UNIWERSYTET WROCŁAWSKI

Interpolacja Lagrange'a i Newtona

Pracownia 2.7

Artur Derechowski

10 grudnia 2018

1 TREŚĆ

Zrealizować algorytmy obliczania wartości wielomianu podanego za pomocą wzoru interpolacyjnego Lagrange'a oraz zamiany postaci Lagrange'a na postać Newtona. Porównać dokładności wyników uzyskanych za pomocą obu wzorów m.in. dla funkcji $f_1(x) = (1+25x^2)^{-1}$ i $f_2(x) = arctg(x)$.

1.1 POSTAĆ LAGRANGE'A

Wielomian interpolujący $n+1$ punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ można zapisać w postaci interpolacyjnej Lagrange'a, danej wzorem:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x), \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1.1}$$

Można sprawdzić, że ten wielomian przyjmuje wartości y_i w punktach x_i oraz, że jest stopnia $\leqslant n$ Jest to jedyny wielomian stopnia $\leqslant n$ interpolujący zadane punkty.

1.2 POSTAĆ NEWTONA

Ten sam wielomian może zostać zapisany w postaci Newtona jako:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \qquad a_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)} \tag{1.2}$$

gdzie współczynniki a_i są ilorazami różnicowymi, które można również definiować rekurencyjnie jako:

$$a_i = f[x_0, ..., x_i] \qquad f[x_0, ..., x_i] = \frac{f[x_0, ..., x_{i-1}] - f[x_1, ..., x_i]}{x_0 - x_i} \tag{1.3}$$

2 Zamiana postaci Lagrange'a na postać Newtona

Postać Lagrange'a podana we wzorze 1.1 może być również zapisana jako:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j), \qquad \sigma_i = \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \tag{2.1}$$

Mając zapisane σ_i w tej postaci można poprzez proste przekształcenie otrzymać również współczynniki w postaci Newtona.

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i \prod_{j=k+1}^{n} (x_i - x_j) \tag{2.2}$$

Wtedy, z równań 2.2 oraz 1.2 postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dana jest wzorem:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \tag{2.3}$$

W dalszej części pracy będą rozważane wzory na postać Newtona podane w równaniu 2.3 oraz na postać Lagrange'a w równaniu 2.1.

3 Badane funkcje

Wiadomo, że n-ty błąd interpolacji dany jest wzorem:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{3.1}$$

zależy on więc od pochodnej n-tego stopnia funkcji f. Dobierzemy więc odpowiednie funkcje, dla których ta pochodna może być dowolnie duża (przy rosnącym n), aby uwidocznić różnicę pomiędzy funkcją a wielomianem ją interpolującym.

3.1 Runge

Funkcja Rungego dana jest wzorem:

$$rg(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \tag{3.2}$$

Można pokazać, że jej kolejne pochodne są rozbieżne, na przykład 10-ta pochodna w pobliżu zera osiąga wartość ponad $2 * 10^1 3$.

3.2 ARCTAN(X)

Kolejne pochodne funkcji $arctan$ również gwałtownie rozbiegają w pobliżu zera, dla przykładu 10-ta pochodna osiąga wartość ponad $2 * 10^5$. Można zauważyć, że zasada działania jest podobna do tej dla funkcji Rungego, ponieważ

$$(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \tag{3.3}$$

czyli również ma $1+x^2$ w mianowniku i stały licznik, kolejne pochodne będą więc miały ograniczony mianownik w okolicy zera, licznik natomiast rośnie. Funkcja Rungego pokazuje jednak tę różnicę o wiele lepiej, dając o wiele mniej dokładne wyniki interpolacji.

3.3 SIN(X)

Dla porównania wzięta została również jedna funkcja, której pochodne nie rosną gwałtownie.

$$(sin(x))' = cos(x) \qquad (sin(x))'' = -sin(x) \tag{3.4}$$

kolejne pochodne zostaną więc ograniczone do ± 1 w okolicy zera.

