Funkcje wielu zmiennych cz. 3

ANA1 - AiR

Ewa Stróżyna

Ekstrema funkcji n - zmiennych

Ekstrema funkcji n - zmiennych

Definicja

Jeśli funkcja f jest określona w otoczeniu $Q(P_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ punktu P_0, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie P_0 *maksimum lokalne*, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, P \in S(P_0, \delta) \qquad f(P) \leqslant f(P_0)$$

Jeśli funkcja f jest określona w otoczeniu $Q(P_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ punktu P_0, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie P_0 *minimum lokalne*, jeśli

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, P \in S(P_0, \delta) \qquad f(P) \geqslant f(P_0)$$

Ekstrema funkcji n - zmiennych

Definicja

Jeśli funkcja f jest określona w otoczeniu $Q(P_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ punktu P_0, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie P_0 *maksimum lokalne*, jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall P \in S(P_0, \delta) \qquad f(P) \leqslant f(P_0)$$

Jeśli funkcja f jest określona w otoczeniu $Q(P_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ punktu P_0, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie P_0 *minimum lokalne*, jeśli

$$\exists \delta > 0 \quad \forall P \in S(P_0, \delta) \qquad f(P) \geqslant f(P_0)$$

Maksima i minima funkcji nazywamy *ekstremami* funkcji.

Jeśli w definicji zamiast nierówności $\leqslant$ ($\geqslant$) spełnione są nierówności $<$ ($>$), to ekstrema nazywamy *właściwymi*, w przeciwnym przypadku ekstrema są *niewłaściwe*.
W obu sytuacjach są to ekstrema *lokalne*.

Jeśli w definicji zamiast nierówności $\leqslant$ ($\geqslant$) spełnione są nierówności $<$ ($>$), to ekstrema nazywamy *właściwymi*, w przeciwnym przypadku ekstrema są *niewłaściwe*.
W obu sytuacjach są to ekstrema *lokalne*.

Przykłady:

(1) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ ma minimum lokalne właściwe w punkcie $(0, 0)$, bo $\forall\,(x, y) \neq (0, 0) \quad f(x, y) = x^2 + 2y^2 > 0 = f(0, 0)$

Jeśli w definicji zamiast nierówności $\leqslant$ ($\geqslant$) spełnione są nierówności $<$ ($>$), to ekstrema nazywamy *właściwymi*, w przeciwnym przypadku ekstrema są *niewłaściwe*.
W obu sytuacjach są to ekstrema *lokalne*.

Przykłady:

(1) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ ma minimum lokalne właściwe w punkcie $(0,0)$, bo $\forall\,(x,y) \neq (0,0) \quad f(x,y) = x^2 + 2y^2 > 0 = f(0,0)$

(2) $g(x,y) = x^3 + y^4$ nie ma ekstremum w $(0,0)$, bo w każdym sąsiedztwie $(0,0)$ istnieją punkty $(t,0)$ takie, że

$$g(t,0) < g(0,0) \text{ dla } t < 0$$
$$g(t,0) > g(0,0) \text{ dla } t > 0$$

(3) $z = 1 - x - y$ w zbiorze ograniczonym prostymi $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$ nie ma ekstremów lokalnych, ale przyjmuje wartość największą równą 1 na brzegu w punkcie $P_0 = (0, 0)$ i wartość najmniejszą równą 0 na odcinku $x + y = 1$, $x \in [0, 1]$.

(3) $z = 1 - x - y$ w zbiorze ograniczonym prostymi $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$ nie ma ekstremów lokalnych, ale przyjmuje wartość największą równą 1 na brzegu w punkcie $P_0 = (0, 0)$ i wartość najmniejszą równą 0 na odcinku $x + y = 1$, $x \in [0, 1]$.

(4) Funkcja $z(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5\,,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ma tylko jedno ekstremum - minimum właściwe w punkcie $P_0 = (1, -2)$, bo

$$z(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$$

więc $z(1, -2) = 0$ - minimum i jest to jednocześnie wartość najmniejsza, wartość największa nie istnieje, bo funkcja jest nieograniczona.

(5) Funkcja $z(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}+2$ jest określona dla $x^2+y^2 \leqslant 1$ i ma jedyne ekstremum w punkcie $(0,0)$, $z(0,0)=3$, jest to maksimum, które jest jednocześnie wartością największą.

Wartość najmniejszą równą 2 funkcja przyjmuje na okręgu $x^2+y^2=1$, w żadnym punkcie tego okręgu nie ma minimum, bo nie istnieje otoczenie punktu z okręgu, w którym funkcja jest określona.

(5) Funkcja $z(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + 2$ jest określona dla $x^2 + y^2 \leqslant 1$ i ma jedyne ekstremum w punkcie $(0,0)$, $z(0,0) = 3$, jest to maksimum, które jest jednocześnie wartością największą.

Wartość najmniejszą równą 2 funkcja przyjmuje na okręgu $x^2 + y^2 = 1$, w żadnym punkcie tego okręgu nie ma minimum, bo nie istnieje otoczenie punktu z okręgu, w którym funkcja jest określona.

(6) $z(x,y) = (x - y)^2\,, \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$z_{\min} = 0$ dla (x,y) leżących na prostej $y = x$, nie ma ekstremów właściwych.

