Metody Probabilistyczne i Statystyka - Wykład 2

Prawdopodobieństwo warunkowe
Niezależność zdarzeń

Ewa Frankiewicz

10 października 2022

Przykład 1

W urnie jest 5 kul białych i 7 czarnych. Wyjmujemy losowo jedną kulę po drugiej, bez zwracania. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że druga wylosowana kula będzie biała, jeśli wiadomo, że pierwsza jest czarna?

Definicja

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *będzie ustaloną przestrzenią probabilistyczną.* **Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia** $A \subset \Omega$ **pod warunkiem zdarzenia** $B \subset \Omega$ *takiego, że* $P(B) > 0$*, definiujemy jako*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Wniosek

Jeśli B jest zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$, to dla każdego innego zdarzenia losowego A zachodzi równość

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Przykład 1 c.d.

W urnie jest 5 kul białych i 7 czarnych. Wyjmujemy losowo jedną kulę po drugiej, bez zwracania. W urnie jest 5 kul białych i 7 czarnych. Wyjmujemy losowo jedną kulę po drugiej, bez zwracania. Niech:

$$B_i \text{ - w } i\text{-tym losowaniu wybrano kulę białą}$$

$$C_i \text{ - w } i\text{-tym losowaniu wybrano kulę czarną.}$$

Ile wynosi $P(C_1 \cap B_2 \cap C_3 \cap B_4 \cap B_5)$?

Wzór łańcuchowy

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, będą zdarzeniami z tej samej przestrzeni probabilistycznej takimi, że $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Wtedy

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Uwaga

Jeśli $P(B) > 0$, to dla dowolnego zdarzenia A

$$P(A|B) + P(A'|B) = 1.$$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Przykład 1 c.d.

W urnie jest 5 kul białych i 7 czarnych. Wyjmujemy losowo jedną kulę po drugiej, bez zwracania. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że w drugim losowaniu wyciągniemy kulę białą?

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Definicja

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *będzie daną przestrzenią probabilistyczną. Przeliczalną rodzinę zdarzeń* $(A_n)_{n \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, *takich, że* $A_n \subset \Omega$ *dla każdego* $n \in I$, *nazywamy* **rozbiciem** Ω, *jeśli*

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$;
- $\bigcup\limits_{n \in I} A_n = \Omega$.

Twierdzenie

Niech $(A_n)_{n \in I}$, *gdzie* $I \subset \mathbb{N}$, *będzie rozbiciem* Ω *na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie. Wtedy dla dowolnego zdarzenia* $A \subset \Omega$

$$P(A) = \sum_{n \in I} P(A|A_n) \cdot P(A_n).$$

Twierdzenie Bayesa

Przykład 1 c.d.

W urnie jest 5 kul białych i 7 czarnych. Wyjmujemy losowo jedną kulę po drugiej, bez zwracania. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że w pierwszym losowaniu wyciągnęliśmy kulę czarną, jeśli wiadomo, że w drugim losowaniu wyciągnęliśmy kulę białą?

Wzór Bayesa

Twierdzenie

Jeżeli $(A_n)_{n\in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, *jest rozbiciem* Ω *na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla każdego zdarzenia* $A \subset \Omega$ *takiego, że* $P(A) > 0$, *zachodzi równość*

$$P(A_k|A) = \frac{P(A|A_k) \cdot P(A_k)}{P(A)},$$

gdzie

$$P(A) = \sum_{n\in I} P(A|A_n) \cdot P(A_n)$$

oraz A_k *jest ustalonym zdarzeniem z rodziny* $(A_n)_{n\in I}$.

Niezależność zdarzeń

Definicja

Zdarzenia $A \subset \Omega$ *i* $B \subset \Omega$ *nazywamy* **niezależnymi**, *jeśli*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

W przeciwnym wypadku mówimy, że zdarzenia A *i* B *są* **zależne**.

Twierdzenie

Jeśli $P(B) > 0$, *to zdarzenia* A *i* B *są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$P(A|B) = P(A).$$

Niezależność zdarzeń

Definicja

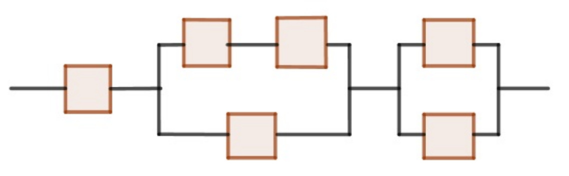
- *Zdarzenia* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *gdzie* $n \geqslant 2$, **są niezależne zespołowo**, *jeśli dla każdego skończonego ciągu liczb naturalnych* $i_1, \ldots, i_k$, *dla którego* $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, $2 \leqslant k \leqslant n$, *zachodzi równość*

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

- *Zdarzenia* $A_1, \ldots, A_n$ **są niezależne parami**, *jeśli każde dwa z nich są niezależne.*

Przykład 2

Na poniższym schemacie przekaźniki działają niezależnie od siebie. Prawdopodobieństwo działania każdego z przekaźników wynosi $p \in (0;1)$.



Obliczyć prawdopodobieństwo, że sygnał zostanie przekazany.

Schemat Bernoulliego

Definicja

Schematem Bernoulliego *nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia o dwu możliwych wynikach nazywanych umownie* **sukcesem** *i* **porażką**. *Poszczególne doświadczenia nazywamy* **próbami**.

Schemat Bernoulliego

Twierdzenie

Rozważmy schemat Bernoulliego, gdzie p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie. Wtedy:

1. *Prawdopodobieństwo, że w n próbach zajdzie dokładnie k sukcesów jest równe*

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ dla } k = 0, \ldots, n.$$

2. *Prawdopodobieństwo, że pierwszy sukces pojawi się w k-tej próbie jest równe*

$$(1-p)^{k-1} \cdot p \text{ dla } k = 1, 2 \ldots.$$