Szeregi Fouriera

ANA2 - AiR

Ewa Stróżyna

Szeregi Fouriera

Szeregi Fouriera

Definicja

Niech (a_n), (b_n) będą ciągami liczb rzeczywistych i niech $l > 0$. *Szeregiem trygonometrycznym* nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ o wyrazie ogólnym

$$f_n(x) = a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$f_0(x) = \frac{a_0}{2}$$

Szeregi Fouriera

Definicja

Niech (a_n), (b_n) będą ciągami liczb rzeczywistych i niech $l > 0$. *Szeregiem trygonometrycznym* nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ o wyrazie ogólnym

$$f_n(x) = a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$f_0(x) = \frac{a_0}{2}$$

Uwaga:

(1) Przekształcając wyraz ogólny dostaniemy
$f_n(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{b_n}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right) =$

$= c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l} + \varphi_n\right)$
gdzie $c_n = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$.

Funkcje f_n, określające zależność położenia od czasu x, przedstawiają drgania harmoniczne o amplitudzie c_n, okresie $\frac{2l}{n}$ i fazie początkowej φ_n.

$= c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l} + \varphi_n\right)$
gdzie $c_n = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$.

Funkcje f_n, określające zależność położenia od czasu x, przedstawiają drgania harmoniczne o amplitudzie c_n, okresie $\frac{2l}{n}$ i fazie początkowej φ_n.

Suma częściowa tego szeregu tzw. *wielomian trygonometryczny*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \ldots + a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

jest funkcją okresową o okresie $p = 2l$, a_0, a_n, b_n – współczynniki szeregu trygonometrycznego, $x \in \mathbb{R}$.

$= c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l} + \varphi_n\right)$
gdzie $c_n = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$.

Funkcje f_n, określające zależność położenia od czasu x, przedstawiają drgania harmoniczne o amplitudzie c_n, okresie $\frac{2l}{n}$ i fazie początkowej φ_n.

Suma częściowa tego szeregu tzw. *wielomian trygonometryczny*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \ldots + a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

jest funkcją okresową o okresie $p = 2l$, a_0, a_n, b_n – współczynniki szeregu trygonometrycznego, $x \in \mathbb{R}$.

Suma częściowa jest wypadkową drgań, złożoną ze składowej stałej $\frac{a_0}{2}$, harmoniki podstawowej f_1 o okresie $2l$, harmonik składowych: f_2 o okresie l, f_3 o okresie $\frac{2l}{3}$, ..., f_n o okresie $\frac{2l}{n}$.

(2) Każdy składnik $S_n(x)$ jest funkcją okresową, wspólnym okresem podstawowym wszystkich składników, a więc sumy częściowej S_n jest $p = 2l$.

(2) Każdy składnik $S_n(x)$ jest funkcją okresową, wspólnym okresem podstawowym wszystkich składników, a więc sumy częściowej S_n jest $p = 2l$.

(3) Jeśli szereg trygonometryczny jest zbieżny na dowolnym przedziale długości $2l$, ozn. $X_a = [a, a + 2l]$, $a \in \mathbb{R}$, to jest on zbieżny na całym $\mathbb{R}$ i jego suma jest funkcją okresową o okresie $2l$.

Zależność współczynników a_0, a_n, b_n szeregu trygonometrycznego od jego sumy f przy założeniu zbieżności jednostajnej:

Zależność współczynników a_0, a_n, b_n szeregu trygonometrycznego od jego sumy f przy założeniu zbieżności jednostajnej:

Tw. (wzory Eulera – Fouriera)

Jeśli ciąg sum częściowych jest zbieżny jednostajnie na przedziale $X_a = [a, a+2l]$, to suma tego szeregu $f(x)$ jest funkcją ciągłą na X_a oraz współczynniki szeregu zadane są *wzorami Eulera–Fouriera*:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Uwaga:

Gdy w twierdzeniu rozważamy przedział $X_{-l} = [-l, l]$, to wzory Eulera–Fouriera:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx\,, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Uwaga:

Gdy w twierdzeniu rozważamy przedział $X_{-l} = [-l, l]$, to wzory Eulera–Fouriera:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx\,, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Rozwijanie funkcji w szereg trygonometryczny Foriera

Uwaga:

Gdy w twierdzeniu rozważamy przedział $X_{-l} = [-l, l]$, to wzory Eulera–Fouriera:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx\,, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Rozwijanie funkcji w szereg trygonometryczny Foriera

Uwaga:

Dla dowolnej funkcji całkowalnej w $[-l, l]$ istnieją współczynniki szeregu trygonometrycznego $a_0, a_n, b_n,\ n \in \mathbb{N}$ określone wzorami Eulera – Fouriera.

