Wykład 8

Całka oznaczona

Twierdzenie 1. (**WK** R –całkowalności) Jeżeli funkcja f jest R –całkowalna na przedziale $\langle a; b\rangle$, to jest ograniczona na tym przedziale.

Twierdzenie 2. (**WW** R – całkowalności) Jeżeli funkcja f jest ograniczona w $\langle a; b\rangle$ i ma w tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości, to jest R – całkowalna w $\langle a; b\rangle$.

W szczególności funkcja ciągła na $\langle a; b\rangle$ jest R – całkowalna w tym przedziale.

Własności całki Riemanna (R – całki)

1. Jeżeli f jest R –całkowalna na $\langle a; b\rangle$ i $A \in \mathbb{R}$, to funkcje $|f|$ i $A \cdot f$ są R – całkowalne i $\int\limits_a^b A \cdot f(x)dx = A \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$

2. Jeżeli funkcje f i g są R – całkowalne na $\langle a; b\rangle$, to funkcja $f + g$ jest R – całkowalna na $\langle a; b\rangle$ i $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$

3. Jeżeli funkcje f i g są R – całkowalne na $\langle a; b\rangle$, to funkcja $f \cdot g$ jest R – całkowalna na $\langle a; b\rangle$; w szczególności funkcja f^2 jest R – całkowalna.

4. Jeżeli f jest R –całkowalna na $\langle a; b\rangle$, to dla każdego $c \in (a; b)$ funkcja f jest R – całkowalna w przedziałach $\langle a; c\rangle$ i $\langle c; b\rangle$ i prawdziwa jest równość

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

5. Jeżeli f jest R –całkowalna na $\langle a; b\rangle$ i funkcja g różni się od f w przedziale $\langle a; b\rangle$ tylko w skończonej liczbie punktów, to $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$.

6. Jeżeli funkcje f i g są R – całkowalne na $\langle a; b\rangle$ oraz $f(x) \leqslant g(x)$ na tym przedziale, to

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$$

Wnioski z własności 6

Wniosek 1. Jeżeli f jest R –całkowalna na $\langle a; b\rangle$ i $f \geqslant 0$ na tym przedziale, to $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Wniosek 2. Jeżeli f jest R –całkowalna na $\langle a;b\rangle$, to

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Wniosek 3. Jeżeli $m \leqslant f(x) \leqslant M$ na przedziale $\langle a;b\rangle$ i f jest R –całkowalna na tym przedziale, to

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

Rozszerzenie pojęcia R – całki

Jeśli $a = b$, to

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{df}{=} 0$$

Jeśli $a > b$, to

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{df}{=} -\int\limits_b^a f(x)dx$$

Własności 1 – 5 pozostają prawdziwe, pozostałe **nie**.

Funkcja górnej granicy całkowania

Zał. Funkcja f jest R – całkowalna na przedziale $\langle a;b\rangle$ i $a < b$.

Niech α – dowolnie ustalona liczba z tego przedziału. Wówczas dla każdego $x \in \langle a;b\rangle$ funkcja f jest R – całkowalna na przedziale o końcach α i x, zatem wartość $\int\limits_\alpha^x f(t)dt$ jest wyznaczona jednoznacznie przez x. Można więc określić funkcję F w przedziale $\langle a;b\rangle$

$$F(x) \overset{df}{=} \int\limits_\alpha^x f(t)dt$$

nazywamy ją funkcją górnej granicy całkowania.

Tw. 1 (**I twierdzenie główne rachunku całkowego**) Jeżeli funkcja f jest R – całkowalna na przedziale i liczba $\alpha \in \langle a;b\rangle$ jest dowolnie ustalona, to funkcja $F(x) \overset{df}{=} \int\limits_\alpha^x f(t)dt$ jest ciągła w przedziale $\langle a;b\rangle$.
Ponadto, w każdym punkcie $x \in \langle a;b\rangle$, w którym f jest ciągła, funkcja F ma pochodną i $F'(x) = f(x)$.

Wniosek Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a;b\rangle$, to funkcja F posiada pochodną w tym przedziale i $F'(x)=f(x)$ dla każdego $x\in\langle a;b\rangle$, tzn. F jest funkcją pierwotną funkcji f w tym przedziale.

Tw. 2 (**II twierdzenie główne rachunku podstawowego**) Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale o końcach a i b i ϕ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f w tym przedziale, to

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\phi(b)-\phi(a)=[\phi(x)]_a^b$$

Tw. 3 (**całkowe o wartości średniej**) Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a;b\rangle$, to istnieje taki punkt $c\in\langle a;b\rangle$, że

$$\int\limits_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a).$$

Tw. 4 (**o całkowaniu przez części**) Jeżeli funkcje f i g są klasy C^1 na przedziale o końcach a i b, to

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$$

Tw. 5 (**o całkowaniu przez podstawienie** $x=\phi(t)$) Jeżeli

1. funkcja ϕ jest klasy C^1 na przedziale domkniętym T o końcach α i β;
2. funkcja f jest ciągła na przedziale $\phi(T)$
3. $a=\phi(\alpha)$, $b=\phi(\beta)$

$$\text{to}\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\cdot\phi'(t)dt$$

Wniosek (**tw. o całkowaniu przez podstawienie** $t=h(x)$) Jeżeli

1. funkcja h jest klasy C^1 na przedziale domkniętym X o końcach a i b;
2. funkcja f jest ciągła na zbiorze $h(X)$
3. $\alpha=h(a)$, $\beta=h(b)$

$$\text{to}\int\limits_a^b f(h(x))h'(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt$$

Uwaga Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle -a;a\rangle$, $a>0$, to

1. Jeżeli f jest funkcją parzystą, to $\int\limits_{-a}^a f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx.$
2. Jeżeli f jest funkcją nieparzystą, to $\int\limits_{-a}^a f(x)dx=0.$