Równania różniczkowe zwyczajne

ANA2 - AiR

Ewa Strożyna

Definicja

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

gdzie $y = y(x)$ - funkcja niewiadoma, $n \in \mathbb{N}$ - najwyższy rząd pochodnej funkcji $y(x)$, $F : D \to \mathbb{R}\,,\ D \subset \mathbb{R}^{n+2}$

Definicja

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

gdzie $y = y(x)$ - funkcja niewiadoma, $n \in \mathbb{N}$ - najwyższy rząd pochodnej funkcji $y(x)$, $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$

Definicja

Całką szczególną ozn. CS (lub rozwiązaniem szczególnym) równania różniczkowego $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ na przedziale X nazywamy każdą funkcję spełniającą to równanie $\forall\, x \in X$, tzn.

$$\forall\, x_0 \in X \qquad F(x_0, y(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0)) = 0$$

Przykłady:

(1) $y' = 3x^2 \Rightarrow$
CS: $y_1 = x^3\,,\; y_2 = x^3 + 5\,, \ldots, y = x^3 + C\,,\; C \in \mathbb{R}$

Przykłady:

(1) $y' = 3x^2 \Rightarrow$
CS: $y_1 = x^3\,,\; y_2 = x^3 + 5\,, \ldots, y = x^3 + C\,,\; C \in \mathbb{R}$

(2) $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow$
CS: $y = \ln x\,,\; x \in (0, +\infty)\,;\; y = \ln(-x)\,,\; x \in (-\infty, 0)$

Przykłady:

(1) $y' = 3x^2 \Rightarrow$
CS: $y_1 = x^3\,,\ y_2 = x^3 + 5\,, \ldots, y = x^3 + C\,,\ C \in \mathbb{R}$

(2) $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow$
CS: $y = \ln x\,,\ x \in (0, +\infty)\,;\ y = \ln(-x)\,,\ x \in (-\infty, 0)$

(3) $y'' + y = 0 \Rightarrow$
CS:
$y_1 = \sin x\,,\ y_2 = \cos x\,, \ldots,\ y = C_1 \sin x + C_2 \cos x\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Definicja

Warunkiem początkowym dla równania $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ nazywamy układ równości

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_1\,, \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

gdzie $x_0 \in X\,,\ y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ - wartości początkowe.

Zagadnienie Cauchy'ego dla równania $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \iff$ wyznaczenie *CS* tego równania spełniającej zadany warunek początkowy.

Przykłady:

(1) $y'' + y = 0\,, \qquad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_1$

$$\begin{cases} \ \ C_1 \cos x_0 + C_2 \sin x_0 = y_0 \\ -C_1 \sin x_0 + C_2 \cos x_0 = y_1 \end{cases}$$

Powyższy układ równań jest układem Cramera, więc ma dokładnie jedno rozwiązanie (C_1, C_2).

Przykłady:

(1) $y'' + y = 0\,, \qquad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_1$

$$\begin{cases} C_1 \cos x_0 + C_2 \sin x_0 = y_0 \\ -C_1 \sin x_0 + C_2 \cos x_0 = y_1 \end{cases}$$

Powyższy układ równań jest układem Cramera, więc ma dokładnie jedno rozwiązanie (C_1, C_2).

(2) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

CS: $y_1 = 0\,,\ y_2 = x^3$ - dwa różne rozwiązania spełniające ten sam warunek początkowy $y(0) = 0$.

