Analiza zespolona cz.1

ANA2 - AiR

Ewa Stróżyna

Funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej

Funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej

Definicja

Jeśli każdej liczbie $t \in [\alpha, \beta]$ przyporządkujemy liczbę zespoloną

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

to mówimy, że w przedziale $[\alpha, \beta]$ została określona *funkcja zespolona $z(t)$ zmiennej rzeczywistej t*.

$$\mathbb{R} \supset [\alpha, \beta] \ni t \to z = x + iy = z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$$

Funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej

Definicja

Jeśli każdej liczbie $t \in [\alpha, \beta]$ przyporządkujemy liczbę zespoloną

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

to mówimy, że w przedziale $[\alpha, \beta]$ została określona *funkcja zespolona $z(t)$ zmiennej rzeczywistej t*.

$$\mathbb{R} \supset [\alpha, \beta] \ni t \to z = x + iy = z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$$

Uwaga:

$$z(t) = x(t) + iy(t) \iff \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

Twierdzenie

Funkcja zespolona $z(t)$ zmiennej rzeczywistej t:

1. ma w punkcie t_0 granicę $z(t_0) = x(t_0) + iy(t_0)$,
2. jest ciągła w punkcie t_0,
3. ma w punkcie t_0 pochodną $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$,
4. jest całkowalna w przedziale $[\alpha, \beta]$ i
   $\int_\alpha^\beta z(t)\,dt = \int_\alpha^\beta x(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta y(t)\,dt$

$\iff$ obie funkcje rzeczywiste $x(t), y(t)$ spełniają warunki:

1. mają w punkcie t_0 granice $x(t_0)$ i $y(t_0)$,
2. są ciągłe w punkcie t_0,
3. mają w punkcie t_0 pochodne $x'(t_0)$ i $y'(t_0)$,
4. są całkowalne w przedziale $[\alpha, \beta]$.

Wnioski

(1) Jeśli funkcja $z(t) = x(t) + iy(t)$ jest ciągła w przedziale $[\alpha, \beta]$, to funkcja $g(\tau)$ określona wzorem:

$$g(\tau) = \int_{\alpha}^{\tau} z(t)\,dt \qquad \tau \in [\alpha, \beta]$$

jest funkcją pierwotną funkcji $z(t)$ w $[\alpha, \beta]$.

(2) Jeśli $G(t)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $z(t) = x(t) + iy(t)$ w przedziale $[\alpha, \beta]$, tzn. $G'(t) = z(t)$, to

$$\int_{\alpha}^{\beta} z(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Wnioski c.d.

(3) Jeśli funkcja $z(t) = x(t) + iy(t)$ jest całkowalna w przedziale $[\alpha, \beta]$, to

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} z(t)\, dt \right| \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} |z(t)|\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\, dt$$

Wnioski c.d.

(3) Jeśli funkcja $z(t) = x(t) + iy(t)$ jest całkowalna w przedziale $[\alpha, \beta]$, to

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} z(t)\, dt \right| \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} |z(t)|\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\, dt$$

Uwaga:

(1) Granicę i ciągłość funkcji $z = z(t)$ określamy podobnie jak dla funkcji rzeczywistych, pochodna funkcji $z = z(t)$ w punkcie t_0 jest zadana wzorem $z'(t_0) = x'(t_0) + i \cdot y'(t_0)$.

(2) Różniczkowanie i całkowanie funkcji zespolonych zmiennej rzeczywistej przeprowadza się w ten sam sposób, co różniczkowanie i całkowanie funkcji rzeczywistych, gdzie liczba i jest stałą.

Interpretacja geometryczna:

Jeśli funkcja $z = z(t) \neq \mathrm{const}$ jest ciągła to

$$\{z \in \mathbb{C} : z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]\} \subset \mathbb{C}$$

jest krzywą w $\mathbb{C}$ o początku $z(\alpha)$ i końcu $z(\beta)$.
Równania $x(t), y(t)$ są wtedy równaniami parametrycznymi tej krzywej.

Interpretacja geometryczna:

Jeśli funkcja $z = z(t) \neq \mathrm{const}$ jest ciągła to

$$\{z \in \mathbb{C} : z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]\} \subset \mathbb{C}$$

jest krzywą w $\mathbb{C}$ o początku $z(\alpha)$ i końcu $z(\beta)$.
Równania $x(t), y(t)$ są wtedy równaniami parametrycznymi tej krzywej.

Styczna do krzywej $z = z(t)$ w punkcie $z(t_0)$ ma równanie:

$$z = z(t_0) + z'(t_0) \cdot t\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

i tworzy z osią rzeczywistą kąt $\varphi = \arg z'(t_0)$.

Równanie prostej przechodzącej przez punkty z_1 i z_2 ma postać:

$$z = z_1 + (z_2 - z_1) \cdot t\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

Okrąg o środku z_0 i promieniu r ma postać:

$$z = z_0 + re^{it}\,, \quad t \in [0, 2\pi], \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

Przykłady:

(1) $z(t) = t + i \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow xy = 1$ - hiperbola

Przykłady:

(1) $z(t) = t + i \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow xy = 1$ - hiperbola

(2) $z(t) = (1+i)t \Rightarrow \begin{cases} x = t\,, \\ y = t\,, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ prosta $y = x$

Przykłady:

(1) $z(t) = t + i \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow xy = 1$ - hiperbola

(2) $z(t) = (1+i)t \Rightarrow \begin{cases} x = t\,, \\ y = t\,, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ prosta $y = x$

