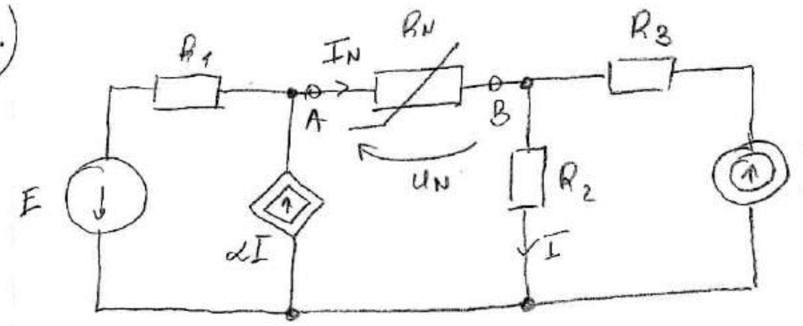
z1.)



Wyznaczyć punkt pracy opornika nieliniowego R_N: (U_N, I_N).

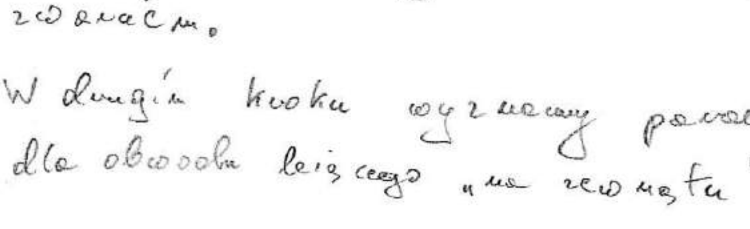
Dane: $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 2k\Omega$, $R_3 = 3k\Omega$, $J = 4mA$, $E = 5V$, $\alpha = \frac{1}{2}\frac{A}{A}$

R_N: $I_N = aU_N^3 + bU_N^2 + cU_N$; $a = 1\frac{mA}{V^3}$, $b = 1\frac{mA}{V^2}$, $c = 4\frac{mA}{V}$

W pierwszej kolejności należy zauważyć, że opór R_3 jest połączony szeregowo z idealnym źródłem prądowym — możemy go zastąpić zwarciem.

W drugim kroku wyznaczamy parametry źródła zastępczego dla obwodu leżącego „na zewnątrz" zacisków AB.

E_T).



$E_T = U_A - U_B$

$U_B = J \cdot R_2 = 4mA \cdot 2k\Omega = 8V$

$U_A = -E + U_1 = -E + \alpha I R_1 = -E + \alpha J \cdot R_1 =$

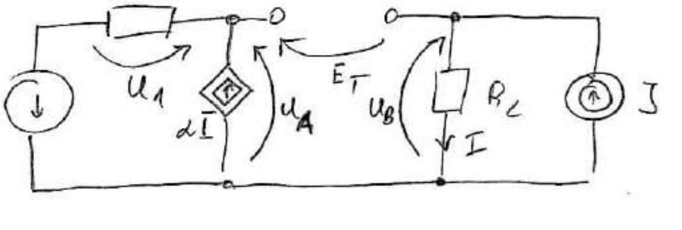
$= -5V + \frac{1}{2} \cdot 4mA \cdot 1k\Omega = -5V + 2V = -3V$

$E_T = -3V - 8V = -11V$

$J_N - \alpha I = I - J - \alpha I = I(1-\alpha) - J$

$J_N = I - J$

J_N)



NPK: $-E - U_1 - U_2 = 0$

$-E - R_1[I(1-\alpha) - J] - R_2 I = 0$

$-E - IR_1(1-\alpha) + JR_1 - IR_2 = 0$

$-E + JR_1 = I[R_1(1-\alpha) + R_2]$

$I = \frac{JR_1 - E}{R_1(1-\alpha) + R_2} = \frac{4mA \cdot 1k\Omega - 5V}{1k\Omega \cdot \frac{1}{2} + 2k\Omega} =$

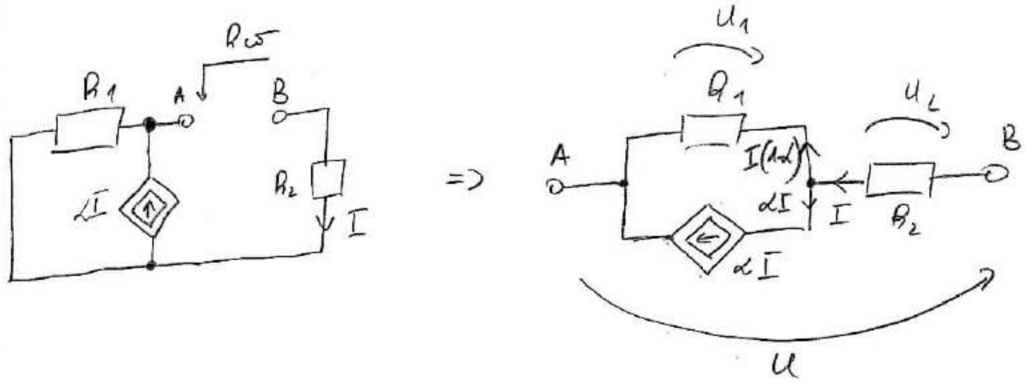
$= \frac{4V - 5V}{\frac{5}{2}k\Omega} = -\frac{2}{5} mA$

$J_N = I - J = -\frac{2}{5}mA - 4mA = -\frac{22}{5}mA$

R_w)

$$R_w = \frac{E_T}{J_N} = \frac{-11\,V}{-\frac{22}{5}\,mA} = \frac{5}{2}\,k\Omega$$

Dla sprawdzenia wyznaczmy jeszcze R_w analizując schemat:

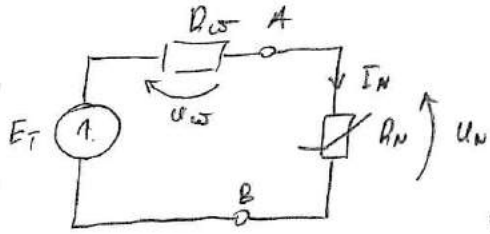


$$R_w = \frac{U}{I}$$

$$U = U_1 + U_2 = I\cdot(1-\alpha)\cdot R_1 + I R_2 = I\cdot\left[(1-\alpha)\cdot R_1 + R_2\right] \Rightarrow \overset{R_w}{\overset{\parallel}{\frac{U}{I}}} = R_1(1-\alpha) + R_2 =$$

$$= 1k\Omega\cdot\frac{1}{2} + 2k\Omega = \frac{5}{2}\,k\Omega$$

Możemy teraz zastosować twierdzenie Thevenina:



$$E_T - U_w - U_N = 0$$

$$U_w = I_N\cdot R_w = \left(a\cdot U_N^3 + b U_N^2 + c U_N\right)\cdot R_w =$$

$$= a\,U_N^3 R_w + b U_N^2 R_w + c\,U_N R_w$$

$$\{V,\ mA,\ k\Omega\}$$

$$-11 - \frac{5}{2}U_N^3 - \frac{5}{2}U_N^2 - 10U_N - U_N = 0$$

$$\frac{5}{2}U_N^3 + \frac{5}{2}U_N^2 + 11U_N + 11 = 0 \quad /\cdot 2$$

$$5U_N^3 + 5U_N^2 + 22U_N + 22 = 0$$

dzielniki wyrazu wolnego: $\pm 22, \pm 11, \pm 2, \pm 1$.

