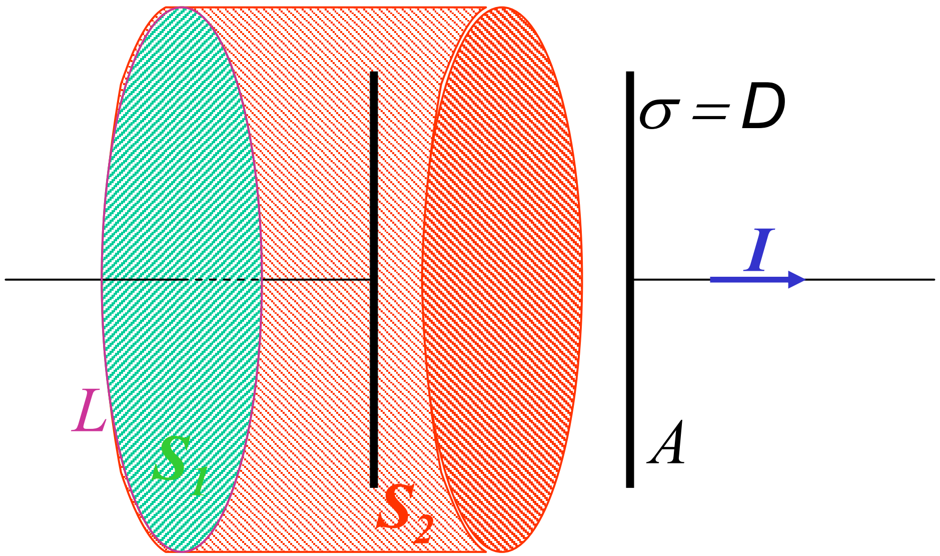
RÓWNANIA MAXWELLA

- Prąd przesunięcia
- Równania Maxwella
- Fale elektromagnetyczne
- Płaskie fale elektromagnetyczne
- Wektor Pointinga
- Warunki brzegowe dla równań Maxwella

PRĄD PRZESUNIĘCIA

Prawo Ampere'a jest niepełne, ponieważ pozostaje w sprzeczności z zasadą zachowania ładunku



Przykład 1

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I \neq 0$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \textit{sprzeczność}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(A\sigma)}{dt} = \frac{d}{dt}(AD)$$

Wprowadzamy pojęcie **prądu przesunięcia** $\Phi_D \equiv \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{I_p \equiv \frac{d\Phi_D}{dt}}$

Strumień wektora indukcji magnetycznej

Przykład 2

Dla dowolnego wektora ***w*** $\quad div(rot\vec{w}) = 0 \Rightarrow div(rot\vec{H}) = 0$

Z prawa Ampere'a $\quad rot\vec{H} = \vec{j} \Rightarrow div\vec{j} = 0$

Gęstość prądu ***j*** spełnia równanie ciągłości, gdzie ρ - gęstość ładunku $\quad div\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow div\vec{j} \neq 0$

W ogólności więc div ***j*** nie znika i znów pojawia się *sprzeczność*

Równanie ciągłości

Z prawa Gaussa $$\rho = div\vec{D} \Rightarrow div\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(div\vec{D}\right) = div\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \vec{j}_p = const, \quad \vec{j}_p \equiv \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ **gęstość pradu przesunięcia**

Suma prądu przewodzenia i prądu przesunięcia pozostaje stała

Ponadto prawo Ampere'a i prawo Faradaya są niesymetryczne

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Pole elektryczne jest indukowane przez zmienne pole magnetyczne

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$ Pole magnetyczne jest indukowane przez przepływ prądu elektrycznego, a powinno być również indukowane przez zmienne pole elektryczne

Wniosek: w prawie Ampere'a należy dokonać zamiany

$$\vec{j} \rightarrow \vec{j} + \vec{j}_p = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

RÓWNANIA MAXWELLA

Równania Maxwella opisują całą elektrodynamikę klasyczną. Jest to pierwsza w fizyce kompletna teoria pola i pierwsza unifikacja oddziaływań (elektrycznych i magnetycznych)

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q \Leftrightarrow \nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

Prawo Gaussa

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Prawo Faradaya

$$\oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \frac{\partial\Phi_D}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Prawo Ampere'a uwzględniające prąd przesunięcia

Równania materiałowe

$$\vec{D} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

FALE ELEKTROMAGNETYCZNE

Rozpatrujemy przestrzeń bez ładunków, prądów, materiałów magnetycznych, dielektryków itp.