(3) $z = (1+i) + (1+2i)t^2 \Rightarrow z'(t) = 2(1+2i)t$

Przykłady:

(1) $z(t) = t + i \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow xy = 1$ - hiperbola

(2) $z(t) = (1+i)t \Rightarrow \begin{cases} x = t\,, \\ y = t\,, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ prosta $y = x$

(3) $z = (1+i) + (1+2i)t^2 \Rightarrow z'(t) = 2(1+2i)t$

(4) $z(t) = (1+2it)e^{2t} \Rightarrow z'(t) = 2ie^{2t} + 2(1+2it)e^{2t}$

Przykłady:

(1) $z(t) = t + i \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow xy = 1$ - hiperbola

(2) $z(t) = (1+i)t \Rightarrow \begin{cases} x = t\,, \\ y = t\,, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ prosta $y = x$

(3) $z = (1+i) + (1+2i)t^2 \Rightarrow z'(t) = 2(1+2i)t$

(4) $z(t) = (1+2it)e^{2t} \Rightarrow z'(t) = 2ie^{2t} + 2(1+2it)e^{2t}$

(5) $\int_0^2 (t + it^2)\,dt = \left. \frac{t^2}{2} + i\frac{t^3}{3} \right|_0^2 = 2 + \frac{8}{3}i$

Przykłady:

(1) $z(t) = t + i \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow xy = 1$ - hiperbola

(2) $z(t) = (1+i)t \Rightarrow \begin{cases} x = t\,, \\ y = t\,, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ prosta $y = x$

(3) $z = (1+i) + (1+2i)t^2 \Rightarrow z'(t) = 2(1+2i)t$

(4) $z(t) = (1+2it)e^{2t} \Rightarrow z'(t) = 2ie^{2t} + 2(1+2it)e^{2t}$

(5) $\int_0^2 (t + it^2)\, dt = \left. \frac{t^2}{2} + i\frac{t^3}{3} \right|_0^2 = 2 + \frac{8}{3}i$

(6) $\int_1^2 (\cos 2t + i \sin 2t)\, dt = \left. \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{i}{2}\cos 2t \right|_1^2 =$
$= \frac{1}{2}[\sin 4 - \sin 2 + i(\cos 2 - \cos 4)]$

Postać zespolona szeregu Fouriera

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}}$$

Postać zespolona szeregu Fouriera

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}}$$

Przykład:

$f(x) = e^{-x}, \quad x \in (-\pi, \pi)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\pi} \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx = \frac{e^{-(1+in)x}}{2\pi(1+in)} \Big|_{\pi}^{-\pi} =$$
$$= \frac{e^{(1+in)\pi} - e^{-(1+in)\pi}}{2\pi(1+in)} = \frac{e^{\pi} \cdot e^{in\pi} - e^{-\pi} \cdot e^{-in\pi}}{2\pi(1+in)} = \frac{(-1)^n \cdot (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1+in)}$$

$$e^{-x} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{1+in}\,, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

W punktach $x = \pm\pi$ sumą szeregu są wartości dirichletowskie, czyli $\frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi})$.

Aby z postaci zespolonej przejść do postaci rzeczywistej szeregu Fouriera należy zsumować wyrazy o indeksach n i $-n$ i zastosować wzory Eulera:

$$u_n + u_{-n} = \frac{(-1)^n \cdot e^{inx}}{1+in} + \frac{(-1)^n \cdot e^{-inx}}{1-in} = 2 \cdot (-1)^n \cdot \frac{\cos nx + n \sin nx}{1+n^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$$

$$e^{-x} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx + n \sin nx) \right]$$

Ciągi i szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych

Ciągi i szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych

Definicja

Jeśli każdej liczbie naturalnej n przyporządkujemy liczbę zespoloną $z_n = x_n + iy_n$, to mówimy, że określony został *ciąg liczb zespolonych*

$$(z_n) : z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

Liczba $z_0 = x_0 + iy_0$ jest *granicą* ciągu (z_n) (ozn. $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ lub $z_n \to z_0$), jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \;\; \forall\, n > n_\varepsilon \qquad |z_n - z_0| < \varepsilon$$

Ciągi i szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych

Definicja

Jeśli każdej liczbie naturalnej n przyporządkujemy liczbę zespoloną $z_n = x_n + iy_n$, to mówimy, że określony został *ciąg liczb zespolonych*

$$(z_n) : z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

Liczba $z_0 = x_0 + iy_0$ jest *granicą* ciągu (z_n) (ozn. $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ lub $z_n \to z_0$), jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \;\; \forall\, n > n_\varepsilon \qquad |z_n - z_0| < \varepsilon$$

Oznacza to, że w kole o środku z_0 i promieniu ε leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (z_n).

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych pozostaje prawdziwe dla ciągów zespolonych.

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych pozostaje prawdziwe dla ciągów zespolonych.

Definicja

Ciąg (z_n), kóry ma granicę skończoną z_0 nazywamy *ciągiem zbieżnym*.

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych pozostaje prawdziwe dla ciągów zespolonych.

Definicja

Ciąg (z_n), kóry ma granicę skończoną z_0 nazywamy *ciągiem zbieżnym*.

Twierdzenie

$$z_n = x_n + iy_n \to z_0 = x_0 + iy_0 \iff x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0$$

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych pozostaje prawdziwe dla ciągów zespolonych.

Definicja

Ciąg (z_n), kóry ma granicę skończoną z_0 nazywamy *ciągiem zbieżnym*.

