Zespolone prawa Kirchhoffa i równania elementów

Dziedzina czasu

PPK $\sum i = 0$

NPK $\sum u = 0$

R $u = Ri$

L $u = \mathrm{D}Li$

G $i = Gu$

C $i = \mathrm{D}Cu$

M $u_k = \mathrm{D}L_k i_k + \mathrm{D}Mi_{2-k}$

e $u = e$

j $i = j$

ŹS $y = \alpha x$

(podobnie WO, TI)

$\longleftrightarrow$

Dziedzina wskazów

PPK $\sum I = 0$

NPK $\sum U = 0$

R $U = RI \quad = (R)I$

L $U = \mathrm{j}\omega LI \quad = (\mathrm{j}\omega L)I$

G $I = GU \quad = (G)U$

C $I = \mathrm{j}\omega CU \quad = (\mathrm{j}\omega C)U$

M $U_k = \mathrm{j}\omega L_k I_k + \mathrm{j}\omega MI_{2-k}$

e $U = E$

j $I = J$

ŹS $Y = \alpha X$

(podobnie WO, TI)

Równania w obu dziedzinach są *izomorficzne*.

Immitancje (impedancje i admitancje) dwójników...

...w układzie SLS prądu sinusoidalnego w stanie ustalonym.
Dla indukcyjności: $Z_L = \mathrm{j}\omega L$, dla pojemności: $Y_C = \mathrm{j}\omega C$.

Impedancja dowolnego dwójnika bezźródłowego

$$\underbrace{\text{impedancja}}_{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U}{I} = \underbrace{\text{rezystancja}}_{R} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{\text{reaktancja}}_{X} = \frac{1}{Y}$$

Admitancja dowolnego dwójnika bezźródłowego

$$\underbrace{\text{admitancja}}_{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I}{U} = \underbrace{\text{konduktancja}}_{G} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{\text{susceptancja}}_{B} = \frac{1}{Z}$$

Immitancje i ich części są funkcjami częstotliwości: $Z = Z(\mathrm{j}\omega)$, $R = R(\omega)$, $X = X(\omega)$, $Y = Y(\mathrm{j}\omega)$, $G = G(\omega)$, $B = B(\omega)$.
Dw. rezystancyjne: $X \equiv 0$, $B \equiv 0$; reaktancyjne $R \equiv 0$, $G \equiv 0$.

Wskazowy schemat zastępczy

Układ SLS prądu sinusoidalnego
$\sum x(t)$, $\alpha \cdot x(t)$, $\mathrm{D}x(t)$

→

Wskazowy schemat zastępczy
$\sum X$, $\alpha \cdot X$, $\mathrm{j}\omega X$

↓

Metody rozwiązywania jak dla liniowych układów rezystancyjnych:

- zespolony odpowiednik prawa Ohma dla immitancji
- równoważność źródeł (niezależnych) rzeczywistych
- łączenie elementów, przejście $\mathrm{Y} \leftrightarrow \Delta$
- dzielniki napięciowe i prądowe
- zasada kompensacji
- zasada „przesuwania” („ruchliwości”) źródeł
- zasada superpozycji
- twierdzenia o źródłach zastępczych (Thévenina i Nortona)

↓

Szukany wskaz Y

→

Szukany przebieg $y(t)$

Moc czynna wydzielana w *oporze*, wartości skuteczne

Moc czynna P to wartość średnia (za okres) mocy chwilowej p.

Wartość średnia i skuteczna (RMS) sygnału T-okresowego x

$$X_{\text{śr}} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x\mathrm{d}t, \qquad X_{\text{sk}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2\mathrm{d}t}$$

Dla oporu $R = 1/G$: $u = Ri$, $i = Gu \Longrightarrow p = ui = Ri^2 = Gu^2$

$$P = P_{\text{śr}} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} Ri^2\mathrm{d}t = R\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2\mathrm{d}t = RI_{\text{sk}}^2$$

Analogicznie $P = GU_{\text{sk}}^2 = U_{\text{sk}}^2/R$. $U_{\text{sk}}/R = I_{\text{sk}} \Longrightarrow P = U_{\text{sk}} I_{\text{sk}}$.
Dla przebiegu sinusoidalnego $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ zachodzi:

$$X_{\text{sk}}^2 = \frac{X_m^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t = \frac{X_m^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{1+\cos(2(\omega t+\varphi))}{2}\mathrm{d}t = \frac{X_m^2}{2}$$

A zatem $X_{\text{sk}} = X_m/\sqrt{2} \approx 0{,}707X_m$. Mierniki $\mathrm{V_{AC}}$ i $\mathrm{A_{AC}} \longrightarrow X_{\text{sk}}$.

