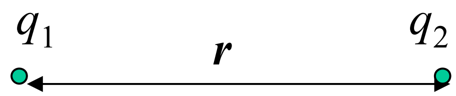
ELEKTRYCZNOŚĆ

- Pole elektryczne
- Linie sił pola elektrycznego
- Prawo Gaussa
- Dipol elektryczny
- Pole elektryczne w dielektrykach
- Prawo Gaussa w dielektrykach
- Polaryzacja elektryczna
- Potencjał pola elektrycznego
- Bezwirowość pola elektrycznego
- Różniczkowa postać prawa Gaussa
- Operator
- Równania Poissona i Laplace'a
- Przewodnik w polu elektrycznym
- Kondensatory
- Gęstość energii pola elektrycznego
- Prąd elektryczny

POLE ELEKTRYCZNE

Zasada zachowania ładunku. Istnieją dwa rodzaje ładunków elektrycznych, dodatnie i ujemne. Elektryzowanie ciał prowadzi do zmiany podziału ładunku między elektryzowane ciała, bez zmiany jego wartości. $\sum_i q_i = const$

Prawo Coulomba



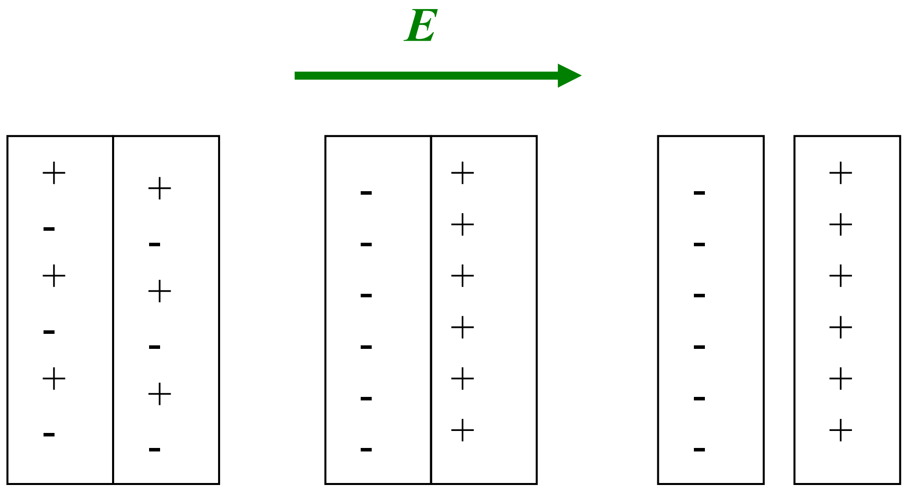
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad 4\pi\varepsilon_0 \approx 0.111\cdot 10^{-9}\ C/Nm^2$$

Natężenie pola elektrycznego

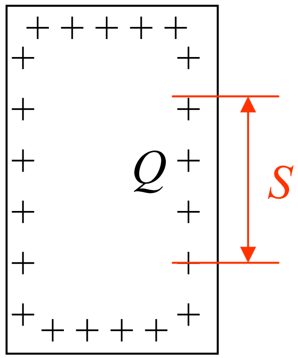
$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}}{q} = [E_x(x,y,z,),\ldots,E_z(x,y,z,)]}$$