Twierdzenie

$z_n = x_n + iy_n \to z_0 = x_0 + iy_0 \iff x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0$

Przykłady:

(1) $z_n = e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} \to 1 + i \cdot 0 = 1$

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych pozostaje prawdziwe dla ciągów zespolonych.

Definicja

Ciąg (z_n), kóry ma granicę skończoną z_0 nazywamy *ciągiem zbieżnym*.

Twierdzenie

$z_n = x_n + iy_n \to z_0 = x_0 + iy_0 \iff x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0$

Przykłady:

(1) $z_n = e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} \to 1 + i \cdot 0 = 1$

(2) $z_n = (1 + \frac{5}{n}) + i(3 - \frac{1}{n}) \to 1 + 3i$

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych pozostaje prawdziwe dla ciągów zespolonych.

Definicja

Ciąg (z_n), kóry ma granicę skończoną z_0 nazywamy *ciągiem zbieżnym*.

Twierdzenie

$$z_n = x_n + iy_n \to z_0 = x_0 + iy_0 \iff x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0$$

Przykłady:

(1) $z_n = e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} \to 1 + i \cdot 0 = 1$

(2) $z_n = (1 + \frac{5}{n}) + i(3 - \frac{1}{n}) \to 1 + 3i$

(3) $1 + \frac{i}{2} + \ldots + \left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{i}{2}\right)^n}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2}{2-i}\left[1 - \left(\frac{i}{2}\right)^n\right] \to \frac{2}{2-i}$

(4) $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$ – postać trygonometryczna liczby zespolonej

z wzoru Moivre'a: $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} = x_n + iy_n$

ciągi x_n, y_n – rozbieżne $\Rightarrow z_n$ – rozbieżny

(4) $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$ – postać trygonometryczna liczby zespolonej

z wzoru Moivre'a: $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} = x_n + iy_n$

ciągi x_n, y_n – rozbieżne $\Rightarrow z_n$ – rozbieżny

Definicja

$(S_n): \; S_n = z_1 + \ldots + z_n$ - ciąg sum częściowych ciągu (z_n).

Ciąg (S_n) nazywamy *szeregiem liczbowym o wyrazach zespolonych* i oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest *zbieżny*, jeśli istnieje granica właściwa $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $S_n = (x_1 + \ldots + x_n) + i(y_1 + \ldots + y_n)$.

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Twierdzenie

(1) Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(2) Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

(3) Jeśli $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = g$, $z_n \neq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny gdy $g < 1$, jeśli $g > 1$ to szereg jest rozbieżny.

(4) Jeśli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = g$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny gdy $g < 1$, jeśli $g > 1$ to szereg jest rozbieżny.

(5) Jeśli $|z_n| \leqslant a_n$ dla $n > n_0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – szereg o wyrazach dodatnich zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

(6) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $z_n = x_n + iy_n$, jest zbieżny do sumy $S = a + ib \iff$ zbieżne są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

Przykłady:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} + i \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \right)$ jest rozbieżny, bo $\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \geqslant \frac{1/2}{n}$ dla $n > n_0$

Przykłady:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} + i \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \right)$ jest rozbieżny, bo $\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \geqslant \frac{1/2}{n}$ dla $n > n_0$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ jest zbieżny, bo zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{in}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Przykłady:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} + i \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \right)$ jest rozbieżny, bo $\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \geqslant \frac{1/2}{n}$ dla $n > n_0$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ jest zbieżny, bo zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{in}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{\left| \left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2} \right|} = \sqrt[n]{\left| \frac{2-i}{3} \right|^{n^2}} = \left| \frac{2-i}{3} \right|^n = \frac{|2-i|^n}{3^n} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n \to 0 < 1 \Rightarrow \text{szereg zbieżny (bezwzględnie).}$$

Funkcje zespolone zmiennej zespolonej

Funkcje zespolone zmiennej zespolonej

Otoczeniem punktu $z_0 = x_0 + iy_0$ jest zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, czyli koło o środku w z_0 i promieniu $r > 0$.
Otoczeniem pierścieniowym punktu z_0 jest zbiór $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$

Funkcje zespolone zmiennej zespolonej

Otoczeniem punktu $z_0 = x_0 + iy_0$ jest zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, czyli koło o środku w z_0 i promieniu $r > 0$.
Otoczeniem pierścieniowym punktu z_0 jest zbiór $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$

Definicja

Jeśli $\forall\, z \in E \subset \mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \ni z \to w = f(z) \in \mathbb{C}$$

to mówimy, że w zbiorze E określona jest *funkcja zespolona* $f(z)$ *zmiennej zespolonej* z.

$z = x + iy\,,\; w = u + iv$, to $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ i

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)\,, \quad v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$$

nazywamy *częścią rzeczywistą i urojoną* funkcji $f(z)$.

Przykłady:

$$(1)\ f(z) = (z-1)^2 = (x+iy-1)^2 = [(x-1)+iy]^2 =$$
$$= (x-1)^2 + 2i(x-1)y - y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(x,y) = (x-1)^2 - y^2\,,\ v(x,y) = 2(x-1)y$$

Przykłady:

$$(1)\ f(z) = (z-1)^2 = (x+iy-1)^2 = [(x-1)+iy]^2 =$$
$$= (x-1)^2 + 2i(x-1)y - y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(x,y) = (x-1)^2 - y^2\,,\ v(x,y) = 2(x-1)y$$

$$(2)\ w = f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1+\bar{z}^2}{|1+z^2|^2} = \frac{1+x^2-y^2-2xyi}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{1+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2+2(x^2-y^2)+1}\,, \quad v(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2+2(x^2-y^2)+1}$$

Definicja

$f : E \to \mathbb{C}$, z_0 - punkt skupienia zbioru E.

