AUTOMATYKA I ROBOTYKA - SEMESTR 2

ANA2. ZESTAW 5. - Rozwiązania

Zad. 1. Wyznaczyć granice ciągów

$$\text{(a)} \quad z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$

Z definicji granicy ciągu liczb zespolonych wiemy, że $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$

$|z_n| = \left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right| = \left|\left(\frac{1+i}{2}\right)\right|^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \to 0$, bo $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$

$$\text{(b)} \quad z_n = \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n\right) e^{in}$$

Tutaj też $|z_n| \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$, bo:

$|e^{in}| = \sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n} = 1$

$\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n\sqrt{n}}}\right)} \to 0$

$$\text{(c)} \quad z_n = \frac{3ni + i^n}{n - i}$$

$z_n = \frac{3ni}{n-i} + \frac{i^n}{n-i}$

$\frac{3ni}{n-i} = \frac{3ni(n+i)}{n^2+1} = -\frac{3n}{n^2+1} + i \cdot \frac{3n^2}{n^2+1} \to 0 + i \cdot 3$

$\frac{i^n}{n-i} = \frac{i^n(n+i)}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \cdot i^n + \frac{1}{n^2+1} \cdot i^{n+1} \to 0$, bo:

$\left|\frac{n}{n^2+1} \cdot i^n\right| = \frac{n}{n^2+1} \cdot |i|^n = \frac{n}{n^2+1} \to 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 3i$

Zad. 2. Zbadać zbieżność szeregów liczbowych

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \sin \frac{1}{n} + \frac{i}{n^2} \right)$$

Badamy zbieżność części rzeczywistej, skorzystamy z kryterium Leibniza: $\sin \frac{1}{n} > 0\,,\ \ \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0\,,\ \ \sin \frac{1}{n} \searrow 0 \Rightarrow$ szereg zbieżny

Część urojona szeregu jest szeregiem Dirichleta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ dla $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow$szereg zbieżny

Szereg jest zbieżny, bo zbieżne są szeregi części rzeczywistych i części urojonych.

$$\text{(b)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n i^{n-1}}{(1-i)^n}$$

$|z_n| = \frac{n \cdot |i|^{n-1}}{|1-i|^n} = \frac{n}{(\sqrt{2})^n}$ i skorzystamy z kryterium Cauchy'ego:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow$ szereg zbieżny (bezwzględnie)

$$\text{(c)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + in + n^2 + in^3}{1 + n^3}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^3+1} + i \cdot \frac{n^3+n}{n^3+1} \right)$ i pokażemy, że nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu dla części urojonej:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{n^3+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ szereg rozbieżny

Zad. 3. Jakie krzywe opisują poniższe funkcje

$$\text{(a)} \qquad z(t) = t + it^2\,, \quad t > 0$$

Parametryzacja w płaszczyźnie rzeczywistej $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ przedstawia parabolę $y = x^2$ dla $x > 0$.

$$\text{(b)} \quad z(t) = 2e^{it} + 3e^{-it}\,, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$z(t) = 2\cos t + 2i\sin t + 3\cos t - 3i\sin t = 5\cos t - i\sin t$,

więc parametryzacja rzeczywista $\begin{cases} x(t) = 5\cos t \\ y(t) = -\sin t \end{cases}$ przedstawia elipsę

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o półosiach $a = 5\,, b = 1$.

Zad. 4. Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną funkcji

$$\text{(a)} \quad f(z) = \frac{1}{z^2}$$

$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(x+iy)^2} = \frac{1}{x^2-y^2+i\cdot 2xy} = \frac{x^2-y^2-i\cdot 2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$$\text{(b)} \quad f(z) = \sin z$$

$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$

$\cos iy = \frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^y+e^{-y}}{2} = \cosh y$

$\sin iy = \frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}-e^y}{2i} = -i \cdot \frac{e^{-y}-e^y}{2} = i \cdot \frac{e^y-e^{-y}}{2} = i\sinh y$

$\Rightarrow \operatorname{Re} f(z) = \sin x \cosh y\,, \quad \operatorname{Im} f(z) = \cos x \sinh y$.

$$\text{(c)} \quad f(z) = \cos z$$

$\frac{1}{2}(e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-iy} e^{y})$

$= \frac{1}{2}(\cos x + i \sin x) e^{-y} + \frac{1}{2} e^{y} (\cos x - i \sin x)$

$= \cos x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + i \frac{1}{2} \sin x \, \frac{e^{-y} - e^{y}}{} =$

$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ $= \cos x \, \mathrm{ch} x$ $- i \sin x$ $\mathrm{sh} x$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\, f(z) = \cos x \cosh y\,, \quad \mathrm{Im}\, f(z) = -\sin x \sinh y.$

Zad. 5. Zbadać istnienie granicy $\lim_{z\to 0} f(z)$

$$\text{(a)} \quad f(z) = \frac{\mathrm{Re}\,(z)}{1+|z|}$$

$f(z) = f(x+iy) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} = u(x,y)\,, \quad v(x,y) = 0$

$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} [u(x,y) + i \cdot v(x,y)]$

$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

$$\text{(b)} \quad f(z) = \frac{\mathrm{Re}\,(z^2)}{z^2}$$

$f(z) = f(x+iy) = \frac{\mathrm{Re}\,(x^2+2ixy-y^2)}{(x+iy)^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2+i\cdot 2xy} = \frac{(x^2-y^2)(x^2-y^2-i\cdot 2xy)}{(x^2+y^2)^2} =$
$= \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} + i \cdot \frac{-2xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

Granica $\lim_{z\to 0} f(z)$ nie istnieje, ponieważ nie istnieją granice $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$ i $\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$:

$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{4}{n^4}} = 0$

$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$:

$$\left(\tfrac{1}{n},0\right) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^4}} = 0$$

$$\left(\tfrac{2}{n},\tfrac{1}{n}\right) \to (0,0): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^2}\cdot\frac{3}{n^2}}{\frac{25}{n^4}} = \frac{12}{25}$$