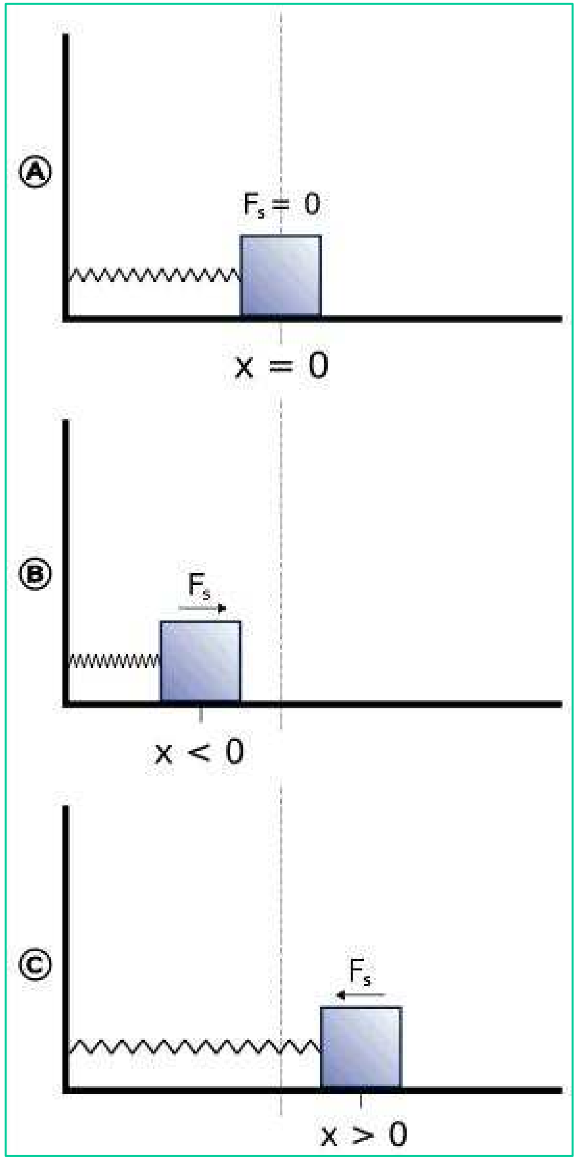
OSCYLATOR HARMONICZNY

- Drgania swobodne oscylatora harmonicznego
- Energia potencjalna sprężystości
- Drgania tłumione oscylatora harmonicznego
- Drgania wymuszone oscylatora harmonicznego
- Rezonans amplitudowy
- Rezonans mocy
- Dobroć układu drgającego

DRGANIA SWOBODNE OSCYLATORA HARMONICZNEGO



m - masa,
k - stała sprężystości sprężyny

Prawo Hooke'a $F(x) = -kx$

Równanie ruchu $ma = F(x) = -kx$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad :/m$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Rozwiązanie ogólne zależy od dwóch stałych *A, B*