Liczba $\gamma \in \mathbb{C}$ jest *granicą* funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 (ozn. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \gamma$), jeśli

$$\forall\, (z_n) \subset E\,,\ z_n \neq z_0 \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \gamma$$

Definicja

$f : E \to \mathbb{C}$, z_0 - punkt skupienia zbioru E.

Liczba $\gamma \in \mathbb{C}$ jest *granicą* funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 (ozn. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \gamma$), jeśli

$$\forall (z_n) \subset E,\ z_n \neq z_0 \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \gamma$$

Uwaga:

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji pozostaje prawdziwe.

Twierdzenie

$\gamma = \alpha + i\beta\,,\ \ z_0 = x_0 + iy_0\,,\ \ f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

(1) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \gamma \iff$
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \ \wedge\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \beta$

(2) $f(z)$ jest ciągła w $z_0 \iff u(x,y)$ i $v(x,y)$ są ciągłe w (x_0, y_0).

(3) $f(z)$ jest ciągła w $z_0 \iff \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Twierdzenie

$\gamma = \alpha + i\beta\,, \quad z_0 = x_0 + iy_0\,, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

(1) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \gamma \iff$
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \ \wedge \ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \beta$

(2) $f(z)$ jest ciągła w $z_0 \iff u(x,y)$ i $v(x,y)$ są ciągłe w (x_0, y_0).

(3) $f(z)$ jest ciągła w $z_0 \iff \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Granice $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty\,,\ \lim_{z\to\infty} f(z) = \gamma\,,\ \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ definiujemy analogicznie jak granicę $\lim_{z\to z_0} f(z) = \gamma$.

Przykłady

(1) $\lim_{z\to 0} \frac{z\cdot \mathrm{Re}\,(z)}{|z|} = 0$, bo:

$$f = \frac{(x+iy)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{i}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Przykłady

(1) $\lim_{z\to 0} \frac{z\cdot \mathrm{Re}\,(z)}{|z|} = 0$, bo:

$$f = \frac{(x+iy)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{i}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

(2) Na jaką linię w płaszczyźnie (u, v) przekształca funkcja $w = \frac{1}{z}$ linię $x^2 + y^2 = 4$ leżącą w płaszczyźnie (x, y)?
$(z = x + iy\,,\ w = u + iv)$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}\,,\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow u^2+v^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \ \wedge\ x^2+y^2 = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u^2+v^2 = \frac{1}{4}$$

(3) j.w. $w = \frac{1}{z}$, prosta $y = x$

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}\ , \ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow u + v = \frac{x-y}{x^2+y^2} \ \wedge \ y - x = 0 \Rightarrow u + v = 0$$

(3) j.w. $w = \frac{1}{z}$, prosta $y = x$

$u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow u + v = \frac{x-y}{x^2+y^2} \wedge y - x = 0 \Rightarrow u + v = 0$

Szeregi potęgowe

Definicje

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n \ldots$$

nazywamy *szeregiem potęgowym* o środku w punkcie z_0.

Dla $z_0 = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$

Promień zbieżności szeregu potęgowego:

$$R = \sup\{\rho \geqslant 0 : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ - \text{zbiezny w } |z| < \rho\}$$

Czyli $|z| < R$ (odpowiednio $|z - z_0| < R$) przedstawia największe koło o środku w $z_0 = 0$ (odpowiednio w z_0), wewnątrz którego szereg potęgowy jest zbieżny.

Czyli $|z| < R$ (odpowiednio $|z - z_0| < R$) przedstawia największe koło o środku w $z_0 = 0$ (odpowiednio w z_0), wewnątrz którego szereg potęgowy jest zbieżny.

Uwagi:

(1) Do wyznaczenia promienia zbieżności szeregu potęgowego mogą być stosowane kryteria d'Alemberta lub Cauchy'ego, podobnie jak w przypadku rzeczywistym.

Czyli $|z| < R$ (odpowiednio $|z - z_0| < R$) przedstawia największe koło o środku w $z_0 = 0$ (odpowiednio w z_0), wewnątrz którego szereg potęgowy jest zbieżny.

Uwagi:

(1) Do wyznaczenia promienia zbieżności szeregu potęgowego mogą być stosowane kryteria d'Alemberta lub Cauchy'ego, podobnie jak w przypadku rzeczywistym.

(2) Jeśli $R > 0$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny w $\{z : |z| < R\}$, rozbieżny w $\{z : |z| > R\}$, na okręgu $\{z : |z| = R\}$ nie wiadomo.

Twierdzenie

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ jest zbieżny w pewnym punkcie $z_1 \neq z_0$, to jest bezwzględnie zbieżny w kole $|z-z_0| < \rho$, gdzie $\rho = |z_1 - z_0|$ oraz jednostajnie zbieżny w każdym kole domkniętym $|z - z_0| \leqslant \theta \cdot \rho\,,\ 0 < \theta < 1$.

Twierdzenie

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ jest zbieżny w pewnym punkcie $z_1 \neq z_0$, to jest bezwzględnie zbieżny w kole $|z - z_0| < \rho$, gdzie $\rho = |z_1 - z_0|$ oraz jednostajnie zbieżny w każdym kole domkniętym $|z - z_0| \leqslant \theta \cdot \rho\,,\ 0 < \theta < 1$.

