Szereg Laurenta, Twierdzenie o residuach

ANA2 - AiR

Ewa Stróżyna

Niech $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie sumą szerregu potęgowego w $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

Jeśli $R > 0$, to:

(1) $S(z)$ jest funkcją ciągłą w $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$,

(2) $S(z)$ jest funkcją holomorficzną w $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ i $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(z - z_0)^{n-1}$.

Niech $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie sumą szerregu potęgowego w $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

Jeśli $R > 0$, to:

(1) $S(z)$ jest funkcją ciągłą w $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$,

(2) $S(z)$ jest funkcją holomorficzną w $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ i $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(z - z_0)^{n-1}$.

Definicja

Funkcję $f(z)$ nazywamy *całkowitą*, jeśli jest sumą szeregu potęgowego zbieżnego na całej płaszczyźnie zespolonej.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in \mathbb{C}$

Jeśli:

(1) $a_n = 0 \ \ \forall\, n \geqslant n_0 \Rightarrow f(z)$ – wielomian

(2) nie istnieje n_0 j.w. $\Rightarrow$ szereg zawiera nieskończenie wiele wyrazów, funkcję taką nazywamy *przestępną*.

Szereg Taylora

Szereg Taylora

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D o brzegu Γ, to dla każdego $z_0 \in D$ można ją rozwinąć w *szereg Taylora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, gdzie

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K^+(z_0,r)} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}}\, d\tau$$

a promień zbieżności R tego szeregu spełnia warunek $R \geqslant \min_{z\in\Gamma} |z - z_0|$.

Przykład:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}\,,\quad |z|<1\,,\quad z_0=0$$

$$\frac{1}{1-z}\,,\ z_0=-1$$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-z-1+1}=\frac{1}{2-(z+1)}=\frac{1}{2[1-\frac{z+1}{2}]}=\left\|\begin{array}{c}\left|\frac{z+1}{2}\right|<1\\ |z+1|<2\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

Szereg Laurenta

Szereg Laurenta

Pierścień
$P(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}, \quad 0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$

Szereg Laurenta

Pierścień
$$P(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}, \quad 0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$$

Załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w pierścieniu $P(z_0; r, R)$, np. $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ jest holomorficzna w

$$P(-1; 0, 2) = \{z : 0 < |z + 1| < 2\},$$

$$P\left(-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right) = \left\{z : \tfrac{1}{2} < \left|z + \tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{3}{2}\right\}$$

$$P(0; 1, \infty) = \{z : |z| > 1\}$$

Płaszczyzna zespolona domknięta

Sfera: $\rho^2 + \eta^2 + \left(\tau - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Dowolny punkt płaszczyzny zespolonej łączymy z punktem $(0, 0, 1)$ prostą. Przecina ona sferę w $B(\rho, \eta, \tau)$:

$\rho = \frac{x}{1+|z|^2}$, $\eta = \frac{y}{1+|z|^2}$, $\tau = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$

Jeśli $z \to \infty$, to $(\rho, \eta, \tau) \to (0, 0, 1)$ i żaden punkt płaszczyzny $\mathbb{C}$ nie jest przyporządkowany punktowi $(0, 0, 1)$.

Stąd: $(0, 0, 1) \leftrightarrow \infty$

$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ – *płaszczyzna zespolona domknięta*

Otoczenia punktów w $\overline{\mathbb{C}}$:

$\{z : |z - z_0| < R\}$ – otoczenie punktu $z_0 \in \mathbb{C}$

$\{z : |z - z_0| > R\}$ – otoczenie ∞

Definicja

Szeregiem Laurenta o współczynnikach a_n i *środku* $z_0 \neq \infty$ w pierścieniu $P(z_0; r, R)$ nazywamy szereg postaci:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Pierwszy szereg w powyższej sumie nazywamy *częścią regularną*, a drugi *częścią główną* szeregu Laurenta.

Definicja

Szeregiem Laurenta o współczynnikach a_n i *środku* $z_0 \neq \infty$ w pierścieniu $P(z_0; r, R)$ nazywamy szereg postaci:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Pierwszy szereg w powyższej sumie nazywamy *częścią regularną*, a drugi *częścią główną* szeregu Laurenta.

Definicja

Szeregiem Laurenta o współczynnikach a_n i *środku* ∞ w pierścieniu $P(z_0; r, R)$ nazywamy szereg postaci:

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$

Pierwszy szereg w powyższej sumie nazywamy *częścią regularną*, a drugi *częścią główną* szeregu Laurenta.

Część regularna szeregu Laurenta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ o środku $z_0 \neq \infty$ jest szeregiem potęgowym względem $(z-z_0)$ zbieżnym wewnątrz koła $|z-z_0| < R$ i rozbieżnym na zewnątrz tego koła, gdzie $R = \frac{1}{\lambda}$ i $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Część regularna szeregu Laurenta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ o środku $z_0 \neq \infty$ jest szeregiem potęgowym względem $(z-z_0)$ zbieżnym wewnątrz koła $|z-z_0| < R$ i rozbieżnym na zewnątrz tego koła, gdzie $R = \frac{1}{\lambda}$ i $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Część główna szeregu Laurenta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ jest szeregiem potęgowym względem zmiennej $u = \frac{1}{z-z_0}$, więc szereg ten jest rozbieżny wewnątrz i zbieżny na zewnątrz koła $|z-z_0| < r$, gdzie $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$.

Część regularna szeregu Laurenta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ o środku $z_0 \neq \infty$ jest szeregiem potęgowym względem $(z-z_0)$ zbieżnym wewnątrz koła $|z-z_0| < R$ i rozbieżnym na zewnątrz tego koła, gdzie $R = \frac{1}{\lambda}$ i $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Część główna szeregu Laurenta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ jest szeregiem potęgowym względem zmiennej $u = \frac{1}{z-z_0}$, więc szereg ten jest rozbieżny wewnątrz i zbieżny na zewnątrz koła $|z-z_0| < r$, gdzie $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$.