Dla ładunku Q punktowego $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$

Elektryzowanie przez indukcję



Gęstość powierzchniowa ładunku



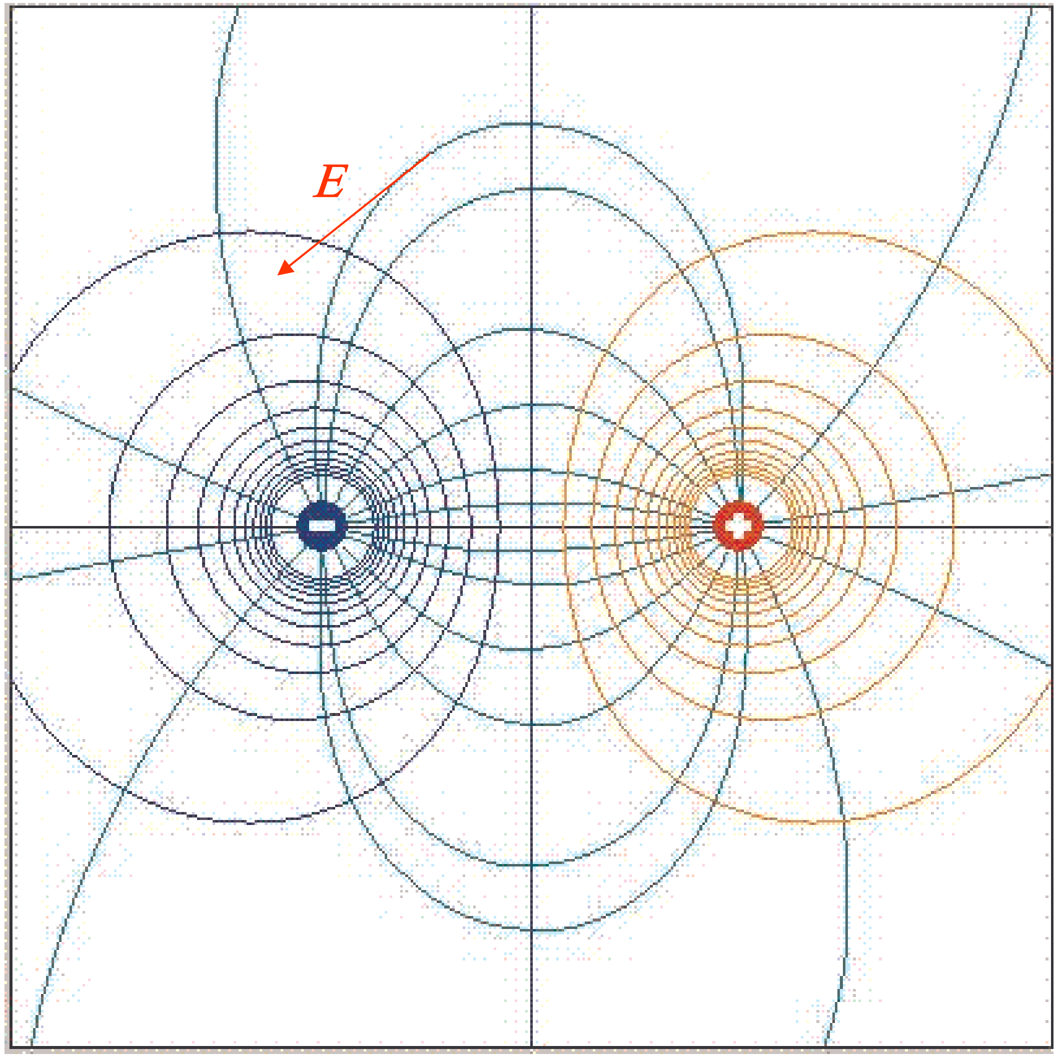
$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Wektor indukcji elektrycznej

$$\left|\vec{D}\right| \equiv \sigma$$

LINIE SIŁ POLA ELEKTRYCZNEGO

Gęstość linii w danym punkcie jest proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego *E*



