Wykład 9. Szereg Fouriera. Charakterystyki częstotliwościowe.

- Wprowadzenie do szeregu Fouriera
- Analiza obwodów liniowych prądu okresowego
- Charakterystyki częstotliwościowe

Podstawy metody wskazowej – przypomnienie

W stanie ustalonym układu *liniowego* prądu sinusoidalnego...

...wszystkie napięcia i prądy są przebiegami sinusoidalnymi.

Sinusoidalne pobudzenie układu SLS daje sinusoidalną odpowiedź $\longrightarrow$ kluczowa rola sygnałów sinusoidalnych.

Wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie...

...sygnałowi sinusoidalnemu *liczby* zespolonej (wskazu).

$$x(t) = X_m \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad \longleftrightarrow \quad X = X_m e^{j\varphi}$$

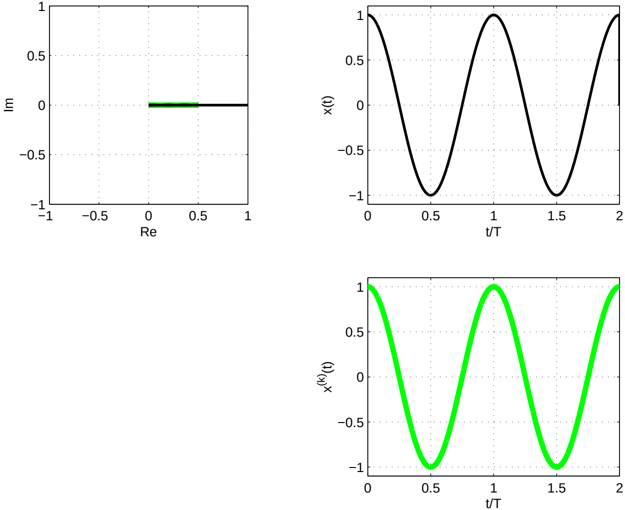
„Matematyczne” odtwarzanie sygnału na podstawie wskazu:

$$x(t) = \frac{X}{2} e^{j\omega_1 t} + \frac{X^*}{2} e^{-j\omega_1 t}$$

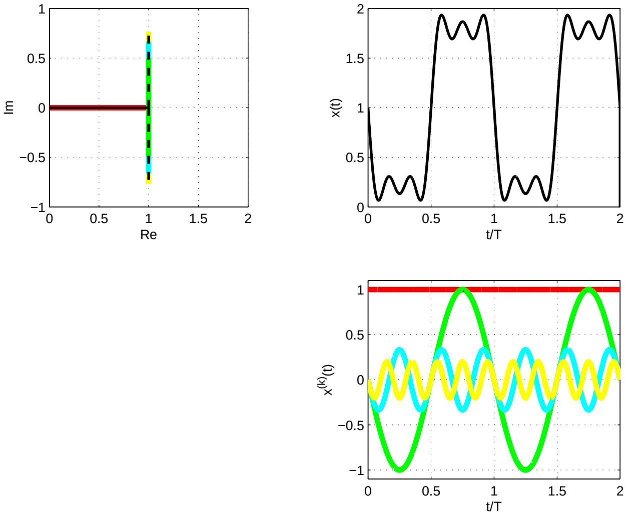
Dowolny przebieg sinusoidalny...

...jest sumą *dwóch* sprzężonych *wirujących* „półwskazów”.

Graficzna interpretacja wskazów – przypomnienie



Graficzna interpretacja szeregu Fouriera



Podstawy analizy widmowej (Fouriera) sygnałów

Dowolny przebieg T-okresowy… $\omega_1 = 2\pi/T$

…jest sumą nieskończenie wielu sprzężonych par wektorów, *wirujących* na płaszczyźnie zespolonej z okresami T/k, $k \in \mathbb{N}$.

Szereg Fouriera (w tzw. postaci zespolonej):

$$x(t) = \underbrace{X^{(0)}}_{\text{składowa stała}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(X^{(k)} e^{jk\omega_1 t} + X^{(k)*} e^{-jk\omega_1 t} \right)}_{x^{(k)}(t) = 2|X^{(k)}| \cos(k\omega_1 t + \arg X^{(k)})}$$

Wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie…

…sygnałowi okresowemu *nieskończonego ciągu* liczb zespolonych, nazywanego *widmem* (prążkowym) sygnału.

$$x(t)\ T\text{-okresowy} \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ X^{(k)} = |X^{(k)}| e^{j \arg X^{(k)}} \right\},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$\left\{ |X^{(k)}| \right\}$ – widmo amplitudowe, $\left\{ \arg X^{(k)} \right\}$ – widmo fazowe.

Podstawy analizy widmowej (Fouriera) sygnałów

Dowolny przebieg T-okresowy… $\omega_1 = 2\pi/T$

…jest sumą nieskończenie wielu sprzężonych par wektorów, *wirujących* na płaszczyźnie zespolonej z okresami T/k, $k \in \mathbb{N}$.

Szereg Fouriera (w tzw. postaci zespolonej):

$$x(t) = \underbrace{X^{(0)}}_{\text{składowa stała}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(X^{(k)} e^{jk\omega_1 t} + X^{(k)*} e^{-jk\omega_1 t}\right)}_{x^{(k)}(t) = 2|X^{(k)}|\cos(k\omega_1 t + \arg X^{(k)})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^{(k)} e^{jk\omega_1 t}$$

Wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie…

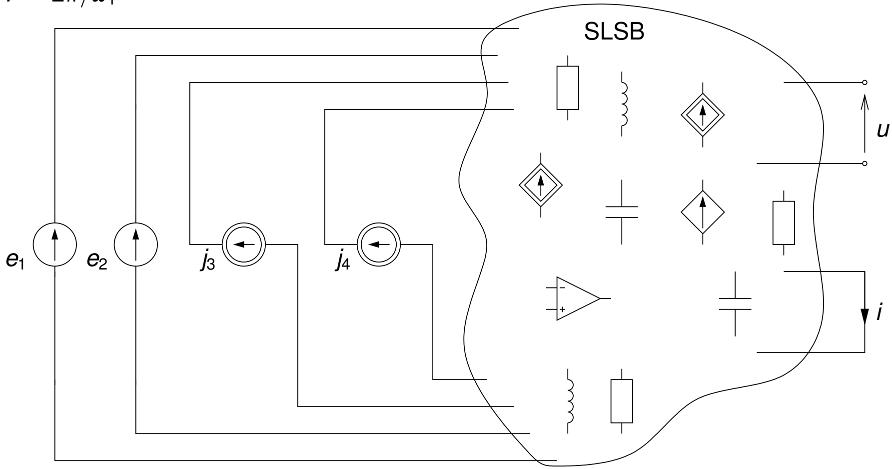
…sygnałowi okresowemu *nieskończonego ciągu* liczb zespolonych, nazywanego *widmem* (prążkowym) sygnału.

$$x(t)\ T\text{-okresowy} \quad \longleftrightarrow \quad \left\{X^{(k)} = |X^{(k)}| e^{j \arg X^{(k)}}\right\},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$\left\{|X^{(k)}|\right\}$ – widmo amplitudowe, $\left\{\arg X^{(k)}\right\}$ – widmo fazowe.