Przez zbieżność (zwykłą, jednostajną, bezwzględną) szeregu Laurenta rozumiemy odpowiednią zbieżność obu jego części jednocześnie.

Suma szeregu Laurenta to suma sum obu jego części.

Twierdzenie (Abela)

Jeśli r i R oznaczają promienie zbieżności odpowiednio części głównej i części regularnej szeregu Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z_0 \neq \infty$, to szereg ten jest jednostajnie zbieżny w każdym pierścieniu domkniętym zawartym w pierścieniu $r < |z-z_0| < R$.

Twierdzenie (Abela)

Jeśli r i R oznaczają promienie zbieżności odpowiednio części głównej i części regularnej szeregu Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z_0 \neq \infty$, to szereg ten jest jednostajnie zbieżny w każdym pierścieniu domkniętym zawartym w pierścieniu $r < |z-z_0| < R$.

Twierdzenie (Laurenta)

Jeśli $f(z)$ jest funkcją holomorficzną w pierścieniu $P(z_0; r, R)$, to można ją w tym pierścieniu rozwinąć w *szereg Laurenta*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

gdzie $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K^+} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}}\, d\tau\,,\ K \subset P(z_0; r, R)$.

Dowód:

Z tw. Cauchy'ego $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1^+}\frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = 0$,

z wzoru całkowego Cauchy'ego $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+}\frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = f(z)$, stąd

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1^+}\frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+}\frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{K_2^+}\frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau - \oint_{K_1^+}\frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau\right] =$$

$\tau \in K_2$:

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{\tau - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\tau - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\tau - z_0}} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{z - z_0}{\tau - z_0}\right| < 1 \\ |z - z_0| < |\tau - z_0| \end{array} \right\| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\tau - z_0)^{n+1}}$$

$\tau \in K_1$:

$$\frac{1}{\tau-z} = \frac{1}{\tau-z_0-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\tau-z_0}{z-z_0}} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{\tau-z_0}{z-z_0}\right| < 1 \\ |\tau - z_0| < |z - z_0| \end{array} \right\| =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tau-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\tau-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

$$f(z) =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2^+} f(\tau)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\tau-z_0)^{n+1}}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1^+} f(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\tau-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\,d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2^+}\frac{f(\tau)}{(\tau-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1^+}\frac{f(\tau)}{(\tau-z_0)^{-n+1}}\right](z-z_0)^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

Uwagi:

(1) Rozwinięcie funkcji $f(z)$ w zadanym pierścieniu w szereg Laurenta jest jednoznaczne.

(2) Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $\{z : |z - z_0| < R\}$, to szereg Laurenta staje się szeregiem Taylora, bo funkcja podcałkowa w a_{-n} jest holomorficzna:

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K^+} f(\tau) \cdot (\tau - z_0)^{n-1} \, d\tau = 0$$

Uwagi:

(1) Rozwinięcie funkcji $f(z)$ w zadanym pierścieniu w szereg Laurenta jest jednoznaczne.

(2) Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w kole $\{z : |z - z_0| < R\}$, to szereg Laurenta staje się szeregiem Taylora, bo funkcja podcałkowa w a_{-n} jest holomorficzna:

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K^+} f(\tau) \cdot (\tau - z_0)^{n-1} \, d\tau = 0$$

Przykłady:

(1) Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$ w szereg Laurenta w pierścieniach $P(2; 1, 3)$, $P(-1; 0, 2)$, $P(0; 1, \infty)$, $P(i; \sqrt{2}, \infty)$.

$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$

(a) $P(2;1,3) = \{z : 1 < |z-2| < 3\}$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2+1} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{1}{z-2}\right| < 1 \\ |z-2| > 1 \end{array} \right\| =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-2+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{z-2}{3}\right| < 1 \\ |z-2| < 3 \end{array} \right\| =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} (z-2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(z-2)^n}$$

(b) $P(-1;0,2) = \{z : 0 < |z+1| < 2\}$

$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{z+1}{2}\right| < 1 \\ |z+1| < 2 \end{array} \right\| =$
$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{z+1}$$

(b) $P(-1;0,2)=\{z: 0<|z+1|<2\}$

$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z+1-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\left\| \begin{array}{c} \left|\frac{z+1}{2}\right|<1 \\ |z+1|<2 \end{array} \right\|=$
$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{z+1}$$

(c) $P(0;1,\infty)=\{z: |z|>1\}$

$f(z)=\frac{2}{z^2-1}=\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=\left\| \begin{array}{c} \left|\frac{1}{z^2}\right|<1 \\ |z|>1 \end{array} \right\|=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n+2}}$

(d) $P(i;\sqrt{2},\infty)=\{z:|z-i|>\sqrt{2}\}$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-i+i-1}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{i-1}{z-i}}=\left\|\begin{array}{c}\left|\frac{i-1}{z-i}\right|<1\\ |z-i|>|i-1|\\ |z-i|>\sqrt{2}\end{array}\right\|=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(i-1)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-i+i-1}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{i+1}{z-i}}=\left\|\begin{array}{c}\left|\frac{i+1}{z-i}\right|<1\\ |z-i|>|i+1|\\ |z-i|>\sqrt{2}\end{array}\right\|=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(i+1)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot[(i-1)^n-(i+1)^n]\cdot\frac{1}{(z-i)^{n+1}}$$

(2) Znaleźć obszar zbieżności i sumę szeregu Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, gdzie

(a) $a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \geqslant 0 \\ 1, & n < 0 \end{cases}$

(b) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \geqslant 0 \\ 2^{-n}, & n < 0 \end{cases}$

