APROKSYMACJA

$f(x)$ - funkcja aproksymowana (oryginalna)

$F(x)$ - funkcja aproksymująca

Niech:
X - przestrzeń funkcyjna liniowa, $f \in X$,
X_n - $(n+1)$-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni X, z bazą (funkcjami bazowymi) $\phi_0(x), ..., \phi_n(x)$, tzn.

$$F(x) \in X_n \iff F(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + ... + a_n\phi_n(x)$$

Zadanie aproksymacji: znaleźć funkcję $F^* \in X_n$ najbliższą funkcji f,

np. w sensie normy $\|\cdot\|$: $\quad \forall F \in X_n \quad \|f - F^*\| \leqslant \|f - F\|$

tj. znaleźć współczynniki $a_0, ..., a_n$ funkcji F minimalizujące normę $\|f - F\|$.

Typowe przykłady rodzajów aproksymacji:

- **aproksymacja jednostajna:**

$$\|F - f\| = \sup_{x \in [a,b]} |F(x) - f(x)| \qquad \text{(norma Czebyszewa)}$$

aproksymacja średniokwadratowa ciągła:

$$\|F - f\| = \sqrt{\int_a^b p(x)\left[F(x) - f(x)\right]^2 dx} \qquad \left(\text{norma } L_p^2\,[a,b]\right)$$

gdzie $p(x) > 0$ – funkcja wagowa

- **aproksymacja średniokwadratowa dyskretna** (metoda najmniejszych kwadratów):

$$\|F-f\|=\sqrt{\sum_{j=0}^{N} p\left(x_j\right)\left[F\left(x_j\right)-f\left(x_j\right)\right]^2} \qquad (\text{norma } l^2_{p,N})$$

stosowana jeśli znamy wartości funkcji $f(x)$ jedynie w zbiorze $N+1$ punktów.

Często stosowanymi funkcjami aproksymującymi są wielomiany $W_n(x)$.

Przy aproksymacji średniokwadratowej dyskretnej wielomianem jego stopień jest z reguły znacznie mniejszy od ilości punktów, na podstawie których dokonujemy aproksymacji, tzn.

$$N \gg n$$

APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA DYSKRETNA

$f(x)$ przyjmuje na pewnym zbiorze punktów $x_0, x_1, ..., x_N$ $(x_i \neq x_j)$ znane wartości $y_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, 2, ..., N$.

$\phi_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n$ – układ funkcji bazowych podprzestrzeni $X_n \subseteq X$, tzn.

$$\forall F \in X_n \quad F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x)$$

Zadanie aproksymacji:
wyznaczyć wartości współczynników $a_0, a_1, ..., a_n$ funkcji aproksymującej $F(x)$ tak, aby zminimalizować błąd średniokwadratowy:

$$H(a_0, ..., a_n) \triangleq \sum_{j=0}^{N} \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x_j) \right]^2 .$$

(gdzie przyjęto, dla uproszczenia, $p(x) \equiv 1$).

APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA DYSKRETNA 2

$$H(a_0, ..., a_n) \triangleq \sum_{j=0}^{N} \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x_j) \right]^2$$

Zdefiniujmy macierz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \cdots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_0(x_N) & \phi_1(x_N) & \cdots & \phi_n(x_N) \end{bmatrix}$$

i wektory

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [a_0 \ a_1 \cdots a_n]^T \\ \mathbf{y} &= [y_0 \ y_1 \cdots y_N]^T, \quad y_j = f(x_j), \ \ j = 0, 1, ..., N. \end{aligned}$$

Wówczas funkcję $H(\mathbf{a})$ możemy zapisać w postaci

$$H(\mathbf{a}) = (\| \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{a} \|_2)^2.$$

Zadanie aproksymacji średniokwadratowej jest więc zadaniem LZNK.

