Algebra liniowa

Zestaw dodatkowy do samodzielnego rozwiązywania

1. Ile wynosi współczynnik przy x^2 w wyznaczniku $\begin{vmatrix} 1 & 2x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & x & 2 & 3 \end{vmatrix}$? Uwaga: nie trzeba liczyć!

2. Niech $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dla ustalonego $n \in \mathbb{Z}^+$. Czy $\det(A+B) = \det A + \det B$? Znaleźć kontrprzykład.

3. *Macierz trójkątna* to macierz kwadratowa, której wszystkie współczynniki pod główną przekątną lub wszystkie współczynniki nad tą przekątną są równe zero. Pokazać, że wyznacznik takiej macierzy jest równy iloczynowi elementów z jej głównej przekątnej.

4. Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -1 & 1 \\ -10 & 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$,

h) $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$, i) $\begin{bmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & y & z \\ x & y & 0 & z \\ x & y & z & 0 \end{bmatrix}$.

Odwracanie macierzy - sposób drugi

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\det A \neq 0$.
Tworzymy macierz $[A|E_n] \in M_{n\times 2n}(\mathbb{K})$ (pierwsze n kolumn to kolumny macierzy A, kolejne to kolumny macierzy jednostkowej E_n). Przeprowadzamy operacje na wierszach macierzy $[A|E_n]$:

(a) dodawanie wiersza pomnożonego przez stałą do innego wiersza,

(b) zmiana kolejności wierszy,

(c) pomnożenie wiersza przez stałą,

tak aby uzyskać macierz $[E_n|B]$. Wtedy $B = A^{-1}$.

5. Wyznaczyć macierz odwrotną, o ile istnieje. Wynik sprawdzić mnożąc odpowiednie macierze.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.