(2) Znaleźć obszar zbieżności i sumę szeregu Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, gdzie

(a) $a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \geqslant 0 \\ 1, & n < 0 \end{cases}$

(b) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \geqslant 0 \\ 2^{-n}, & n < 0 \end{cases}$

(a) część regularna ma postać $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n$, więc

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^{-n}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$,

część główna to $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$, więc

$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, więc obszar zbieżności

szeregu jest pierścieniem $1 < |z| < 2$, suma szeregu

$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, gdzie

$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n$, $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}\,, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \equiv |z| < 2$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}\,, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \equiv |z| > 1$$

$$f(z) = \frac{2}{2-z} + \frac{1}{z-1} = \frac{z}{(2-z)(z-1)}$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \equiv |z| < 2$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \equiv |z| > 1$$

$$f(z) = \frac{2}{2-z} + \frac{1}{z-1} = \frac{z}{(2-z)(z-1)}$$

(b) część regularna $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n \Rightarrow \lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$

część główna $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n \Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}} = \frac{1}{2}$

obszar zbieżności: $\frac{1}{2} < |z| < 2$

suma szeregu: $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \equiv |z| < 2$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2z)^n} = \frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{1}{2z-1}, \quad \left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \equiv |z| > \frac{1}{2}$$

$$f(z) = \frac{2}{2-z} + \frac{1}{2z-1} = \frac{3z}{(2-z)(2z-1)}$$

(3) Znaleźć rozwinięcie funkcji $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ w pierścieniu $P(0;1,2)$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\,, \quad 1 < |z| < 2$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \\ |z| < 2 \end{array} \right\| = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \\ |z| > 1 \end{array} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\,, \qquad a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2^{n+1}}\,, & n \geqslant 0 \\ 1\,, & n < 0 \end{cases}$$

(4) Znaleźć rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ w pierścieniu $P(1;0,2)$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right], \qquad 0 < |z-1| < 2$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \\ |z-1| < 2 \end{array} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+2}}(z-1)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+2}}, & n \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}, & n = -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

Zera funkcji holomorficznej

Zera funkcji holomorficznej

$f(z)$ - holomorficzna w obszarze D i $z_0 \in D \Rightarrow$ f(z) rozwija się w szereg Taylora: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

Zera funkcji holomorficznej

$f(z)$ - holomorficzna w obszarze D i $z_0 \in D \Rightarrow$ f(z) rozwija się w szereg Taylora: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Definicja

Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ jest *miejscem zerowym* funkcji $f(z)$, jeśli $f(z_0) = 0$.

Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ jest *zerem k - krotnym* funkcji $f(z)$, jeśli współczynniki szeregu Taylora $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$ i $a_k \neq 0$.

Zera funkcji holomorficznej

$f(z)$ - holomorficzna w obszarze D i $z_0 \in D \Rightarrow$ f(z) rozwija się w szereg Taylora: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Definicja

Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ jest *miejscem zerowym* funkcji $f(z)$, jeśli $f(z_0) = 0$.

Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ jest *zerem k - krotnym* funkcji $f(z)$, jeśli współczynniki szeregu Taylora $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$ i $a_k \neq 0$.

Uwagi:

(1) z_0 jest zerem k - krotnym funkcji $f(z) \iff$
$\iff f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ i $f^{(k)}(z_0) \neq 0$

(2) Jeśli z_0 - zero k -krotne funkcji $f(z)$, to
$f(z) = (z - z_0)^k \cdot \Phi(z)$, gdzie $\Phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{k+l}(z - z_0)^l$, tzn.

$\Phi(z_0) \neq 0$ i Φ - ciągła i holomorficzna w pewnym otoczeniu $z_0 \Rightarrow \Phi(z) \neq 0$ w pewnym otoczeniu punktu z_0, czyli z_0 jest jedynym miejscem zerowym $f(z)$ w tym otoczeniu.

(2) Jeśli z_0 - zero k -krotne funkcji $f(z)$, to
$f(z) = (z - z_0)^k \cdot \Phi(z)$, gdzie $\Phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{k+l}(z - z_0)^l$, tzn.

$\Phi(z_0) \neq 0$ i Φ - ciągła i holomorficzna w pewnym otoczeniu $z_0 \Rightarrow \Phi(z) \neq 0$ w pewnym otoczeniu punktu z_0, czyli z_0 jest jedynym miejscem zerowym $f(z)$ w tym otoczeniu.

Przykłady:

(1) $f(z) = 2z^3 \cdot \sin^2 \frac{z}{2} = z^3(1 - \cos z) = z^3 \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots \right) =$
$= z^5 \left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots \right) \Rightarrow z = 0$ - zero 5 - krotne, bo
$\Phi(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots$ - holomorficzna i $\Phi(0) \neq 0$

inaczej: $f(z) = z^3 \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right) =$
$= z^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+3}}{(2n)!}$
$n = 1 \Rightarrow 2n + 3 = 5 \Rightarrow z = 0$ - zero 5 -krotne

(2) $f(z) = (e^z - 1)^2\,, \quad z_0 = 0$

$f(0) = 0$

$f'(z) = 2(e^z - 1) \cdot e^z\,, \quad f'(0) = 0$

$f''(z) = 2(2e^{2z} - e^z)\,, \quad f''(0) \neq 0$

$\Rightarrow z = 0$ - zero 2 - krotne

inaczej: $(e^z - 1)^2 = \left(z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right)\left(z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) =$
$= z^2 + z^3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \dots = z^2\,[1 + z + \dots]$

$\Phi(z) = 1 + z + \dots$ i $\Phi(0) \neq 0$

Punkty osobliwe

Punkty osobliwe

Definicja

Punkt z_0 jest *punktem regularnym* funkcji $f(z)$, jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w otoczeniu z_0.

