ANA1 Rozwiązania

Z_{11}

1. Zbadaj istnienie granicy podwójnej $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, jeśli:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+2y^2}, \quad (x_0,y_0) = (0,0),$

Skorzystamy z definicji Cauchy'ego: $|f(x,y)-g| < \varepsilon$ dla $(x,y) \in S((0,0),\delta)$ i pokażemy, że granica wynosi 0.

$\left|\frac{x^3y}{x^2+2y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| = \left|x^2 \cdot \frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x|^2 < \varepsilon$

skorzystaliśmy tutaj z oszacowania $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ które wynika z wzoru skróconego mnożenia $(|x|-|y|)^2 \geqslant 0$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x+y-2}{x^2+y^2-2}, \quad (x_0,y_0) = (1,1),$

W tym przykładzie pokażemy, że granica nie istnieje korzystając z definicji Heinego. Wystarczy wskazać dwa ciągi dążące do punktu $(1,1)$, dla których funkcja dąży do różnych granic:

$\left(1, 1+\frac{1}{n}\right) \to (1,1)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(1, 1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2} =$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

$\left(1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) \to (1,1)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{2}{n^2}} = 0$

$\Rightarrow$ granica nie istnieje

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, \quad (x_0,y_0) = (0,0),$

Granica nie istnieje, ponieważ:

$\left(0, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$

$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \to (0,0)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{2}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x-xy}{2x^2+(y-1)^2}, \quad (x_0,y_0) = (0,1).$

$f(x,y) = \frac{x(1-y)}{2x^2+(y-1)^2}$

Granica nie istnieje, ponieważ:

$\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) \to (0,1)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$

$\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) \to (0,1)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(0, 1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{3}$

2. Oblicz, jeśli istnieją, pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, jeśli:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(3x^2+y^2)}{x^3}, & \text{gdy} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad x = 0, \end{cases}$

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{3x^2}{2}}{x^4} =$
$= \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{\sin \frac{3}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin \frac{3}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$,

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x} = 1\,, \qquad f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{-y^3}}{y} = -1$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y}{x^2+y^2}, & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1$

$f_y(0,0)\ :\ \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y}{y^2}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2} = +\infty \Rightarrow f_y(0,0)$ - nie istnieje

3. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x,y)$ w punkcie (x_0,y_0) oraz istnienie pochodnych cząstkowych w tym punkcie, jeśli:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad (x_0,y_0) = (0,0),$

Funkcja jest nieciągła w $(0,0)$, ponieważ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nie istnieje:

$\left(\frac{1}{n},0\right) \to (0,0)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$

$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$

Pochodne cząstkowe funkcji w $(0,0)$ istnieją:

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0\,, \qquad f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}, \quad (x_0,y_0) = (0,0).$

Funkcja jest ciągła w $(0,0)$, pochodna cząstkowa nie istnieje:

$f_y(0,0)\ :\ \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{y^2}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{y}$ - nie istnieje

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

Uwaga: Dla funkcji wielu zmiennych ciągłość i istnienie pochodnych cząstkowych jest od siebie niezależne.

4. Zbadaj istnienie i ciągłość pochodnej cząstkowej $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ w punkcie $(0,0)$, jeśli

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{gdy} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{gdy} \quad (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

Dla $(x,y)\neq(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^3y(x^2+y^2)^2-x^3y^2\cdot 4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{2x^3y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$

Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}$ jest nieciągła w $(0,0)$, bo $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\neq\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, np. dla

$\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\to(0,0)\ :\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^4}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}\right)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{12}{n^6}}{\frac{5^3}{n^6}}=-\frac{12}{5^3}\neq 0$

5. Wyznacz, o ile istnieją, ekstrema właściwe funkcji $f(x,y)$, jeśli:

   (a) $f(x,y)=\ln(2xy)-2x^2-y^2$,

   $D_f\ :\ (x>0\ \wedge\ y>0)\ \vee\ (x<0\ \wedge\ y<0)\,,\quad f\in C^2(D_f)$

   Punktami podejrzanymi o istnienie ekstremów są punkty krytyczne stacjonarne, możemy też stosować warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji.

