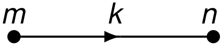
# Definicja grafu (skierowanego – tzw. digrafu)

Graf skierowany $\mathcal{G}$ to trójka uporządkowana $\mathcal{G} = \langle V, E, I \rangle$

- $V$ – niepusty zbiór wierzchołków (*vertex*) numerowanych od 0
  TO: węzły ($0 \longrightarrow$ masa)
- $E$ – zbiór krawędzi (*edge*) rozłączny z $V$ TO: gałęzie
- $I$ – funkcja incydencji $E \xrightarrow{I} V \times V$: każdej krawędzi przyporządkowujemy uporządkowaną parę (niekoniecznie różnych) wierzchołków – początek i koniec
  TO: zwrot zgodny ze strzałką prądu

Mówimy, że krawędź jest *incydentna* z oboma swoimi końcami.
*Podgraf* $\mathcal{G}' = \langle V', E', I \rangle$, gdzie $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$ (ta sama $I$).
Interpretacja geometryczna: punkty ($V$) i linie ($E$) w przestrzeni 3D (graf *planarny* da się narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi).

$$e_k \xrightarrow{I} \langle v_m, v_n \rangle$$



# Reprezentacje grafu

- Pełna macierz incydencji $\boldsymbol{A}_p = [a_{wk}]_{|V|\times|E|}$ – b. rzadka!

$$a_{wk} = \begin{cases} -1 & \text{wierzchołek } w \text{ jest początkiem krawędzi } k \\ 1 & \text{wierzchołek } w \text{ jest końcem krawędzi } k \\ 0 & \text{wierzchołek } w \text{ nie należy do krawędzi } k \end{cases}$$

  Nie można reprezentować pętli własnych wierzchołków.

- Pełna macierz sąsiedztwa wierzchołków $\boldsymbol{B}_p = [b_{mn}]_{|V|\times|V|}$

$$b_{mn} = \begin{cases} k & e_k \xrightarrow{I} \langle v_m, v_n \rangle \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

  Nie można reprezentować krawędzi równoległych.

- Listy incydencji – dla każdego wierzchołka podajemy numery wszystkich wierzchołków *do* których prowadzi od niego krawędź, wraz z numerami tych krawędzi:

$$\mathcal{L}[m] = \{\ldots, \langle n, k \rangle, \ldots\}$$

  Brak ograniczeń, mała pamięć, szybkie przeszukiwanie.

# Drogi i cykle $\leftarrow$ *kierunki krawędzi nie mają znaczenia!*

## Droga...

...*uporządkowany* ciąg *różnych* krawędzi $\langle e_1, \ldots, e_l \rangle$ taki, że:

1. każde dwie sąsiednie krawędzie $e_k, e_{k+1}$ mają wspólny wierzchołek,
2. żadna inna krawędź $e_1, \ldots e_{k-1}, e_{k+2}, \ldots e_l$ nie jest z tym wierzchołkiem incydentna,
3. pierwsza krawędź $e_1$ jest incydentna z wierzchołkiem bedącym początkiem drogi, a ostatnia krawędź $e_l$ jest incydentna z wierzchołkiem będącym końcem drogi,
4. początek i koniec drogi są różne.

## Cykl (kontur, droga zamknięta, *circuit*) – definicja j.w., ale...

4. początek i koniec drogi są identyczne.

Zbiór wszystkich cykli (zorientowanych $\overset{\triangleright}{\bigcirc}$) oznaczymy przez $C$.

# Reprezentacja cykli, klasyfikacja grafów

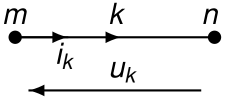
- Pełna macierz cykli $\boldsymbol{D}_p = [d_{c\,k}]_{|C|\times|E|}$

$$d_{c\,k} = \begin{cases} 1 & \text{cykl } c \text{ zawiera krawędź } k \text{ ze zgodnym zwrotem} \\ -1 & \text{cykl } c \text{ zawiera krawędź } k \text{ z przeciwnym zwrotem} \\ 0 & \text{cykl } c \text{ nie zawiera krawędzi } k \end{cases}$$

  Macierz $\boldsymbol{A}_p$ jednoznacznie określa graf $\mathcal{G}$ (grafy *izomorficzne* mają jednakowe macierze incydencji).
  Macierz $\boldsymbol{D}_p$ nie określa jednoznacznie grafu $\mathcal{G}$.
- Klasyfikacja grafów:
  - Graf spójny – każde dwa wierzchołki należą do jakiejś drogi.
  - Graf silnie spójny – każde dwa wierzchołki należą do jakiegoś cyklu.
  - Graf niespójny (rozłączny) – dzieli się na spójne *składowe*.
  - Graf sieciowy – graf skierowany silnie spójny bez pętli własnych wierzchołków (przedmiot zainteresowań TO).
  - Graf z wagami – każdej krawędzi przyporządkowujemy „wagę” (np. liczbę rzeczywistą).

