

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МАМИ»

Н.Т. Катанаев, Е.М. Паневина

Методические указания
по выполнению расчетно-графической работы
«Алгебра логики»
по дисциплине «Информатика»

Под редакцией зав. кафедрой
«Информационные технологии
в экономике»
д.т.н., проф. Н. Т. Катанаева

Москва 2012

Катанаев Николай Трофимович, профессор, доктор технических наук
Паневина Екатерина Михайловна, кандидат экономических наук

Методические указания
по курсу «Информатика»

В методические указания включен материал для выполнения РГР по разделу «Алгебра логики» курса «Информатика». Пособие включает теоретические положения математической логики, а также описания основных логических функций, с помощью которых формируется соответствующее задание, разбитое на отдельные варианты в зависимости от закрепленного за студентом индивидуального индекса.

Отчет по РГР должен включать титульный лист, представленный на стр. 3, а также все общепринятые разделы (введение, теоретическую часть, решение задачи, заключение, список литературы).

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МАМИ»

Кафедра
«Информационные технологии в экономике»

Расчетно-графическая работа
«Алгебра логики»

по дисциплине «Информатика»

Группа: _____

Студент: _____
(Ф.И.О) (подпись) (дата)

Оценка:

Преподаватель _____
(Ф.И.О) (подпись) (дата)

Москва 2012

Содержание

Введение	5
1 Элементарные булевы функции	6
1.1 Отрицание	6
1.2 Умножение (конъюнкция)	6
1.3 Сложение (дизъюнкция)	7
2 Сложные высказывания	8
2.1 Законы, теоремы, постулаты и тождества булевой алгебры	11
2.2 Способы представления сложных высказываний	13
2.3 Законы равносильности цепей	14
3 Взаимное соответствие булевых функций и логических схем	14
3.1 Логические элементы электрических систем	14
3.2 Минимизация состава логических элементов, реализующих логическую функцию	15
4 Задание на выполнение расчетной графической работы	18
5 Пример решения РГР «Алгебра логики»	19
Заключение	22
Литература	23

Введение

Логические основы ЭВМ строятся на принципах математической логики, которая не изменяет основного содержания логики как науки о формах и законах мышления, но позволяет более точно и верно решать задачи.

Здесь мы познакомимся лишь с одним разделом математической логики – алгеброй логики, которая в основных своих чертах была создана английским математиком Джорджем Булем.

На принципах математической логики строятся основные логические элементы, входящие в структуру современных компьютерных микропроцессорных систем и цифровых вычислительных машин, используемых практически во всей деятельности человека как управляющего звена в системе «Человек – среда – машина».

1. Элементарные булевы функции

Алгебра логики оперирует с двоичными переменными, т.е. с такими переменными, которые могут принимать только одно из двух возможных значений. Другими словами, наши высказывания, независимо от их содержания, рассматриваются только с точки зрения истинности: верно или неверно, истинно или ложно. Следует еще добавить, что объектом алгебры логики являются только утвердительные высказывания.

В высказываниях говорится только об одном факте, и потому они называются *простыми*. Если связываются два или более простых высказываний, то получаются *сложные высказывания*. Но как определить истинность сложного высказывания? В этом нам помогут три основных действия алгебраической логики: отрицание, сложение и умножение.

Для простоты рассмотрения отдельные простые высказывания будем обозначать прописными буквами. Если данное высказывание истинно, припишем ему значение 1, если ложно – значение 0. Например:

A – электрический ток протекает только в замкнутой цепи, т.е. $A = 1$

B – температура измеряется в граммах, т.е. $B = 0$.

Так как отрицание осуществимо только для одного высказывания, начнем с него.

1.1. Отрицание. Отрицание высказывания получим, если используем частицу НЕ или выражение «неверно, что». Например:

Болгария находится в северном полушарии – A.

Болгария не находится в северном полушарии – \bar{A} .

Или

Неверно, что Болгария находится в северном полушарии – \bar{A} .

Для обозначения отрицания над прописной буквой ставится черта (в этом случае читаем: A с чертой или не A).

Действие логического отрицания выражается следующей таблицей 1:

Таблица 1. Таблица истинности логического отрицания

A	\bar{A}
1	0
0	1

Или словами: отрицая верное высказывание, мы говорим ложь (неистину); отрицая неверное высказывание, мы говорим истину.