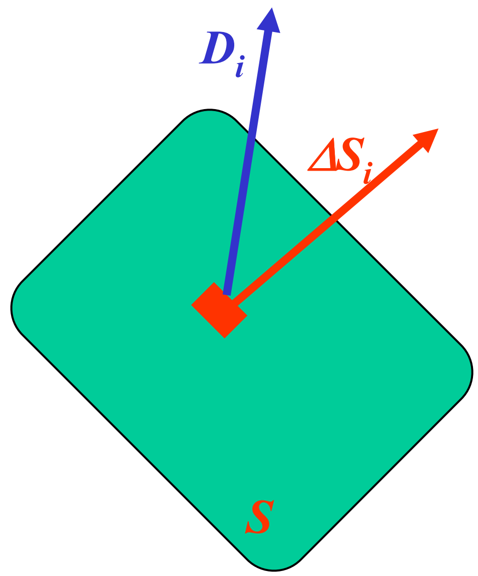
PRAWO GAUSSA

Strumień wektora *D*

$$\Delta\Phi_{D,i} \equiv \vec{D}_i \cdot \Delta\vec{S}_i \rightarrow$$

$$\rightarrow d\Phi_D \equiv \vec{D} \cdot d\vec{S} = DdS\cos\alpha = D_n dS$$

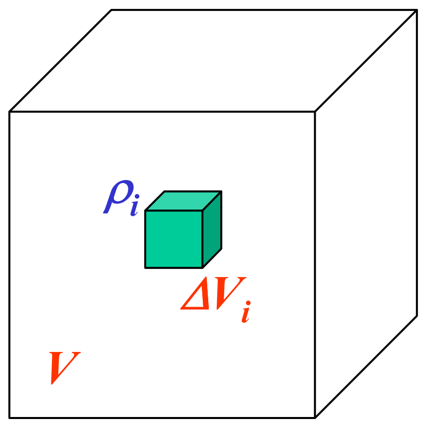
$$\Phi_D \equiv \lim_{\Delta\vec{S}_i \to 0} \sum_i \Delta\Phi_{D,i} = \oint_S d\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$



Prawo Gaussa

$$\left.\begin{array}{l} \oint_S \sigma dS = Q \\ \sigma = D \end{array}\right| \Rightarrow \oint_S DdS \rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$\boxed{\Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{wewn\ S} Q}$$



Gęstość objętościowa ładunku

$$\Delta Q_i = \rho_i \Delta V_i \rightarrow dQ = \rho dV$$

$$Q = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \rho_i \Delta V_i \equiv \iiint_V \rho dV = \iiint_V \rho(x, y, z) dxdydz$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

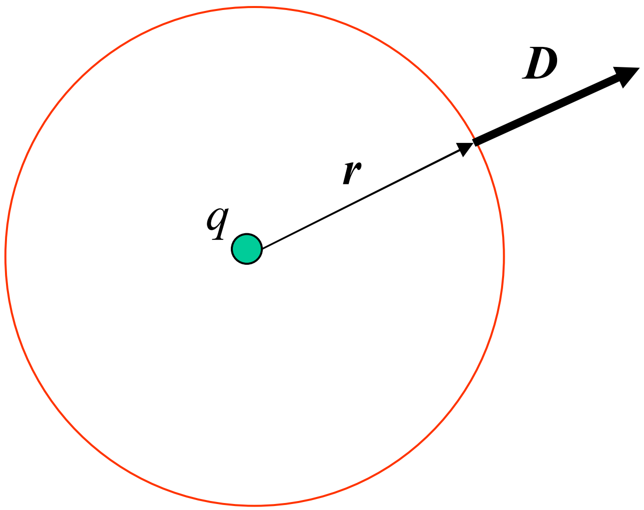
Prawo Gaussa dla próżni

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \boxed{\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV}$$

Jeżeli w każdym punkcie powierzchni całkowania wektor D jest prostopadły do powierzchni i ma stałą wartość na całej powierzchni, to

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D dS = D \oint_S dS = \boxed{DS = Q = \iiint_V \rho dV}$$

Przykład: pole ładunku punktowego



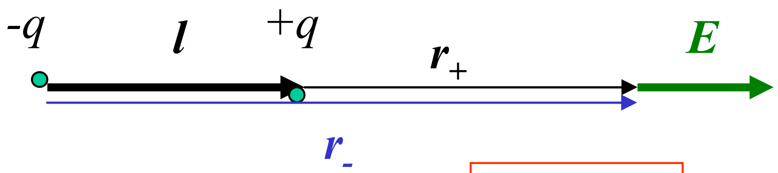
$$DS = D 4\pi r^2 = q$$

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}$$

$$D = \varepsilon_0 E \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

(prawo Coulomba)

DIPOL ELEKTRYCZNY



Moment dipolowy

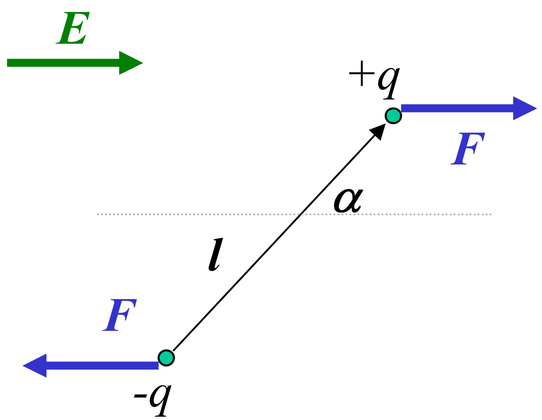
$$\boxed{\vec{p} = q\vec{l}}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_-^2 - r_+^2}{r_-^2 r_+^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r_- - r_+)(r_- + r_+)}{r_-^2 r_+^2}$$

$$l << r_+ \Rightarrow r_- - r_+ = l, r_- \approx r_+ \equiv r \Rightarrow E = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Energia dipola w polu zewnętrznym