4 POMIARY

4.1 LAGRANGE A NEWTON

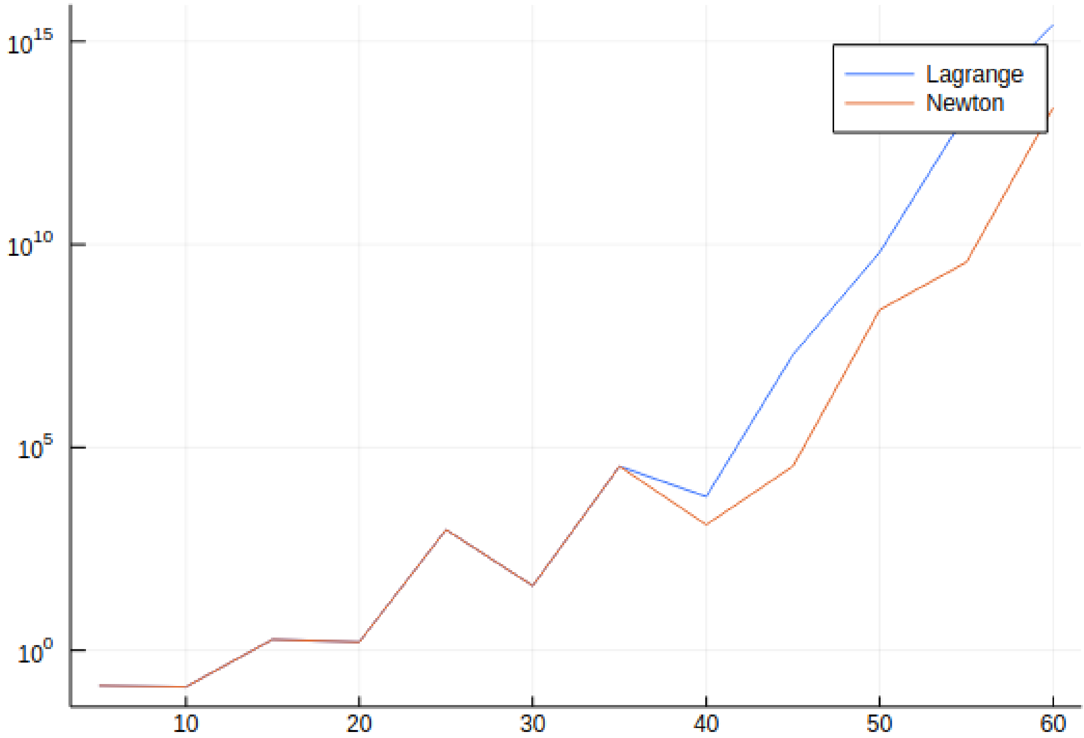
Poniżej przedstawiono pomiary dla funkcji Rungego. Pomiary przebiegają co 5 stopni wielomianu interpolacyjnego, na przedziale $(-1, 1)$ liczony jest błąd jako różnica w pomiędzy wielomianem interpolującym postaci a funkcją. Przedstawione jest to odpowiednio dla postaci Newtona i Lagrange. Różnica wyrażona jest jako całka oznaczona na przedziale $(-1, 1)$. Wykres 4.1 został przedstawiony w skali logarytmicznej, aby pokazać od którego miejsca widoczna jest różnica pomiędzy postaciami. Widać, że postać Newtona daje dokładniejsze wyniki od postaci Lagrange'a.

4.1.1 STOSUNEK BŁĘDU

Widząc, że postać Newtona jest dokładniejsza od postaci Lagrange'a można jeszcze zobaczyć jak bardzo się różnią. Wykres 4.2 przedstawia stosunek błędów interpolacji postaci Lagrange'a do Newtona. Widać, że już dla trochę większych stopni wielomianu interpolującego (między 40 a 60) postać Newtona może być kilkaset lub nawet kilka tysięcy razy dokładniejsza od postaci Lagrange'a. Wykres został przedstawiony również w skali logarytmicznej.

4.2 PORÓWNANIE FUNKCJI

Błąd dokładności zależy od stopnia wielomianu interpolującego, ale także od interpolowanej funkcji. Poniższa tabela przedstawia różnicę pomiędzy wielomianem interpolującym n-tego stopnia, a funkcjami: $sin(x)$, $arctan(x)$, $runge(x)$.