Написав над A две черты, мы получаем двойное отрицание $\bar{\bar{A}} = A$.

Или словами: неверно, что Болгария не находится в северном полушарии.

Это правило известно в логике как закон двойного отрицания.

Отрицание 1 равно 0, и наоборот:

$$\bar{1} = 0; \bar{0} = 1.$$

1.2. Умножение (конъюнкция). Умножение двух высказываний выражается с помощью союза И. результат умножения называется логическим произведением.

Важнейшим является вопрос об истинности логического произведения и о том, как она зависит от истинности отдельных высказываний. Независимо от содержания логическое произведение является истинным только в том случае, если истинны составные части произведения (отдельные высказывания). Например:

1. Погода безоблачная $A = 1$
2. Не идет дождь $B = 1$
3. Погода безоблачная И не идет дождь $AB = 1$

Таблицу, по которой определяют истинность логического произведения в зависимости от истинности отдельных высказываний, называют таблицей истинности (таблица 2). Она имеет следующий вид: Таблица 2. Таблица истинности логического произведения

A	B	AB
1	1	1
0	0	0
0	1	0
0	0	0

Такую же таблицу истинности мы получили бы, если бы написали сначала B, а потом A. Следовательно, $AB = BA$.

Помимо этого, $A+A=A$; $A \wedge 1=A$; $A \wedge 0=0$.

В истинности этих трех равенств (точнее, тождеств) мы убедимся, если будем задавать для A значения 0 или 1. Например, первое равенство можно выразить словами так: если логически умножить некоторое высказывание само на себя, то произведение будет иметь значение этого высказывания. И действительно, из таблицы истинности логического произведения можно увидеть, что

$$1 \wedge 1=1; 0 \wedge 0=0$$

Подобным образом, задавая для A значения 0 или 1, проверим и второе равенство:

$$0 \wedge 1=0; 1 \wedge 1=1$$

Для третьего равенства имеем

$$1 \wedge 0=0; 0 \wedge 0=0.$$

1.3.Сложение (дизъюнкция). Сложение двух высказываний выражается с помощью союза ИЛИ. Результат сложения называется логической суммой.

И в этом случае важнейшим является вопрос об истинности логической суммы и ее зависимости от истинности отдельных высказываний. Независимо от содержания высказываний для истинности логической суммы достаточно, чтобы хотя бы одно из составляющих высказываний было истинно.

Логическая сумма допускает одновременную истинность двух высказываний, так как ее истинность определяется следующей таблицей 3:

Таблица 3. Таблица истинности логической суммы

A	B	A+B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Таблица истинности не изменилась бы, если бы мы поменяли местами A и B, т.е.

$$A+B = B+A$$

Кроме того, $A+A = A$; $A+1 = 1$; $A+0 = A$.

Три приведенных выше равенства можно проверить, задавая для A значения 0 или 1.

Для первого можно написать $0+0 = 0$; $1+1 = 1$.

Или, словами: если суммировать логическое высказывание само с собой, то сумма имеет значение этого высказывания.

Аналогичным способом можно проверить второе тождество:

$$0+1 = 1; 1+1 = 1.$$

Для третьего тождества $0+0 = 0$; $1+0 = 1$.

2. Сложные высказывания

Сложные высказывания могут содержать более чем два простых высказывания и могут быть результатом более чем одного логического действия:

$$X = AB + \bar{C}; X = \overline{(A+B)C}.$$

Таблицы истинности сложных высказываний получают путем последовательного выполнения указанных действий. Например, для сложного высказывания

$$X = \overline{AB + \bar{C}}$$

составим следующую таблицу истинности 4:

Таблица 4. Таблица истинности сложного высказывания

A	B	C	AB	\bar{C}	$AB + \bar{C}$	$\overline{AB + \bar{C}}$
1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0

Некоторые сложные высказывания, несмотря на их различный вид, имеют одинаковые таблицы истинности при одних и тех же значениях

входящих в них простых высказываний. Такие сложные высказывания называют эквивалентными. Для того чтобы убедиться в эквивалентности двух сложных высказываний, необходимо составить таблицу эквивалентности. Например, для $X_1 = (A+B)(A+C)$; $X_2 = A+BC$ таблица истинности будет следующая:

Таблица 5. Таблица эквивалентности двух сложных высказываний

A	B	C	A+B	A+C	(A+B)(A+C)	BC	A+BC
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Шестой и восьмой столбцы в этой таблице одинаковы. Следовательно, $X_1 = X_2$ и $(A+B)(A+C) = A+BC$.

