Metody Probabilistyczne i Statystyka

Z_5

1. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny taki, że $S_X = \{-1, 0, k\}$ oraz
$$P(X=-1) = \frac{1}{3},\ P(X=0) = \frac{1}{3k},\ P(X=k) = \frac{1}{k},$$
gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć stałą k oraz obliczyć $V(3X+1)$.

2. Staż pracy (w latach) pracowników pewnej firmy jest zmienną losową X o gęstości
$$f_X(x) = cx^2 \cdot \mathbf{1}_{[0;6]}(x),$$
gdzie c jest pewną liczbą rzeczywistą.
   (a) Wyznaczyć stałą c oraz dystrybuantę zmiennej losowej X;
   (b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że staż pracy losowo wybranego pracownika tej firmy jest krótszy niż 2 lata;
   (c) Jaki jest średni staż pracy pracowników tej firmy? Ile wynosi odchylenie standardowe tego stażu pracy?

3. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny taki, że $S_X = \{0, 1, 2\}$ oraz
$$EX = 0,9,\ VX = 0,69.$$
Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Obliczyć $E|X - EX|$.

4. W urnie są 4 kule białe i 2 czarne. Losujemy jedną kulę, wkładamy ją z powrotem do urny dokładając również jedną kulę w tym samym kolorze, co wylosowana. Następnie znów losujemy jedną kulę. Niech X oznacza liczbę wylosowanych białych kul w dwóch losowaniach. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X oraz obliczyć $E(X^2 - X + 1)$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości
$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[0;1]}(x).$$
Wartości X i $\frac{1}{2}$ dzielą przedział $[0;1]$ na trzy odcinki. Znaleźć średnią długość każdego z nich.

6. Na podstawie badań stwierdzono, że zmienna losowa X opisująca procent zanieczyszczeń w próbce rudy miedzi ma rozkład ciągły o gęstości $f_X(x) = 12x^2(1-x) \cdot \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$. Wybrano niezależnie 4 próbki. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że:
   (a) Dokładnie jedna próbka zawiera ponad połowę zanieczyszczeń;
   (b) Co najmniej jedna próbka zawiera ponad połowę zanieczyszczeń.

7. Automat produkuje kulki metalowe o średnicy X będącej zmienną losową o rozkładzie ciągłym z gęstością $f_X(x) = 5 \cdot \mathbf{1}_{[0,4;0,6]}(x)$. Za zgodne z normą uznaje się kulki o średnicy z przedziału $[0,41; 0,59]$.
   (a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z produkcji kulka spełnia wymagania normy;
   (b) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba kulek spełniających wymagania normy spośród 999 kulek?