Wykład 8
Układy równań liniowych

Dany jest układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. ,$$

gdzie $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Rozwiązaniem układu $(*)$ nazywamy każdy ciąg elementów $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ spełniający ten układ.

Oznaczenia. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ - macierz współczynników układu, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ - wektor (kolumna) wyrazów wolnych.

Definicja 1 *Układ $(*)$ nazywamy* ***układem jednorodnym****, jeśli B - macierz zerowa, a* ***układem niejednorodnym*** *w przeciwnym przypadku.*

Uwaga. Każdy układ jednorodny posiada co najmniej jedno rozwiązanie: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Uwaga. Niech $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Wówczas układ $(*)$ jest równoważny równaniu macierzowemu
$(**)\ A \cdot X = B$.

Układy Cramera

Dany jest układ n równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$:

$$(\#) \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. ,$$

gdzie $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$.

Lub równoważnie: $(\#\#)\ A \cdot X = B$, gdzie $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_1, \ldots, b_n]^T$, $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$.

Definicja 2 *Układ $(\#)$ $(\Leftrightarrow (\#\#))$ nazywamy* ***układem Cramera****, jeśli $\det A \neq 0$.*

Twierdzenie 1 *Układ Cramera posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Może ono być wyznaczone przy pomocy* ***wzorów Cramera****:*

$$x_1 = \frac{\det A_{(1)}}{\det A}\ , \quad x_2 = \frac{\det A_{(2)}}{\det A}\ , \ \ldots\ , \quad x_n = \frac{\det A_{(n)}}{\det A}\ ,$$

gdzie $A_{(i)}$ oznacza macierz powstałą z A przez zastąpienie i-tej kolumny macierzą B.

Twierdzenie 2 *Jeżeli (##) jest układem Cramera, to* $X = A^{-1} \cdot B$ *(metoda macierzowa).*

Zastosowanie do macierzy przejścia

Oznaczenie. $A = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$, $A_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ (i-ta kolumna macierzy A)

Twierdzenie 3 *Układ wektorów* $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *jest bazą przestrzeni* $\mathbb{K}^n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det[A_1, A_2, \ldots, A_n] \neq 0$.

Rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Kolumny macierzy A można traktować jako wektory z przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^m$, a wiersze jako wektory z $\mathbb{K}^n$.

Oznaczenie. $A = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$, $A_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$ (i-ta kolumna macierzy A) lub:
$A = [A^1, A^2, \ldots, A^m]^T$, $A^j = [a_{j1}, \ldots, a_{jn}]$ (j-ty wiersz macierzy A).

Definicja 3 ***Rzędem kolumnowym*** *macierzy A nazywamy* $\dim \operatorname{Lin}(A_1, \ldots, A_n)$ *(maksymalną liczbę liniowo niezależnych kolumn macierzy A).* ***Rzędem wierszowym*** *macierzy A nazywamy* $\dim \operatorname{Lin}(A^1, \ldots, A^m)$ *(maksymalną liczbę liniowo niezależnych wierszy macierzy A).*

Uwaga. Rząd kolumnowy macierzy A jest równy jej rzędowi wierszowemu.

Definicja 4 ***Rzędem*** *macierzy A nazywamy jej rząd kolumnowy (lub wierszowy).*

Oznaczenie. $r(A)$, $R(A)$, $rz(A)$.

Uwaga. Rząd macierzy nieosobliwej stopnia n jest równy n.

Twierdzenie 4 *Jeżeli* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$ *jest macierzą przekształcenia liniowego* $\phi : V \to W$ *w dowolnie ustalonych bazach $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ to*
$$r(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)) = r(\phi) = dimIm\phi.$$

Definicja 5 ***Minorem stopnia*** *k macierzy* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k powstałej z macierzy A przez wykreślenie $m - k$ wierszy i $n - k$ kolumn.*

Uwaga. Rząd macierzy jest równy najwyższemu stopniowi niezerowego minora tej macierzy.
Uwaga. Rząd macierzy nie zmieni się, gdy

1. skreślimy wiersz zerowy,
2. skreślimy jeden z dwóch proporcjonalnych wierszy,
3. dodamy do wiersza kombinację liniową innych wierszy,

4. przestawimy wiersze,

5. wykonamy analogiczne operacje na kolumnach.

Uwaga. Macierz nazywamy **schodkową** (**trapezową**), gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej schodków.

Układy równań liniowych

Rozpatrujemy dwa układy równań:

$$(I)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

$$(II)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases},$$

gdzie $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Uwaga. Zbiór rozwiązań układu (II) jest niepusty i tworzy podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbb{K}^n$.

Każde rozwiązanie równania macierzowego $A \cdot X = \mathbb{O}$ ($\Leftrightarrow$ układu (II)) jest wektorem należącym do jądra przekształcenia liniowego ϕ, którego macierzą przekształcenia jest macierz A.

Każde rozwiązanie układu (I) jest postaci $X_B + X_0$, gdzie X_B - jakiekolwiek rozwiązanie szczególne układu (I) i X_0 - pewne rozwiązanie układu (II). X_0 można przedstawić jako kombinację liniową wektorów z bazy przestrzeni $\ker\phi$ ($\Leftrightarrow$ wektorów z bazy przestrzeni rozwiązań układu (II)).

Definicja 6 ***Układem fundamentalnym*** *rozwiązań układu (II) nazywamy dowolną bazę przestrzeni rozwiązań tego układu.*

Definicja 7 *$A \cdot X = B$.* ***Macierzą rozszerzoną*** *układu (I) nazywamy macierz $[A|B] = [A_1, A_2, \ldots, A_n, B]$.*

Twierdzenie 5 ***(Kroneckera-Capellego)***

1. *Układ równań (I): $A \cdot X = B$ posiada rozwiązanie $\Leftrightarrow r(A) = r(A|B)$.*

2. *Jeśli $r(A) = r(A|B) = n$ to układ (I) posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

3. *Jeśli $r(A) = r(A|B) = k < n$ to układ (I) posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - k$ parametrów, które mogą przyjmować dowolne wartości z $\mathbb{K}$.*

Wniosek 6 *Układ jednorodny z n niewiadomymi ma niezerowe rozwiązanie $\Leftrightarrow r(A) < n$.*