Definicje

Funkcją wykładniczą zmiennej zespolonej nazywamy funkcję e^z określoną szeregiem:

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,,\ z \in \mathbb{C}$

Funkcje trygonometryczne $\sin z, \cos z$ dla $z \in \mathbb{C}$ określamy szeregami potęgowymi:

$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,\qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,,\ z \in \mathbb{C}$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{Re}\,(e^z) = e^x \cos y\,, \quad \mathrm{Im}\,(e^z) = e^x \sin y$$

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$= \cos z + i \sin z$$

$$\left.\begin{array}{r} e^{iz} = \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i \sin z \end{array}\right\} \Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\,, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{Re}\,(e^z) = e^x \cos y\,, \quad \mathrm{Im}\,(e^z) = e^x \sin y$$

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$= \cos z + i\sin z$$

$$\left.\begin{array}{r} e^{iz} = \cos z + i\sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i\sin z \end{array}\right\} \Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\,, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

np.: $\cos i = \frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = \frac{e^2+1}{2e} > 1 \equiv (e-1)^2 > 0$

Własności funkcji wykładnicznych i trygonometrycznych:

(1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(2) $e^{z+2k\pi i} = e^z$

(3) $\sin(z + 2k\pi) = \sin z\,, \quad \cos(z + 2k\pi) = \cos z\,, \quad k \in \mathbb{Z}$

czyli funkcja e^z jest funkcją okresową o okresie urojonym $2\pi i$, a funkcje $\sin z, \cos z$ są okresowe o okresach rzeczywistych 2π.

Własności funkcji wykładniczych i trygonometrycznych:

(1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(2) $e^{z+2k\pi i} = e^z$

(3) $\sin(z + 2k\pi) = \sin z\,, \quad \cos(z + 2k\pi) = \cos z\,, \quad k \in \mathbb{Z}$

czyli funkcja e^z jest funkcją okresową o okresie urojonym $2\pi i$, a funkcje $\sin z, \cos z$ są okresowe o okresach rzeczywistych 2π.

Definicja

Logarytmem naturalnym liczby zespolonej $z \neq 0$, ozn. $\ln z$, nazywamy każdą liczbę w spełniającą równanie:

$$e^w = z$$

Twierdzenie

Każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma nieskończenie wiele logarytmów naturalnych. Określone są one wzorem:

$$\ln z = \ln r + i\theta_0 + 2k\pi i\,, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

gdzie $z = re^{i\theta}$, r - moduł, θ - argument liczby z, zaś θ_0 - argument główny liczby logarytmowanej tzn. $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$.

Twierdzenie

Każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma nieskończenie wiele logarytmów naturalnych. Określone są one wzorem:

$$\ln z = \ln r + i\theta_0 + 2k\pi i\,, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

gdzie $z = re^{i\theta}$, r - moduł, θ - argument liczby z, zaś θ_0 - argument główny liczby logarytmowanej tzn. $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$.

Definicja

Logarytm główny liczby $z \neq 0$, ozn. $\mathrm{Ln}\, z$, określony jest wzorem:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + i\theta_0$$

gdzie r, θ_0 - j.w., czyli każda liczba zespolona ma jeden logarytm główny.

Przykłady:

(1) Wyznaczyć promień zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$

Zastosujemy kryterium Cauchy'ego dla $|w_n| = \left|\frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}\right| = \frac{|z-i|^n}{n^2|1+i|^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|w_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z-i|}{(\sqrt[n]{n})^2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{|z-i|}{\sqrt{2}}$

czyli szereg jest zbieżny dla $\frac{|z-i|}{\sqrt{2}} < 1 \equiv |z-i| < \sqrt{2}$, stąd $R = \sqrt{2}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot z^n$

Zastosujemy kryterium d'Alemberta dla $|w_n| = |n! \cdot z^n|$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) \cdot |z| =$$
$$= \begin{cases} \infty\,, & |z| \neq 0 \\ 0\,, & z = 0 \end{cases}$$

Stąd $R = 0$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot z^n$

Zastosujemy kryterium d'Alemberta dla $|w_n| = |n! \cdot z^n|$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot |z| =$$
$$= \begin{cases} \infty, & |z| \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

Stąd $R = 0$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Zastosujemy kryterium d'Alemberta dla $|w_n| = \left|\frac{z^n}{n!}\right|$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1} n!}{(n+1)! z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Stąd $R = \infty$.

(2) Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną liczby $\cos(1-i)$.

$$\cos(1-i) = \frac{e^{i(1-i)}+e^{-i(1-i)}}{2} = \frac{e^{1+i}+e^{-(1+i)}}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}[e(\cos 1 + i\sin 1) + e^{-1}(\cos 1 - i\sin 1)] =$$
$$= \frac{e+e^{-1}}{2}\cos 1 + i\cdot\frac{e+e^{-1}}{2}\sin 1$$

stąd: $\mathrm{Re}[\cos(1-i)] = \frac{e+e^{-1}}{2}\cos 1\,,\quad \mathrm{Im}[\cos(1-i)] = \frac{e+e^{-1}}{2}\sin 1$

(2) Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną liczby $\cos(1-i)$.

$$\cos(1-i) = \frac{e^{i(1-i)}+e^{-i(1-i)}}{2} = \frac{e^{1+i}+e^{-(1+i)}}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}[e(\cos 1 + i\sin 1) + e^{-1}(\cos 1 - i\sin 1)] =$$
$$= \frac{e+e^{-1}}{2}\cos 1 + i\cdot\frac{e+e^{-1}}{2}\sin 1$$

stąd: $\mathrm{Re}[\cos(1-i)] = \frac{e+e^{-1}}{2}\cos 1\,, \quad \mathrm{Im}[\cos(1-i)] = \frac{e+e^{-1}}{2}\sin 1$