Tw. (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeśli funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ ekstremum lokalne i ma w tym punkcie pochodne cząstkowe f_x i f_y, to $f_x(P_0) = 0 \ \wedge \ f_y(P_0) = 0$.

Tw. (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeśli funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ ekstremum lokalne i ma w tym punkcie pochodne cząstkowe f_x i f_y, to $f_x(P_0) = 0 \ \wedge \ f_y(P_0) = 0$.

Dowód:

Dla minimum. Pokażemy, że $f_x(P_0) = 0$

Ponieważ $\exists\, \delta > 0 \ \forall\, P \in S(P_0, \delta) \quad f(P) \geqslant f(P_0)$, to

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \geqslant 0\,, \quad h \in (0, \delta)$$

i

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \leqslant 0\,, \quad h \in (-\delta, 0)$$

Ponieważ $f_x(P_0)$ istnieje i słaba nierówność zachowuje się w granicy, to $f_x(P_0) \geqslant 0$ i jednocześnie $f_x(P_0) \leqslant 0$, więc $f_x(P_0) = 0$. Analogicznie pokazujemy, że $f_y(P_0) = 0$.

Ponieważ $f_x(P_0)$ istnieje i słaba nierówność zachowuje się w granicy, to $f_x(P_0) \geqslant 0$ i jednocześnie $f_x(P_0) \leqslant 0$, więc $f_x(P_0) = 0$. Analogicznie pokazujemy, że $f_y(P_0) = 0$.

Przykłady:

(1) Funkcja $f(x, y) = x^5 + 3x + y^2 + 2y^4 + \cos x + x \sin y$
nie ma ekstremów, bo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ i
$f_x(x, y) = 5x^4 + 3 - \sin x + \sin y \neq 0 \quad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Ponieważ $f_x(P_0)$ istnieje i słaba nierówność zachowuje się w granicy, to $f_x(P_0) \geqslant 0$ i jednocześnie $f_x(P_0) \leqslant 0$, więc $f_x(P_0) = 0$. Analogicznie pokazujemy, że $f_y(P_0) = 0$.

Przykłady:

(1) Funkcja $f(x, y) = x^5 + 3x + y^2 + 2y^4 + \cos x + x \sin y$
nie ma ekstremów, bo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ i
$f_x(x, y) = 5x^4 + 3 - \sin x + \sin y \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(2) $z(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2 = 0 \\ z_y = 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Punkty, w których pochodne cząstkowe istnieją i się zerują nazywamy *punktami stacjonarnymi* (krytycznymi stacjonarnymi).

Punkty, w których pochodne cząstkowe istnieją i się zerują nazywamy *punktami stacjonarnymi* (krytycznymi stacjonarnymi).

Uwaga:

Warunek konieczny z twierdzenia nie jest warunkiem wystarczającym, np dla funkcji $z(x, y) = xy^2$

$$\begin{cases} z_x = y^2 = 0 \\ z_y = 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0 = (0, 0)$$

jest punktem stacjonarnym, ale funkcja nie ma w nim ekstremum, bo:

$z(0, 0) = 0$ i

$z(x, y) > 0 \text{ dla } x > 0 \text{ i } z(x, y) < 0 \text{ dla } x < 0$, $(x, y) \in S((0, 0), \delta)$

Tw. (warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Niech funkcja $f \in C^2[Q(P_0, r)]$, $P_0 = (x_0, y_0)$,
$f_x(P_0) = 0 \ \wedge \ f_y(P_0) = 0$ i niech

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

Wtedy:

(1) jeśli $W(x_0, y_0) > 0$, to funkcja f ma w punkcie P_0 ekstremum i jest to minimum lokalne właściwe, gdy $f_{xx}(P_0) > 0$ lub maksimum lokalne właściwe, gdy $f_{xx}(P_0) < 0$,

(2) jeśli $W(x_0, y_0) < 0$, to funkcja f nie ma ekstremum w punkcie P_0.

Uwaga:

$$W(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$$

Przykłady:

(1) $g(x,y)=x^2+y^2$ ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum, bo:

$$W(0,0)=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}>0, \quad f_{xx}(0,0)>0 \Rightarrow g(0,0)=0$$

minimum lokalne właściwe.

Przykłady:

(1) $g(x,y) = x^2 + y^2$ ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum, bo:

$W(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0, \quad f_{xx}(0,0) > 0 \Rightarrow g(0,0) = 0$

minimum lokalne właściwe.

(2) $h(x,y) = x^2 - y^2$ nie ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum, bo:

$W(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} < 0$

Przykłady:

(1) $g(x,y) = x^2 + y^2$ ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum, bo:
$W(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0, \quad f_{xx}(0,0) > 0 \Rightarrow g(0,0) = 0$
minimum lokalne właściwe.

(2) $h(x,y) = x^2 - y^2$ nie ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum, bo:
$W(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} < 0$

Uwaga:

Jeśli $W(x_0, y_0) = 0$, to twierdzenie nie rozstrzyga istnienia ekstremum w $P_0 = (x_0, y_0)$, np:

$f(x,y) = x^4 + y^4$ ma w $(0,0)$ minimum lokalne właściwe, $g(x,y) = x^3 + y^4$ nie ma w $(0,0)$ ekstremum, a w obu przypadkach $W(0,0) = 0$.

