Wykład pierwszy

Oznaczenia

$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych

$\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych

$\forall$ – kwantyfikator ogólny – ”dla każdego”

$\exists$ – kwantyfikator szczegółowy – ”istnieje”

Podstawowe własności funkcji

X, Y - dowolne zbiory niepuste; $f : X \to Y$ - funkcja f określona na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y. x - argument funkcji f (zmienna niezależna); $y = f(x)$ wartość funkcji f (zmienna zależna).
$X \overset{df}{=} D_f$ - dziedzina funkcji f ;
$R_f \overset{df}{=} \{y \in Y : y = f(x)$ dla pewnego $x \in D_f\}$ - przeciwdziedzina funkcji f.
Jeśli $D_f \subset \mathbb{R}, R_f \subset \mathbb{R}$, to f - funkcja liczbowa.

Def. 1. Funkcje f_1 , f_2 są równe, jeśli *1)* $D_{f_1} = D_{f_2}$ *; 2)* $\forall x \in D_{f_1}\, [f_1(x) = f_2(x)]$.

Def. 2. Niech $f : X \to Y$ i $A \subset X$. Funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze A, jeśli

$$\forall x_1, x_2 \in A\, [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)] \equiv \forall x_1, x_2 \in A\, [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$$

Def. 3. Niech $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Funkcja złożona (superpozycja) funkcji f(f. wewnętrzna) i g (f. zewnętrzna)to funkcja $h : X \to Z$ określona wzorem $\forall x \in X[h(x) \overset{df}{=} g(f(x))$.
$h \overset{ozn}{=} g \circ f$.

Jeśli $f : X \to Y$ taka, że $R_f = Y$ i f - różnowartościowa, to można określić funkcję $g : Y \to X$ wzorem

$$\forall x \in X, y \in Y [g(y) = x \overset{df}{\Leftrightarrow} f(x) = y]$$

Funkcja $g \overset{ozn}{=} f^{-1}$ - funkcja odwrotna do funkcji f.

Uwaga 1. $f \circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1} \circ f = id_X$.

Def. 4. Funkcja $f : X \to Y$ jest parzysta, jeśli $\forall x \in X[-x \in X \wedge f(-x) = f(x)]$;
Funkcja $f : X \to Y$ jest nieparzysta, jeśli $\forall x \in X[-x \in X \wedge f(-x) = -f(x)]$.

Uwaga 2. Iloczyn dwóch funkcji parzystych (nieparzystych) jest funkcją parzystą. Iloczyn funkcji parzystej i funkcji nieparzystej jest funkcja nieparzystą.

Def. 5. Funkcja $f : X \to Y$ jest rosnąca (odp.niemalejąca) na zbiorze $A \subset X$, jeśli

$$\forall x_1, x_2 \in A\, [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$$
$$\textit{(odp. } \forall x_1, x_2 \in A\, [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)] \textit{)}$$

Def. 6. Funkcja $f : X \to Y$ jest malejąca (odp.nierosnąca) na zbiorze $A \subset X$, jeśli

$$\forall x_1, x_2 \in A\, [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$$
$$\textit{(odp. } \forall x_1, x_2 \in A\, [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)] \textit{)}$$

Def. 7. Funkcja f jest monotoniczna (odp.ściśle monotoniczna) na zbiorze A, jeśli jest na tym zbiorze niemalejąca lub nierosnąca (odp. rosnąca lub malejąca).

Zał. Funkcja f jest określona w pewnym przedziale $O = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Def. 8. Funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne (odp. minimum lokalne), jeżeli

$$\forall x \in O_1 \subset O\, [f(x) \leqslant f(x_0)] \textit{ (odp. } \forall x \in O_1 \subset O\, [f(x) \geqslant f(x_0)]\textit{)}$$

Funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, jeśli ma w tym punkcie minimum lub maksimum lokalne. Jeśli w definicji zamiast nierówności słabej jest nierówność mocna, to ekstremum jest właściwe.

