Stan ustalony przy pobudzeniu stałym

Obwód prądu stałego – wszystkie wymuszenia są stałe.
Przykład: w chwili $t = 0$ do źródła (Thévenina) o parametrach $e_T = E_0$, R_w dołączamy rozładowaną pojemność C.

$$u = e_T - R_w i, \quad i = C\mathrm{D}u \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{R_w C}_{\tau}\mathrm{D}u + u = e_T$$

R-nie różniczkowe liniowe $\Longrightarrow$ rozwiązanie $=$ CORJ $+$ CSRN.
CORJ: $\tau \mathrm{D}u_p + u_p = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_p = Ae^{-t/\tau}$
CSRN: *przewidujemy* w postaci takiej, jak wymuszenie (stałe), więc wystarczy formalnie podstawić $\mathrm{D} \longrightarrow 0$: $u_u = B$,

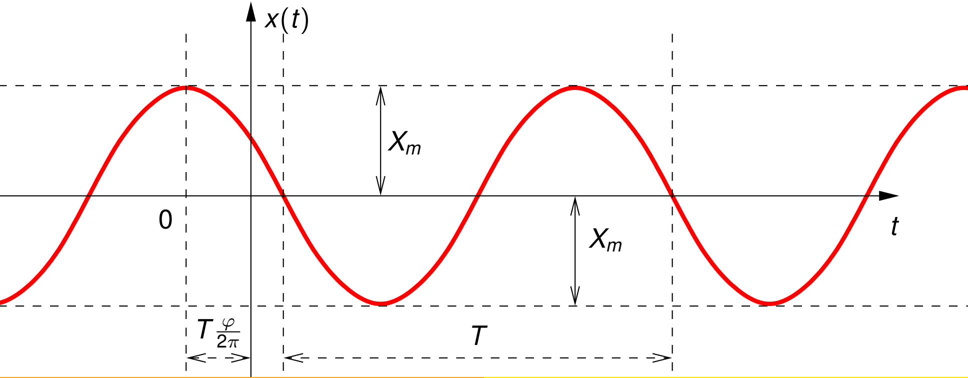
$$u = \underbrace{Ae^{-t/\tau}}_{u_p \overset{t\to\infty}{\to} 0} + \underbrace{B}_{u_u}$$

- Składowa przejściowa zanika – stan układu *ustala się*.
- W stanie ustalonym układ zachowuje się jak bezinercyjny.
- W układach bezinercyjnych nie ma składowej przejściowej.

Sygnały sinusoidalne i ich parametry

Sygnał sinusoidalny o okresie T ($f = 1/T$ [Hz], $\omega = 2\pi f$ [rad/s])

$$x(t) = \underbrace{X_m}_{\substack{\text{amplituda}\\ >0}} \cos(\underbrace{\omega}_{\text{pulsacja}} t + \underbrace{\varphi}_{\text{faza pocz.}})$$



Stan ustalony przy pobudzeniu sinusoidalnym

Układ *liniowy* prądu sinusoidalnie zmiennego – wszystkie wymuszenia są sinusoidalne *o tej samej częstotliwości* (f).
Przykład: w chwili $t = 0$ do źródła (Thévenina) o parametrach $e_T = E_m \cos 2\pi ft$, R_w dołączamy rozładowaną pojemność C.

$$u = e_T - R_w i, \quad i = C\mathrm{D}u \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{R_w C}_{\tau}\mathrm{D}u + u = e_T$$

R-nie różniczkowe liniowe $\Longrightarrow$ rozwiązanie = CORJ + CSRN.
CORJ: $\tau \mathrm{D}u_p + u_p = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_p = Ae^{-t/\tau}$
CSRN: *przewidujemy* w postaci takiej, jak wymuszenie (sinus.)

$$u = \underbrace{Ae^{-t/\tau}}_{u_p \overset{t\to\infty}{\to} 0} + \underbrace{B\cos(2\pi ft + \varphi)}_{u_u}$$

- Składowa przejściowa zanika – stan układu *ustala się*.
- W stanie ustalonym w układzie *liniowym* wszystkie przebiegi są sinusoidalne o tej samej częstotliwości (f).

Stan ustalony przy pobudzeniu sinusoidalnym – c.d.

Teoria obwodów…

…to prawa Kirchhoffa i równania elementów.