# Zastosowanie grafów w teorii obwodów

Wprowadzamy wektory prądów i napięć gałęziowych: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{u}$.




PPK $\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$, ale $\mathrm{rz}(\boldsymbol{A}_p) \overset{\text{ozn.}}{=} r = |V| - 1$ (tzw. *rząd* $\mathcal{G}$), więc możemy pominąć jeden wiersz (odpowiadający masie), otrzymując macierz incydencji $\boldsymbol{A}$ o rozmiarach $r \times |E|$.

$$\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$$

NPK $\boldsymbol{D}_p\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, ale $\mathrm{rz}(\boldsymbol{D}_p) \overset{\text{ozn.}}{=} c = |E| - |V| + 1$ (tzw. *liczba cyklomatyczna* $\mathcal{G}$), więc możemy pominąć wiele wierszy, pozostawiając liniowo niezależne (np. dla grafu planarnego – oczka), otrzymując macierz cykli $\boldsymbol{D}$ o rozmiarach $c \times |E|$.

$$\boldsymbol{D}_p\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

Jak znaleźć macierz $\boldsymbol{D}$? Trzeba wybrać jakieś *drzewo* $\mathcal{G}$.

# Im dalej w las, tym więcej drzew…

## Drzewo (*tree*) grafu $\mathcal{G}$…

…to jego spójny podgraf $\mathcal{T}$ zawierający wszystkie wierzchołki i nie zawierający żadnego cyklu.

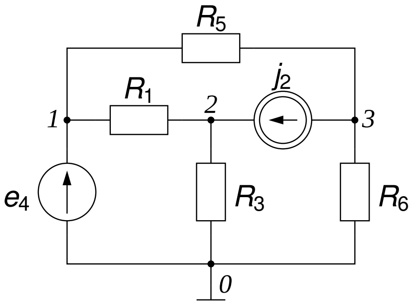
## Twierdzenie Cayleya (1889)

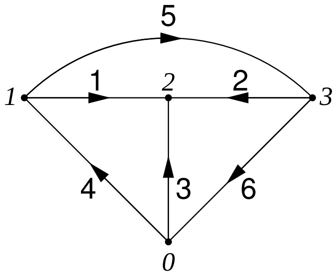
Liczba drzew grafu wynosi $|V|^{|V|-2}$.

Każde drzewo zawiera $r = |V| - 1$ krawędzi. Dołączenie *dowolnej* kolejnej krawędzi (jednej spośród $c = |E| - |V| + 1$ pozostałych) powoduje powstanie cyklu. Tak otrzymane cykle stanowią *układ fundamentalny* cykli względem drzewa $\mathcal{T}$– odpowiadają im liniowo niezależne wiersze $\boldsymbol{D}_p \longrightarrow \boldsymbol{D}$. Ponumerujmy krawędzie tak, że pierwsze $|V| - 1$ należy do $\mathcal{T}$, a cykle zgodnie z numeracją krawędzi *dopełnienia* $\overline{\mathcal{T}}$. Wtedy:

$$\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{A}_{\mathcal{T}} | \boldsymbol{A}_{\overline{\mathcal{T}}}\right], \quad \boldsymbol{D} = [\boldsymbol{D}_{\mathcal{T}} | \mathbf{1}], \quad \text{przy czym } \boldsymbol{D}_{\mathcal{T}} = -\left(\boldsymbol{A}_{\mathcal{T}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\overline{\mathcal{T}}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

# Przykład




Oprócz PPK i NPK obwód opisują równania gałęziowe:

$$u_1 = R_1 i_1,\ \ i_2 = j_2,\ \ u_3 = R_3 i_3,\ \ u_4 = -e_4,\ \ u_5 = R_5 i_5,\ \ u_6 = R_6 i_6$$

