AUTOMATYKA I ROBOTYKA - SEMESTR 2

ANA2. ZESTAW 7. - Rozwiązania

Zad. 1. Obliczyć całki

$$\text{(a)} \qquad \int_L (z^2 - 2z + i)\, dz\,, \quad L - \text{odcinek od } A = -1 \text{ do } B = 2i$$

Funkcja podcałkowa jest ciągła (i holomorficzna), więc wartość całki nie zależy od drogi całkowania, a tylko od punktu początkowego i końcowego:

$$\int_{\breve{AB}} f(z)\, dz = \quad F(z)\ \Big|_A^B = F(B) - F(A)$$

gdzie $F(z)$ jest funkcją pierwotną $f(z)$, tzn. $F'(z) = f(z)$.

$\int_L (z^2 - 2z + i)\, dz = \ \left(\frac{z^3}{3} - z^2 + iz\right)\ \Big|_{-1}^{1+i} = \frac{10}{3} - \frac{5}{3}i$

$$\text{(b)} \qquad \int_L z \cdot |z|\, dz\,, \quad L:\ |z| = 2 \text{ od } A = 2i \text{ do } B = -2$$

$\int_L z \cdot |z|\, dz = \int_L 2z\, dz = \ z^2\ \Big|_{2i}^{-2} = 4 - (-4) = 8$

lub

$L\ :\ z(t) = 2e^{it}\,,\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow z'(t) = 2ie^{it}\,,\ |z| = 2$

$\int_L z \cdot |z|\, dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2e^{it} \cdot 2 \cdot 2ie^{it}\, dt = 8i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2it}\, dt = 8i \cdot\ \frac{e^{2it}}{2i}\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ 4(\cos 2t + i \sin 2t)\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$

$= 4(1 - (-1)) = 8$

$$\text{(c)} \qquad \oint_{C^+} \frac{z^3 - 3z^2 + z - 1}{z}\, dz\,, \quad C = \{z : |\mathrm{Re}\, z| \le 2\ \wedge\ |\mathrm{Im}\, z| \le 2\}$$

Skorzystamy z tw. podstawowego Cauchy'ego: całka po krzywej zamkniętej z funkcji holomorficznej jest równa 0, z wniosku z tego twierdzenia:

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

dla dowolnych krzywych obiegających punkt nieholomorficzności z_0 funkcji $f(z)$ oraz z przykładu:

$$\oint_{K^+(z_0,r)} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0\,, & n \neq 1 \\ 2\pi i\,, & n = 1 \end{cases}$$

$\oint_{C^+}(z^2-3z+1)\,dz - \oint_{C^+}\frac{dz}{z} = 0 - \oint_{K^+(0,1)}\frac{dz}{z} = -2\pi i$

Zad. 2. Obliczyć całki

$$\text{(a)} \qquad \int_{\overline{AB}} \bar{z}\,dz\,, \quad \overline{AB} \;-\text{odcinek od } A=0 \text{ do } B=1+i$$

Zastosujemy tw. o zamianie całki zespolonej na całkę oznaczoną:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$$

gdzie $z(t)\,, t\in[\alpha,\beta]$ jest parametryzacją L zgodną z kierunkiem łuku.

$\overline{AB}:\ z(t) = t+it\,,\ t\in[0,1]$

$\int_{\overline{AB}} \bar{z}\,dz = \int_0^1 (t-it)\cdot(1+i)\,dt = (1-i)(1+i)\int_0^1 t\,dt = 2\cdot\ \frac{t^2}{2}\ \Big|_0^1 = 1$

$$\text{(b)} \qquad \int_L \bar{z}\,dz\,, \quad L\;-\text{odcinki : od}\,0 \text{ do } 1 \text{ i od } 1 \text{ do } 1+i \text{ (ich suma)}$$

L jest łamaną $L_1\cup L_2$, gdzie $L_1:\ z(t)=t\,,\ t\in[0,1]$,

$L_2 : \ z(t) = 1 + it\,, \ t \in [0, 1]$

$\int_L \bar{z}\, dz = \int_{L_1 \cup L_2} \bar{z}\, dz = \int_{L_1} \bar{z}\, dz + \int_{L_2} \bar{z}\, dz = \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 (1 - it) \cdot i\, dt =$
$= \ \frac{t^2}{2} \ \Big|_0^1 + \ \ i\left(t - i \cdot \frac{t^2}{2}\right) \ \Big|_0^1 = 1 + i$

$$\text{(c)} \qquad \oint_{C^-} \frac{|z|^2}{z - 1}\, dz\,, \quad C:\ |z - 1| = 2$$

Okrąg C zadany jest przez parametryzację $z(t) = 1 + 2e^{it}\,, \ t \in [0, 2\pi] \Rightarrow$ $|z|^2 = (1 + 2\cos t)^2 + 4\sin^2 t = 5 + 4\cos t$ i jest ujemnie skierowany.

$\oint_{C^-} \frac{|z|^2}{z-1}\, dz = -\int_0^{2\pi} \frac{5+4\cos t}{2e^{it}} \cdot 2ie^{it}\, dt = -5i \int_0^{2\pi} dt - 4i \int_0^{2\pi} \cos t\, dt =$
$= \ -5it \ \Big|_0^{2\pi} - \ \ 4i \sin t \ \Big|_0^{2\pi} = -10\pi i$

$$\text{(d)} \qquad \oint_{C^+} e^{-z^2}\, dz\,, \quad C:\ z(t) = \frac{3}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}\,, \ t \in [0, 2\pi]$$

Krzywa C jest elipsą $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ o parametryzacji w płaszczyźnie rzeczywistej: $x(t) = 2\cos t\,, \ y(t) = \sin t\,, \ t \in [0, 2\pi]$, funkcja podcałkowa jest funkcją holomorficzną, jako złożenie funkcji holomorficznych, więc z tw. podstawowego Cauchy'ego

$\oint_{C^+} e^{-z^2}\, dz = 0$