Algebra liniowa

Z_3

1. Podać ogólną postać rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste nad $\mathbb{R}$ (bez wyznaczania wartości współczynników).

a) $\dfrac{2x^2-5}{(x-3)^3(x^2+4)^2}$ b) $\dfrac{3x^2-5}{x^4-2x^3+2x-1}$ c) $\dfrac{x+1}{(x^4+4)^2}$

2. Wyznaczyć rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste nad $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{x+5}{(x+3)(x-9)}$ b) $\dfrac{4x-10}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ c) $\dfrac{8}{x^2-4x+2}$

d) $\dfrac{x^2-3x+6}{x^4-5x^2+4}$ e) $\dfrac{2x^3+5x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)^2}$ f) $\dfrac{2x^3+6x^2+3x}{(x+1)^4}$

3. Ile jest ułamków prostych nad ciałem liczb zespolonych pośród podanych:
$\dfrac{4}{(x-2)^2}, \dfrac{-1}{(x-j)^3}, \dfrac{2}{x^2+x+1}, \dfrac{x+2}{(x^2+x+1)^3}, \dfrac{3}{(x^2+2jx-1)^2}, \dfrac{-1}{(x^3+1)^4}$?

4. Podać ogólną postać rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste nad $\mathbb{C}$ (bez wyznaczania wartości współczynników).

a) $\dfrac{4z}{z^2-2jz+3}$ b) $\dfrac{z^2+3}{z^2(z^2+9)(z+3j)^2}$ c) $\dfrac{z+1}{(z^4+4)^2}$

5. Czy zbiór V jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$?

(a) $V=\mathbb{R}[x]$ z dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianu przez element ciała $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. A z mnożeniem przez element ciała $\mathbb{K}=\mathbb{C}$?

(b) $V=\mathbb{C}[x]$ z dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianu przez element ciała $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. A z mnożeniem przez element ciała $\mathbb{K}=\mathbb{C}$?

(c) $V=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, czyli zbiór wszystkich funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ z działaniami zdefiniowanymi następująco: $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$ i $(\alpha\cdot f)(x):=\alpha\cdot f(x)$ dla $\alpha\in\mathbb{K}=\mathbb{R}$. A z mnożeniem przez element ciała $\mathbb{K}=\mathbb{C}$?

6. Czy W jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{K}$?

(a) $V=\mathbb{R}^2$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2=9y^2\}$

(b) $V=\mathbb{R}^2$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x^2-4xy+y^2=0\}$

(c) $V=\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $W=\{w\in\mathbb{R}[x]_2 :\ \ w(1)=w'(0)\}$

(d) $V=\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, W - zbiór wielomianów, których pierwiastkiem jest pewna ustalona liczba $a\in\mathbb{R}$

(e) $V=\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, W - zbiór wielomianów, których pierwiastkiem k-krotnym jest pewna ustalona liczba $a\in\mathbb{R}$

(f) $V=\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, W - zbiór wielomianów, których pierwiastkiem co najmniej k-krotnym jest pewna ustalona liczba $a\in\mathbb{R}$

(g) $V=\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $W=\{w\in\mathbb{C}[x] : w(0)\in\mathbb{R}\}$. A nad $\mathbb{K}=\mathbb{C}$?

(h) $V=\mathbb{C}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $W=\{z\in\mathbb{C} : z=-j\cdot\bar{z}\}$. A nad $\mathbb{K}=\mathbb{C}$?

(i) V - przestrzeń liniowa wszystkich funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, W - zbiór wszystkich funkcji ciągłych z V.