Definicja

Każdej funkcji całkowalnej na przedziale X_a możemy przyporządkować szereg trygonometryczny (zbieżny lub rozbieżny) o współczynnikach zadanych wzorami Eulera–Fouriera nazywany *szeregiem Fouriera* funkcji f.

Definicja

Każdej funkcji całkowalnej na przedziale X_a możemy przyporządkować szereg trygonometryczny (zbieżny lub rozbieżny) o współczynnikach zadanych wzorami Eulera–Fouriera nazywany *szeregiem Fouriera* funkcji f.

Uwaga:

Aby szereg Fouriera był szeregiem zbieżnym do wyjściowej funkcji (tzn. aby przyporządkowanie w powyższej definicji można było zastąpić równością), funkcja f musi spełniać dodatkowe warunki, tzw. *warunki Dirichleta*.

$$f : X_{-l} \to \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx\,, \qquad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f : X_a \to \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{a}^{a+2l} f(x)\, dx\,, \qquad a_n = \frac{1}{l} \int_{a}^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{a}^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Definicja

Funkcja ograniczona f na przedziale $[a, b]$ spełnia *warunki Dirichleta*, jeśli:

(1) jest przedziałami monotoniczna na (a, b),

(2) jest ciągła lub nieciągła w co najwyżej skończonej liczbie punktów nieciągłości I-go rodzaju i w każdym punkcie nieciągłości przyjmuje tzw. wartości dirichletowskie, tzn.

$$f(x_i) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to x_i^+} f(x) + \lim_{x \to x_i^-} f(x)\right]$$

(3) $f(a) = f(b) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to b^-} f(x)\right]$

Twierdzenie (o rozwijaniu funkcji okresowej w szereg Fouriera)

Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie $p = 2l$ i spełnia warunki Dirichleta na przedziale X_a, to jest ona sumą swojego szeregu Fouriera na tym przedziale, tzn. zachodzi równość:

$$(\star) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

gdzie współczynniki wyrażają się wzorami Eulera – Fouriera:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x)\, dx\,, \qquad a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Uwagi:

(1) W przedziałach domkniętych takich, że funkcja jest w nich ciągła lub gdy funkcja jest okresowa i ciągła na $\mathbb{R}$ zbieżność szeregu Fouriera jest jednostajna.

Uwagi:

(1) W przedziałach domkniętych takich, że funkcja jest w nich ciągła lub gdy funkcja jest okresowa i ciągła na $\mathbb{R}$ zbieżność szeregu Fouriera jest jednostajna.

(2) Jeśli funkcja nie przyjmuje wartości dirichletowskich w punktach nieciągłości lub na końcach przedziału X_a, to rozwinięcie $(\star)$ jest prawdziwe dla wszystkich punktów ciągłości tej funkcji, a w pozostałych punktach szereg Fouriera jest zbieżny do wartości dirichletowskich w tych punktach, tzn.

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \frac{1}{2} \left[f(x^+) + f(x^-) \right]$$

(3) Jeśli $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, to definiujemy funkcję $f^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ taką, że

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \\ \frac{1}{2}[f(a^+) + f(b^-)], & x \in \{a, b\} \end{cases}$$

rozwijamy f^* w szereg Fouriera i $f^* \Big|_{(a,b)} = f$.

(3) Jeśli $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, to definiujemy funkcję $f^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ taką, że

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \in (a, b) \\ \frac{1}{2}[f(a^+) + f(b^-)]\,, & x \in \{a, b\} \end{cases}$$

rozwijamy f^* w szereg Fouriera i $f^* \Big|_{(a,b)} = f$.