Minimalizujemy funkcję:

$$H(a_0, ..., a_n) \triangleq \sum_{j=0}^{N} \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x_j) \right]^2 .$$

W tym celu wyznaczamy współczynniki $a_0, a_1, ..., a_n$ z warunków koniecznych minimum (tu również i dostatecznych, gdyż funkcja jest wypukła):

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \sum_{j=0}^{N} \left[f\left(x_j\right) - \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i\left(x_j\right) \right] \cdot \phi_k\left(x_j\right) = 0, \qquad k = 0, ..., n,$$

Równania te nazywane są układem równań normalnych.

APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA DYSKRETNA – UKŁAD RÓWNAŃ NORMALNYCH

$$a_0 \sum_{j=0}^{N} \phi_0(x_j) \cdot \phi_0(x_j) + a_1 \sum_{j=0}^{N} \phi_1(x_j) \cdot \phi_0(x_j) + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{N} \phi_n(x_j) \cdot \phi_0(x_j) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j) \cdot \phi_0(x_j)$$

$$a_0 \sum_{j=0}^{N} \phi_0(x_j) \cdot \phi_1(x_j) + a_1 \sum_{j=0}^{N} \phi_1(x_j) \cdot \phi_1(x_j) + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{N} \phi_n(x_j) \cdot \phi_1(x_j) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j) \cdot \phi_1(x_j)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 \sum_{j=0}^{N} \phi_0(x_j) \cdot \phi_n(x_j) + a_1 \sum_{j=0}^{N} \phi_1(x_j) \cdot \phi_n(x_j) + \cdots + a_n \sum_{j=0}^{N} \phi_n(x_j) \cdot \phi_n(x_j) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j) \cdot \phi_n(x_j)$$

APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA DYSKRETNA – UKŁAD RÓWNAŃ NORMALNYCH 2

Zdefiniujmy **iloczyn skalarny** w przestrzeni $l^2_{1,N}$:

$$\langle \phi_i, \phi_k \rangle \triangleq \sum_{j=0}^{N} \phi_i(x_j)\, \phi_k(x_j)$$

Układ równań normalnych można teraz zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \phi_0, \phi_n \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_0 \rangle \\ \langle f, \phi_1 \rangle \\ \cdots \\ \langle f, \phi_n \rangle \end{bmatrix}$$

Wykorzystując definicję macierzy **A**, możemy układ ten zapisać w postaci

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\, a = \mathbf{A}^T y$$

Uwaga. **A** jest pełnego rzędu, stąd $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ nieosobliwa. Ale uwarunkowanie $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ jest kwadratem uwarunkowania $\mathbf{A}$ – układ równań normalnych może być źle uwarunkowany (patrz: metody rozwiązywania LZNK).

APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA DYSKRETNA – Przykład 1

Zadanie aproksymacji w dwuwymiarowej ($n = 1$) bazie funkcyjnej:

$$\phi_0(x) = x, \quad \phi_1(x) = e^x$$

dla zestawu danych

x_j	-2	-1	0	1	2
y_j	-3	-1.2	0.2	3	7.5

Mamy 5 punktów, tzn. N=4. Na początku wyliczymy elementy macierzy Grama $\mathbf{G} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ i wektora prawej strony układu równań normalnych:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_0, \phi_0 \rangle &= \textstyle\sum_{j=0}^{4} x_j x_j = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10 \\
\langle \phi_0, \phi_1 \rangle &= \textstyle\sum_{j=0}^{4} x_j e^{x_j} = -2e^{-2} - e^{-1} + 0 + e^1 + 2e^2 = 16.8578 \\
\langle \phi_1, \phi_0 \rangle &= \langle \phi_0, \phi_1 \rangle = 16.8578 \\
\langle \phi_1, \phi_1 \rangle &= \textstyle\sum_{j=0}^{4} e^{x_j} e^{x_j} = (e^{-2})^2 + (e^{-1})^2 + (e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2 = 63.1409 \\
\langle \phi_0, f \rangle &= \textstyle\sum_{j=0}^{4} x_j y_j = 6 + 1.2 + 0 + 3 + 15 = 25.2 \\
\langle \phi_1, f \rangle &= \textstyle\sum_{j=0}^{4} e^{x_j} y_j = -3e^{-2} - 1.2e^{-1} + 0.2e^0 + 3e^1 + 7.5e^2 = 62.9253
\end{aligned}$$

