Metody Probabilistyczne i Statystyka - wykład 7.

Wektory losowe dwuwymiarowe

5 kwietnia 2025

Definicja

Niech X i Y będą jednowymiarowymi zmiennymi losowymi.

Definicja

Niech X i Y będą jednowymiarowymi zmiennymi losowymi. Parę (X, Y) nazywamy **dwuwymiarowym wektorem losowym***.*

Wektory losowe dwuwymiarowe

Definicja

Niech X i Y będą jednowymiarowymi zmiennymi losowymi. Parę (X, Y) nazywamy **dwuwymiarowym wektorem losowym**.

Definicja

- *Rozkład wektora (X, Y) -*

Definicja

Niech X i Y będą jednowymiarowymi zmiennymi losowymi. Parę (X, Y) nazywamy **dwuwymiarowym wektorem losowym**.

Definicja

- *Rozkład wektora (X, Y)* - **rozkład łączny**

Wektory losowe dwuwymiarowe

Definicja

Niech X *i* Y *będą jednowymiarowymi zmiennymi losowymi. Parę* (X, Y) *nazywamy* **dwuwymiarowym wektorem losowym**.

Definicja

- *Rozkład wektora* (X, Y) - **rozkład łączny**
- *Rozkłady* X *i* Y *jako osobnych zmiennych losowych -*

Definicja

Niech X *i* Y *będą jednowymiarowymi zmiennymi losowymi. Parę* (X, Y) *nazywamy* **dwuwymiarowym wektorem losowym**.

Definicja

- *Rozkład wektora* (X, Y) - **rozkład łączny**
- *Rozkłady* X *i* Y *jako osobnych zmiennych losowych -* **rozkłady brzegowe**

Definicja

Punktem skokowym *rozkładu wektora* (X, Y) *nazywamy każdą parę* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *taką, że* $P(X = a, Y = b) > 0$.

Dwuwymiarowy rozkład dyskretny

Definicja

Wektor losowy (X, Y) *ma* **rozkład dyskretny**, *jeśli zbiór jego wartości jest przeliczalny lub skończony.*

Dwuwymiarowy rozkład dyskretny

Definicja

Wektor losowy (X, Y) *ma* **rozkład dyskretny**, *jeśli zbiór jego wartości jest przeliczalny lub skończony.*

$S_{XY} \subset \mathbb{R}^2$ - **nośnik** rozkładu łącznego wektora (X, Y):

Dwuwymiarowy rozkład dyskretny

Definicja

Wektor losowy (X, Y) *ma* **rozkład dyskretny**, *jeśli zbiór jego wartości jest przeliczalny lub skończony.*

$S_{XY} \subset \mathbb{R}^2$ - **nośnik** rozkładu łącznego wektora (X, Y):

1. $P(X = x, Y = y) > 0$ dla każdego punktu $(x, y) \in S_{XY}$,

Dwuwymiarowy rozkład dyskretny

Definicja

Wektor losowy (X, Y) *ma* **rozkład dyskretny**, *jeśli zbiór jego wartości jest przeliczalny lub skończony.*

$S_{XY} \subset \mathbb{R}^2$ - **nośnik** rozkładu łącznego wektora (X, Y):

1. $P(X = x, Y = y) > 0$ dla każdego punktu $(x, y) \in S_{XY}$,
2. $\sum_{(x,y)\in S_{XY}} P(X = x, Y = y) = 1$.

Definicja

Funkcja prawdopodobieństwa *rozkładu łącznego wektora* (X, Y)

-

Dwuwymiarowy rozkład dyskretny

Definicja

Funkcja prawdopodobieństwa *rozkładu łącznego wektora* (X, Y) *- funkcja* $p_{XY} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0; 1]$ *taka, że*

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Dwuwymiarowy rozkład dyskretny

Definicja

Funkcja prawdopodobieństwa *rozkładu łącznego wektora* (X, Y) - *funkcja* $p_{XY} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0; 1]$ *taka, że*

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Przykład 1.

Rozważmy doświadczenie polegające na dwukrotnym rzucie monetą niesymetryczną, dla której $P(O) = \frac{1}{3}$, $P(R) = \frac{2}{3}$. Niech X oznacza liczbę orłów w pierwszym rzucie, Y liczbę orłów we wszystkich rzutach. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa rozkładu łącznego wektora (X, Y).

Twierdzenie

Wektor losowy (X, Y) ma rozkład dyskretny wtedy i tylko wtedy, gdy rozkłady brzegowe zmiennych X i Y też są dyskretne. Ponadto:

Dwuwymiarowy rozkład dyskretny

Twierdzenie

Wektor losowy (X, Y) ma rozkład dyskretny wtedy i tylko wtedy, gdy rozkłady brzegowe zmiennych X i Y też są dyskretne. Ponadto:

1. $S_{XY} \subseteq S_X \times S_Y$;

Dwuwymiarowy rozkład dyskretny

Twierdzenie

Wektor losowy (X, Y) ma rozkład dyskretny wtedy i tylko wtedy, gdy rozkłady brzegowe zmiennych X i Y też są dyskretne. Ponadto:

1. $S_{XY} \subseteq S_X \times S_Y$;
2. *Dla każdego* $x \in S_X$:

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

Dwuwymiarowy rozkład dyskretny

Twierdzenie

Wektor losowy (X, Y) ma rozkład dyskretny wtedy i tylko wtedy, gdy rozkłady brzegowe zmiennych X i Y też są dyskretne. Ponadto:

1. $S_{XY} \subseteq S_X \times S_Y$;
2. *Dla każdego* $x \in S_X$:

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

3. *Dla każdego* $y \in S_Y$:

$$P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y).$$

Dystrybuanta dwuwymiarowego wektora losowego

Definicja

Dystrybuantą rozkładu łącznego *wektora* (X, Y) *nazywamy funkcję* $F_{XY} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0; 1]$ *określoną wzorem*

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y).$$

Własności dystrybuanty dwuwymiarowego wektora losowego

Twierdzenie

Dla dowolnych $x_1 < x_2, \; y_1 < y_2$ *zachodzi równość*

$$\begin{aligned} & P(x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2) = \\ = \; & F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Własności dystrybuanty dwuwymiarowego wektora losowego

Twierdzenie

Dla dowolnych $x_1 < x_2, \ y_1 < y_2$ *zachodzi równość*

$$\begin{aligned} & P(x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2) = \\ = \ & F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Twierdzenie

Dla dowolnej pary $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *zachodzi równość*

$$\begin{aligned} & P(X = a, Y = b) = \\ = \ & F_{XY}(a, b) - F_{XY}(a^-, b) - F_{XY}(a, b^-) + F_{XY}(a^-, b^-). \end{aligned}$$

Dystrybuanty brzegowe

Twierdzenie

Niech (X, Y) *będzie wektorem losowym o dystrybuancie* F_{XY}.

Dystrybuanty brzegowe

Twierdzenie

Niech (X, Y) *będzie wektorem losowym o dystrybuancie* F_{XY}. **Dystrybuanty brzegowe** *zmiennych losowych* X *i* Y *określone są następująco:*

Dystrybuanty brzegowe

Twierdzenie

Niech (X, Y) *będzie wektorem losowym o dystrybuancie* F_{XY}*.* **Dystrybuanty brzegowe** *zmiennych losowych* X *i* Y *określone są następująco:*

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{XY}(x, y)$$

Dystrybuanty brzegowe

Twierdzenie

Niech (X, Y) *będzie wektorem losowym o dystrybuancie* F_{XY}*.* **Dystrybuanty brzegowe** *zmiennych losowych* X *i* Y *określone są następująco:*

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{XY}(x, y)$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{XY}(x, y)$$

Dwuwymiarowy rozkład ciągły

Definicja

Wektor losowy (X, Y) **ma rozkład ciągły**, *jeśli istnieje funkcja* $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwana gęstością rozkładu wektora* (X, Y) *taka, że*

Dwuwymiarowy rozkład ciągły

Definicja

Wektor losowy (X, Y) **ma rozkład ciągły**, *jeśli istnieje funkcja* $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zwana gęstością rozkładu wektora* (X, Y) *taka, że*

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u, t) du\, dt.$$

Dwuwymiarowy rozkład ciągły

Definicja

Wektor losowy (X, Y) **ma rozkład ciągły**, *jeśli istnieje funkcja* $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zwana gęstością rozkładu wektora* (X, Y) *taka, że*

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u, t) du\, dt.$$

Definicja

Nośnikiem *rozkładu wektora* (X, Y) *o łącznym rozkładzie ciągłym jest zbiór* $S_{XY} = \{(x, y) : f_{XY}(x, y) > 0\}$.

Dwuwymiarowy rozkład ciągły

Twierdzenie

Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest gęstością dwuwymiarowego wektora losowego wtedy i tylko wtedy, gdy:*

Dwuwymiarowy rozkład ciągły

Twierdzenie

Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jest gęstością dwuwymiarowego wektora losowego wtedy i tylko wtedy, gdy:*

1. $f(x, y) \geqslant 0$ *prawie wszędzie*

Dwuwymiarowy rozkład ciągły

Twierdzenie

Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jest gęstością dwuwymiarowego wektora losowego wtedy i tylko wtedy, gdy:*

1. $f(x, y) \geqslant 0$ *prawie wszędzie*
2. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx\, dy = 1$$

Dwuwymiarowy rozkład ciągły

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest gęstością wektora losowego* (X, Y), *to:*

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jest gęstością wektora losowego* (X, Y)*, to:*

1. $\frac{\partial^2 F_{XY}}{\partial x \partial y}(x, y) = f(x, y)$ *prawie wszędzie*

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jest gęstością wektora losowego* (X, Y), *to:*

1. $\frac{\partial^2 F_{XY}}{\partial x \partial y}(x, y) = f(x, y)$ *prawie wszędzie*
2. *Dla każdego* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *zachodzi równość*

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx\, dy$$

Gęstości brzegowe

Twierdzenie

Jeśli wektor losowy (X, Y) *ma rozkład ciągły, to rozkłady brzegowe zmiennych losowych* X *i* Y *też są ciągłe.*

Gęstości brzegowe

Twierdzenie

Jeśli wektor losowy (X, Y) ma rozkład ciągły, to rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y też są ciągłe. Ponadto

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dy - \text{ gęstość brzegowa zmiennej losowej } X$$

Twierdzenie

Jeśli wektor losowy (X, Y) ma rozkład ciągły, to rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y też są ciągłe. Ponadto

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dy - \text{ gęstość brzegowa zmiennej losowej } X$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dx - \text{ gęstość brzegowa zmiennej losowej } Y$$

Gęstości brzegowe

Twierdzenie

Jeśli wektor losowy (X, Y) ma rozkład ciągły, to rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y też są ciągłe. Ponadto

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dy - \text{ gęstość brzegowa zmiennej losowej } X$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dx - \text{ gęstość brzegowa zmiennej losowej } Y$$

Uwaga:

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Przykład 2.

Wektor losowy (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{XY}(x, y) = a \cdot 1_D(x, y),$$

gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$.

(a) Wyznaczyć a.

(b) Wyznaczyć gęstości brzegowe.

(c) Obliczyć $P(Y > X)$.