Uwaga 1

(1) Jeśli funkcja f spełnia założenia twierdzenia i jest parzysta tzn. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(-x)$, to w przedziale $X_{-l} = [-l, l]$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx\,, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\,, \quad b_n = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

i funkcja rozwija się w szereg cosinusów

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

Uwaga 1

(2) Jeśli funkcja f spełnia założenia twierdzenia i jest nieparzysta tzn. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$, to w przedziale $X_{-l} = [-l, l]$

$$a_0 = a_n = 0\,, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

i funkcja rozwija się w szereg sinusów

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Uwaga 1

(2) Jeśli funkcja f spełnia założenia twierdzenia i jest nieparzysta tzn. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$, to w przedziale $X_{-l} = [-l, l]$

$$a_0 = a_n = 0\,, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

i funkcja rozwija się w szereg sinusów

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Uwaga 2

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$$

Rozwinięcie funkcji nieokresowej g w pewnym przedziale możemy otrzymać przez rozwinęcie dowolnego jej rozszerzenia okresowego spełniającego założenia twierdzenia, rozwinięcie takiej funkcji jest więc niejednoznaczne.

Rozwinięcie funkcji nieokresowej g w pewnym przedziale możemy otrzymać przez rozwinęcie dowolnego jej rozszerzenia okresowego spełniającego założenia twierdzenia, rozwinięcie takiej funkcji jest więc niejednoznaczne.

Przykład:

$g : (0, p) \to \mathbb{R}\,,\;\; p > 0$ spełnia (1) i (2) warunek Dirichleta.
Możemy rozszerzyć g do funkcji okresowej f różnymi sposobami:

Rozwinięcie funkcji nieokresowej g w pewnym przedziale możemy otrzymać przez rozwinęcie dowolnego jej rozszerzenia okresowego spełniającego założenia twierdzenia, rozwinięcie takiej funkcji jest więc niejednoznaczne.

Przykład:

$g : (0, p) \to \mathbb{R}\,,\ \ p > 0$ spełnia (1) i (2) warunek Dirichleta.
Możemy rozszerzyć g do funkcji okresowej f różnymi sposobami:

(I) $g(0) = g(p) = \frac{1}{2}[g(0^+) + g(p^-)]$ i przedłużamy do $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, że $\forall\, x \in [0, p] \quad f(x) = g(x)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x + p)$, tzn. $2l = p \Rightarrow l = \frac{p}{2}$ i w szeregu Fouriera liczymy współczynniki a_0, a_n, b_n oraz $\quad f\ \Big|_{(0,p)} = g$.

(II) Przedłużenie parzyste: $2l = 2p \Rightarrow l = p$, w szeregu Fouriera: $a_0, a_n, b_n = 0$.

(II) Przedłużenie parzyste: $2l = 2p \Rightarrow l = p$, w szeregu Fouriera: $a_0, a_n, b_n = 0$.

(III) Przedłużenie nieparzyste: $2l = 2p \Rightarrow l = p$, w szeregu Fouriera: $a_0 = a_n = 0, b_n$.

(II) Przedłużenie parzyste: $2l = 2p \Rightarrow l = p$, w szeregu Fouriera: $a_0, a_n, b_n = 0$.

(III) Przedłużenie nieparzyste: $2l = 2p \Rightarrow l = p$, w szeregu Fouriera: $a_0 = a_n = 0, b_n$.

(IV) Przedłużenie takie, że: $2l = 2p \Rightarrow l = p$, w szeregu Fouriera: a_0, a_n, b_n.

W każdym przypadku $f\ \Big|_{(0,p)} = g$.

Przykład:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja okresowa o okresie 2, spełnia warunki Dirichleta w dowolnym przedziale długości 2 i w $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x-2\,, & x \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) \\ 3-x\,, & x \in (3,4) \\ x-4\,, & x \in \left(4, \frac{9}{2}\right) \end{cases}$$

Rozwinąć ją w szereg Fouriera, na podstawie tego rozwinięcia wyznaczyć sumy szeregów liczbowych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$f\left(\tfrac{5}{2}\right) = f\left(\tfrac{9}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\lim_{x\to\frac{5}{2}^+} f(x) + \lim_{x\to\frac{9}{2}^-} f(x)\right] = \tfrac{1}{2}$$

$f(3) = \frac{1}{2}\,, \quad f(4) = -\frac{1}{2}$ i funkcję przedłużamy okresowo na $\mathbb{R}$.