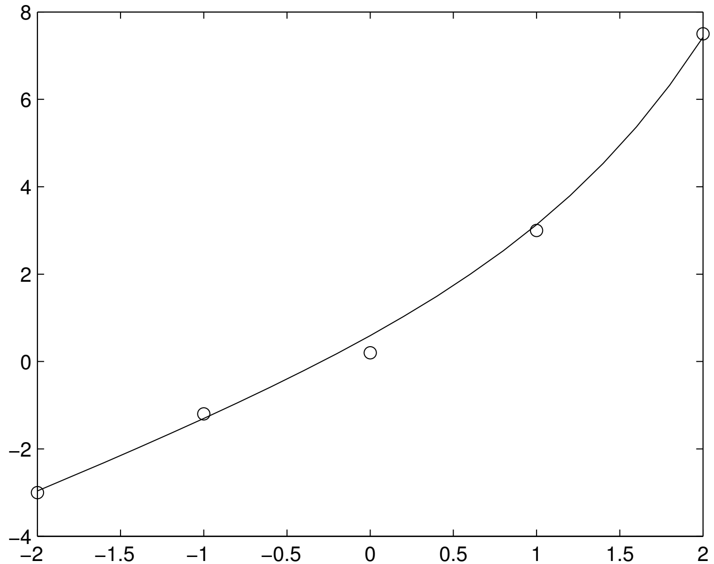
APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA DYSKRETNA – Przykład 1 c.d.

Układ równań normalnych:

$$\begin{bmatrix} 10 & 16.8578 \\ 16.8578 & 63.1409 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.2 \\ 62.9253 \end{bmatrix},$$

rozwiązanie: $[a_0 \;\; a_1]^T = [1.5213 \;\; 0.5925]^T$.

Stąd funkcja aproksymująca: $F(x) = 1.5213x + 0.5925e^x$



APROKSYMACJA WIELOMIANAMI W POSTACI NATURALNEJ

Funkcje bazowe w postaci wielomianów naturalnych:

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x, \quad \cdots, \quad \phi_n(x) = x^n$$

$$\text{tzn.} \quad F(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

Wprowadzając oznaczenia pomocnicze:

$$g_{ik} = \langle \phi_i, \phi_k \rangle = \sum_{j=0}^{N} (x_j)^i (x_j)^k = \sum_{j=0}^{N} (x_j)^{i+k},$$

$$\varrho_k = \langle f, \phi_k \rangle = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)(x_j)^k$$

uzyskujemy układ równań normalnych w postaci:

$$\begin{array}{l} a_0 g_{00} + a_1 g_{10} + ... + a_n g_{n0} = \varrho_0 \\ a_0 g_{01} + a_1 g_{11} + ... + a_n g_{n1} = \varrho_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 g_{0n} + a_1 g_{1n} + ... + a_n g_{nn} = \varrho_n \end{array} \quad \equiv \quad \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \varrho$$

APROKSYMACJA WIELOMIANAMI W POSTACI NATURALNEJ – Przykład 2

Dla zestawu danych

x_j	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_j	1.15	0.7	0.5	0.4	0.25	0.2

znaleźć wielomian aproksymujący stopnia: a) pierwszego, b) drugiego. Wyznaczyć błąd aproksymacji, w sensie normy maksimum.

a) Po wyliczeniu współczynników g_{ij} i ρ_i dostajemy:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ 0.98 \end{bmatrix}$$

skąd $w_1(x) = a_0 + a_1 x = 0.976 - 0.886x$

b) Po wyliczeniu współczynników g_{ij} i ρ_i dostajemy:

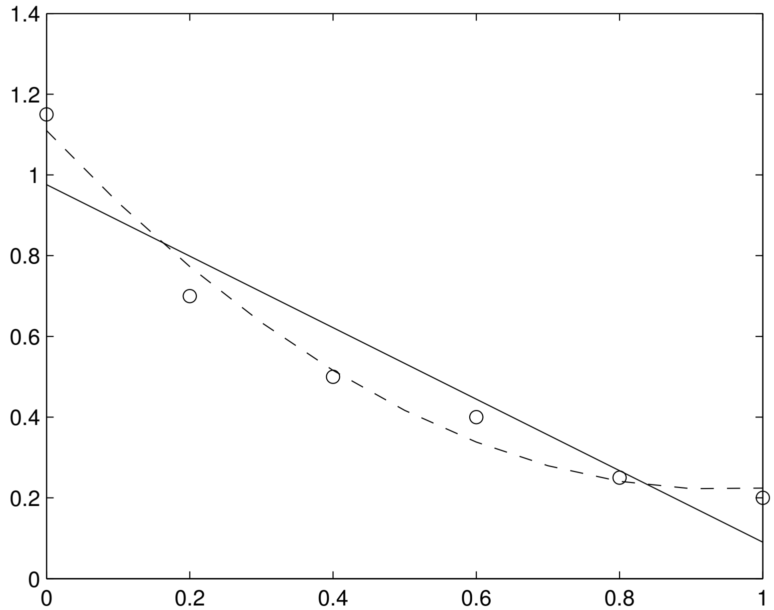
$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2.2 \\ 3 & 2.2 & 1.8 \\ 2.2 & 1.8 & 1.566 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ 0.98 \\ 0.612 \end{bmatrix}$$

skąd $w_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 1.11 - 1.886x + x^2$

APROKSYMACJA WIELOMIANAMI W POSTACI NATURALNEJ – Przykład 2 c.d.

Błędy aproksymacji są następujące:

x_j	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	$\max \lvert w_i(x_j) - y_j \rvert$
$w_1(x_j) - y_j$	-0.174	0.103	0.130	0.056	0.033	-0.09	0.174
$w_2(x_j) - y_j$	-0.04	0.073	0.016	-0.062	-0.009	0.024	0.073



APROKSYMACJA WIELOMIANAMI W POSTACI NATURALNEJ – uwarunkowanie

Uwaga. Macierz Grama $\mathbf{G}$ przy aproksymacji wielomianami naturalnymi wraz ze wzrostem wymiarowości $(n+1)$ szybko traci dobre uwarunkowanie.

Wyjaśnienie: niech $x\epsilon[0,1]$, $x_j = 0 + jh$, $h = 1/N$, $j = 0, 1, 2, ..., N$.
Dla dostatecznie dużych wartości N słuszne jest przybliżenie:

$$g_{ik} = (N{+}1)\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}(x_j)^{i+k} \cong (N{+}1)\int_0^{1+\frac{1}{N}} x^{i+k}dx = (N{+}1)\frac{(1+\frac{1}{N})^{i+k+1}}{i+k+1} \cong$$

$$\cong (N+1)\frac{1^{i+k+1}}{i+k+1} = (N+1)\frac{1}{i+k+1}$$

Stosując to przybliżenie dostajemy:

$$\mathbf{G} = (N+1)\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix} = (N+1)\cdot\mathbf{G}_N$$

Macierz $\mathbf{G}_N$ jest macierzą typu macierzy Hilberta.

APROKSYMACJA FUNKCJAMI ORTOGONALNYMI

Aproksymację wielomianami z bazą naturalną $(1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ ...)$ stosuje się w praktyce dla małych wartosci n.

Złego uwarunkowania można uniknąć stosując wielomiany ortogonalne.

Funkcje $h(x)$ i $g(x)$ są **ortogonalne** na zbiorze punktów $\{x_0, x_1, ..., x_N\}$ jeśli:

$$\langle h(x), g(x) \rangle = 0, \qquad \text{tzn.} \quad \sum_{j=0}^{N} h(x_j)\, g(x_j) = 0$$

W ogólności, funkcje bazowe $\psi_0, ..., \psi_n$ są wzajemnie ortogonalne, jeśli:

$$\sum_{j=0}^{N} \psi_i(x_j)\, \psi_k(x_j) = 0 \ \ \text{dla każdego } i \ \neq k, \quad i, k = 0, 1, ..., n.$$

Funkcje te nazywamy ponadto **ortonormalnymi**, jeśli dodatkowo

$$\sum_{j=0}^{N} \psi_i(x_j)\, \psi_i(x_j) = 1, \quad i = 0, 1, ...n.$$

APROKSYMACJA FUNKCJAMI ORTOGONALNYMI 2

Niech: $\phi_0, ..., \phi_n$ - znana baza złożona z funkcji nieortogonalnych,
$\psi_0, ..., \psi_n$ - baza złożona z funkcji ortogonalnych.