Имеются сложные высказывания, чья истинность постоянна и не зависит от истинности входящих в них простых высказываний. Такие высказывания называют тождественными. Таково высказывание

$$x = A\bar{A} = 0,$$

значение которого всегда равно 0. Например, неверно, что поезд движется И поезд не движется. В логике этот закон носит название закона противоречия.

Высказывание

$$x = A + \bar{A} = 1$$

также тождественно и имеет значение, равное 1. Например верно, что снег белый ИЛИ снег не белый. Это известный в логике закон исключительного третьего.

Для логической суммы справедливо равенство:

$$A+(B+C)=(A+B)+C.$$

Для логического произведения справедливы следующие равенства:

$$A(BC)=(AB)C; A(B+C) = AB+AC.$$

Особого внимания заслуживают два следующих сложных высказывания:

$$A+AB=A(1+B)=A \wedge 1=A; AB+A\bar{B}=A(B+\bar{B})=A \wedge 1=A.$$

Эти высказывания представляют собой запись закона двойственности, который гласит: если в формуле некоторого сложного высказывания заменить все знаки умножения знаками сложения и наоборот, получим высказывание, эквивалентное первоначальному. Например, если в высказывании

$$AB + A\bar{B} = A$$

заменить в левой части знаки, то получим

$$(A + B)(A + \overline{B}) = A.$$

Отрицания логической суммы и логического произведения подчиняются формуле де Моргана:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \wedge \overline{B}.$$

Например, неверно, что мы будем есть яблоки ИЛИ груши в то время, когда мы не будем есть яблоки И не будем есть груши. Аналогично

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Например, неверно, что завтра погода будет холодной ИЛИ не будет завтра дождливой.

Верность формулы де Моргана проверяется очень легко с помощью таблицы истинности:

Таблица 6. Таблица истинности формулы де Моргана

A	B	\overline{A}	\overline{B}	$A + B$	$\overline{A + B}$	$\overline{A} + \overline{B}$	AB	\overline{AB}	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Две приведенные выше формулы можно обобщить на случай более двух высказываний:

$$\overline{A + B + C + \dots + N} = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \dots \wedge \overline{N},$$

$$\overline{A \wedge B \wedge C \wedge \dots \wedge N} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \dots + \overline{N}.$$

Использование свойства сложения высказываний дает возможность преобразовывать эти высказывания в более простые.

Рассмотрим высказывание

$$x = A + AB.$$

Преобразуем его следующим образом:

$$x = A + AB; \quad x = A(1 + B)$$

$$\text{Но: } 1 + B = 1, \text{ тогда } x = A \wedge 1 = A$$

Следовательно:

$$A + AB = A.$$

Эта операция, связанная с исчезновением простого высказывания B, называется поглощением. Применяя закон двойственности, можем записать

$$A(A + B) = A.$$

Другая операция, связанная с упрощением логических формул, называется слиянием:

$$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A.$$

Это преобразование называют слиянием по B и здесь можно применить закон двойственности:

$$(A + B)(A + \overline{B}) = A.$$

2.1. Законы, теоремы, постулаты и тождества булевой алгебры

Ниже приведены рассмотренные нами зависимости булевой алгебры в виде, как они используются в специальной литературе.

Постулаты:

$$0 \wedge 0 = 0$$

$$0 \wedge 1 = 0$$

$$1 \wedge 0 = 0$$

$$1 \wedge 1 = 1$$

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

$$0 = \bar{1}$$

$$1 = \bar{0}$$

Законы:

$$\text{Закон идентичности } A = A$$

$$\text{Закон коммутативности } AB = BA$$

$$\text{Закон ассоциативности } A(BC) = ABC$$

$$\text{Закон идемпотентности } AA = A$$

$$\text{Закон дистрибутивности } A(B+C) = AB+AC$$

$$\text{Закон поглощения } A+AB = A$$

$$\text{Закон слияния } AB + A \wedge \bar{B} = A$$

$$\text{Законы де Моргана } \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

