UNIWERSYTET WROCŁAWSKI

Interpolacja Lagrange'a i Newtona

Pracownia 2.7

Artur Derechowski

10 grudnia 2018

1 Treść

Zrealizować algorytmy obliczania wartości wielomianu podanego za pomocą wzoru interpolacyjnego Lagrange'a oraz zamiany postaci Lagrange'a na postać Newtona. Porównać dokładności wyników uzyskanych za pomocą obu wzorów m.in. dla funkcji $f_1(x) = (1+25x^2)^{-1}$ i $f_2(x) = arctg(x)$.

1.1 Postać Lagrange'a

Wielomian interpolujący $n+1$ punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ można zapisać w postaci interpolacyjnej Lagrange'a, danej wzorem:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x), \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{1.1}$$

Można sprawdzić, że ten wielomian przyjmuje wartości y_i w punktach x_i oraz, że jest stopnia $\leqslant n$ Jest to jedyny wielomian stopnia $\leqslant n$ interpolujący zadane punkty.

1.2 Postać Newtona

Ten sam wielomian może zostać zapisany w postaci Newtona jako:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j), \qquad a_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)} \tag{1.2}$$

gdzie współczynniki a_i są ilorazami różnicowymi, które można również definiować rekurencyjnie jako:

$$a_i = f[x_0, ..., x_i] \qquad f[x_0, ..., x_i] = \frac{f[x_0, ..., x_{i-1}] - f[x_1, ..., x_i]}{x_0 - x_i} \tag{1.3}$$

2 Zamiana postaci Lagrange'a na postać Newtona

Postać Lagrange'a podana we wzorze 1.1 może być również zapisana jako:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j), \qquad \sigma_i = \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \tag{2.1}$$

Mając zapisane σ_i w tej postaci można poprzez proste przekształcenie otrzymać również współczynniki w postaci Newtona.

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i \prod_{j=k+1}^{n} (x_i - x_j) \tag{2.2}$$

Wtedy, z równań 2.2 oraz 1.2 postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dana jest wzorem:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \tag{2.3}$$

W dalszej części pracy będą rozważane wzory na postać Newtona podane w równaniu 2.3 oraz na postać Lagrange'a w równaniu 2.1.

3 Badane funkcje

Wiadomo, że n-ty błąd interpolacji dany jest wzorem:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{3.1}$$

zależy on więc od pochodnej n-tego stopnia funkcji f. Dobierzemy więc odpowiednie funkcje, dla których ta pochodna może być dowolnie duża (przy rosnącym n), aby uwidocznić różnicę pomiędzy funkcją a wielomianem ją interpolującym.

3.1 Runge

Funkcja Rungego dana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \tag{3.2}$$

Można pokazać, że jej kolejne pochodne są rozbieżne, na przykład 10-ta pochodna w pobliżu zera osiąga wartość ponad $2 * 10^13$.

3.2 ARCTAN(X)

Kolejne pochodne funkcji $arctan$ również gwałtownie rozbiegają w pobliżu zera, dla przykładu 10-ta pochodna osiąga wartość ponad $2 * 10^5$. Można zauważyć, że zasada działania jest podobna do tej dla funkcji Rungego, ponieważ

$$(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \tag{3.3}$$

czyli również ma $1+x^2$ w mianowniku i stały licznik, kolejne pochodne będą więc miały ograniczony mianownik w okolicy zera, licznik natomiast rośnie. Funkcja Rungego pokazuje jednak tę różnicę o wiele lepiej, dając o wiele mniej dokładne wyniki interpolacji.

3.3 SIN(X)

Dla porównania wzięta została również jedna funkcja, której pochodne nie rosną gwałtownie.

$$(sin(x))' = cos(x) \qquad\qquad (sin(x))'' = -sin(x) \tag{3.4}$$

kolejne pochodne zostaną więc ograniczone do ± 1 w okolicy zera.

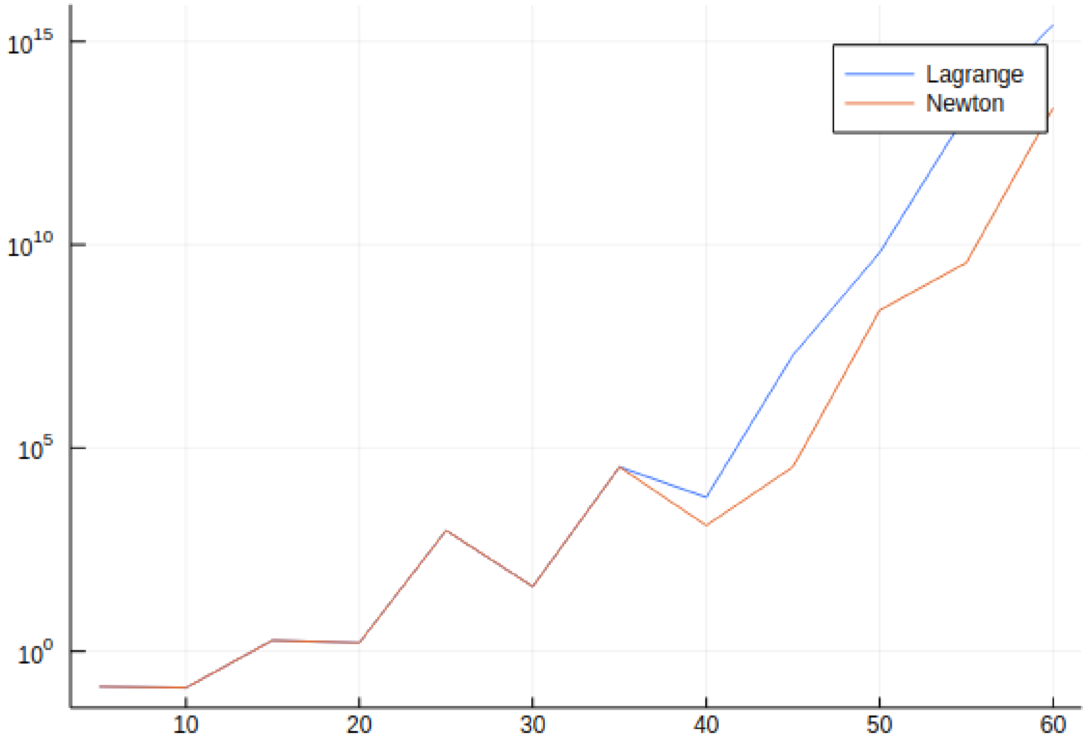
4 POMIARY

4.1 LAGRANGE A NEWTON

Poniżej przedstawiono pomiary dla funkcji Rungego. Pomiary przebiegają co 5 stopni wielomianu interpolacyjnego, na przedziale $(-1,1)$ liczony jest błąd jako różnica w pomiędzy wielomianem interpolującym postaci a funkcją. Przedstawione jest to odpowiednio dla postaci Newtona i Lagrange. Różnica wyrażona jest jako całka oznaczona na przedziale $(-1,1)$. Wykres 4.1 został przedstawiony w skali logarytmicznej, aby pokazać od którego miejsca widoczna jest różnica pomiędzy postaciami. Widać, że postać Newtona daje dokładniejsze wyniki od postaci Lagrange'a.

LITERATURA

[1] Wilhelm Werner *Polynomial Interpolation: Lagrange versus Newton*, Mathematics of Computation, volume 43, number 167, July 1984



Rysunek 4.1: Porównanie dokładności postaci Newtona i Lagrange'a dla funkcji Rungego