Funkcje cyklometryczne (kołowe)

Funkcja $x = \sin y$ na przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \rangle$ ma przeciwdziedzinę $\langle -1\,;\, 1 \rangle$ i jest różnowartościowa. Na zbiorze $\langle -1\,;\, 1 \rangle$ określona jest funkcja odwrotna arkus sinus (arcsin):

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ i } y \in \langle -\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \rangle$$

Funkcja $x = \cos y$ na przedziale $\langle 0\,;\, \pi \rangle$ ma przeciwdziedzinę $\langle -1\,;\, 1 \rangle$ i jest różnowartościowa. Na zbiorze $\langle -1\,;\, 1 \rangle$ określona jest funkcja odwrotna arkus kosinus (arccos):

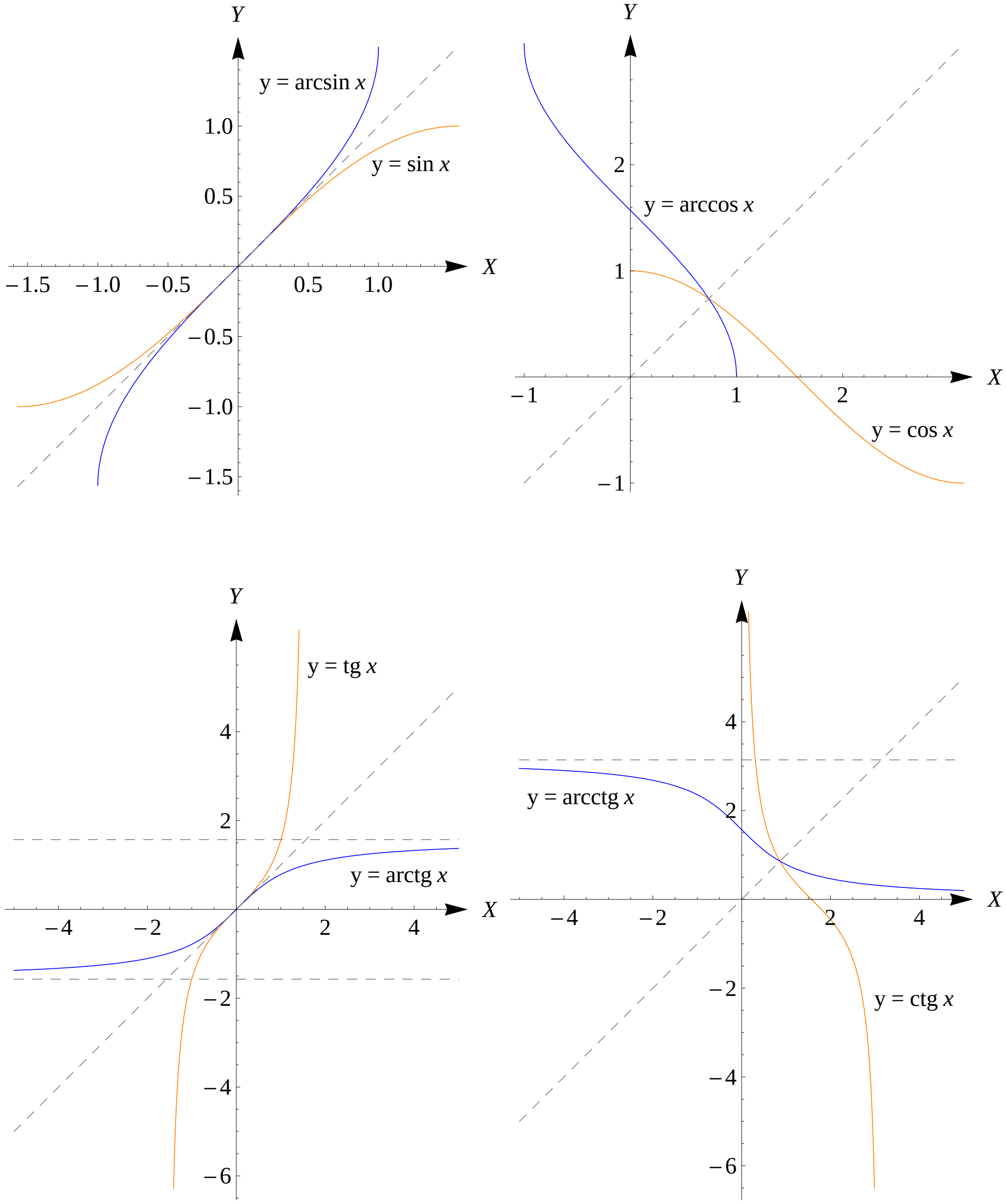
$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ i } y \in \langle 0\,;\, \pi \rangle$$