$f(x)$ na przedziale $[-l, l]$ długości 2:

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in (0,1) \\ -x-1\,, & x \in (-1,0) \\ \frac{1}{2}\,, & x \in \{-1,1\} \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow l = 1$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 = \int_{-1}^{0}(-x-1)\,dx + \int_0^1 x\,dx$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$
$$= \int_{-1}^{0}(-1-x)\cos n\pi x\,dx + \int_0^1 x\cos n\pi x\,dx =$$
$$= -\int_{-1}^{0}\cos n\pi x\,dx - \int_{-1}^{0} x\cos n\pi x\,dx + \int_0^1 x\cos n\pi x\,dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} y = -x\,, & x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ dy = -dx\,, & x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_{-1}^{0} + 2\int_0^1 x \cos n\pi x \, dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[x \sin n\pi x\right] \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x \, dx = \frac{2}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ -\frac{4}{n^2\pi^2}\,, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} y = -x\,, & x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ dy = -dx\,, & x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \quad \sin n\pi x \;\Big|_{-1}^{0} + 2\int_0^1 x \cos n\pi x \, dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \quad [x \sin n\pi x] \;\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x \, dx = \frac{2}{n^2\pi^2} \quad \cos n\pi x \;\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ -\frac{4}{n^2\pi^2}\,, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (-1 - x) \sin n\pi x \, dx + \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx =$$

$$= -\int_{-1}^{0} \sin n\pi x \, dx - \int_{-1}^{0} x \sin n\pi x \, dx + \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} y = -x\,, & x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ dy = -dx\,, & x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \quad \cos n\pi x \;\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{n\pi}[1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \frac{2}{n\pi}\,, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x\,, \qquad x\in[-1,1]$$

$f(x) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x +$
$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\pi x \,, \qquad x \in [-1, 1]$

Gdy postawimy $x = 0$:

$-\frac{1}{2} = f(0) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot 0$

Stąd:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$f(x) = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x +$
$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x\,, \qquad x \in [-1,1]$

Gdy postawimy $x = 0$:

$-\frac{1}{2} = f(0) = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot 0$

Stąd:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Gdy postawimy $x = \frac{1}{2}$:

$\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot 0 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot(-1)^{n+1}$

Stąd:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

Przykłady:

Rozwinąć w szereg Fouriera:
(1) $f(x) = |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}$

funkcja jest ciągła, okresowa okresie $p = 2l = \pi$, parzysta,
$X_{-l} = [-l, l] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow l = \frac{\pi}{2}$ i $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos 2nx \, dx =$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)x \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x \, dx =$$
$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n+1} \cdot \left(-\cos(2n+1)x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n-1} \cdot \left(-\cos(2n-1)x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] =$$
$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2-1}$$

Stąd $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$

(2) $f(x) = x - [x]$

funkcja okresowa o okresie podstawowym $2l = 1$ jako przedłużenie funkcji $g(x) = x \quad \forall\, x \in [0,1)$ i $g(1) = 0$, nie spełnia (3) warunku Dirichleta, więc $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x - [x]\,, & x \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}\,, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$X_a = [a, a+2l] = [0,1] \Rightarrow l = \frac{1}{2}$

$a_n = 2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\, dx =$
$= \frac{1}{\pi n} \quad [x\sin 2n\pi x] \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin 2n\pi x\, dx =$
$= \frac{1}{2n^2\pi^2} \quad \cos 2n\pi x \Big|_0^1 = 0$

$b_n = 2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\, dx =$
$= -\frac{1}{\pi n} \quad [x\cos 2n\pi x] \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos 2n\pi x\, dx =$
$= -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi^2} \quad \sin 2n\pi x \Big|_0^1 = -\frac{1}{\pi n}$

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$\forall\, x \in \mathbb{Z}$ szereg jest zbieżny do $\frac{1}{2}$ (wartości dirichletowskiej)

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$\forall\, x \in \mathbb{Z}$ szereg jest zbieżny do $\frac{1}{2}$ (wartości dirichletowskiej)

(3) Różnymi sposobami rozwinąć funkcję $g(x) = x$, $x \in (0, p)$, $p > 0$ w szereg Fouriera.

(1) $g(0) = g(p) = \frac{p}{2}$, $\; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\; f|_{[0,p]} = g$

f jest okresowa o okresie $2l = p$, $X_a = [a, a + 2l] = [0, p] \Rightarrow l = \frac{p}{2}$