$f(x,y) = x^4 + y^4$ ma w $(0,0)$ minimum lokalne właściwe, $g(x,y) = x^3 + y^4$ nie ma w $(0,0)$ ekstremum, a w obu przypadkach $W(0,0) = 0$.

Przykłady:

Zbadać ekstrema funkcji:

(1) $f(x,y) = xy + 2x - y + 3\,, \quad f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y + 2 = 0 \\ f_y(x,y) = x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1,-2) \text{ - punkt stacjonarny}$$

$$W(1,-2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \text{brak ekstremum w } (1,-2).$$

(2) $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0 \ \wedge \ y > 0\}, \quad g \in C^2(D_g)$

$$\begin{cases} g_x = 2x + y - \frac{4}{x} = 0 \\ g_y = x + 2y - \frac{10}{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 + xy = 4 \\ xy + 2y^2 = 10 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{4-2x^2}{x} \\ 3x^4 - 19x^2 + 16 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{4-2x^2}{x} \\ x^2 = 1 \ \vee \ x^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x,y) = (1,2)$

$g_{xx} = 2 + \frac{4}{x^2}, \quad g_{xy} = 1, \quad g_{yy} = 2 + \frac{10}{y^2}$

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{10}{y^2} \end{vmatrix} = \left(2 + \frac{4}{x^2}\right)\left(2 + \frac{10}{y^2}\right) - 1 > 0$$

i $g_{xx}(1,2) = 6 > 0 \Rightarrow g(1,2) = 7 - 10\ln 2$ - minimum lokalne właściwe

(3) $z(x,y) = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x + y^2)\,, \quad z \in C^{\,2}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} z_x = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} (x + y^2 + 2) = 0 \\ z_y = 2ye^{\frac{x}{2}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y^2 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P_0 = (-2, 0)$ - punkt stacjonarny

$$z_{xx} = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} (x + y^2 + 4)\,, \;\; z_{xy} = ye^{\frac{x}{2}}\,, \;\; z_{yy} = 2e^{\frac{x}{2}}$$

$W(x,y) = \frac{1}{2} e^x (x - y^2 + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow W(-2,0) = e^{-2} > 0 \;\wedge\; z_{xx}(-2,0) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z(-2,0) = -\frac{2}{e}$ - minimum lokalne właściwe

(4) $z(x,y) = e^{-x} \cdot (x + y^2)\,, \quad z \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} z_x = e^{-x}(1 - x - y^2) = 0 \\ z_y = 2ye^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0 = (1,0) \text{ - punkt stacjonarny}$$

$z_{xx} = e^{-x}(x + y^2 - 2)\,, \;\; z_{xy} = -2ye^{-x}\,, \;\; z_{yy} = 2e^{-x}$

$W(x,y) = e^{-2x}(2x - 2y^2 - 4) \Rightarrow W(1,0) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ brak ekstremum w P_0.

Znajdowanie wartości największej i najmniejszej funkcji

Znajdowanie wartości największej i najmniejszej funkcji

Uwagi:

(1) Jeśli funkcja jest ciągła w zbiorze ograniczonym i domkniętym, to jest w nim ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy: górny i dolny (tw. Weierstrassa).

(2) Jeśli funkcja przyjmuje wartość największą lub najmniejszą w punkcie wewnętrznym obszaru i ma w tym punkcie pochodne cząstkowe, to te pochodne znikają (punkt stacjonarny).

Przykłady:

(1) $z(x,y) = (x-y)^2 + xy - x\,,\;\; z \in C^1(\bar{D})$, gdzie

$\bar{D} = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$,

$\bar{D} = \operatorname{Int} D \cup \partial D, \quad \operatorname{Int} D \cap \partial D = \emptyset$,

$\operatorname{Int} D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D

$$\operatorname{Int} D : \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0 = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) \Rightarrow z\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) = -\tfrac{1}{3}$$

Przykłady:

(1) $z(x,y) = (x-y)^2 + xy - x\,, \quad z \in C^1(\bar{D})$, gdzie

$\bar{D} = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$,

$\bar{D} = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D, \quad \mathrm{Int}\, D \cap \partial D = \emptyset$,

$\mathrm{Int}\, D$ - wnętrze zbioru D, ∂D - brzeg zbioru D

$$\mathrm{Int}\, D : \begin{cases} z_x = 2x - y - 1 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0 = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) \Rightarrow z\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) = -\tfrac{1}{3}$$

∂D:

$1^\circ \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0$

$z(x,y) = z(x,0) = x^2 - x = g_1(x),\ x \in [0,1]$

$g_1'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0,1)$

$g_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},\ g_1(0) = g_1(1) = 0$

$2^\circ \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 1$

$z(x, y) = z(x, 1) = (x-1)^2 = g_2(x),\ \ x \in [0, 1]$

$g_2'(x) = 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \notin (0, 1)$

$g_2(0) = 1,\ g_2(1) = 0$

$2^\circ \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 1$

$z(x, y) = z(x, 1) = (x-1)^2 = g_2(x),\ x \in [0, 1]$

$g_2'(x) = 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \notin (0, 1)$

$g_2(0) = 1,\ g_2(1) = 0$

$3^\circ \quad x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$

$z(x, y) = z(0, y) = y^2 = g_3(y),\ y \in [0, 1]$

$g_3'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0, 1)$

$g_3(0) = 0,\ g_3(1) = 1$

$4^\circ \quad x = 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$

$z(x, y) = z(1, y) = y^2 - y = g_4(y),\ \ y \in [0, 1] \Rightarrow$ jak w 1°

$$\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, 1\} \Rightarrow \min_{(x,y)\in \bar{D}} z(x, y) = -\frac{1}{3}\,, \quad \max_{(x,y)\in \bar{D}} z(x, y) = 1$$

