Wykład drugi

Ciągi liczbowe

Def. 1. *Ciągiem liczbowym (nieskończonym)* nazywamy każdą funkcję a określoną na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ o wartościach rzeczywistych. Wartość funkcji $a(n)$ oznacza się przez a_n i nazywa n - tym wyrazem ciągu (a_n).

Ciąg (a_n) jest

1. rosnący, jeśli $a_n < a_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej n;
2. niemalejący, jeśli $a_n \leqslant a_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej n;
3. malejący, jeśli $a_n > a_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej n;
4. nierosnący, jeśli $a_n \geqslant a_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej n.

Ciąg (a_n) jest

1. ograniczony z góry, jeśli $\exists M \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}\, [a_n \leqslant M]$;
2. ograniczony z dołu, jeśli $\exists m \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}\, [a_n \geqslant m]$;
3. ograniczony, jeśli jest ograniczony z dołu i z góry.

Def. 2. Liczba $a \in \mathbb{R}$ jest *granicą ciągu* liczbowego (a_n) (ozn, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), jeżeli

$$\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0\, |a_n - a| < \epsilon$$

Ciąg jest zbieżny, jeśli posiada granicę liczbową. Ciąg jest rozbieżny, jeśli zachodzi jeden z warunków:

1. nie posiada granicy;
2. $\forall M \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0\, a_n > M$ - jest rozbieżny do $+\infty$ (ozn. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$);
3. $\forall m \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0\, a_n < m$ - jest rozbieżny do $-\infty$ (ozn. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Twierdzenia o ciągach

1. Jeżeli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.
2. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. (implikacja w drugą stronę jest prawdziwa tylko dla $a = 0$)
3. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ oraz istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leqslant b_n$ dla $n \geqslant n_0$, to $a \leqslant b$.
4. (tw. o 3 ciągach) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ oraz istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie,że $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla $n \geqslant n_0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.
5. Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

6. (tw. o działaniach arytmetycznych na granicach) Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to ciągi $(a_n + b_n)\,,\,(a_n - b_n)\,,\,(a_n b_n)\,,\,\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\;\; b_n \neq 0$ są zbieżne i
   (a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
   (b) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$
   (c) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
   (d) jeśli $b \neq 0$, to $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

Znane granice

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, dla $a > 0$;
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
3. $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad |a| < 1 \\ 1 & \text{gdy} \quad a = 1 \\ +\infty & \text{gdy} \quad a > 1 \\ \text{nie istnieje} & \text{gdy} \quad a \leqslant -1 \end{cases}$
4. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

Oznaczenia

$O = (x_0 - \delta\,;\,x_0 + \delta)$ – otoczenie punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu δ

$S = (x_0 - \delta\,;\,x_0) \cup (x_0\,;\,x_0 + \delta)$ – sąsiedztwo punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu δ

$(x_0 - \delta\,;\,x_0)$ – sąsiedztwo lewostronne punktu $x_0 \in \mathbb{R}$

$(x_0\,;\,x_0 + \delta)$ –sąsiedztwo prawostronne punktu $x_0 \in \mathbb{R}$

δ - dowolnie mała liczba dodatnia.

Granica funkcji

Zał. Funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie $S = (x_0 - \delta\,;\,x_0) \cup (x_0\,;\,x_0 + \delta)$.

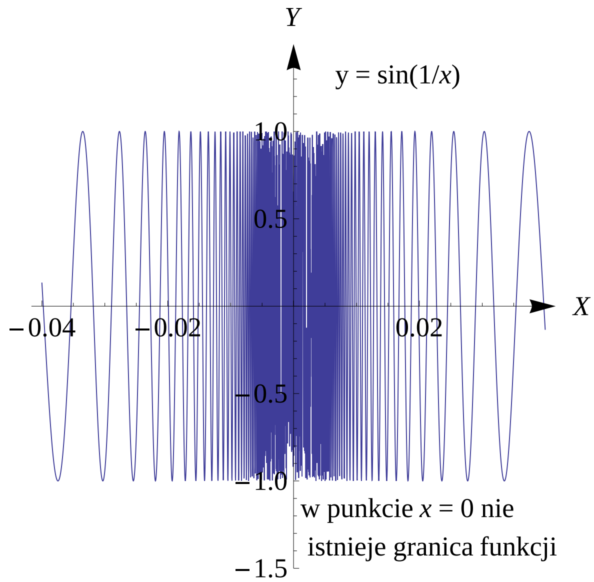
Def. Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 (ozn. $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$), jeśli spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków:

$$(1)\ \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0\,[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon] \text{ - def.Cauchy'go}$$
$$(2)\ \forall (x_n) \subset S\,[(x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to g)] \text{ – def.Heinego}$$

Uwaga 1. Jeżeli istnieje ciąg (x_n) taki, że $(x_n \to x_0) \wedge (f(x_n) \to g_1) \wedge g_1 \neq g$, to $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq g$.