Definicja

Całką ogólną ozn. CO (lub rozwiązaniem ogólnym) równania $F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$ nazywamy n-parametrową rodzinę funkcji

$$\{\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) : C_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n\}$$

spełniającą warunki:

(1) $\forall\, (C_1^0, \ldots, C_n^0) \in A \subset \mathbb{R}^n \quad \exists\, y(x)$ - CS równania $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ spełniająca warunek

$$\Phi(x, y, C_1^0, \ldots, C_n^0) = 0$$

(2) dla każdego układu wartości początkowych $x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}$ istnieją stałe $(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n) \in A$ takie, że równanie $\Phi(x, y, \bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n) = 0$ określa w $Q(x_0, \delta)$ funkcję uwikłaną $y = y(x)$ spełniającą równanie $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ i warunek początkowy $y(x_0) = y_0\,, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Definicja

Całką ogólną ozn. CO (lub rozwiązaniem ogólnym) równania $F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$ nazywamy n-parametrową rodzinę funkcji

$$\{\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) : C_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n\}$$

zawierającą wszystkie całki szczególne (i tylko takie funkcje).

Uwaga:

Powyższa definicja odnosi się tylko do najprostszych typów równań - takich jakie będziemy omawiać.

Przykład:

$y' = -\frac{x}{y}\,,\ y \neq 0$

$y' \cdot y = -x \Rightarrow y^2 = -x^2 + C\,,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 = C\,,\ C > 0$

$\Rightarrow\ CO = \{\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - C\,,\ C > 0\}$

Przykład:

$y' = -\frac{x}{y}\,,\ y \neq 0$

$y' \cdot y = -x \Rightarrow y^2 = -x^2 + C\,,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 = C\,,\ C > 0$

$\Rightarrow\ CO = \{\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - C\,,\ C > 0\}$

Uwaga:

CO nie musi zawierać wszystkich CS, np. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$,
$\mathcal{F} = \{y = (x + C)^3\,,\ C \in \mathbb{R}\}$ spełnia warunki definicji CO.

Rozwiązaniami tego równania są też funkcje

$$y(x) = \begin{cases} (x + C)^3\,, & x \geqslant -C \\ 0\,, & x < -C \end{cases}$$

ale $y \notin \mathcal{F}$.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Równania o zmiennych rozdzielonych

Są to równania pierwszego rzędu postaci

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{lub} \quad y' = f(x) \cdot g(y)$$

gdzie f - funkcja ciągła w (a, b), g - funkcja ciągła w (c, d), $g \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow \int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(y) + C_1 = F(x) + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(y) = F(x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(y) + C_1 = F(x) + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(y) = F(x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Twierdzenie

Przy powyższych założeniach dla funkcji f i g wzór $G(y) = F(x) + C$ określa CO równania $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$.
Ponadto dla dowolnych wartości początkowych $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$ istnieje dokładnie jedna CS tego równania spełniająca warunek początkowy $y(x_0) = y_0$.

Przykłady:

(1) $y' = -\frac{x}{y}\,,\ y(-1) = 2$

$$y^2 = -x^2 + C \Rightarrow 4 = -1 + C \Rightarrow C = 5\,,\ y \in (0, +\infty) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = +\sqrt{5 - x^2}$$

Przykłady:

(1) $y' = -\frac{x}{y}\,,\ y(-1) = 2$

$y^2 = -x^2 + C \Rightarrow 4 = -1 + C \Rightarrow C = 5\,,\ y \in (0, +\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow y = +\sqrt{5 - x^2}$

(2) $y' = y^2 \cdot x\,,\ y(1) = 1$

$\frac{dy}{dx} = y^2 x \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = -\frac{2}{x^2} + C$

$1 = -2 + C \Rightarrow C = 3 \Rightarrow y(x) = -\frac{2}{x^2} + 3$

(3) Ciało o temperaturze początkowej $T_0 = 50^\circ C$ umieszczono w chwili $t_0 = 0$ w pomieszczeniu o temperaturze $T_s = 12^\circ C$ na skutek czego zaczęło stygnąć. Wyznaczyć zależność $T(t)$ temperatuty tego ciała od czasu w chwili $t > 0$ wiedząc, że prędkość stygnięcia jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur T ciała stygnącego i pomieszczenia