Теоремы:

$$A \wedge 0 = 0$$

$$0 \wedge A = 0$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$1 \wedge A = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \wedge \bar{A} = 0$$

$$A + 0 = A$$

$$0 + A = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$1 + A = 1$$

$$A + A = A$$

$$A + \bar{A} = 1$$

$$\overline{\bar{A}} = A$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$A+B = B+A$$

$$A+(B+C) = A+B+C$$

$$A+A = A$$

$$A+BC = (A+B)(A+C)$$

$$A(A+B) = A$$

$$(A+B)(A+\bar{B}) = A$$

$$\overline{A+B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

Некоторые тождества:

$$A(\bar{A} + B) = AB$$

$$A + \bar{A}B = A + B$$

$$(AB)(A+B) = AB$$

$$(\bar{A}B)(A+B) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B$$

$$\overline{\bar{A}B + \bar{A}B} = AB + \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$(A+B)(B+C)(A+C) = AB+BC+AC$$

$$(A+B)(\bar{A}+C) = AC + \bar{A}C$$

$$AC + AB + \bar{B}\bar{C} = AC + \bar{B}\bar{C}$$

$$(A+B)(B+C)(\bar{A}+C) = (A+B)(\bar{A}+C)$$

Операции И и ИЛИ по существу являются двоичными функциями, в которых число переменных как минимум равно двум. Можно доказать, что из n двоичных переменных можно составить 2^{2^n} функций. Если примем, что $n=2$, то получим, что существуют $2^{2^2} = 2^4 = 16$ функций двух двоичных

переменных. В таблице 7 приведены значения истинности этих функций, а под таблицей их описания:

Таблица 7. Таблица истинности функции двух переменных

x	y	F ₀	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₈	F ₉	F ₁₀	F ₁₁	F ₁₂	F ₁₃	F ₁₄	F ₁₅
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Символ операто ра			^	/		/		⊕	+	↓		-	⊂	-	⊃	↑	

$F_0 = 0$		Функция эквивалентна 0
$F_1 = xy$	И(AND)	x и y
$F_2 = x\bar{y}$	Запрет	x , но не y
$F_3 = x$		Функция эквивалентна x
$F_4 = \bar{x}y$	Запрет	y , но не x
$F_5 = y$		Функция эквивалентна y
$F_6 = \bar{x}y + x\bar{y} = x \oplus y$	Исключающее ИЛИ (XOR)	x или y , но не оба
$F_7 = x + y$	ИЛИ (OR)	x или y
$F_8 = \overline{(x + y)} = x \downarrow y$	ИЛИ-НЕ (NOR)	Инвертированное ИЛИ
$F_9 = \overline{xy} + xy = x \otimes y$	Эквивалентность	x эквивалентно y
$F_{10} = \bar{y}$	Инверсия	НЕ y
$F_{11} = x + \bar{y} = x \supset y$	Импликация	Если y , то x
$F_{12} = \bar{x}$	Инверсия	НЕ x
$F_{13} = \bar{x} + y = x \supset y$	Импликация	Если x , то y
$F_{14} = \overline{(xy)} = x \uparrow y$	И-НЕ (NAND)	Инвертированное И
$F_{15} = 1$		Функция эквивалентна 1.

В скобках приведены английские названия самых распространенных функций. Можно задать вопрос: могут ли двоичные функции выражаться одна через другую? Если взять для примера рассмотренные функции НЕ, И и ИЛИ, то ответ будет звучать так: все функции таблицы могут быть выражены с помощью двух из этих трех функций, если одна из них будет НЕ. Но функции F_8 и F_{14} точно соответствуют этому условию, следовательно, с помощью любой из них можно выразить все остальные.

2.2. Способы представления сложных высказываний

Когда сложное высказывание состоит из произведений простых высказываний (или их отрицаний), мы говорим, что сложное высказывание написано в *дизъюнктивной нормальной форме* (ДНФ). Например:

$$x = AB + A\bar{B}; x = ABC + A\bar{B}C + ABC; x = ABC + \bar{A}B + A\bar{B}C.$$

Третье сложное высказывание отличается от первого и второго тем, что в его втором слагаемом отсутствует C (или \bar{C}).

Если в каждом слагаемом (слагаемое – это произведение простых высказываний) участвуют все простые высказывания или их отрицания, мы говорим, что сложное высказывание написано в *совершенной дизъюнктивной нормальной форме* (СДНФ).