W układach *liniowych* wykorzystują one następujące operacje:

- prawa Kirchhoffa: sumy (i różnice) napięć i prądów
- równania elementów:
  - sumy (M)
  - pochodne (C, L, M)
  - mnożenie przez stałą (R, G, C, L, M, źródła sterowane)

W stanie ustalonym układu *liniowego* prądu sinusoidalnego…

…wszystkie napięcia i prądy są przebiegami sinusoidalnymi.

Musimy umieć efektywnie obliczać iloczyny przez stałą, pochodne i sumy przebiegów sinusoidalnie zmiennych.

Suma sygnałów sinusoidalnych

$$
\begin{aligned}
x_1 &= X_{m1}\cos(\omega t+\varphi_1) = \underbrace{X_{m1}\cos\varphi_1}_{C_1}\cos\omega t - \underbrace{X_{m1}\sin\varphi_1}_{S_1}\sin\omega t \\
x_2 &= X_{m2}\cos(\omega t+\varphi_2) = \underbrace{X_{m2}\cos\varphi_2}_{C_2}\cos\omega t - \underbrace{X_{m2}\sin\varphi_2}_{S_2}\sin\omega t \\
x &= x_1 + x_2 = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C}\cos\omega t - \underbrace{(S_1 + S_2)}_{S}\sin\omega t = \\
&= \underbrace{\sqrt{C^2+S^2}}_{X_m}\left(\underbrace{\frac{C}{\sqrt{C^2+S^2}}}_{\cos\varphi}\cos\omega t - \underbrace{\frac{S}{\sqrt{C^2+S^2}}}_{\sin\varphi}\sin\omega t\right) \\
&= X_m\cos(\omega t+\varphi)
\end{aligned}
$$

Suma sygnałów sinusoidalnych o tej samej pulsacji . . .

. . . jest także sygnałem sinusoidalnym o takiej samej pulsacji. . .

. . . ale policzenie jego parametrów (X_m, φ) jest dość żmudne!

Metoda wskazowa (Arthur E. Kennelly, 1893)

Wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie sygnałom sinus. liczb zespolonych (tzw. *wskazów* albo *amplitud zespolonych*):

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \longleftrightarrow \quad X = X_m e^{j\varphi} = X_m \cos\varphi + jX_m \sin\varphi$$

Taka sama dla wszystkich sygnałów $\omega \Longrightarrow$ parametry X_m, φ

„Matematyczne" odtwarzanie sygnału na podstawie wskazu:

$$x(t) = \frac{X}{2} e^{j\omega t} + \frac{X^*}{2} e^{-j\omega t} = \mathfrak{Re}\left(X e^{j\omega t}\right)$$

Sumie sygnałów odpowiada suma wskazów:

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &= \frac{X_1}{2} e^{j\omega t} + \frac{X_1^*}{2} e^{-j\omega t} + \frac{X_2}{2} e^{j\omega t} + \frac{X_2^*}{2} e^{-j\omega t} = \\ &= \frac{(X_1 + X_2)}{2} e^{j\omega t} + \frac{(X_1 + X_2)^*}{2} e^{-j\omega t} \quad \longleftrightarrow \quad X_1 + X_2 \end{aligned}$$

Przekształcenia trygonometryczne $\longrightarrow$ działania zespolone.

Pozostałe operacje na sygnałach sinusoidalnych

Mnożeniu sygnału przez stałą $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha x(t) = \alpha\left(\frac{X}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{X^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) = \frac{(\alpha X)}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{(\alpha X)^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \quad \longleftrightarrow \quad \alpha X$$

odpowiada mnożenie wskazu przez liczbę *rzeczywistą* α.
Różniczkowaniu/całkowaniu sygnału ($\mathrm{D} \overset{\text{ozn.}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$):

