

Metody Probabilistyczne i Statystyka

Wykład 10.

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych

11 maja 2025

Założenie

Niech $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m = 1, 2$, będzie funkcją taką, że $g(X, Y)$ jest zmienną losową m - wymiarową.

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu dyskretnego

Twierdzenie

Jeśli (X, Y) ma rozkład dyskretny, to $g(X, Y)$ ma rozkład dyskretny.

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu dyskretnego

Twierdzenie

Jeśli (X, Y) ma rozkład dyskretny, to $g(X, Y)$ ma rozkład dyskretny.

Przykład 1.

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny dany tabelą

$X \setminus Y$	-1	0	2
0	0.15	0.3	0
1	0.3	0.2	0.05

Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = \sin\left((X + Y) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ oraz wektora losowego $(W, T) = (X \cdot Y, |X - Y|)$.

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu dyskretnego

Przykład 2.

X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X_1 + X_2$.

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu ciągłego

Uwaga

Jeśli (X, Y) ma rozkład ciągły, to zmienna losowa $g(X, Y)$ nie musi mieć rozkładu ciągłego.

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu ciągłego

Uwaga

Jeśli (X, Y) ma rozkład ciągły, to zmienna losowa $g(X, Y)$ nie musi mieć rozkładu ciągłego.

Przykład 3.

Wektor (X, Y) ma rozkład $U(D)$, gdzie

$D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 2\}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = g(X, Y)$, jeśli

$$g(x, y) = \begin{cases} -1 & x < 0 \vee y < 0 \\ 0 & x = 0 \wedge y = 0 \\ 1 & x > 0 \wedge y > 0 \end{cases}.$$

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu ciągłego

Twierdzenie

Jeśli (X, Y) ma rozkład ciągły oraz $g(X, Y)$ jest zmienną losową jednowymiarową, to

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu ciągłego

Twierdzenie

Jeśli (X, Y) ma rozkład ciągły oraz $g(X, Y)$ jest zmienną losową jednowymiarową, to dystrybuantę zmiennej losowej $Z = g(X, Y)$ można wyznaczyć korzystając z zależności:

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu ciągłego

Twierdzenie

Jeśli (X, Y) ma rozkład ciągły oraz $g(X, Y)$ jest zmienną losową jednowymiarową, to dystrybuantę zmienne losowej $Z = g(X, Y)$ można wyznaczyć korzystając z zależności:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) =$$

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu ciągłego

Twierdzenie

Jeśli (X, Y) ma rozkład ciągły oraz $g(X, Y)$ jest zmienną losową jednowymiarową, to dystrybuantę zmienne losowej $Z = g(X, Y)$ można wyznaczyć korzystając z zależności:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z) =$$

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu ciągłego

Twierdzenie

Jeśli (X, Y) ma rozkład ciągły oraz $g(X, Y)$ jest zmienną losową jednowymiarową, to dystrybuantę zmienne losowej $Z = g(X, Y)$ można wyznaczyć korzystając z zależności:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z) = \\ &= \iint_{\{(x,y): g(x,y) \leq z\}} f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych typu ciągłego

Twierdzenie

Jeśli (X, Y) ma rozkład ciągły oraz $g(X, Y)$ jest zmienną losową jednowymiarową, to dystrybuantę zmiennej losowej $Z = g(X, Y)$ można wyznaczyć korzystając z zależności:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z) = \\ &= \iint_{\{(x,y): g(x,y) \leq z\}} f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Przykład 4.

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny w zbiorze $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x\}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = Y - X$.

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym

Twierdzenie

Jeśli $(X, Y) \sim N(m, C)$,

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym

Twierdzenie

Jeśli $(X, Y) \sim N(m, C)$, A jest macierzą $k \times 2$, ($k = 1, 2$) taką, że $r(A) = k$

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym

Twierdzenie

Jeśli $(X, Y) \sim N(m, C)$, A jest macierzą $k \times 2$, ($k = 1, 2$) taką, że $r(A) = k$ oraz $b \in \mathbb{R}^k$,

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym

Twierdzenie

Jeśli $(X, Y) \sim N(m, C)$, A jest macierzą $k \times 2$, ($k = 1, 2$) taką, że $r(A) = k$ oraz $b \in \mathbb{R}^k$, to k -wymiarowa zmienna losowa $A \cdot (X, Y)^T + b$ ma rozkład normalny z parametrami

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym

Twierdzenie

Jeśli $(X, Y) \sim N(m, C)$, A jest macierzą $k \times 2$, ($k = 1, 2$) taką, że $r(A) = k$ oraz $b \in \mathbb{R}^k$, to k -wymiarowa zmienna losowa $A \cdot (X, Y)^T + b$ ma rozkład normalny z parametrami

$$m^* = Am + b$$

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym

Twierdzenie

Jeśli $(X, Y) \sim N(m, C)$, A jest macierzą $k \times 2$, ($k = 1, 2$) taką, że $r(A) = k$ oraz $b \in \mathbb{R}^k$, to k -wymiarowa zmienna losowa $A \cdot (X, Y)^T + b$ ma rozkład normalny z parametrami

$$m^* = Am + b \text{ oraz } C^* = ACA^T.$$

Rozkłady funkcji dwuwymiarowych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym

Twierdzenie

Jeśli $(X, Y) \sim N(m, C)$, A jest macierzą $k \times 2$, ($k = 1, 2$) taką, że $r(A) = k$ oraz $b \in \mathbb{R}^k$, to k -wymiarowa zmienna losowa $A \cdot (X, Y)^T + b$ ma rozkład normalny z parametrami

$$m^* = Am + b \text{ oraz } C^* = ACA^T.$$

Przykład 5.

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny taki, że

$$EX = 2, EY = -1, VX = 4, VY = 8, \text{cov}(X, Y) = -4.$$

Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = 2X - 3Y$ oraz wektora losowego $(W, T) = (X + Y + 1, 2X - 3Y)$.