

Metody Probabilistyczne i Statystyka

Z_8

1. Na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) , gdzie $\Omega = [-1; 2]$ oraz P jest prawdopodobieństwem geometrycznym, dane są zmienne losowe

$$X(\omega) = \begin{cases} -2 & , \quad \omega \in [-1; 0) \cup (1, 5; 2] \\ 0 & , \quad \omega \in [0; 1, 5] \end{cases} \quad , \quad Y(\omega) = \begin{cases} -2 & , \quad \omega \in [-1; 1] \\ 2 & , \quad \omega \in (1; 2] \end{cases} .$$

- (a) Sprawdzić, czy X i Y są niezależne;
(b) Obliczyć $P(X^2 + Y^2 > 4)$ oraz $P(X + Y \leq 0)$.
2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny określony wzorem:

$$P(X = k, Y = l) = \frac{n!}{k! l! (n - k - l)!} p_1^k p_2^l (1 - p_1 - p_2)^{n - k - l},$$

gdzie $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_1 + p_2 < 1$, $k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$ i $k + l \leq n$ (dwuwymiarowy rozkład Bernoulliego z parametrami: p_1, p_2, n). Wyznaczyć rozkłady brzegowe. Zbadać ich niezależność.

3. Niech X i Y oznaczają czas pracy (w dniach) dwóch serwerów na uczelni. Z doświadczenia wynika, że wektor (X, Y) ma rozkład ciągły z gęstością

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & , \quad x > 0, y > 0 \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases} .$$

- (a) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
(b) Obliczyć $P(1 < X \leq 3, 1 \leq Y < 2)$ oraz $P(Y > 1 | X \leq 2)$;
(c) Obliczyć prawdopodobieństwo, że łączny czas pracy obu serwerów będzie przekraczał 100 dni.
4. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $N(0, 1)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że długość wektora $[X, Y]$ jest mniejsza niż 4.
5. Zmienne losowe X i Y są niezależne. X ma rozkład jednostajny w przedziale $(1; 4)$, natomiast Y ma rozkład jednostajny w przedziale $(0; 5)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pole koła o promieniu X jest mniejsze niż pole prostokąta o bokach $\pi \cdot Y$ i $X + 2Y$.
6. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o gęstości

$$f(x, y) = \frac{1}{6\pi} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{18} [5x^2 + 2x(y + 1) + 2(y + 1)^2] \right\}.$$

Wyznaczyć parametry m , C oraz ϱ tego rozkładu. Wyznaczyć gęstości rozkładów brzegowych.