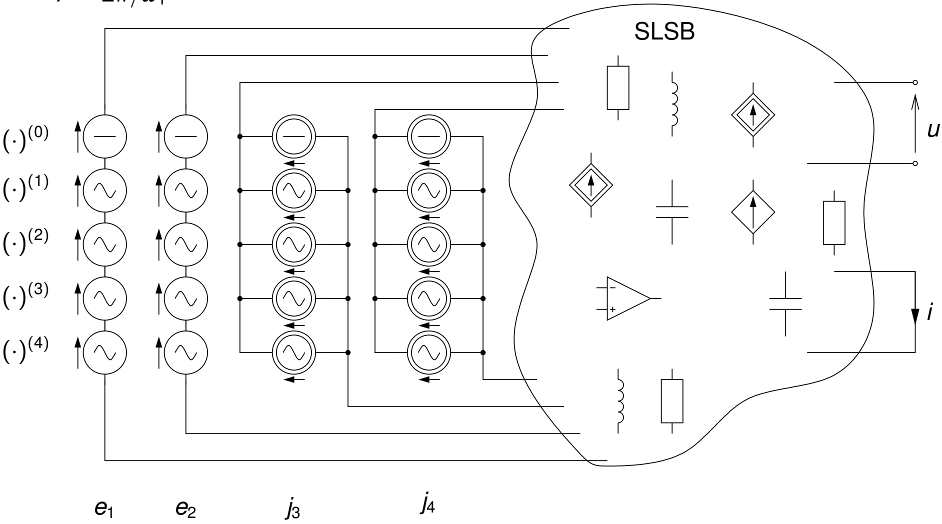
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



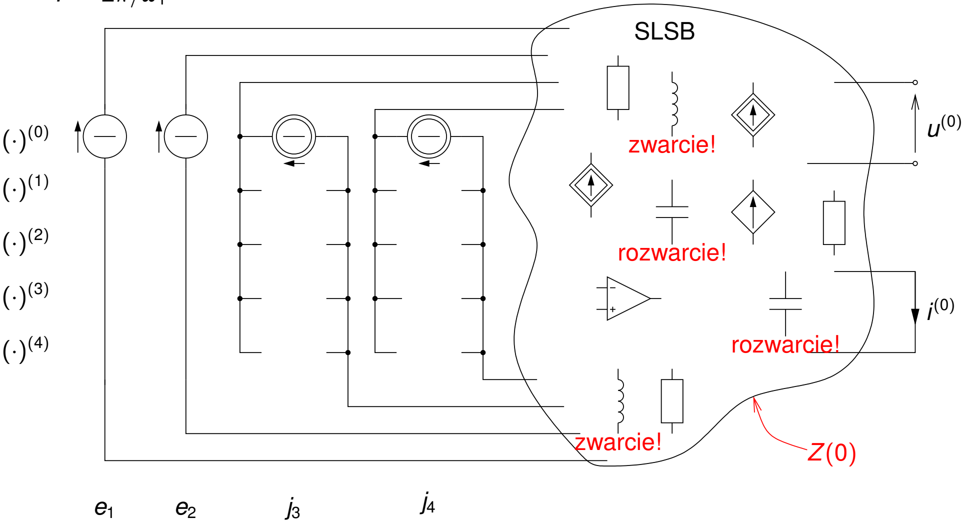
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



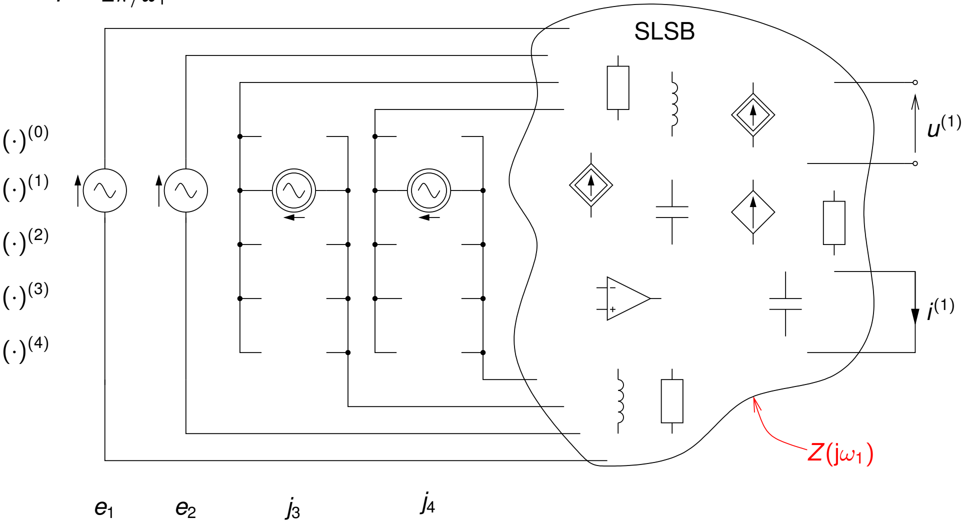
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



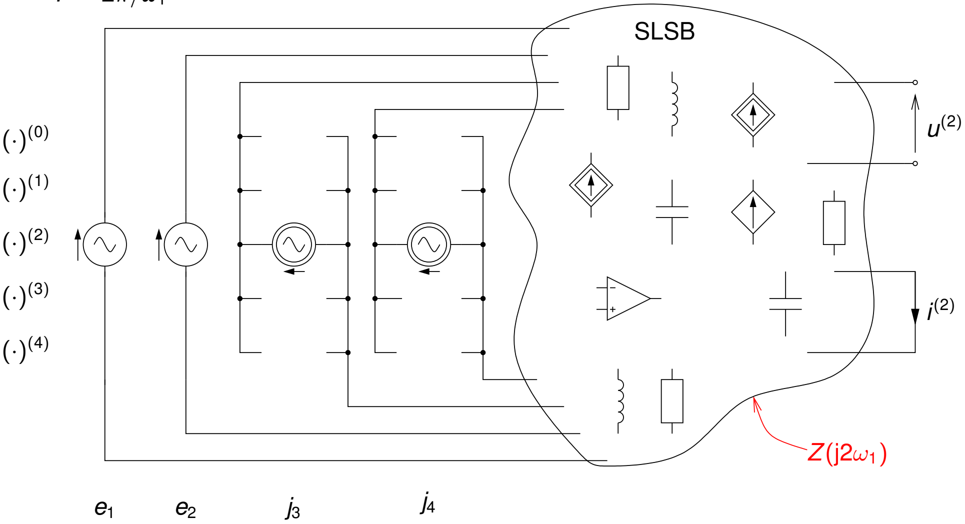
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



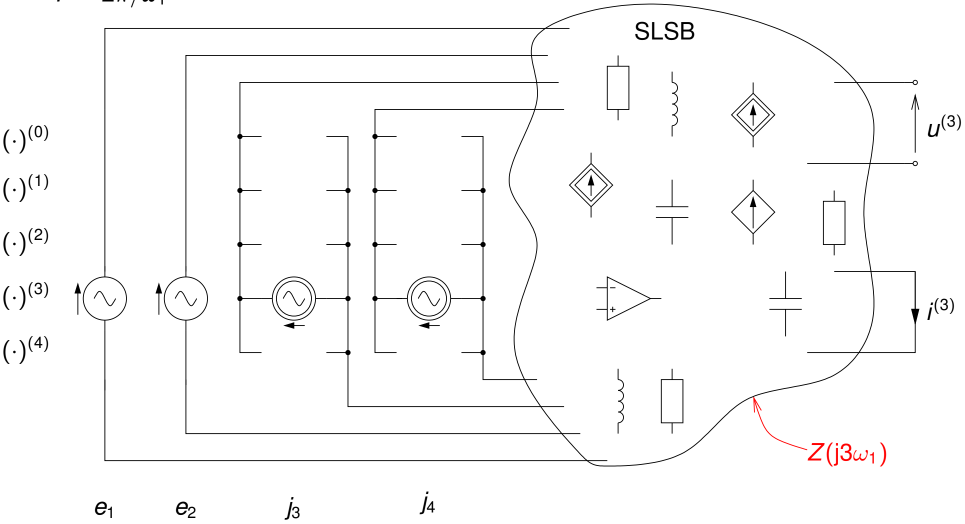
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



