Wykład 1
Oznaczenia zbiorów

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

Ciała liczbowe

Definicja 1 *Zbiór $\mathbb{K}$, zawierający co najmniej dwa elementy, nazywamy* ***ciałem****, jeśli*

1. *zadane są odwzorowania:*

$$+ \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \ \ (a,b) \mapsto a+b \ \ \textit{(dodawanie)},$$
$$\cdot \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \ \ (a,b) \mapsto a \cdot b \ \ \textit{(mnożenie)};$$

2. *wyróżnione są dwa elementy zbioru $\mathbb{K}$: element zerowy, ozn. 0 i element jedynkowy, ozn. 1;*

3. *spełnione są następujące warunki (aksjomaty ciała):*
   - *(a)* $\forall a,b,c \in \mathbb{K} \ \ a+(b+c) = (a+b)+c$ *- łączność dodawania;*
   - *(b)* $\forall a,b \in \mathbb{K} \ \ a+b = b+a$ *- przemienność dodawania;*
   - *(c)* $\forall a \in \mathbb{K} \ \ a+0 = a$ *- 0 jest elementem neutralnym dodawania;*
   - *(d)* $\forall a \in \mathbb{K} \ \exists p \in \mathbb{K} \ \ a+p = 0$ *- istnienie elementu odwrotnego w dodawaniu;*
   - *(e)* $\forall a,b,c \in \mathbb{K} \ \ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *- łączność mnożenia;*
   - *(f)* $\forall a,b \in \mathbb{K} \ \ a \cdot b = b \cdot a$ *- przemienność mnożenia;*
   - *(g)* $\forall a \in \mathbb{K} \ \ a \cdot 1 = a$ *- 1 jest elementem neutralnym mnożenia;*
   - *(h)* $\forall a,b,c \in \mathbb{K} \ \ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ *- rozdzielność mnożenia względem dodawania;*
   - *(i)* $\forall a \in \mathbb{K} - \{0\} \ \exists q \in \mathbb{K} \ \ a \cdot q = 1$ *- istnienie elementu odwrotnego w mnożeniu;*

Uwaga. W ciele $\mathbb{K}$ istnieje tylko jeden element $p \in \mathbb{K}$ spełniający $a + p = 0$, ozn. $-a$. Podobnie, dla $a \neq 0$ istnieje tylko jeden $q \in \mathbb{K}$ taki, że $a \cdot q = 1$, ozn. a^{-1}. Ponadto przyjmiemy następujące oznaczenia: $a - b = a + (-b)$ oraz $ab = a \cdot b$.

Przykłady. NIE: $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}, +, \cdot)$;
TAK: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ dla p - liczby pierwszej.

Ciało liczb zespolonych

Niech $\mathbb{C} := \{(x,y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Definiujemy w tym zbiorze następujące działania:
dodawanie:
$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
mnożenie:
$$(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
Wtedy $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ jest **ciałem**. Nazywamy je ciałem **liczb zespolonych**.

Działania $\oplus$ i $\odot$ są przemienne i łączne.

Liczba $(0, 0)$ jest elementem neutralnym działania $\oplus$.

Liczba $(1, 0)$ jest elementem neutralnym działania $\odot$.

Uwaga. Przyporządkowanie $a \mapsto (a, 0)$ zadaje utożsamienie zbioru $\mathbb{R}$ ze zbiorem $\{(r, 0) : r \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$. Przy tym utożsamieniu działania na liczbach rzeczywistych odpowiadają działaniom na ich zespolonych odpowiednikach.

