Algebra liniowa

Z_4

1. Czy podany układ wektorów jest liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) nad $\mathbb{R}$?

   (a) $\{x, \sin x, \cos x\}$,

   (b) $\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$,

   (c) $\{\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x\}$.

2. Czy układ wektorów $\{1+j, 1-j\}$ jest liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$? A w przestrzeni $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$? Opisać w każdym przypadku podprzestrzeń generowaną przez ten układ tzn. $\mathrm{Lin}(1+j, 1-j)$.

3. Czy podany układ wielomianów jest liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ nad $\mathbb{R}$?

   (a) $\{x+3;\ (x-3)^3;\ \frac{4}{5};\ 3x^2;\ x^3-4\}$

   (b) $\{x+1;\ x^3+2x;\ x^2-5x+2;\ 7x^3+2x^2\}$

   (c) $\{\frac{1}{3}x^2+5x;\ -x^3;\ 2x+1;\ 5x\}$

   Który z powyższych układów tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ nad $\mathbb{R}$? Wyznaczyć wektor, który w tej bazie ma współrzędne $(2, 1, -2, -1)$. Jakie będzie miał współrzędne, gdy zmienimy kolejność wektorów w tej bazie?

4. Znaleźć bazę podprzestrzeni liniowej V przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$. Wiadomo, że wektor $u \in V$ ma w znalezionej bazie współrzędne $(1, -1, 2)$. Wyznaczyć ten wektor.

   (a) $V = \{w \in \mathbb{R}[x]_3 :\ \ w(1) = w'(0)\}$

   (b) V to zbiór wielomianów z $\mathbb{R}[x]_4$, dla których liczba 1 jest pierwiastkiem co najmniej 2-krotnym.

5. Podać współrzędne wektora $v \in V$ w bazie $\mathcal{B} = (u_1 - 2u_2, u_1 - 2u_2 + u_3, u_2 - u_1)$ przestrzeni liniowej V, jeżeli w bazie $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ tej przestrzeni ma on współrzędne $(4, -1, 2)$.

6. Znaleźć bazę przestrzeni liniowej $V = \{(x-y, 3y, 2y-x, 2x) :\ \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Znaleźć bazę tej przestrzeni, w której wszystkie współrzędne wektora $(1, 3, 0, 4)$ są równe 4.