Metody Probabilistyczne i Staystyka
Wykład 11.

Rozkłady warunkowe zmiennych losowych
Warunkowa wartość oczekiwana i warunkowa wariancja

Ewa Frankiewicz

12 maja 2025

Przypomnienie

Jeśli A i B są zdarzeniami z tej samej przestrzeni probabilistycznej takimi, że $P(B) > 0$, to

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definicja

Niech (X, Y) ma rozkład dyskretny.

Rozkłady warunkowe zmiennych losowych typu dyskretnego

Definicja

Niech (X, Y) ma rozkład dyskretny. Jeśli przy ustalonym $y \in S_Y$, dla każdego $x \in S_X$ wyznaczymy

$$P(X = x|Y = y) =$$

Definicja

Niech (X, Y) *ma rozkład dyskretny. Jeśli przy ustalonym* $y \in S_Y$, *dla każdego* $x \in S_X$ *wyznaczymy*

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)},$$

Definicja

Niech (X, Y) *ma rozkład dyskretny. Jeśli przy ustalonym* $y \in S_Y$, *dla każdego* $x \in S_X$ *wyznaczymy*

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)},$$

to otrzymamy **funkcję prawdopodobieństwa rozkładu warunkowego zmiennej losowej** X **pod warunkiem zdarzenia** $\{Y = y\}$.

Definicja

Niech (X, Y) *ma rozkład dyskretny. Jeśli przy ustalonym* $y \in S_Y$, *dla każdego* $x \in S_X$ *wyznaczymy*

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)},$$

to otrzymamy **funkcję prawdopodobieństwa rozkładu warunkowego zmiennej losowej X pod warunkiem zdarzenia** $\{Y = y\}$.

Uwaga:

Przy ustalonym $y \in S_Y$

$$\sum_x P(X = x|Y = y) = 1.$$

Przykład 1.

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny z funkcją prawdopodobieństwa

$X \setminus Y$	1	2	3
0	0.25	0.25	0.25
1	0	0.25	0

.

Wyznaczyć rozkłady warunkowe Y pod warunkiem zdarzeń $\{X = 0\}$ i $\{X = 1\}$ oraz X pod warunkiem zdarzeń $\{Y = 1\}$, $\{Y = 2\}$, $\{Y = 3\}$.

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład ciągły,*

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład ciągły, to* **gęstością rozkładu warunkowego zmiennej losowej** X **pod warunkiem zdarzenia** $\{Y = y\}$ *nazywamy funkcję*

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład ciągły, to* **gęstością rozkładu warunkowego zmiennej losowej** X **pod warunkiem zdarzenia** $\{Y = y\}$ *nazywamy funkcję*

$$f_{X|Y}(x|y) =$$

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład ciągły, to* **gęstością rozkładu warunkowego zmiennej losowej** X **pod warunkiem zdarzenia** $\{Y = y\}$ *nazywamy funkcję*

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} & , \quad gdy\ f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & , \quad w\ p.p. \end{cases} .$$

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład ciągły, to* **gęstością rozkładu warunkowego zmiennej losowej** X **pod warunkiem zdarzenia** $\{Y = y\}$ *nazywamy funkcję*

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} & , \quad gdy\ f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & , \quad w\ p.p. \end{cases}.$$

Przykład 2.

Wektor (X, Y) ma rozkład jednostajny w obszarze $D = \{(x, y) : |x| + |y| < 2\}$. Wyznaczyć gęstość rozkładu warunkowego zmiennej losowej Y pod warunkiem zdarzenia $\{X = x\}$.

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład dyskretny i* $y_k \in S_Y$ *jest ustalone, to*

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład dyskretny i* $y_k \in S_Y$ *jest ustalone, to* **warunkową wartość oczekiwaną** *zmiennej losowej* X *pod warunkiem zdarzenia* $\{Y = y_k\}$ *obliczamy zgodnie ze wzorem*

Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład dyskretny i* $y_k \in S_Y$ *jest ustalone, to* **warunkową wartość oczekiwaną** *zmiennej losowej* X *pod warunkiem zdarzenia* $\{Y = y_k\}$ *obliczamy zgodnie ze wzorem*

$$E(X|Y = y_k) =$$

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) ma rozkład dyskretny i $y_k \in S_Y$ jest ustalone, to **warunkową wartość oczekiwaną** *zmiennej losowej X pod warunkiem zdarzenia $\{Y = y_k\}$ obliczamy zgodnie ze wzorem*

$$E(X|Y = y_k) = \sum_{x \in S_X} x \cdot P(X = x|Y = y_k).$$

Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład dyskretny i* $y_k \in S_Y$ *jest ustalone, to* **warunkową wartość oczekiwaną** *zmiennej losowej* X *pod warunkiem zdarzenia* $\{Y = y_k\}$ *obliczamy zgodnie ze wzorem*

$$E(X|Y = y_k) = \sum_{x \in S_X} x \cdot P(X = x|Y = y_k)\,.$$

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład ciągły, natomiast* y *jest ustaloną liczbą, dla której* $f_Y(y) \neq 0$, *to*

Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład dyskretny i* $y_k \in S_Y$ *jest ustalone, to* **warunkową wartość oczekiwaną** *zmiennej losowej* X *pod warunkiem zdarzenia* $\{Y = y_k\}$ *obliczamy zgodnie ze wzorem*

$$E(X|Y = y_k) = \sum_{x \in S_X} x \cdot P(X = x|Y = y_k) \, .$$

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) *ma rozkład ciągły, natomiast* y *jest ustaloną liczbą, dla której* $f_Y(y) \neq 0$, *to* **warunkową wartość oczekiwaną** *zmiennej losowej* X *pod warunkiem zdarzenia* $\{Y = y\}$ *obliczamy zgodnie ze wzorem*

Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) ma rozkład dyskretny i $y_k \in S_Y$ jest ustalone, to **warunkową wartość oczekiwaną** *zmiennej losowej X pod warunkiem zdarzenia $\{Y = y_k\}$ obliczamy zgodnie ze wzorem*

$$E(X|Y = y_k) = \sum_{x \in S_X} x \cdot P(X = x|Y = y_k)\,.$$

Definicja

Jeśli wektor (X, Y) ma rozkład ciągły, natomiast y jest ustaloną liczbą, dla której $f_Y(y) \neq 0$, to **warunkową wartość oczekiwaną** *zmiennej losowej X pod warunkiem zdarzenia $\{Y = y\}$ obliczamy zgodnie ze wzorem*

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\,dx\,.$$