Для математической логики наибольший интерес представляют (главным образом, с точки зрения минимизации) сложные высказывания, которые написаны в СДНФ. Поэтому мы рассмотрим способ перехода от ДНФ к СДНФ. Например, если дано высказывание

$$x = \bar{A}B + A\bar{B}C,$$

То переход к СДНФ производится путем умножения первого слагаемого на $C + \bar{C} = 1$:

$$x = \bar{A}B(C + \bar{C}) + A\bar{B}C; x = \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C.$$

Когда сложное высказывание состоит из произведений сумм, в которые входят простые высказывания (или их отрицания), мы говорим, что оно написано в *конъюнктивной нормальной форме* (КНФ). Например:

$$x = (A + B)(\bar{B} + C); x = (A + \bar{B})(\bar{A} + B).$$

И здесь под *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ) понимают сложное высказывание в форме произведения, составленного из сумм, в каждую из которых входят все простые высказывания (или их отрицания). Например:

$$x = (A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + \bar{B} + C).$$

Переход от КНФ к (СКНФ) производится следующим образом. Пусть

$$x = (A + B)\bar{A}.$$

Умножим \bar{A} на $(B + \bar{B}) = 1$. Тогда:

$$x = (A + B)\bar{A}(B + \bar{B}) = (A + B)(\bar{A}B + \bar{A} \wedge \bar{B}).$$

На основании закона двойственности запишем

$$\bar{A}B + \bar{A} \wedge \bar{B} = (\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B}),$$

в результате получим

$$(A + B)\bar{A} = (A + B)(\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B}).$$

СКНФ и СДНФ используются для минимизации сложных логических высказываний. Минимизация представляет собой такое преобразование данной формулы, при котором новая форма содержит меньшее число букв.

В литературе описывается много разных задач, которые могут быть решены с помощью математической логики. В дальнейшем мы рассмотрим логические задачи, в которых будут использованы зависимости для упрощения формул.

2.3. Законы равносильности цепей

В процессе преобразований можно столкнуться с цепью логических функций, которые можно упростить с помощью законов равносильности цепей.

Если элемент x_1 включен последовательно с некоторой логической функцией:

$$y = x_1 \wedge f(x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \dots),$$

то все переменные x_1 должны быть равны 1, а $\overline{x_1} = 0$, т.е.

$$y = x_1 \wedge f(1, 0, x_2, \overline{x_2}, \dots).$$

Если элемент $\overline{x_1}$ включен параллельно с некоторой логической функцией:

$$y = x_1 + f(x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \dots)$$

то все переменные $\overline{x_1}$ должны быть равны 0, а $\overline{x_1} = 1$, т.е.

$$y = x_1 + f(0, 1, x_2, \overline{x_2}, \dots)$$

Если элемент $\overline{x_1}$ включен последовательно с некоторой логической функцией:

$$y = \overline{x_1} \wedge f(x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \dots),$$

то все переменные x_1 должны быть равны 0, а $\overline{x_1} = 1$, т.е.

$$y = \overline{x_1} \wedge f(0, 1, x_2, \overline{x_2}, \dots)$$

Если элемент x_1 включен параллельно с некоторой логической функцией:

$$y = \overline{x_1} + f(x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \dots)$$

то все переменные $\overline{x_1}$ должны быть равны 1, а $\overline{x_1} = 0$, т.е.

$$y = \overline{x_1} + f(1, 0, x_2, \overline{x_2}, \dots)$$

Модели, построенные на принципах математической логики, могут быть представлены в форме математических описаний алгебры логики, а также в форме логических схем.

3. Взаимное соответствие булевых функций и логических схем

3.1. Логические элементы электрических систем

Двоичные переменные, входящие в логические уравнения, можно представить двумя различными электрическими сигналами. Путем преобразований этих сигналов получают другие, тоже двоичные сигналы, которые соответствуют результатам определенных логических операций. Имея запись булевой функции

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

можно составить развернутую электрическую схему, которая будет преобразовывать логические сигналы: x_1, x_2, \dots, x_n согласно указанной функции.

Устройства, выполняющие в аппаратуре логические операции, называют логическими элементами. Логические элементы различаются между собой характером реализуемой функции, числом входов и выходов, а также другими признаками. Их работа оценивается только с точки зрения логики.

