UNIWERSYTET WROCŁAWSKI

Algorytm Strassena

Pracownia 1.19

Antoni Tomaszewski
Artur Derechowski

15 listopada 2018

1 OPIS PROBLEMU

Zadanie polega na napisaniu algorytmu Strassena mnożenia macierzy n*n i porównania go z klasycznym mnożeniem macierzy. Algorytm Strassena ma złożoność asymptotyczną

$$O(N^{\log 7})$$

co jest lepsze od standardowego mnożenia w asymptotycznym czasie

$$O(N^3)$$

Dla dużych macierzy algorytm Strassena powinien więc być szybszy. Algorytm ten zawiera jednak dużą stałą rzędu $O(N^2)$, dlatego dla małych macierzy spodziewamy się, że będzie on wolniejszy od klasycznego mnożenia.

Implementacja algorytmu Strassena została wykonana w języku Julia w pliku "program.jl". Testy zawierają się w plikach "test.*" i "Wyniki.*". Wykresy zostały wygenerowane korzystając z biblioteki "Plots".

2 ALGORYTM STRASSENA

Mając dwie macierze X i Y aby wyznaczyć ich iloczyn można najpierw podzielić je na bloki

$$Z = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

gdzie Z jest iloczynem macierzy X i Y. Następnie trzeba zauważyć, że zamiast robić 8 mnożeń bloków macierzy wystarczy zrobić 7.

$$R = AE + BH, \qquad S = AG + BH, \qquad T = CE + DF, \qquad U = CG + DH \tag{2.2}$$

Tę samą macierz można przedstawić w ten sposób:

$$R = P5 + P4 - P2 + P6, \qquad S = P1 + P2, \qquad T = P3 + P4, \qquad U = P5 + P1 - P3 - P7 \tag{2.3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} P1 &= A(G-H), & P2 &= (A+B)H, & P3 &= (C+D)E, & P4 &= D(F-E), \\ P5 &= (A+D)(E+H), & P6 &= (B-D)(F+H), & P7 &= (A-C)(E+G) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Algorytm Strassena dzieli wtedy macierze na pół i wywołuje na nich kolejne mnożenie Strassena, z analogicznym podziałem dla coraz to mniejszych macierzy.

Widać, że algorytm Strassena działa najefektywniej dla macierzy rozmiaru 2^k. Wtedy zawsze można je dzielić na 2 i wywoływać rekurencyjnie Strassena dla mniejszych macierzy. Gdy macierz jest nieparzystego rozumiaru, to nie można jej pomnożyć, bo nie można jej podzielić na bloki. Problem pojawia się, gdy mamy więc macierz rozmiaru $2^k + 1$. Wtedy efektywnie tworzymy macierz 4 razy większą (resztę wypełniamy zerami), aby ją pomnożyć. W części doświadczalnej pracowni sprawdzamy więc tylko macierze o boku 2^k, aby zilustrować jak najbardziej efektywny algorytm Strassena. Stała, którą zaniedbujemy nie jest jednak duża, bo w najgorszym przypadku wynosi 4.

3 Szybkość algorytmu Strassena

Porównujemy czasy mnożenia dwóch macierzy o danym boku n (tabela 5.1). Ponieważ algorytm Strassena wyrównuje macierze nie-kwadratowe do macierzy kwadratowych, może tracić na tym dużo czasu. Dla przykładu pomnożenie wektorów k-elementowych zajmie mu tyle samo czasu, co pomnożenie macierzy kwadratowych o boku k. Dlatego w pomiarach bierzemy pod uwagę tylko macierze kwadratowe.

Można zauważyć, że algorytm Strassena obecnie wykonuje się o wiele wolniej od wbudowanego operatora mnożenia w języku Julia. Ten operator może być jednak zaimplementowany o wiele wydajniej, ponieważ jest częścią języka. Warto w takim razie sprawdzić, jak algorytm Strassena ma się do ręcznie napisanej funkcji, która działa tak samo jak wbudowany operator, ale nie korzysta z możliwych usprawnień systemowych.