Oznaczenia. $(r, 0) = r$, w szczególności: $(0, 0) = 0,\ (1, 0) = 1$.

$$(x, y) = ((x, 0) \odot (1, 0)) \oplus ((y, 0) \odot (0, 1))$$

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \odot (0, 1) = -(1, 0)$$

Dodatkowo oznaczamy: $(0, 1) = j$, gdzie $j^2 = -1$,
j nazywamy **jednostką urojoną**

Postać kanoniczna liczby zespolonej

$$z = x + j \cdot y$$

x - część rzeczywista liczby zespolonej z, ozn. $x =$Re z
y - część urojona liczby zespolonej z, ozn. $y =$Im z

Uwaga. Dla liczby zespolonej z, Re z i Im z są liczbami **rzeczywistymi**.

Uwaga. Liczby zespolone z_1 i z_2 są równe wtedy i tylko wtedy, gdy (Re $z_1 =$Re z_2 i Im $z_1 =$Im z_2).

Uwaga. Niech $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$. Wtedy

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

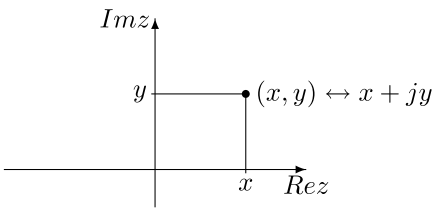
$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$

Definicja 2 ***Liczbą sprzężoną*** *z liczbą zespoloną* $z = x + jy$ *nazywamy liczbę* $\overline{z} = x - jy$.

Uwaga. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Dzielenie liczb zespolonych: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$, dla $z_2 \neq 0$.

Interpretacja geometryczna liczby zespolonej



Definicja 3 *Liczbę rzeczywistą* $\sqrt{x^2 + y^2}$ *nazywamy* ***modułem*** *liczby zespolonej* $z = x + jy$ *i oznaczamy przez* $|z|$.

Uwaga. Na płaszczyźnie zespolonej:
$|z|$ - odległość punktu z od początku układu O
$|z_1 - z_2|$ - odległość punktów z_1 i z_2

Własności modułu

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

2. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (nierówność trójkąta)

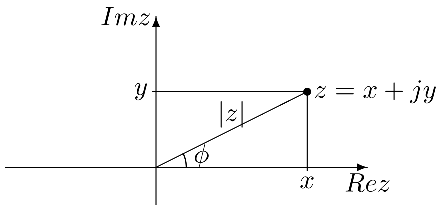
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4. $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, dla $z_2 \neq 0$

5. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

6. $|z| = |\overline{z}|$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej



Twierdzenie 1 *Dla każdej liczby zespolonej* $z = x + jy$, $z \neq 0$, *istnieje dokładnie jedna liczba* $\phi \in (-\pi; \pi\rangle$, *taka że* $\cos\phi = \frac{x}{|z|}$ *i* $\sin\phi = \frac{y}{|z|}$.

Liczbę ϕ nazywamy **argumentem głównym** liczby zespolonej z, ozn. $\phi = \arg z$.

Każdą liczbę zespoloną $z \neq 0$ można przedstawić w **postaci trygonometrycznej**:

$z = |z|(\cos\beta + j\sin\beta)$, gdzie $\beta \in \mathbb{R}$.

Jeśli $\phi = \arg z$, to $\beta = \phi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Liczbę β nazywamy **argumentem** liczby z.
Zbiór wszystkich argumentów liczby z ozn. Arg$z$.

Uwaga. Liczba $z = 0$ nie posiada argumentu.

Uwaga. $\arg\overline{z} = -\arg z$.

Uwaga. Jeśli $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\phi_1 + j\sin\phi_1)$, $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\phi_2 + j\sin\phi_2)$, to:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\phi_1 + \phi_2) + j\sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\phi_1 - \phi_2) + j\sin(\phi_1 - \phi_2)).$$

Wzór Moivre'a: $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\phi + j\sin n\phi)$

W szczególności: $(cos\phi + j\sin\phi)^n = \cos n\phi + j\sin n\phi$.

Postać wykładnicza liczby zespolonej

$$z = |z| \cdot e^{j\phi},$$

gdzie $\phi \in$ Arg$z$.