$4^\circ \quad x = 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$

$z(x,y) = z(1,y) = y^2 - y = g_4(y),\ \ y \in [0,1] \Rightarrow$ jak w 1°

$$\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, 1\} \Rightarrow \min_{(x,y)\in\bar{D}} z(x,y) = -\frac{1}{3}, \quad \max_{(x,y)\in\bar{D}} z(x,y) = 1$$

(2) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^3 - 3y^2, \quad f \in C^1(\overline{D})$,
gdzie $\overline{D} = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \ \wedge \ y \geqslant x\}$

$\mathrm{Int}\, D$:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \\ f_y = 3y^2 - 6y = 3y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x,y) \in \{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)\} \Rightarrow (0,2) \in \mathrm{Int}\, D \Rightarrow$
$\Rightarrow f(0,2) = -4$

$$\partial D = \bar{AB} \cup \breve{AB}\,, \quad A = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\,,\ B = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bar{AB}\ :\ \ y = x\,, \ \ x \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$$

$$f(x,y)|_{\bar{AB}} = f(x,x) = 2x^3 - 6x^2 = g(x)\,, \ \ x \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$$

$$g'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2) = 0 \quad \wedge \quad x \in \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$g(0) = 0\,, \quad g(2) = -8$$

$$g\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -27\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad g\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 27\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

$$\breve{AB}\ :\ \begin{cases} x = 3\cos\varphi \\ y = 3\sin\varphi \end{cases} , \quad \varphi \in \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{5}{4}\pi\right]$$

$$f(x,y)|_{\breve{AB}} = f(3\cos\varphi, 3\sin\varphi) = 27(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi - 1) = h(\varphi)$$

$$h'(\varphi) = 27[3\cos^2\varphi\cdot(-\sin\varphi) + 3\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi] =$$
$$= \frac{81}{2}\sin 2\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi) = 0 \ \wedge\ \varphi \in \left(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{5}{4}\pi\right)$$

$$\sin 2\varphi = 0 \iff \varphi = k\cdot\tfrac{\pi}{2}\,,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \tfrac{\pi}{2}\ \vee\ \varphi = \pi$$

$$\sin\varphi = \cos\varphi \iff \operatorname{tg}\varphi = 1 \iff \varphi = \tfrac{\pi}{4} + k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \varphi\in\emptyset$$

$$h\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0\,,\quad h(\pi) = -54$$

$$h\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 27\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\,,\quad h\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) = -27\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left\{-4, 0, -8, -27\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right), 27\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right), -54\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min_{(x,y)\in\bar{D}} f(x,y) = -54\,,\quad \max_{(x,y)\in\bar{D}} f(x,y) = 0$$

(3)

$$z(x,y) = x^2 - y^2 + 8\,,\quad \overline{D} = \{(x,y)\,:\, x^2+y^2 \leqslant 4\}\,,\quad f \in C^1(\overline{D})$$

$\mathrm{Int}\, D$:

$$\begin{cases} z_x = 2x = 0 \\ z_y = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0 = (0,0) \in \mathrm{Int}\, D$$

$$z(0,0) = 8$$

$$\partial D \,:\, x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2\,,\quad x \in [-2,2]$$

$$z(x,y)|_{\partial D} = 2x^2 + 4 = g(x)$$

$$g'(x) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-2,2)$$

$$g(0) = 4\,,\qquad g(-2) = g(2) = 12$$

$$\{8,4,12\} \Rightarrow \min_{(x,y)\in\bar{D}} z(x,y) = 4\,,\qquad \max_{(x,y)\in\bar{D}} z(x,y) = 12$$

Pochodna kierunkowa w $\mathbb{R}^2$

Pochodna kierunkowa w $\mathbb{R}^2$

$P_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{s} = [a, b]$ - wersor, tzn. wektor długości 1, $|\vec{s}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, $P_0\vec{s}$ - półoś o początku w punkcie P_0, o kierunku i zwrocie zgodnym z $\vec{s}$, tzn.

Pochodna kierunkowa w $\mathbb{R}^2$

$P_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{s} = [a, b]$ - wersor, tzn. wektor długości 1, $|\vec{s}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, $P_0\vec{s}$ - półoś o początku w punkcie P_0, o kierunku i zwrocie zgodnym z $\vec{s}$, tzn.

$$P_0\vec{s} = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{s} \ \wedge \ t \geqslant 0\} =$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (x_0 + t \cdot a, y_0 + t \cdot b) \ \wedge \ t \geqslant 0\}$$

bo $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0] = t \cdot [a, b]$

Definicja

Jeśli funkcja $f(x, y)$ jest określona w otoczeniu $Q(P_0, r)$ punktu P_0 i istnieje granica właściwa

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0 P}|} \qquad P \in P_0\vec{s}$$

to tę granicę nazywamy *pochodną kierunkową* funkcji f w kierunku wersora $\vec{s}$ i oznaczamy $\frac{df}{d\vec{s}}(P_0)$.