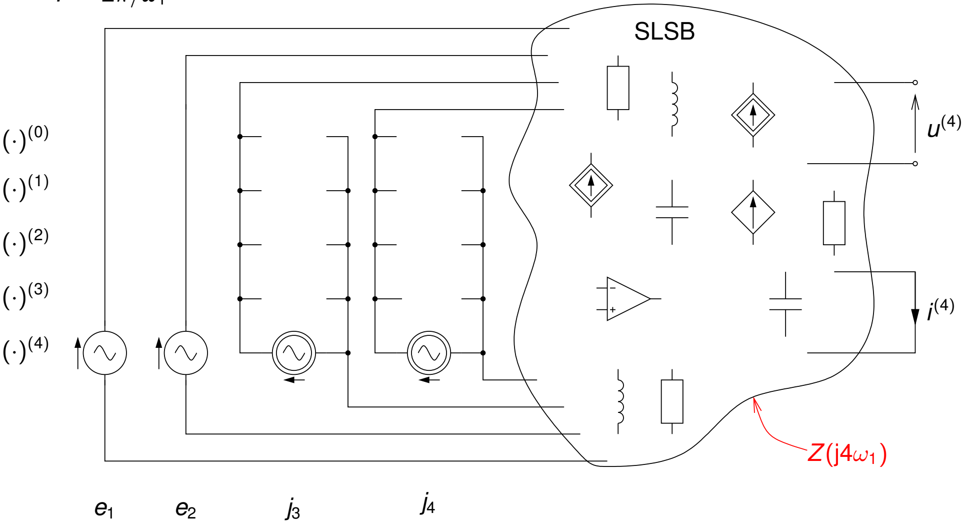
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



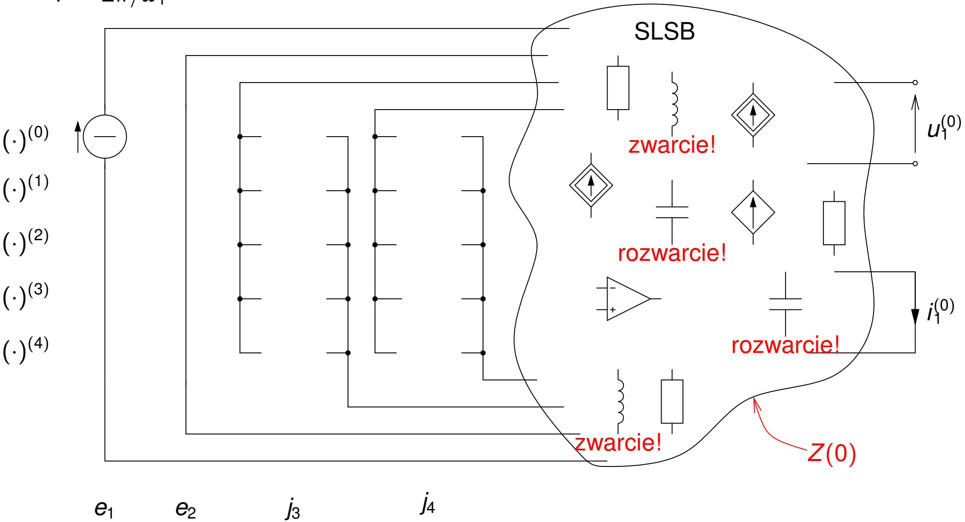
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



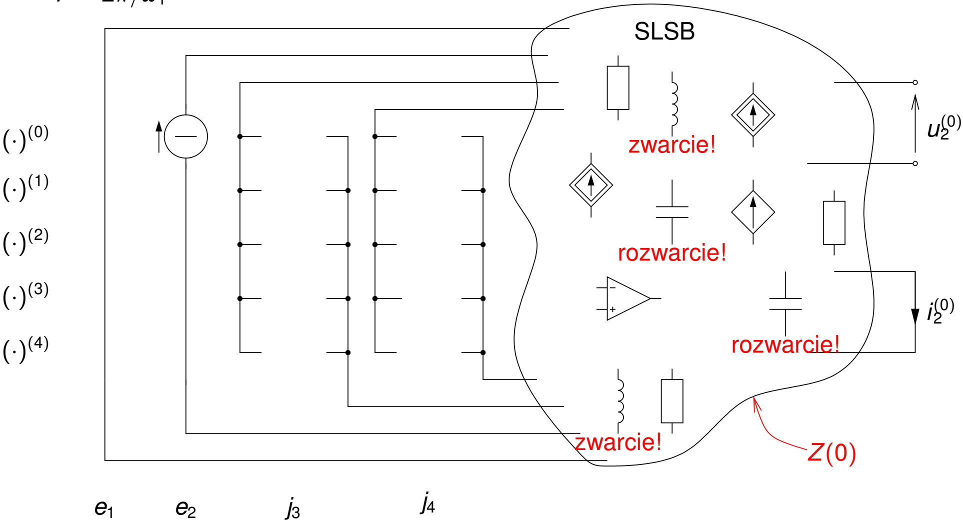
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



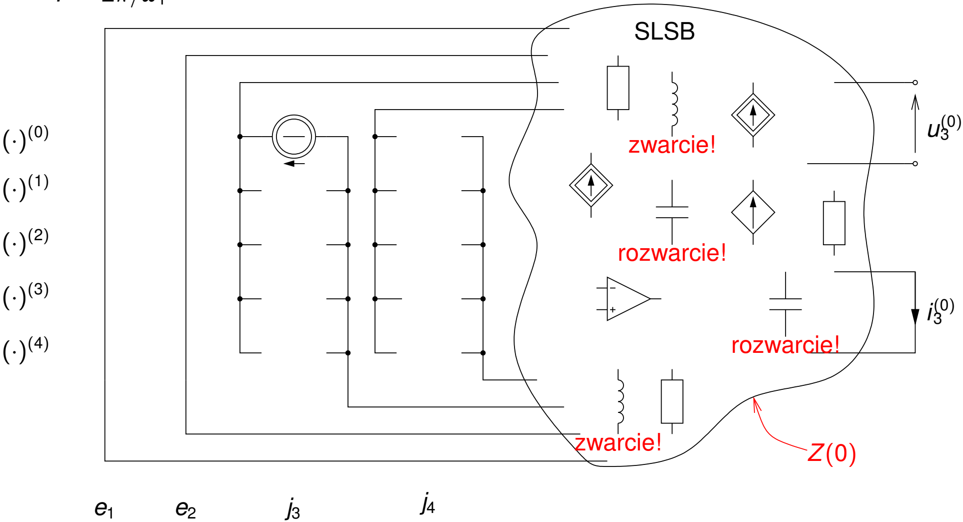
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



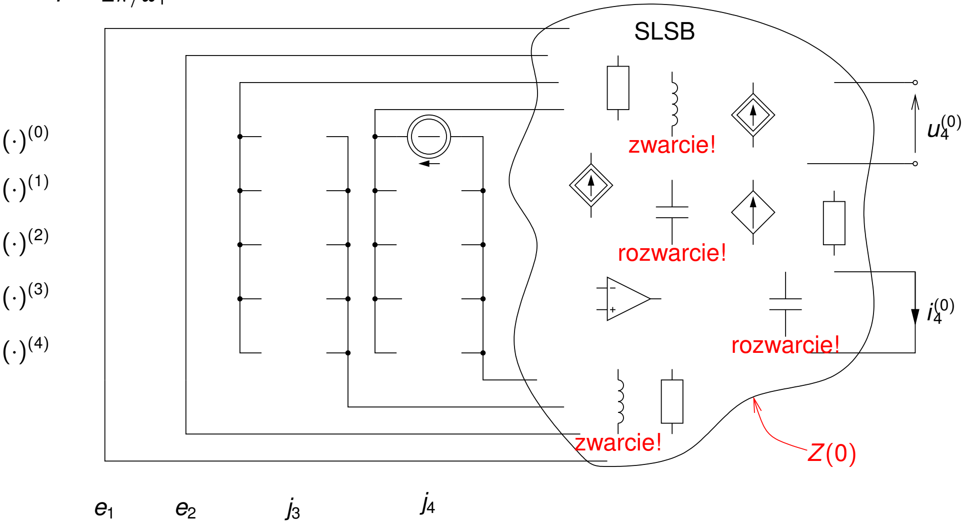
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