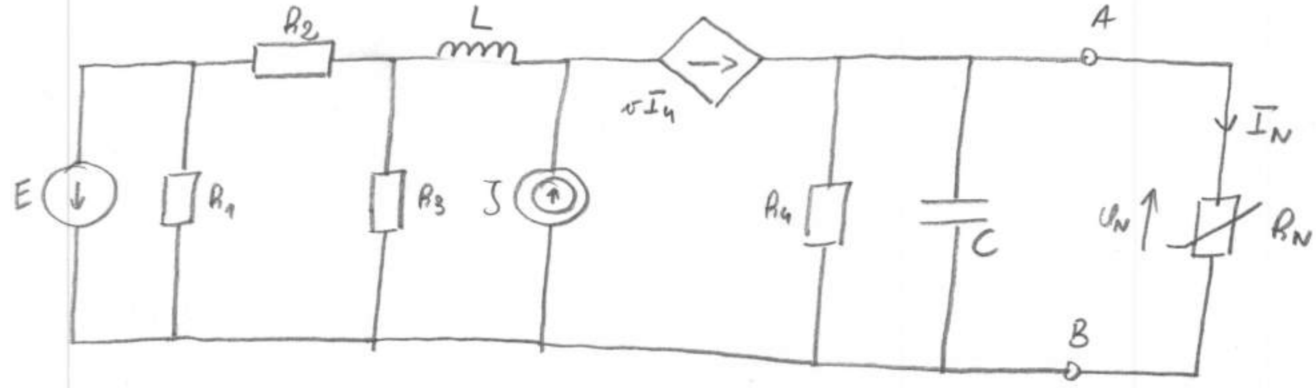
$$5U_N^2(U_N+1) + 22(U_N+1) = 0$$

$(5U_N^2+22)(U_N+1) = 0 \rightarrow$ Jeden pierwiastek rzeczywisty: $U_N = -1\ V$

$$I_N = (-1)^3 + (-1)^2 + 4\cdot(-1) = -4\ mA$$

Zadanie 1.

Wyznaczyć parametry źródła zastępczego Thevenina i Nortona dla obwodu na lewo od zacisków AB, a następnie wyznaczyć prąd I_N oraz napięcie U_N.



Dane:

$E = 3V$

$r = \frac{1}{2} k\Omega$

$R_1 = 3 k\Omega$

$R_2 = 3 k\Omega$

$R_3 = 3 k\Omega$

$R_4 = 2 k\Omega$

$R_N: u = a i^3 + bi, \quad a = \frac{1}{2} \frac{V}{mA^3}, \quad b = \frac{1}{2} \frac{V}{mA}$

$L = 3 mH$

$C = 3 \mu F$

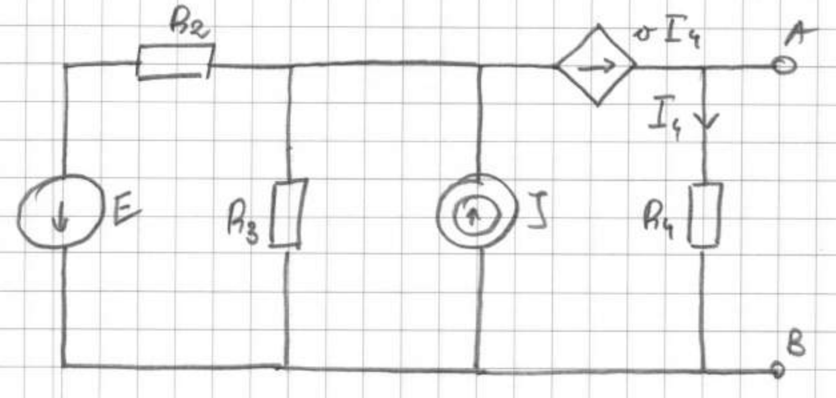
Na samym początku należy zastanowić się, czy można w jakiś sposób uprościć układ, tak by zmiany nie miały wpływu na parametry źródeł zastępczych i punkt pracy oporu R_N. Zd. (4.)

Po pierwsze możemy bez konsekwencji usunąć (zastąpić rozwarciem) dołączony równolegle do źródła napięciowego E opór R_1.

/* Dlaczego? Czym można zastąpić opór dołączony szeregowo do idealnego źródła prądowego? */

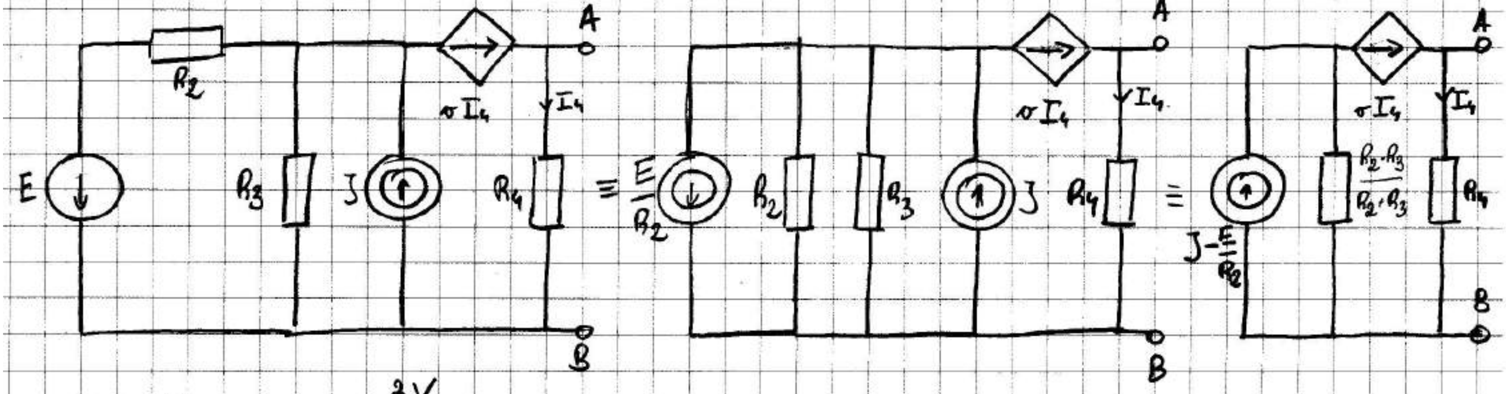
Po drugie zauważmy że dla obwodów prądu stałego w stanie ustalonym indukcyjność tożsama jest ze zwarciem, a pojemność z rozwarciem.

W efekcie uproszczony układ, dla którego będziemy wyznaczać parametry źródeł zastępczych, przyjmie postać:



W dalszych obliczeniach można skorzystać z dwóch metod: zamiany źródeł lub superpozycji.

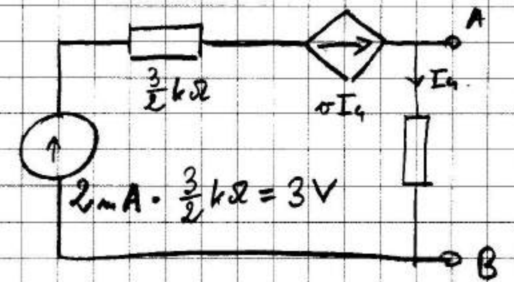
Metoda zamiany źródeł:



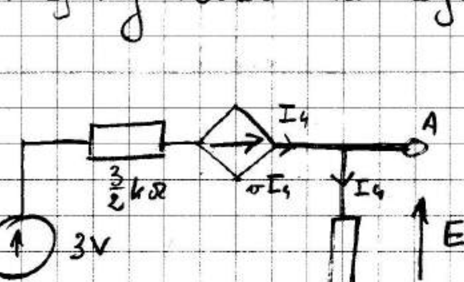
$$J - \frac{E}{R_2} = 3mA - \frac{3V}{3k\Omega} = 2mA$$

$$\frac{R_2\cdot R_3}{R_2+R_3} = \frac{3k\Omega\cdot 3\cancel{k\Omega}}{(3+3)\cancel{k\Omega}} = \frac{9}{6}k\Omega = \frac{3}{2}k\Omega$$

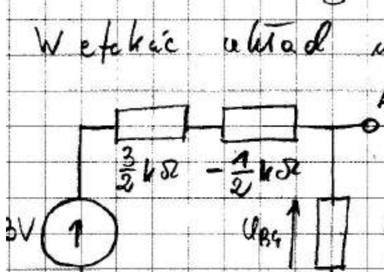
Ponownie korzystając z metody zamiany źródeł dostajemy:



Przejdźmy teraz do wyznaczenia parametrów źródła Thevenina



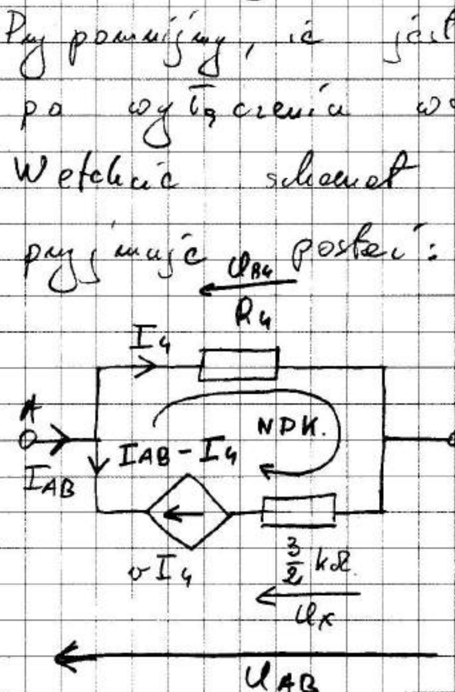
Dla źródła Thevenina zaciski AB są rozwarte ⇒ prąd, który steruje źródłem napięciowym płynie przez to źródło ⇒ źródło sterowane zachowuje się jak opór. Ponieważ napięcie σI_4 skierowane jest zgodnie względem prądu ⇒ wartość oporu wynosi $-\sigma$. W efekcie układ możemy przerysować w następującej postaci:



Jak widać $E_T = U_{R4}$. Wartość U_{R4} możemy obliczyć bądź z prawa Kirchoffa, bądź z dzielnika napięciowego:

$$\underline{\underline{E_T}} = U_{R4} = 3V\cdot\frac{2k\Omega}{2k\Omega+\frac{3}{2}k\Omega-\frac{1}{2}k\Omega} = \cancel{3}V\cdot\frac{2\cancel{k\Omega}}{\cancel{3k\Omega}} = \underline{\underline{2V}}$$

Teraz obliczmy opór wewnętrzny źródła zastępczego.
Przypomnijmy, że jest to opór widziany z zacisków AB po wyłączeniu wszystkich źródeł niezależnych.
Wtedy schemat do obliczenia oporu wewnętrznego przyjmuje postać:



Zgodnie z prawem Ohma:

$$R_w = \frac{U_{AB}}{I_{AB}}$$

Na chwilę przyjmijmy, że I_{AB} jest wymuszeniem w naszym układzie i potraktujmy jako daną (ponieważ nie ma źródeł niezależnych i tak ostatecznie „skróci" się we wzorze na R_w).

Równanie wynikające z prądowego prawa Kirchhoffa (PPK) zostało już naniesione na schemat $(I_{AB} - I_4)$.
Zwróćmy uwagę, że $U_{AB} = U_{R4}$ i żeby je wyznaczyć musimy uzależnić I_4 od naszej „danej" - I_{AB}.
Aby to zrobić zapiszmy równanie wynikające z napięciowego prawa Kirchhoffa (NPK).

$$-U_{R4} + U_x + r I_4 = 0 \Rightarrow -R_4 \cdot I_4 + \frac{3}{2} k\Omega \cdot (I_{AB} - I_4) + r I_4 = 0$$

Po podstawieniu pozostałych wartości:

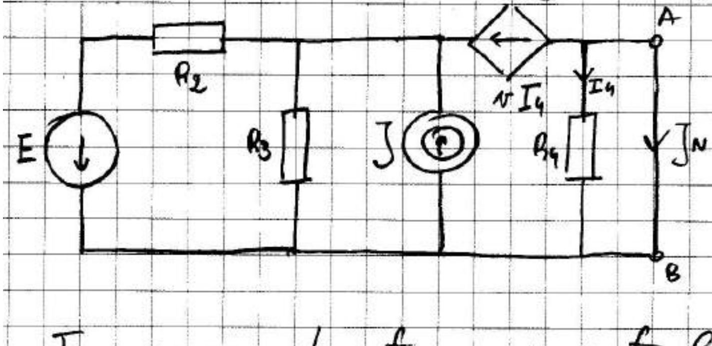
$$-2k\Omega \cdot I_4 + \frac{3}{2} k\Omega \cdot I_{AB} - \frac{3}{2} k\Omega \cdot I_4 + \frac{1}{2} k\Omega \cdot I_4 = 0$$

$$I_4 \left(2k\Omega + \frac{3}{2} k\Omega - \frac{1}{2} k\Omega\right) = I_{AB} \cdot \frac{3}{2} \cancel{k\Omega} \Rightarrow I_4 \cdot 3 = I_{AB} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow I_4 = \frac{1}{2} I_{AB}$$

$$R_w = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} = \frac{U_{R4}}{I_{AB}} = \frac{I_4 \cdot R_4}{I_{AB}} = \frac{\frac{1}{2} \cancel{I_{AB}} \cdot 2k\Omega}{\cancel{I_{AB}}} = \underline{\underline{1 k\Omega}}$$

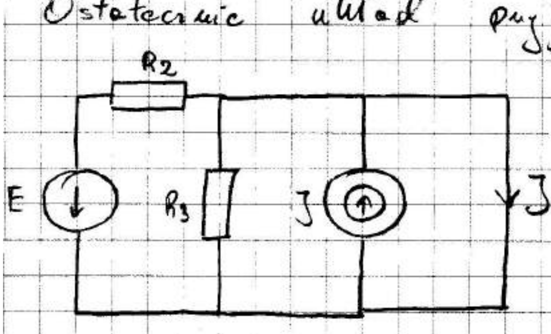
Znając E_T i R_w bez problemu możemy wyliczyć wydajność prądową źródła Nortona: $J_N = \frac{E_T}{R_w}$.
Jednak dla sprawdzenia poprawności obliczeń wyznaczymy ją ponownie analizując nasz układ.

Wydajność prądowa zastępczego źródła Nortona równa jest z definicji prądowi płynącemu przez zwarte zaciski AB:



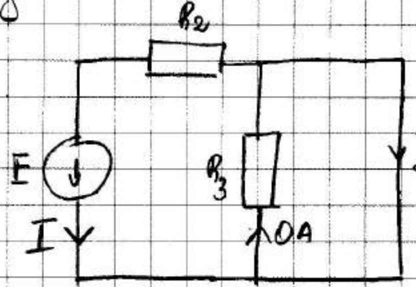
Tym razem skorzystamy z metody superpozycji.
Jednak najpierw spróbujmy uprościć nasz układ.
Po pierwsze zwróćmy uwagę, że opór R_4 jest równolegle połączony ze zwarciem. W efekcie nie płynie przez niego żaden prąd. Niesie to za sobą dwa efekty:
- źródło sterowane będzie zwarciem $(v \cdot 0A = 0V)$
- opór R_4 możemy pominąć.

Ostatecznie układ przyjmie postać:



Przypadek od źródła napięciowego

E)



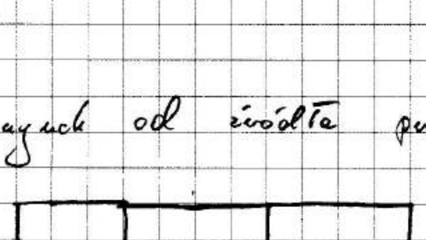
Przez R_3 nie płynie prąd => $J_N' = -I$

$$I = \frac{E}{R_2} = \frac{3V}{3k\Omega} = 1mA$$

$$J_N' = -1mA$$

Przypadek od źródła prądowego

J)



Tym razem przez opory R_3 i R_4 nie płynie prąd - cały prąd ze źródła J płynie przez zwarcie.