(3) Obliczyć:

(a) $\ln(-1)$ i $\mathrm{Ln}(-1)$

$z = -1 = a + ib \Rightarrow a = -1\,,\ b = 0$

moduł i argument główny liczby -1:

$r = \sqrt{a^2+b^2} = 1\,, \quad \cos\theta = \frac{a}{r} = -1\,, \quad \sin\theta = \frac{b}{r} = 0 \Rightarrow \theta_0 = \pi$

stąd: $\ln(-1) = \ln 1 + i\pi + 2k\pi i = \pi i(1+2k)\,, \quad k\in\mathbb{Z}$
$\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i\pi = \pi i$

(b) $\ln i$ i $\operatorname{Ln} i$

$z = i = a + ib \Rightarrow a = 0\,,\ b = 1$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = 1\,,\quad \cos\theta = \frac{a}{r} = 0\,,\quad \sin\theta = \frac{b}{r} = 1 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$

stąd: $\ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\,,\quad k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$

(b) $\ln i$ i $\operatorname{Ln} i$

$z = i = a + ib \Rightarrow a = 0\,,\ b = 1$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = 1\,,\quad \cos\theta = \frac{a}{r} = 0\,,\quad \sin\theta = \frac{b}{r} = 1 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$

stąd: $\ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\,,\quad k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$

(c) $\ln(1+i)$ i $\operatorname{Ln}(1+i)$

$z = 1 + i = a + ib \Rightarrow a = 1\,,\ b = 1$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}\,,\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4}$

stąd: $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i\,,\quad k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Ln}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$

Pochodna funkcji zmiennej zespolonej

Pochodna funkcji zmiennej zespolonej

$w = f(z)$ - określona w pewnym otoczeniu punktu z_0

Definicja

Pochodna funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 (ozn. $f'(z_0)$) jest to liczba zespolona określona wzorem

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Pochodna funkcji zmiennej zespolonej

$w = f(z)$ - określona w pewnym otoczeniu punktu z_0

Definicja

Pochodna funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 (ozn. $f'(z_0)$) jest to liczba zespolona określona wzorem

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Uwaga:

Powyższa definicja jest formalnie taka sama jak definicja pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej. Dlatego prawdziwe są twierdzenia o działaniach arytmetycznych na pochodnych, o pochodnej funkcji złożonej i o pochodnej funkcji odwrotnej.

Funkcja różniczkowalna w z_0 jest ciągła w tym punkcie.

Przykłady:

(1) $f(z) = \bar{z}\,, \quad z_0 \in \mathbb{C}$

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} =$
$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left[\frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} + i \cdot \frac{-2\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right]$ - granica nie istnieje, bo

$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0) : \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1/n^2}{1/n^2} = 1$

$\left(0, \frac{1}{n}\right) \to (0,0) : \quad \lim_{n \to \infty} \frac{-1/n^2}{1/n^2} = -1$

Przykłady:

(1) $f(z) = \bar{z}\,, \quad z_0 \in \mathbb{C}$

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} =$
$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left[\frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} + i \cdot \frac{-2\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right]$ - granica nie istnieje, bo

$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0): \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1/n^2}{1/n^2} = 1$

$\left(0, \frac{1}{n}\right) \to (0,0): \quad \lim_{n \to \infty} \frac{-1/n^2}{1/n^2} = -1$

(2) $f(z) = z^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad z_0 \in \mathbb{C}$ – dowolny punkt

$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z} =$
$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^n + \Delta z \cdot z_0^{n-1} \cdot n + \ldots + (\Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z} = n z_0^{n-1} \Rightarrow (z^n)' = n z^{n-1}$

Warunek konieczny istnienia pochodnej

Załóżmy, że $f'(z_0)$ istnieje $\iff$ istnieje granica właściwa ilorazu różnicowego:

$$I_{\Delta z} = \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \to f'(z_0)\,,\ \Delta z \to 0$$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\,,\ \ \Delta z = \Delta x + i\Delta y\,,\ \ z_0 = x_0 + iy_0$$

$$I_{\Delta z} = \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

Warunek konieczny istnienia pochodnej

Załóżmy, że $f'(z_0)$ istnieje $\iff$ istnieje granica właściwa ilorazu różnicowego:

$$I_{\Delta z} = \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \to f'(z_0)\,,\ \Delta z \to 0$$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\,,\ \ \Delta z = \Delta x + i\Delta y\,,\ \ z_0 = x_0 + iy_0$$

$$I_{\Delta z} = \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$(1)\ \Delta x \neq 0\,,\ \ \Delta y = 0\,,\ \ \ \Delta x \to 0$$

$$I_{\Delta z} = I_{\Delta x} = \frac{u(x_0+\Delta x, y_0)+iv(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{u(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i\cdot\frac{v(x_0+\Delta x, y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x} \to \ \left.\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\ \right|_{(x_0,y_0)}$$

(2) $\Delta x = 0\,,\quad \Delta y \neq 0\,,\quad \Delta y \to 0$

$$I_{\Delta z} = I_{i\Delta y} = \frac{u(x_0,y_0+\Delta y)+iv(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{i\Delta y} =$$

$$= \frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y} - i\cdot\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y} \to \left.\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\ \right|_{(x_0,y_0)}$$

(2) $\Delta x = 0\,, \quad \Delta y \neq 0\,, \quad \Delta y \to 0$

$$I_{\Delta z} = I_{i\Delta y} = \frac{u(x_0,y_0+\Delta y)+iv(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{i\Delta y} =$$

$$= \frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y} - i\cdot\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y} \to \left.\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Tw. (warunek konieczny istnienia pochodnej)

Jeśli $f'(z_0)$ istnieje, to istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ w punkcie (x_0, y_0) i zachodzą równości

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{w} \quad (x_0, y_0)$$

Równania te nazywamy *równaniami Cauchy - Riemanna*.