Jeżeli istnieją dwa różne ciągi $(x_n^{'})$, $(x_n^{"})$ takie, że

$$(x_n^{'} \to x_0) \wedge (f(x_n^{'}) \to g_1) \text{ i } (x_n^{"} \to x_0) \wedge (f(x_n^{"}) \to g_2) \text{ oraz } g_1 \neq g_2,$$



to $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nie istnieje.

Tw.1 (działaniach arytmetycznych na granicach). Jeżeli funkcje f_1,f_2 są określone na pewnym sąsiedztwie punktu x_0 oraz $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = g_1$ i $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = g_2$, to

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x) = g_1 + g_2$,
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x) - f_2(x) = g_1 - g_2$,
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = g_1 \cdot g_2$,
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{g_1}{g_2}$, jeśli $g_2 \neq 0$.

Tw.2 (O trzech funkcjach) Jeżeli w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0 zachodzą nierówności $f(x) \leqslant h(x) \leqslant k(x)$ dla każdego $x \in S$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} k(x) = g$, to $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = g$.

Tw.3 (O granicy funkcji złożonej) Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, $f(x) \neq g$ dla $x \neq x_0$ oraz $\lim\limits_{y \to g} h(y) = p$, to $\lim\limits_{x \to x_0} h(f(x)) = p$.

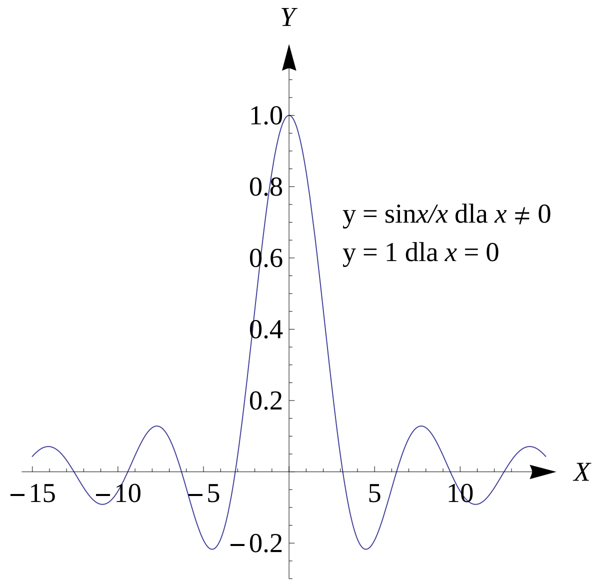
Def. Liczba g jest granicą lewostronną (odp.granicą prawostronną) funkcji f w punkcie x_0, (ozn. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$, odp. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$) jeśli

$$\forall (x_n) \subset S\, [(x_n < x_0 \wedge x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to g)]$$
$$(\text{odp.} \forall (x_n) \subset S\, [(x_n > x_0 \wedge x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to g)])$$

Tw.4 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$.

Uwaga 2. Twierdzenia (1)–(3) pozostają prawdziwe dla granic jednostronnych.

Ważne granice. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1\right)$.



Granice niewłaściwe

Zał. Funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie $S = (x_0 - \delta\,;\, x_0) \cup (x_0\,;\, x_0 + \delta)$.
Def. Funkcja f posiada w punkcie x_0 granicę niewłaściwą $+\infty$ (odp.$-\infty$) (ozn. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, odp. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$), jeśli

$$\forall (x_n) \subset S\, [(x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to +\infty)]$$
$$\text{odp.} \forall (x_n) \subset S\, [(x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to -\infty)]$$

Granice w nieskończoności

Def. Funkcja f posiada w $+\infty$ granicę g, jeśli

$$\forall (x_n) \subset D_f\, [(x_n \to +\infty) \Rightarrow (f(x_n) \to g)].\ (\text{ozn.} \lim_{x \to +\infty} f(x) = g)$$

Podobnie definiuje się granice w $-\infty$ (właściwe i niewłaściwe).

Uwaga 3. Twierdzenia (1)–(3) pozostają prawdziwe dla granic w nieskończoności.

Ważne granice. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$.

Symbole nieoznaczone

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ \infty - \infty\ ,\ 0 \cdot \infty\ ,\ 0^0\ ,\ \infty^0\ ,\ 1^\infty$$