Widać, że algorytm Strassena w wersji rekurencyjnej jest również o wiele wolniejszy od napisanej przez nas funkcji mnożącej macierze. Jest to spowodowane tym, że algorytm tworzy bardzo wiele wywołań rekurencyjnych (aż do macierzy stopnia 1), co znacząco spowalnia czas wykonania programu.

Tabela 3.1: Czas mnożenie macierzy dwoma sposobami

n	Zwykły (wbudowany)	Zwykły	Strassen (R)
32	2.8482e-5	0.000105749	0.012895832
64	6.0576e-5	0.000894503	0.089886236
96	0.000170009	0.003644241	0.550218023
128	0.000166872	0.010069118	0.548687255
160	0.000330841	0.015669477	3.860402354
192	0.000502141	0.022380795	3.860977080
224	0.000735925	0.032780297	3.851896002
256	0.001038842	0.064917801	3.846245318

Czasy wykonania algorytmu Strassena są natomiast identyczne co do rzędu wielkości dla macierzy o rozmiarach $[2^k, 2^{k+1})$. Dzieje się tak, ponieważ w algorytmie Strassena macierze są zawsze wyrównywane do parzystych wielkości poprzez wypełnienie zerami. Można zauważyć, że wszystkich wyrównań nigdy nie będzie więcej niż czterokrotność całej wielkości macierzy (dla macierzy o boku $2^k + 1$). Najefektywniej jest mnożyć macierze o boku 2^k.

Dużym problemem w implementacji algorytmu Strassena jest rekurencja. Implementacja opierająca się na wzorze naturalnie z niej korzysta, jednak dla komputera jest to proces wolniejszy od iteracyjnego rozwiązania. Rekurencyjna wersja algorytmu Strassena jest również o wiele mniej wydajna pod względem pamięciowym, gdzie już dla macierzy niewielkich rozmiarów obserwujemy znaczny wzrost w zaalokowanej pamięci (2GB RAM dla macierzy o boku 512 w porównaniu do 2MB dla wersji iteracyjnej).

