ANA1
$$Z_{8-9}$$

1. Niech  $f:[-a; a] \to \mathbb{R}$ , gdzie a > 0, będzie funkcją ciągłą w [-a; a]. Wykaż, że:

(a) 
$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)] dx$$
,

(b) jeśli 
$$f$$
 jest funkcją parzystą, to  $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int_{0}^{a} f(x) dx$ ,

(c) jeśli 
$$f$$
 jest funkcją nieparzystą, to  $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$ .

2. Naszkicuj wykres funkcji F(x), jeśli:

(a) 
$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$
, gdzie  $f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{dla } t < 0, \\ t-1 & \text{dla } t \ge 0, \end{cases}$ 

(b) 
$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t) dt$$
, gdzie  $f(t) = \begin{cases} -\sin t & \text{dla } t < 0, \\ \sin t & \text{dla } t \ge 0. \end{cases}$ 

3. Nie obliczając całki zbadaj monotoniczność funkcji F(x), jeśli:

(a) 
$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{dt}{t^2 + 2t + 2}$$

(b) 
$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$
.

4. Oblicz granicę:

(a) 
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg}t} \, dt}{\int_0^{\operatorname{tg}x} \sqrt{\sin t} \, dt},$$

(b) 
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_{x^2}^{x^2+1} \ln(t+1) dt}{x^2}$$
,

(c) 
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_{x^3}^5 \operatorname{arctg}(t^2) dt}{x^3 + x},$$

(d) 
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_{e^x}^{e^{3x}} \frac{\mathrm{dt}}{\ln^3 t}}{e^{3x}}.$$

5. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach:

(a) 
$$y = e^{-x}$$
,  $y = e^{3x}$ ,  $y = \sqrt{e}$ ,

(b) 
$$2y = -x^2$$
,  $2x = -y^2$ ,

(c) 
$$y = \sin x$$
,  $y = \cos 2x$  i zawierającego w swym wnętrzu punkt  $(0; \frac{1}{2})$ .

- 6. Oblicz objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót wokół osi OX obszaru opisanego nierównościami:
  - (a)  $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \le y \le \sin x + \cos x$ ,
  - (b)  $0 \le x \le \pi$ ,  $\sin x \le y \le 2\sin x$ .
- 7. Oblicz długość łuku krzywej:
  - (a)  $y = x\sqrt{x}$  dla  $0 \le x \le 1$ ,
  - (b)  $y = \operatorname{ch} x \operatorname{dla} 0 \le x \le 1$ .