Algorytm ortogonalizacji Grama - Schmidta:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &:= \phi_0, \\
\psi_1 &:= \phi_1 - \tfrac{\langle \phi_1, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle} \psi_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\
\psi_i &:= \phi_i - \sum_{j=0}^{i-1} \tfrac{\langle \phi_i, \psi_j \rangle}{\langle \psi_j, \psi_j \rangle} \psi_j, \qquad i = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Dla funkcji ortogonalnych otrzymujemy następujący, bardzo dobrze uwarunkowany (bo z macierzą diagonalną !) układ równań normalnych:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_0, \psi_0 \rangle \, a_0 &= \langle f, \psi_0 \rangle \\
\langle \psi_1, \psi_1 \rangle \, a_1 &= \langle f, \psi_1 \rangle \\
&\ldots.. \\
\langle \psi_n, \psi_n \rangle \, a_n &= \langle f, \psi_n \rangle
\end{aligned}$$

APROKSYMACJA FUNKCJAMI ORTOGONALNYMI 3 – Przykład 2 c.d.

Zadanie z poprzedniego przykładu rozwiązać w bazie wielomianów ortogonalnych, uzyskując ją poprzez ortogonalizację bazy złożonej z wielomianów w postaci naturalnej.

a)

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= 1 \\ \psi_1(x) &= \phi_1 - \tfrac{\langle \phi_1, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle} \psi_0 = x - \frac{\sum_{j=0}^{5} x_j}{\sum_{j=0}^{5} 1} 1 = x - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Układ równań normalnych:

$$\begin{aligned} 6 \cdot a_0 &= 3.2 \\ 0.7 \cdot a_1 &= -0.62 \end{aligned}$$

skąd rozwiązanie:

$$w_1(x) = 0.533 - 0.886(x - 0.5) = 0.976 - 0.886x$$

b)

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \phi_2 - \tfrac{\langle\phi_2,\psi_0\rangle}{\langle\psi_0,\psi_0\rangle}\psi_0 - \tfrac{\langle\phi_2,\psi_1\rangle}{\langle\psi_1,\psi_1\rangle}\psi_1 \\ &= x^2 - \frac{\sum_{j=0}^{5}(x_j)^2}{\sum_{j=0}^{5}1}1 - \frac{\sum_{j=0}^{5}(x_j)^2(x_j-\frac{1}{2})}{\sum_{j=0}^{5}(x_j-\frac{1}{2})^2}(x-\tfrac{1}{2}) = x^2 - x + \tfrac{2}{15}\end{aligned}$$

Współczynniki a_0 i a_1 pozostają, należy jedynie wyznaczyć a_2 z równania:

$$\langle\psi_2,\psi_2\rangle\, a_n = \langle f,\psi_2\rangle$$

czyli

$$a_2\sum_{j=0}^{5}({x_j}^2 - x_j + \frac{2}{15})^2 = \sum_{j=0}^{5} y_j({x_j}^2 - x_j + \frac{2}{15})$$

skąd $a_2 \cong 1$.

Wielomian aproksymujący:

$$\begin{aligned}w_2(x) &= 0.533 - 0.886(x-0.5) + (x^2 - x + 0.133) \\ &= 1.11 - 1.886x + x^2\end{aligned}$$

APROKSYMACJA FUNKCJAMI ORTOGONALNYMI 5

Po ortogonalizacji Grama - Schimdta funkcje bazowe są ortogonalne z dokładnością wynikającą z dokładności obliczeń numerycznych. Błąd ortogonalizacji może być istotny.