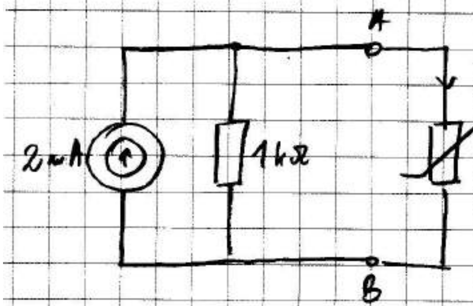
$$J_N'' = J = 3mA$$

Wszystkie $\underline{\underline{J_N}} = J_N' + J_N'' = \underline{\underline{2mA}}$

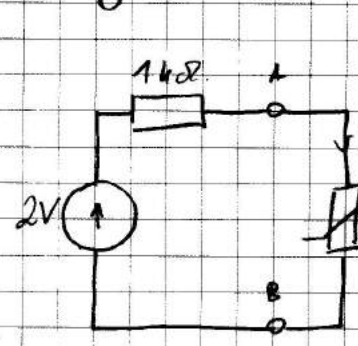
Sprawdźmy teraz wzór $J_N = \frac{E_T}{R_w}$

$2mA = \frac{2V}{1k\Omega}$ - zgadza się => jest pewna szansa, że nie popełniliśmy błędu w obliczeniach.

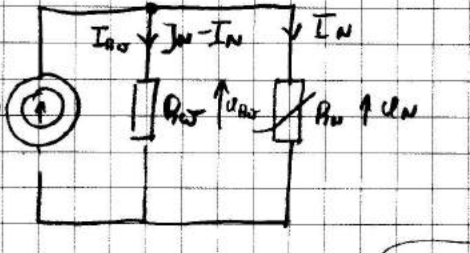
Znając parametry źródeł zastępczych możemy przedstawić analizowany układ w dużo prostszej postaci:



lub



Punkt pracy opornika nieliniowego R_N możemy wyznaczyć na dwa sposoby: rozwiązując równania Kirchhoffa, bądź graficznie.
Dla źródła Nortona równania Kirchhoffa przyjmują postać:



$$\begin{cases} J_N - I_{Rw} - I_N = 0 \\ U_{Rw} = U_{RN} \end{cases}$$

R_N: $u = a\,i^3 + b\,i$; $a = \frac{1}{2}\frac{V}{mA}$, $b = \frac{1}{2}\frac{V}{mA}$

$$\begin{cases} I_{Rw} \cdot R_w = U_N \\ I_{Rw} = J_N - I_N \end{cases} \Rightarrow J_N \cdot R_w - I_N R_w = a I_N^3 + b I_N$$

$$a I_N^3 + (b - R_w) I_N - J_N \cdot R_w = 0$$

Równolegle z podstawieniem wartości liczbowych opuszczamy sprawę konwencji używanych dalej jednostek: $\{V, mA, k\Omega, mS\}$.

$$\frac{1}{2} I_N^3 + \left(\frac{1}{2} + 1\right) I_N - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} I_N^3 + \frac{3}{2} I_N - 2 = 0$$

$$\frac{1}{2} I_N^3 - \frac{1}{2} I_N + 2 I_N - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} I_N \left(I_N^2 - 1\right) + 2\left(I_N - 1\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} I_N (I_N - 1)(I_N + 1) + 2 \cdot (I_N - 1) = 0$$

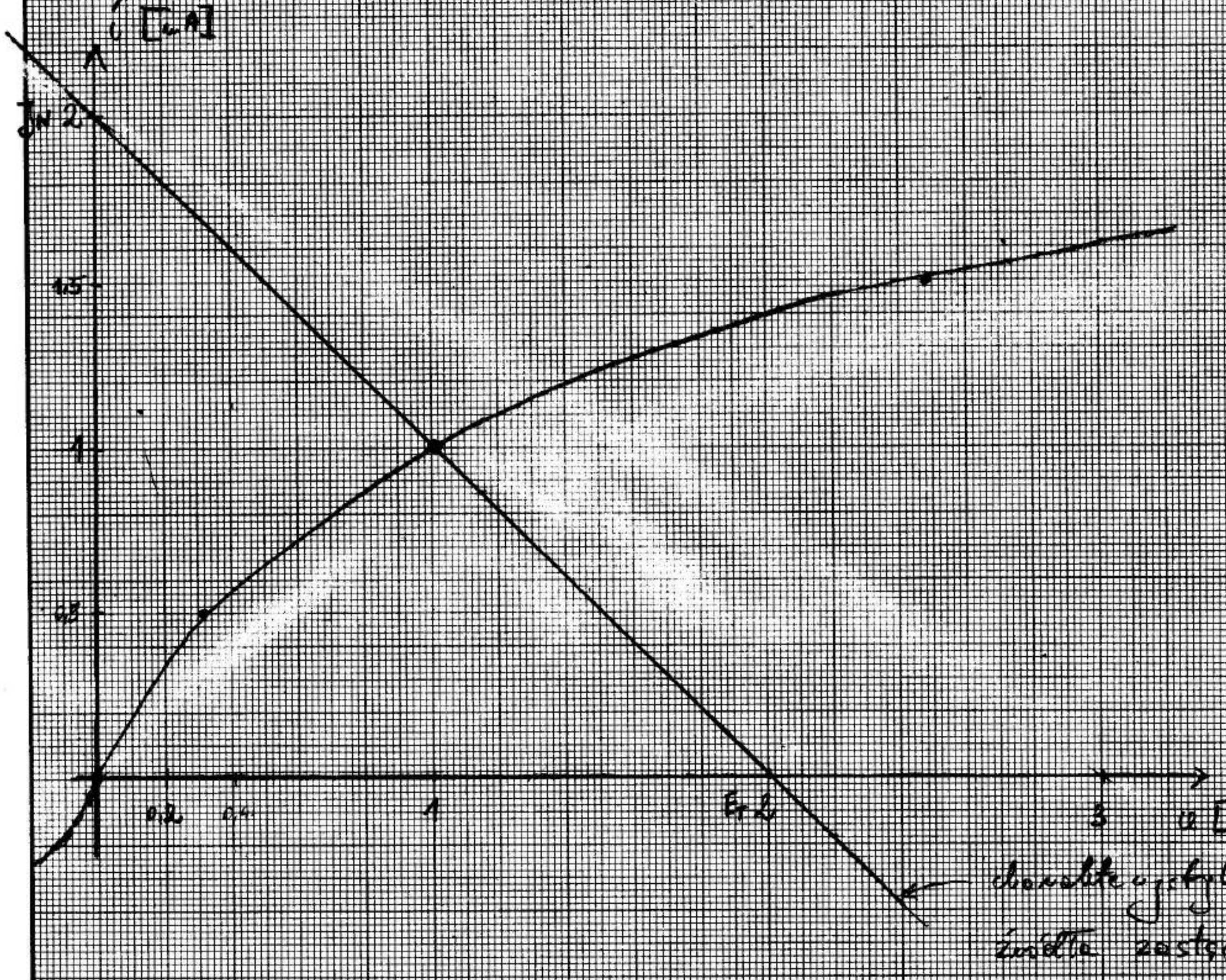
$$(I_N - 1)\left(\frac{1}{2} I_N^2 + \frac{1}{2} I_N + 2\right) = 0$$

$\underline{\underline{I_N = 1\ mA}}$ brak rzeczywistych pierwiastków - odrzucamy

$$U_N = a I_N^3 + b I_N = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) V = 1\ V$$

Rozwiązanie graficzne

R_N: $\{V, mA, k\Omega\}$ $u = a i^3 + b i$; $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$



i	u
0	0
0,5	0,3125
1	1
1,5	2,4375
2	5

źródło zastępcze

$i = I_N - \frac{u}{R_Z} = 2 - u$

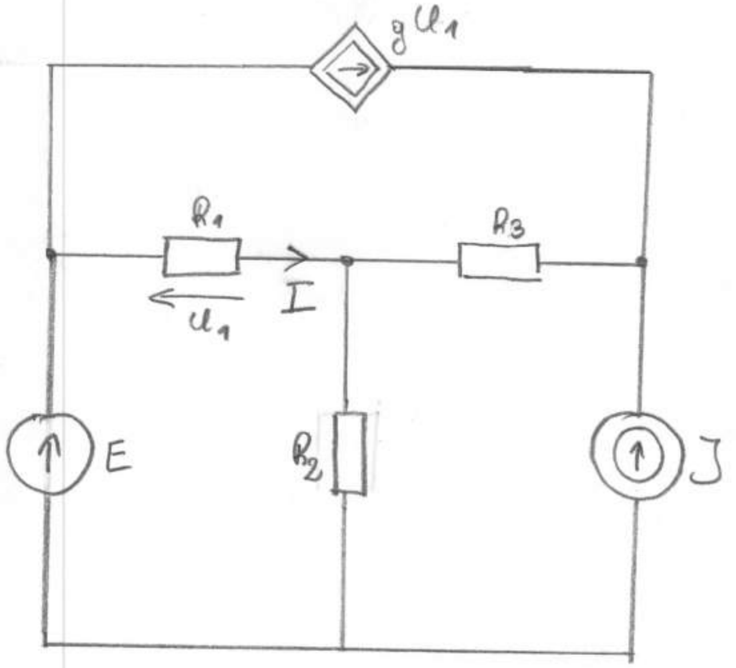
$\longrightarrow$ $u = 1 \Rightarrow i = 1$

$\Downarrow$

punkt (1V, 1mA) jest punktem pracy

Zadanie 2.