Punkt z_0 jest *punktem osobliwym* (odosobnionym) funkcji $f(z)$, jeśli f nie jest holomorficzna w z_0 i jest holomorficzna w otoczeniu pierścieniowym z_0, tzn. w $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$.

Punkty osobliwe

Definicja

Punkt z_0 jest *punktem regularnym* funkcji $f(z)$, jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w otoczeniu z_0.

Punkt z_0 jest *punktem osobliwym* (odosobnionym) funkcji $f(z)$, jeśli f nie jest holomorficzna w z_0 i jest holomorficzna w otoczeniu pierścieniowym z_0, tzn. w $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$.

Wyróżniamy *trzy* rodzaje punktów osobliwych.

Niech z_0 będzie punktem osobliwym funkcji $f(z) \Rightarrow f(z)$ można rozwinąć w szereg Laurenta w pierścieniu $P(z_0; 0, R)$:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$

Niech z_0 będzie punktem osobliwym funkcji $f(z) \Rightarrow f(z)$ można rozwinąć w szereg Laurenta w pierścieniu $P(z_0; 0, R)$:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$

Definicja

Punkt z_0 jest *punktem pozornie osobliwym* funkcji $f(z)$, jeśli część główna szeregu Laurenta tej funkcji redukuje się do zera.

Punkt z_0 jest *biegunem k - krotnym* funkcji $f(z)$, jeśli część główna szeregu Laurenta tej funkcji zawiera skończenie wiele wyrazów, $a_{-k} \neq 0$ i $a_{-n} = 0 \quad \forall\, n > k$.

Punkt z_0 jest *punktem istotnie osobliwym* funkcji $f(z)$, jeśli część główna szeregu Laurenta tej funkcji zawiera nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera.

(I) Punkty pozornie osobliwe

Wszystkie współczynniki części głównej są równe zeru.

Przyjmując $f(z_0) = a_0$ otrzymujemy funkcję holomorficzną w całym kole $|z - z_0| < R$, a punkt z_0 staje się punktem regularnym.

np. $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!} =$
$= \frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots \Rightarrow z = 0$ - punkt pozornie osobliwy

(I) Punkty pozornie osobliwe

Wszystkie współczynniki części głównej są równe zeru.

Przyjmując $f(z_0) = a_0$ otrzymujemy funkcję holomorficzną w całym kole $|z - z_0| < R$, a punkt z_0 staje się punktem regularnym.

np. $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} =$
$= \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \Rightarrow z = 0$ - punkt pozornie osobliwy

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{z \to z_0} f(z) = g$, gdzie g jest liczbą skończoną, to z_0 jest punktem pozornie osobliwym $f(z)$.

(II) Bieguny

Dla bieguna k - krotnego:

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$
$a_{-k}\neq 0\,,\ a_{-n}=0\quad\forall\, n>k$

np. $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}+\frac{1}{z^2}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots}{z^3}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots\Rightarrow$
$\Rightarrow z=0$ - biegun 2 - krotny

(II) Bieguny

Dla bieguna k - krotnego:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$
$a_{-k} \neq 0\,,\; a_{-n} = 0 \quad \forall\, n > k$

np. $f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} =$
$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \frac{1}{z^2} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \ldots \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 0$ - biegun 2 - krotny

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, to punkt z_0 jest biegunem funkcji $f(z)$.

Uwagi:

(1) z_0 - biegun k - krotny funkcji $f(z) \iff$
$\iff \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = a_{-k} \neq 0$ i

$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k+n} f(z) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(2) Jeśli z_0 jest biegunem k - krotnym funkcji $f(z)$, to dla funkcji $\frac{1}{f(z)}$ jest on zerem k - krotnym i odwrotnie, jeśli z_0 jest zerem k -krotnym funkcji $g(z)$, to dla funkcji $\frac{1}{g(z)}$ jest on biegunem k - krotnym.

Uwagi:

(1) z_0 - biegun k - krotny funkcji $f(z) \iff$
$\iff \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} \neq 0$ i

$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k+n} f(z) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(2) Jeśli z_0 jest biegunem k - krotnym funkcji $f(z)$, to dla funkcji $\frac{1}{f(z)}$ jest on zerem k - krotnym i odwrotnie, jeśli z_0 jest zerem k -krotnym funkcji $g(z)$, to dla funkcji $\frac{1}{g(z)}$ jest on biegunem k - krotnym.

Twierdzenie

Jeśli z_0 jest zerem m - krotnym funkcji $f(z)$ i jest zerem n - krotnym funkcji $g(z)$, to

(1) jeśli $m \geqslant n$, to z_0 jest punktem pozornie osobliwym f-cji $\frac{f(z)}{g(z)}$,

(2) jeśli $m < n$, to z_0 jest biegunem $(n-m)$ - krotnym funkcji $\frac{f(z)}{g(z)}$.

Przykład:

$f(z) = \frac{\cos z}{(2z-3\pi)(2z-\pi)^3}$

$z = \frac{\pi}{2}$ - zero 1 - krotne licznika i 3 - krotne mianownika,

$z = \frac{3}{2}\pi$ - zero 1 - krotne licznika i mianownika $\Rightarrow$

$z = \frac{\pi}{2}$ jest biegunem 2 - krotnym

$z = \frac{3}{2}\pi$ jest punktem pozornie osobliwym

Przykład:

$f(z) = \frac{\cos z}{(2z-3\pi)(2z-\pi)^3}$

$z = \frac{\pi}{2}$ - zero 1 - krotne licznika i 3 - krotne mianownika,

$z = \frac{3}{2}\pi$ - zero 1 - krotne licznika i mianownika $\Rightarrow$

$z = \frac{\pi}{2}$ jest biegunem 2 - krotnym

$z = \frac{3}{2}\pi$ jest punktem pozornie osobliwym

Twierdzenie

Jeśli funkcje $f(z), g(z)$ są holomorficzne w pewnym otoczeniu punktu z_0 i $f(z_0) = g(z_0) = 0$ oraz istnieje granica $\lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = K$, to $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = K$.

