Wykład 3
Funkcje wymierne i ułamki proste

Definicja 1 ***Funkcją wymierną*** *względem ciała* $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję postaci* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *gdzie* $f, g \in \mathbb{K}[x]$, $\text{st } g > 0$.

Funkcję wymierną nazywamy **właściwą**, jeśli $\text{st } f < \text{st } g$.

Uwaga. Dowolną funkcję wymierną można przedstawić jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x) \cdot g(x) + r(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \quad \text{st } r < \text{st } g.$$

Definicja 2 *Funkcję wymierną właściwą względem ciała* $\mathbb{K}$ *nazywamy* ***ułamkiem prostym*** *względem* $\mathbb{K}$, *gdy jest postaci:* $\dfrac{f(x)}{(h(x))^k}$, *gdzie st* $f <$*st* h, $k \in \mathbb{N}$ *oraz* $h(x)$ *jest wielomianem nierozkładalnym w* $\mathbb{K}[x]$.

Ułamki proste względem ciała $\mathbb{C}$: $\dfrac{A}{(x - z_0)^k}$, $A, z_0 \in \mathbb{C}$

Ułamki proste względem ciała $\mathbb{R}$:

1. **pierwszego rodzaju**: $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $A, a \in \mathbb{R}$
2. **drugiego rodzaju**: $\dfrac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}$, $A, B, p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$.

Twierdzenie 1 *Każdą funkcję wymierną właściwą można przedstawić jako sumę ułamków prostych i rozkład ten jest jednoznaczny.*

Uwaga. Jeżeli w mianowniku funkcji wymiernej występuje czynnik $(x - a)^k$, $k > 1$, to w poszukiwanym rozkładzie odpowiada mu suma k składników:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

Jeżeli w mianowniku funkcji wymiernej występuje czynnik $(x^2 + px + q)^k$, $k > 1$, to w poszukiwanym rozkładzie odpowiada mu suma k składników:

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k}.$$

Metoda współczynników nieoznaczonych

1. Piszemy rozkład na sumę ułamków prostych przy czym liczniki ułamków są nieoznaczone (nieznane współczynniki, niewiadome).

2. Sprowadzamy wszystkie ułamki do wspólnego mianownika i dodajemy je.

3. Licznik powstałego w ten sposób ułamka (z niewiadomymi współczynnikami) przyrównujemy do licznika rozkładanego ułamka $\Rightarrow$ współczynniki przy odpowiednich potęgach muszą być równe.

4. Rozwiązujemy powstały układ równań.

Uwaga. W szczególnym przypadku, gdy mamy rozkład

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_k}{x-a_k},$$

to

$f(x) = A_1(x-a_2)\cdots(x-a_k) + A_2(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_k) + \cdots + A_k(x-a_1)\cdots(x-a_{k-1}).$

Wstawiając do $f(x)$ kolejne wartości a_i otrzymujemy $A_1, .., A_k$.

Przestrzenie liniowe

Definicja 3 ***Przestrzenią liniową (wektorową) nad ciałem*** $\mathbb{K}$ *nazywamy zbiór* V *z odwzorowaniami:*

$$+\colon V\times V\to V,\quad (u,v)\mapsto u+v\quad \textit{(dodawanie \textbf{wektorów})},$$
$$\cdot\colon \mathbb{K}\times V\to V,\quad (a,v)\mapsto a\cdot v\quad \textit{(mnożenie \textbf{wektora przez skalar})},$$

oraz z wyróżnionym elementem zbioru V *zwanym* ***wektorem zerowym****, ozn.* $\mathbf{0}_V$*, jeśli spełnione są następujące warunki (****aksjomaty przestrzeni liniowej****):* $\forall u,v,w\in V$ *i* $\forall a,b\in\mathbb{K}$

1. $u+(v+w)=(u+v)+w$ *- łączność dodawania wektorów;*
2. $u+v=v+u$ *- przemienność dodawania wektorów;*
3. $u+\mathbf{0}_V=u$ *-* $\mathbf{0}_V$ *jest elementem neutralnym dodawania wektorów;*
4. $\forall u\in V\ \exists v\in V\quad u+v=\mathbf{0}_V$ *- istnienie elementu odwrotnego w dodawaniu wektorów;*
5. $a\cdot(b\cdot u)=(a\cdot b)\cdot u$ *- łączność mnożenia przez skalary;*
6. $a\cdot(u+v)=a\cdot u+a\cdot v$ *- rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania wektorów;*
7. $(a+b)\cdot u=a\cdot u+b\cdot v$ *- rozdzielność mnożenia względem dodawania skalarów;*
8. $1\cdot u=u$ *-* $1\in\mathbb{K}$ *jest elementem neutralnym mnożenia wektora przez skalar;*

Elementy zbioru V nazywamy **wektorami**, elementy ciała $\mathbb{K}$ nazywamy **skalarami**.

Oznaczenie. Element odwrotny (przeciwny) do $u\in V$ w dodawaniu wektorów ozn. $-u$,
$u-v:=u+(-v)$ - różnica wektorów.

Podprzestrzenie liniowe

Definicja 4 *Podzbiór* $W\subset V$*, gdzie* $(V,+)$ *jest przestrzenią liniową nad* $\mathbb{K}$*, nazywamy* ***podprzestrzenią liniową*** *przestrzeni* V*, jeśli* $(W,+|_W)$ *jest przestrzenią liniową nad* $\mathbb{K}$*.*

Uwaga. $W\subset V$, $(V,+)$ - przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$, W jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V $\Leftrightarrow$

1. $\forall\, u,v\in W\quad u+v\in W$

2. $\forall\, a\in\mathbb{K}\ \forall\, u\in W\quad a\cdot u\in W$

lub równoważnie:

$$\forall\, a\in\mathbb{K}\ \forall\, u,v\in W\quad u+a\cdot v\in W.$$

Kombinacje liniowe wektorów

Niech $(V, +)$ - przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$.

Definicja 5 *Wektor $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k$ nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k$ o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.*

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k$ oznaczamy przez

$$\mathrm{Lin}(v_1, v_2, \ldots, v_k) := \{\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}.$$

Uwaga. Dla dowolnego układu wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ zbiór $\mathrm{Lin}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $(V, +)$. Nazywamy ją **podprzestrzenią rozpiętą na wektorach** $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lub **podprzestrzenią generowaną** przez układ wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k$.