Wykład 4
Liniowa niezależność wektorów

Niech $(V, +)$ - przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$.

Definicja 1 *Skończony niepusty układ wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ jest **liniowo niezależny** (ozn. lnz), jeśli spełniony jest warunek:*

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K} \quad \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k = \mathbb{O}_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Definicja 2 *Układ wektorów jest **liniowo zależny** (ozn. lz), jeśli nie jest liniowo niezależny.*

Uwaga. Układ wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z wektorów v_i można zapisać jako kombinację liniową pozostałych.

Uwaga. Jeżeli układ wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ jest liniowo niezależny, to układ wektorów $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$, gdzie $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leqslant k$, jest liniowo niezależny.

Baza i wymiar przestrzeni liniowej

Niech $(V, +)$ - przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$.

Definicja 3 *Układ wektorów $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ nazywamy **bazą (skończoną) przestrzeni** V, jeśli*

1. *układ $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ jest liniowo niezależny,*
2. $\mathrm{Lin}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = V$.

Uwaga. Każda przestrzeń liniowa ma bazę (niekoniecznie złożoną ze skończonej liczby wektorów). Nas będą interesowały tylko bazy skończone.

Twierdzenie 1 *Dla dowolnego układu wektorów $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{K}$, następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathcal{B}$ jest bazą*
2. *$\mathcal{B}$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym*
3. *każdy wektor $v \in V$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci*

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k,$$

gdzie $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, k$.

Uwaga. Jeżeli przestrzeń liniowa V nad ciałem $\mathbb{K}$ ma skończoną bazę liczącą n wektorów, to każda baza tej przestrzeni liczy n wektorów.

Definicja 4 *Liczbę elementów bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy **wymiarem przestrzeni** V i oznaczamy przez $\dim V$.*

Jeżeli przestrzeń liniowa V nie ma skończonej bazy, to przyjmujemy $\dim V = \infty$.

Uwaga. $\dim\{\mathbb{O}\} = 0$, jest to jedyna przestrzeń wymiaru 0.

Twierdzenie 2 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$ o skończonej bazie. Jeżeli W jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, to*

1. $\dim W \leqslant \dim V$
2. $\dim W = \dim V \quad \Rightarrow \quad W = V$.

Definicja 5 *Niech $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $v \in V$. Skalary $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ nazywamy **współrzędnymi wektora v w bazie** $\mathcal{B}$, gdy*

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k.$$

Oznaczenie. $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)_{\mathcal{B}}$

Uwaga. Współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}$ są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 6 *Dla przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^n$ nad ciałem $\mathbb{K}$ określamy **bazę kanoniczną** jako układ $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, gdzie $e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.*

Oznaczenie. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)_{\mathcal{E}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

Przekształcenia liniowe

Niech $(V, +)$, $(W, \oplus)$ będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$.

Definicja 7 *Przekształcenie $\phi : V \to W$ nazywamy **przekształceniem liniowym**, jeśli spełnione są warunki:*

1. $\forall u, v \in V\ \phi(u + v) = \phi(u) \oplus \phi(v)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall v \in V\ \phi(\alpha \cdot_V v) = \alpha \cdot_W \phi(v)$

Uwaga. Superpozycja przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.

Własności przekształceń liniowych

$(V, +)$, $(W, \oplus)$ - przestrzenie liniowe nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$, $\phi : V \to W$ - przekształcenie liniowe.

1. $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \quad \forall v_1, \ldots, v_n \in V \quad \phi(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \phi(v_1) \oplus \ldots \oplus \alpha_n \phi(v_n)$.
2. $\phi(\mathbb{O}_V) = \mathbb{O}_W$, gdzie $\mathbb{O}_V$, $\mathbb{O}_W$ - wektory zerowe odpowiednich przestrzeni.
3. $\phi(-v) = -\phi(v)$.

Twierdzenie 3 *Jeżeli $\dim V = n$ i $\{v_1, \ldots, v_n\}$ - baza V oraz istnieją przekształcenia liniowe $\phi : V \to W$, $\psi : V \to W$, takie że $\phi(v_i) = \psi(v_i)$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$, to $\phi = \psi$.*

4. Jeżeli V_1 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V i $\phi : V \to W$ - przekształcenie liniowe, to $\phi(V_1) = \{\phi(v) :\ v \in V_1\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W.
5. Jeżeli W_1 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W, to $\phi^{-1}(W_1) = \{v \in V :\ \ \phi(v) \in W_1\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

W szczególności:

(a) $\{\mathbb{O}_W\}$ - podprzestrzeń liniowa przestrzeni W, stąd $\phi^{-1}(\{\mathbb{O}_W\}) = \{v \in V : \phi(v) = \mathbb{O}_W\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V, nazywamy ją **jądrem przekształcenia liniowego** ϕ, ozn. $\ker\phi$.

(b) $\phi(V) = \{\phi(v) : v \in V\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni W, nazywamy ją **obrazem przekształcenia liniowego** ϕ, ozn. $\mathrm{Im}\phi$.

Uwaga. Niech $\phi : V \to W$ przekształcenie liniowe. Jeśli $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ dla $v_1, v_2 \in V$, to

$$v_1 - v_2 \in \ker\phi.$$

Uwaga. $\mathbb{O}_V \in \ker\phi$ dla dowolnego przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$.

Definicja 8 *Przekształcenie liniowe różnowartościowe nazywamy* ***przekształceniem nieosobliwym****.*

Twierdzenie 4 *Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ jest nieosobliwe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\ker\phi = \{\mathbb{O}_V\}.$$

Twierdzenie 5 *Jeżeli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, $dim V < \infty$, to*

$$dim V = dim \ker\phi + dim\ Im\phi.$$

Definicja 9 *Liczbę* $\dim \mathrm{Im}\phi$ *nazywamy* ***rzędem przekształcenia*** ϕ *i oznaczamy* $r(\phi)$.