Dowód:

$$f(z) = (z - z_0)\varphi(z) \Rightarrow f'(z) = \varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)$$
$$g(z) = (z - z_0)\psi(z) \Rightarrow g'(z) = \psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)$$

$$K = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} =$$
$$= \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi(z)(z-z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

Dowód:

$$f(z) = (z - z_0)\varphi(z) \Rightarrow f'(z) = \varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)$$
$$g(z) = (z - z_0)\psi(z) \Rightarrow g'(z) = \psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)$$

$$K = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} =$$
$$= \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi(z)(z-z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

np. $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{1} = 1$

Dowód:

$$f(z) = (z - z_0)\varphi(z) \Rightarrow f'(z) = \varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)$$
$$g(z) = (z - z_0)\psi(z) \Rightarrow g'(z) = \psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)$$

$$K = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} =$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi(z)(z-z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

np. $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = 1$

(III) Punkty istotnie osobliwe

np. funkcja $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ - holomorficzna w $\{z : |z| > 0\}$

$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n \cdot n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \ldots \Rightarrow z = 0$ - punkt istotnie osobliwy

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{z \to z_0} f(z)$ nie istnieje, to punkt z_0 jest punktem istotnie osobliwym.

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{z \to z_0} f(z)$ nie istnieje, to punkt z_0 jest punktem istotnie osobliwym.

Punkty osobliwe w ∞

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{z\to z_0} f(z)$ nie istnieje, to punkt z_0 jest punktem istotnie osobliwym.

Punkty osobliwe w ∞

Aby otrzymać rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji $f(z)$ holomorficznej w otoczeniu pierścieniowym punktu ∞, czyli dla $R < |z| < \infty$, podstawiamy $z = \frac{1}{\zeta}$ i rozwijamy w szereg Laurenta funkcję $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ w otoczeniu pierścieniowym punktu $\zeta = 0$, czyli dla $0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$, a następnie wracamy do zmiennej z otrzymując żądane rozwinięcie.

Z tw. Laurenta wynika, że rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji $f(z)$ w otoczeniu punktu ∞, czyli dla $R < |z| < \infty$, ma postać:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

W zależności od tego, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, który jest częścią główną szeregu Laurenta, jest równy zeru, czy ma skończoną liczbę wyrazów niezerowych, czy ma nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera, punkt $z = \infty$ nazywamy odpowiednio *punktem pozornie osobliwym*, *biegunem* lub *punktem istotnie osobliwym* funkcji $f(z)$.

Jeśli $f(z)$ ma w ∞ punkt pozornie osobliwy, to

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Przyjmując $\lim_{z\to\infty} f(z) = a_0$ otrzymujemy funkcję holomorficzną w ∞.

Jeśli $f(z)$ ma w ∞ punkt pozornie osobliwy, to

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Przyjmując $\lim_{z \to \infty} f(z) = a_0$ otrzymujemy funkcję holomorficzną w ∞.

Jeśli w szczególności $\lim_{z \to \infty} f(z) = a_0 = 0$ i $a_{-1} \neq 0$, to punkt ∞ nazywamy *zerem jednokrotnym* f(z).

Jeśli $f(z)$ ma w ∞ punkt pozornie osobliwy, to

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$$

Przyjmując $\lim_{z\to\infty} f(z) = a_0$ otrzymujemy funkcję holomorficzną w ∞.

Jeśli w szczególności $\lim_{z\to\infty} f(z) = a_0 = 0$ i $a_{-1} \neq 0$, to punkt ∞ nazywamy *zerem jednokrotnym* f(z).

Gdy funkcja $f(z)$ ma w ∞ *biegun k - krotny*, to jej rozwinięcie w szereg Laurenta w otoczeniu pierścieniowym tego punktu ma postać:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k \,, \quad a_k \neq 0 \,,\ a_n = 0 \quad \forall\, n > k$$

Część główna tego rozwinięcia jest wtedy wielomianem stopnia k.

Gdy funkcja $f(z)$ ma w ∞ *punkt istotnie osobliwy*, to jej rozwinięcie w szereg Laurenta zawiera część główną $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera.

Gdy funkcja $f(z)$ ma w ∞ *punkt istotnie osobliwy*, to jej rozwinięcie w szereg Laurenta zawiera część główną $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera.

Residuum funkcji

Gdy funkcja $f(z)$ ma w ∞ *punkt istotnie osobliwy*, to jej rozwinięcie w szereg Laurenta zawiera część główną $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera.

Residuum funkcji

Załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w pierścieniu $P(z_0; 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad K(z_0, R) \subset P(z_0; 0, R)$

Gdy funkcja $f(z)$ ma w ∞ *punkt istotnie osobliwy*, to jej rozwinięcie w szereg Laurenta zawiera część główną $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera.

Residuum funkcji

Załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w pierścieniu
$P(z_0; 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \quad K(z_0, R) \subset P(z_0; 0, R)$

Wtedy $\oint_{K^+(z_0,r)} f(z)\, dz = \oint_{K^+(z_0,r)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \, dz =$
$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_{K^+(z_0,r)} (z - z_0)^n \, dz = a_{-1} \cdot 2\pi i$

Definicja

Residuum funkcji w punkcie $z_0 \neq \infty$ jest to wartość całki

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} f(z)\, dz$$

gdzie $C \subset P(z_0; 0, R)$ - krzywa zamknięta zwykła kawałkami gładka.