$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p x\,dx = p$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p x \cos\frac{2n\pi x}{p}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos\frac{2n\pi x}{p} \\ u' = 1 & v = \frac{p}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{p} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{p}\left[\ \frac{px}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{p}\ \Big|_0^p - \frac{p}{2n\pi}\int_0^p \sin\frac{2n\pi x}{p}\,dx\right] =$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\int_0^p \sin\frac{2n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{2n^2\pi^2}\ \cos\frac{2n\pi x}{p}\ \Big|_0^p =$$
$$= \frac{p}{2n^2\pi^2}[\cos 2n\pi - 1] = 0$$

$$= \frac{2}{p}\left[\left. \frac{px}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{p} \right|_0^p - \frac{p}{2n\pi} \int_0^p \sin \frac{2n\pi x}{p}\, dx \right] =$$
$$= -\frac{1}{n\pi} \int_0^p \sin \frac{2n\pi x}{p}\, dx = \left. \frac{p}{2n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{p} \right|_0^p =$$
$$= \frac{p}{2n^2\pi^2}[\cos 2n\pi - 1] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p x \sin \frac{2n\pi x}{p}\, dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & v' = \sin \frac{2n\pi x}{p} \\ u' = 1 & v = -\frac{p}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi x}{p} \end{array} \right| =$$
$$= \frac{2}{p}\left[\left. \frac{-px}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi x}{p} \right|_0^p + \frac{p}{2n\pi} \int_0^p \cos \frac{2n\pi x}{p}\, dx \right] =$$
$$= -\frac{p}{n\pi} \cos 2n\pi + \left. \frac{p}{2n^2\pi^2} \sin \frac{2n\pi x}{p} \right|_0^p = -\frac{p}{n\pi}$$

$$= \frac{2}{p}\left[\ \frac{px}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{p}\ \Big|_0^p - \frac{p}{2n\pi}\int_0^p \sin\frac{2n\pi x}{p}\,dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_0^p \sin\frac{2n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{2n^2\pi^2}\ \ \cos\frac{2n\pi x}{p}\ \Big|_0^p =$$

$$= \frac{p}{2n^2\pi^2}[\cos 2n\pi - 1] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p x\sin\frac{2n\pi x}{p}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin\frac{2n\pi x}{p} \\ u' = 1 & v = -\frac{p}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{p} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{p}\left[\ \frac{-px}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{p}\ \Big|_0^p + \frac{p}{2n\pi}\int_0^p \cos\frac{2n\pi x}{p}\,dx\right] =$$

$$= -\frac{p}{n\pi}\cos 2n\pi + \frac{p}{2n^2\pi^2}\ \ \sin\frac{2n\pi x}{p}\ \Big|_0^p = -\frac{p}{n\pi}$$

$$x = \frac{p}{2} - \frac{p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{p}$$

(2) szereg cosinusów - przedłużenie parzyste

$2l = 2p, \ X_{-l} = [-l, l] = [-p, p]$

$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p x\,dx = p\,, \qquad b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p x\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ -\frac{4p}{\pi^2 n^2}\,, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$x = \frac{p}{2} - \frac{4p}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{p}$$

(3) szereg sinusów - przedłużenie nieparzyste

$2l = 2p, \ X_{-l} = [-l, l] = [-p, p]$

$a_0 = a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p x \sin \frac{n\pi x}{p} \, dx = (-1)^{n+1} \frac{2p}{\pi n}$

$x = \frac{2p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{p}$

(4) przedłużamy funkcję najpierw na przedział $[p, 2p]$,

$g(0) = g(2p) = p,\ X_a = [a, a+2l] = [0, 2p] \Rightarrow l = p$

$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p} x\,dx = 2p$

$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} x\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = 0$

$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} x\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx = -\frac{2p}{\pi n}$

$x = p - \frac{2p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{p}$

(4) Jednostajnie zbieżny szereg można całkować lub różniczkować wyraz po wyrazie, np. rozwinięcie ze sposobu (3):

$$x = \frac{2p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{p}$$

całkujemy w $[0, x]$, $x \in (-p, p)$:

$$\int_0^x t\, dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{2p}{\pi} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi t}{p}\, dt = \frac{2p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi t}{p}\, dt =$$
$$= \frac{2p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} \cdot \frac{p}{n\pi} \left. \cos \frac{n\pi t}{p} \right|_0^x =$$
$$= \frac{2p^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi x}{p} - 1 \right) =$$
$$= \frac{2p^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{2p^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{p}$$

Stąd otrzymujemy rozwinięcie funkcji parzystej
$h(x) = x^2 \quad \forall\, x \in [-p, p]$:

$x^2 = \frac{4p^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{4p^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{p}$

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{p} \int_0^p x^2\, dx = \frac{p^2}{3} \Rightarrow \frac{p^2}{3} = \frac{4p^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

Stąd:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

całkując powyższy szereg kolejny raz otrzymujemy rozwinięcie funkcji x^3 itd.