**Metody Probabilistyczne i Statystyka**

$Z_0$

Przypomnienie:

**Działania na zbiorach:** Niech $X$ będzie dowolnym niepustym zbiorem, $A_1, A_2, \ldots$ – podzbiorami zbioru $X$, $I$ – podzbiorem zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in I} A_n &= \{x \in X : \exists\, n \in I,\, x \in A_n\} - \text{ suma mnogościowa} \\
\bigcap_{n\in I} A_n &= \{x \in X : \forall\, n \in I,\, x \in A_n\} - \text{ iloczyn mnogościowy} \\
A_1 - A_2 &= \{x \in X : x \in A_1 \wedge x \notin A_2\} - \text{ różnica zbiorów} \\
A' &= X - A - \text{ dopełnienie zbioru } A
\end{aligned}$$

**Obraz i przeciwobraz:** Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją określoną na zbiorze $X$, o wartościach w zbiorze $Y$. Obrazem zbioru $B \subset X$ nazywamy zbiór

$$f(B) = \{y \in Y : \exists\, x \in B, f(x) = y\}.$$

Przeciwobrazem zbioru $C \subset Y$ nazywamy zbiór $f^{-1}(C)$ taki, że

$$f^{-1}(C) = \{x \in X :\ f(x) \in C\}.$$

1. Wyznaczyć $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, jeśli zbiory $A_n,\ n = 1, 2, \ldots$, określone są następująco:
   (a) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n+1}\right\}$;
   (b) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{n} \leqslant x \leqslant \sqrt{2n}\right\}$;
   (c) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \dfrac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant 2 + \dfrac{1}{n+1}\right\}$;
   (d) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = n\}$;

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(x) = x^2$. Wyznaczyć:
   (a) $f\left([1; 2)\right),\ f\left((-1; 2)\right)$;
   (b) $f^{-1}\left([0; 4)\right),\ f^{-1}\left((-2; -1)\right)\ f^{-1}\left((0; 1]\right)$.

3. Dla podanych poniżej funkcji $f$ wyznaczyć $f^{-1}\left(\{a\}\right)$ oraz $f^{-1}\left((-\infty; a)\right)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$:
   (a) $f : \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \cos x$;
   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$;
   (c) $f : [0; 2] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} 0 & ,\ x \in [0; 1) \\ 1 & ,\ x = 1 \\ 2 & ,\ x \in (1; 2] \end{cases}$;

4. Niech $D_1 = \{(x, y) : -2 \leqslant x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ oraz $D_2 = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$. Sprawdzić, że jeśli

$$f(x, y) = \begin{cases} -x/8 & ,\ (x, y) \in D_1 \\ y/8 & ,\ (x, y) \in D_2 \\ 0 & ,\ \text{w p.p.} \end{cases}$$

   oraz $D = D_1 \cup D_2$, to $\displaystyle\int\!\!\int_D f(x, y)dx\,dy = 1$.

5. Dobrać stałą $a$ tak, aby $\int\int_D f(x,y)dx\,dy = 1$ oraz wyznaczyć funkcje $g_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ i $g_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ w przypadku, gdy

   (a)

$$f(x,y) = \begin{cases} axy & , \quad (x,y) \in D \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases} ,$$

   gdzie $D = [1;2] \times [2;4]$;

   (b)

$$f(x,y) = \begin{cases} a & , \quad (x,y) \in D \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases} ,$$

   gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2 < 1\}$.

6. Na ile sposobów z grupy zawierającej 15 małżeństw wybrać czterosobową delegację tak, aby w jej skład nie wchodziło żadne małżeństwo?

7. Na ile sposobów można $n$ rozróżnialnych kul umieścić w $n$ pudełkach tak, aby

   (a) nie było pustych pudełek;

   (b) dokładnie 1 pudełko było puste?

8. Na ile sposobów można połączyć w pary $2n$ osób?

9. Ile rozwiązań całkowitych ma równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

   jeśli

   (a) $x_i \geqslant 0$ dla każdego $i = 1, 2, 3, 4$;

   (b) $x_i > 0$ dla każdego $i = 1, 2, 3, 4$;

   (c) $x_1 \geqslant 2,\ x_2 \geqslant 2,\ x_3 \geqslant 4,\ x_4 \geqslant 0$?