ANA1

Z_{11}

1. Zbadaj istnienie granicy podwójnej $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, jeśli:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+2y^2}, \quad (x_0,y_0)=(0,0),$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x+y-2}{x^2+y^2-2}, \quad (x_0,y_0)=(1,1),$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, \quad (x_0,y_0)=(0,0),$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x-xy}{2x^2+(y-1)^2}, \quad (x_0,y_0)=(0,1).$

2. Oblicz, jeśli istnieją, pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, jeśli:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(3x^2+y^2)}{x^3}, & \text{gdy} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad x = 0, \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3-y^3},$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y}{x^2+y^2}, & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x,y)$ w punkcie (x_0,y_0) oraz istnienie pochodnych cząstkowych w tym punkcie, jeśli:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad (x_0,y_0)=(0,0),$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}, \quad (x_0,y_0)=(0,0).$

4. Zbadaj istnienie i ciągłość pochodnej cząstkowej $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ w punkcie $(0,0)$, jeśli

   $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$

5. Wyznacz, o ile istnieją, ekstrema właściwe funkcji $f(x,y)$, jeśli:

   (a) $f(x,y) = \ln(2xy) - 2x^2 - y^2,$

   (b) $f(x,y) = x + 8y + \dfrac{1}{xy},$

   (c) $f(x,y) = (2x+y^2)e^x,$

   (d) $f(x,y) = 2x^2 - x^3y^2 - \ln x,$

6. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x,y) = xy^2$.