Definicja

Residuum funkcji w punkcie $z_0 \neq \infty$ jest to wartość całki

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} f(z)\, dz$$

gdzie $C \subset P(z_0; 0, R)$ - krzywa zamknięta zwykła kawałkami gładka.

Uwaga

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = a_{-1} \quad \text{dla} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

w rozwinięciu $f(z)$ w szereg Laurenta w $P(z_0; 0, R)$, gdzie $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}}\, d\tau$, $n \in \mathbb{N}$

- Dla punktu regularnego lub pozornie osobliwego z_0 funkcji $f(z)$:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = 0$$

- Dla punktu regularnego lub pozornie osobliwego z_0 funkcji $f(z)$:

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = 0$$

- Jeśli z_0 - biegun rzędu 1 funkcji $f(z)$:

$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots\,, \quad a_{-1} \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (z - z_0) \cdot f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \ldots$

$z \to z_0 :\ \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}[a_{-1}+a_0(z-z_0)+\ldots] = a_{-1}$
stąd

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0) \cdot f(z)$$

Jeśli $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ - iloraz funkcji holomorficznych takich, że $P(z_0) \neq 0\,,\ Q(z_0) = 0\,,\ Q'(z_0) \neq 0$, to:

$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{\frac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ stąd

$$\mathrm{res}_{z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Jeśli $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ - iloraz funkcji holomorficznych takich, że $P(z_0) \neq 0\,,\ Q(z_0) = 0\,,\ Q'(z_0) \neq 0$, to:

$\lim_{z\to z_0}(z - z_0)\frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ stąd

$$\mathrm{res}_{z_0}\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Przykłady:

(1) $f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}\,,\quad z = \pm 1$ - bieguny 1 - krotne

$\mathrm{res}_1 f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{z^2-1} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}$

$\mathrm{res}_{-1} f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{1}{z^2-1} = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}$

(2) $f(z) = \frac{10}{(z^2+1)(z^2-2z+2)}$

$P(z) = 10\,,\; Q(z) = (z-i)(z+i)(z-1-i)(z-1+i)\,,$
$Q'(z) = 2z(z^2-2z+2) + (z^2+1)(2z-2)$

$Q'(i) = 4+2i\,,\; Q'(-i) = -4-2i\,,$
$Q'(1+i) = -4+2i\,,\; Q'(1-i) = 4-2i$

$\mathrm{res}_i f(z) = \frac{P(i)}{Q'(i)} = 2-i\,,\; \mathrm{res}_{-i} f(z) = \frac{P(-i)}{Q'(-i)} = -2+i$

$\mathrm{res}_{1+i} f(z) = \frac{P(1+i)}{Q'(1+i)} = -2-i\,,\; \mathrm{res}_{1-i} f(z) = \frac{P(1-i)}{Q'(1-i)} = 2+i$

- Jeśli z_0 - biegun k - krotny funkcji $f(z)$, $k > 1$:

$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots\,,\ a_{-k} \neq 0$
$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + \ldots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + \ldots$

różniczkujemy $k - 1$ razy, dzielimy przez otrzymany przy a_{-1} współczynnik i otrzymujemy, że

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k \cdot f(z) \right]$$

- Jeśli z_0 - biegun k - krotny funkcji $f(z)$, $k>1$:

$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots\,,\ a_{-k}\neq 0$
$(z-z_0)^k f(z)=a_{-k}+\ldots+a_{-1}(z-z_0)^{k-1}+a_0(z-z_0)^k+\ldots$

różniczkujemy $k-1$ razy, dzielimy przez otrzymany przy a_{-1} współczynnik i otrzymujemy, że

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k\cdot f(z)\right]$$

Przykład:

$f(z)=\frac{e^z-1}{z^3}$, $\quad z=0$ - biegun 2 - krotny (zero 1 - krotne licznika i zero 3 - krotne mianownika)

$\mathrm{res}_0 f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{e^z-1}{z^3}\right]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)'=$
$=\lim_{z\to 0}\frac{ze^z-(e^z-1)}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{ze^z+e^z-e^z}{2z}=\frac{1}{2}$

(do granicy wyrażenia nieoznaczonego stosujemy odpowiednik tw. de l'Hospitala)

Inaczej: $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3} = \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \ldots \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{-1} = \mathrm{res}_0 f(z) = \frac{1}{2}$

Inaczej: $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3} = \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \dots \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{-1} = \mathrm{res}_0 f(z) = \frac{1}{2}$

• Jeśli $z_0 \neq \infty$ - punkt istotnie osobliwy $f(z)$ to residuum wyznaczamy z rozwinięcia funkcji w szereg Laurenta:

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$$

Inaczej: $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3} = \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \dots \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{-1} = \mathrm{res}_0 f(z) = \frac{1}{2}$

• Jeśli $z_0 \neq \infty$ - punkt istotnie osobliwy $f(z)$ to residuum wyznaczamy z rozwinięcia funkcji w szereg Laurenta:

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$$

Przykład:

$f(z) = \sin \frac{1}{z-1}$, $\quad z = 1$ - punkt istotnie osobliwy

$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots \Rightarrow \mathrm{res}_1 f(z) = 1$

bo $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$

Tw. (całkowe o residuach)

Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D z wyjątkiem punktów $z_1, \ldots, z_m \in D$, to dla każdej krzywej zwykłej zamkniętej $C \subset D$ zawierającej punkty $z_1, \ldots, z_m$ zachodzi wzór:

$$\oint_{C^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{z_k} f(z)$$

Tw. (całkowe o residuach)

Jeśli $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D z wyjątkiem punktów $z_1, \ldots, z_m \in D$, to dla każdej krzywej zwykłej zamkniętej $C \subset D$ zawierającej punkty $z_1, \ldots, z_m$ zachodzi wzór:

$$\oint_{C^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{z_k} f(z)$$

Dowód:

$\oint_{C^+} f(z)\, dz = \sum_{l=1}^{m} \oint_{K_l^+} f(z)\, dz = \sum_{l=1}^{m} 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{z_l} f(z)$

Przykład:

$$\oint_{C^+} z \cdot e^{\frac{1}{z-1}}\, dz \text{ , gdzie } C : |z-1| = 1$$

$$\oint_{C^+} z \cdot e^{\frac{1}{z-1}}\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_1 z \cdot e^{\frac{1}{z-1}}$$

$$z \cdot e^{\frac{1}{z-1}} = [(z-1)+1] \cdot e^{\frac{1}{z-1}} =$$
$$= [(z-1)+1] \cdot \left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \dots\right] = \frac{1}{z-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2!}\right) + \dots$$

$$\mathrm{res}_1 f(z) = a_{-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\oint_{C^+} z \cdot e^{\frac{1}{z-1}}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{3}{2} = 3\pi i$$

Uwaga:

Na podstawie tw. o residuach można obliczać wartości całek niewłaściwych funkcji rzeczywistych.

Uwaga:

Na podstawie tw. o residuach można obliczać wartości całek niewłaściwych funkcji rzeczywistych.

Lemat 1

Jeśli spełnione są następujące warunki:

1° $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ jest funkcją wymierną zmiennej rzeczywistej x taką, że $\deg Q \geqslant \deg P + 2$,

2° $Q(z)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych,

to istnieje całka niewłaściwa zmiennej rzeczywistej $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ i wyraża się wzorem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} R(z)\,, \quad \operatorname{Im} z_k > 0$$

Lemat 2

Jeśli spełnione są następujące warunki:

1° $f(z) = e^{imz}F(z)\,,\; m > 0\,,\; F(z) \to 0\,,\; z \to \infty$ dla $\operatorname{Im} z \geqslant 0$,

2° $f(z)$ jest holomorficzna w $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ poza skończoną liczbą punktów osobliwych $z_1, \ldots, z_n$ leżących w górnej półpłaszczyźnie $\operatorname{Im} z > 0$,

to istnieje całka niewłaściwa zmiennej rzeczywistej $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ i wyraża się wzorem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f(z)\,, \quad \operatorname{Im} z_k > 0$$

Bo kontur $C = \Gamma \cup [-R, R]$ (półokrąg) zawiera wszystkie punkty $z_1, \ldots, z_n$ i $\Gamma = \{z : z = Re^{it}\ ,\ t \in [0, \pi]\}$

z tw. o residuach:
$\oint_{C^+} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f(z)$

$R \to \infty \Rightarrow \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ i

$\int_\Gamma f(z)\,dz \to 0$, bo $\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{M}{R^\alpha} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{\alpha-1}}\ ,\quad \alpha \geqslant 2$

Bo kontur $C = \Gamma \cup [-R, R]$ (półokrąg) zawiera wszystkie punkty $z_1, \dots, z_n$ i $\Gamma = \{z : z = Re^{it}\,,\ t \in [0, \pi]\}$

z tw. o residuach:
$\oint_{C^+} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z_k} f(z)$

$R \to \infty \Rightarrow \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ i

$\int_\Gamma f(z)\, dz \to 0$, bo $\left|\int_\Gamma f(z)\, dz\right| \leqslant \frac{M}{R^\alpha} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{\alpha-1}}\,, \quad \alpha \geqslant 2$

Przykłady:

(1) Obliczyć $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{10}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}\, dx$

$f(z) = \frac{10}{(z^2+1)(z^2-2z+2)}$ tylko punkty osobliwe

$z_1 = 1\,,\ z_2 = 1 + i \in \mathrm{Im}\, z > 0 \Rightarrow$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{10}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}\, dx = 2\pi i\, [\mathrm{res}_{z_1} f(z) + \mathrm{res}_{z_2} f(z)] = 4\pi$

(2) Obliczyć $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\, dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ – zbieżna $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\, dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1}\, dx$ są zbieżne bezwzględnie, więc można je obliczyć z wartości głównej:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\, dx = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\, dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1}\, dx = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1}\, dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\sin 2x}{x^2+1}\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\, dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1}\, dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{x^2+1}\, dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{i2x}}{x^2+1}\, dx$$

$f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2+1}$, $z = \pm i$ – punkty nieholomorficzności

$C = C_R \cup [-R, R]$, $R > 1$, gdzie C_R – półokrąg o promieniu R leżący w górnej półpłaszczyźnie

$\oint_{C^+} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_i \frac{e^{2iz}}{z^2+1} = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \frac{e^{2iz}}{z+i} = \frac{\pi}{e^2}$

$\oint_{C^+} f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$ i szacujemy pierwszą całkę:

$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqslant \pi R \cdot \sup_{z\in C_R} |f(z)| \leqslant \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0 \quad R\to\infty$

bo $\left|\frac{e^{2iz}}{z^2+1}\right| = \frac{e^{-2y}}{|z^2+1|} \leqslant \frac{1}{|z^2+1|} \leqslant \frac{1}{R^2-1}\,, \quad |z^2+1| > |z|^2 - 1$

$R\to\infty \Rightarrow \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{x^2+1}\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+1}\,dx$

Stąd: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e^2}$

(3) Obliczyć $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Rozważamy funkcję $R(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$, dla wartości rzeczywistych $z = x$ dostajemy funkcję podcałkową $R(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$, która spełnia założenia Lematu 1. Funkcja $R(z)$ ma bieguny 2 - krotne w $z_1 = i$, $z_2 = -i$, ale tylko $z_1 = i \in \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$

Stąd: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{z_1} R(z)$

$\mathrm{res}_{z_1} R(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right] = \lim_{z\to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{8i^3} = -\frac{i}{4}$

więc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

(4) Obliczyć $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\, dx$

Bierzemy pod uwagę funkcję $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$ taką że $\mathrm{Re}\, f(z) = \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}$. Funkcja $f(z)$ spełnia założenia Lematu 2 i ma dwa bieguny rzędu 1 w $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 1-3i$, z których tylko z_1 leży w górnej półpłaszczyźnie.

