WYKŁAD 7

Niech X oznacza przedział w $\mathbb{R}$;
Przez $C^n(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji, które mają ciągłe pochodne do n – tego rzędu włącznie na przedziale X.
Jeżeli funkcja $f \in C^n(X)$, to mówimy, że f jest klasy C^n na zbiorze X.

Twierdzenie 1. (o całkowaniu przez podstawienie $t = h(x)$). $(X \xrightarrow{h} T \xrightarrow{f} \mathbb{R})$. Jeżeli

1. funkcja h jest klasy C^1 na przedziale X i $T = h(X)$;
2. funkcja f posiada funkcję pierwotną F na przedziale T

to prawdziwa jest równość

$$\int f(h(x))h'(x)dx = \int f(t)dt = F(h(x)) + C\,,\; C \in \mathbb{R}.$$

Uwaga 1. Prawdziwe są wzory:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+K}} &= \ln|x + \sqrt{x^2+K}| + C \\
\int \sqrt{x^2+K}dx &= \frac{K}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+K}| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+K} + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \arcsin\frac{x}{a} + C \\
\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \frac{a^2}{2}\arcsin xa + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C
\end{aligned}$$

Całkowanie funkcji wymiernych

Całkowanie funkcji wymiernych właściwych (st L< st M) polega na rozkładzie takiej funkcji na ułamki proste i całkowaniu każdego składnika rozkładu.

Ułamki proste pierwszego rodzaju: $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $a, A \in \mathbb{R}$;

Ułamki proste drugiego rodzaju: $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, $A, B, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ i wielomian x^2+px+q jest nierozkładalny.

Całkowanie ułamków pierwszego rodzaju

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} \dfrac{A}{(1-n)} \cdot \dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + C & , \quad n \neq 1 \\ A \cdot \ln|x-a| + C & , \quad n = 1 \end{cases}$$

Całkowanie ułamków drugiego rodzaju

1. Jeśli w liczniku $A=0$, to po sprowadzeniu funkcji kwadratowej x^2+px+q do postaci kanonicznej i odpowiednim podstawieniu otrzymujemy całkę $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$.
   Jeśli $n \geqslant 2$, to dodatkowo korzysta się ze wzoru rekurencyjnego:
   $$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$
2. Jeśli licznik $Ax+B$ jest pochodną wielomianu x^2+px+q, to podstawienie $t = x^2+px+q$ sprowadza całkowanie takiego ułamka do obliczenia całki z ułamka pierwszego rodzaju.
3. Jeśli $A \neq 0$ i $Ax+B \neq 2x+p$, to korzystając z rozkładu $Ax+B = A_1(2x+p)+B_1$ sprowadzamy obliczenie całki do przypadków omówionych powyżej.

Twierdzenie 2. (o całkowaniu przez podstawienie $x=\phi(t)$) ($T \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$) Jeżeli

1. funkcja ϕ jest różnowartościowa i klasy C^1 na przedziale T i $X=\phi(T)$;
2. funkcja f posiada funkcję pierwotną na przedziale X

to prawdziwa jest równość
$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = F(\phi^{-1}(x)) + C\,,$$
gdzie F oznacza funkcję pierwotną funkcji podcałkowej w całce po prawej stronie.

Całka oznaczona

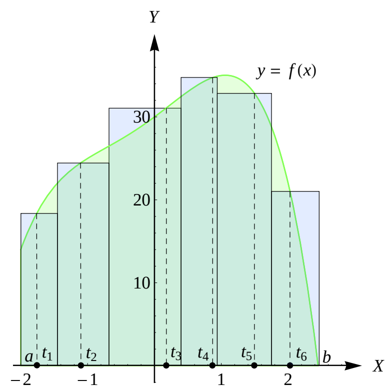
Zał. f jest funkcją ograniczoną na przedziale $\langle a;b\rangle$.
Niech n – ustalona liczba naturalna.
Dzielimy przedział $\langle a;b\rangle$ na n części punktami:
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$
Oznaczmy:
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1,\ldots,n$ oraz $\delta_n \overset{df}{=} \max \Delta x_k$.

W ten sposób tworzymy ciąg podziałów (Δ_n) przedziału $\langle a;b\rangle$.

Definicja 1. Ciąg podziałów (Δ_n) przedziału $\langle a;b\rangle$ jest normalny, jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

Niech (Δ_n) – ustalony normalny ciąg podziałów przedziału $\langle a;b\rangle$.

Przy ustalonym Δ_n w każdym podprzedziale wybieramy dowolnie punkt $t_k \in \langle x_{k-1};x_k\rangle$ i tworzymy sumę
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$$
(jeśli $f \geqslant 0$ i f – jest ciągła, to S_n jest liczbowo równa sumie pól prostokątów, wypełniających obszar między wykresem funkcji f, osią OX i odcinkami prostych $x=a$, $x=b$).



Definicja 2. Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów (Δ_n) przedziału $\langle a; b\rangle$ ciąg (S_n) jest zbieżny do tej samej granicy właściwej, niezależnej od wyboru punktów t_k, to wartość tej granicy nazywamy całką oznaczoną (R-całką, całką Riemanna) funkcji f na przedziale $\langle a; b\rangle$ i oznaczamy

$$\int_a^b f(x)dx$$

funkcję f nazywamy całkowalną w sensie Riemanna lub R-całkowalną.
a – dolna granica całkowania,
b – górna granica całkowania.