Wyznaczyć prąd I.



Dane:

$R_1 = 3k\Omega$

$R_2 = 3k\Omega$

$R_3 = 3k\Omega$

$g = 3mS$

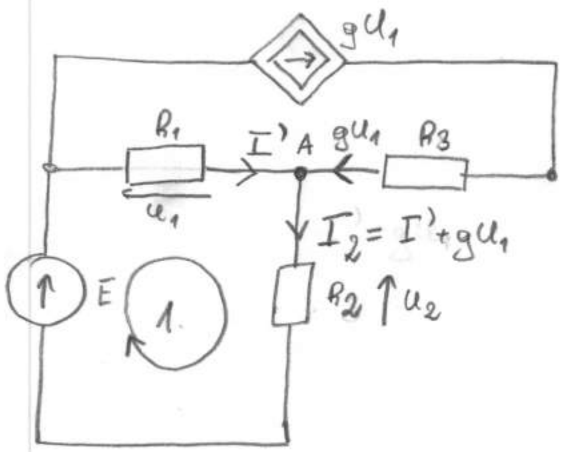
$E = 3V$

$J = 1mA$

W wypadku analizy układów z wieloma źródłami, jedną z metod jest metoda superpozycji.
Często układy z wyłączonymi wybranymi źródłami niezależnymi są prostsze w analizie.

W pierwszym etapie przeanalizujemy przyczynek do prądu I pochodzący od źródła E:

Po wyłączeniu wszystkich źródeł niezależnych poza analizowanym, schemat przyjmie postać:



/* Czemu? Jak zachowuje się wyłączone źródło prądowe, a jak napięciowe? */

Prądowe Prawo Kirchoffa (PPK) dla węzła A przyjmuje postać:

$$I' + gU_1 - I_2 = 0 \Rightarrow \underline{I_2 = I' + gU_1}$$

Napięciowe Prawo Kirchoffa (NPK) dla oczka 1. przyjmuje postać:

$$E - U_1 - U_2 = 0$$

Podstawiając pod U_1 i U_2 wzory wynikające z prawa Ohma otrzymujemy:

$$E - I' \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 = 0 \Rightarrow E - I' \cdot R_1 - (I' + gU_1) \cdot R_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = I'(R_1 + R_2 + gR_1R_2) \Rightarrow I' = \frac{E}{R_1 + R_2 + gR_1 \cdot R_2} =$$

$$= \frac{3V}{3k\Omega + 3k\Omega + 3\cancel{mS} \cdot 3\cancel{k\Omega} \cdot 3k\Omega} = \frac{3V}{33k\Omega} = \frac{1}{11} mA$$

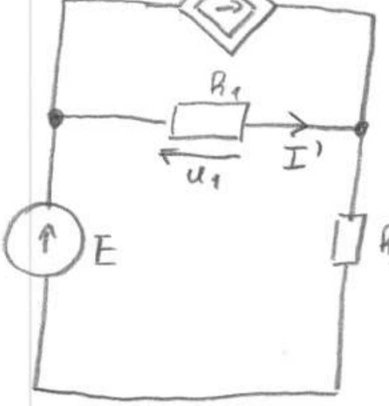
Można ten układ przeanalizować również w inny sposób. Z2.(2.)

Łatwo zauważyć, że opornik R_3 jest szeregowo połączony ze źródłem prądowym (sterowanym).

W efekcie możemy zastąpić go zwarciem.

(I tak dopóki nie wyzerujemy napięcia na oporze R_1 nie zmienimy napięcia na źródle prądowym gU_1 -> z punktu widzenia wartości prądu I' nie ma znaczenia, czy całe napięcie U_1 odkłada się na źródle gU_1 czy na źródle gU_1 i oporze R_3.)

Schemat dla tak zmodyfikowanego układu przyjmuje postać:

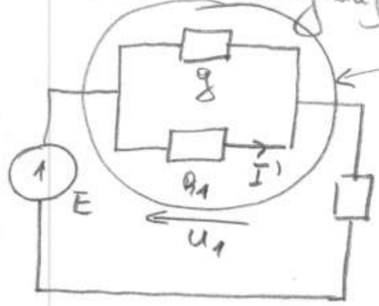


Widać, że napięcie sterujące źródłem sterowanym jest też napięciem na jego zaciskach.

Źródło prądowe sterowane napięciem na własnych zaciskach jest tożsame z przewodnością / oporem.

Ponieważ prąd źródła sterowanego proporcjonalny względem napięcia sterującego, przewodność / opór ma znak dodatni.

Ostatecznie otrzymujemy układ.



$$G_z = g + \frac{1}{R_1} = \frac{gR_1+1}{R_1} \Rightarrow R_z = \frac{1}{G_z} = \frac{R_1}{gR_1+1}$$

Z dzielnika napięciowego otrzymujemy:

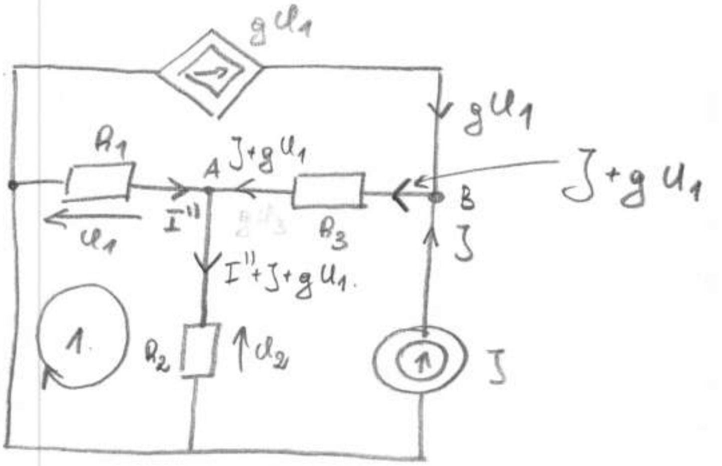
$$U_1 = E \cdot \frac{R_z}{R_z+R_2} = E \cdot \frac{R_1}{\cancel{gR_1+1}} \Big/ \frac{R_1+R_2+gR_1R_2}{\cancel{gR_1+1}} =$$

$$= E \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2+gR_1R_2}$$

Zatem z prawa Ohma $I' = \frac{U_1}{R_1} = \frac{E}{R_1+R_2+gR_1R_2} = \frac{1}{11}$ mA

Przyczynek od źródła J.

