AUTOMATYKA I ROBOTYKA - SEMESTR 2

ANA2. ZESTAW 3. - Rozwiązania

Zad. 1. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje

$$\text{(a)} \quad f(x) = x^4 \cdot e^{-2x}$$

$f(x) = x^4 \cdot e^{-2x} = x^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n!} x^{n+4}\,, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\text{(b)} \quad f(x) = \frac{1}{1+a^2x^2}\,, \quad a > 0$$

$f(x) = \frac{1}{1+a^2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{2n} \cdot x^{2n}\,, \quad -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}$

$$\text{(c)} \quad f(x) = 2\sin x \sin 3x$$

Skorzystamy z wzoru trygonometrycznego i z rozwinięcia $\cos x$ w szereg Maclaurina:

$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \quad x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 2\sin x \sin 3x = \cos(-2x) - \cos 4x = \cos 2x - \cos 4x =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2^{2n} - 4^{2n}) \cdot x^{2n}\,, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\text{(d)} \quad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Skorzystamy z rozwinięcia: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\,, \quad x \in (-1, 1]$

Wtedy: $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,, \quad x \in [-1, 1)$

$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\,, \quad x \in (-1, 1)$

$$(e) \quad f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$$

$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{\frac{1}{3}}{1-x} - \frac{\frac{1}{3}}{1+2x} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n \cdot x^n =$
$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^n 2^n] \cdot x^n\,, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Zad. 2. Rozwinąć funkcję $f(x)$ w szereg Taylora wokół punktu x_0

$$(a) \quad f(x) = \ln x\,, \quad x_0 = 1$$

W rozwinięciu $\ln(1+x)$ w szereg Maclaurina robimy podstawienie $1+x=y$ i wracamy potem do oznaczenia zmiennej przez x:

$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n\,, \quad x \in (0,2]$

$$(b) \quad f(x) = \frac{1}{x}\,, \quad x_0 = 3$$

$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x-3+3} = \frac{1}{3\left(1+\frac{x-3}{3}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}\,,$
$\left|\ \frac{x-3}{3}\ \right| < 1 \iff |x-3| < 3$

Zad. 3. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje, a następnie wyznaczyć odpowiednią pochodną

$$(a) \quad f(x) = \frac{1-x}{1+x}\,, \quad f^{(28)}(0)\,, \quad f^{(29)}(0)$$

$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x-2x}{1+x} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}\,, \quad |x| < 1$

$f^{(28)}(0) = 28! \cdot a_{28} = 2 \cdot 28!$

$f^{(29)}(0) = 29! \cdot a_{29} = -2 \cdot 29!$

$$\text{(b)} \quad f(x) = \frac{2-x}{1+x^4}\,, \quad f^{(88)}(0)\,, \quad f^{(89)}(0)$$

$f(x) = \frac{2-x}{1+x^4} = \frac{2}{1+x^4} - \frac{x}{1+x^4} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1}\,, \quad |x| < 1$

$f^{(88)}(0) = 88! \cdot a_{88} = 2 \cdot 88!$

$f^{(89)}(0) = 89! \cdot a_{89} = -89!$