Moment sił działających na dipol w zewnętrznym jednorodnym polu elektrycznym ***E***

$$M = Eql\sin\alpha \Rightarrow \vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$$

Praca obrotu dipola wykonana przez pole ***E***

$$dW = Md\alpha = EP\sin\alpha d\alpha$$

$$W = Ep\int\sin\alpha d\alpha = -pE\cos\alpha = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

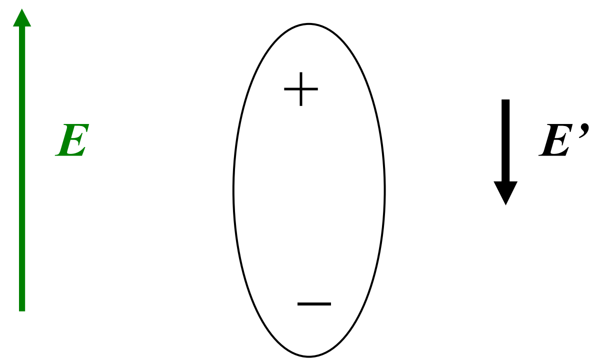
Praca obrotu dipola wykonana przez pole ***E*** jest miarą energii potencjalnej

$$V = -\vec{p}\cdot\vec{E} \quad \alpha = \pi \Rightarrow V \to \max,\ \alpha = 0 \Rightarrow V \to \min = -pE$$

POLE ELEKTRYCZNE W DIELEKTRYKACH

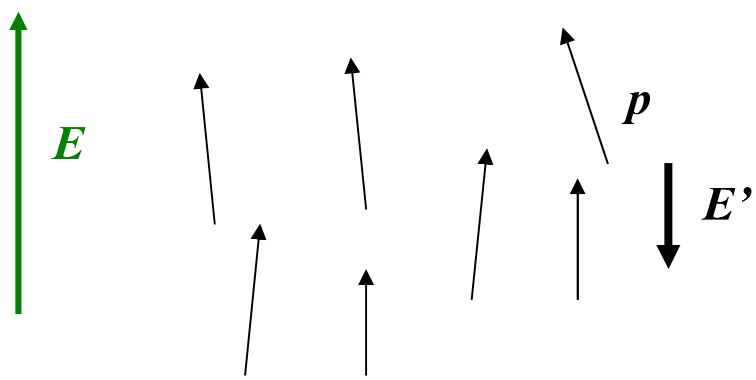
Dielektryki. Substancje, w których po umieszczeniu w zewnętrznym polu elektrycznym indukuje się ładunek na skutek zmiany wewnętrznego momentu dipolowego.

Dielektryki niepolarne



Separacja ładunku wewnątrz cząsteczek (mikroskopowa)

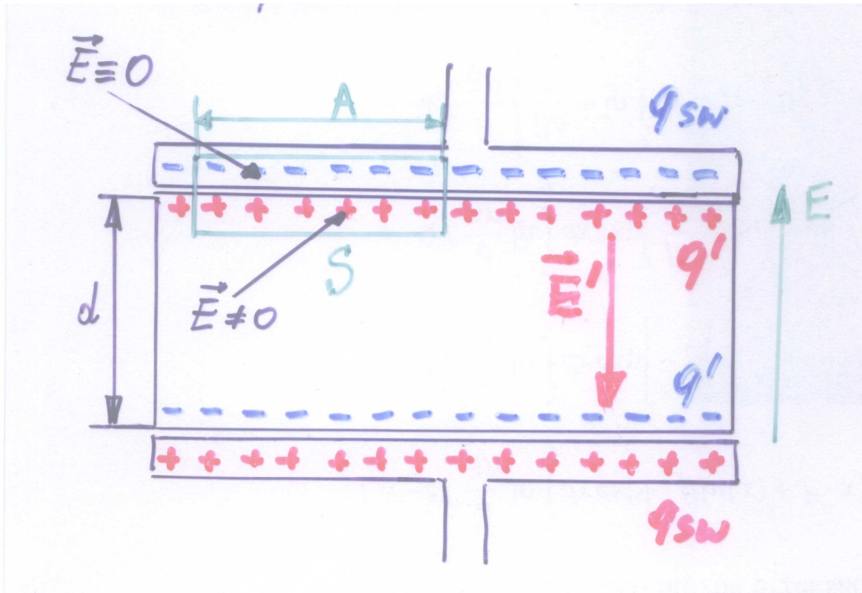
Dielektryki polarne



Ustawienie istniejących w dielektryku momentów dipolowych cząsteczek zgodnie z kierunkiem zewnętrznego pola