Przy wyłączonym źródle E schemat przyjmuje postać:



PPK dla węzłów A i B zostały „obliczone" i zaznaczone od razu na schemacie.
W efekcie, aby wyznaczyć prąd I'', wystarczy rozwiązać równanie wynikające z NPK dla oczka 1. i prawa Ohma

$$-U_1 - U_2 = 0 \quad , \quad U_1 = I'' \cdot R_1$$

$$-I'' \cdot R_1 - \left(I'' + J + gU_1\right) \cdot R_2 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$I'' \cdot R_1 + I'' \cdot R_2 + J \cdot R_2 + I''g R_1 R_2 = 0$$

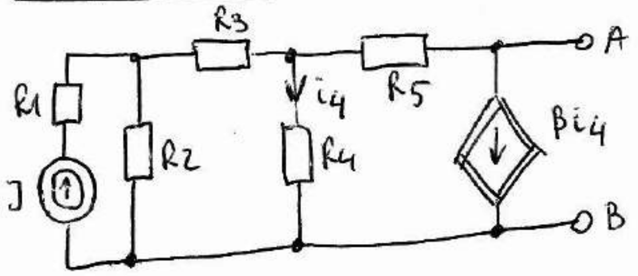
$$I'' \left(R_1 \cdot R_2 + g R_1 R_2\right) = -J \cdot R_2$$

$$I'' = -\frac{J \cdot R_2}{R_1 + R_2 + g R_1 R_2} = \frac{-1 mA \cdot \cancel{3 k\Omega}^{1}}{\cancel{33 k\Omega}_{11}} = -\frac{1}{11} mA$$

Ostatecznie:

$$I = I' + I'' = \frac{1}{11} mA - \frac{1}{11} mA = 0 A$$

Zadanie 1. Znaleźć źródło zastępcze Nortona:

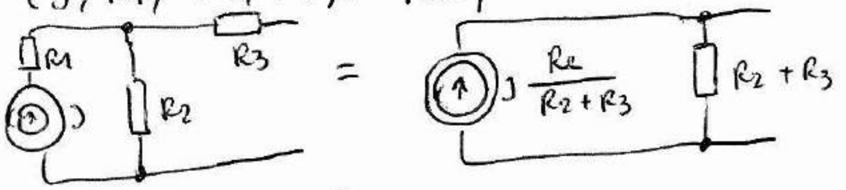


$J = 16mA$, $R_1 = 50k\Omega$, $R_4 = 20k\Omega$

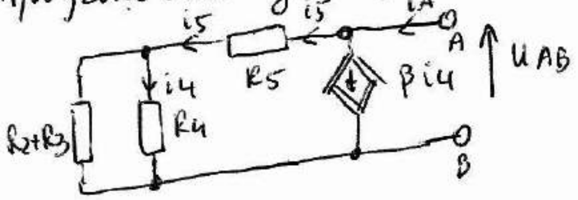
$\beta = 2$, $R_2 = 10k\Omega$, $R_5 = 30k\Omega$

$R_3 = 10k\Omega$

Rozwiązanie. Wstępne uproszczenie obwodu met. zamiany źródeł. (J, R_1, R_2, R_3). Rezystor R_1 można pominąć (wł. w szereg z J).



1) Wyznaczamy R_N:



$$R_N = \frac{u_{AB}}{i_A}$$

P.P.K: $i_A = i_5 + \beta i_4$

Dzielnik prądowy (R_2+R_3, R_4): $i_4 = i_5 \dfrac{R_2+R_3}{R_2+R_3+R_4}$

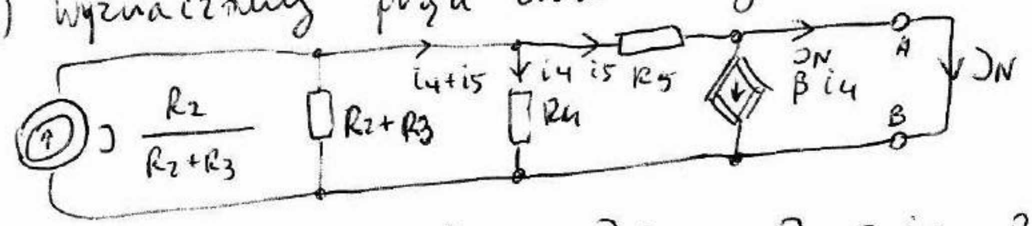
Prawo Ohma $(R_5, R_4 \| (R_2+R_3))$: $i_5 = \dfrac{u_{AB}}{R_5 + (R_2+R_3) \| R_4}$

Po podstawieniu: $i_A = \dfrac{u_{AB}}{R_5 + (R_2+R_3)\|R_4}\left(1 + \beta \dfrac{R_2+R_3}{R_2+R_3+R_4}\right)$

$$R_N = \frac{u_{AB}}{i_A} = \frac{R_5 + (R_2+R_3)\|R_4}{1 + \beta \frac{R_2+R_3}{R_2+R_3+R_4}} = \frac{30 + 20\|20}{1 + 2\frac{20}{20+20}} = \frac{40}{2} \; [k\Omega]$$

$$\boxed{R_N = 20\ k\Omega}$$

2) wyznaczamy prąd zwarciowy J_N:

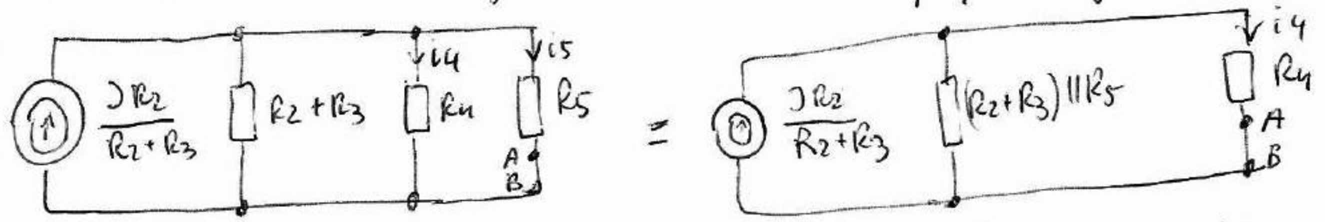


P.P.K: $i_5 = \beta i_4 + J_N$, $J_N = i_5 - \beta i_4$

Na rezystorach R_4, R_5 jest takie samo napięcie $R_4 i_4 = R_5 i_5$

stąd $i_5 = i_4 \dfrac{R_4}{R_5}$, $J_N = i_4\left(\dfrac{R_4}{R_5} - \beta\right)$

Prąd i_4 można obliczyć z dzielnika prądowego:



(źródło sterowane nie ma wpływu na prąd i_5 - można je pominąć)

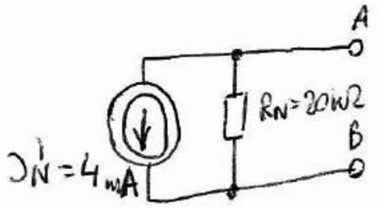
$$i_4 = J\frac{R_2}{R_2+R_3}\cdot\frac{R_5\|(R_2+R_3)}{R_4+R_5\|(R_2+R_3)}$$

Po podst. danych liczbowych:

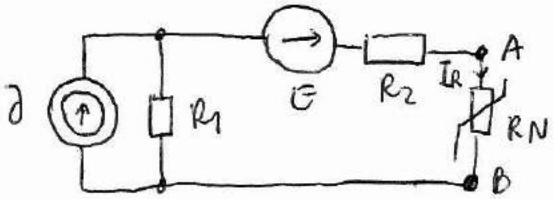
$$i_4 = 16\cdot\frac{10}{20}\cdot\frac{30\|20}{20+30\|20} = \frac{16}{2}\cdot\frac{12}{20+12} = 8\cdot\frac{3}{8} = 3\,[mA]$$

$$J_N = 3\left(\frac{20}{30}-2\right) = -4\,[mA]$$

Źródło zastępcze:



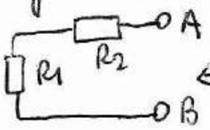
Zadanie 2. Obliczyć prąd I_R płynący przez opór nieliniowy R_N o charakterystyce: $u = a i |i|$. Część liniową obwodu zastąpić źródłem Thévenina lub Nortona.



Dane: $J = 1A$, $E = 10V$,
$R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 10\Omega$,
$a = 10\ V/A^2$.

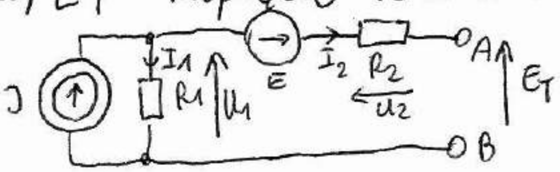
Rozwiązanie. Szukamy parametrów źródła Thévenina zastępującego część liniową obwodu.