$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0)$ – miara prędkości zmiany funkcji f w punkcie P_0 w kierunku $\vec{s}$.

$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0)$ – miara prędkości zmiany funkcji f w punkcie P_0 w kierunku $\vec{s}$.

Jeśli $\vec{s} = [a, b] = [\cos\alpha, \cos\beta]$, gdzie α, β - kąty jakie tworzy wersor $\vec{s}$ z OX, OY odpowiednio, to

$$P_0\vec{s} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (x_0 + t\cdot\cos\alpha, y_0 + t\cdot\cos\beta) \ \wedge \ t \geqslant 0\}$$

$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0)$ – miara prędkości zmiany funkcji f w punkcie P_0 w kierunku $\vec{s}$.

Jeśli $\vec{s} = [a, b] = [\cos\alpha, \cos\beta]$, gdzie α, β - kąty jakie tworzy wersor $\vec{s}$ z OX, OY odpowiednio, to

$$P_0\vec{s} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (x_0 + t \cdot \cos\alpha, y_0 + t \cdot \cos\beta) \ \wedge \ t \geqslant 0\}$$

Jeśli $F(t) = f[x(t), y(t)]$ i f jest klasy C^1 oraz x', y' istnieją, to

$$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t\cdot a, y+t\cdot b) - f(x_0, y_0)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t\cdot\cos\alpha, y+t\cdot\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

lub

$$F'_+(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot y'(t)$$

Stąd

$$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot \cos\beta$$

Stąd

$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot \cos\beta$

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(x,y) \in C^1$ w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$, to pochodna kierunkowa

$$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0) = f_x(P_0) \cdot a + f_y(P_0) \cdot b\,, \quad \vec{s} = [a, b]$$

Stąd

$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot \cos\beta$

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(x,y) \in C^1$ w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$, to pochodna kierunkowa

$$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0) = f_x(P_0) \cdot a + f_y(P_0) \cdot b\,, \quad \vec{s} = [a, b]$$

Przykłady:

(1) $f(x,y) = xy^2$, $P_0 = (2,1)$, $\vec{s}$ - wersor tworzący z osiami układu współrzędnych kąty $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{3}$.

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2)\,, \quad \vec{s} = [\cos\tfrac{\pi}{6}, \cos\tfrac{\pi}{3}] \Rightarrow$$

$$\frac{df}{d\vec{s}}(2,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \cdot \cos\tfrac{\pi}{6} + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \cdot \cos\tfrac{\pi}{3} =$$

$$= y^2\big|_{(2,1)} \cdot \cos\tfrac{\pi}{6} + 2xy\big|_{(2,1)} \cdot \cos\tfrac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\vec{s} = [\cos\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{3}] \Rightarrow$

$$\frac{df}{d\vec{s}}(2,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\cdot\cos\frac{\pi}{3} =$$
$$= y^2\big|_{(2,1)}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + 2xy\big|_{(2,1)}\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$$

(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2}$, $P_0 = (0,0)$, $\vec{s} = [\cos\alpha, \sin\alpha]$

f nie jest klasy C^1 w $(0,0)$ (bo nie istnieją pochodne cząstkowe), więc pochodną kierunkową wyznaczamy z definicji:

$$\frac{df}{d\vec{s}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cdot a, y_0+t\cdot b) - f(x_0,y_0)}{||[t\cdot a, t\cdot b]||} =$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cdot\cos\alpha, t\cdot\sin\alpha) - f(0,0)}{||[t\cdot\cos\alpha, t\cdot\sin\alpha]||} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t^2\cos^2\alpha + 2t^2\sin^2\alpha}}{t} =$$
$$= \sqrt{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha}$$

$$(3)\ f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - y\,, \quad P_0 = (2,1)\,, \quad \vec{s} = \left[\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right]$$

$$f \in C^{\,1}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \tfrac{df}{d\vec{s}}(2,1) = (2x+y)|_{(2,1)} \cdot \tfrac{3}{5} + (x+4y-1)|_{(2,1)} \cdot \tfrac{4}{5} =$$
$$= 5 \cdot \tfrac{3}{5} + 5 \cdot \tfrac{4}{5} = 7$$

(3) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - y\,,\quad P_0 = (2,1)\,,\quad \vec{s} = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \frac{df}{d\vec{s}}(2,1) = (2x+y)|_{(2,1)} \cdot \frac{3}{5} + (x+4y-1)|_{(2,1)} \cdot \frac{4}{5} =$
$= 5 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{4}{5} = 7$

Uwaga:

W analogiczny sposób określa się pochodną kierunkową funkcji trzech lub więcej zmiennych.

