Wykład 7
Wyznaczniki

Definicja 1 *Dowolną funkcję różnowartościową* $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *nazywamy* ***permutacją zbioru*** $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Oznaczenie.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Uwaga. Dla zbioru n-elementowego istnieje dokładnie $n!$ permutacji. Zbiór permutacji zbioru n-elementowego oznaczamy przez S_n.

Definicja 2 *Permutacja* σ *tworzy* ***inwersję*** *elementów* k, m, *gdy* $k < m$ *i* $\sigma(k) > \sigma(m)$.

Permutacja identycznościowa: $\sigma(k) = k \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Jest to jedyna permutacja, która nie tworzy żadnej inwersji.

Definicja 3 *Permutację nazywamy* ***parzystą****, gdy jest identycznością lub tworzy parzystą liczbę inwersji, a* ***nieparzystą****, gdy tworzy nieparzystą liczbę inwersji.*

Znak permutacji: $sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ - parzysta;} \\ -1, & \sigma \text{ - nieparzysta.} \end{cases}$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ mamy $\frac{1}{2}n!$ permutacji parzystych i $\frac{1}{2}n!$ permutacji nieparzystych.

Definicja 4 ***Wyznacznikiem*** *macierzy* ***kwadratowej*** $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, *nazywamy element ciała* $\mathbb{K}$ *zdefiniowany następująco*

$$\sum_{\sigma\in S_n} sgn\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Oznaczenie. $\det A$, $|A|$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} sgn\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Uwaga. Suma w wyznaczniku składa się z $n!$ składników, połowa jest ze znakiem $+$, połowa ze znakiem $-$. Każdy iloczyn składa się z n czynników, po jednym z każdego wiersza i z każdej kolumny. Dodatkowo przyjmuje się, że dla $n = 1$, $A = [a]$, $\det A = a$.

1. $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. $n = 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ -a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$$

Metoda Sarrusa - **NIE** działa dla macierzy kwadratowych stopnia innego niż 3.

Definicja 5 ***Dopełnieniem algebraicznym elementu*** *a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nazywamy liczbę (element ciała) $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij}$, gdzie M_{ij} jest macierzą powstałą z A przez wykreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.*

Twierdzenie 1 (Laplace'a) *Dla dowolnej macierzy kwadratowej stopnia n zachodzi:*
$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *(rozwinięcie względem i-tego wiersza),*
$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ *(rozwinięcie względem j-tej kolumny).*

Własności wyznaczników dla kolumn (dla wierszy analogicznie)

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \lambda \cdot a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda \cdot a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Jeżeli macierz zawiera kolumnę samych zer, to jej wyznacznik jest równy zero.

3. Jeżeli zamienimy ze sobą miejscami dwie kolumny, to zmieni się znak wyznacznika na przeciwny.

4. Jeżeli macierz ma dwie takie same kolumny, to jej wyznacznik jest równy zero.

5. Jeżeli macierz ma dwie proporcjonalne kolumny, to jej wyznacznik jest równy zero.

6. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} + b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Jeżeli do ustalonej kolumny macierzy dodamy kombinację liniową jej innych kolumn, to wyznacznik się nie zmieni.

Definicja 6 ***Macierzą transponowaną*** *macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy macierz $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, gdzie $b_{ij} = a_{ji}$.*

Uwaga. Macierz transponowana A^T to macierz, której kolumnami są wiersze macierzy A, natomiast wierszami - kolumny macierzy A.

Twierdzenie 2 *Dla dowolnej macierzy kwadratowej A:* $\det A = \det A^T$.

Twierdzenie 3 (Cauchy'ego) *Dla dowolnych macierzy kwadratowych A, B stopnia n*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Definicja 7 *Macierz kwadratową A nazywamy* ***macierzą nieosobliwą****, gdy* $\det A \neq 0$. *W przeciwnym wypadku A nazywamy* ***macierzą osobliwą****.*

Macierz odwrotna

Definicja 8 *Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.* ***Macierzą odwrotną*** *do macierzy A nazywamy taką macierz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, że*

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n.$$

Uwaga. Macierz odwrotna do A, jeśli istnieje, to jest wyznaczona jednoznacznie. Oznaczamy ją przez A^{-1}.

Uwaga. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Definicja 9 ***Macierzą dołączoną*** *macierzy $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nazywamy macierz $[A_{ij}]^T_{n\times n}$.*

Uwaga. Macierz dołączoną macierzy A oznaczamy przez A^D. Jest to transponowana macierz dopełnień algebraicznych.

Uwaga. Dla dowolnej macierzy kwadratowej A zachodzi

$$A \cdot A^D = A^D \cdot A = (\det A) \cdot E.$$

Twierdzenie 4 *Jeżeli* $\det A \neq 0$, *to macierz odwrotna do A istnieje i*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D.$$

Uwaga. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Zastosowanie do macierzy zmiany bazy

Niech V, W, U - skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{K}$, niech $\phi : V \to W$, $\psi : W \to U$ - przekształcenia liniowe.

Wtedy $\psi \circ \phi : V \to U$ też jest przekształceniem liniowym i zachodzi:

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(\psi \circ \phi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\psi) \cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi),$$

gdzie $\mathcal{A}$ - baza V, $\mathcal{B}$ - baza W, $\mathcal{C}$ - baza U.

Wniosek. W szczególności, gdy $V = U = W$ i $\psi = \phi = id$:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id) \cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(id),$$

gdzie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ - bazy przestrzeni liniowej V.

Wniosek. $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id) = (M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id))^{-1}$.

Odwracanie macierzy - sposób drugi

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\det A \neq 0$.
Tworzymy macierz $[A|E_n] \in M_{n\times 2n}(\mathbb{K})$ (pierwsze n kolumn to kolumny macierzy A, następne - kolumny macierzy jednostkowej E_n). Przeprowadzamy operacje na wierszach macierzy $[A|E_n]$:

1. dodawanie wiersza pomnożonego przez stałą do innego wiersza,
2. zmiana kolejności wierszy,
3. pomnożenie wiersza przez stałą,

tak aby uzyskać macierz $[E_n|B]$.
Wtedy $B = A^{-1}$.