Algebra liniowa

Z_9

1. Wyznaczyć jądro, obraz, podać ich bazy dla podanego przekształcenia liniowego. Czy przekształcenie jest nieosobliwe, czy jest *na*?

   (a) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\phi((x, y, z)) = (2x - y - z, x + y + 4z, 2x + y + 5z, -x - z)$;

   (b) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\phi((x, y, z, t)) = (x + 2z + t, -2x + y - 3z - 5t, x - y + z + 4t)$.

2. Przedyskutować rozwiązalność układu w zależności od parametru a. Podać rozwiązanie w przypadku, gdy rząd macierzy rozszerzonej układu jest najmniejszy. Podać rozwiązanie szczególne, podać układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego.

$$\text{a)} \begin{cases} ax - y + z = 1 \\ x - ay + z = 1 \\ 3x - 3y + 2z = 2a \end{cases}, \text{b)} \begin{cases} ax + y + az = 1 \\ x + y + z = 1 \\ (2-a)x + (2-a)y + z = 1 \\ ax + y + az = a^2 \end{cases}, \text{c)} \begin{cases} 6x + 2y + (a+4)z - 2t = a \\ 3x + y + 3z - t = a - 1 \\ 3x + ay + 2z - t = a - 1 \end{cases}.$$

3. Rozwiązać układ równań wykorzystując jedną z poznanych metod (znajdując rozwiązanie szczególne i rozwiązując układ jednorodny lub metodą eliminacji Gaussa lub metodą wyznacznikową):

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 9x_4 + x_5 = -1 \end{cases}, \quad \text{d)} \begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 1 \\ 2x_1 - 25x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 + 5x_6 = 1 \\ -15x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 3x_6 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 8 \end{cases}$$

4. Rozwiązać układ równań w zależności od parametru a:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \end{cases}$$