Dlatego często stosuje się:

– **reortogonalizację** - tzn. ponowną ortogonalizację funkcji ψ_i, lub

– mający lepsze własności numeryczne **zmodyfikowany algorytm Grama - Schmidta** (tu zapisany w notacji MATLABa):

$$
\begin{array}{l}
\text{for } i = 0 : n \\
\quad \psi_i := \phi_i; \\
\quad \text{for } j = i+1 : n \\
\quad\quad \phi_j := \phi_j - \frac{\langle \phi_j, \psi_i \rangle}{\langle \psi_i, \psi_i \rangle} \psi_i; \\
\quad \text{end} \\
\text{end}
\end{array}
$$

APROKSYMACJA PADÉ

Funkcja aproksymująca jest funkcją wymierną:

$$R_{n.k}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}{1 + b_1 x + ... + b_k x^k}$$

gdzie dla jednoznaczności sformułowania przyjęto $b_0 = 1$.

Rozwijamy $f(x)$ w szereg Maclaurina (tzn. szereg Taylora w punkcie $x = 0$):

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \qquad c_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, 2, ...$$

Warunek aproksymacji Padé:
jak najwięcej pierwszych współczynników rozwinięcia funkcji $R_{n,k}$ w szereg Maclaurina jest równe współczynnikom c_i rozwinięcia funkcji $f(x)$.

APROKSYMACJA PADÉ 2

$$R_{n.k}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}{1 + b_1 x + ... + b_k x^k}$$

Mamy $n + k + 1$ stopni swobody (liczba wyznaczanych współczynników a_i i b_i funkcji $R_{n,k}$),
stąd pierwszych $n + k + 1$ wyrazów w rozwinięciach $R_{n,k}$ i $f(x)$ w szereg Maclaurina można zrównać i stąd warunek aproksymacji sformułować:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}{1 + b_1 x + ... + b_k x^k} + O(x^{n+k+1})$$

gdzie $O(x^{n+k+1})$ – wielomian z wyrazami o potęgach $x \geqslant \; n + k + 1$.

Uwaga. Warunek aproksymacji Padé może być też sformułowany jako:

$$f(0) = R_{n,k}(0), \quad f^{(j)}(0) = R_{n,k}^{(j)}(0), \quad j = 1, ..., n + k.$$

APROKSYMACJA PADÉ 3

Warunek
$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}{1 + b_1 x + ... + b_k x^k} + O(x^{n+k+1})$$
można zapisać w równoważnej postaci
$$(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i)(1 + \sum_{i=1}^{k} b_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + O(x^{n+k+1})$$

lub, eliminując z pierwszej sumy po lewej stronie te elementy, które prowadzą do składników x^i z $i \geqslant n + k + 1$:
$$(\sum_{i=0}^{n+k} c_i x^i)(1 + \sum_{i=1}^{k} b_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + O(x^{n+k+1})$$
Definiując wielomian o współczynnikach d_i w postaci
$$\sum_{i=0}^{n+2k} d_i x^i = (\sum_{i=0}^{n+k} c_i x^i)(1 + \sum_{i=1}^{k} b_i x^i) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$
warunek aproksymacji Padé można zapisać jako
$$d_i(a_0, ..., a_n, b_1, ... b_k) = 0 \quad \mathrm{dla} \quad \mathrm{i = 0, ..., n + k}$$

APROKSYMACJA PADÉ – Przykład

Wyznaczyć aproksymację Padé $R_{2,2}$ funkcji $f(x) = e^x$ w zerze.

$$R_{2,2}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x + b_2 x^2},$$

Współczynniki rozwinięcia e^x w szereg McLaurina $(n + k + 1 = 5)$:

$$c_0 = 1,\ \ c_1 = 1,\ \ c_2 = \frac{1}{2},\ \ c_3 = \frac{1}{6},\ \ c_4 = \frac{1}{24}.$$