1) R_T : $J \to$ rozwarcie, $E \to$ zwarcie:



$\leftarrow R_{AB} = R_T = R_1 + R_2 = 30 [\Omega]$

2) E_T : napięcie rozwarciowe



Rozwarcie : $I_2 = 0 \Rightarrow U_2 = 0$,

$\Downarrow$

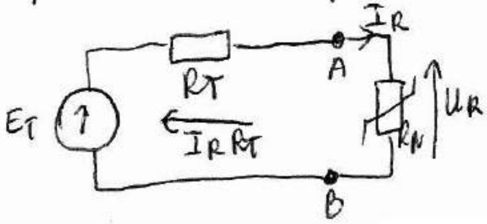
$I_1 = J$

$U_1 = R_1 I_1 = J R_1$

NPK: $U_1 + E - U_2 - E_T = 0$

stąd $E_T = U_1 + E - U_2 = J R_1 + E = 20 + 10 = 30\ [V]$

3) Rekonstrukcja obwodu z zastosowaniem źródła Thévenina.



NPK : $E_T - I_R R_T - \underset{a I_R^2}{\underset{\parallel}{U_R}} = 0$

zakładamy $I_R > 0$, więc: $U_R = a I_R |I_R| = a I_R^2$

$E_T - I_R R_T - a I_R^2 = 0$

$10 I_R^2 + 30 I_R - 30 = 0$

$\Delta = 2100$

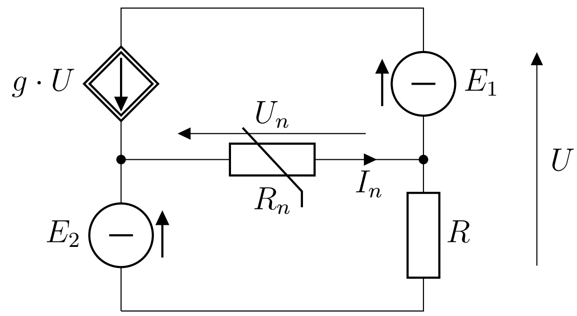
$I_{R1} = \dfrac{-30 - \sqrt{2100}}{2 \cdot 10} \approx -3,79 [A] \leftarrow$ sprzeczne z założeniem

$I_{R2} = \dfrac{-30 + \sqrt{2100}}{2 \cdot 100} \approx 0,791 [A]$

Odpowiedź : $I_R \approx 0,791\ [A]$

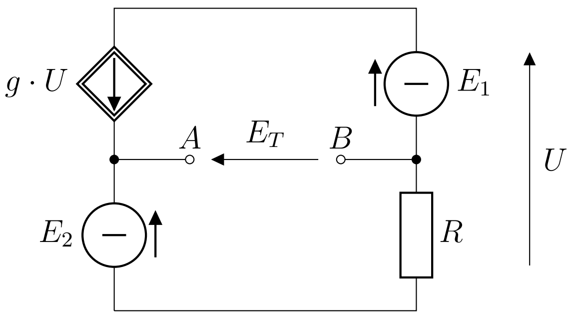
Zadanie 1

Wyznaczyć punkt pracy elementu nieliniowego R_n.
Dane: $E_1 = 8\,\mathrm{V}$, $E_2 = 3\,\mathrm{V}$, $g = 1\,\mathrm{mS}$, $R = 3\,\mathrm{k\Omega}$,
R_n: $U_n = a \cdot I_n \cdot |I_n|$, $a = \frac{1}{8}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{mA}^2}$.



Rozwiazanie:

1. przyjmujemy spójny system jednostek $\{\mathrm{V}, \mathrm{mA}, \mathrm{k\Omega}, \mathrm{mS}\}$
2. zaciskami $A{-}B$ dzielimy obwód na cześć liniową i nieliniową, a następnie wyznaczamy parametry źródła zastępczego (Thevenina lub Nortona) dla części liniowej
3. korzystając z metody superpozycji wyznaczamy napięcie E_T na rozwartych zaciskach $A - B$, czyli SEM źródła zastępczego Thevenina

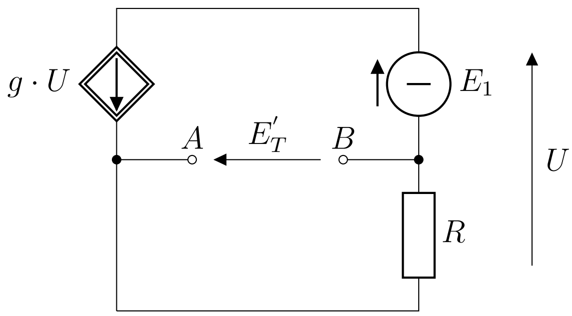


(a) składowa od źródła E_1

$$\begin{cases} E_T^{'} = g \cdot U \cdot R \\ U = E_1 - g \cdot U \cdot R \end{cases}$$

$$U = \frac{E_1}{1 + gR} = \frac{8}{1 + 1 \cdot 3} = 2\,\mathrm{V}$$

$$E_T^{'} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6\,\mathrm{V}$$

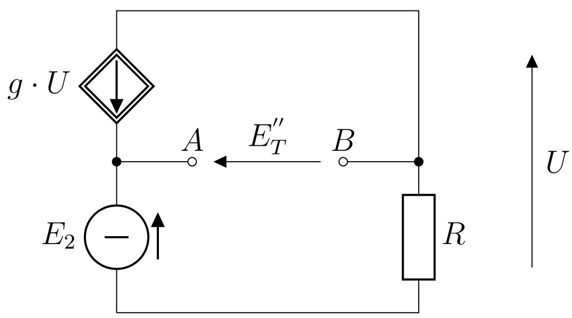


(b) składowa od źródła E_2

$$\begin{cases} E_2 - E_T^{''} + g \cdot U \cdot R = 0 \\ U = -g \cdot U \cdot R \end{cases}$$

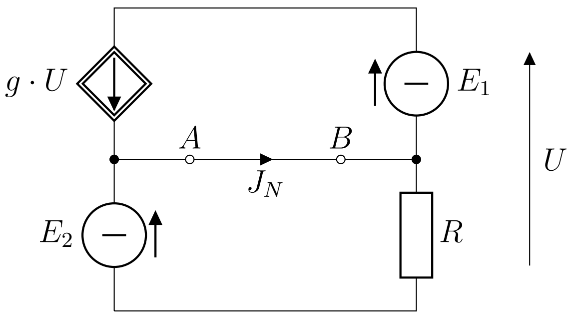
jeżeli $1 + g \cdot R \neq 0$ to $U = 0$

$$E_T^{''} = E_2 = 3\,\mathrm{V}$$



(c) SEM źródła zastępczego wynosi: $E_T = E_T^{'} + E_T^{''} = 6 + 3 = 9\,\mathrm{V}$

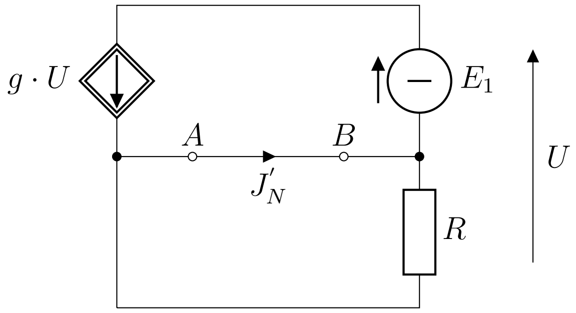
3. korzystając z metody superpozycji wyznaczamy prąd J_N płynący przez zawarte zaciski $A-B$, czyli wydajność prądową źródła zastępczego Nortona



(a) składowa od źródła E_1

$$\begin{cases} J_N^{'} - g \cdot U - \dfrac{U-E_1}{R} = 0 \\ U - E_1 = 0 \end{cases}$$

