

Metody Probabilistyczne i Statystyka

Z_{9-10}

1. Na przestrzeni (Ω, \mathcal{F}, P) , gdzie $\Omega = \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$, a P jest określone klasyczną definicją prawdopodobieństwa, dane są zmienne losowe X i Y :

$$X(k) = \text{reszta z dzielenia } k \text{ przez } 3, \quad Y(k) = \begin{cases} 0 & , \quad k > 2 \\ 1 & , \quad k \leq 2 \end{cases}.$$

Wyznaczyć $E(XY)$, $E \cos(\pi \cdot (X + Y))$, $\text{cov}(X^2, Y^2)$.

2. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na zbiorze $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$. Obliczyć $E(2X + 3Y)$, $V(X + Y)$ oraz $\text{cov}(|X|, |Y|)$.
3. Zmienne losowe X i Y są niezależne i każda z nich ma rozkład jednostajny w przedziale $[0; 1]$. Niech $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. Znaleźć EU oraz $\text{cov}(U, V)$.
4. Zmienne losowe X i Y są niezależne. X ma rozkład jednostajny w przedziale $[1; 4]$, natomiast Y ma rozkład jednostajny w przedziale $[3; 5]$. Wyznaczyć średnią wartość pola prostokąta o bokach $\pi \cdot Y$ i $X + 2Y$.
5. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} cx & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{wp.p.} \end{cases}.$$

Wyznaczyć stałą c i obliczyć $V(X + 2Y)$.

6. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny $N\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)$. Wyznaczyć $E(X(X + 3Y))$ oraz $V(2Z + T - 3)$, gdzie $Z = 2X + Y$, $T = 2X - Y$.
7. Ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ losujemy dwie liczby. Niech X oznacza pierwszą wylosowaną liczbę, a Y drugą. Wyznaczyć współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y , jeśli
- (a) losujemy ze zwracaniem;
- (b) losujemy bez zwracania.
8. X_1 i X_2 są zmiennymi losowymi takimi, że $X_i \sim N(1, i^2)$, $i = 1, 2$. Wiadomo także, że $\rho(X_1, X_2) = -\frac{1}{2}$. Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej losowej $(Y_1, Y_2) = (X_1 + 3X_2, 3X_1 - 2X_2)$.
9. Wektor (X, Y) ma rozkład dyskretny o dystrybuancie

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0 & , & x < 0 & \vee & y < 0 \\ 1/3 & , & 0 \leq x < 1 & \wedge & 0 \leq y < 1 \\ 1/2 & , & (0 \leq x < 1 \wedge y \geq 1) & \vee & (x \geq 1 \wedge 0 \leq y < 1) \\ 1 & , & x \geq 1 & \wedge & y \geq 1 \end{cases}.$$

Wyznaczyć prostą regresji liniowej zmiennej losowej X względem Y oraz błąd tego przybliżenia.

10. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny w obszarze

$D = \{(x, y) : (-1 \leq x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq x + 1) \vee (0 \leq x \leq 1 \wedge x - 1 \leq y \leq 0)\}$. Wyznaczyć prostą regresji liniowej zmiennej losowej $X - 2Y$ względem $X + Y$.

11. Spośród wszystkich żołnierzy służących w pewnej jednostce wylosowano niezależnie 10 osób. Niech X oznacza wzrost (w cm), zaś Y wagę (w kg) osoby. Otrzymano następujące wyniki:

X :	165,5	166	168	168,5	169	169,5	170	171	173,5	179
Y :	69	67	67	74	70	75	73	73	70	93

Wyznaczyć prostą regresji liniowej Y względem X . Korzystając z wyniku podać przybliżoną wagę żołnierza, który ma 166,5 cm wzrostu.