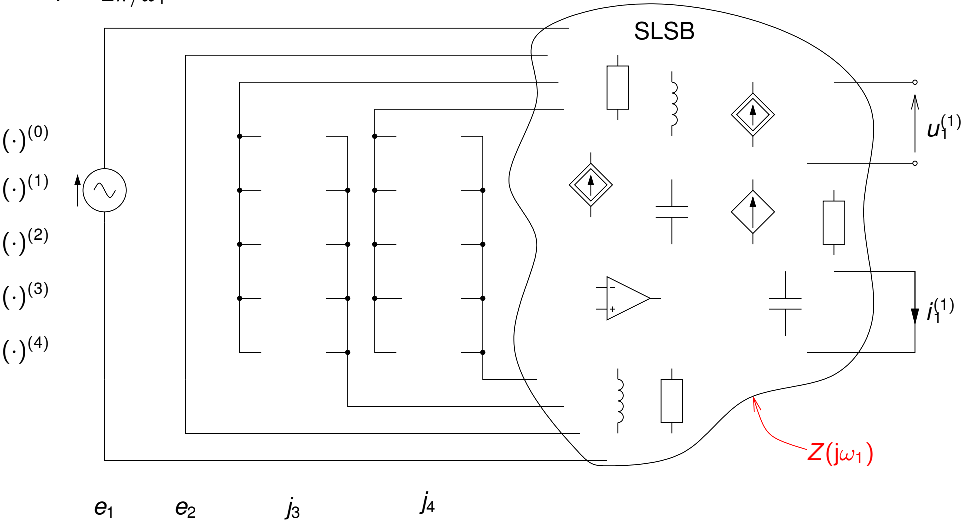
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



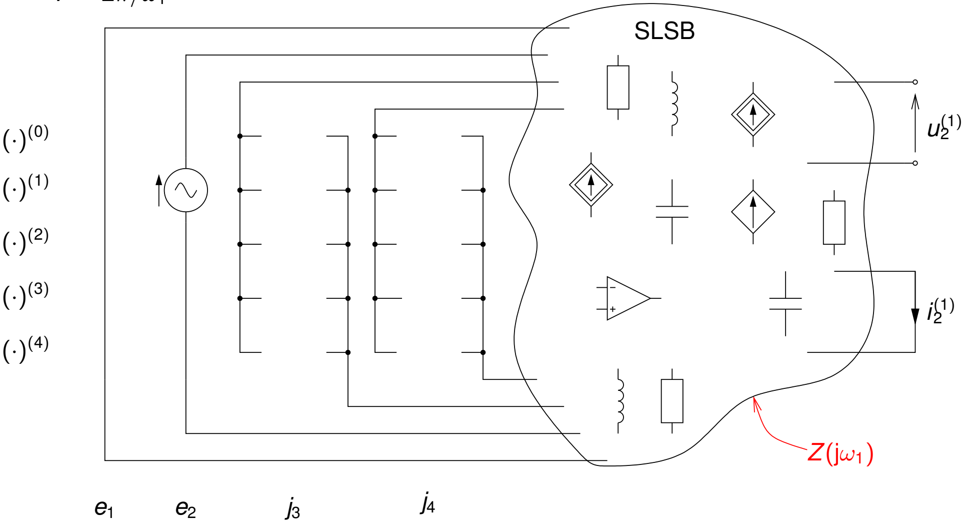
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



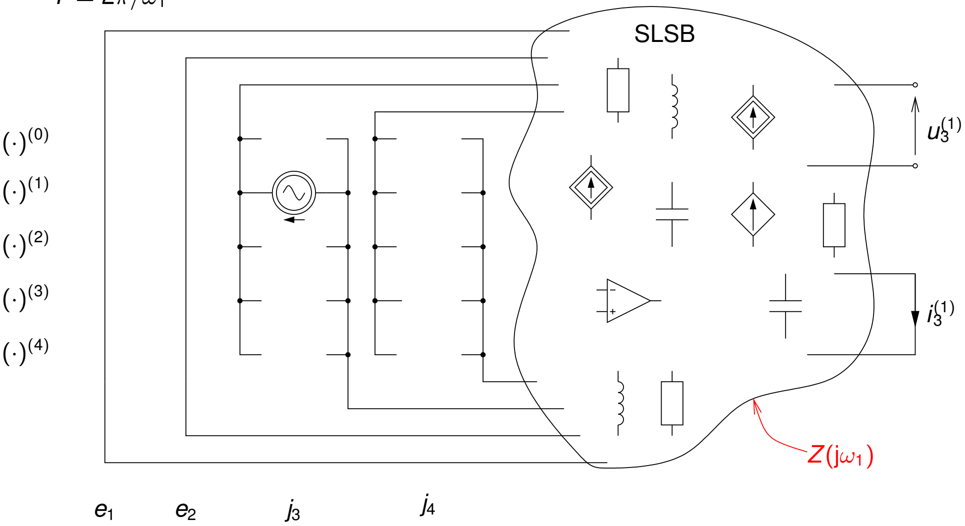
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



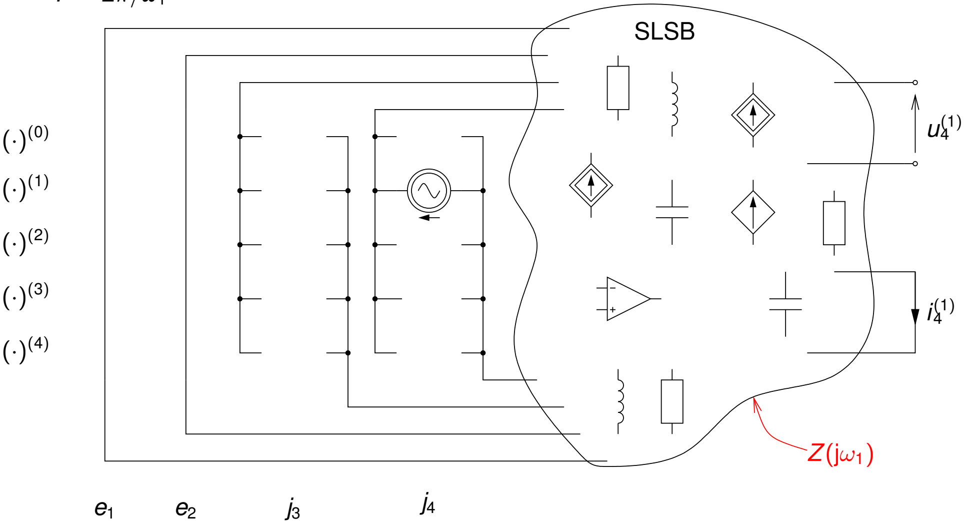
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



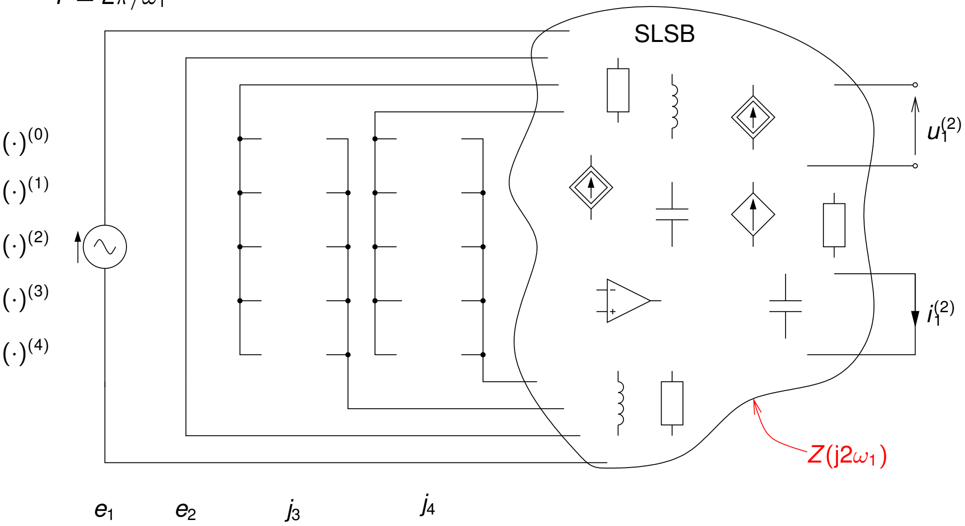
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