Moc czynna wydzielana w *dowolnym* dwójniku

Dowolny dwójnik: $u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$, $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$.

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \left(\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\underbrace{\varphi_u - \varphi_i}_{\varphi}) \right) \end{aligned}$$

Moc chwilowa zmienia się z $2\times$ większą częstotliwością niż u, i.

$$-U_m I_m \leqslant \underbrace{\frac{U_m I_m}{2}(-1 + \cos\varphi)}_{p_{\min}} \leqslant p \leqslant \underbrace{\frac{U_m I_m}{2}(+1 + \cos\varphi)}_{p_{\max}} \leqslant U_m I_m$$

Moc czynna:

$$P = P_{\text{śr}} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\,\mathrm{d}t = \frac{U_m I_m}{2} \underbrace{\cos\varphi}_{\text{wsp. mocy}} = U_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \cos\varphi$$

Dla R: $\varphi = 0 \Longrightarrow P = U_{\text{sk}} I_{\text{sk}}$. Dla L, C: $\varphi = \pm\pi/2 \Longrightarrow P = 0$.

Moc czynna wydzielana w dwójniku *bezźródłowym*

Dwójnik bezźródłowy – opisany $Z = 1/Y$ (por. tw. o źr. zast.!). Niech $Z = R + \mathrm{j}X = |Z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_Z}$, $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$. Wówczas:

$$U = ZI = |Z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_Z} \cdot I_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} = \overbrace{|Z| I_m}^{U_m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\overbrace{(\varphi_Z + \varphi_i)}^{\varphi_u}} = U_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$$

Wsp. mocy to kosinus kąta fazowego impedancji/admitancji:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z = -\varphi_Y$$

Moc czynna wydziela się w *rezystancji* dw. bezźródłowego:

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos\varphi = \frac{I_m}{2} I_m \underbrace{|Z| \cos\varphi_Z}_{R} = \frac{I_m^2}{2} \Re\mathfrak{e}\, Z$$

albo (dla $Y = G + \mathrm{j}B = |Y|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_Y}$, $I = YU$) w jego *konduktancji*:

$$P = \frac{U_m}{2} U_m |Y| \cos(-\varphi_Y) = \frac{U_m}{2} U_m \underbrace{|Y| \cos\varphi_Y}_{G} = \frac{U_m^2}{2} \Re\mathfrak{e}\, Y$$

Moc czynna, bierna, zespolona i pozorna

Chcielibyśmy mieć coś na kształt wzoru dla DC: $P = UI$.
Niech $U = U_m e^{j\varphi_u}$ oraz $I = I_m e^{j\varphi_i}$. Wprowadźmy formalnie:

$$S = \frac{1}{2}UI^* = \underbrace{\frac{U_m I_m}{2}}_{|S|} e^{\overbrace{j(\varphi_u - \varphi_i)}^{\varphi}} = \underbrace{\frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi}_{P=\mathfrak{Re}\,S} + j\underbrace{\frac{U_m I_m}{2}\sin\varphi}_{Q=\mathfrak{Im}\,S}$$

(Uwaga: iloczyn wskazów *nie* jest wskazem!)
Wielkości związane z mocą w obwodach AC:

- S moc zespolona (wygodna formalnie) ....[VA]
- P moc czynna (ma skutki cieplne) ....[W]
- Q moc bierna („wydziela się” w reaktancji) ....[VAr]
- $|S|$ moc pozorna (amplituda mocy chwilowej p) ....[VA]

Moc $p_{\max} = P + |S|$ może decydować o „przeciążeniu” układu.
$S = P + jQ$, $|S|^2 = P^2 + Q^2 \longrightarrow$ „trójkąt mocy”

Graficzna interpretacja mocy AC