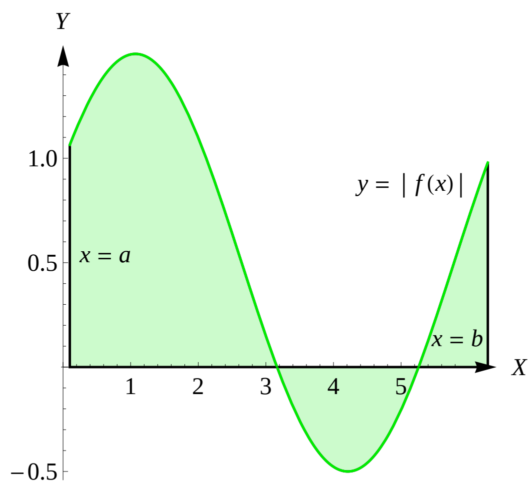
# WYKŁAD 9

## Zastosowania geometryczne całki oznaczonej

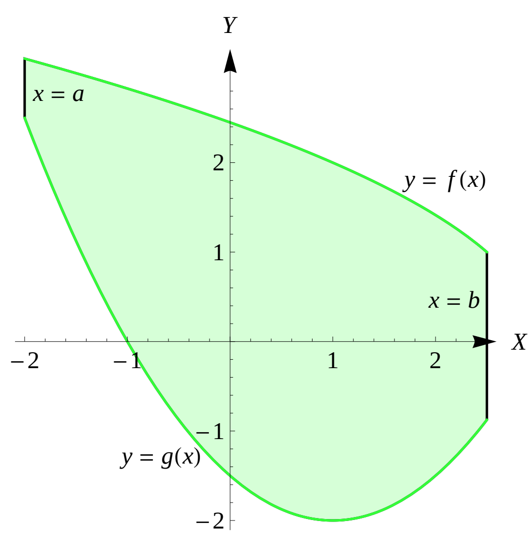
### Obliczanie pól figur płaskich

1. $D$ – obszar o polu $|D|$ ograniczony wykresem ciągłej funkcji $f$, osią $OX$ i odcinkami prostych $x = a$, $x = b$. Wtedy




$$|D| = \int_a^b |f(x)| dx$$

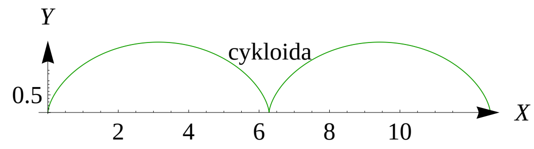
2. $D = \{(x, y) : x \in \langle a; b\rangle, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$, gdzie funkcje $f, g$ są ciągłe w przedziale $\langle a; b\rangle$. Wtedy



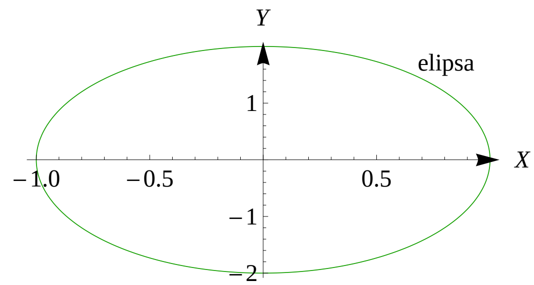

$$|D| = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

## Przedstawienia parametryczne

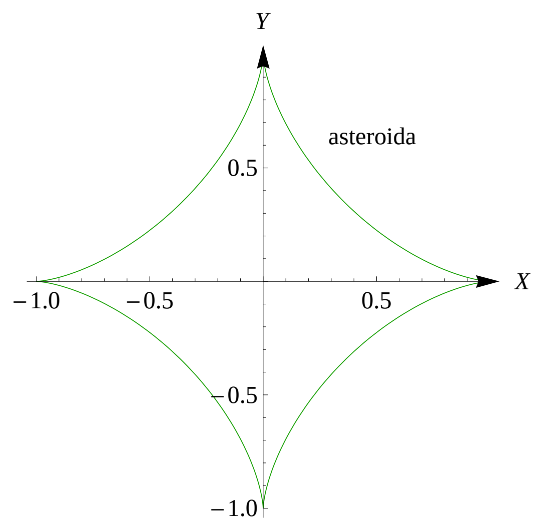
**Definicja 1.** Funkcja $f : X \to Y$ jest określona parametrycznie, jeśli istnieją funkcje: różnowartościowa $x : T \to X$ oraz $y : T \to Y$ takie, że $f = y \circ x^{-1}$.
Mówimy wówczas , że funkcja $f$ ma przedstawienie parametryczne (in.parametryzację) wyrażające się funkcjami $x(t)$ i $y(t)$. Zmienną $t \in T$ nazywamy parametrem.




$$x(t) = r \cdot (t - \sin t)\ ,\ y(t) = r \cdot (1 - \cos t)\,,\ r > 0\,,\ t \in \mathbb{R}^+$$




$$x(t) = a \cdot \cos t\,,\ y(t) = b \cdot \sin t\,,\ a\,,\ b > 0\,,\ t \in \langle 0\,;\ 2\pi\rangle$$




$$x(t) = a \cdot \cos^3 t\,,\ y(t) = a \cdot \sin^3 t\,,\ a > 0\,,\ t \in \langle 0\,;\ 2\pi\rangle$$

