AUTOMATYKA I ROBOTYKA - SEMESTR 2

ANALIZA i RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWE 2. ZESTAW 9.

Zad. 1. Rozwinąć następujące funkcje w szereg Taylora wokół punktu $z_0 = 1$

$$\text{(a)} \quad f(z) = \frac{z}{z+2}$$

$$\text{(b)} \quad f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}$$

$$\text{(c)} \quad f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$$

$$\text{(d)} \quad f(z) = z \cdot e^z$$

Zad. 2. Rozwinąć następujące funkcje w szereg Laurenta w podanych pierścieniach $P(z_0; r, R)$ oraz podać wartości współczynników a_{-1}, a_0, a_1 dla każdego rozwinięcia

$$\text{(a)} \quad f(z) = z \cdot \sin\frac{1}{z}, \quad P(0; 0, \infty)$$

$$\text{(b)} \quad f(z) = \frac{2z}{z^2+1}, \quad P(i; 0, 2)$$

$$\text{(c)} \quad f(z) = \frac{2(z+i)}{z^2-1}, \quad P(1+i; 1, \sqrt{5})$$

$$\text{(d)} \quad f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z^2+1)(z-2)}, \quad P(i; 2, \sqrt{5})$$

Zad. 3. Przedstawić funkcję

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

w postaci szeregu (Taylora lub Laurenta) zbieżnego w obszarze

$$\text{(a)} \quad |z| < 1$$

$$\text{(b)} \quad 1 < |z| < 2$$

$$\text{(c)} \quad |z| > 2$$

Zad. 4. Rozwinąć funkcję

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$$

(a) w szereg Laurenta w $P(-2i; 1, 3)$

(b) w szereg Laurenta w sąsiedztwie punktu ∞: $P(-2i; 3, \infty)$

(c) w szereg Taylora wokół punktu $z_0 = 1$

Zad. 5. Wyznaczyć obsszar zbieżności i sumę szeregu Laurenta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

gdzie

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}\,, & n \geq 0 \\ 0\,, & n = -2 \\ -1\,, & -2 \neq n < 0 \end{cases}$$