Wykład 2
Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$n = 2, 3, 4, \dots$

Definicja 1 *Liczbę zespoloną w nazywamy* ***pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby zespolonej z****, jeśli $w^n = z$.*

$z = 0$ - jedynym pierwiastkiem stopnia n z 0 jest 0.

Twierdzenie 1 *Dla dowolnej liczby zespolonej $z = |z|(\cos\phi + j\sin\phi)$ i $n > 1$ istnieje dokładnie n pierwiastków n-tego stopnia z liczby z i wyrażają się one wzorami:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots n-1.$$

$w_0 = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\phi}{n} + j\sin\frac{\phi}{n})$ - pierwiastek główny z liczby z

Uwaga. Wszystkie pierwiastki n-tego stopnia z liczby $z \neq 0$ leżą **na okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $\sqrt[n]{|z|}$**. Dzielą one łuk okręgu **na n równych części**.

Uwaga. Jeżeli $z = a + bj$, to pierwiastki drugiego stopnia z liczby z wyrażają się wzorami:

$$\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm j\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

gdzie znaki są zgodne, gdy $b > 0$, a przeciwne gdy $b < 0$.

Pierwiastki z jedynki

$z = 1 \quad \Rightarrow \quad w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + j\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots n-1$

Uwaga. Suma wszystkich pierwiastków stopnia n z liczby 1 jest równa 0, dla każdego n.

Wielomiany

Definicja 2 ***Wielomianem o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$*** *będziemy nazywać każdą funkcję $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ określoną wzorem:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

gdzie $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

Liczbę n nazywamy stopniem wielomianu f i oznaczamy $\mathrm{st}f$, $n = 0, 1, \dots$.

Wielomiany stopnia 0 (zerowego) to stałe z ciała $\mathbb{K}$.

Wielomian zerowy: $f(x) \equiv 0$, przyjmujemy dodatkowo, że $\mathrm{st}0 = -\infty$.

Oznaczenie. $\mathbb{K}[x]$ - zbiór wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$.
W $\mathbb{K}[x]$ definiujemy działania dodawania wielomianów (w zwykły sposób) i mnożenia wielomianów (w zwykły sposób).

$\mathrm{st}(f + g) = \max(\mathrm{st}f, \mathrm{st}g)$
$\mathrm{st}(f \cdot g) = \mathrm{st}f + \mathrm{st}g$

Definicja 3 *Wielomian $f \in \mathbb{K}[x]$ jest* ***rozkładalny*** *w $\mathbb{K}[x]$, jeśli istnieją wielomiany $g, h \in \mathbb{K}[x]$, $\mathrm{st}g > 0$ i $\mathrm{st}h > 0$, takie że $f = g \cdot h$. Wielomian $f \in \mathbb{K}[x]$ jest* ***nierozkładalny*** *w $\mathbb{K}[x]$, jeśli*

$$\forall\, g, h \in \mathbb{K}[x] \quad f = g \cdot h \;\Rightarrow\; \mathrm{st}g = 0 \;\vee\; \mathrm{st}h = 0.$$

W zbiorze $\mathbb{K}[x]$ jest wykonalne dzielenie z resztą, tzn.

$$\forall\, (f, g \in \mathbb{K}[x], \mathrm{st}f \geqslant \mathrm{st}g) \;\; \exists\, p, r \in \mathbb{K}[x] \quad f = p \cdot g + r, \; \mathrm{st}r < \mathrm{st}g.$$

Twierdzenie 2 *(Zasadnicze twierdzenie algebry) Każdy wielomian $f \in \mathbb{C}[x]$, $\mathrm{st}f \geqslant 1$ ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.*

Wniosek 3 *Każdy wielomian $f \in \mathbb{C}[x]$ można rozłożyć na iloczyn wielomianów pierwszego stopnia (niekoniecznie różnych):*

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{k_m},$$

gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, $k_i \in \mathbb{N}$.