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_s)\,, \quad T(0) = T_0 = 50$$

$$\int \frac{dT}{T-12} = -k \int dt \Rightarrow \ln|T - 12| = -kt + C$$

$$T - 12 = Ce^{-kt} \Rightarrow T(t) = 12 + Ce^{-kt}\,, \quad T(0) = 50 \Rightarrow C = 38$$

$$\Rightarrow T(t) = 12 + 38e^{-kt}$$

Równania postaci $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Równania postaci $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Równania tego typu sprowadzamy do równań o zmiennych rozdzielonych stosując standardowe podstawienie

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

Wtedy $y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u$

Równania postaci $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Równania tego typu sprowadzamy do równań o zmiennych rozdzielonych stosując standardowe podstawienie

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

Wtedy $y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u$

Równanie przyjmuje postać $u' \cdot x + u = f(u) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{f(u)-u}{x}$ i jest to równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \qquad f(u) \neq u$$

Przykład:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\,, \quad u = \frac{y}{x}$$

$$u' \cdot x + u = u + \operatorname{tg} u \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\operatorname{tg} u}{x}$$

$$\int \frac{\cos u}{\sin u}\, du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin u| = \ln|x| + C_1 \Rightarrow \sin u = C \cdot |x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\frac{y}{x} = C \cdot x$$

Przykład:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\,, \quad u = \frac{y}{x}$$

$$u' \cdot x + u = u + \operatorname{tg} u \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\operatorname{tg} u}{x}$$

$$\int \frac{\cos u}{\sin u}\, du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin u| = \ln|x| + C_1 \Rightarrow \sin u = C \cdot |x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\frac{y}{x} = C \cdot x$$

Uwaga

Do równań postaci $y' = f(ax + by + c)\,,\ a, b, c \in \mathbb{R}\,,\ a, b \neq 0$ stosujemy analogiczne podstawienie $u(x) = ax + by(x) + c$ sprowadzając je do równań o zmiennych rozdzielonych.

Równania liniowe

Równania liniowe

Równanie liniowe rzędu n jest to równanie postaci

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$f(x) = 0$ - równanie jednorodne (RJ)

$f(x) \neq 0$ - równanie niejednorodne (RN)

$a_i(x)$ - funkcje ciągłe na (a, b), $i = 0, \ldots, n-1$

$a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$ - równanie o stałych współczynnikach

Równania pierwszego rzędu

Równania pierwszego rzędu

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Równania pierwszego rzędu

$$y' + p(x)y = f(x)$$

(I) Wyznaczanie całki ogólnej równania jednorodnego (*CORJ*)

Równania pierwszego rzędu

$$y' + p(x)y = f(x)$$

(I) Wyznaczanie całki ogólnej równania jednorodnego ($CORJ$)

$y' + p(x)y = 0\,,\quad y = 0$ - całka szczególna

$y \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y$ - równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)\,dx = -P(x) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = C \cdot e^{-P(x)}$$

$$x_0 \in (a,b)\,,\ y(x_0) = y_0$$

$$\Rightarrow y_0 = Ce^{-P(x_0)} \Rightarrow C = y_0 e^{P(x_0)} \Rightarrow y(x) = y_0 e^{-(P(x)-P(x_0))}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)\,dx = -P(x) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = C \cdot e^{-P(x)}$$

$$x_0 \in (a,b)\,,\ y(x_0) = y_0$$

$$\Rightarrow y_0 = Ce^{-P(x_0)} \Rightarrow C = y_0 e^{P(x_0)} \Rightarrow y(x) = y_0 e^{-(P(x)-P(x_0))}$$

Twierdzenie

Jeśli $p(x)$ jest funkcją ciągłą na (a,b), to $y = C \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$, $C \in \mathbb{R}$ określa całkę ogólną (CO) równania $y' + p(x)y = 0$. Ponadto dla dowolnych wartości $x_0 \in (a,b)\,,\ y_0 \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna całka szczególna (CS) tego równania spełniająca warunek początkowy $y(x_0) = y_0$.

