AUTOMATYKA I ROBOTYKA - SEMESTR 2

ANA2. ZESTAW 4. - Rozwiązania

Zad. 1. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 6\,, & 0 < x < 2 \\ 3x\,, & 2 < x < 4 \end{cases}$$

Najpierw dołączamy wartości dirichletowskie funkcji na końcach przedziałów:

$f(0) = f(4) = 9\,, \qquad f(2) = 6$

Rozwijamy funkcję w pełny szereg Fouriera na przedziale $X_a = [a, a + 2l] =$
$= [0, 4] \Rightarrow l = 2$

$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^2 6\,dx + \int_2^4 3x\,dx\right] = \frac{1}{2}\left(\ 6x\ \Big|_0^2 + \ \frac{3}{2}x^2\ \Big|_2^4\right) =$
$= \frac{1}{2}(12 + 18) = 15$

$a_n = \frac{1}{2}\left[\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_2^4 3x\cos\frac{n\pi x}{2}\right] = \left\| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos\frac{n\pi x}{2} \\ u' = 1 & v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{array} \right\| =$
$= \frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\ \sin\frac{n\pi x}{2}\ \Big|_0^2 + 3\left(\ \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\ \Big|_2^4 - \frac{2}{n\pi}\int_2^4 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)\right] = \frac{3}{2}\cdot\frac{-2}{n\pi}\int_2^4 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx =$

$= \frac{-3}{n\pi}\cdot\frac{-2}{n\pi}\ \cos\frac{n\pi x}{2}\ \Big|_2^4 = \frac{6}{n^2\pi^2}[\cos 2n\pi - \cos n\pi] = \frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n] = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \frac{12}{n^2\pi^2}\,, & n = 2k-1 \end{cases}$

$b_n = \frac{1}{2}\left[\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_2^4 3x\sin\frac{n\pi x}{2}\right] = \left\| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin\frac{n\pi x}{2} \\ u' = 1 & v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{array} \right\| =$
$= \frac{1}{2}\left[\frac{-12}{n\pi}\ \cos\frac{n\pi x}{2}\ \Big|_0^2 + 3\left(\ -\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ \Big|_2^4 + \frac{2}{n\pi}\int_2^4 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)\right] =$
$= \frac{-6}{n\pi}(\cos n\pi - 1) - \ \frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ \Big|_2^4 + \frac{12}{n^2\pi^2}\ \sin\frac{n\pi x}{2}\ \Big|_2^4 =$
$= -\frac{6}{n\pi}[(-1)^n - 1] - \frac{3}{n\pi}(4\cos 2n\pi - 2\cos n\pi) = -\frac{6}{n\pi}[(-1)^n - 1] - \frac{6}{n\pi}[2-(-1)^n] =$

$= -\frac{6}{n\pi}$

Stąd:

$f(x) = \frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$

Zad. 2. Rozwinąć w szereg Fouriera

(a) sinusowy

(b) cosinusowy

funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

a następnie obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

(a) sinusowy

Rozwijamy w szereg Fouriera funkcję nieparzystą na przedziale $X_{-l} = [-l, l] =$

$= [-2, 2] \Rightarrow l = 2\,, \quad a_0 = a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx = \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx + 2\int_1^2 \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx - \int_1^2 x \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx =$
$= \left\| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin \frac{n\pi x}{2} \\ u' = 1 & v = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \end{array} \right\| = -\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx - \frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 +$
$+ \frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 - \frac{2}{n\pi} \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 -$
$- \frac{4}{n\pi}(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}) + \frac{2}{n\pi}(2\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}) - \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 =$
$= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n\pi}(-1)^n - \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} +$
$+ \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \frac{8 \cdot (-1)^{k+1}}{n^2\pi^2}\,, & n = 2k-1 \end{cases}$

Stąd:

$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}$

(b) cosinusowy

Funkcja jest parzysta, więc $b_n = 0\,,\ l = 2.$

$a_0 = \int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1$

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + 2\int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_1^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx =$

$$= \left\| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos\frac{n\pi x}{2} \\ u' = 1 & v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{array} \right\| = \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 +$$
$$-\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} +$$
$$+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right]$$

