Metody Probabilistyczne i Statystyka

Z_3

1. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny o dystrybuancie $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1/8 & , \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 1/2 & , \quad 2 \leqslant x < 3 \\ 3/4 & , \quad 3 \leqslant x < 4 \\ 1 & , \quad x \geqslant 4 \end{cases}$. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X oraz obliczyć $P(X^2 - X = 0)$.

2. Mamy 9 monet: 6 dwustronnych $\left(P(O) = \frac{2}{5}\right)$ oraz 3 z podwójnym orłem. Wybieramy losowo jedną monetę i zaczynamy nią rzucać. Znaleźć rozkład liczby wykonanych rzutów, gdy:
   (a) rzucamy tak długo, dopóki nie wypadnie orzeł;
   (b) rzucamy tak długo, dopóki po raz trzeci nie wypadnie orzeł;
   (c) rzucamy tak długo, dopóki nie wypadnie orzeł, ale nie więcej niż 4 razy.

3. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ oraz $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ dla każdej $\omega \in \Omega$, określone są zmienne losowe $X(\omega) = \sin\frac{\pi\omega}{2}$ i $Y(\omega) = \cos\frac{\pi\omega}{2}$. Wyznaczyć ich dystrybuanty oraz obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

4. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = [-2; 2]$, a P jest prawdopodobieństwem geometrycznym, określone są zmienne losowe

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & , \quad -2 \leqslant \omega < 0 \\ 1 & , \quad \omega = 0 \\ \omega & , \quad 0 < \omega \leqslant 2 \end{cases}, \quad Y(\omega) = \begin{cases} \omega + 2 & , \quad -2 \leqslant \omega < 0 \\ 0 & , \quad \omega = 0 \\ 2 & , \quad 0 < \omega \leqslant 2 \end{cases}.$$

   Wykazać, że X i Y mają ten sam rozkład. Wskazać punkt skokowy tego rozkładu.

5. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = \{(x, y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - |x|\}$, a P jest prawdopodobieństwem geometrycznym, określona jest zmienna losowa $T(x, y) = \operatorname{sgn}(x + y)$. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej T. Czy każda wartość zmiennej losowej T jest punktem skokowym jej rozkładu?

6. Sprawdzić, które z następujących funkcji $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mogą być dystrybuantami jednowymiarowej zmiennej losowej:
   (a) $F(x) =$ arctg x dla każdego $x \in \mathbb{R}$
   (b) $F(x) = 1 +$ sgn(x) dla każdego $x \in \mathbb{R}$
   (c) $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$
   (d) $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leqslant 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$
   (e) $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}) & , \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

7. Sprawdzić, czy istnieje $a \in \mathbb{R}$ przy którym funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1 & , \quad x \in (0; 1) \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases},$$

   jest gęstością rozkładu jednowymiarowej zmiennej losowej.

8. Funkcja gęstości pewnej jednowymiarowej zmiennej losowej X ma postać

$$f_X(x) = \begin{cases} b & , \quad x \in [0; 1] \\ b^2 & , \quad x \in (1; 3] \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases},$$

   gdzie $b \in \mathbb{R}$ jest pewną stałą. Wyznaczyć b oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.
   Obliczyć $P(X^2 - 3X + 2 > 0)$.