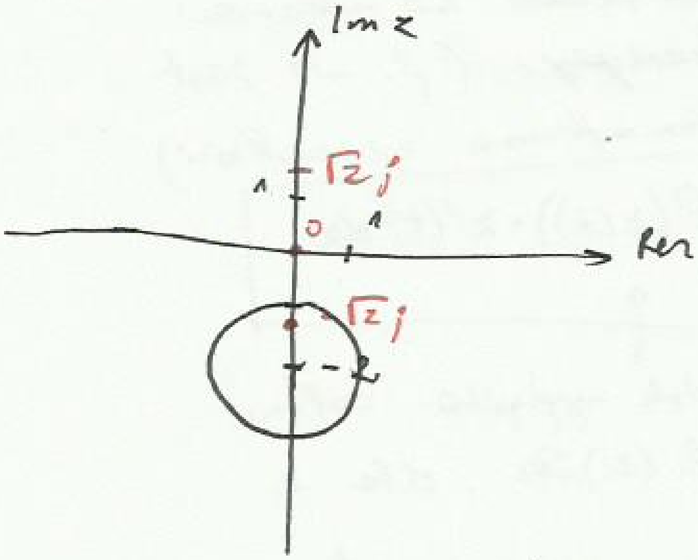
Oblicz całkę po dodatnio skierowanym brzegu

$$|z+2j|=1 \qquad \oint_C f(z)dz = ?$$

$$f(z) = \overline{z} + (z^4+2z^2)$$



② Rysuję sobie obszar całkowania

③ Wyznaczam granice całkowania:

$t \in [0; 2\pi]$

$z(t) = z_0 + e^{jt} = -2j + e^{jt}$

① Dzielę całki na $\oint_C \overline{z}\,dz$ ← ta nie jest koło, więc nie można jej sobie uprościć z Cauchyego

oraz $\oint_C \frac{1}{z^4+2z^2}dz$

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z+\sqrt{2}j)(z-\sqrt{2}j)}dz$$ ← całka Cauchyego

Jej punkty osobliwe (czyli nie należące do dziedziny) to: $0, \sqrt{2}j, -\sqrt{2}j$, ale w obszarze całkowania znajduje się w tym przypadku jedynie $-\sqrt{2}j$ (poza okręg)

$$\oint \frac{\frac{1}{z^2(z-\sqrt{2}j)}}{z-(-\sqrt{2}j)}dz = 2\pi j \cdot \frac{1}{(-\sqrt{2}j)^2(-\sqrt{2}j-\sqrt{2}j)} = \frac{2\pi j}{-2(-2\sqrt{2}j)} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

ze wzoru Cauchyego

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} = 2\pi j\, f(z_0)$$

1 punkt osobliwy

OGÓLNY PRZYPADEK WZORU:

$$\oint_{K(z_0,R)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = 2\pi i\, \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$ ← sposób takiego typu był wzór na któryś z kolosów z grupy infy

$z(t) = -2j + e^{jt}$

$\overline{z(t)} = 2j + e^{-jt}$

$(z(t))' = 0 + je^{jt}$

W ogólnym przypadku, gdy nie można się korzystać do wzorów Cauchy'ego (f. nie jest holomorficzna w całości)

$$\boxed{\oint_C f(z(t)) \cdot z'(t)\, dz}$$

tak wygląda całka $\oint_C f(z)\,dz$, dla z nieholomorficznego

TU JUŻ CAŁKUJEMY W GRANICACH

$$\oint_0^{2\pi} f(z(t)) \cdot z'(t)\, dz = \oint_0^{2\pi} (2j + e^{-jt})\, je^{jt}\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2e^{jt} + je^{0})\, dz = -2\int_0^{2\pi} e^{jt} + \int_0^{2\pi} j\, dz$$

$$= -2 \cdot e^{j2\pi} + 2e^{0} + j2\pi$$

$$= -2e^{2\pi j} + 2 + 2\pi j$$

$$\oint_C f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} - 2e^{2\pi j} + 2\pi j + 2$$