# Algebra liniowa
$Z_{12}$

1. Czy wektor $(3,0,3,-3)$ jest wektorem własnym przekształcenia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\phi((x,y,z,t)) = (x+z, x+t, x-t, t-z)$?

2. Czy wektor $(6,1,3)$ jest wektorem własnym macierzy $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$? Czy macierz $A$ jest diagonalizowalna? Wyznaczyć $f(A)$, jeśli $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^2 + 5x - 6$.

3. Wyznaczyć wszystkie wartości i wektory własne macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$. Czy $A$ jest diagonalizowalna? Wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy $A^2$. Wyznaczyć (jeśli istnieją) stałe $p, q \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi $A^4 = pA^2 + qA$.

4. Dane jest przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi((x,y,z)) = (x+y-z, 2x+2y-2z, 0)$. Wyznaczyć jądro i obraz tego przekształcenia oraz ich bazy. Znaleźć taką bazę $B$, by $\phi$ miało w tej bazie macierz w postaci kanonicznej Jordana. Wyznaczyć wzór przekształcenia $\phi^{100}$ oraz jego wartości i wektory własne.

5. Niech $x^8(x-3)^2$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy $A$. Jaka jest maksymalna liczba niezerowych wyrazów w macierzy $J^5$, gdzie $J$ - postać kanoniczna Jordana macierzy $A$?

6. Dane jest przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, $\psi((x,y,z,t,w)) = (x-y, x-y, t-w, -t, z+t-2w)$. Znaleźć taką bazę $B$, by $\psi$ miało w tej bazie macierz w postaci kanonicznej Jordana.

7. Załóżmy, że wielomian charakterystyczny dla pewnej macierzy $A$ jest postaci $(\lambda+3)^{12}$ i $\dim N_{-3}^{(4)} = 12$. Czy jest możliwe, aby:

   (a) $\dim N_{-3}^{(3)} = 8$, $\dim N_{-3}^{(2)} = 7$, $\dim N_{-3}^{(1)} = 3$;

   (b) $\dim N_{-3}^{(3)} = 11$, $\dim N_{-3}^{(2)} = 9$, $\dim N_{-3}^{(1)} = 5$?

   Jeśli jest to możliwe, to podać postać kanoniczną Jordana dla macierzy $A$.