Stąd równanie na wyznaczenie współczynników $d_0,\ d_1,\ \ldots$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{6} d_i x^i &= (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4)(1 + b_1 x + b_2 x^2) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \\ &= 1 + (b_1 + 1)x + (b_2 + b_1 + \frac{1}{2})x^2 + (b_2 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6})x^3 + \\ &\qquad + (\frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{6}b_1 + \frac{1}{24})x^4 + \cdots - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\end{aligned}$$

Stąd dostajemy układ równań na współczynniki funkcji aproksymującej:

$$1 - a_0 = 0,\ \ b_1 + 1 - a_1 = 0,\ \ b_2 + b_1 + \frac{1}{2} - a_2 = 0,\ \ b_2 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6} = 0,\ \ \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{6}b_1 + \frac{1}{24} = 0.$$

APROKSYMACJA PADÉ – Przykład 3 c.d.

Układ równań:

$$\begin{aligned} 1 &= a_0, \\ b_1 + 1 &= a_1, \\ b_2 + b_1 + \frac{1}{2} &= a_2, \\ b_2 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6} &= 0 \\ \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{6}b_1 + \frac{1}{24} &= 0 \end{aligned}$$

Z dwóch ostatnich równań wyznaczamy współczynniki b_1 i b_2 :

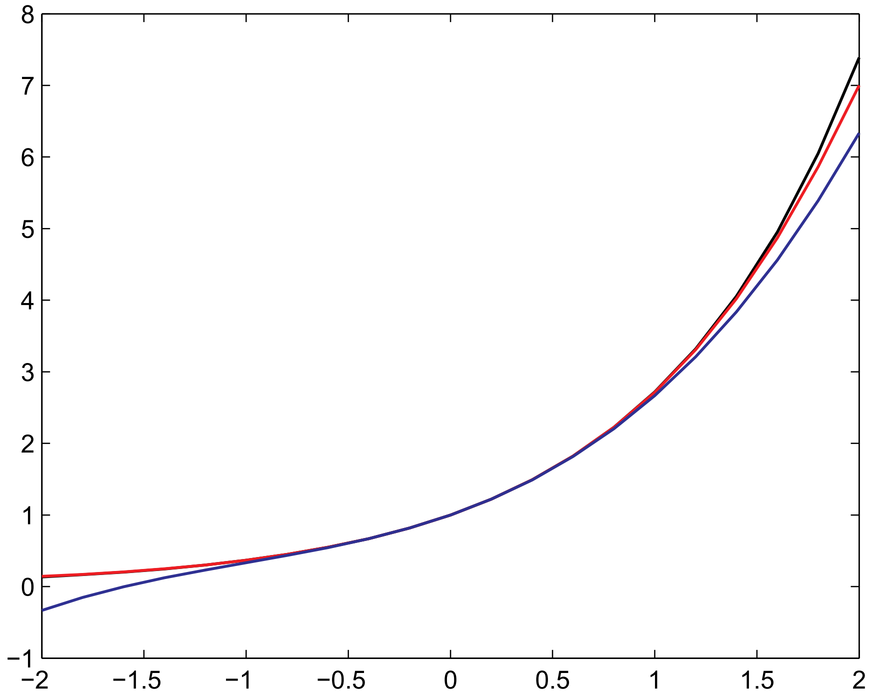
$$b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{12},$$

a następnie z trzech pierwszych równań wyliczamy współczynniki $a_0,\ a_1,\ a_2$.

Stąd poszukiwana funkcja aproksymującą Padé $R_{2,2}(x)$:

$$R_{2,2}(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2} = \frac{12 + 6x + 2x^2}{12 - 6x + x^2}$$

APROKSYMACJA PADÉ – Przykład 3 c.d.



Na rysunku przedstawiono przebiegi:

– funkcji aproksymowanej e^x (linia czarna),

– funkcji aproksymującej $R_{2,2}(x)$ (linia czerwona),

– funkcji $F_4(x) = \sum_{i=0}^{4} c_i x^i$ (linia niebieska) złożonej z pierwszych 5 wyrazów szeregu Maclaurina (na których oparta jest też aproksymacja Padé).