Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 1

Początek zapisów: **15 października 2018 r.**

Termin realizacji: **18 listopada 2018 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): ***6–12 punktów***

Każde zadanie może być wybrane najwyżej przez trzy osoby (w przypadku zadań P1.18 i P1.19 — przez trzy zespoły dwuosobowe) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P1.1. $\boxed{\text{6 punktów}}$ Student analizy matematycznej otrzymał zadanie wyznaczenia następującej granicy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!}. \tag{1}$$

W związku z tym, napisał prosty program:

```
x := 1;    n := 100;
for i from 1 to n do
     x := 100 * x/i;
     print(x);
end
```

Oblicz granicę (1). Czy na podstawie tak napisanego programu, student ma szansę wyciągnąć poprawne wnioski? Jeżeli odpowiedź brzmi nie, to zaproponuj modyfikację kodu programu, która pomoże studentowi poprawnie rozwiązać to zadanie.

P1.2. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Wiadomo, że $\pi = 4\lim_{n\to\infty} s_n$, gdzie $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k(2k+1)^{-1}$. Oblicz w arytmetyce z podwyższoną precyzją wartości s_n dla $n = 10^7$, sumując składniki w porządku: a) naturalnym, b) odwrotnym. Oblicz błędy $|4.0 \times fl(s_n) - \pi|$.

P1.3. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Rozważmy zadanie obliczania wartości funkcji

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3} \tag{2}$$

dla x bliskich 0.

a) Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Zaprogramuj funkcję $f(x)$ według wzoru (2) (możesz wykorzystać biblioteczną funkcję $\sin x$). Wywołaj ją dla $x := 10^{-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, 15)$. Skomentuj wyniki i porównaj z wcześniej obliczoną granicą.

c) Opracuj metodę obliczania $f(x)$, która jest lepsza niż wzór (2). Zaproponowana metoda powinna dobrze działać dla dowolnego $x \neq 0$.

P1.4. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Liczba e jest następującą granicą:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3}$$

Korzystając ze wzoru (3), oblicz kolejne przybliżenia liczby e podstawiając $n = 8^k$ dla $k = 1, 2, \ldots, 10$. Oceń jakość uzyskanych wyników. Podaj lepszy sposób obliczania wartości e.

P1.5. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Wartości funkcji $f(x) = (x-1)^8$ można obliczać na różne sposoby, np:

a) $x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$,

b) $(((((((x-8)x+28)x-56)x+70)x-56)x+28)x-8)x+1$,

c) $(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)$,

d) $\left\{\left[(x-1)^2\right]^2\right\}^2$,

e) $\begin{cases} e^{8\ln|x-1|} & : \quad (x \neq 1), \\ 0 & : \quad (x = 1). \end{cases}$

Porównaj podane wyżej metody obliczania $f(x)$ dla $x \in [0.99, 1.01]$ (np. w N równoodległych punktach tego przedziału). Wyniki eksperymentu przedstaw na odpowiednich wykresach, przeanalizuj je i skomentuj.

P1.6. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Niech będzie $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$. Sprawdź, że

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta u_k = u_{n+1} - u_1.$$

Oblicz wartość po lewej stronie powyższej równości z pojedynczą precyzją (**bez żadnych przekształceń wstępnych!**), a wartość po prawej stronie – z podwójną precyzją dla $u_k = \ln(1+k)$ oraz $n = 1000(1000)10000$. Wydrukuj tabelkę różnic między tymi wartościami. Oblicz $\sum_{k=1}^{n} u_k$ z pojedynczą i podwójną precyzją. Objaśnij wyniki.

P1.7. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Opracować i sprawdzić na przykładach procedury funkcyjne, obliczające z dokładnością bliską dokładności maszynowej wartości następujących funkcji matematycznych:

$$f_1(x) := x^{-2}(1-\cos x), \quad f_2(x) := 1-\cos x, \quad f_3(x) := x - \sin x \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

W każdym wypadku zbadać, czy istnieje groźba utraty cyfr znaczących wyniku i – w razie potrzeby – zaproponować sposób uniknięcia groźby.

P1.8. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Sprawdź doświadczalnie, jak dobrym przybliżeniem wartości $\ln x$ jest dla $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ następujące wyrażenie:

$$-\frac{1}{2}\ln 2 + \sum_{k=0}^{3} a_{2k+1} \left(\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^{2k+1}, \tag{4}$$

gdzie

$$a_1 := 1.999999993788, \qquad a_3 := 0.399659100019,$$
$$a_5 := 0.666669470507, \qquad a_7 := 0.300974506336.$$

Następnie, wykorzystując wzór (4), zaproponuj efektywny sposób obliczania z podobną dokładnością wartości $\ln x$ dla $x > 0$. Opracowaną metodę porównaj z funkcją biblioteczną.

P1.9. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Przedstaw, a następnie wykonując odpowiednie testy – oceń pod względem numerycznym metodę obliczania logarytmu zaproponowaną w artykule

— Awad H. Al-Mohy, *A more accurate Briggs method for the logarithm*, Numerical Algorithms (2011), w druku, `DOI: 10.1007/s11075-011-9496-z`
  Kopię artykułu można otrzymać od prowadzących pracownię.

