wektorem własnym przekształcenia ϕ, to

$$\phi(v) = A \cdot v = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot E) \cdot v = \mathbb{O}$$

to równanie ma **niezerowe** rozwiązania $\Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot E) = 0$.

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \text{ jest wielomianem stopnia } n \text{ zmiennej } \lambda.$$

Nazywamy go **wielomianem charakterystycznym** przekształcenia ϕ lub wielomianem charakterystycznym macierzy A.
Niech C będzie macierzą przekształcenia ϕ w bazie $\mathcal{B}$:

$$C = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id) = B^{-1} \cdot A \cdot B,$$
$$\det(C - \lambda \cdot E) = \det(A - \lambda \cdot E)$$

Wniosek 1 *Wielomian charakterystyczny nie zależy od macierzy przekształcenia, tylko od samego przekształcenia.*

Uwaga. Wartości własne przekształcenia ϕ są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego.

Uwaga. $\det(A - \lambda \cdot E) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \cdot A_1 + \ldots + (-1)\lambda \cdot A_{n-1} + A_n$,
gdzie A_k jest sumą minorów głównych k-tego stopnia macierzy A.

Wyznaczanie wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ_0

1. Zbiór wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ_0 uzupełniony o wektor $\mathbb{O}$ tworzy podprzestrzeń przestrzeni V, ozn. $N_{\lambda_0}^{(1)}$.
2. Macierz $[A - \lambda_0 \cdot E]$ jest macierzą pewnego przekształcenia liniowego $\psi : V \to V$. Wtedy $N_{\lambda_0}^{(1)} = \ker\psi$ i $\dim N_{\lambda_0}^{(1)} = \dim V - r[A - \lambda_0 \cdot E]$.

Uwaga.

1. $1 \leqslant \dim N_{\lambda_0}^{(1)} \leqslant k$, gdzie k - krotność pierwiastka λ_0 w wielomianie charakterystycznym.
2. $N_{\lambda_0}^{(1)}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą względem ϕ.
3. Jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2$ - wartości własne, to $N_{\lambda_1}^{(1)} \cap N_{\lambda_2}^{(1)} = \{\mathbb{O}\}$.

Twierdzenie 2 *Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym tego samego przekształcenia są liniowo niezależne.*

Wniosek 3 *Niech V - przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$, $\dim V = n$, $\phi : V \to V$ - przekształcenie liniowe. Jeśli ϕ ma n różnych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, to odpowiadające im wektory własne $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tworzą bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni V i macierz przekształcenia ϕ w tej bazie jest macierzą diagonalną i ma postać*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 4 *Jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - różne wartości własne i $\dim N_{\lambda_i}^{(1)} = k_i$, gdzie k_i - krotność pierwiastka λ_i w wielomianie charakterystycznym, to macierz przekształcenia ϕ w bazie utworzonej z wektorów własnych jest diagonalna.*