Równania Maxwella dla próżni

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla\cdot\vec{E}=0 & \nabla\times\vec{E}=-\mu_r\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\Rightarrow\nabla\times\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\mu_r\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \\ \nabla\cdot\vec{H}=0 & \nabla\times\vec{H}=\varepsilon_r\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\dfrac{1}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\nabla\times\vec{H} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=-\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\cdot\underbrace{\left(\nabla\cdot\vec{H}\right)}_{=0}-\underbrace{\left(\nabla\cdot\nabla\right)}_{=\nabla^2}\vec{H}=-\nabla^2\vec{H}$$

$$\Rightarrow-\nabla^2\vec{H}=-\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

(oraz analogiczne równanie dla wektora ***E***)

Równanie falowe dla fal elektroma-gnetycznych

$$\boxed{\Rightarrow\begin{cases}-\nabla^2\vec{H}+\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\\ -\nabla^2\vec{E}+\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\end{cases}\qquad v=\frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}}$$

Z równań Maxwella wynika równanie falowe dla fal elektromagnetycznych

PŁASKIE FALE ELEKTROMAGNETYCZNE

Rozpatrujemy płaskie fale elektromagnetyczne, rozchodzące się wzdłuż osi *Ox*

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} = \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}\\ \vec{H} = \vec{H}(x,t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - kx)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = 0$$

$$div\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad div\vec{H} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

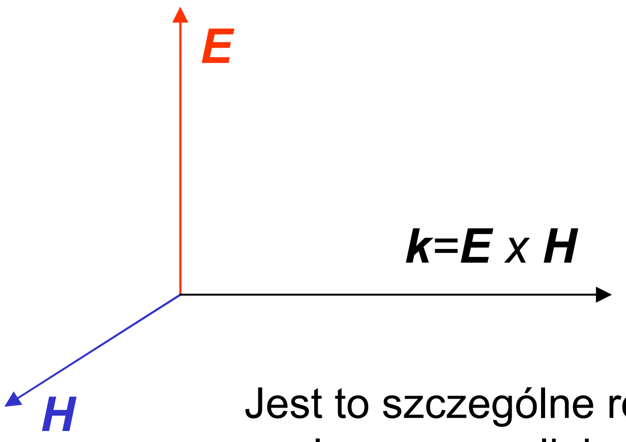
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{e}_x \underbrace{\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)}_{=0} + \vec{e}_y \left(\underbrace{\frac{\partial H_x}{\partial z}}_{=0} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_{\cancel{x}z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial H_x}{\partial y}}_{=0}\right) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow 0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow 0 = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_r \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_r \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \left(\wedge \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0\right) \Rightarrow E_x = const = 0 \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \left(\wedge \dfrac{\partial H_x}{\partial x} = 0\right) \Rightarrow H_x = const = 0 \end{cases}$$

Wniosek: płaskie fale elektromagnetyczne są falami poprzecznymi



Przyjmijmy $H_y = 0$. Wówczas $$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial t} = const = 0$$

otrzymujemy rozwiązanie w postaci $$\boxed{\begin{aligned} H_z &= H_z(x,t) = H_{0,z} e^{i(\omega t - kx)} \\ E_y &= E_y(x,t) = E_{0,y} e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned}}$$

Jest to szczególne rozwiązanie układu równań falowych, opisujące falę płaską, spolaryzowaną liniowo, rozprzestrzeniającą się wzdłuż osi *Ox* z prędkością

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}, \quad \text{w próżni} \quad v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \ {}^{m}\!/\!_{s}$$

Po wstawieniu powyższych rozwiązań do równania $$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

otrzymujemy $$ikH_z = i\omega \varepsilon_r \varepsilon_0 E_y$$

$$\Rightarrow \frac{|E_y|}{|H_z|} = \frac{k}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{T}{\lambda} \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{1}{v} \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}}$$

$$\boxed{Z \equiv \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}}}$$ **Impedancja falowa ośrodka** (zależna tylko od właściwości ośrodka)

WEKTOR POINTINGA

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{H} &= \vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \cdot/-\vec{E}\\ \nabla\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \cdot/\vec{H}\end{aligned}\right\}+ \quad \Rightarrow \vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=-\vec{j}\cdot\vec{E}$$

Korzystamy z tożsamości

$$\left.\begin{aligned}&\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\\ &\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{D}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0E^2}{2}\right)\\ &\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H}\cdot\vec{B}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_r\mu_0}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}&\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)+\vec{j}\cdot\vec{E}=\\ &=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_r\mu_0}\right)\end{aligned}$$