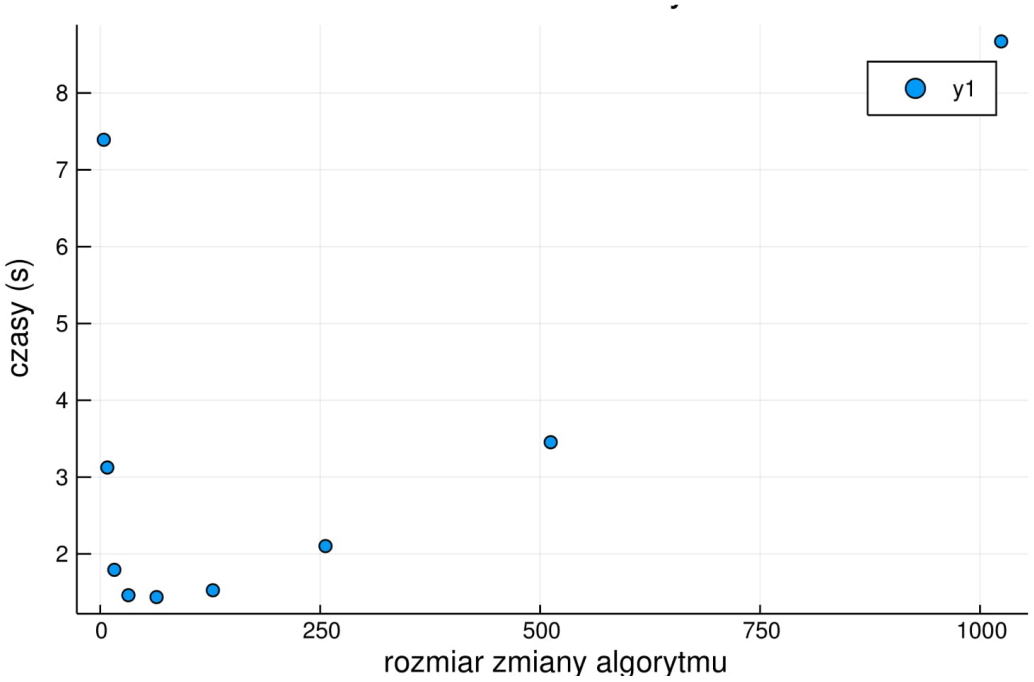
4 Efektywny algorytm Strassena

Naiwna imlementacja algorytmu Strassena nie jest więc wydajna i zachowuje się o wiele gorzej od oczekiwań. Jest to spowodowane dużym kosztem wielu wywołań rekurencyjnych dla małych macierzy, które możnaby szybko policzyć mnożący klasycznie. Skoro dla małych macierzy nie opłaca się mnożyć algorytmem Strassena, to implementację algorytmu Strassena będziemy zatrzymywać na pewnej stałej, którą wyznaczamy eksperymentalnie. Do pewnego momentu dzielimy duże macierze algorytmem Strassena. Gdy natomiast bok macierzy jest mniejszy od pewnej stałej, macierze są mnożone klasycznie.

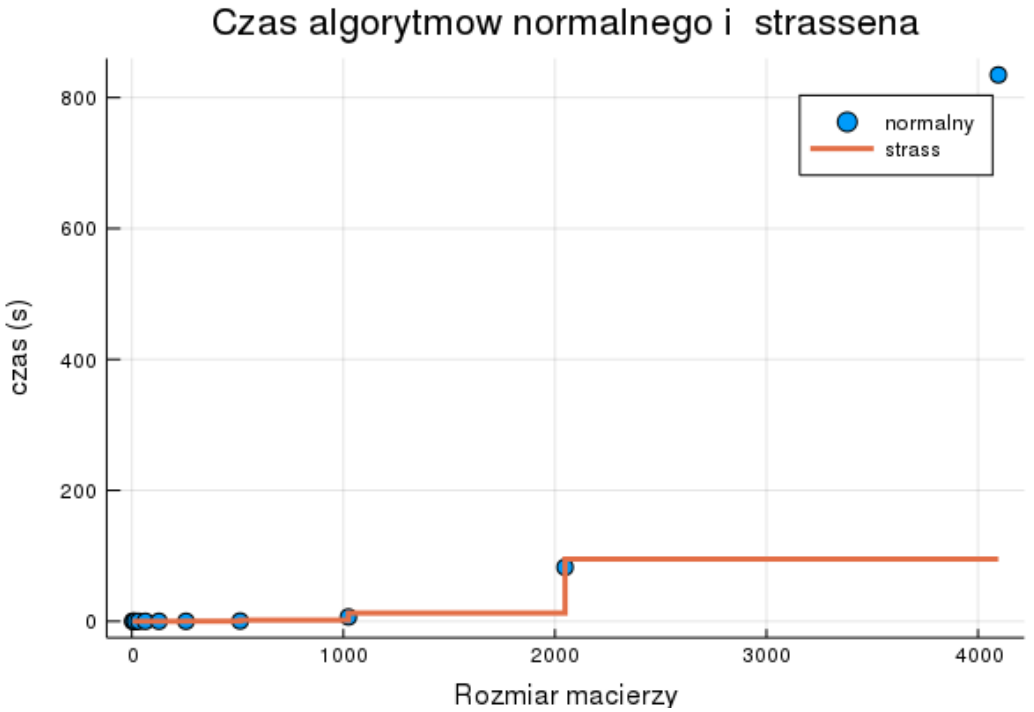
Dzięki temu uzyskujemy algorytm, który wykorzystuje lepszą złożoność algorytmu Strassena, jednocześnie nie traci jednak na dużej ilości mnożeń małych macierzy, które musi wykonać.

