AUTOMATYKA I ROBOTYKA - SEMESTR 2

ANA 2. ZESTAW 8. - Rozwiązania

Zad. 1. Obliczyć całkę $\oint_{C^+} \frac{z}{z^4-1}\,dz$, gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem

(a) $|z-i|=1$

$f(z) = \frac{z}{z^4-1} = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$

Skorzystamy z wzoru całkowego Cauchy'ego:

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

dla funkcji holomorficznej $f(z)$ i krzywej C wewnątrz której znajduje się punkt nieholomorficzności z_0 funkcji podcałkowej.

$\oint_{C_1^+} \frac{z}{z^4-1}\,dz = \oint_{C_1^+} \frac{\frac{z}{(z^2-1)(z+i)}}{z-i}\,dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{z}{(z^2-1)(z+i)}\right|_{z=i} = -\frac{\pi i}{2}$

ponieważ funkcja $f_1(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z+i)}$ jest holomoficzna w obszarze jednospójnym zawierającym krzywą C_1, a krzywa C_1 zawiera w swoim wnętrzu jeden punkt nieholomorficzności $z_0 = i$ funkcji $f(z)$.

(b) $|z-i|=3$

Krzywa C zawiera wszystkie punkty nieholomorficzności funkcji podcałkowej, więc z uogólnionego tw. Cauchy'ego:

$$\oint_{C^+} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \oint_{C_k^+} f(z)\,dz$$

gdzie każda krzywa C_k^+ zawiera tylko jeden punkt nieholomorficzności funkcji $f(z)$.

$\oint_{C_2^+} \frac{z}{z^4-1}\,dz = \oint_{C_2^+} \frac{\frac{z}{(z^2-1)(z-i)}}{z+i}\,dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{z}{(z^2-1)(z-i)}\right|_{z=-i} = -\frac{\pi i}{2}$

$\oint_{C_3^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz = \oint_{C_3^+} \frac{\frac{z}{(z^2+1)(z+1)}}{z-1}\, dz = 2\pi i \cdot \ \frac{z}{(z^2+1)(z+1)}\ \Big|_{z=1} = \frac{\pi i}{2}$

$\oint_{C_4^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz = \oint_{C_4^+} \frac{\frac{z}{(z^2+1)(z-1)}}{z+1}\, dz = 2\pi i \cdot \ \frac{z}{(z^2+1)(z-1)}\ \Big|_{z=-1} = \frac{\pi i}{2}$

$\Rightarrow \oint_{C^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz = \sum_{k=1}^{4} \oint_{C_k^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz = 0$

(c) $\quad |z-3| = 1$

Z tw. podstawowego Cauchy'ego wynika, że $\oint_{C^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz = 0$, ponieważ punkty nieholomorficzności funkcji podcałkowej leżą na zewnątrz krzywej C.

(d) $\quad |z-2+2i| = 2\sqrt{2}$

Wewnątrz krzywej C leżą dwa punkty nieholomorficzności: $z = -i$, $z = 1$, więc

$\oint_{C^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz = \oint_{C_2^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz + \oint_{C_3^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz = -\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i}{2} = 0$

Zad. 2. Obliczyć całkę $\oint_{C^+} \frac{\sin 2z}{z^2-4}\, dz$, gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem

(a) $\quad |z-2| = 1$

$\oint_{C_1^+} \frac{\frac{\sin 2z}{z+2}}{z-2}\, dz = 2\pi i \cdot \ \frac{\sin 2z}{z+2}\ \Big|_{z=2} = \frac{\pi i}{2} \sin 4$

$f_1(z) = \frac{\sin 2z}{z+2}$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym zawierającym krzywą C_1.

(b) $\quad |z+3| = 2$

$\oint_{C_2^+} \frac{\frac{\sin 2z}{z-2}}{z+2}\, dz = 2\pi i \cdot \left. \frac{\sin 2z}{z-2} \right|_{z=-2} = \frac{\pi i}{2} \sin 4$

$f_2(z) = \frac{\sin 2z}{z-2}$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym zawierającym krzywą C_2.