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)}$$

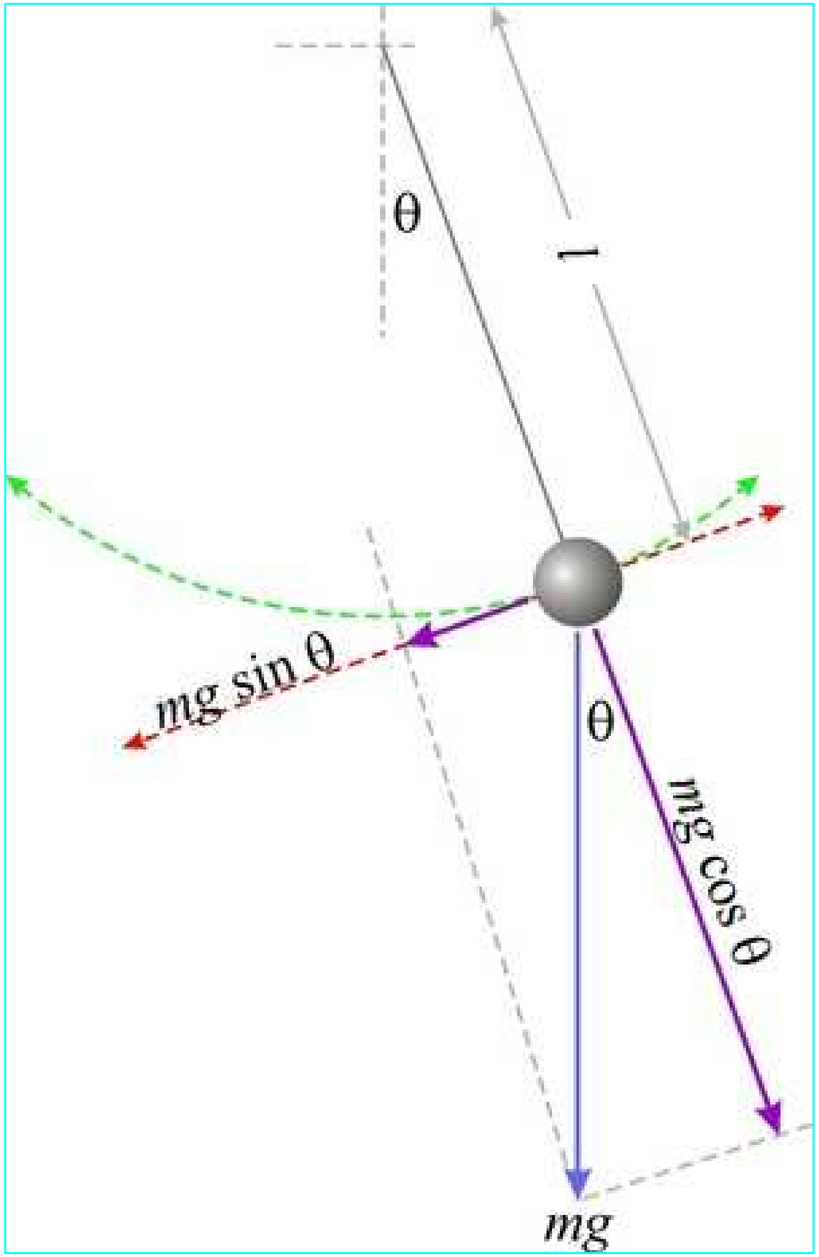
$$\Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A\cos(\omega_0 t) - \omega B\sin(\omega_0 t)$$

Stałe wyznacza się z dwóch warunków początkowych

Niech $x(0) = 0,\ v(0) = v_0$

$$\Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_0},\ B = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Przykład: wahadło matematyczne



$$\vec{P} = m\vec{g},$$

$$\vec{M}_P = \vec{l} \times \vec{P} \Rightarrow M_P = lmg\sin\theta$$

$$\vec{L} = \vec{l} \times \vec{p} = \vec{l} \times m\vec{v}$$

$$v = \omega l \Rightarrow L = ml^2\omega = ml^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_P \Rightarrow \frac{dL}{dt} = -lmg\sin\theta$$

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -lmg\sin\theta :/ ml^2$$

$$\sin\theta \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} \theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ENERGIA POTENCJALNA SPRĘŻYSTOŚCI

$$\text{Niech}\, x(0)=0,\; v(0)=v_0 \Rightarrow x(t)=\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t),\; v(t)=v_0\cos(\omega_0 t)$$

Energia kinetyczna $E_k = E_k(t) = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\omega_0 t$

Maksymalna wartosć energii kinetycznej odpowiada sytuacji, gdy oscylator przechodzi przez położenie równowagi *x*=0. Wówczas energia potencjalna E_p=0. Gdy wychylenie oscylatora jest maksymalne, $x=v_0/\omega_0$, energia kinetyczna E_k=0 (v=0) i całkowita energia jest zmagazynowana w postaci energii potencjalnej.