# Przykład – rozwiązanie w MATLAB-ie

```
% Pełna macierz incydencji:
Ap = [  0  0 -1 -1  0  1 % v0
       -1  0  0  1 -1  0 % v1
        1  1  1  0  0  0 % v2
        0 -1  0  0  1 -1 % v3
     ]%e1 e2 e3 e4 e5 e6

% Pełna macierz obwodowa:
Dp = [  1  0 -1  1  0  0 % c1 (oczko 1)
       -1  1  0  0  1  0 % c2 (oczko 2)
        0 -1  1  0  0  1 % c3 (oczko 3)
        0  0  0  1  1  1 % c4 (oczko odniesienia)
       -1  0  1  0  1  1 % c5
        1 -1  0  1  0  1 % c6
        0  1 -1  1  1  0 % c7
     ]%e1 e2 e3 e4 e5 e6

% Wektory prądów i napięć gałęziowych:
syms i1 i2 i3 i4 i5 i6    % zmienne symboliczne
i = [i1 i2 i3 i4 i5 i6].' % .' to operator transpozycji

syms u1 u2 u3 u4 u5 u6
u = [u1 u2 u3 u4 u5 u6].'
```

# Przykład – rozwiązanie w MATLAB-ie, c.d.

```
% Prądowe prawo Kirchhoffa:
Ap * i
rank(Ap)
A = Ap(2:end, :) % usuwamy wierzchołek v0
A * i

% Napięciowe prawo Kirchhoffa:
Dp * u
rank(Dp)
D = Dp(1:3, :) % wybieramy tylko oczka 1, 2 i 3
D * u

% Obliczenie D na podstawie A:
AT  = A(:, 1:3)
AT1 = A(:, 4:end)
DT = -(AT\AT1).'
Dx = [DT, eye(size(DT,1))] % powinno zachodzić Dx == D

% Rozwiązanie obwodu metodą "brutalnej siły"
syms R1 R3 R5 R6 j2 e4
rozw = solve([-i1+i4-i5==0, i1+i2+i3==0, -i2+i5-i6==0, u1-u3+u4==0,...
  -u1+u2+u5==0, -u2+u3+u6==0, u1==R1*i1, i2==j2, u3==R3*i3, u4==...
  -e4, u5==R5*i5, u6==R6*i6], [i1,i2,i3,i4,i5,i6,u1,u2,u3,u4,u5,u6]);
```

# Wielowrotniki

Układy wielowrotowe (wielowrotniki):

- mają wyróżnionych $n \geqslant 1$ par zacisków (wrót),
- z każdymi wrotami związany jest prąd $i_k$ i napięcie $u_k$,
- $i_k$, $u_k$ powiązane są $n$ niezależnymi równaniami,
- prądy zaciskowe obu zacisków każdej pary są równe co do modułu i przeciwnie skierowane.

jednowrotnik $\equiv$ dwójnik
dwuwrotnik $\equiv$ czwórnik
czwórnik o strukturze trójnikowej $\equiv$ trójnik

# Indukcyjności sprzężone (model transformatora)

Indukcyjności sprzężone – każda z nich obejmuje część (lub całość) strumienia skojarzonego drugiej. Niech $\mathrm{D} \overset{\text{ozn.}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

$$\begin{aligned} u_1 = \mathrm{D}(\psi_1 + \psi_{12}) &= \mathrm{D}L_1 i_1 + \mathrm{D}L_{12} i_2 = \mathrm{D}L_1 i_1 + \mathrm{D}M i_2 \\ u_2 = \mathrm{D}(\psi_2 + \psi_{21}) &= \mathrm{D}L_2 i_2 + \mathrm{D}L_{21} i_1 = \mathrm{D}L_2 i_2 + \mathrm{D}M i_1 \end{aligned}$$

Ze względu na symetrię oddziaływań magnetycznych mamy $L_{12} = L_{21} \overset{\text{def.}}{=} M$ – *indukcyjność wzajemna*, $M \in \mathbb{R}$.

**Indukcyjność wzajemna $M$…**

…jest dodatnia (ujemna), jeśli prądy $i_1$ i $i_2$ są zastrzałkowane jednakowo (przeciwnie) względem zacisków jednoimiennych.

Dwie indukcyjności sprzężone *o wspólnym zacisku* można zamienić na *trzy* indukcyjności niesprzężone w układzie „T” o wartościach $L_1 - M$, $M$ i $L_2 - M$.

