Algebra liniowa

Z_6

1. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego w bazach kanonicznych i wyznaczyć jego wzór:
   (a) $O_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, obrót o kąt α wokół punktu $(0,0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara
   (b) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, symetria względem prostej $y = -x$
   (c) $F \circ G$ i $G \circ F$, gdzie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F((x,y,z)) = (2x - y, 3x + y - z)$, a $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $G((x,y)) = (x - y, x + 2y, 2x - y)$

   Dla każdego z powyższych przekształceń wyznaczyć jądro i obraz oraz ich bazy (podać wymiary) i stwierdzić, czy jest to przekształcenie nieosobliwe oraz czy jest "na".

2. Podać przykład macierzy kwadratowych A i B stopnia 2, dla których $A \cdot B \neq B \cdot A$. Podać przykład dwóch macierzy dowolnego wymiaru, dla których mnożenie także nie jest przemienne.

3. Obliczyć: a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$ e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}^2$

   f) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ i)* $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ j)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^n$

4. Pokazać, że $\varphi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $\varphi(X) = X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ jest przekształceniem liniowym. Wyznaczyć macierz tego przekształcenia $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ w bazach:

$$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \text{ i}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

   Wyznaczyć jądro i obraz przekształcenia φ oraz ich bazy (podać wymiary). Czy jest to przekształcenie nieosobliwe, czy jest "na"?

5. Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym, zaś $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ bazami przestrzeni liniowej V. Jakie macierze otrzymamy w każdym z poniższych przypadków?
   (a) $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(id)$
   (b) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id)$
   (c) $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\phi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id)$
   (d) $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\phi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$
   (e) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id)$

6. Znaleźć wzór przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ danego macierzą: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, jeśli $\mathcal{A} = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$, $\mathcal{B} = ((1,2,3), (2,0,2), (3,2,1))$. Jak rozwiązać to zadanie za pomocą rachunku macierzowego? Podać odpowiedni wzór.