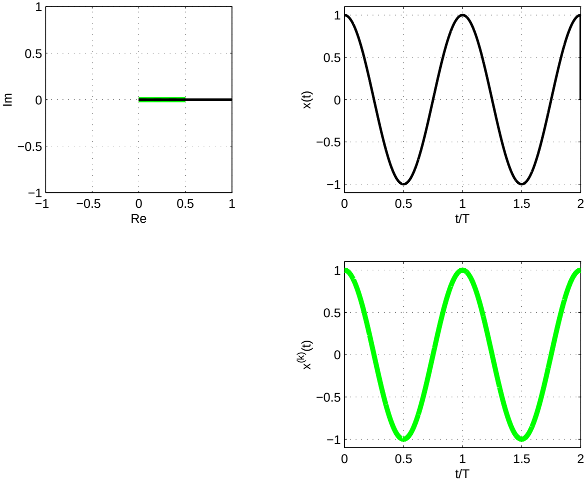
$$\begin{aligned} \mathrm{D}x(t) &= \mathrm{D}\left(\frac{X}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{X^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) = \frac{X}{2}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{X^*}{2}(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} = \\ &= \frac{(\mathrm{j}\omega X)}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{(\mathrm{j}\omega X)^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{j}\omega X \end{aligned}$$

odpowiada mnożenie/dzielenie wskazu przez liczbę *urojoną* $\mathrm{j}\omega$.

Operacje na sygnałach sinus. i na wskazach (*algebraizacja*)

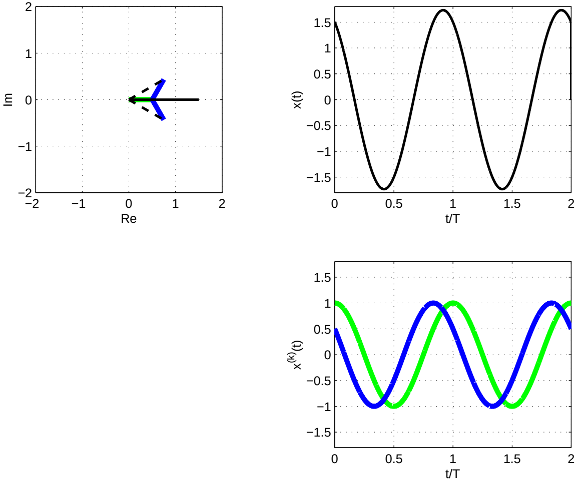
$\sum x(t) \longleftrightarrow \sum X, \qquad \alpha \cdot x(t) \longleftrightarrow \alpha \cdot X, \qquad \mathrm{D}x(t) \longleftrightarrow \mathrm{j}\omega \cdot X$

Graficzna interpretacja wskazów: $x(t) = \frac{X}{2}e^{j\omega t} + \frac{X^*}{2}e^{-j\omega t}$



- wskaz $\times(\pm j) \Longrightarrow$ obrót o $\pm\pi/2$ (w lewo $\overset{\triangleleft}{\bigcirc}$ / w prawo $\overset{\triangleright}{\bigcirc}$)

Graficzna interpretacja wskazów: $x(t) = \frac{X}{2}e^{j\omega t} + \frac{X^*}{2}e^{-j\omega t}$



- wskaz *wyprzedza* $\Longrightarrow$ na pł. $\mathbb{C}$ i na osi t bardziej w *lewo*

Praktyczne rachunki na liczbach zespolonych

Niech $X_k = |X_k|e^{j\varphi_k} = A_k + jB_k$, $k = 1, 2$. Przy dodawaniu i odejmowaniu wygodniejsza jest postać kartezjańska, a przy potęgowaniu, mnożeniu i dzieleniu – wykładnicza.

$$X_1 \pm X_2 = (A_1 \pm A_2) + j(B_1 \pm B_2) \qquad X_1^\beta = |X_1|^\beta e^{j\beta\varphi_1}$$

$$X_1 \cdot X_2 = (|X_1| \cdot |X_2|)e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad X_1/X_2 = (|X_1|/|X_2|)e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Zamiana jednej postaci na drugą (np. $\boxed{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{R}}$ na kalkulatorze):

$$|X| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(B/A) & \text{I,IV ćw.} \\ \operatorname{arc\,tg}(B/A) + \pi & \text{II ćw.} \\ \operatorname{arc\,tg}(B/A) - \pi & \text{III ćw.} \end{cases} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{|X| + A} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{|X| - A}{B}$$

Możliwie wcześnie wstawiamy wartości liczbowe do wzorów.

Spójne jednostki: [V], [mA], [kΩ], [mS], [mH], [nF], [Mrad/s].

Źródło zadane funkcją sin, a nie cos: $\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$.

„Ujemna amplituda” sygnału: $-\cos\alpha = \cos(\alpha \pm \pi)$.