# Indukcyjności sprzężone – c.d.

Ponieważ druga indukcyjność nie może przejąć większego strumienia magnetycznego niż wytworzyła pierwsza, więc:

$$M^2 \leqslant L_1 L_2$$

Współczynnik sprzężenia określamy wzorem:

$$k = |M|/\sqrt{L_1 L_2} \in [0, 1]$$

Dla $k = 1$ sprzężenie jest *całkowite* (idealne). Wprowadzając:

$$\gamma \overset{\text{def.}}{=} \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \operatorname{sgn}(M)\sqrt{L_1/L_2} = \operatorname{sgn}(M) z_1/z_2$$

gdzie $\gamma_z = z_1 : z_2$ – tzw. *przekładnia zwojowa*, dostaniemy:

$$\begin{aligned} u_1 = \mathrm{D}L_1 i_1 + \mathrm{D}M i_2 &= \mathrm{D}L_1(i_1 + i_2/\gamma) = (L_1/M)u_2 = \gamma u_2 \\ u_2 = \mathrm{D}L_2 i_2 + \mathrm{D}M i_1 &= \mathrm{D}M(i_1 + i_2/\gamma) \end{aligned}$$

Jeśli dodatkowo wszystkie indukcyjności $\to \infty$ przy $\gamma_z = \text{const}$ (wkładamy coraz lepsze rdzenie), to w granicy $i_1 \to -i_2/\gamma$. Otrzymaliśmy równania *transformatora idealnego*.

# Transformator idealny (TI)

Równania transformatora idealnego ($\gamma$ – przekładnia):

$$u_1 = \gamma u_2, \quad i_1 = -i_2/\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$$

Transformator idealny działa także dla prądów stałych (sic!).

**Przekładnia $\gamma$...**

...jest dodatnia (ujemna), jeśli prądy $i_1$ i $i_2$ są zastrzałkowane jednakowo (przeciwnie) względem zacisków jednoimiennych.

Transformator idealny zmienia „poziom” obciążenia.
Właściwości transformatora idealnego:

- $u_1/i_1 = \gamma^2 \cdot u_2/(-i_2)$ – zmiana „poziomu” obciążenia,
- $u_2 = u_2' + u_2'' \Longrightarrow u_1 = u_1' + u_1''$ – połączenia szeregowe po stronie wtórnej zachowują się po pierwotnej,
- $-i_2 = (-i_2') + (-i_2'') \Longrightarrow i_1 = i_1' + i_1''$ – połączenia równoległe po stronie wtórnej zachowują się po pierwotnej.

# Moc i energia chwilowa

Moc (chwilowa) *pobierana* przez element w chwili $t$:

$$p(t) = u(t)i(t), \qquad p = ui$$

(przy standardowym strzałkowaniu napięcia i prądu!). $[p] = \mathrm{W}$.
Jeśli $p(t) < 0$, to w chwili $t$ element faktycznie *oddaje* moc.
Moc (chwilowa) *oddawana* przez element:

$$p_o = -p = -ui = (-u)i = u(-i)$$

Energia (chwilowa) *pobrana* przez element od chwili $t_0$ do $t$:

$$w(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} p(t)\mathrm{d}t = w(t)$$

Jeśli $w(t, t_0) < 0$, to w przedziale $[t_0, t]$ element faktycznie *oddał* energię do otoczenia.
Jeśli ustalimy $t_0$ (np. „włączenie" układu, stan spoczynkowy), to $w$ jest funkcją górnej granicy całkowania. $[w] = \mathrm{J}$.

# Moc i energia w oporze i źródłach idealnych

Zgodnie z założeniem $ui \geqslant 0$ (charakterystyka w I i III ćwiartce układu *Oiu*) moc chwilowa pobierana przez opór:

$$p \geqslant 0$$

Opór nigdy nie oddaje energii do otoczenia – jest elementem *stratnym*.

Energia $w(t) = \int_{t_0}^{t} p\mathrm{d}t$ jest nieujemna i niemalejąca.

Dla oporu *liniowego* o wartości $R = 1/G$:

$$p = ui = (Ri)i = Ri^2 = u(Gu) = Gu^2 = u^2/R$$

Źródło napięciowe idealne oddaje do otoczenia moc: $p_o = ei$
Źródło prądowe idealne oddaje do otoczenia moc: $p_o = ju$
Moc oddawana przez źródło może (ale nie musi) być dodatnia.