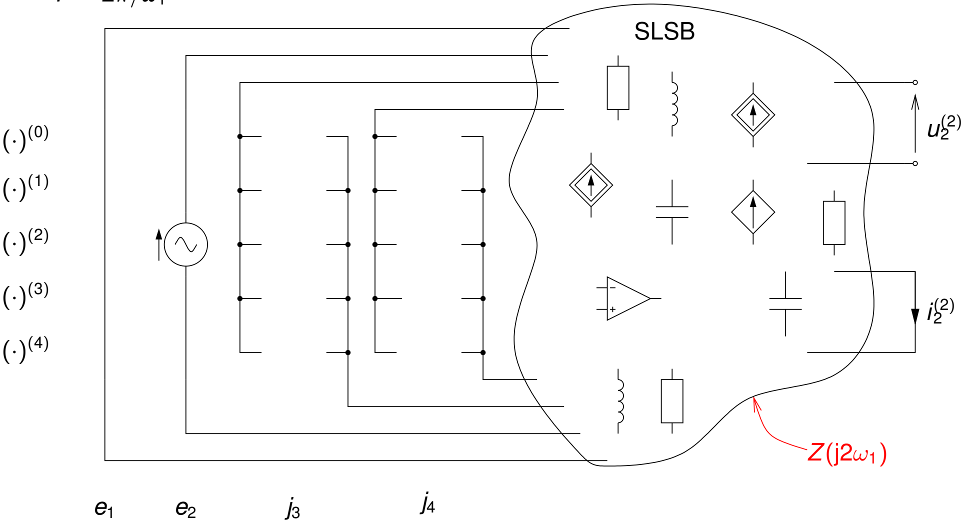
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



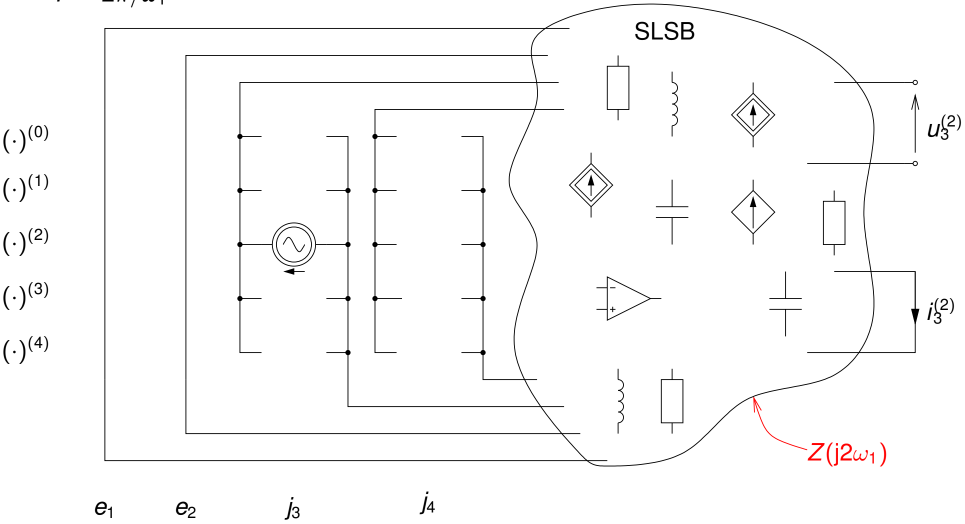
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



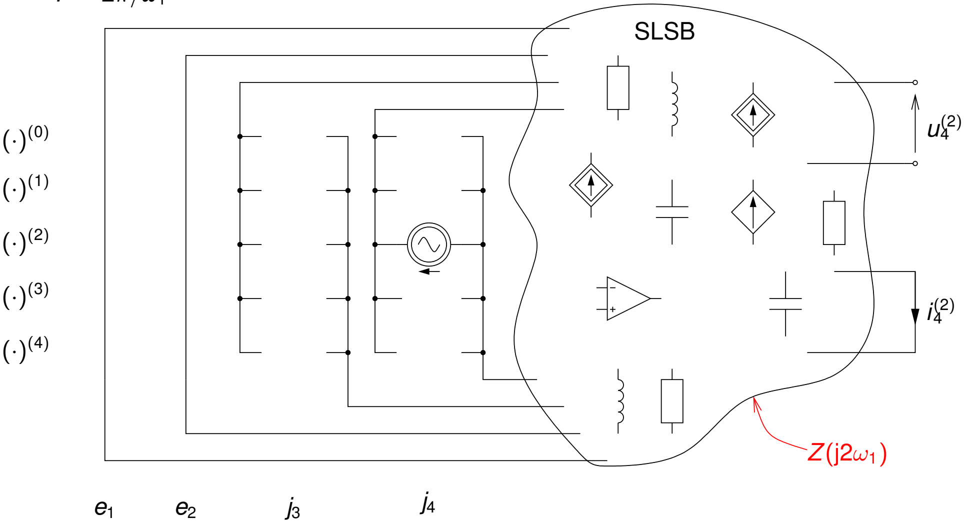
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



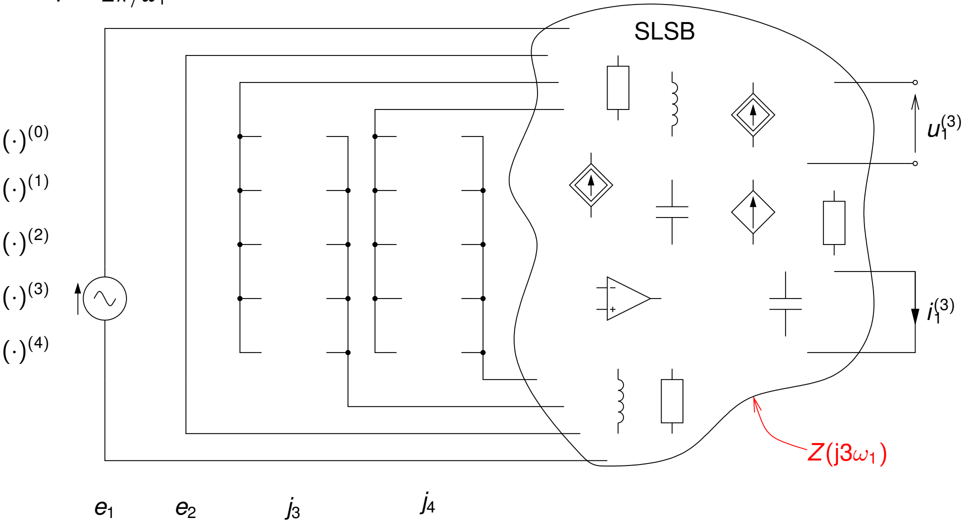
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