**Uwaga 1.** Jeżeli funkcja $f$ jest określona parametrycznie przez funkcje $x(t)$ i $y(t)$ oraz istnieją pochodne $x'(t)\,,\ y'(t)$ i $x'(t) \neq 0$, to

$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

## Zastosowania geometryczne całki oznaczonej c.d.

Załóżmy, że $D = \{(x, y) : x \in \langle a; b\rangle\, ,\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, a funkcja $f$ jest opisana parametrycznie:

$x = x(t), y = y(t)\, ,\, t \in \langle \alpha; \beta\rangle$;

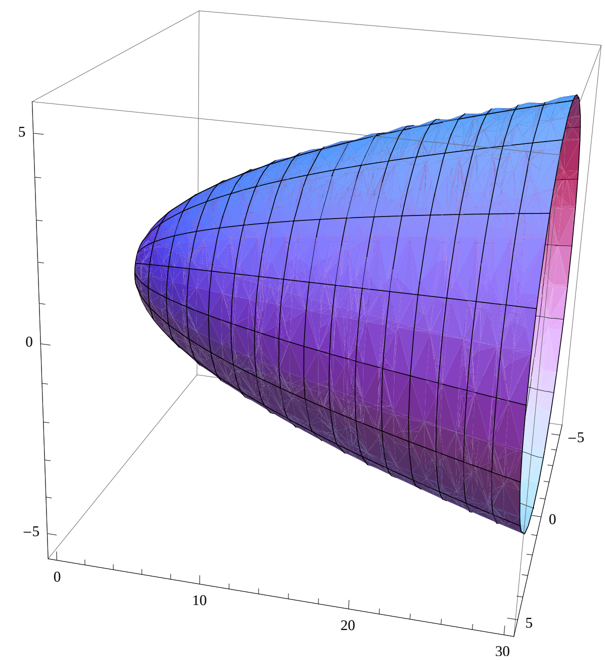
funkcje $x(t), y(t)$ są klasy $C^1$ w przedziale $\langle \alpha; \beta\rangle$ i $x'(t) > 0$;

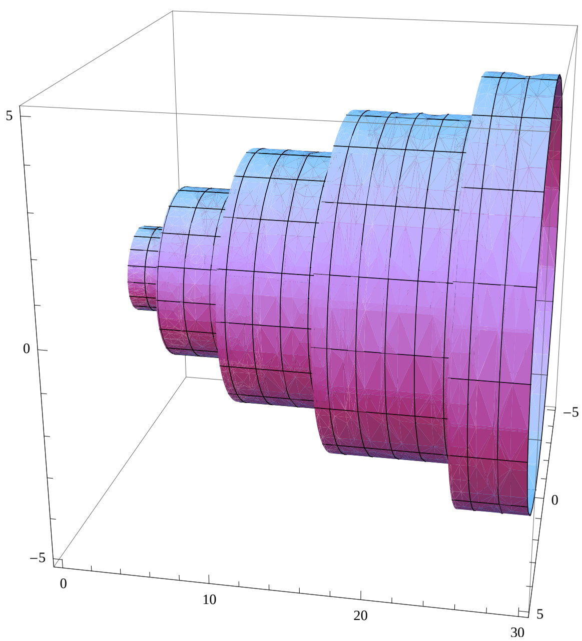
$a = x(\alpha)\, ,\, b = x(\beta)$,

Wtedy $|D| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)dt$

## Obliczanie objętości brył obrotowych

Zał. $f$ jest funkcją nieujemną i ciągłą na przedziale $\langle a; b\rangle$. Obracamy jej wykres wokół osi $OX$.




Wówczas objętość $|V|$ bryły ograniczonej tą powierzchnią jest równa

$$|V| = \pi \int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$$

Jeśli funkcja $f$ jest opisana parametrycznie :

$x = x(t), y = y(t)\, ,\, t \in \langle \alpha; \beta\rangle$;

funkcje $x(t), y(t)$ są klasy $C^1$ w przedziale $\langle \alpha; \beta\rangle$ i $x'(t) > 0$;

$a = x(\alpha)\, ,\, b = x(\beta)$,

to

$$|V| = \pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} y^2(t) \cdot x'(t)dt$$

## Obliczanie długości łuku

1. Jeżeli $\widehat{AB}$ jest zwykłym łukiem (bez przecięć) o parametryzacji:
   $x = x(t), y = y(t)\ ,\ t \in \langle \alpha; \beta \rangle;$

   funkcje $x(t), y(t)$ są klasy $C^1$ w przedziale $\langle \alpha; \beta \rangle$;
   $A = (x(\alpha), y(\alpha))\ ,\ B = (x(\beta), y(\beta)),$
   to jego długość $|\widehat{AB}|$ można obliczyć ze wzoru

$$|\widehat{AB}| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

2. Jeżeli funkcja $f$ jest klasy $C^1$ na przedziale $\langle a; b \rangle$, to długość $L$ łuku wykresu funkcji $f$ jest równa

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$