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\boxed{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

Kwadrat maksymalnego wychylenia (amplitudy drgań)

Stąd **energia potencjalna** $\boxed{E_p = E_p(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2}kx^2}$

$$E_p = E_p(t) = \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2\omega_0 t \Rightarrow \boxed{E_p + E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 = const}$$

Zauważmy że $\boxed{F = -kx = -\frac{dE_p}{dx}}$

DRGANIA TŁUMIONE OSCYLATORA HARMONICZNEGO

Siła tłumiąca $\vec{F}_t = -\gamma\vec{v} = -\gamma \frac{dx}{dt}$

Równanie ruchu $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma v \quad :/m$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad 2\alpha = \frac{\gamma}{m}, \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Przypadek słabego tłumienia $\alpha < \omega_0$

Drgania wokół położenia równowagi o malejącej wykładniczo amplitudzie, z częstoscią mniejszą od częstości drgań własnych ω_0

Przypadek silnego tłumienia $\alpha > \omega_0$

Wykładniczy powrót do położenia równowagi, brak drgań

Tłumienie krytyczne $\alpha = \omega_0$

Wolniejszy niż wykładniczy powrót do położenia równowagi, brak drgań.
Można pokazać, że rowziązanie ma postać (*A, B* - stałe wzynaczane z warunków początkowych)

$$x(t) = (A + Bt)\exp(-\alpha t)$$

Przypadek słabego tłumienia

Rozwiązania poszukujemy w postaci (*A,φ* - stałe zal. od warunków początkowych)

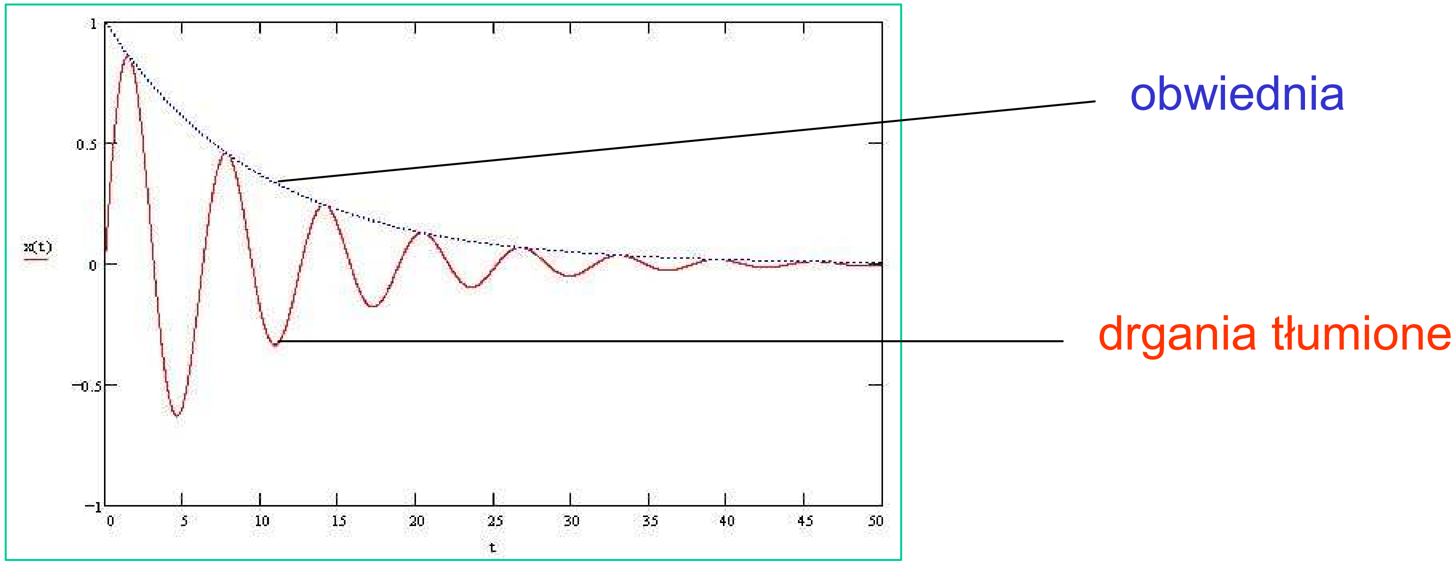
$$x(t) = A\exp\left(-\beta t\right)\sin\left(\omega_r t + \phi\right)$$

