WYKŁAD 11+12

Przestrzeń $\mathbb{R}^2$

Przestrzenią $\mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór punktów

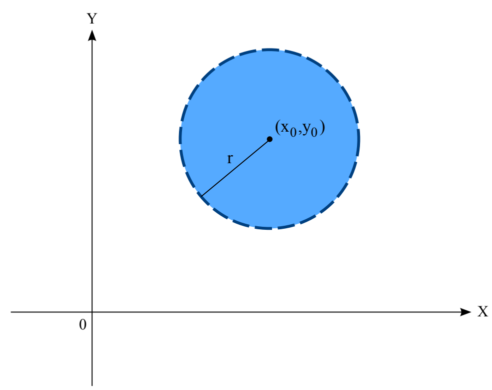
$$\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$

Jeśli punkty $P(x,y)$, $P_0(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, to ich odległość (ozn.$d(P,P_0)$) określamy wzorem

$$d(P,P_0) \stackrel{df}{=} \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

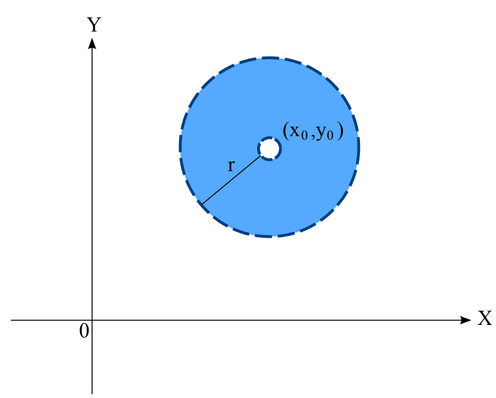
Definicja 1. Otoczeniem o promieniu r punktu P_0 (ozn.$Q(P_0;r)$) nazywamy zbiór

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P,P_0) < r\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r\}.$$

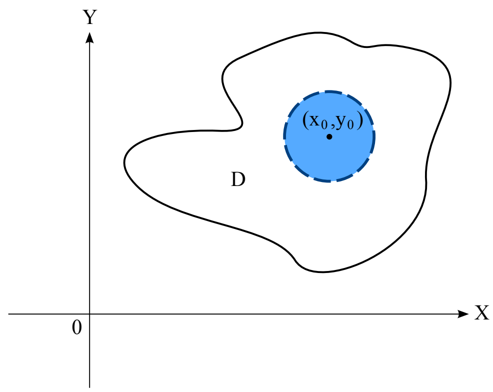


Definicja 2. Sąsiedztwem o promieniu r punktu P_0 (ozn.$S(P_0;r)$) nazywamy zbiór

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : 0 < d(P,P_0) < r\}.$$

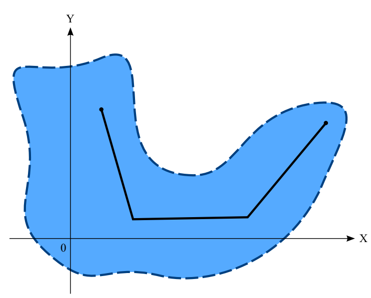


Definicja 3. Punkt $P_0 \in D \subset \mathbb{R}^2$ jest punktem wewnętrznym zbioru D, jeżeli zbiór D zawiera pewne otoczenie punktu P_0.

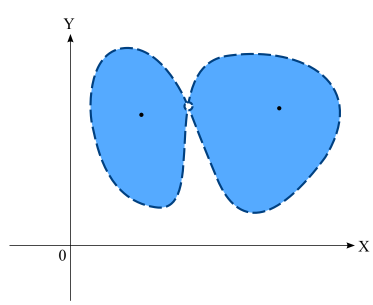


Definicja 4. Zbiór $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiorem otwartym, jeśli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym zbioru D.

Definicja 5. Obszar w $\mathbb{R}^2$ jest to taki zbiór otwarty, którego każde dwa punkty można połączyć łamaną zawartą w tym zbiorze.



Rysunek 1: Zbiór jest obszarem



Rysunek 2: Zbiór nie jest obszarem

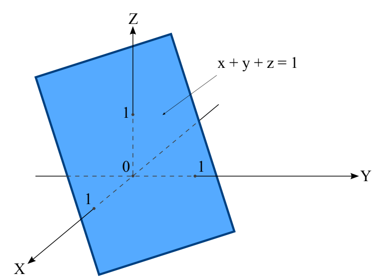
Funkcje dwóch zmiennych

Definicja 6. Funkcję $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$, nazywamy funkcją dwóch zmiennych x , y. Wartość funkcji f w punkcie $P(x, y)$ oznaczamy przez $f(x, y)$ lub $f(P)$.

