Wykład trzeci

Ciągłość funkcji

Zał. Funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu x_0.

Definicja 1. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

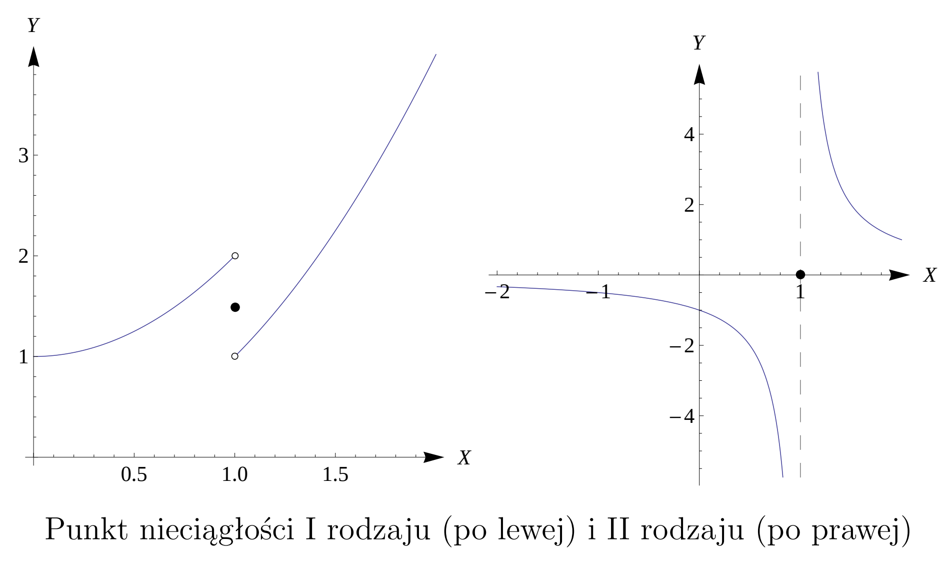
Uwaga 1. Suma $(f+g)$, różnica $(f-g)$, iloczyn $(f \cdot g)$ oraz iloraz $\left(\dfrac{f}{g}, \text{gdy } g(x_0) \neq 0\right)$ funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest funkcją ciągłą w punkcie x_0.

Definicja 2. Funkcja f jest ciągła w zbiorze $A \subset \mathbb{R}$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Uwaga 2. Wielomiany, f. wymierne, f. trygonometryczne, f. wykładnicze, f. logarytmiczne, f. hiperboliczne są ciągłe w swoich dziedzinach naturalnych.

Punkt $x_0 \in D_f$, w którym funkcja f nie jest ciągła nazywamy punktem nieciągłości tej funkcji. Jeżeli punkt x_0 jest punktem nieciągłości funkcji f i jest ona ciągła na pewnym jego sąsiedztwie, to nazywamy go odosobnionym punktem nieciągłości funkcji f.

Definicja 3. Odosobniony punkt nieciągłości x_0 funkcji f jest punktem nieciągłości I rodzaju, jeśli istnieją granice jednostronne $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ i są skończone. W przeciwnym wypadku punkt x_0 jest punktem nieciągłości II rodzaju.



Punkt nieciągłości I rodzaju (po lewej) i II rodzaju (po prawej)

Uwaga 3. Jeżeli funkcja f jest nieciągła w punkcie x_0 i istnieje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, to można tę nieciągłość usunąć.

Własności funkcji ciągłych

1. (tw. o ciągłości funkcji odwrotnej) Jeżeli funkcja f jest ciągła i rosnąca (odp.malejąca) na przedziale $A \subset \mathbb{R}$, to $f(A)$ jest przedziałem oraz funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła i rosnąca (odp.malejąca) na przedziale $f(A)$.

2. (tw. o lokalnym zachowaniu znaku) Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 oraz $f(x_0) < 0$ (odp. $f(x_0) > 0$), to istnieje takie otoczenie O punktu x_0, że dla każdego $x \in O \cap D_f$ zachodzi nierówność $f(x) < 0$ (odp.$f(x) > 0$).
   Zastosowanie: jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i $f(x_0) \neq 0$, to na pewnym otoczeniu punktu x_0 wartości funkcji f mają ten sam znak co liczba $f(x_0)$.

3. (tw. o przyjmowaniu wartości pośrednich) Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale A (domkniętym lub otwartym, ograniczonym lub nieograniczonym) oraz dla pewnych $x_1, x_2 \in A : f(x_1) = a_1 \neq f(x_2) = a_2$, to dla każdej liczby c leżącej między a_1 i a_2 istnieje $x \in A$ taki, że $f(x) = c$.
   Zastosowanie: Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $\langle a; b\rangle$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje $c \in (a; b)$ taki, że $f(c) = 0$.