(II) Wyznaczanie całki szczególnej równania niejednorodnego ($CSRN$)

(II) Wyznaczanie całki szczególnej równania niejednorodnego ($CSRN$)

Twierdzenie

(1) $CORN = CORJ + CSRN$

(2) Jeśli:
y_1 jest CS równania $y' + p(x)y = f_1(x)$,
y_2 jest CS równania $y' + p(x)y = f_2(x)$, to
$y_1 + y_2$ jest CS równania $y' + p(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

Metoda uzmienniania stałej

Metoda uzmienniania stałej

Znając $CORJ$ szukamy funkcji $C(x)$ takiej, że
$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$ jest $CSRN$.

$y' = C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} + C(x)e^{-\int p(x)\,dx} \cdot (-p(x))$ i obie funkcje podstawiamy do RN:

Metoda uzmienniania stałej

Znając *CORJ* szukamy funkcji $C(x)$ takiej, że
$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$ jest *CSRN*.

$y' = C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} + C(x)e^{-\int p(x)\,dx} \cdot (-p(x))$ i obie funkcje podstawiamy do *RN*:

$$C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} = f(x)$$

Metoda uzmienniania stałej

Znając *CORJ* szukamy funkcji $C(x)$ takiej, że
$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$ jest *CSRN*.

$y' = C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} + C(x)e^{-\int p(x)\,dx} \cdot (-p(x))$ i obie funkcje podstawiamy do *RN*:

$$C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} = f(x)$$

Stąd $C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} = f(x) \Rightarrow C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C_1$

Twierdzenie

Jeśli funkcje $p(x), f(x)$ są ciągłe w przedziale (a,b), to wzór

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \int f(x) e^{\int p(x)\,dx} dx$$

Określa *CO* równania $y' + p(x)y = f(x)$ zawierającą wszystkie *CS* tego równania.
Ponadto dla dowolnych wartości $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna *CS* tego równania spełniająca warunek $y(x_0) = y_0$.

Twierdzenie

Jeśli funkcje $p(x), f(x)$ są ciągłe w przedziale (a, b), to wzór

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \int f(x)e^{\int p(x)\,dx}dx$$

Określa *CO* równania $y' + p(x)y = f(x)$ zawierającą wszystkie *CS* tego równania.
Ponadto dla dowolnych wartości $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna *CS* tego równania spełniająca warunek $y(x_0) = y_0$.

Przykład:

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x\,, \qquad y(0) = 0$$

RJ: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos x| + C \Rightarrow y = \frac{C}{\cos x}$

RN: $y(x) = \frac{C(x)}{\cos x} \Rightarrow y'(x) = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}$

$C'(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + C(x) \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{C(x)}{\cos x} = \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow C'(x) = \cos^2 x \Rightarrow C(x) = \int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$

$CORN$: $y(x) = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}{\cos x} = \frac{C}{\cos x} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x}{\cos x}$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

CS: $y(x) = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x}{\cos x}$

Metoda przewidywań

Metoda przewidywań

Stosuje się ją, gdy:

(1) równanie jest o stałych współczynnikach, tzn. $p(x) = p \in \mathbb{R}$

(2) $f(x) = e^{\alpha x} [W_1(x) \cos \beta x + W_2(x) \sin \beta x]$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, W_1, W_2 - wielomiany

Metoda przewidywań

Stosuje się ją, gdy:

(1) równanie jest o stałych współczynnikach, tzn. $p(x) = p \in \mathbb{R}$

(2) $f(x) = e^{\alpha x}\left[W_1(x)\cos\beta x + W_2(x)\sin\beta x\right]$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, W_1, W_2 - wielomiany

Przewidujemy wtedy *CSRN* w postaci:

$$y_1(x) = x^k \cdot e^{\alpha x}\left[V_1(x)\cos\beta x + V_2(x)\sin\beta x\right]$$

gdzie V_1, V_2 - wielomiany w postaci ogólnej takie, że $\deg V_1 = \deg V_2 = \max(\deg W_1, \deg W_2)$

$$k = \begin{cases} 0 & \alpha + i\beta \neq -p \\ 1 & \alpha + i\beta = -p \end{cases}$$