Jeśli np. $f(x,y,z) \in C^1[Q(P_0,r)]\,,\ P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, to

$P_0\vec{s} = \{(x,y,z) : x = x_0 + t\cos\alpha, y = y_0 + t\cos\beta,$
$z = z_0 + t\cos\gamma, t \geqslant 0\}\,,\quad \vec{s} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$

$$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cdot\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\cdot\cos\gamma$$

Przykład:

Obliczyć pochodną kierunkową:

$f(x,y,z) = x^2 + 3xyz + yz^3\,, \quad P_0 = (5,2,1)\,, \quad \vec{v} = [3,3,3]$

$|\vec{v}| = 3\sqrt{3} \Rightarrow \vec{s} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$

$\frac{df}{s\vec{s}}(P_0) = (2x + 3yz)|_{(5,2,1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + (3xz + z^3)|_{(5,2,1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} +$
$+ (3xy + 3yz^2)|_{(5,2,1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{68\sqrt{3}}{3}$

Przykład:

Obliczyć pochodną kierunkową:

$f(x,y,z) = x^2 + 3xyz + yz^3\,, \quad P_0 = (5,2,1)\,, \quad \vec{v} = [3,3,3]$

$|\vec{v}| = 3\sqrt{3} \Rightarrow \vec{s} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$

$$\frac{df}{s\vec{s}}(P_0) = (2x + 3yz)|_{(5,2,1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + (3xz + z^3)|_{(5,2,1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} +$$
$$+ (3xy + 3yz^2)|_{(5,2,1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{68\sqrt{3}}{3}$$

Gradient funkcji

Przykład:

Obliczyć pochodną kierunkową:
$f(x,y,z) = x^2 + 3xyz + yz^3\,, \quad P_0 = (5,2,1)\,, \quad \vec{v} = [3,3,3]$

$|\vec{v}| = 3\sqrt{3} \Rightarrow \vec{s} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$

$\frac{df}{s\vec{s}}(P_0) = (2x + 3yz)|_{(5,2,1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + (3xz + z^3)|_{(5,2,1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} +$
$+ (3xy + 3yz^2)|_{(5,2,1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{68\sqrt{3}}{3}$

Gradient funkcji

Jeśli $f(x,y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w P_0, $\vec{s} = [a,b]$, to

$\frac{df}{d\vec{s}} = f_x(P_0) \cdot a + f_y(P_0) \cdot b = [f_x(P_0), f_y(P_0)] \circ [a,b]$

Definicja

Wektor $[f_x(P_0), f_y(P_0)] = \mathrm{grad}\, f(P_0) = \nabla f(P_0)$ nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie P_0.

Definicja

Wektor $[f_x(P_0), f_y(P_0)] = \mathrm{grad}\, f(P_0) = \nabla f(P_0)$ nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie P_0.

Uwaga:

$\frac{df}{d\vec{s}} = |\mathrm{grad}\, f(P_0)| \cdot \cos \measuredangle(\vec{s}, \mathrm{grad}\, f(P_0))$,

czyli $\frac{df}{d\vec{s}}$ ma największą wartość, gdy $\cos \measuredangle(\vec{s}, \mathrm{grad}\, f(P_0)) = 1$, tzn. gdy wersor $\vec{s}$ jest zgodnie równoległy do $\mathrm{grad}\, f(P_0)$.

Definicja

Wektor $[f_x(P_0), f_y(P_0)] = \operatorname{grad} f(P_0) = \nabla f(P_0)$ nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie P_0.

Uwaga:

$\frac{df}{d\vec{s}} = |\operatorname{grad} f(P_0)| \cdot \cos \measuredangle(\vec{s}, \operatorname{grad} f(P_0))$,

czyli $\frac{df}{d\vec{s}}$ ma największą wartość, gdy $\cos \measuredangle(\vec{s}, \operatorname{grad} f(P_0)) = 1$, tzn. gdy wersor $\vec{s}$ jest zgodnie równoległy do $\operatorname{grad} f(P_0)$.

Ogólnie: dla $f(x_1, \ldots, x_n)$ funkcji klasy $C^1[Q(P_0, r)]$ *gradientem* funkcji f w P_0 nazywamy wektor

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right] = \operatorname{grad} f(P_0) = \nabla f(P_0)$$

Przykład:

$$f(x,y) = x^3y^2 + 3x - y\,, \quad P_0 = (-2,1)\,, \qquad f \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = (3x^2y^2 + 3)|_{(-2,1)} = 15$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = (2x^3y - 1)|_{(-2,1)} = -17$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(P_0) = [15, -17]$$

Przykład:

$f(x,y) = x^3y^2 + 3x - y\,, \quad P_0 = (-2,1)\,, \qquad f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = (3x^2y^2 + 3)|_{(-2,1)} = 15$

$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = (2x^3y - 1)|_{(-2,1)} = -17$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(P_0) = [15, -17]$

Uwaga:

Ponieważ $\operatorname{grad} f(P_0)$ wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji f w punkcie P_0, to

$$-|\operatorname{grad} f(P_0)| \leqslant \frac{df}{d\vec{s}}(P_0) \leqslant |\operatorname{grad} f(P_0)|$$

Przykład:

Dla funkcji $f(x,y)=x^2+xy$ i $P_0=(2,1)$ znaleźć wersor $\vec{s}$ półosi $P_0\vec{s}$, w kierunku której szybkość wzrostu $f(x,y)$ w P_0 jest największa, napisać równania parametryczne $P_0\vec{s}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=(2x+y)|_{(2,1)}=5\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=x|_{(2,1)}=2$$

$$\operatorname{grad} f(P_0)=[5,2]\,,\quad |\operatorname{grad} f(P_0)|=\sqrt{29}\Rightarrow \vec{s}=\left[\frac{5}{\sqrt{29}},\frac{2}{\sqrt{29}}\right]$$

$$P_0\vec{s}=\{(x,y):\ x=2+t\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}\,,\ y=1+t\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}\,,\ t\geqslant 0\}$$

Funkcje uwikłane

Funkcje uwikłane

$F(x, y)$ - funkcja określona w pewnym obszarze

Definicja

Jeśli istnieje funkcja $y = f(x)$ spełniająca $\forall\, x \in X$ warunek $F[x, f(x)] = 0$, to nazywamy ją *funkcją uwikłaną* określoną w zbiorze X równaniem $F(x, y) = 0$.