(c) $|z| = 1$

Z tw. podstawowego Cauchy'ego wynika, że $\oint_{C^+} \frac{\sin 2z}{z^2-4}\, dz = 0$, ponieważ punkty nieholomorficzności funkcji podcałkowej leżą na zewnątrz krzywej C.

(d) $|z| = 3$

$\oint_{C^+} \frac{\sin 2z}{z^2-4}\, dz = \oint_{C_1^+} \frac{\sin 2z}{z^2-4}\, dz + \oint_{C_2^+} \frac{\sin 2z}{z^2-4}\, dz = \pi i \sin 4$

ponieważ wewnątrz krzywej C znajdują się oba punkty nieholomorficzności.

Zad. 3. Obliczyć całkę $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{e^z}{z^2(1-z)^3}\, dz$, gdzie C jest dodatnio skierowaną, kawałkami gładką krzywą, zwykłą krzywą zamkniętą taką, że

(a) punkt 0 leży wewnątrz krzywej, a punkt 1 na zewnątrz krzywej C

Skorzystamy z wniosku z wzoru całkowego Cauchy'ego:

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$$

dla funkcji holomorficznej $f(z)$ i krzywej C wewnątrz której znajduje się punkt nieholomorficzności z_0 funkcji podcałkowej.

$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1^+} \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z^2}\, dz = \frac{1}{1!} \left. \left[\frac{e^z}{(1-z)^3}\right]' \right|_{z=0} = \left. \frac{e^z(1-z)^3 + 3e^z(1-z)^2}{(1-z)^6} \right|_{z=0} = 4$

bo funkcja $f_1(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3}$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym zawierającym krzywą C_1.

(b) punkt 1 leży wewnątrz krzywej, a punkt 0 na zewnątrz krzywej C

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+}\frac{\frac{e^z}{z^2}}{(1-z)^3}\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+}\frac{\frac{e^z}{z^2}}{(z-1)^3}\,dz = -\frac{1}{2!}\left[\frac{e^z}{z^2}\right]''\Big|_{z=1} = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^z(z-2)}{z^3}\right]'\Bigg|_{z=1} =$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{z^2e^z-4ze^z+6e^z}{z^4}\right]\Bigg|_{z=1} = -\frac{3e}{2}$$

bo funkcja $f_2(z) = \frac{e^z}{z^2}$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym zawierającym krzywą C_2.

(c) punkty 0 i 1 leżą wewnątrz krzywej C.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+}\frac{e^z}{z^2(1-z)^3}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1^+}\frac{e^z}{z^2(1-z)^3}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+}\frac{e^z}{z^2(1-z)^3}\,dz = 4 - \frac{3e}{2}$$

ponieważ wewnątrz krzywej C znajdują się oba punkty nieholomorficzności.

Zad. 4. Obliczyć całkę $\oint_{C^-}\frac{\cos z}{(1+z^2)^2}\,dz$ po ujemnie skierowanym okręgu $|z-i| = 1$.

$$\oint_{C^-}\frac{\frac{\cos z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\,dz = -\frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{\cos z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = -2\pi i\left[\frac{-(z+i)\sin z-2\cos z}{(z+i)^3}\right]\Bigg|_{z=i} =$$
$$= -\frac{\pi}{2}(\cos i + i\sin i) = -\frac{\pi}{2}e^{-1}$$

bo funkcja $f(z) = \frac{\cos z}{(z+i)^2}$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym zawierającym krzywą C.

Zad. 5. Obliczyć całkę $\oint_{C^+}\frac{ze^z}{(z^2+1)^2}\,dz$ po dodatnio skierowanym okręgu $|z-i| = 1$.

$$\oint_{C^+}\frac{\frac{ze^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{ze^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = 2\pi i\left[\frac{(e^z+ze^z)(z+i)-2ze^z}{(z+i)^3}\right]\Bigg|_{z=i} =$$

$= \frac{\pi}{2} e^i = \frac{\pi}{2}(\cos 1 + i \sin 1)$

bo funkcja $f(z) = \frac{ze^z}{(z+i)^2}$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym zawierającym krzywą C.