$\Rightarrow CORN = CORJ + CSRN$: $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$

Przykłady:

$y' + 2y = f(x)$,

(a) $f(x) = 2x$, (b) $f(x) = \cos x$, (c) $f(x) = xe^{-2x}$

RJ: $\frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \Rightarrow \ln|y| = -2x + C \Rightarrow$

$\Rightarrow CORJ : y_0(x) = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}$

Przykłady:

$y' + 2y = f(x)$,

(a) $f(x) = 2x$, (b) $f(x) = \cos x$, (c) $f(x) = xe^{-2x}$

RJ: $\frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \Rightarrow \ln|y| = -2x + C \Rightarrow$

$\Rightarrow CORJ : y_0(x) = Ce^{-2x}\,, \quad C \in \mathbb{R}$

(a) RN: $f(x) = 2x \Rightarrow \alpha = 0\,,\ \beta = 0\,,\ p = 2\,,\ W_1(x) = 2x\,,$
$\alpha + i\beta \neq -p \Rightarrow k = 0$

$y_1(x) = Ax + B\,,\ \ y_1'(x) = A$

$$A + 2(Ax + B) = 2x \Rightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ A + 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}$

(b) RN:

$f(x) = \cos x \Rightarrow \alpha = 0\,,\ \beta = 1\,,\ p = 2\,,\ W_1(x) = 1\,,\ W_2(x) = 0$

$\alpha + i\beta \neq -p \Rightarrow k = 0$

$y_1(x) = A\cos x + B\sin x\,,\quad y_1'(x) = -A\sin x + B\cos x$

$$-A\sin x + B\cos x + 2(A\cos x + B\sin x) = \cos x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -A + 2B = 0 \\ B + 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Ce^{-2x} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$

(c) RN: $f(x) = xe^{-2x} \Rightarrow \alpha = -2\,,\ \beta = 0\,,\ p = 2\,,\ W_1(x) = x\,,$
$\alpha + i\beta = -2 = -p \Rightarrow k = 1$

$$y_1(x) = x \cdot (Ax + B)e^{-2x} = (Ax^2 + Bx)e^{-2x}\,,$$
$$y_1'(x) = (2Ax + B)e^{-2x} + (Ax^2 + Bx)e^{-2x} \cdot (-2)$$

$$(2Ax + B)e^{-2x} - (2Ax^2 + 2Bx)e^{-2x} + 2(Ax^2 + Bx)e^{-2x} =$$
$$= xe^{-2x} \Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Ce^{-2x} + \tfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$$

Równanie Bernoulliego

Jest to równanie nieliniowe 1 - go rzędu postaci

$$y' = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^r \,, \quad r \neq 0, 1 \,, \quad r \in \mathbb{R}$$

Równanie to sprowadzany do równania liniowego za pomocą standardowego podstawienia:

$$u(x) = [y(x)]^{1-r}$$

Równania liniowe rzędu $n \geqslant 2$

Równania liniowe rzędu $n \geqslant 2$

$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$
Funkcje $f(x), p_i(x)$ są ciągłe w (a, b), $i = 0, \ldots, n-1$

Równania liniowe rzędu $n \geqslant 2$

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$$

Funkcje $f(x), p_i(x)$ są ciągłe w (a, b), $i = 0, \ldots, n-1$

Rozważmy równanie jednorodne:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y = 0 \quad \begin{pmatrix} \star \\ \star \end{pmatrix}$$

Definicja

Niech funkcje $y_1, \ldots, y_n$ będą *CS* równania $\begin{pmatrix} \star \\ \star \end{pmatrix}$. Tworzą one *układ podstawowy całek* (lub układ fundamentalny rozwiązań) w przedziale (a, b), jeśli

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall\, x \in (a, b)$$

Powyższy wyznacznik nazywa się *wrońskianem* (lub wyznacznikiem Wrońskiego)

Przykłady:

(1) $y'' + y = 0\,, \quad CS:\ y_1 = \cos x\,, \quad y_2 = \sin x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{\cos x, \sin x\}$ - układ podstawowy całek

Przykłady:

(1) $y'' + y = 0\,, \quad CS:\ y_1 = \cos x\,, \quad y_2 = \sin x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{\cos x, \sin x\}$ - układ podstawowy całek

(2) $y''' = 0 \Rightarrow\ CS\ :\ y_1 = 1\,,\ y_2 = 2x\,,\ y_3 = x^2$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \{1, 2x, x^2\} \text{ - UPC}$$

Przykłady:

(1) $y'' + y = 0\,, \quad CS:\ y_1 = \cos x\,, \quad y_2 = \sin x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{\cos x, \sin x\}$ - układ podstawowy całek

(2) $y''' = 0 \Rightarrow\ CS\ :\ y_1 = 1\,,\ y_2 = 2x\,,\ y_3 = x^2$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \{1, 2x, x^2\} \text{ - UPC}$$

Uwaga

$\{y_1, \ldots, y_n\}$ - układ podstawowy całek $\iff$ $y_1, \ldots, y_n$ są liniowo niezależne

Twierdzenie

Jeśli $\{y_1, \ldots, y_n\}$ - układ podstawowy całek równania $\begin{pmatrix} \star \\ \star \end{pmatrix}$, to *CORJ* jest postaci

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

Ponadto dla dowolnych wartości $x_0 \in (a, b)$, $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna *CS* tego równania spełniająca warunek początkowy $y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Równania jednorodne o stałych współczynnikach

Równania jednorodne o stałych współczynnikach

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = 0\,, \quad p_k \in \mathbb{R}$$

Szukamy *CS* w postaci $y(x) = e^{rx}\,,\ r \in \mathbb{C}$

$y^{(k)}(x) = r^k e^{rx} \Rightarrow$

$r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \ldots + p_0 = 0$ - *równanie charakterystyczne* równania $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = 0$, ma zawsze n - rozwiązań w $\mathbb{C}$.

Przypadek $n = 2$

Przypadek $n = 2$

$$y'' + py' + qy = 0 \Rightarrow r^2 + pr + q = 0\,,\ r \in \mathbb{C}$$

Przypadek $n = 2$

$$y'' + py' + qy = 0 \Rightarrow r^2 + pr + q = 0\,,\ r \in \mathbb{C}$$

$$(1)\ \Delta > 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \mathbb{R}\,,\ r_1 \neq r_2 \Rightarrow CS:\ y_1 = e^{r_1 x}\,,\ y_2 = e^{r_2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(x) = (r_2 - r_1)e^{r_1 x}e^{r_2 x} \neq 0 \Rightarrow CORJ: y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$(2)\ \Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow CS:\ y_1 = e^{r_0 x}\,,\ y_2 = xe^{r_0 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(x) = e^{2r_0 x} \neq 0 \Rightarrow CORJ: y(x) = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x}$$

$$(3)\ \Delta < 0 \Rightarrow r_1 = \alpha + i\beta\,,\ r_2 = \alpha - i\beta\,,\ \beta \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CS:\ e^{r_1 x},\ e^{r_2 x} \Rightarrow CS:\ y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$
$$\Rightarrow W(x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CORJ: y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

(3) $\Delta < 0 \Rightarrow r_1 = \alpha + i\beta\,,\ r_2 = \alpha - i\beta\,,\ \beta \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow CS:\ e^{r_1 x}\,,\ e^{r_2 x} \Rightarrow CS:\ y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$\Rightarrow W(x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow CORJ : y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$

Przykłady:

(1) $y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i \Rightarrow \{\cos x, \sin x\} \Rightarrow$
$\Rightarrow CORJ:\ y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$

$$(3)\ \Delta < 0 \Rightarrow r_1 = \alpha + i\beta\,,\ r_2 = \alpha - i\beta\,,\ \beta \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CS:\ e^{r_1 x}\,,\ e^{r_2 x} \Rightarrow CS:\ y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$\Rightarrow W(x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CORJ: y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Przykłady:

$$(1)\ y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i \Rightarrow \{\cos x, \sin x\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CORJ:\ y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$(2)\ y'' - 3y' - 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 4\,,\ r_2 = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{e^{-x}, e^{4x}\} \Rightarrow CORJ:\ y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

(3) $y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{e^{-2x}, xe^{-2x}\} \Rightarrow CORJ: \ y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

$$(3)\ y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{e^{-2x}, xe^{-2x}\} \Rightarrow CORJ: \ y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

$$(4)\ y^{(4)} + y'' = 0 \Rightarrow r^4 + r^2 = r^2(r^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = r_2 = 0\,,\ r_{3,4} = \pm i \Rightarrow \ UPC\ :\ \{1, x, \cos x, \sin x\}$$

$$CORJ\ : \quad y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$(3)\ y''+4y'+4y=0 \Rightarrow r^2+4r+4=0 \Rightarrow r_1=r_2=-2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{e^{-2x}, xe^{-2x}\} \Rightarrow CORJ:\ y(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$$

$$(4)\ y^{(4)}+y''=0 \Rightarrow r^4+r^2=r^2(r^2+1)=0$$

$$\Rightarrow r_1=r_2=0\,,\ r_{3,4}=\pm i \Rightarrow\ UPC\ :\ \{1, x, \cos x, \sin x\}$$

$$CORJ\ :\quad y(x)=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x$$

$$(5)\ y^{(4)}+2y''+1=0 \Rightarrow r^4+2r^2+1=0 \Rightarrow (r^2+1)^2=0$$

$$\Rightarrow r_{1,2}=i\,,\ r_{3,4}=-i \Rightarrow \{\cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x\}$$

$$CORJ\ :\quad y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x\cos x+C_4x\sin x$$

Uwaga:

UPC dla *RJ* rzędu $n > 2$: $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0 y = 0$ (ii)

(1) równanie charakterystyczne (ii) ma n różnych pierwiastków rzeczywistych

$r_1, \ldots, r_n \Rightarrow \{e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$

(2) równanie charakterystyczne (ii) ma n różnych pierwiastków, wśród nich zespolone

$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, $r_3, \ldots, r_n \Rightarrow$
$\{e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $e^{r_3 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$

(3) równanie charakterystyczne (ii) ma n pierwiastków rzeczywistych, wśród nich wielokrotne

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_k = r\,,\ r_{k+1}\,, \ldots, r_n \Rightarrow$$
$$\{e^{rx}\,,\ xe^{rx}\,, \ldots, x^{k-1}e^{rx}\,,\ e^{r_{k+1}x}\,, \ldots, e^{r_n x}\}$$

(4) równanie charakterystyczne (ii) ma n pierwiastków, wśród nich zespolone wielokrotne

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_k = \alpha + i\beta\,,\ r_{k+1} = \ldots = r_{2k} =$$
$$= \alpha - i\beta\,,\ r_{2k+1}\,, \ldots,, r_n \Rightarrow$$
$$\{e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\ e^{\alpha x}\sin\beta x\,,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x\,,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x\,, \ldots,$$
$$x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\,,\ e^{r_{2k+1}x}\,,\ e^{r_n x}\}$$

Równanie niejednorodne

Równanie niejednorodne

Metoda przewidywań

Równanie niejednorodne

Metoda przewidywań

Stosuje się, gdy:

(1) równanie jest o stałych współczynnikach,

(2) $f(x) = e^{\alpha x}\left[W_1(x)\cos\beta x + W_2(x)\sin\beta x\right]$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, W_1, W_2 - wielomiany

Przewidujemy wtedy *CSRN* w postaci:

$$y_1(x) = x^k \cdot e^{\alpha x}\left[V_1(x)\cos\beta x + V_2(x)\sin\beta x\right]$$

gdzie V_1, V_2 - wielomiany w postaci ogólnej takie, że
$\deg V_1 = \deg V_2 = \max(\deg W_1, \deg W_2)$