Funkcja $x = \operatorname{tg} y$ na przedziale $(-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2})$ ma przeciwdziedzinę $\mathbb{R}$ i jest różnowartościowa. Na zbiorze $\mathbb{R}$ określona jest funkcja odwrotna arkus tangens (arctg):

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \text{ i } y \in (-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2})$$

Funkcja $x = \operatorname{ctg} y$ na przedziale $(0\,;\, \pi)$ ma przeciwdziedzinę $\mathbb{R}$ i jest różnowartościowa. Na zbiorze $\mathbb{R}$ określona jest funkcja odwrotna arkus kotangens (arcctg):

$$y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y \text{ i } y \in (0\,;\, \pi)$$



Uwaga 3. Dla każdego $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$*:*

1. $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$

2. $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

Logarytmy

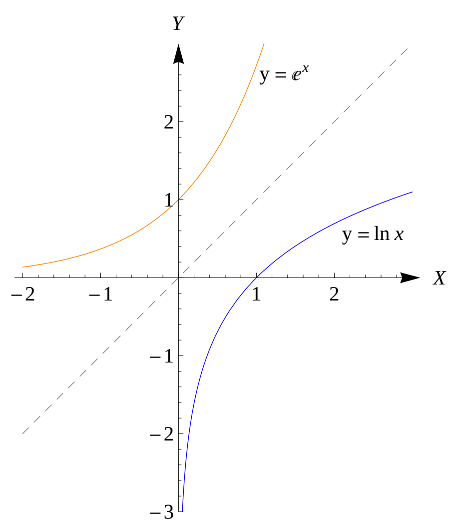
Funkcja wykładnicza $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ ma przeciwdziedzinę $\mathbb{R}^+$ i jest różnowartościowa. Na zbiorze $\mathbb{R}^+$ określona jest funkcja odwrotna – f.logarytmiczna

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \text{ i } y \in \mathbb{R}$$

Uwaga 4. Własności funkcji logarytmicznej:

1. dla każdego $x > 0$ *i* $a > 0$, $a \neq 1$*:* $x = a^{\log_a x}$*;*
2. dla każdych $x_1, x_2 > 0$ *i* $a > 0$, $a \neq 1$*:* $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 \cdot x_2)$*;*
3. dla każdych $x_1, x_2 > 0$ *i* $a > 0$, $a \neq 1$*:* $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right)$*;*
4. dla każdego $x > 0$ *i* $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$*:* $\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x$*;*
5. dla każdego $x > 0$ *i* $a, b > 0$, $a \neq 1, b \neq 1$*:* $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

$e = 2,718\ldots$ - stała matematyczna; jeśli $a = e$, to $\log_e x \overset{ozn}{=} \ln x$ - logarytm *naturalny*.



Funkcje hiperboliczne

Funkcje hiperboliczne: sinus hiperboliczny(sh, sinh), kosinus hiperboliczny (ch, cosh), tangens hiperboliczny (th, tgh), kotangens hiperboliczny (cth, ctgh) określone są następująco

1. $\operatorname{sh} x \overset{df}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$
2. $\operatorname{ch} x \overset{df}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$
3. $\operatorname{th} x \overset{df}{=} \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $x \in \mathbb{R}$

4. $\operatorname{cth} x \overset{df}{=} \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Uwaga 5. Funkcja ch jest funkcją parzystą, pozostałe f.hiperboliczne są nieparzyste.