P1.10. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Wykorzystując jedynie podstawowe działania arytmetyczne $(+, -, *, /)$, zaproponuj efektywne sposoby wyznaczania wartości funkcji $f(x) = \mathrm{arctg} x$ i $g(x) = \mathrm{arcctg} x$ z dokładnością bliską dokładności maszynowej. Opracowane algorytmy porównaj z funkcjami bibliotecznymi.

P1.11. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Wykorzystując jedynie podstawowe działania arytmetyczne $(+, -, *, /)$, zaproponuj efektywny sposób wyznaczania wartości funkcji sinus i cosinus z dokładnością bliską dokładności maszynowej. Opracowany algorytm porównaj z funkcjami bibliotecznymi.

P1.12. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Niech $\{s_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do granicy s. Algorytm ε konstruuje tablicę wielkości $\varepsilon_n^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{-1}^{(n)} &= 0, && n \in \mathbb{N}_0,\\
\varepsilon_{0}^{(n)} &= s_n, && n \in \mathbb{N}_0,\\
\varepsilon_{k+1}^{(n)} &= \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + \frac{1}{\varepsilon_{k}^{(n+1)} - \varepsilon_{k}^{(n)}}, && k, n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

W wielu wypadkach parzyste kolumny są zbieżne do s szybciej niż $\{s_n\}$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{2k}^{(n)} - s}{s_n - s} = 0.$$

a) Obliczyć 20 początkowych wyrazów ciągów $\{s_n\}$ i $\{\varepsilon_2^{(n)}\}$ oraz $\{e_n := s_n - s\}$ i $\{d_n := \varepsilon_2^{(n)} - s\}$ w wypadku

i. $s_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (2j+1)^{-1}$, $s = \pi/4$; iii. $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-3/2}$, $s \approx 2.612375348685488$;

ii. $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^j (j+1)^{-1}$, $s = \ln 2$; iv. $s_n = \sum_{k=0}^{n} (j+1)^{-2}$, $s = \pi^2/6$;

Czy mamy do czynienia z istotnym przyspieszeniem zbieżności? Powtórzyć doświadczenie dla **innych** danych.

b) Przedstawić przyspieszenie zbieżności uzyskiwane przez algorytm ε w kolejnych (parzystych) kolumnach.

P1.13. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Ciąg $\{y_n\}$ jest określony wzorem $y_n := \int_0^1 t^n e^t \,\mathrm{d}t \qquad (n = 0, 1, \ldots)$.

a) Sprawdź, że ciąg $\{y_n\}$ monotonicznie maleje do zera.

b) Sprawdź, że zachodzi związek $y_{n+1} = e - (n+1)y_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ i wyznacz wartość początkową y_0. Korzystając z tego wyniku oblicz w standardowej arytmetyce wyrazy $y_0, y_1, \ldots, y_N$ dla $N = 20$. Czy otrzymane wyniki są wiarygodne?

c) Oto inny sposób realizacji tego samego zadania. Zauważ, że wobec nierówności $\frac{1}{n+1} \leqslant y_n \leqslant \frac{e}{n+1}$ (sprawdzić!) ciąg jest wolno zbieżny, więc y_N i y_{N-1} są prawie sobie równe; z równania $y_N = e - Ny_{N-1}$ wynika wówczas, że w przybliżeniu jest $y_N = e/(N+1)$. Następnie za pomocą podanego wcześniej związku rekurencyjnego oblicz $y_{N-1}, y_{N-2}, \ldots, y_0$. Czy wartość y_0 jest dokładna? A inne wyrazy ciągu? Podsumuj wyniki doświadczeń.

P1.14. $\boxed{\text{10 punktów}}$ *Funkcja Bessela* ma następujące rozwinięcie w szereg potęgowy, zbieżne dla każdej wartości x:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Załóżmy, że chcemy wykorzystać to rozwinięcie dla obliczenia przybliżonej wartości $J_0(x)$ z błędem $\leqslant \frac{1}{2}10^{-6}$. Dla wybranych, umiarkowanych oraz dużych wartości argumentu x, np. $x = 20$, odpowiedz na następujące pytania:

a) Ilu składników szeregu trzeba użyć?

b) Jaki jest największy co do modułu użyty składnik?

c) Jakie zjawisko obserwujemy?