(2) $\Delta x = 0\,,\quad \Delta y \neq 0\,,\quad \Delta y \to 0$

$$I_{\Delta z} = I_{i\Delta y} = \frac{u(x_0,y_0+\Delta y)+iv(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{i\Delta y} =$$
$$= \frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y} - i\cdot\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y} \to \left.\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Tw. (warunek konieczny istnienia pochodnej)

Jeśli $f'(z_0)$ istnieje, to istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ w punkcie (x_0, y_0) i zachodzą równości

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{w} \quad (x_0, y_0)$$

Równania te nazywamy *równaniami Cauchy - Riemanna*.

Uwaga:

Równania Cauchy - Riemanna nie zapewniają istnienia $f'(z_0)$.

Przykład:

$f(z) = \sqrt{\frac{1}{2}|\mathrm{Im}(z^2)|}$ – spełnia warunki C-R w $(0,0)$:

$$f(x+iy) = \sqrt{|xy|} = u(x,y)\,, \quad v(x,y) \equiv 0$$

$$u_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0\,, \quad v_x(0,0) = 0$$

$$u_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y)-u(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0\,, \quad v_y(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow u_x(0,0) = v_y(0,0) \ \wedge \ u_y(0,0) = -v_x(0,0)$$

ale $f'(0)$ nie istnieje, bo:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+i\Delta y} =$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left[\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} + i\cdot\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right]$$

$$\left(0,\tfrac{1}{n}\right) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{0}{1/n^2} = 0$$

$$\left(\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n}\right) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2}$$

Tw. (warunek wystarczający istnienia pochodnej)

Jeśli funkcje $u(x,y), v(x,y)$ spełniają warunki Cauchy - Riemanna w punkcie (x_0, y_0) oraz są klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0), to $f'(z_0)$ istnieje i zachodzą wzory:

$$f'(z_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Tw. (warunek wystarczający istnienia pochodnej)

Jeśli funkcje $u(x,y), v(x,y)$ spełniają warunki Cauchy - Riemanna w punkcie (x_0, y_0) oraz są klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0), to $f'(z_0)$ istnieje i zachodzą wzory:

$$f'(z_0) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x_0,y_0)} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_0,y_0)}$$

Przykłady:

(1) $f(z) = \mathrm{Re}\, z \Rightarrow u(x,y) = x\,,\; v(x,y) = 0 \Rightarrow u_x(0,0) \neq v_y(0,0)$

warunki C-R nigdzie nie są spełnione, $f'(z)$ nie istnieje w żadnym punkcie.

Tw. (warunek wystarczający istnienia pochodnej)

Jeśli funkcje $u(x,y), v(x,y)$ spełniają warunki Cauchy - Riemanna w punkcie (x_0, y_0) oraz są klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0), to $f'(z_0)$ istnieje i zachodzą wzory:

$$f'(z_0) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x_0,y_0)} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_0,y_0)}$$

Przykłady:

(1) $f(z) = \mathrm{Re}\, z \Rightarrow u(x,y) = x\,,\ v(x,y) = 0 \Rightarrow u_x(0,0) \neq v_y(0,0)$

warunki C-R nigdzie nie są spełnione, $f'(z)$ nie istnieje w żadnym punkcie.

(2) $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}\,(z) \Rightarrow u(x,y) = x^2\,,\ \ v(x,y) = xy$

$u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)\,,\ u_x = 2x\,,\ u_y = 0\,,\ v_x = y\,,\ v_y = x$

$$\begin{cases} 2x = x \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = \left. u_x + i v_x \right|_{(0,0)} =$$

$$= \left. 2x + iy \right|_{(0,0)} = 0 + i \cdot 0 = 0$$

(3) $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y\,, \quad u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = e^x \cos y \\ -e^x \sin y = -e^x \sin y \end{cases} \qquad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

(3) $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y\,, \quad u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = e^x \cos y \\ -e^x \sin y = -e^x \sin y \end{cases} \qquad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$

(3) $(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

Analogicznie $(\cos z)' = -\sin z$

(3) $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y\,, \quad u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = e^x \cos y \\ -e^x \sin y = -e^x \sin y \end{cases} \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

(3) $(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

Analogicznie $(\cos z)' = -\sin z$

Definicja

Funkcja $f(z)$ jest *holomorficzna* w punkcie z_0, jeśli $f'(z)$ istnieje w pewnym otoczeniu punktu z_0.

Funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze D, jeśli jest holomoficzna w każdym jego punkcie.

Uwaga:
Funkcja jest holomorficzna w obszarze $\iff$ posiada pochodną w każdym punkcie tego obszaru.