4. (tw. o ciągłości funkcji złożonej) Jeżeli funkcja wewnętrzna f jest ciągła w punkcie x_0 i funkcja zewnętrzna g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

5. (tw. o wchodzeniu granicy do argumentu funkcji ciągłej) Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ i funkcja zewnętrzna g jest ciągła w punkcie y_0, to
   $$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(y_0)$$

6. (tw.Weierstrassa) jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$, to
   (a) f jest ograniczona w $\langle a; b\rangle$ (tzn.$\exists m, M \in \mathbb{R}\, \forall x \in \langle a; b\rangle\, [m \leqslant f(x) \leqslant M]$),
   (b) istnieją takie liczby $x_1, x_2 \in \langle a; b\rangle$, że $\sup\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x) = f(x_1)$ oraz $\inf\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x) = f(x_2)$.

Asymptoty pionowe

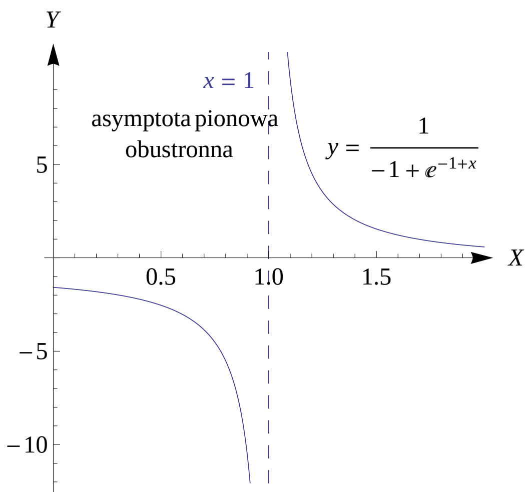
Zał. Funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie (co najmniej jednostronnym) punktu x_0.

Definicja 4. Prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową lewostronną (odp.prawostronną) krzywej $y = f(x)$, jeśli granica $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ (odp. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$) jest niewłaściwa.

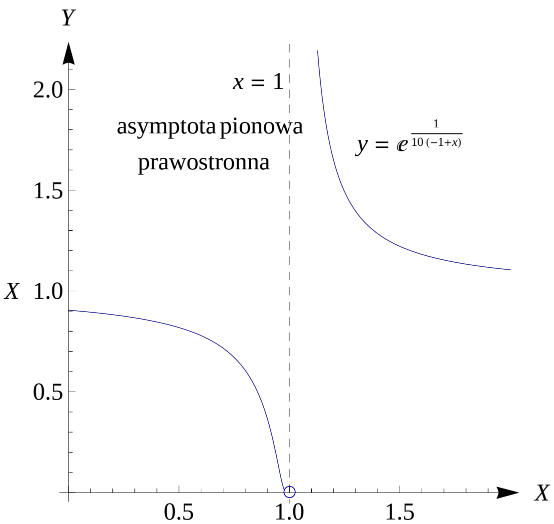
Asymptoty poziome

Zał. Funkcja f jest określona w przedziale $(-\infty; a)$ (odp.$(a; +\infty)$) dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.

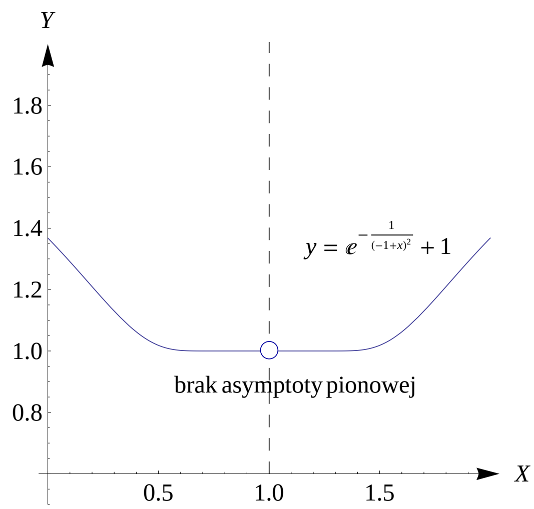
Definicja 5. Prosta $y = m$ jest asymptotą poziomą lewostronną (odp.prawostronną) krzywej $y = f(x)$, jeśli $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m$ (odp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m$).



Y
x = 1
asymptota pionowa
obustronna
$y = \frac{1}{-1 + e^{-1+x}}$
5
−5
−10
0.5
1.0
1.5
X



Y
x = 1
asymptota pionowa
prawostronna
$y = e^{\frac{1}{10(-1+x)}}$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
X



Y
$y = e^{-\frac{1}{(-1+x)^2}} + 1$
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
brak asymptoty pionowej
0.5
1.0
1.5
X