Algebra liniowa

Z_7

1. Czy istnieje macierz X, dla której poniższe równanie macierzowe jest prawdziwe? Jeśli tak, to podać sposób wyznaczenia tej macierzy.
a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$,
c) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Niech ϕ będzie symetrią płaszczyzny względem prostej $y = 2x$. Niech ponadto $\mathcal{E} = ((1,0),(0,1))$ i $\mathcal{A} = ((1,2),(2,-1))$ będą bazami przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Wyznaczyć macierze zmiany bazy $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}}(id)$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(id)$, a następnie obliczyć $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$. Wyznaczyć wzór przekształcenia ϕ.

3. Dane są przekształcenia płaszczyzny $\mathbb{R}^2$: ϕ - rzut prostokątny na prostą $y = -x$ oraz ψ - obrót o kąt $\frac{\pi}{8}$ wokół punktu $(0,0)$. Wyznaczyć macierze przekształcenia: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi^2 \circ \psi^4)$ oraz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi^2 \circ \psi^4)$, gdzie $\mathcal{E}$ to baza kanoniczna $\mathbb{R}^2$, zaś $\mathcal{A} = ((1,1),(-1,0))$. Wyznaczyć wzór tego przekształcenia.

4. Wykazać, że $\mathcal{A} = ((1,2,1),(-1,1,2),(-1,-2,0))$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znaleźć w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne wektorów $B_1 = (3,3,1)$, $B_2 = (0,3,1)$, $B_3 = (3,0,1)$. Czy $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Jeśli tak, to wyznaczyć macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id)$. Jak wyznaczyć macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id)$? Dla przekształcenia liniowego $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określonego wzorem $\phi((x,y,z)) = (x, x-y, x+2y-z)$ znaleźć macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\phi)$.

5. Wykazać, że układ $\mathcal{A} = (x+2, x^2+3x+1, -x^2-2x, x^3)$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$. Wyznaczyć macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id)$, dla $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$. Podać współrzędne wektora $2x^3 - 5x - 5$ w bazie $\mathcal{A}$. Wyznaczyć macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F)$ przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$, $F(w(x)) = x \cdot w'(x)$.

6. Dane jest przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]_2$ takie, że $\varphi((1,1,1)) = 2x^2 - 3x$, $\varphi((1,2,3)) = -3x$, $\varphi((1,2,4)) = 2x^2 - 4x$. Wyznaczyć wzór ogólny $\varphi((a,b,c))$. *Komentarz:* To jest zad.4 z zestawu 5, ale tym razem rozwiązujemy je wykorzystując rachunek macierzowy.