$k =$ krotność pierwiastka $\alpha + i\beta$ w równaniu charakterystycznym

Przewidujemy wtedy *CSRN* w postaci:

$$y_1(x) = x^k \cdot e^{\alpha x} \left[V_1(x)\cos\beta x + V_2(x)\sin\beta x\right]$$

gdzie V_1, V_2 - wielomiany w postaci ogólnej takie, że
$\deg V_1 = \deg V_2 = \max(\deg W_1, \deg W_2)$

$k =$ krotność pierwiastka $\alpha + i\beta$ w równaniu charakterystycznym

Przykład:

$$y'' - 4y' = 8x\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1$$

$RJ:\ r^2 - 4r = r(r-4) = 0 \Rightarrow r_1 = 0\,,\ r_2 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_0(x) = C_1 + C_2 e^{4x}$

$$RN: \; f(x) = 8x \Rightarrow \alpha = 0\,,\; \beta = 0 \Rightarrow \alpha + i\beta = 0 = r_1 \Rightarrow k = 1$$

Przewidujemy

$$CSRN: \; y_1 = x\cdot(Ax+B) = Ax^2+Bx\,, \quad y_1' = 2Ax+B\,, \quad y_1'' = 2A$$

$$2A - 4(2Ax + B) = 8x \Rightarrow \begin{cases} 2A - 4B = 0 \\ -8A = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$CORN: \; y(x) = C_1 + C_2e^{4x} - x^2 - \tfrac{1}{2}x$$

Podstawiamy warunek początkowy i wyznaczamy CS:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 4C_2 - \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{9}{8} \\ C_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$CSRN: \; y(x) = \tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{8}e^{4x} - x^2 - \tfrac{1}{2}x$$

Metoda uzmienniania stałych dla $n = 2$

Metoda uzmienniania stałych dla $n = 2$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$CORJ: \; y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Metoda uzmienniania stałych dla $n = 2$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$CORJ: \; y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Szukamy funkcji $C_1(x)$, $C_2(x)$ takich, żeby funkcja $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ spełniała RN.

Metoda uzmienniania stałych dla $n = 2$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$CORJ: \; y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Szukamy funkcji $C_1(x)$, $C_2(x)$ takich, żeby funkcja $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ spełniała RN.

Muszą one spełniać następujące warunki:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Metoda uzmienniania stałych dla $n = 2$

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

$CORJ: \ y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Szukamy funkcji $C_1(x)$, $C_2(x)$ takich, żeby funkcja $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ spełniała RN.

Muszą one spełniać następujące warunki:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Powyższy układ równań jest układem Cramera i ma dokładnie jedno rozwiązanie (C_1', C_2').

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-f(x) \cdot y_2}{y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2} \Rightarrow C_1(x) = \int C_1'(x)\, dx$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{y_1 \cdot f(x)}{y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2} \Rightarrow C_2(x) = \int C_2'(x)\, dx$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-f(x)\cdot y_2}{y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2} \Rightarrow C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{y_1\cdot f(x)}{y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2} \Rightarrow C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx$$

Przykład:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow CORJ: \; y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\cos x + C_2'(x)\cdot\sin x = 0 \\ C_1'(x)\cdot(-\sin x) + C_2'(x)\cdot\cos x = \frac{1}{\sin x} \end{cases} \qquad W(x) = 1$$

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow C_1(x) = \int C_1'(x)\, dx = -x + C_1$$

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = -x + C_1$$

$$C_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx = \ln|\sin x| + C_2$$

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow C_1(x) = \int C_1'(x)\, dx = -x + C_1$$

$$C_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_2(x) = \int C_2'(x)\, dx = \ln|\sin x| + C_2$$

$$CORN: \; y(x) = (-x + C_1)\cos x + (\ln|\sin x| + C_2)\sin x =$$
$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$