Do wyznaczenia najlepszego punktu przejścia algorytmu sprawdzamy wszystkie możliwe wartości postaci 2^n. Widać, że minimum osiągane jest przy wartości 64, na wykresie **??**.

Wykorzystując ten algorytm, uzyskujemy już wyniki, które są istotnie szybsze dla macierzy dużych rozmiarów. 4.2



Rysunek 4.1: Czas mnożenia dla macierzy 1024x1024 z różnymi punktami przejścia



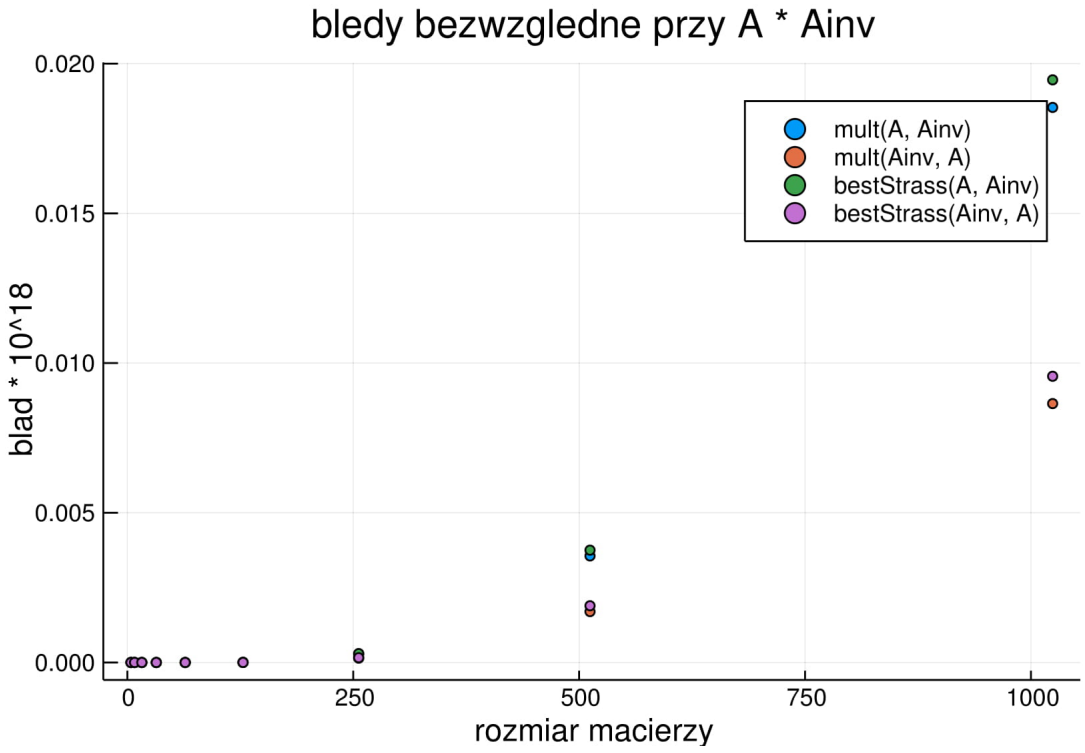
Rysunek 4.2: Czas lepszego mnożenia macierzy Strassena i klasycznego mnożenia

5 Analiza błędów

Ważnym wskaźnikiem jakości algorytmu jest nie tylko jego szybkość, ale także jak bardzo dokładny jest numerycznie. Przeprowadzamy obliczenia dla macierzy o rozmiarach od 4 do 1024, sprawdzając każdą potęgę dwójki (wtedy algorytm Strassena jest różny względem każdej iteracji). Dla danej macierzy nieosobliwej liczymy wartości błędów $\Delta(XX^{-1}-I)$ oraz $\Delta(X^{-1}X-I)$, gdzie

$$\Delta(X) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}^2$$

Na wykresie 5.1 widać, że błędy obliczeń w algorytmie Strassena tylko nieznacznie różnią się od błędów w klasycznym mnożeniu. Większą różnicę ma natomiast kolejność wykonywania mnożenia. Lepszą dokładność obserwujemy, mnożąc AA^{-1} niż AA^{-1}.