Inaczej: $y = f(x)$ - funkcja określona w sposób uwikłany równaniem $F(x, y) = 0$.

Przykłady:

(1) Funkcja $y = \sqrt{1 - x^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1, 1]$ równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bo

$$\forall\, x \in [-1, 1] \qquad x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 - 1 = 0$$

Nie jest to jedyna funkcja uwikłana, jest ich nieskończenie wiele, wśród nich tylko dwie ciągłe $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Przykłady:

(1) Funkcja $y = \sqrt{1 - x^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1, 1]$ równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bo

$$\forall\, x \in [-1, 1] \qquad x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 - 1 = 0$$

Nie jest to jedyna funkcja uwikłana, jest ich nieskończenie wiele, wśród nich tylko dwie ciągłe $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

(2) Równanie $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nie określa żadnej funkcji uwikłanej.

Przykłady:

(1) Funkcja $y = \sqrt{1-x^2}$ jest funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1,1]$ równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bo

$$\forall\, x \in [-1,1] \qquad x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = 0$$

Nie jest to jedyna funkcja uwikłana, jest ich nieskończenie wiele, wśród nich tylko dwie ciągłe $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

(2) Równanie $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nie określa żadnej funkcji uwikłanej.

(3) Równanie $y - x^2 = 0$ określa dokładnie jedną funkcję uwikłaną.

Tw. (o istnieniu i jednoznaczności)

Jeśli $F \in C^1[Q(P_0, r)]$, $P_0 = (x_0, y_0)$ oraz

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

to istnieje dokładnie jedna ciągła funkcja uwikłana $y = f(x)$ określona w $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ za pomocą równania $F(x, y) = 0$ i spełniająca warunek $f(x_0) = y_0$.

Tw. (o istnieniu i jednoznaczności)

Jeśli $F \in C^1[Q(P_0, r)]$, $P_0 = (x_0, y_0)$ oraz

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

to istnieje dokładnie jedna ciągła funkcja uwikłana $y = f(x)$ określona w $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ za pomocą równania $F(x, y) = 0$ i spełniająca warunek $f(x_0) = y_0$.

Przykład:

$$F(x, y) = x^y - y\,, \quad x > 0\,, \quad P_0 = (1, 1)$$

$F \in C^1[Q(P_0, r)]$, $F(1,1) = 0$, $F_y(1,1) = (x^y \cdot \ln x - 1)|_{(1,1)} =$
$= -1 \neq 0 \Rightarrow \exists!$ ciągła funkcja uwikłana $y = f(x)$ równaniem $x^y - y = 0$ w $(1 - \delta, 1 + \delta)$ i spełniająca warunek $f(1) = 1$.

Uwaga:

(1) Przy założeniach tw. o istnieniu i jednoznaczności

$$f'(x) = -\left.\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\right|_{y=f(x)}$$

bo:

$$F[x, f(x)] = 0 \Rightarrow F_x[x, f(x)] + F_y[x, f(x)] \cdot f'(x) = 0$$

Uwaga:

(1) Przy założeniach tw. o istnieniu i jednoznaczności

$$f'(x) = -\left.\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\right|_{y=f(x)}$$

bo:

$$F[x, f(x)] = 0 \Rightarrow F_x[x, f(x)] + F_y[x, f(x)] \cdot f'(x) = 0$$

(2) Jeśli $F \in C^2[Q(P_0, r)]$ i spełnione są założenia tw. o istnieniu i jednoznaczności, to

$$f''(x) = -\frac{[F_{xx}+F_{xy}\cdot y']\cdot F_y - F_x\cdot[F_{yx}+F_{yy}\cdot y']}{F_y^2}$$

podstawiając $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ otrzymujemy:

$$f''(x) = -\frac{F_{xx} \cdot (F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy} \cdot (F_x)^2}{(F_y)^3}$$

$$f''(x) = -\frac{F_{xx} \cdot (F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy} \cdot (F_x)^2}{(F_y)^3}$$

Przykład:

Wykazać, że równanie $x^2 + 4y^2 = 25$ określa w pewnym otoczeniu punktu $x_0 = 3$ dokładnie jedną ciągłą funkcję uwikłaną $y = f(x)$ spełniającą warunek $f(3) = 2$. Obliczyć $f'(3), f''(3)$, naszkicować wykres tej funkcji w otoczeniu punktu $(3, 2)$.