Z prawa Ohma $\vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{E}_s\right) \quad \cdot/\vec{j}\Rightarrow\vec{j}\cdot\vec{E}=\frac{j^2}{\sigma}-\vec{j}\cdot\vec{E}_s$

Pole fali elektromagnetycznej — Pole wynikające z istnienia zewnętrznych SEM

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)+\frac{j^2}{\sigma}=\vec{j}\cdot\vec{E}_s-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_r\mu_0}\right) \quad \Big/\iiint_V dV$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) dV + \iiint_V \frac{j^2}{\sigma}\, dV = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E}_s dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_r \mu_0} \right) dV$$

Moc cieplna wydzielana w obszarze *V*

Moc dostarczana do obszaru *V* przez zewnętrzne SEM

Szybkość ubywania energii pola elektromagnetycznego z obszaru *V*

Wektor Pointinga

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$$

Z twierdzenia Gaussa $\iiint_V \nabla \cdot \vec{S}\, dV = \iiint_V div\vec{S}\, dV = \oiint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$

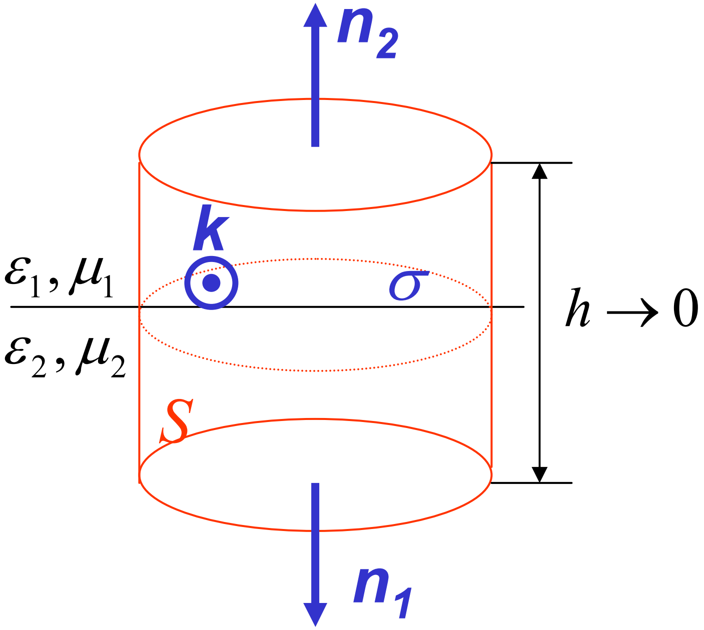
Strumień energii uchodzący z obszaru *V* przez powierzchnię *A*, ograniczającą obszar *V.*

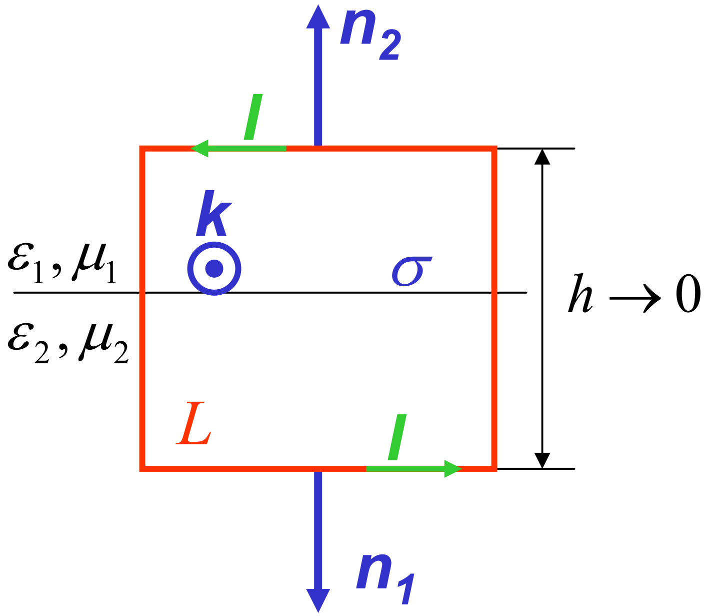
Wektor Pointinga = **strumień energii** (ilość energii na jednostkę powierzchni w jednostce czasu, [J/m^{2}s]) **fali elektromagnetycznej**

Dla fali płaskiej $\vec{S} \parallel \vec{k}$

POLE ELEKTROMAGNETYCZNE NA GRANICY DWÓCH OSRODKÓW

Rozważamy własności pola elektromagnetycznego na granicy dwóch osrodków nieprzewodzących.
Na powierzchni może znajdować się ładunek o gęstości σ i płynąć prąd o gęstości liniowej ***k*** [A/m].