Wstawiając do równania i grupując wyrazy przy funkcjach sin, cos otrzymujemy

$$\left(\beta^2 - \omega_r^2 + \omega_0^2 - 2\alpha\beta\right)A\exp\left(-\beta t\right)\sin\left(\omega_r t + \phi\right) +$$
$$\left(-2\omega_r\beta + 2\omega_r\alpha\right)A\exp\left(-\beta t\right)\cos\left(\omega_r t + \phi\right) = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha, \quad \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0$$

$$\boxed{x(t) = A\exp(-\alpha t)\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\,t + \varphi\right)}$$



Przypadek silnego tłumienia

Rozwiązania poszukujemy w postaci $x(t) = A\exp(\lambda t)$

Wstawiając postulowaną postać rozwiązania do równania, otrzymujemy równanie na λ

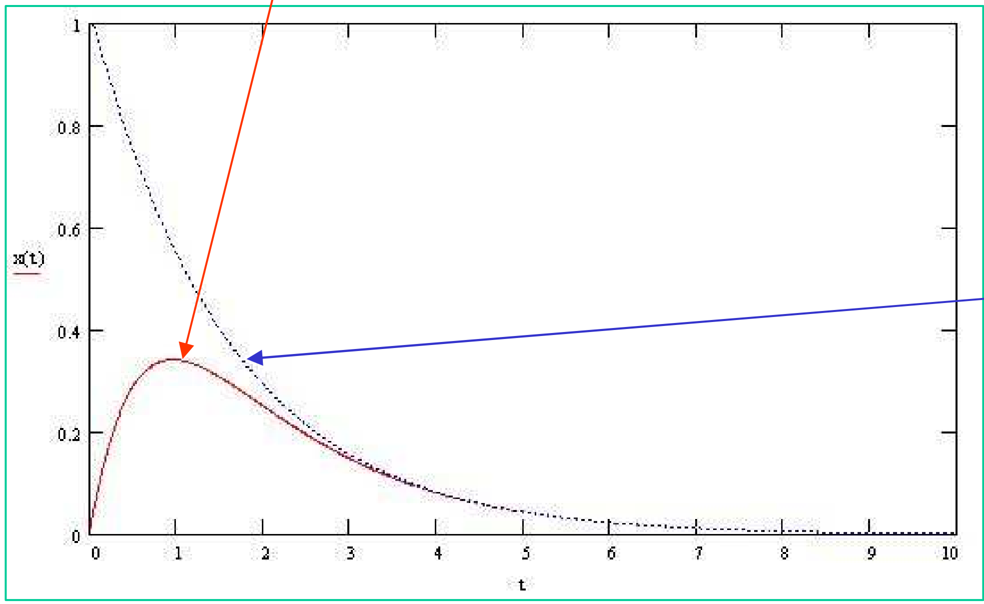
$$\lambda^2 A\exp(\lambda t) + 2\alpha\lambda A\exp(\lambda t) + \omega_0^2 A\exp(\lambda t) = 0 \quad :/A\exp(\lambda t)$$

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Rozwiązanie ogólne ma postać kombinacji liniowej rozwiązań z λ_1, λ_2

$$\boxed{x(t) = A\exp\left(\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right)t\right) + B\exp\left(\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right)t\right)}$$



A, *B* - stałe wzynaczane z warunków początkowych

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0, \ |\lambda_1| < |\lambda_2| \Rightarrow$$

$$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} A\exp(\lambda_1 t)$$

DRGANIA WYMUSZONE OSCYLATORA HARMONICZNEGO

Siła wymuszająca $F_{zewn}(t) = F_0 \sin \omega t$

Równanie ruchu

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma v + F_0 \sin \omega t \quad :/m$$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t, \quad 2\alpha = \frac{\gamma}{m}, \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, f_0 = \frac{F_0}{m}}$$

Stan ustalony oscylatora z wymuszeniem (rozwiązanie dla $t \to \infty$)

Rozwiązania poszukujemy w postaci $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Rozwiązanie ma postać drgań o częstości równej częstosci siły wymuszającej, amplitudzie *A*, przesunietych w fazie o ϕ względem siły wymuszającej.