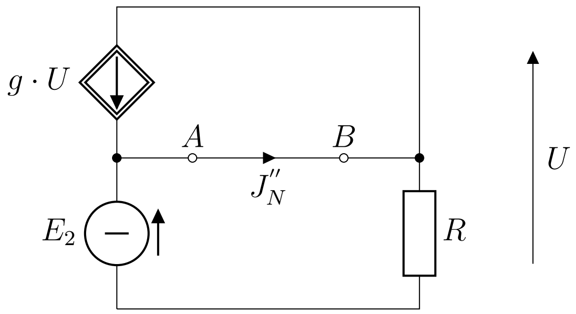
$$J_N^{'} = g \cdot E_1 = 1 \cdot 8 = 8\,\mathrm{mA}$$



(b) składowa od źródła E_2

$$\begin{cases} g \cdot U - J_N^{''} + \dfrac{U}{R} = 0 \\ U = E_2 \end{cases}$$

$$J_N^{''} = E_2 \cdot \left(g + \tfrac{1}{R}\right) = 3 \cdot \left(1 + \tfrac{1}{3}\right) = 4\,\mathrm{mA}$$



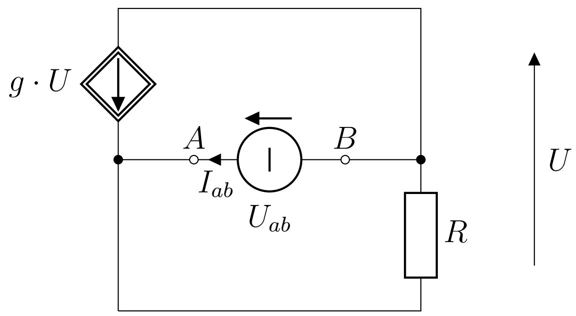
(c) wydajność prądowa źródła zastępczego wynosi: $J_N = J_N^{'} + J_N^{''} = 8 + 4 = 12\,\mathrm{mA}$

4. wyznaczamy rezystancję R_w między zaciskami $A-B$, czyli rezystancję wewnętrzną źródła zastępczego

$$\begin{cases} U = -R\,(g \cdot U + I_{ab}) \\ U = -U_{ab} \end{cases}$$

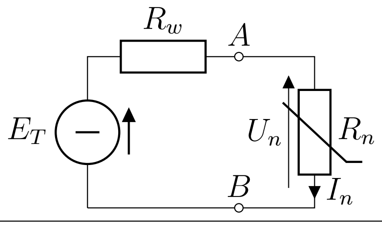
$$U_{ab} = -g \cdot R \cdot U_{ab} + R \cdot I_{ab}$$

$$R_w = \frac{U_{ab}}{I_{ab}} = \frac{R}{1+gR} = \frac{3}{1+1\cdot 3} = \frac{3}{4}\,\mathrm{k}\Omega$$



5. schemat układu ze źródłem zastępczym Thevenina

$$\begin{cases} E_T - R_w I_n - U_n = 0 \\ U_n = a I_n \left|I_n\right| \end{cases}$$



rozwiązujemy powyższy układ równań i otrzymujemy

dla $I_n < 0$

$aI_n^2 - I_n R_w + E_T = 0$

$\frac{1}{8}I_n^2 - \frac{3}{4}I_n + 9 = 0$

$\Delta = \frac{9}{16} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 9 < 0$ - brak rozwiązania rzeczywistego

dla $I_n >= 0$

$aI_n^2 + I_n R_w - E_T = 0$

$\frac{1}{8}I_n^2 + \frac{3}{4}I_n - 9 = 0$

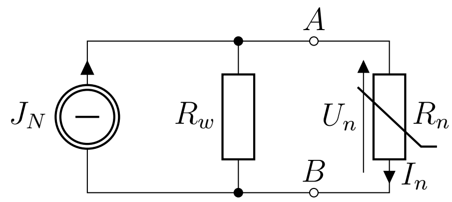
$\Delta = \frac{9}{16} + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 9 = \frac{81}{16}$

$I_n = \dfrac{-\frac{3}{4} - \frac{9}{4}}{2 \cdot \frac{1}{8}} < 0$ - sprzeczne z założeniem $I_n >= 0$

$I_n = \dfrac{-\frac{3}{4} + \frac{9}{4}}{2 \cdot \frac{1}{8}} = 6\,\mathrm{mA}$, zatem $U_n = \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 6 = 4{,}5\,\mathrm{V}$

5. schemat układu ze źródłem zastępczym Nortona

$$\begin{cases} J_N - \dfrac{U_n}{R_w} - I_n = 0 \\ U_n = aI_n\,|I_n| \end{cases}$$

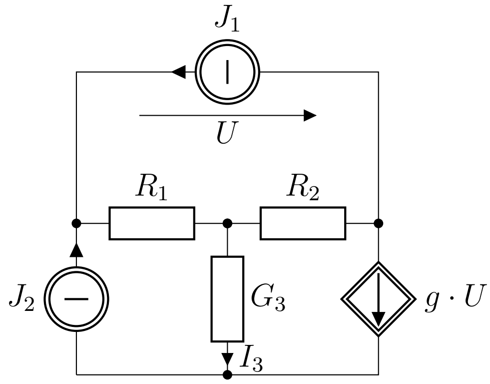


rozwiązujemy powyższy układ równań - wyniki identyczne jak w przypadku źródła Thevenina

Odpowiedź: punkt pracy wynosi $(4{,}5\,\mathrm{V}; 6\,\mathrm{mA})$.

Zadanie 2

Obliczyć wartość prądu I_3 (prąd płynący przez opornik o przewodności G_3). Dane: $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $G_3 = 7\,\mathrm{mS}$, $J_1 = 2\,\mathrm{mA}$, $J_2 = 3\,\mathrm{mA}$, $g = 4\,\mathrm{mS}$

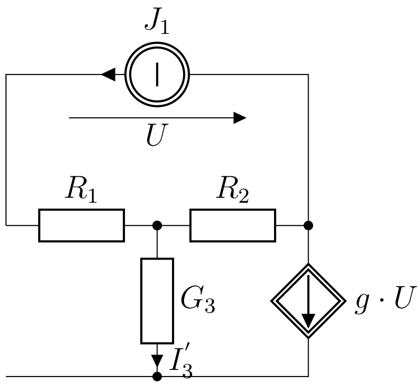


Rozwiazanie:

1. przyjmujemy spójny system jednostek $\{\mathrm{V}, \mathrm{mA}, \mathrm{k\Omega}, \mathrm{mS}\}$
2. prąd I_3 wyznaczamy jako sumę prądów (zasada superpozycji) płynących przez opornik R_3, wytwarzanych przez każde niezależne źródło
3. składowa od źródła J_1

$$\begin{cases} I_3' = -g \cdot U \\ -U - J_1 R_1 - R_2 \left(J_1 - I_3'\right) = 0 \end{cases}$$

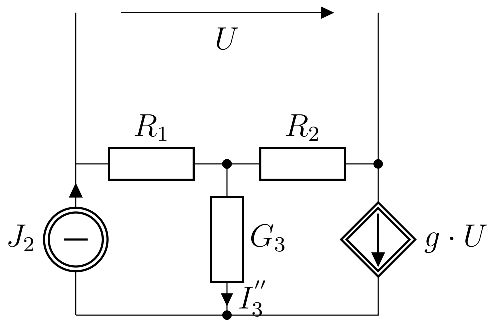
$$I_3' = \frac{J_1 (R_1 + R_2)}{\frac{1}{g} + R_2} = \frac{2 \cdot (1+2)}{\frac{1}{4} + 2} = 2\tfrac{2}{3}\,\mathrm{mA}$$



4. składowa od źródła J_2

$$\begin{cases} I_3'' - J_2 + gU = 0 \\ -U - J_2 R_1 - gU R_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_3'' = J_2 + g \cdot \frac{J_2 R_1}{1 + g R_2} = 3 + 4 \cdot \frac{3 \cdot 1}{1 + 4 \cdot 2} = 4\tfrac{1}{3}\,\mathrm{mA}$$



5. sumujemy składowe zgodnie z zasadą superpozycji

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 2\tfrac{2}{3} + 4\tfrac{1}{3} = 7\,\mathrm{mA}$$

Odpowiedź: $I_3 = 7\,\mathrm{mA}$