

1. Oblicz, jeśli istnieją, całki niewłaściwe I rodzaju:

(a)  $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx,$

(b)  $\int_{-\infty}^0 e^x \cdot \cos x dx,$

(c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx.$

2. Zbadaj zbieżność całek niewłaściwych I rodzaju:

(a)  $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx,$

(b)  $\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^n}} dx$  dla  $n = 4$  i dla  $n = 7,$

(c)  $\int_0^{+\infty} \frac{5x + \sin x}{1 + x^2 \cdot \sqrt{x}} dx,$

(d)  $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln(\ln x)} dx,$

(e)  $\int_1^{+\infty} \frac{x \cdot \cos x}{x^3 + x + 1} dx,$

(f)  $\int_0^{+\infty} \frac{2x + \sin 2x}{x^2 + x + 1} dx.$

3. Oblicz, jeśli istnieją, całki niewłaściwe II rodzaju:

(a)  $\int_1^e \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}} dx,$

(b)  $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx,$

(c)  $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx.$

4. Zbadaj zbieżność całek niewłaściwych II rodzaju:

(a)  $\int_0^1 \frac{e^x}{(x-1)^2} dx,$

(b)  $\int_0^1 \frac{x + \cos x}{\sqrt{1-x}} dx,$

(c)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{\sin x}}{x} dx,$

(d)  $\int_0^1 \frac{1+x}{\sin x} dx.$

UWAGA: Prawdą jest, że:

$$\ln x \leq x \text{ dla } x > 0,$$

$$\ln x \leq x - 1 \text{ dla } x > 0,$$

$$\ln x \leq \sqrt{x} \text{ dla } x > 0,$$

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x \text{ dla } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \text{ dla } x \in \mathbb{R},$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ dla } x \in \mathbb{R},$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{ dla } x \in \mathbb{R},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2} \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$