Rozwiązanie nie zawiera zależności od warunków początkowych (w szczególności *A*, ϕ nie zależą od warunków początkowych, tylko od parametrów oscylatora). Dla małych *t* w układzie występują drgania nieustalone, których postać zależy od warunków początkowych. Amplituda drgań nieustalonych maleje wykładniczo z czasem i przy $t \to \infty$ pozostają tylko drgania ustalone, niezależne od warunków początkowych.

Wstawiając postulowaną postać rozwiązania do równania, otrzymujemy

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A\sin(\omega t + \varphi) + 2\alpha A\cos(\omega t + \varphi) = f_0 \sin \omega t$$

Korzystając ze wzorów na sin(α+β), cos(α+β) otrzymujemy

$$\underbrace{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi - 2\alpha\omega\sin\varphi\right]A}_{=f_0}\sin\omega t + \underbrace{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\varphi + 2\alpha\omega\cos\varphi\right]A}_{=0}\cos\omega t = f_0\sin\omega t$$

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

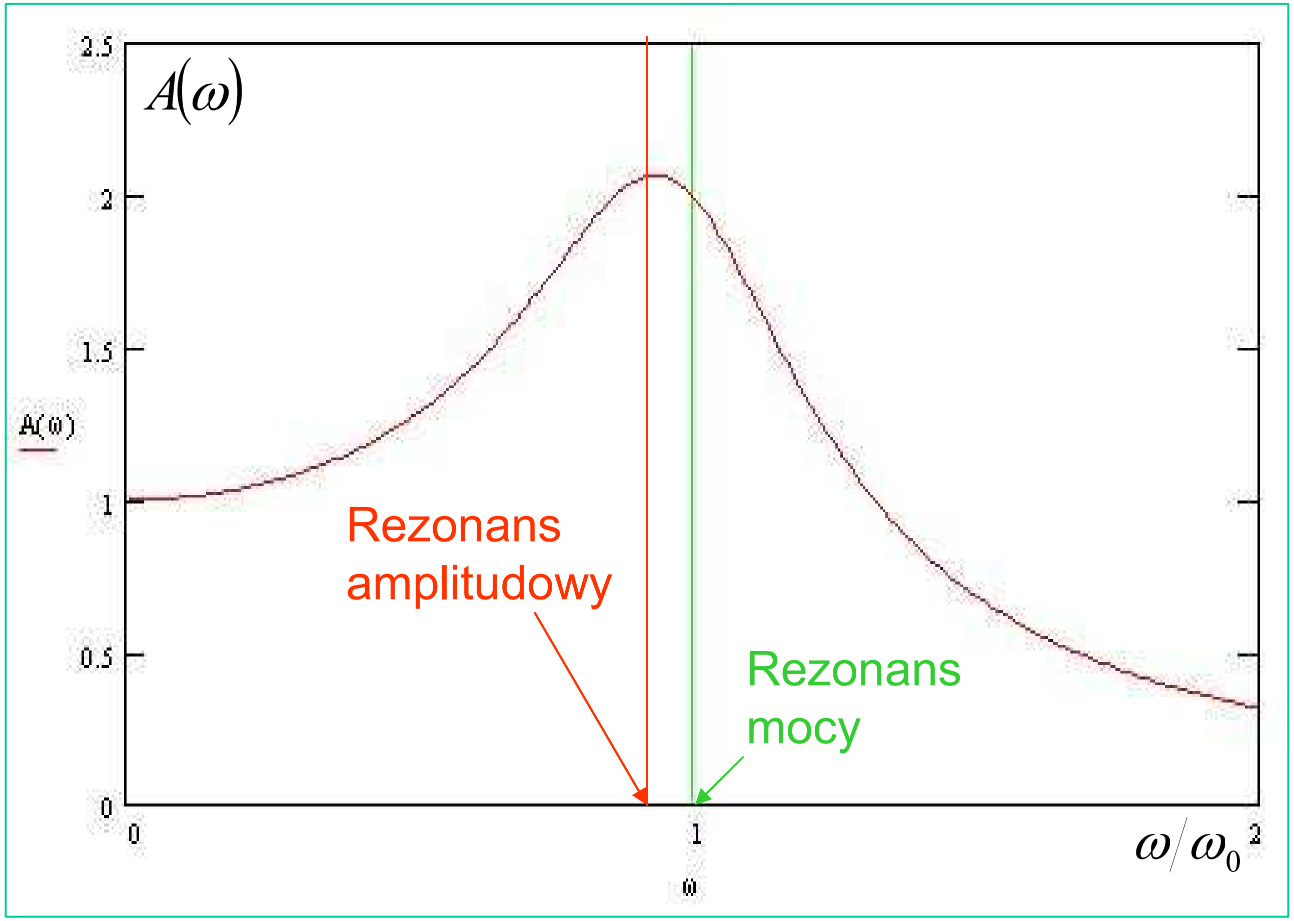
$$A = A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\alpha\omega)^2}}\sin\left(\omega t + \mathrm{arc}tg\frac{2\alpha}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)}$$