W obu przypadkach wytwarza się pole ***E'*,** zwrócone przeciwnie do pola zewnętrznego, tak że efektywne pole wewnątrz dielektryka jest mniejsze niż w próżni

PRAWO GAUSSA W DIELEKTRYKACH



q_{sw} – ładunek swobodny wewnątrz pow. *S*
q' – ładunek związany wewnątrz pow. *S*
Z prawa Gaussa natężenie pola wewnątrz dielektryka wynosi więc

$$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = q_{tot} = q_{sw} - q' \Rightarrow E = \frac{q_{sw}}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A}$$

Natężenie pola w kondensatorze próżniowym $E_0 = \dfrac{q_{sw}}{\varepsilon_0 A}$

Zakładamy, że $E_0 = E\varepsilon_r,\ \varepsilon_r = const \Rightarrow E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r} = \dfrac{q_{sw}}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}$

względna przenikalność elektryczna dielektryka

$$\frac{q_{sw}}{\varepsilon_r\varepsilon_0 A} = \frac{q_{sw}}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow q' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) q_{sw} \Rightarrow \varepsilon_0 \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = q_{sw} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) q_{sw} = \frac{q_{sw}}{\varepsilon_r}$$

$$\boxed{\Rightarrow \varepsilon_0\varepsilon_r \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = q_{sw}}$$

Wektor indukcji elektrycznej w dielektrykach definiujemy jako

$$\boxed{\vec{D} \equiv \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \Rightarrow \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_{sw}}$$

Prawo Gaussa w dielektrykach, napisane dla wektora indukcji elektrycznej, uwzględnia tylko wpływ ładunków swobodnych. Wpływ ładunków związanych uwzględnia względna przenikalność elektryczna

POLARYZACJA ELEKTRYCZNA

$$q' = q_{sw}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) \Rightarrow q_{tot} = q_{sw} - q' = q'\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\varepsilon_r}} - 1\right) = q'\frac{1}{\varepsilon_r - 1}$$

Z prawa Gaussa $\oiint_S \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{S} = q_{tot} = q'\frac{1}{\varepsilon_r - 1} \Rightarrow \oiint_S \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}\cdot d\vec{S} = q'$

Wektor polaryzacji elektrycznej

$$\boxed{\vec{P} \equiv \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \Rightarrow \oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = q'}$$

Wektor polaryzacji jest związany z ładunkami związanymi w dielektryku

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1 + 1)\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

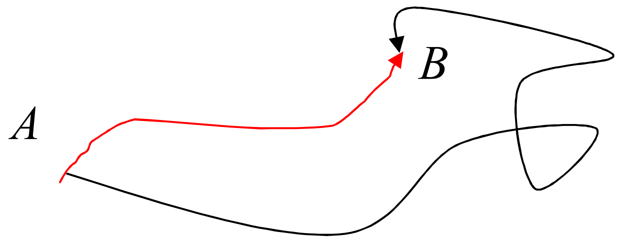
Podatność elektryczna

$$\boxed{\chi \equiv \varepsilon_r - 1 \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}}$$

POTENCJAŁ POLA ELEKTRYCZNEGO

Pole elektryczne jest zachowawcze (potencjalne). Praca pola elektrycznego nie zależy od drogi, więc praca na drodze zamkniętej wynosi zero.