$F(x, y) = x^2 + 4y^2 - 25 \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$F(3, 2) = 0\,, \quad F_y(3, 2) = 8y|_{(3,2)} = 16 \neq 0 \Rightarrow \exists\,!$ funkcja ciągła w $(3 - \delta, 3 + \delta)$ taka, że $x^2 + 4f^2(x) - 25 = 0$ i $f(3) = 2$

I sposób:

$$f'(3) = -\frac{F_x}{F_y} = -\left.\frac{2x}{8y}\right|_{(3,2)} = -\frac{3}{8}$$

$$F_{xx} = 2\,, \quad F_{xy} = 0\,, \quad F_{yy} = 8$$

$$f''(3) = -\left.\frac{2\cdot(8y)^2 - 2\cdot 0 + 8\cdot(2x)^2}{(8y)^3}\right|_{(3,2)} = -\frac{25}{128}$$

I sposób:

$$f'(3) = -\frac{F_x}{F_y} = -\left.\frac{2x}{8y}\right|_{(3,2)} = -\frac{3}{8}$$

$$F_{xx} = 2\,, \quad F_{xy} = 0\,, \quad F_{yy} = 8$$

$$f''(3) = -\left.\frac{2\cdot(8y)^2 - 2\cdot 0 + 8\cdot(2x)^2}{(8y)^3}\right|_{(3,2)} = -\frac{25}{128}$$

II sposób:

$$x^2 + 4f^2(x) - 25 = 0 \Rightarrow 2x + 8f(x)\cdot f'(x) = 0$$

dla $(x, y) = (3, 2)$:

$$2\cdot 3 + 8\cdot 2\cdot f'(3) = 0 \Rightarrow f'(3) = -\frac{3}{8}$$

$x + 4f(x) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + 4[f'(x)]^2 + 4f(x) \cdot f''(x) = 0$

dla $(x, y) = (3, 2)$:

$1 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)^2 + 4 \cdot 2 \cdot f''(3) = 0 \Rightarrow f''(3) = -\frac{25}{128}$

Z tw. o lokalnym zachowaniu znaku w $(3 - \delta, 3 + \delta)$
$f' < 0 \Rightarrow f$ - malejąca, $f'' < 0 \Rightarrow f$ - wklęsła
i równanie stycznej: $y - 2 = -\frac{3}{8}(x - 3)$.

Różniczki funkcji

Różniczki funkcji

Funkcja $f(x, y)$ jest *różniczkowalna* w $P_0 = (x_0, y_0) \iff$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \kappa(\Delta x, \Delta y) \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

i $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \kappa(\Delta x, \Delta y) = 0$

Różniczki funkcji

Funkcja $f(x,y)$ jest *różniczkowalna* w $P_0 = (x_0, y_0) \iff$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \kappa(\Delta x, \Delta y) \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

i $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \kappa(\Delta x, \Delta y) = 0$

Definicja

Składnik liniowy względem Δx i Δy przyrostu funkcji Δf różniczkowalnej w P_0 nazywamy *różniczką zupełną* funkcji $f(x,y)$ w P_0 i oznaczamy:

$$df(P_0) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy$$

Przykład:

$$f(x, y) = x^2 + xy\,, \quad P_0 = (2, -1)$$

$$f_x(2, -1) = (2x + y)|_{(2,-1)} = 3\,, \quad f_y(2, -1) = x|_{(2,-1)} = 2 \Rightarrow$$

$$df(P_0) = 3dx + 2dy$$

Przykład:

$$f(x,y) = x^2 + xy\,, \quad P_0 = (2,-1)$$

$$f_x(2,-1) = (2x+y)|_{(2,-1)} = 3\,, \quad f_y(2,-1) = x|_{(2,-1)} = 2 \Rightarrow$$

$$df(P_0) = 3dx + 2dy$$

Zastosowanie różniczki zupełnej

Przykład:

$f(x,y) = x^2 + xy\,, \quad P_0 = (2,-1)$

$f_x(2,-1) = (2x+y)|_{(2,-1)} = 3\,, \quad f_y(2,-1) = x|_{(2,-1)} = 2 \Rightarrow$

$df(P_0) = 3dx + 2dy$

Zastosowanie różniczki zupełnej

Mamy $\Delta f = df + \kappa \cdot \rho$, gdzie $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, stąd

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\Delta f - df}{\rho} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \kappa(x,y) = 0$$

Uwaga:

Posługując się wzorem przybliżonym $\Delta f \approx df$ popełniamy dowolnie mały błąd, gdy ρ - dostatecznie małe.

Uwaga:

Posługując się wzorem przybliżonym $\Delta f \approx df$ popełniamy dowolnie mały błąd, gdy ρ - dostatecznie małe.

Przykład:

Obliczyć przybliżoną wartość funkcji $f(x, y) = \sqrt{xy}$ dla $x = 2,1,\ y = 8,05$.

$$x_0 = 2\,,\ dx = 0,1\,,\ y_0 = 8\,,\ dy = 0,05$$

$$f_x(2,8) = \left.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,\right|_{(2,8)} = 1\,, \quad f_y(2,8) = \left.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\,\right|_{(2,8)} = \frac{1}{4}$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f \approx df$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df \Rightarrow$$

$$\sqrt{2,1 \cdot 8,05} \approx \sqrt{2 \cdot 8} + 1 \cdot 0,1 + \frac{1}{4} \cdot 0,05 = 4,1125$$