REZONANS AMPLITUDOWY

Amplituda drgań ustalonych jest maksymalna, gdy

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \boxed{\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} < \omega_0}$$



REZONANS MOCY

Moc absorbowana (chwilowa) $P = F_{zewn}(t)v(t) = F_0 \sin\omega t \; A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

Niech <*y*(t) > oznacza średnią wartość wielkości *y* w ciągu jednego okresu $T=2\pi/\omega$ siły wymuszającej

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t \equiv 1 \Rightarrow \langle \sin^2 \omega t \rangle + \langle \cos^2 \omega t \rangle = 1$$

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle \Rightarrow \langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin \omega t \rangle = \langle \sin 2\omega t \rangle = \langle \sin 3\omega t \rangle = \ldots = 0$$

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$$

$$\langle P \rangle = F_0 A \omega \langle \sin \omega t \cos(\omega t + \varphi) \rangle =$$

$$= F_0 A \omega \left[\cos \varphi \underbrace{\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle}_{= \frac{1}{2}\langle \sin 2\omega t \rangle = 0} - \sin \varphi \underbrace{\langle \sin^2 \omega t \rangle}_{= \frac{1}{2}} \right] = -\frac{1}{2} F_0 A \omega \sin \varphi$$

$$tg\varphi = -\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \sin\varphi = -\frac{2\alpha\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$

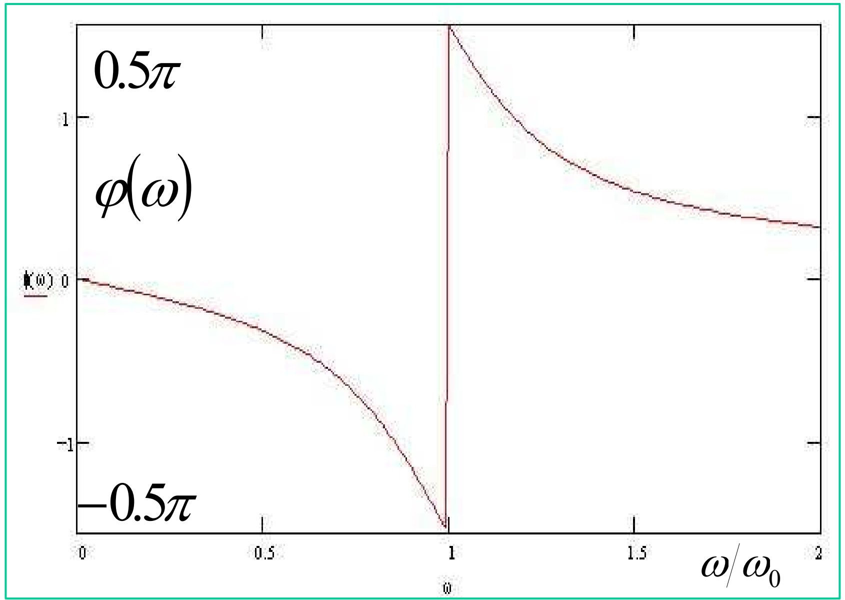
$$\langle P \rangle = \frac{\alpha m \omega^2 f_0^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\alpha\omega)^2} = \alpha m \omega^2 A^2$$