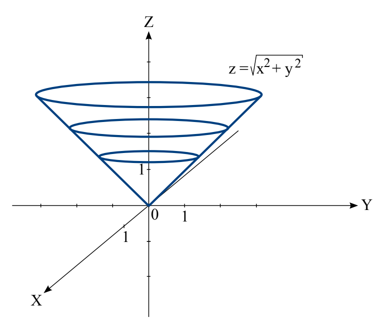
Definicja 7. Wykresem funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$, nazywamy zbiór

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) \wedge (x, y) \in D\}$$

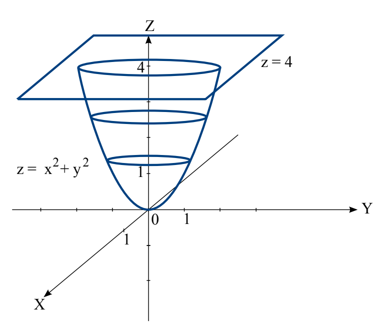
Przykłady wykresów funkcji dwóch zmiennych



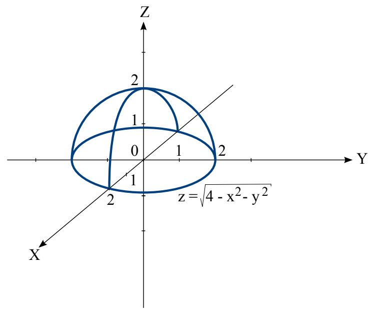
Rysunek 3: Wykres funkcji $z = 1 - x - y$



Rysunek 4: Wykres funkcji $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Rysunek 5: Wykres funkcji $z = x^2 + y^2$



Rysunek 6: Wykres funkcji $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Granica funkcji dwóch zmiennych

Niech $(P_n(x_n, y_n))$ – ciąg punktów w $\mathbb{R}^2$ i $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Definicja 8. Ciąg punktów (P_n) jest zbieżny do punktu P_0 (ozn. $P_n \to P_0$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ lub $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$), jeśli

$$\lim_{n\to\infty} d(P_n, P_0) = 0$$

Uwaga 1. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Załóżmy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, jest określona w pewnym sąsiedztwie S punktu (x_0, y_0).

Definicja 9. Liczba g jest granicą podwójną funkcji f w punkcie (x_0, y_0) (ozn. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = g$ lub $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g$), jeśli spełniony jest warunek:

$$\forall((x_n, y_n)) \subset S \left[\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = g\right]$$

Załóżmy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, jest określona w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0).

Definicja 10. Funkcja f jest ciągła w punkcie (x_0, y_0), jeśli

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Funkcja f jest ciągła w zbiorze, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Pochodne cząstkowe

Zał. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Wybieramy i ustalamy punkt $P_0(x_0, y_0) \in D$ oraz dowolny punkt $P \in D$ taki, że P różni się od P_0 tylko na jednej współrzędnej.

Definicja 11. Pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej x w punkcie P_0 (ozn. $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ lub $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$) nazywamy wartość granicy właściwej

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \overset{df}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

Definicja 12. Pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej y w punkcie P_0 (ozn. $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ lub $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$) nazywamy wartość granicy właściwej

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \overset{df}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y};$$

Jeżeli pochodne cząstkowe funkcji f istnieją w każdym punkcie zbioru D, to można mówić o funkcjach pochodnych cząstkowych: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ – są to funkcje dwóch zmiennych.

Obliczanie pochodnych cząstkowych funkcji dwóch zmiennych polega na tym, że jedną zmienną traktujemy jako stałą i obliczamy pochodną funkcji ze względu na drugą zmienną; wówczas możemy korzystać ze wzorów i reguł obliczania pochodnych dla funkcji jednej zmiennej.

Uwaga 2. Pochodne cząstkowe funkcji względem różnych zmiennych istnieją niezależnie od siebie.

Uwaga 3. Ciągłość funkcji nie jest warunkiem koniecznym istnienia pochodnych cząstkowych.

Uwaga 4. Ciągłość funkcji nie jest warunkiem wystarczającym istnienia pochodnych cząstkowych.

Definicja 13. Pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji f są to pochodne cząstkowe pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$

Oznaczamy je następująco

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \overset{ozn}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \overset{ozn}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, , \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \overset{ozn}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \overset{ozn}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Dwie ostatnie pochodne cząstkowe drugiego rzędu nazywamy pochodnymi mieszanymi, różnią się kolejnością obliczania pochodnych.