Np.:

– funkcje $e^z, \sin z, \cos z$, wielomiany są holomorficzne w $\mathbb{C}$,

– funkcje $\overline{z}, \mathrm{Re}\,(z)$ nie są nigdzie holomorficzne, bo nie mają pochodnych w żadnym punkcie,

– funkcja $f(z) = \frac{1}{z}$ jest holomorficzna np. w $\{z : |z-2| < 1\}$, a nie jest holomorficzna np. w $\{z : |z| < 1\}$,

– $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}(z)$ nie jest holomorficzna, bo ma pochodną tylko w $z = 0$,

– $f(z) = z^2$ – holomorficzna w $\mathbb{C}$, bo:

$$u(x,y) = x^2 - y^2\,,\ v(x,y) = 2xy \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u_x = 2x = v_y \\ u_y = -2y = -v_x \end{array} \right.$$

$$\wedge\ \ u, v \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i \cdot 2y = 2z$$

Funkcje harmoniczne

Funkcje harmoniczne

Definicja

Funkcję rzeczywistą $U(x,y)$ określoną w pewnym obszarze D nazywamy *funkcją harmoniczną* w obszarze D, jeśli jest klasy C^2 na D i spełnia w D tzw. *równanie Laplace'a*:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Funkcję $U(x,y)$ nazywamy harmoniczną w punkcie (x_0, y_0), jeśli jest harmoniczna w pewnym otoczeniu tego punktu.

Załóżmy, że $f(z)$ jest funkcją holomorficzną w $D \subset \mathbb{C}$ i $u, v \in C^2(\tilde{D})$. spełnione są wtedy równania C-R:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ (z tw. Schwarza)}$$

Analogicznie: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Załóżmy, że $f(z)$ jest funkcją holomorficzną w $D \subset \mathbb{C}$ i $u, v \in C^2(\tilde{D})$. spełnione są wtedy równania C-R:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ (z tw. Schwarza)}$$

Analogicznie: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Twierdzenie

Część rzeczywista i część urojona funkcji holomorficznej w pewnym obszarze są funkcjami harmonicznymi w tym obszarze.

Definicja

Dwie funkcje harmoniczne $u(x,y), v(x,y)$, które spełniają równania Cauchy - Riemanna nazywamy funkcjami harmonicznymi *sprzężonymi*.

Definicja

Dwie funkcje harmoniczne $u(x, y)$, $v(x, y)$, które spełniają równania Cauchy - Riemanna nazywamy funkcjami harmonicznymi *sprzężonymi*.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $u(x, y)$ (odpow. $v(x, y)$) jest harmoniczna w obszarze D, to istnieje funkcja harmoniczna $v(x, y)$ (odpow. $u(x, y)$) sprzężona z nią w D taka, że $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$, $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ dla pewnej funkcji $f(z)$ holomorficznej w D.

Przykłady:

Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z) = u + iv$, wiedząc, że:

(1) $u(x, y) = -2xy\,, \quad f(0) = i$

$u_x = -2y\,,\ u_{xx} = 0\,,\ u_y = -2x\,,\ u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = -2y = v_y \Rightarrow v(x, y) = -y^2 + C(x)$

$u_y = -2x = -v_x \Rightarrow C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = x^2 + C$

$v(x, y) = x^2 - y^2 + C \Rightarrow$

$f(z) = -2xy + i(x^2 - y^2) + Ci = iz^2 + Ci\,, \quad f(0) = i \Rightarrow C = 1$

$f(z) = iz^2 + i$

Przykłady:

Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z) = u + iv$, wiedząc, że:

(1) $u(x, y) = -2xy\,, \quad f(0) = i$

$u_x = -2y\,,\; u_{xx} = 0\,,\; u_y = -2x\,,\; u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = -2y = v_y \Rightarrow v(x, y) = -y^2 + C(x)$

$u_y = -2x = -v_x \Rightarrow C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = x^2 + C$

$v(x, y) = x^2 - y^2 + C \Rightarrow$

$f(z) = -2xy + i(x^2 - y^2) + Ci = iz^2 + Ci\,, \quad f(0) = i \Rightarrow C = 1$

$f(z) = iz^2 + i$

Uwaga:

Ostateczny wzór funkcji $f(z)$ można otrzymać podstawiając $x = \frac{z+\bar{z}}{2}\,,\; y = \frac{z-\bar{z}}{2}$

(2) $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy\,, \quad f(0) = 0$

$u_x = 2x + y\,,\ u_{xx} = 2\,,\ u_y = -2y + x\,,\ u_{yy} = -2 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = 2x + y = v_y \Rightarrow v(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{2} + C(x)$

$u_y = -2y + x = -v_x \Rightarrow -2y + x = -2y - C'(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow C'(x) = -x \Rightarrow C(x) = -\frac{x^2}{2} + C$

$v(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow$

$f(z) = x^2 - y^2 + xy + i\left(2xy - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + C\right) =$

$= (x^2 - y^2 + 2xyi) + xy - i\frac{x^2 - y^2}{2} + Ci =$

$= (x + iy)^2 + xy - i\frac{(x+iy)^2 - 2xyi}{2} + Ci$

$f(z) = z^2 - i \cdot \frac{z^2}{2} + Ci \ \wedge \ f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$f(z) = z^2\left(1 - \frac{i}{2}\right)$

(3) $v(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + x$

$v_x = -4x + 1\,,\; v_{xx} = 4\,,\; v_y = -4y\,,\; v_{yy} = -4 \Rightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0$

$u_x = v_y = -4y \Rightarrow u(x,y) = -4xy + C(y)$

$u_y = -v_x = -4x - 1 = -4x + C'(y) \Rightarrow C'(y) = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow C(y) = -y + C$

$u(x,y) = -4xy - y + C \Rightarrow$

$f(z) = -4xy - y + C + i(2x^2 - 2y^2 + x) =$
$= 2i(x^2 - y^2 + 2xyi) + i(x + iy) + C$

$f(z) = 2iz^2 + iz + C$