Moc absorbowana jest maksymalna, gdy

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\omega} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0}$$

W stanie ustalonym (drgania o stałej amplitudzie) moc absorbowana = mocy traconej na pracę przeciw sile tłumiącej

$$A_{rez} = A(\omega_0) = \frac{f_0}{2\alpha\omega_0}$$



Dla częstości rezonansowej drgania ustalone są przesunięte w fazie o $\pi/2$ (czyli o 1/4 okresu) względem siły wymuszającej. Jest to maksymalne możliwe przesuniecie w fazie.

$$x(t) = \frac{f_0}{2\alpha\omega_0} \cos(\omega t)$$

DOBROĆ UKŁADU DRGAJĄCEGO

Średnia energia zmagazynowana w układzie

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \Rightarrow \langle E_p \rangle = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2$$

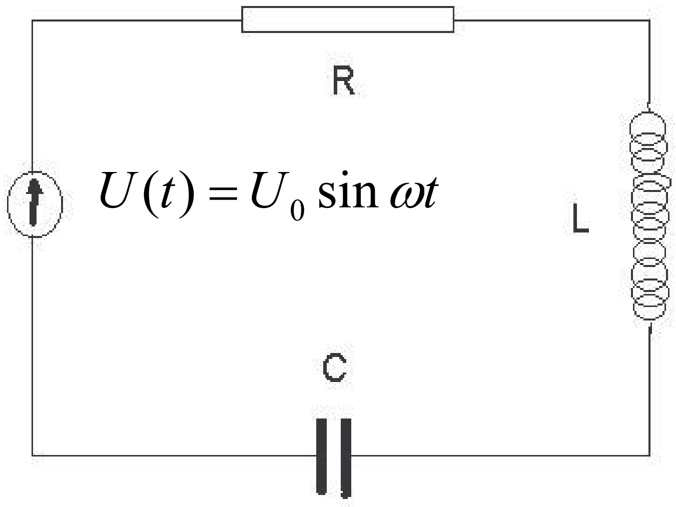
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \Rightarrow \langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2$$

$$\langle E \rangle = \langle E_p \rangle + \langle E_k \rangle = \frac{1}{4} m(\omega_0^2 + \omega^2) A^2$$

Dobroć układu drgającego: stosunek energii zgromadzonej w układzie do energii traconej w ciągu jednego okresu na pokonanie siły tłumienia (w stanie ustalonym równej energii dostarczanej przez siłę zewnętrzną) przy częstości pobudzenia równej częstości rezonansowej.
Im więcej energii można zmagazynować w stosunku do mocy strat, tym lepszy układ.

$$\boxed{Q = \left.\frac{2\pi \langle E \rangle}{\langle P \rangle T}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\alpha}}$$

Przykład: drgania w obwodzie RLC z wymuszeniem



$$U(t) = U_0 \sin \omega t$$

II prawo Kirchhoffa

$$U(t) + U_R + U_L + U_C = 0$$

$$U_R = -RI = -R\frac{dq}{dt}$$

$$U_L = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$U_C = -\frac{q}{C}$$

I - natężenie prądu,
q - ładunek na kondensatorze
Częstość drgań własnych obwodu RLC

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Dobroć $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_0}{L}\sin \omega t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t,$$

$$2\alpha = \frac{R}{L}, \ \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}, \ f_0 = \frac{U_0}{L}$$