Stąd: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\, dx = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{z_1} f(z)$

$$\mathrm{res}_{z_1} f(z) = \left.\frac{ze^{iz}}{(z^2-2z+10)'}\right|_{z=1+3i} = \frac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\, dx = \frac{\pi}{3}(1+3i)e^{-3}e^{i} = \frac{\pi}{3e^3}(1+3i)(\cos 1 + i\sin 1) =$$
$$= \frac{\pi}{3e^3}[(\cos 1 - 3\sin 1) + i(3\cos 1 + \sin 1)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\, dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\, dx = \frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1)\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\, dx = \frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1 + \sin 1)$$

Residuum funkcji w ∞

Residuum funkcji w ∞

Definicja

Residuum funkcji w punkcie osobliwym w ∞ jest to wartość całki

$$\mathrm{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)\, dz$$

gdzie C - krzywa zamknięta ujemnie skierowana zawarta w otoczeniu pierścieniowym ∞ (tzn. w $\{R < |z| < \infty\}$).

Uwagi:

(1) Z definicji wynika, że $\mathrm{res}_{\infty} f(z) = -a_{-1}$, gdzie a_{-1} – współczynnik przy $\frac{1}{z}$ w rozwinięciu w szereg Laurenta funkcji w otoczeniu pierścieniowym punktu $z = \infty$.

Uwagi:

(1) Z definicji wynika, że $\mathrm{res}_\infty f(z) = -a_{-1}$, gdzie a_{-1} – współczynnik przy $\frac{1}{z}$ w rozwinięciu w szereg Laurenta funkcji w otoczeniu pierścieniowym punktu $z = \infty$.

(2) W tym przypadku wyraz $\frac{1}{z}$ należy do części regularnej, a nie do części głównej szeregu Laurenta, więc residuum funkcji $f(z)$ w punkcie ∞, który jest punktem pozornie osobliwym nie musi być równe zeru.

np. dla $f(z) = \frac{1}{z}$ punkt $z = \infty$ jest pozornie osobliwy, a $\mathrm{res}_\infty f(z) = -1 \neq 0$

Przykład:

$$f(z) = z^2 \cdot e^{-\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \ldots\right) =$$
$$= z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \ldots$$

$$\mathrm{res}_{\infty} f(z) = -a_{-1} = \frac{1}{6}$$

Przykład:

$$f(z) = z^2 \cdot e^{-\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \ldots\right) =$$
$$= z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \ldots$$
$$\mathrm{res}_{\infty} f(z) = -a_{-1} = \frac{1}{6}$$

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w $\overline{\mathbb{C}}$ z wyjątkiem skończonej liczby punktów osobliwych odosobnionych, to

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z_k} f(z) + \mathrm{res}_{\infty} f(z) = 0$$

Dowód:

K – krzywa zawierająca punkty osobliwe $z_1, \ldots, z_n$

$$0 = \oint_{K^+} f(z)\,dz - \oint_{K^+} f(z)\,dz = \oint_{K^+} f(z)\,dz + \oint_{K^-} f(z)\,dz =$$
$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{res}_{z_k} f(z) + 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{\infty} f(z)$$

Dowód:

K – krzywa zawierająca punkty osobliwe $z_1, \dots, z_n$

$$0 = \oint_{K^+} f(z)\,dz - \oint_{K^+} f(z)\,dz = \oint_{K^+} f(z)\,dz + \oint_{K^-} f(z)\,dz =$$
$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{res}_{z_k} f(z) + 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{\infty} f(z)$$

Przykłady:

(1) $\oint_{C^+} \frac{z}{z^4+1}\,dz$, gdzie $C : |z| = 2$

$$\oint_{C^+} \frac{z}{z^4+1}\,dz = 2\pi i \left[\mathrm{res}_{z_1} f(z) + \mathrm{res}_{z_2} f(z) + \mathrm{res}_{z_3} f(z) + \mathrm{res}_{z_4} f(z)\right] =$$
$$= -2\pi i \cdot \mathrm{res}_{\infty} f(z)$$

gdzie $z_1, \dots, z_4$ – pierwiastki $\sqrt[4]{-1}$

$$f(z) = \frac{z}{z^4+1} = \frac{z}{z^4\left(1+\frac{1}{z^4}\right)} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{z^{4n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{z^{4n+3}}$$

dla $\left|\frac{1}{z^4}\right| < 1 \equiv |z| > 1$

Stąd $a_{-1} = 0 = \mathrm{res}_{\infty} f(z)$ i $\oint_{C^+} \frac{z}{z^4+1}\, dz = 0$

Stąd $a_{-1} = 0 = \mathrm{res}_{\infty} f(z)$ i $\oint_{C^+} \frac{z}{z^4+1}\, dz = 0$

(2) $\oint_{K^+(z_0,R)} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{z_0} \frac{1}{z-z_0} = 2\pi i$

$\oint_{K^+(z_0,R)} \frac{dz}{z-z_0} = -2\pi i \cdot \mathrm{res}_{\infty} \frac{1}{z-z_0} = -2\pi i \cdot (-1) = 2\pi i$

bo $\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z\left(1-\frac{z_0}{z}\right)} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{z_0}{z}\right| < 1 \\ |z| > |z_0| \end{array} \right\| = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} + \frac{z_0^2}{z^3} + \ldots \Rightarrow a_{-1} = 1$