Podobnie określamy pochodne cząstkowe wyższych rzędów.

Twierdzenie 1. (Schwarza) Jeżeli funkcja f ma w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ ciągłe pochodne mieszane drugiego rzędu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, to są one równe w tym obszarze.

$C^m(D)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji, które w obszarze D mają ciągłe pochodne cząstkowe do m – tego rzędu włącznie.

Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$; $P_0 \in D$ – punkt wewnętrzny zbioru D.

Definicja 14. Funkcja f ma w punkcie P_0 minimum lokalne (odp. maksimum lokalne), jeśli istnieje sąsiedztwo S punktu P_0 takie, że

$$\forall P \in S\ [f(P_0) \leqslant f(P)] \qquad (\text{odp.}\forall P \in S\ [f(P_0) \geqslant f(P)])$$

Funkcja f ma w punkcie P_0 ekstremum, jeśli ma w tym punkcie minimum lub maksimum.

Uwaga 5. Funkcja f ma w punkcie P_0 ekstremum, jeśli w pewnym sąsiedztwie tego punktu przyrost $\Delta f = f(P) - f(P_0)$ ma stały znak.

Twierdzenie 2. (**WK** istnienia ekstremum) Jeżeli funkcja f ma w punkcie P_0 ekstremum i istnieją pochodne cząstkowe pierwszego rzędu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)$, to są one równe zero.

Uwaga 6. Ekstremum funkcji f poszukujemy wśród takich punktów P_0, że $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) =$ $= \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$ lub co najmniej jedna z pochodnych cząstkowych $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ nie istnieje.

Punkt P_0 taki, że $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$ nazywamy punktem stacjonarnym funkcji f.

Twierdzenie 3. (**WW** istnienia ekstremum) Jeżeli funkcja f jest klasy $C^2(Q((x_0, y_0); r))$ oraz

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$

2. $W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$

to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum właściwe:
– maksimum, jeśli $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$;
– minimum, jeśli $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.

Uwaga 7. Jeśli spełnione są dwa pierwsze założenia twierdzenia **3.** i $W(x_0, y_0) < 0$, to w punkcie (x_0, y_0) funkcja f nie ma ekstremum.

Dodatek

Pochodna przekształcenia

Niech $g : D \to \mathbb{R}^2$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$, tzn. dla $t = (t_1, t_2)$ i $g = (g_1, g_2)$:

$$g(t) = (g_1(t_1, t_2), g_2(t_1, t_2))$$

Określamy pochodną przekształcenia $g(t)$ jako macierz (ozn.$g'(t)$):

$$g'(t) \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial t_2} \end{bmatrix}.$$

Podobnie:

Dla $g : P \to \mathbb{R}^2$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$, $g'(t) \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{bmatrix}$, $g = (g_1, g_2)$.

Dla $g : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$, $g'(t) \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial t_1} & \dfrac{\partial g}{\partial t_2} \end{bmatrix}$, $t = (t_1, t_2)$.

We wszystkich wzorach zakłada się, że odpowiednie pochodne istnieją.

Twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej

$P \subset \mathbb{R}$, $D_2 \subset \mathbb{R}^2$. Dane są funkcje: $(x, y) : P \to D_2$ oraz $f : D_2 \to \mathbb{R}$;

Twierdzenie 4. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest klasy $C^1(D_2)$ i funkcje $x(t), y(t)$ posiadają pochodne $x'(t), y'(t)$, to funkcja złożona $z(t) \stackrel{df}{=} f(x(t), y(t))$ posiada pochodną $z'(t)$ i prawdziwy jest wzór

$$z'(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

$D_1 \subset \mathbb{R}^2$, $D_2 \subset \mathbb{R}^2$. Dane są funkcje: $(x, y) : D_1 \to D_2$ oraz $f : D_2 \to \mathbb{R}$;

Twierdzenie 5. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest klasy $C^1(D_2)$ i funkcje $x(t_1, t_2), y(t_1, t_2)$ posiadają pochodne cząstkowe I rzędu, to funkcja złożona $z(t_1, t_2) \stackrel{df}{=} f(x(t_1, t_2), y(t_1, t_2))$ posiada pochodne cząstkowe I rzędu i prawdziwy jest wzór

$$z'(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial t_1} & \dfrac{\partial z}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t_1} & \dfrac{\partial y}{\partial t_2} \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\frac{\partial z}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_2}$$