ANA2 Rozwiązania

Z_2

1. Oblicz sumę szeregu:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

   $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + \ldots + a_n)$

   $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow S = 1$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$.

   $a_n = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \Rightarrow S_n = 1-1+1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!} = 1-\frac{1}{n!} \Rightarrow S = 1$

2. Zbadaj zbieżność szeregu:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$,

   Skorzystamy z kryterium porównawczego :
   $b_n \geqslant a_n \geqslant 0 \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

   $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0 \ \wedge\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ - szereg harmoniczny - rozbieżny, więc $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ jest rozbieżny

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\arccos\left(\frac{n}{2n+1}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$,

   Skorzystamy z warunku koniecznego: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - zbieżny $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

   $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \neq 0 \Rightarrow$ szereg rozbieżny

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$,

   Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego: $a_n \geqslant 0 \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g > 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow$ szereg rozbieżny

   $\sqrt[n]{a_n} = \frac{3\cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow$ szereg rozbieżny

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$,

   Skorzystamy z kryterium porównawczego :
   $0 \leqslant a_n \leqslant b_n \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

$0 \leqslant \sin^2 \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^2} \ \wedge \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ - zbieżny

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}$,

Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego i z tw. o 3 ciągach:

$\frac{5}{4} \leftarrow \sqrt[n]{\frac{5^n}{2\cdot 4^n}} \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant \sqrt[n]{\frac{2\cdot 5^n}{4^n}} \rightarrow \frac{5}{4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{4} > 1 \Rightarrow$ szereg rozbieżny

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)\cdot 3^n}$,

Skorzystamy z kryterium d'Alemberta: $a_n > 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ szereg zbieżny

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^2\cdot 3^n}{(n+3)(n+1)\cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(n+2)^2}{(n+3)(n+1)} \rightarrow \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ szereg zbieżny

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{n^2}{n^3+1}\right)}{2^n}$,

Skorzystamy z kryterium porównawczego: $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n} \ \wedge \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ jest zbieżny, bo jest to szereg geometryczny, dla którego $|q| < 1$, $q = \frac{1}{2} \Rightarrow$ szereg zbieżny

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$,

Skorzystamy z kryterium całkowego: $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}\,, f \geqslant 0\,,\ f$ - nierosnąca $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ i $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} > 0\,,\ f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3} < 0\,,\ x \geqslant 2 \Rightarrow f$ - malejąca

$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_1^{T} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty} \ -\frac{1}{x}(\ln x + 1)\ \Big|_2^T =$
$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{\ln T+1}{T} + \frac{\ln 2+1}{2}\right] = \frac{\ln 2+1}{2} \Rightarrow$ szereg zbieżny

$\lim_{T\to\infty} \frac{\ln T+1}{T} = \left\| \ H \ \right\| = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} = 0$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!\cdot n^n}{(2n)!\cdot 3^n}$.

Skorzystamy z kryterium d'Alemberta:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)!(n+1)^{n+1}(2n)!3^n}{(2n+2)!3^{n+1}(n+1)!n^n} = \frac{(n+2)(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{e}{12} < 1 \Rightarrow$ szereg zbieżny

3. Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$,

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, w przeciwnym przypadku szereg jest warunkowo zbieżny.

$\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ szereg jest bezwzględnie zbieżny

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Szereg nie jest zbieżny bezwzględnie, bo z kryterium porównawczego $\sin\frac{1}{n} \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n} \geqslant 0$ i szereg harmoniczny jest rozbieżny

Aby wykazać zbieżność warunkową szeregu skorzystamy z kryterium Lebniza: $a_n > 0\,,\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,,\ (a_n)$ - nierosnący $\Rightarrow$ szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest zbieżny

$\sin\frac{1}{n} > 0\,,\ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0\,,\ \left(\sin\frac{1}{n}\right)$ - malejący $\Rightarrow$ szereg zbieżny