   Wyznaczamy punkty stacjonarne:

   $$\begin{cases} f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2y}{2xy}-4x=0\\ \frac{2x}{2xy}-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1-4x^2}{x}=0\\ \frac{1-2y^2}{y}=0\end{cases}\Rightarrow$$
   $$\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{2}\ \vee\ x=-\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \vee\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow P_0=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,,\ P_1=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

   Sprawdzamy, czy w punktach stacjonarnych są ekstrema funkcji:

   $f_{xx}=-\frac{1}{x^2}-4\quad f_{yy}=-\frac{1}{y^2}-2\,,\quad f_{xy}=0$

   $$W(x,y)=\begin{vmatrix}-\frac{1}{x^2}-4 & 0\\ 0 & -\frac{1}{y^2}-2\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{x^2}+4\right)\left(\frac{1}{y^2}+2\right)>0\quad\forall(x,y)$$

   $\wedge\ f_{xx}(P_k)<0\,,\ \ k=0,1\Rightarrow f(P_0)=f(P_1)=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-1$ - maksima lokalne właściwe

(b) $f(x,y)=x+8y+\dfrac{1}{xy}$,

$D_f\ :\ x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0\,,\quad f\in C^{\,2}(D_f)$

Wyznaczamy punkty stacjonarne:

$$\left\{\begin{array}{l} f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-\frac{1}{x^2y}=0\\ 8-\frac{1}{xy^2}=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2y-1}{x^2y}=0\\ \frac{8xy^2-1}{xy^2}=0\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2y=1\\ 8xy^2=1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{x^2}\\ \frac{8x}{x^4}=1\end{array}\right. \Rightarrow P_0=\left(2,\tfrac{1}{4}\right)$$

Sprawdzamy, czy w punkcie stacjonarnym jest ekstremum funkcji:

$f_{xx}=\frac{2}{x^3y}\quad f_{yy}=\frac{2}{xy^3}\,,\quad f_{xy}=\frac{1}{x^2y^2}$

$$W(P_0)=\left|\begin{array}{cc} 1 & 4\\ 4 & 4^3\end{array}\right|>0\ \ \wedge\ \ f_{xx}(P_0)>0\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(P_0)=6$ - minimum lokalne właściwe

(c) $f(x,y)=(2x+y^2)e^x$,

$f(x,y)=2xe^x+y^2e^x\,,\quad f\in C^{\,2}(\mathbb{R}^2)$

Wyznaczamy punkty stacjonarne:

$$\left\{\begin{array}{l} f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} e^x(2+2x+y^2)=0\\ 2ye^x=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 2+2x=0\\ y=0\end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow P_0=(-1,0)$

Sprawdzamy, czy w punkcie stacjonarnym jest ekstremum funkcji:

$f_{xx}=e^x(4+2x+y^2)\quad f_{yy}=2e^x\,,\quad f_{xy}=2ye^x$

$$W(P_0)=\left|\begin{array}{cc} 2e^{-1} & 0\\ 0 & 2e^{-1}\end{array}\right|>0\ \ \wedge\ \ f_{xx}(P_0)>0\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(P_0)=-2e^{-1}$ - minimum lokalne właściwe

(d) $f(x,y)=2x^2-x^3y^2-\ln x$,

$D_f\ :\ x>0\,,\quad f\in C^{\,2}(D_f)$

Wyznaczamy punkty stacjonarne:

$$\left\{\begin{array}{l} f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 4x-3x^2y^2-\frac{1}{x}=0\\ -2x^3y=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{4x^2-3x^3y^2-1}{x}=0\\ x^3y=0\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 4x^2-1=0\\ y=0\end{array}\right. \Rightarrow P_0=\left(\tfrac{1}{2},0\right)$$

Sprawdzamy, czy w punkcie stacjonarnym jest ekstremum funkcji:

$f_{xx}=4-6xy^2+\frac{1}{x^2}\quad f_{yy}=-2x^3\,,\quad f_{xy}=-6x^2y$

$$W(P_0)=\left|\begin{array}{cc} 8 & 0\\ 0 & -2^4\end{array}\right|<0\Rightarrow \text{brak ekstremum w } P_0$$

6. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x,y) = xy^2$.

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

Wyznaczamy punkty stacjonarne:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$W(x,0) = 0$, więc twierdzenie nie rozstrzyga istnienia ekstremów, musimy zbadać istnienie ekstremów w punktach $(x,0)$ dla $x \in \mathbb{R}$ z definicji:

$f(x,0) = 0$

$\forall\, x > 0\,,\ |y| < \varepsilon \quad f(x,y) > 0 \Rightarrow f(x,0) = 0$ - minimum lokalne niewłaściwe

$\forall\, x < 0\,,\ |y| < \varepsilon \quad f(x,y) < 0 \Rightarrow f(x,0) = 0$ - maksimum lokalne niewłaściwe

w punkcie $(0,0)$ funkcja nie ma ekstremum, bo w dowolnym sąsiedztwie tego punktu funkcja przyjmuje wartości zarówno większe jak i mniejsze od 0.