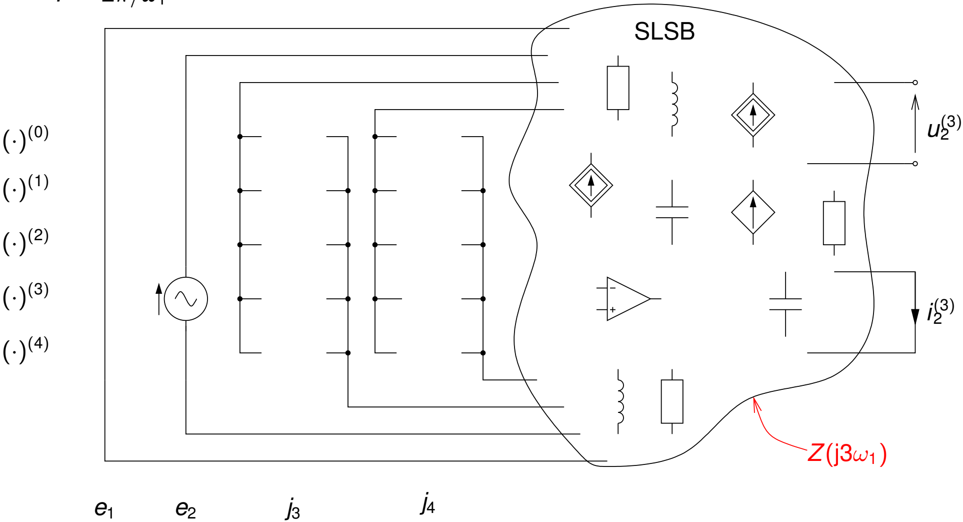
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



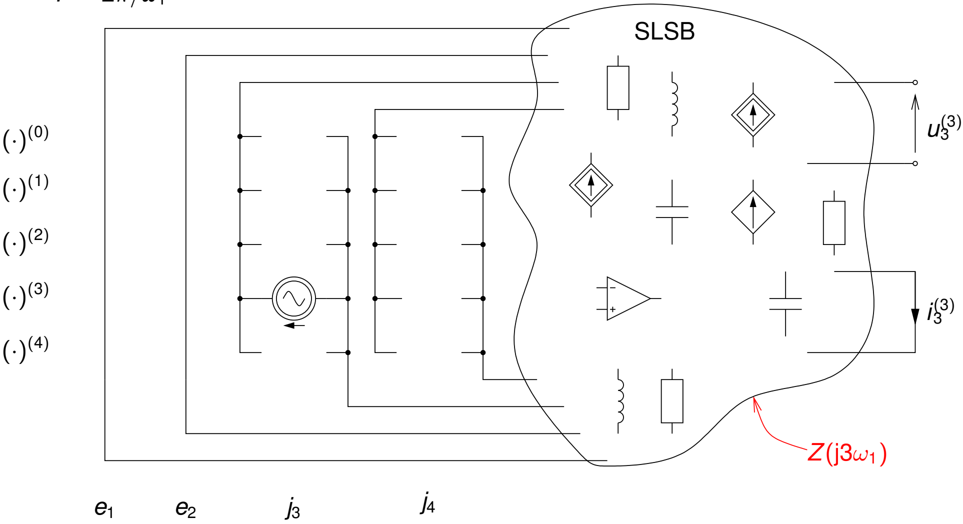
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



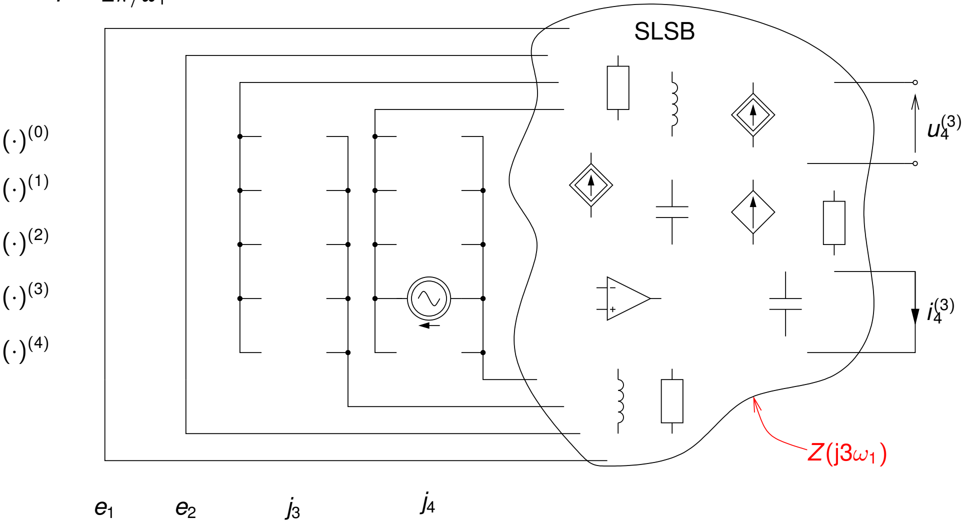
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



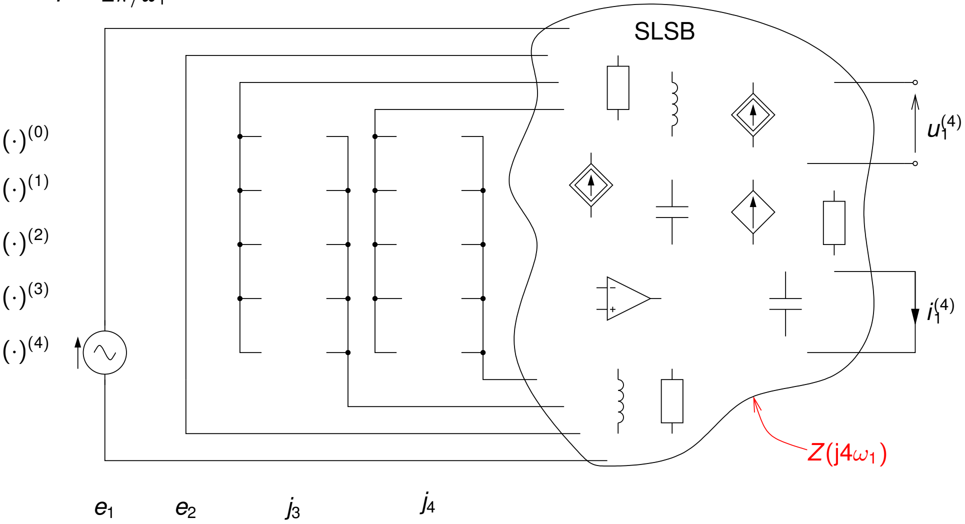
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



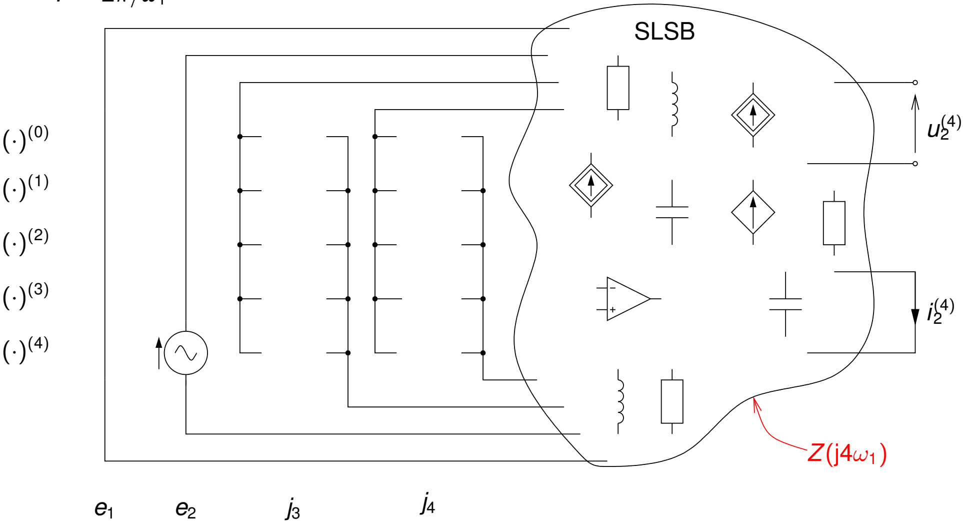
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



