

Metody probabilistyczne i statystyka

Z_4

1. Z urny zawierającej 4 kule oznaczone liczbami $-1, 0, 1, 2$ losujemy 2 kule. Niech X oznacza sumę liczb na wylosowanych kulach. Wyznaczyć średnią wartość zmiennej losowej X .

2. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny taki, że

$S_X = \{-1, 0, k\}$, $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3k}$, $P(X = k) = \frac{1}{k}$, gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć stałą k oraz obliczyć $V(3X + 1)$.

3. Staż pracy (w latach) pracowników pewnej firmy jest zmienną losową X o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & , \quad x \in [0; 6] \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases}.$$

- (a) Wyznaczyć stałą c oraz dystrybuantę zmiennej losowej X ;
(b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że staż pracy losowo wybranego pracownika tej firmy jest krótszy niż 2 lata;
(c) Jaki jest średni staż pracy pracowników tej firmy? Ile wynosi odchylenie standardowe?
4. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny taki, że $S_X = \{0, 1, 2\}$ oraz $EX = 0,9$, $EX^2 = 1,5$. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej X .
5. Rzucamy monetą niesymetryczną $\left(P(O) = \frac{2}{3}\right)$ do momentu wypadnięcia drugiej reszki. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych orłów. Obliczyć EX .
6. Wykazać, że nie istnieje EX , jeśli:

(a) X jest zmienną losową o rozkładzie Cauchy'ego z gęstością $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(b) X ma rozkład dyskretny, taki, że $S_X = \{1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots\}$ oraz $P(X = k) = \frac{6}{k^2 \cdot \pi^2}$.

7. Dwaj studenci umówili się na Placu Politechniki między godziną 16⁰⁰ i 17⁰⁰. Niech T oznacza czas oczekiwania osoby, która przyszła pierwsza, na drugą. Wyznaczyć średnią wartość zmiennej losowej T .

8. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [0; 1] \\ 0 & , \quad x \notin [0; 1] \end{cases}.$$

Wartość X i $\frac{1}{2}$ dzielą przedział $[0; 1]$ na trzy odcinki. Znaleźć średnią długość każdego z nich.

9. Dystrybuanta zmiennej losowej X jest postaci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{8} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}.$$

Wyznaczyć EX .