$$\oint\!\!\!\!\iint_S \vec B \cdot d\vec S = 0 \qquad \oint\!\!\!\!\iint_S \vec D \cdot d\vec S = q \qquad \oint\!\!\!\!\iint_{\cancel{S}\,L} \vec H \cdot d\vec l = I \qquad \oint\!\!\!\!\iint_{\cancel{S}\,L} \vec E \cdot d\vec l = 0$$

$$\vec B_1 \cdot \vec n_1 + \vec B_2 \cdot \vec n_2 = 0 \qquad \vec D_1 \cdot \vec n_1 + \vec D_2 \cdot \vec n_2 = \sigma \qquad \vec n_1 \times \vec H_1 + \vec n_2 \times \vec H_2 = \vec k \qquad \vec n_1 \times \vec E_1 + \vec n_2 \times \vec E_2 = 0$$

$$\vec n_1 \cdot \left(\vec B_1 - \vec B_2\right) = 0 \qquad \vec n_1 \cdot \left(\vec D_1 - \vec D_2\right) = \sigma \qquad \vec n_1 \times \left(\vec H_1 - \vec H_2\right) = \vec k \qquad \vec n_1 \times \left(\vec E_1 - \vec E_2\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} B_{1,n} = B_{2,n} \\ D_{1,n} - D_{2,n} = \sigma \end{array}}$$

ciągłość

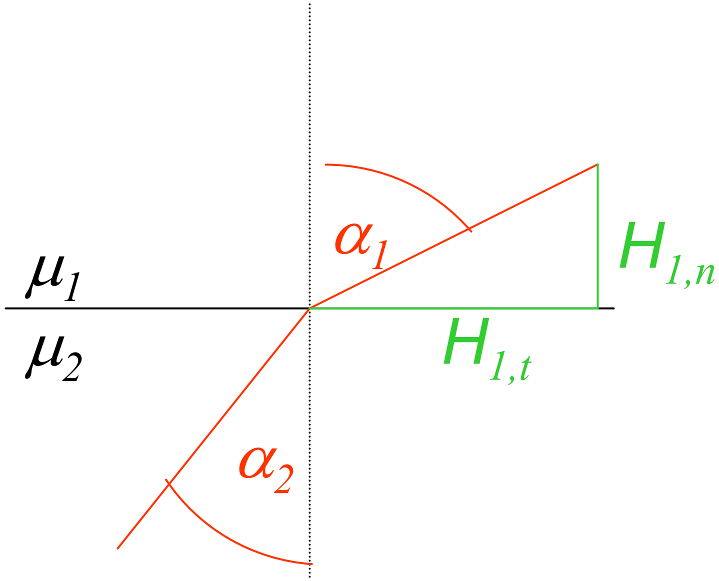
skok

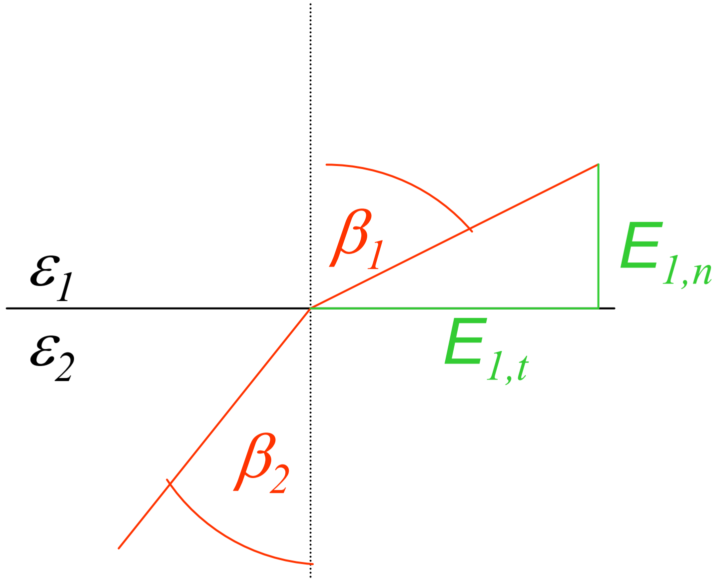
$$\boxed{\begin{array}{l} H_{1,t} - H_{2,t} = k \\ E_{1,t} = E_{2,t} \end{array}}$$

skok

ciągłość

LINIE SIŁ POLA ELEKTRYCZNEGO I MAGNETYCZNEGO





$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}\frac{H_{2t}}{H_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}, \quad \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}\frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$