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B \cancel{\frac{\vec{E}}{q}}\, q \cdot d\vec{l}$$



$$\oint_{ABA} dW = 0 \Rightarrow -\oint_{ABA} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = -d\varphi$$

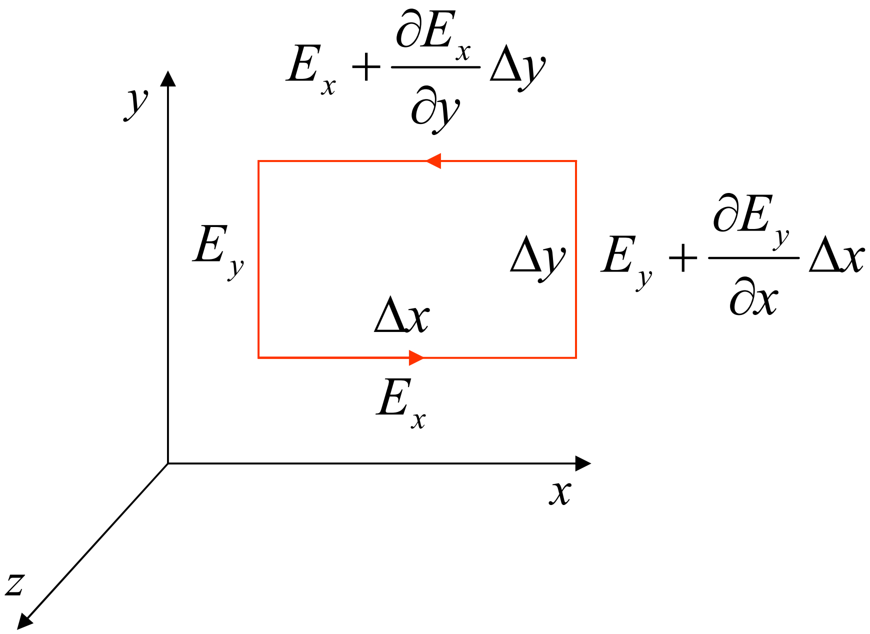
E·dl musi być różniczką pewnej funkcji skalarnej ϕ.

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{l}}$$

Pochodną kierunkową można zawsze zapisać w postaci **gradientu**

$$\boxed{\vec{E} = -grad\,\varphi = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right], \quad \varphi = \varphi(x, y, z)}$$

BEZWIROWOŚĆ POLA ELEKTRYCZNEGO



$$\Gamma = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} =$$
$$= E_x \Delta x + \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y -$$
$$-\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x - E_y \Delta y =$$
$$= \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$

Rotacja $$\left(rot\vec{E}\right)_z \equiv \lim_{\Delta x \Delta y \to 0} \frac{\Gamma}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

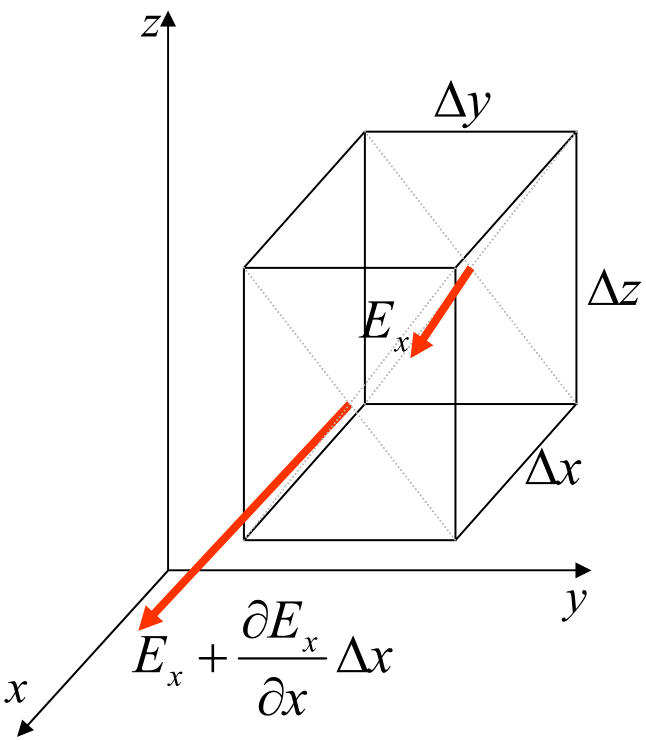
$$\boxed{rot\vec{E} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right]}$$

Pole elektryczne jest polem bezwirowym

$$\Gamma = 0 \Rightarrow \boxed{rot\vec{E} = 0}$$

Ogólnie $$rot\left(grad\varphi\right) = 0$$

RÓŻNICZKOWA POSTAĆ PRAWA GAUSSA



Strumień pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię *S* w kształcie prostopadłościanu

$$\Phi = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z$$

$$\Phi_x = \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x - E_x \right)\Delta y \Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z, \quad \Phi_z = \frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Rightarrow \Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow$$

$$\rightarrow \Phi = \oiiint_V \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dxdydz$$