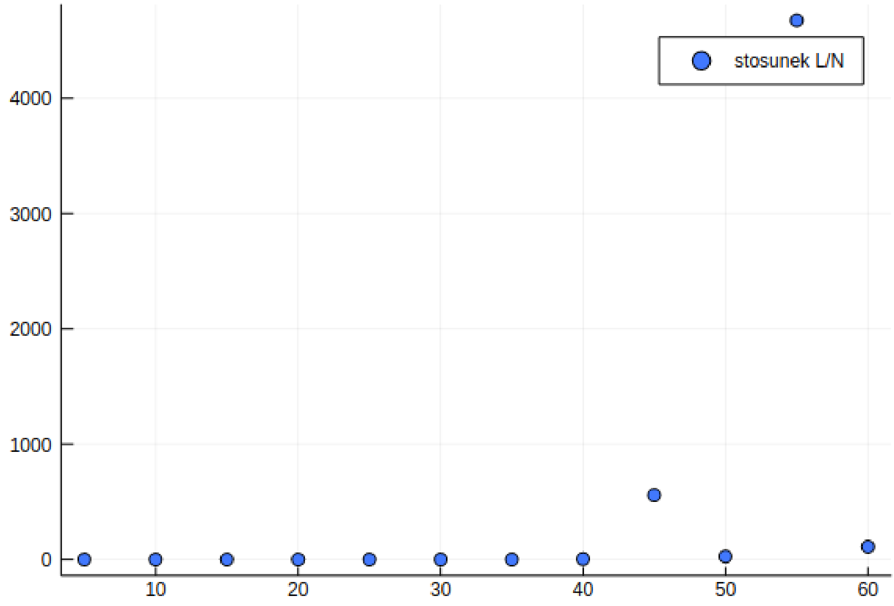
Rysunek 4.1: Porównanie dokładności postaci Newtona i Lagrange'a dla funkcji Rungego

n	runge	atan	sin
25	937.84	6.03e-5	5.18e-5
30	39.071	0.0511	0.0513
35	34061	55.011	53.414
40	1239.1	13009	12575
45	34169.05	150401.42	159703.12

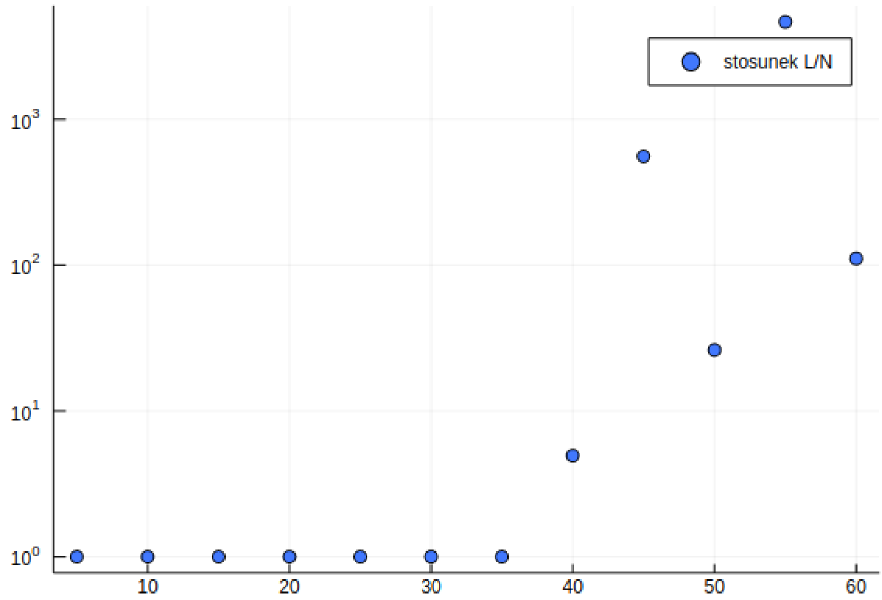
Widać, że funkcje, które wydawały się zachowywać podobnie ($rg(x)$ i $arctan(x)$), przyjmują różne wartości błędów, natomiast błędy interpolacji funkcji $sin(x)$ są bardzo bliskie błędom $arctan(x)$. W takim razie lepiej jest badać jedną ustaloną funkcję, gdyż o wiele większy wpływ na błąd interpolacji ma stopień interpolującego wielomianu, niż funkcja, którą chcemy interpolować.

5 Wnioski

Dla uzyskanych pomiarów postać interpolacyjna Newtona okazała się dokładniejsza od postaci Lagrange'a. Różnice nie są widoczne dla małych stopni interpolującego wielomianu (do ok. 30), ale potem znacznie rosną. Chcąc interpolować funkcję wielomianem w wielu punktach lepiej jest użyć do tego postaci Newtona.



Rysunek 4.2: Stosunek błędów postaci Lagrange'a do Newtona



Rysunek 4.3: Stosunek błędów postaci Lagrange'a do Newtona w skali logarytmicznej

LITERATURA

[1] Wilhelm Werner *Polynomial Interpolation: Lagrange versus Newton*, Mathematics of Computation, volume 43, number 167, July 1984