k_i - krotność pierwiastka x_i
$k_1 + \ldots + k_m = n = \mathrm{st}f$

Twierdzenie 4 *Jeżeli wszystkie współczynniki wielomianu $f \in \mathbb{C}[x]$ są liczbami rzeczywistymi i $f(z_0) = 0$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C}$, to $f(\overline{z_0}) = 0$.*

Uwaga. W $\mathbb{C}[x]$ jedyne wielomiany nierozkładalne to wielomiany stopnia pierwszego. W $\mathbb{R}[x]$ wielomiany nierozkładalne to wielomiany stopnia pierwszego oraz wielomiany stopnia drugiego, dla których $\Delta < 0$.

Uwaga. W dziedzinie zespolonej wzory na pierwiastki równania kwadratowego pozostają prawdziwe.

Uwaga. $(x - z_0) \cdot (x - \overline{z_0}) = (x^2 - 2\mathrm{Re}z_0 \cdot x + |z_0|^2) \in \mathbb{R}[x]$.

Funkcje wymierne i ułamki proste

Definicja 4 ***Funkcją wymierną*** *względem ciała $\mathbb{K}$ nazywamy funkcję postaci $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, gdzie $f, g \in \mathbb{K}[x]$, $\mathrm{st}\; g > 0$.*

Funkcję wymierną nazywamy **właściwą**, jeśli $\mathrm{st}\; f < \mathrm{st}\; g$.

Uwaga. Dowolną funkcję wymierną można przedstawić jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x) \cdot g(x) + r(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \quad \mathrm{st}\; r < \mathrm{st}\; g.$$

Definicja 5 *Funkcję wymierną właściwą względem ciała $\mathbb{K}$ nazywamy* ***ułamkiem prostym*** *względem $\mathbb{K}$, gdy jest postaci: $\dfrac{f(x)}{(h(x))^k}$, gdzie st $f <$st h, $k \in \mathbb{N}$ oraz $h(x)$ jest wielomianem nierozkładalnym w $\mathbb{K}[x]$.*

Ułamki proste względem ciała $\mathbb{C}$: $\dfrac{A}{(x - z_0)^k}$, $A, z_0 \in \mathbb{C}$

Ułamki proste względem ciała $\mathbb{R}$:

1. **pierwszego rodzaju**: $\dfrac{A}{(x - a)^k}$, $\; A, a \in \mathbb{R}$
2. **drugiego rodzaju**: $\dfrac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}$, $\; A, B, p, q \in \mathbb{R}$, $\; p^2 - 4q < 0$.

Twierdzenie 5 *Każdą funkcję wymierną właściwą można przedstawić jako sumę ułamków prostych i rozkład ten jest jednoznaczny.*

Uwaga. Jeżeli w mianowniku funkcji wymiernej występuje czynnik $(x-a)^k$, $k>1$, to w poszukiwanym rozkładzie odpowiada mu suma k składników:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

Jeżeli w mianowniku funkcji wymiernej występuje czynnik $(x^2+px+q)^k$, $k>1$, to w poszukiwanym rozkładzie odpowiada mu suma k składników:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

Metoda współczynników nieoznaczonych

1. Piszemy rozkład na sumę ułamków prostych przy czym liczniki ułamków są nieoznaczone (nieznane współczynniki, niewiadome).

2. Sprowadzamy wszystkie ułamki do wspólnego mianownika i dodajemy je.

3. Licznik powstałego w ten sposób ułamka (z niewiadomymi współczynnikami) przyrównujemy do licznika rozkładanego ułamka $\Rightarrow$ współczynniki przy odpowiednich potęgach muszą być równe.

4. Rozwiązujemy powstały układ równań.

Uwaga. W szczególnym przypadku, gdy mamy rozkład

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_k}{x-a_k},$$

to

$f(x)=A_1(x-a_2)\cdots(x-a_k)+A_2(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_k)+\cdots+A_k(x-a_1)\cdots(x-a_{k-1}).$

Wstawiając do $f(x)$ kolejne wartości a_i otrzymujemy $A_1,..,A_k$.