Ładunek w objętości *V*

$$Q = \oiiint_V \rho\, dxdydz \Rightarrow$$

Z prawa Gaussa

$$\varepsilon_0 \oiiint_V \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dxdydz = \oiiint_V \rho\, dxdydz$$

Dywergencja $div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \Rightarrow \boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

OPERATOR ∇

$$\nabla \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$$ Operator wektorowy „nabla”

$$\vec{E} = -grad\,\varphi = -\nabla\varphi$$ Związek między natężeniem i potencjałem pola elektrycznego

$$div\vec{E} = \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ Prawo Gaussa w postaci różniczkowej

$$rot\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0$$ Bezwirowość pola elektrycznego

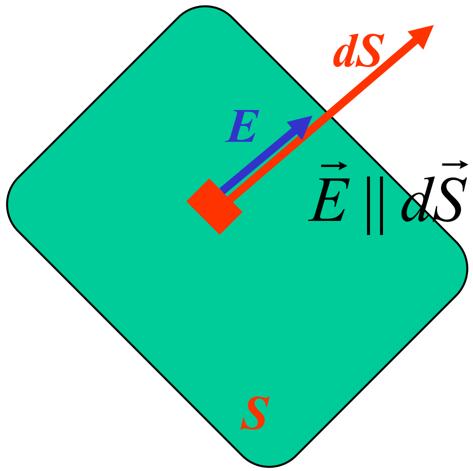
RÓWNANIA POISSONA I LAPLACE’A

$$\nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot(-\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\nabla^2\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \varphi = \varphi(x,y,z), \rho = \rho(x,y,z)}$$ **Równanie Poissona**

$$\boxed{\rho = 0 \Rightarrow \nabla^2\varphi = 0}$$ **Równanie Laplace’a** (w przestrzeni bez ładunków elektrycznych)

PRZEWODNIK W POLU ELEKTRYCZNYM

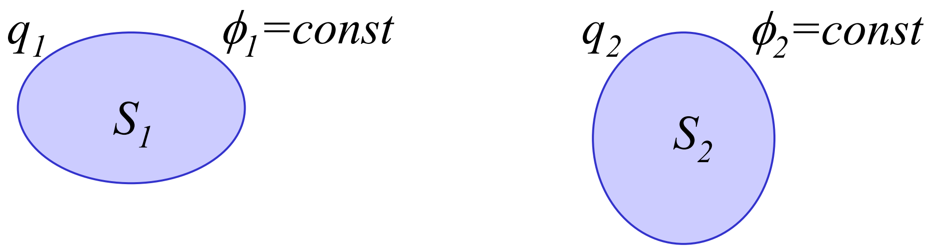


$$\vec{n} \equiv \frac{d\vec{S}}{\left|d\vec{S}\right|}, \quad \left|\vec{n}\right| = 1$$

$$\vec{E}_t\Big|_S = \left(grad\,\varphi\right)_t\Big|_S = \left(\vec{n} \times \vec{E}\right)\Big|_S = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi(x, y, z)\big|_S = const$$

Pojemność elektryczna



Równania Poissona i Laplace'a są liniowe, więc zmiany ładunku na powierzchniach powodują proporcjonalne zmiany potencjałów

$$dq_1 = C_{11} d\varphi_1 + C_{12} dU_{12}$$

$$dq_2 = C_{22} d\varphi_2 + C_{21} dU_{21}$$

$$dU_{ij} \equiv d\varphi_j - d\varphi_i$$

$C_{12} = C_{21}$ pojemności rozpraszania

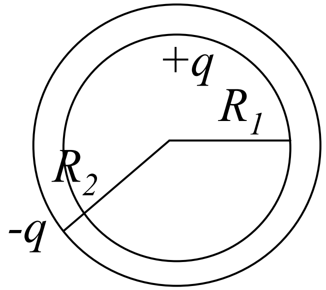
Zwykle $C_{12} = C_{21} \equiv C >> C_{11}, C_{22}$

$$\Rightarrow dq = C\,dU \Rightarrow \boxed{C = \frac{q}{U}}$$ pojemność

KONDENSATORY

Kondensator – układ, który można scharakteryzować przy pomocy jednej pojemności.