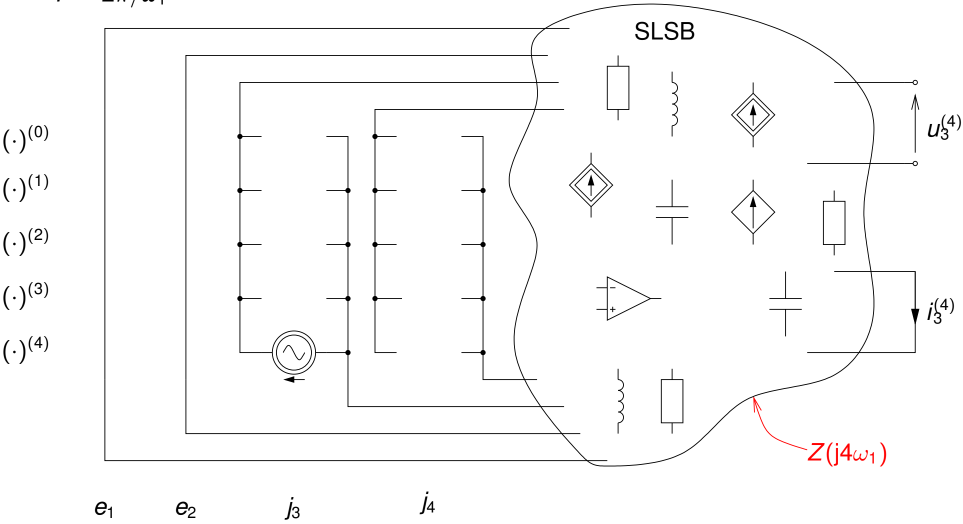
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



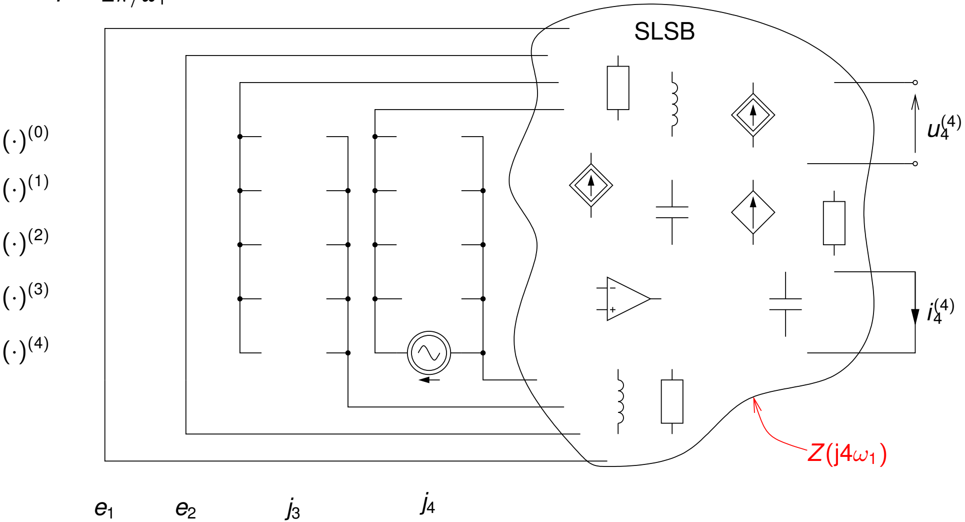
Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



Analiza obwodów *liniowych* prądu okresowego

$T = 2\pi/\omega_1$



Charakterystyki częstotliwościowe

Typowy dotąd schemat przesyłania sygnału:

źródło $\longrightarrow$ odbiornik

zastępujemy schematem bardziej rozbudowanym:

źródło $\longrightarrow$ kanał transmisyjny $\longrightarrow$ odbiornik

gdzie kanał (mający wejście i wyjście) jest *czwórnikiem*. Kanał opisany jest *transmitancją*, np. napięciową, zdefiniowaną dla stanu ustalonego przy pobudzeniu sinusoidalnym jako:

$$H_u = U_2/U_1\Big|_{I_2\,=\,0} \quad \text{(zw.-rozw.)}, \quad H_{ur} = U_2/E_T\Big|_{Z_w,\,Z_0} \quad \text{(rob.)}$$

Czwórnik (kanał) zawiera immitancje zależne od częstotliwości (bo D $\longrightarrow$ jω), więc jego właściwości transmisyjne zależą od ω:

$$H(\mathrm{j}\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

gdzie $A(\omega)$ – ch-ka amplitudowa, $\varphi(\omega)$ – ch-ka fazowa, $H(\mathrm{j}\omega)$ – ch-ka amplitudowo-fazowa. Czwórnik działa więc jako filtr.

Charakterystyki częstotliwościowe

Typowy dotąd schemat przesyłania sygnału:

źródło $\longrightarrow$ odbiornik

zastępujemy schematem bardziej rozbudowanym:

źródło $\longrightarrow$ kanał transmisyjny $\longrightarrow$ odbiornik

gdzie kanał (mający wejście i wyjście) jest *czwórnikiem*. Kanał opisany jest *transmitancją*, np. napięciową, zdefiniowaną dla stanu ustalonego przy pobudzeniu sinusoidalnym jako:

$$H_u = U_2/U_1\Big|_{I_2\,=\,0} \quad \text{(zw.-rozw.)}, \quad H_{ur} = U_2/E_T\Big|_{Z_w,\,Z_0} \quad \text{(rob.)}$$

Czwórnik (kanał) zawiera immitancje zależne od częstotliwości (bo D $\longrightarrow$ jω), więc jego właściwości transmisyjne zależą od ω:

$$H(\mathrm{j}\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

gdzie $A(\omega)$ – ch-ka amplitudowa, $\varphi(\omega)$ – ch-ka fazowa, $H(\mathrm{j}\omega)$ – ch-ka amplitudowo-fazowa. Czwórnik działa więc jako filtr.

Ch-ki częstotliwościowe dla sygnałów okresowych

Przykład – „całkujący” dzielnik napięciowy *R*-*C*:

$$H_u(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{e^{-\mathrm{j}\operatorname{arc\,tg}\omega RC}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \overset{\omega RC \gg 1}{\approx} \frac{1}{\mathrm{j}\omega RC}$$

Dzielenie wskazu przez jω odpowiada całkowaniu sygnału.

$$U_2 = H_u(\mathrm{j}\omega) U_1 \implies |U_2| = A(\omega) \cdot |U_1| \wedge \arg U_2 = \varphi(\omega) + \arg U_1$$

W przypadku sygnału T-okresowego ($T = \frac{2\pi}{\omega_1}$) stosujemy te wzory dla składowej stałej ($\omega = 0$) i dla każdej harmonicznej oddzielnie, po czym korzystamy z zasady superpozycji.

Ch-ki częstotliwościowe dla sygnałów okresowych

Przykład – „całkujący” dzielnik napięciowy R-C:

$$H_u(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\mathrm{arc\,tg}\,\omega RC}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \overset{\omega RC \gg 1}{\approx} \frac{1}{\mathrm{j}\omega RC}$$

Dzielenie wskazu przez $\mathrm{j}\omega$ odpowiada całkowaniu sygnału.

$$U_2 = H_u(\mathrm{j}\omega) U_1 \implies |U_2| = A(\omega) \cdot |U_1| \wedge \arg U_2 = \varphi(\omega) + \arg U_1$$

W przypadku sygnału T-okresowego ($T = \frac{2\pi}{\omega_1}$) stosujemy te wzory dla składowej stałej ($\omega = 0$) i dla każdej harmonicznej oddzielnie, po czym korzystamy z zasady superpozycji.

Ch-ki częstotliwościowe dla sygnałów okresowych

Przykład – „całkujący” dzielnik napięciowy R-C:

$$H_u(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\operatorname{arc\,tg}\omega RC}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \overset{\omega RC \gg 1}{\approx} \frac{1}{\mathrm{j}\omega RC}$$

Dzielenie wskazu przez jω odpowiada całkowaniu sygnału.

$$U_2 = H_u(\mathrm{j}\omega) U_1 \implies |U_2| = A(\omega) \cdot |U_1| \wedge \arg U_2 = \varphi(\omega) + \arg U_1$$

W przypadku sygnału T-okresowego ($T = \frac{2\pi}{\omega_1}$) stosujemy te wzory dla składowej stałej ($\omega = 0$) i dla każdej harmonicznej oddzielnie, po czym korzystamy z zasady superpozycji.