Rysunek 5.1: Błędy $\Delta(A^{-1}A-I)$ i $\Delta(AA^{-1}-I)$ algorytmu Strassena

6 Mnożenie kwaternionów

Algorytm Strassena daje oszczędność jednego mnożenia na osiem. Istnieją jednak inne przekształcenia, które mogą bardziej zmniejszyć liczbę kosztownych mnożeń na rzecz dodawania. Przykładem tego jest mnożenie kwaternionów.

6.1 KWATERNIONY

Kwaternion jest strukturą algebraiczną rozszerzającą liczby zespolone:

$$q = a + bi + cj + dk$$

gdzie a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Mnożąc klasycznie dwa kwaterniony zgodnie z zasadą rozdzielności wykonamy 16 mnożeń:

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) * (y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k) &= f1 + f2 + f3 + f4 \\
f_1 &= x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 \\
f_2 &= (x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3) i \\
f_3 &= (x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2) j \\
f_4 &= (x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1) k
\end{aligned} \tag{6.1}$$

6.2 PRZEKSZTAŁCENIE

Zapiszemy powyższą sumę w inny sposób, wykonując tylko 8 mnożeń zamiast 16. Niech:

$$\begin{aligned}
[I] &= x1\,y1 \\
[II] &= x4\,y3 \\
[III] &= x2\,y4 \\
[IV] &= x3\,y2 \\
[V] &= (x1 + x2 + x3 + x4)(y1 + y2 + y3 + y4) \\
[VI] &= (x1 + x2 - x3 - x4)(y1 + y2 - y3 - y4) \\
[VII] &= (x1 - x2 + x3 - x4)(y1 - y2 + y3 - y4) \\
[VIII] &= (x1 - x2 - x3 + x4)(y1 - y2 - y3 + y4)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Wtedy sumę $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
f_1 &= 2[I] - ([V] + [VI] + [VII] + [VIII])/4 \\
f_2 &= -2[II] + ([V] + [VI] - [VII] - [VIII])/4 \\
f_3 &= -2[III] + ([V] - [VI] + [VII] - [VIII])/4 \\
f_4 &= -2[IV] + ([V] - [VI] - [VII] + [VIII])/4
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Widać więc, że iloczyn dwóch kwaternionów można wykonać, robiąc tylko 8 mnożeń zamiast 16[1]. Zapisanie tego przekształcenia w innej postaci pozwala więc na poprawę liczby mnożeń o 50%., podczas gdy algorytm Strassena mnożenia macierzy pozwalał jedynie na 12,5% oszczędności.

Dla algorytmu mnożącego kwaterniony można udowodnić, że nie da się go wykonać z liczbą mnożeń mniejszą niż 8.[1]

7 WNIOSKI

Algorytm Strassena, który daje lepszą złożoność obliczeniową, może być wykorzystany tylko do mnożenia określonych macierzy (kwadratowych, o dużym rozmiarze, o których wiemy, że nie zawierają dużej ilości zer). W takim przypadku jest on jednak kilkukrotnie szybszy, co może mieć znaczenie w praktyce. Z powodu ograniczeń sprzętowych (pamięć RAM) największe macierze jakie testowaliśmy to 1024 na 1024. Po obejściu tego problemu można jednak mnożyć macierze dwukrotnie lub czterokrotnie większe, dla których różnica pomiędzy czasem mnożenia Strassena a klasycznym będzie o wiele bardziej widoczna.

LITERATURA

[1] Thomas D. Howell, Jean-Cleaude Lafon, *The Complexity of the Quaternion Product*, Department of Computer Science, Cornell University, Ithaca, N.Y. 1975.

[2] Volker Strassen, *Gaussian Elimination is not Optimal*, Numerische Mathematik 13, p. 354-356, 1969