Kondensator kulisty



$$r < R_1, r > R_2 \Rightarrow E = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$\varphi(r) = -\int E dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$U_{12} = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$U_{12} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \Rightarrow C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Energia pola elektrycznego kondensatora

Wprowadzenie na okładki kondensatora ładunku *dq* związane jest z przyrostem napięcia między okładkami o *dU* i wymaga pracy *dW*

$$dq = CdU$$

$$dW = Udq = \frac{q}{C}dq$$

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Energia pola elektrycznego kondensatora równa jest pracy wprowadzenia ładunku Q na okładki

$$\boxed{E_p = W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}}$$

GĘSTOŚĆ ENERGII POLA ELEKTRYCZNEGO

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Pole elektryczne, pochodzące od ładunku elektrycznego *q*, rozłożonego równomiernie na powierzchni sfery o promieniu *R*

$$(\varphi(r\to\infty)\to 0) \Rightarrow \varphi(r) = -\int E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \varphi(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Potencjał na powierzchni sfery

$$dW = \Delta E_p = [\varphi(R) - \varphi(\infty)]dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} q dq$$

Praca, potrzebna na sprowadzenie na powierzchnię sfery ładunku *dq* z nieskończoności

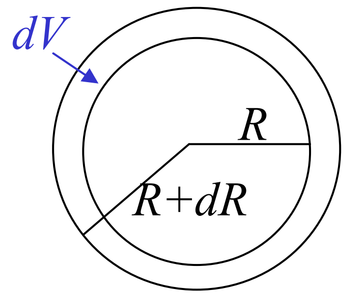
$$W = \int_0^Q dW = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = E_p$$

Aby zgromadzić na powierzchni sfery ładunek *Q*, należy wykonać pracę *W*, która zostanie zmagazynowana w postaci energii pola elektrycznego E_p

Gęstość energii pola elektrycznego (energia na jednostkę objętości)

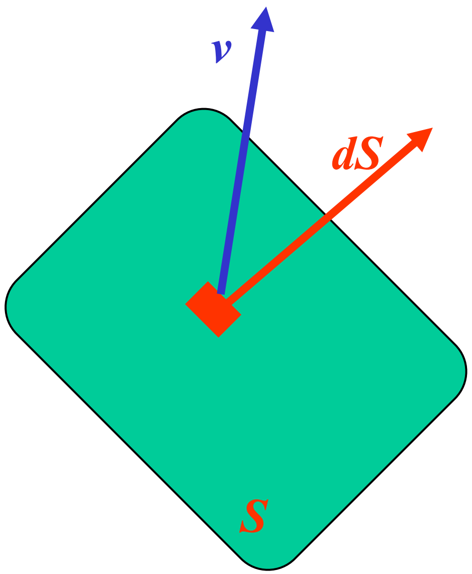
$$w = \frac{dE_p}{dV} = \frac{dW}{dV} = -\frac{dW}{dR}\frac{dR}{dV}; \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{dV}{dR} = 4\pi R^2 \Rightarrow dR = \frac{dV}{4\pi R^2}; \quad \frac{dW}{dR} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\Rightarrow w = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{1}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0 R^2)^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (E(R))^2$$



Ogólnie

$$\boxed{w(x,y,z) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(x,y,z)}$$



PRĄD ELEKTRYCZNY

$$dI = \frac{dq}{dt} = \rho d\vec{S} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

I natężenie prądu elektrycznego

$\vec{j}$ gęstość prądu elektrycznego

Prawo Ohma. Pod wpływem siły zewnętrznej (pola elektrycznego) w przewodniku ustala się prędkość nośników ładunku (gęstość prądu) proporcjonalna do siły, jak w ośrodku lepkim

$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \sigma = const$ przewodność właściwa

$\vec{E} = \rho \vec{j}, \quad \rho = \sigma^{-1} = const$ oporność właściwa

Równanie ciągłości. Rozpatrzmy zamkniętą powierzchnię *S*, wewnątrz której znajduje się w chwili *t* ładunek *q*. Z zasady zachowania ładunku:

$$I = -\frac{dq}{dt}, \quad q = \iiint_V \rho dV \Rightarrow \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Z twierdzenia Gaussa $\iiint_V div\vec{j} dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$

$$\Rightarrow \boxed{div\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$