$n = 2k-1:\quad a_n = 0$

$$n = 2k:\quad a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}[-1-1+2\cos k\pi] = \frac{8}{n^2\pi^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0\,, & n = 4m \\ -\frac{16}{n^2\pi^2}\,, & n = 4m-2 \end{cases}$$

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-2)^2}\cos\frac{(4n-2)\pi x}{2}$

Sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ możemy wyznaczyć z obu otrzymanych rozwinęć:

cosinusowe: $x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} - \frac{16}{\pi^2}\cdot\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

sinusowe: $x = 1 \Rightarrow 1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\cdot(-1)^{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Zad. 3. Rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $\langle -\pi;\pi\rangle$ funkcję $f(x) = x^2$. Jaki szereg liczbowy otrzymujemy podstawiając $x = \pi$, a jaki $x = 0$?

Funkcja jest parzysta na przedziale $[-\pi,\pi] \Rightarrow l = \pi\,,\ \ b_n = 0$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \left\| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \cos nx \\ u' = 2x & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right\| = \frac{2}{\pi}\left[\ \frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \left\| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin nx \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right\| = -\frac{4}{n\pi}\left[- \ \frac{x}{n}\cos nx\ \Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right] =$$

$$= \ \frac{4x}{n^2\pi}\cos nx\ \Big|_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi}\cdot\frac{1}{n}\ \ \sin nx\ \Big|_0^\pi = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

$$x = 0: \quad 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$x = \pi: \quad \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cdot(-1)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Zad. 4. Rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$ funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \ \ x^2 & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Dołączamy wartości dirichletowskie funkcji na końcach przedziału, funkcja jest nieparzysta:

$$f(-\pi) = f(\pi) = 0\,, \quad a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx\,dx = \left\| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \sin nx \\ u' = 2x & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right\| = \frac{2}{\pi}\left[- \ \frac{x^2}{n}\cos nx\ \Big|_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos nx \\ u' = 1 & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right\| = - \ \frac{2x^2}{n\pi}\cos nx\ \Big|_0^\pi + \frac{4}{n\pi}\left[\ \frac{x}{n}\sin nx\ \Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3\pi}\ \ \cos nx\ \Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{2\pi}{n}\,, & n = 2k \\ \frac{2\pi}{n} - \frac{8}{n^3\pi}\,, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$f(x) = 2\pi\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x - 2\pi\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n}\sin 2nx$$

Zad. 5. Rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$ funkcję $f(x) = \cos ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, a następnie podstawić w uzyskanym rozwinięciu $x = 0$.

Gdybyśmy rozwijali tę funkcję na przedziale $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$ długości okresu funkcji, to $f(x) = \cos ax$ byłoby gotowym rozwinęciem funkcji w szereg Fouriera składającym się tylko z jednego wyrazu, tzn. $a_1 = 1\,,\ a_n = 0\ \ \forall\, n \neq 1$

Na przedziale $[-\pi, \pi]$ funkcja jest parzysta $\Rightarrow b_n = 0\,,\ \ l = \pi$.

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\, dx = \frac{2}{\pi a}\ \ \sin ax\ \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi a}\sin a\pi$

Aby wyznaczyć a_n skorzystamy z wzoru trygonometrycznego:

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\cdot\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(a-n)x+\cos(a+n)x]\, dx =$
$= \frac{1}{\pi}\cdot\ \frac{\sin(a-n)x}{a-n}\ \Bigg|_0^\pi + \frac{1}{\pi}\cdot\ \frac{\sin(a+n)x}{a+n}\ \Bigg|_0^\pi = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} =$
$= \frac{1}{\pi(a^2-n^2)}[(-1)^n(a+n)\sin a\pi + (-1)^n(a-n)\sin a\pi] = \frac{(-1)^n\cdot 2a}{\pi(a^2-n^2)}\sin a\pi$

$f(x) = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sin a\pi\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos nx$

$x = 0:\ \ 1 = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sin a\pi\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{a^2-n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{a^2-n^2} = \frac{\pi}{2a\sin\pi a} - \frac{1}{2a^2}$