P1.15. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Ciąg *funkcji Bessela* J_n określamy wzorem

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt) \,\mathrm{d}t \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Łatwo zauważyć, że $|J_n(x)| \leqslant 1$. Wiadomo, że zachodzi związek

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

a) i. Wykorzystać ten związek oraz znane wartości $J_0(1) \approx 0.7651976866$, $J_1(1) \approx 0.4400505857$ do obliczenia w arytmetyce z pojedynczą precyzją wartości

$$J_0(1),\ J_1(1),\ \ldots,\ J_{20}(1).$$

Co można powiedzieć o wiarygodności wyników?

ii. Rozważyć następujący algorytm.
— Wybrać $N > 20$ i określić pomocnicze wartości

$$c_{N+1}^{(N)} := 0; \qquad c_N^{(N)} := 1.0,$$
$$c_{k-1}^{(N)} := \frac{2k}{x} c_k^{(N)} - c_{k+1}^{(N)} \quad (k = N, N-1, \ldots, 1).$$

— Następnie obliczyć stałą $\lambda := J_0(x)/c_0^{(N)}$ oraz wielkości

$$j_k^{(N)} := \lambda c_k^{(N)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N).$$

— Wówczas jest $j_k^{(N)} \approx J_k(x)$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$.
Wykonać obliczenia w arytmetyce z pojedynczą precyzją dla $x = 1$ oraz dla $N = 25$ i $N = 30$. Przedyskutować wyniki.

b) Powtórzyć obliczenia z punktu a) w arytmetykach z podwyższoną precyzją. Przedyskutować wyniki.

P1.16. 10 punktów

a) Sprawdzić, że *ciąg Fibonacciego*

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right] \tag{5}$$

spełnia związek rekurencyjny

$$z_k = z_{k-1} + z_{k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Sprawdzić, że $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ są początkowymi dwoma wyrazami ciągu.

b) Sprawdzić, że ciąg

$$G_k = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k. \tag{7}$$

również spełnia związek rekurencyjny (6) dla pewnych (*jakich*?) danych G_0 i G_1 .

c) Obliczyć – w arytmetykach z pojedynczą i podwyższoną precyzją – 50 początkowych wyrazów ciągów $\{F_k\}$ i $\{G_k\}$ następującymi dwoma sposobami, a następnie porównać wyniki otrzymane za pomocą: a) związku rekurencyjnego (6), b) wzorów (5) i (7). Objaśnić wyniki.

P1.17. 12 punktów Rozważ szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{3/2} + k^{1/2} \right)^{-1}$. Spróbuj wyznaczyć trzy dokładne cyfry dziesiętne sumy szeregu. Skomentuj wyniki.

P1.18. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Jak wiadomo, liczba π określa stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. Można próbować ją wyznaczyć stosując np. wzór

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

chociaż nie jest to zbyt dobry pomysł (*dlaczego?*). Korzystając z odpowiedniej literatury, zaproponuj przynajmniej trzy sposoby wyznaczania wartości liczby π z dużą dokładnością, np. kilkunastu tysięcy cyfr po przecinku. Opisane metody porównaj pod względem szybkości i efektywności numerycznej.

P1.19. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Niech X i Y będą macierzami kwadratowymi stopnia n, gdzie n jest liczbą parzystą. Iloczyn macierzy

$$Z = X\,Y$$

definiujemy następująco:

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\, y_{kj} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

gdzie z_{ij} jest elementem i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy Z (wielkości x_{ij} i y_{ij} mają znaczenie analogiczne). Aby wyznaczyć iloczyn macierzy korzystając ze wzoru (8) należy wykonać n^3 mnożeń. Macierze Z, X i Y możemy zapisać w tzw. *postaci blokowej*:

$$Z = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} E & G \\ F & H \end{bmatrix}.$$

Jeśli $Z = XY$, to

$$R = AE + BF, \quad S = AG + BH, \quad T = CE + DF, \quad U = CG + DH.$$

W tym wypadku musimy obliczyć 8 iloczynów macierzy stopnia $n/2$, czyli ponownie wykonać $8(n/2)^3 = n^3$ mnożeń. Sprawdź jednak, że prawdziwe są równości:

$$R = P_5 + P_4 - P_2 + P_6, \quad S = P_1 + P_2, \quad T = P_3 + P_4, \quad U = P_5 + P_1 - P_3 - P_7,$$

gdzie

$$P_1 = A(G - H), \quad P_2 = (A + B)H, \quad P_3 = (C + D)E, \quad P_4 = D(F - E),$$
$$P_5 = (A + D)(E + H), \quad P_6 = (B - D)(F + H), \quad P_7 = (A - C)(E + G).$$

Stosując powyższą procedurę obliczamy tylko 7 iloczynów macierzy stopnia $n/2$. Wykonujemy zatem $7/8 \cdot n^3$ mnożeń. Jeśli $n = 2^k$, to iloczyny macierzy stopnia $n/2$ obliczamy podobnie (jeśli n nie jest potęgą dwójki możemy rozszerzyć macierze uzupełniając je zerami do odpowiedniego rozmiaru). Powyższe postępowanie nosi nazwę *algorytmu Strassena mnożenia macierzy*.

1. Porównaj pod względem szybkości i dokładności tradycyjny algorytm mnożenia macierzy (wzór (8)) z algorytmem Strassena. **2.** Obliczenia przeprowadź dla macierzy o rozmiarach od 4 do 500. Dla macierzy X o znanej macierzy odwrotnej X^{-1} (konsultacje) oblicz wartości błędów

$$\Delta(XX^{-1} - I), \qquad \Delta(X^{-1}X - I),$$

gdzie I jest macierzą jednostkową, natomiast $\Delta(X) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2$. **3.** Dla danych macierzy X, Y i V oblicz $\Delta((XY)V - X(YV))$. **4.** Skomentuj wyniki.