Decybele i spółka $\log 2 \approx 0{,}3$

Zmysły ludzkie reagują na bodźce nieliniowo (logarytmicznie) – prawo Webera-Fechnera (jasność, głośność, częstotliwość).

Bel [B]… $1\ \mathrm{dB} = 0{,}1\ \mathrm{B}$

…*dziesiętna* logarytmiczna miara stosunku *mocy* $\log \frac{P_2}{P_1}$ [B].

Moc zależy od *kwadratu* amplitudy X_m napięcia/prądu, więc:

$$10 \log \frac{X_{m2}^2}{X_{m1}^2} = 20 \log \frac{X_{m2}}{X_{m1}}$$

- Dwukrotna zmiana amplitudy (o 1 bit) to różnica 6dB.
- Dwukrotna zmiana mocy to różnica 3dB.

Oktawa (dekada)…

…to *dwukrotna* (dziesięciokrotna) zmiana częstotliwości.

Decybele i spółka $\log 2 \approx 0{,}3$

Zmysły ludzkie reagują na bodźce nieliniowo (logarytmicznie) – prawo Webera-Fechnera (jasność, głośność, częstotliwość).

Bel [B]… $1\,\mathrm{dB} = 0{,}1\,\mathrm{B}$

…*dziesiętna* logarytmiczna miara stosunku *mocy* $\log \frac{P_2}{P_1}$ [B].

Moc zależy od *kwadratu* amplitudy X_m napięcia/prądu, więc:

$$10 \log \frac{X_{m2}^2}{X_{m1}^2} = 20 \log \frac{X_{m2}}{X_{m1}}$$

- Dwukrotna zmiana amplitudy (o 1 bit) to różnica 6dB.
- Dwukrotna zmiana mocy to różnica 3dB.

Oktawa (dekada)…

…to *dwukrotna* (dziesięciokrotna) zmiana częstotliwości.

Decybele i spółka $\log 2 \approx 0{,}3$

Zmysły ludzkie reagują na bodźce nieliniowo (logarytmicznie) – prawo Webera-Fechnera (jasność, głośność, częstotliwość).

Bel [B]… $1\,\mathrm{dB} = 0{,}1\,\mathrm{B}$

…*dziesiętna* logarytmiczna miara stosunku *mocy* $\log \frac{P_2}{P_1}$ [B].

Moc zależy od *kwadratu* amplitudy X_m napięcia/prądu, więc:

$$10 \log \frac{X_{m2}^2}{X_{m1}^2} = 20 \log \frac{X_{m2}}{X_{m1}}$$

- Dwukrotna zmiana amplitudy (o 1 bit) to różnica 6dB.
- Dwukrotna zmiana mocy to różnica 3dB.

Oktawa (dekada)…

…to *dwukrotna* (dziesięciokrotna) zmiana częstotliwości.

Asymptotyczne charakterystyki częstotliwościowe

- transmitancja układu SLS jest *wymierną* funkcją jω
- zakładamy ew. zera w 0 i bieguny *rzeczywiste pojedyncze*
- rysujemy *przybliżony* wykres *logarytmicznej* charakterystyki amplitudowej [dB] (wykres Bodego)

Wpływ jednego (pojedynczego) bieguna (czynnika $1/(1+\mathrm{j}\omega\tau)$):

$$A_{\mathrm{d}B}(\omega) = 20\log|H(\mathrm{j}\omega)| = -20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

$$A_{\mathrm{d}B}(2\pi f) \approx \begin{cases} 0, & \omega\tau \ll 1 \\ -20\log f - 20\log(2\pi\tau), & \omega\tau \gg 1 \end{cases} \quad [\mathrm{dB}]$$

Wykres rysujemy w skali logarytmicznej na obu osiach (f i $A_{\mathrm{d}B}$), doprowadzając do przecięcia obie półproste.

Dla $\omega\tau \gg 1$ zmiana częstotliwości o dekadę ($f_2/f_1 = 10 \Longrightarrow \log(f_2/f_1) = 1$) zmienia $A_{\mathrm{d}B}$ o 20 dB, więc nachylenie półprostej wynosi -20 dB/dek. Zmiana częstotliwości o oktawę ($f_2/f_1 = 2 \Longrightarrow \log(f_2/f_1) \approx 0{,}3$) zmienia $A_{\mathrm{d}B}$ o $20 \cdot 0{,}3$ dB, więc nachylenie tej półprostej wynosi (innymi słowy) -6 dB/okt.

Asymptotyczne charakterystyki częstotliwościowe

- transmitancja układu SLS jest *wymierną* funkcją $\mathrm{j}\omega$
- zakładamy ew. zera w 0 i bieguny *rzeczywiste pojedyncze*
- rysujemy *przybliżony* wykres *logarytmicznej* charakterystyki amplitudowej [dB] (wykres Bodego)

Wpływ jednego (pojedynczego) bieguna (czynnika $1/(1+\mathrm{j}\omega\tau)$):

$$A_{\mathrm{d}B}(\omega) = 20\log|H(\mathrm{j}\omega)| = -20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

$$A_{\mathrm{d}B}(2\pi f) \approx \begin{cases} 0, & \omega\tau \ll 1 \\ -20\log f - 20\log(2\pi\tau), & \omega\tau \gg 1 \end{cases} \quad \text{[dB]}$$

Wykres rysujemy w skali logarytmicznej na obu osiach (f i $A_{\mathrm{d}B}$), doprowadzając do przecięcia obie półproste.

Dla $\omega\tau \gg 1$ zmiana częstotliwości o dekadę ($f_2/f_1 = 10 \Longrightarrow \log(f_2/f_1) = 1$) zmienia $A_{\mathrm{d}B}$ o 20 dB, więc nachylenie półprostej wynosi -20 dB/dek. Zmiana częstotliwości o oktawę ($f_2/f_1 = 2 \Longrightarrow \log(f_2/f_1) \approx 0{,}3$) zmienia $A_{\mathrm{d}B}$ o $20 \cdot 0{,}3$ dB, więc nachylenie tej półprostej wynosi (innymi słowy) -6 dB/okt.

Asymptotyczne charakterystyki częstotliwościowe

- transmitancja układu SLS jest *wymierną* funkcją $j\omega$
- zakładamy ew. zera w 0 i bieguny *rzeczywiste pojedyncze*
- rysujemy *przybliżony* wykres *logarytmicznej* charakterystyki amplitudowej [dB] (wykres Bodego)

Wpływ jednego (pojedynczego) bieguna (czynnika $1/(1 + j\omega\tau)$):

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$A_{dB}(2\pi f) \approx \begin{cases} 0, & \omega\tau \ll 1 \\ -20 \log f - 20 \log(2\pi\tau), & \omega\tau \gg 1 \end{cases} \quad \text{[dB]}$$

Wykres rysujemy w skali logarytmicznej na obu osiach (f i A_{dB}), doprowadzając do przecięcia obie półproste.

Dla $\omega\tau \gg 1$ zmiana częstotliwości o dekadę ($f_2/f_1 = 10 \Longrightarrow \log(f_2/f_1) = 1$) zmienia A_{dB} o 20 dB, więc nachylenie półprostej wynosi -20 dB/dek. Zmiana częstotliwości o oktawę ($f_2/f_1 = 2 \Longrightarrow \log(f_2/f_1) \approx 0{,}3$) zmienia A_{dB} o $20 \cdot 0{,}3$ dB, więc nachylenie tej półprostej wynosi (innymi słowy) -6 dB/okt.