Входы и выходы логических элементов в зависимости от уровня сигнала, при котором воспринимается или вырабатывается определенное значение двоичной переменной, подразделяются на прямые и инверсные. На прямом входе (выходе) двоичная переменная имеет значение, принятое за 1. На инверсном входе (выходе) двоичная переменная имеет значение 1, когда уровень сигнала на этом входе (выходе) соответствует состоянию, принятому за 0.

На логические входы можно подавать постоянные логические уровни 1 и 0 (константа 1 и константа 0) согласно законам универсального и нулевого множества. Входы, равноценные в логическом отношении (которые можно менять местами без ущерба для выполняемой функции), допускают объединение по закону повторения; при этом они действуют как один вход.

На принципиальных схемах логические элементы изображают прямоугольником (основное поле), в верхней части которого указывают символ функции: & для И, 1 для ИЛИ. Входы показывают с левой стороны прямоугольника, выходы – с правой. Допускается другая ориентация прямоугольника, при которой входы располагают сверху, а выходы снизу. Инверсные входы и выходы выделяются индикатором логического отношения – небольшим кружком у вывода. Выводы питания и общий провод обычно не показывают. Это обстоятельство всегда следует иметь в виду при разборе прохождения токов на входах и выходах микросхем.

В таблице 8 представлены широко известные булевы функции двух переменных и их логические схемы.

3.2. Минимизация состава логических элементов, реализующих логическую функцию

Математические преобразования с помощью булевой алгебры дают возможность минимизировать состав логических элементов, реализующих некоторую заданную логическую функцию.

В виде примера преобразуем на основе законов булевой алгебры заданную функцию (ЗФ):

$$y = x_1 x_2 (x_3 + \overline{x_1} \overline{x_3}). \quad (ЗФ)$$

Раскроем скобки в ЗФ:

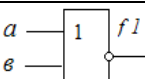
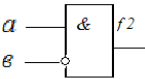
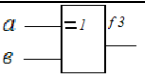
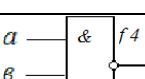
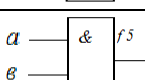
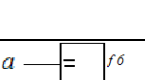
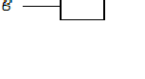
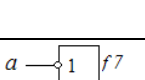
$$y = x_1 x_2 (x_3 + \overline{x_1} \overline{x_3}) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x_1} \overline{x_3}.$$

Так как $x_1 \overline{x_1} = 0$, то: $x_1 x_2 \overline{x_1} \overline{x_3} = 0$. Окончательно имеем минимизированную функцию (МФ):

$$y = x_1 x_2 x_3 \quad (МФ)$$

Равноценные схемы заданной и минимизированной логических функций представлены на рисунке 1 соответственно вариантами а) и в).

Таблица 8. Булевы функции двух переменных и их логические схемы

Название	Таблица истинности					Обозначение	Логическое содержание	Функция	Обозначение на схеме
	а	1	1	0	0				
Стрелка Пирса «ИЛИ-НЕ»	f_1	0	0	0	1	$a \downarrow b$	$f_1=1$, когда $a=0, b=0$	$f_1 = \overline{a+b}$	
Запрет «В»	f_2	0	1	0	0	$a \leftarrow b$	$f_2=1$, когда $a=1, b=0$	$f_2 = a\bar{b}$	
Сложение по mod 2 (исключающее «ИЛИ»)	f_3	0	1	1	0	$a \oplus b$	$f_3=1$, когда либо $a=1$, либо $b=1$	$f_3 = a\bar{b} + \bar{a}b$	
Штрих Шеффера «И-НЕ»	f_4	0	1	1	1	a / b	$f_4=0$, когда $a=1$ и $b=1$	$f_4 = \overline{ab}$	
Конъюнкция «И» Логич. умнож-е	f_5	0	0	0	0	$a \& b$ $a \wedge b$	$f_5=1$, когда $a=1$ и $b=1$	$f_5 = ab$	
Эквивалентность (равнозначность)	f_6	1	0	0	1	$a \sim b$	$f_6=1$, когда либо: $a=1$ и $b=1$ либо: $a=0$ и $b=0$	$f_6 = ab + \bar{a}\bar{b}$	
Импликация «В»	f_7	1	0	1	1	$a \rightarrow b$ $a \supset b$	$f_7=0$, когда $a=1$ и $b=0$	$f_7 = \bar{a} + b$	
Дизъюнкция «ИЛИ»	f_8	1	1	1	0	$a \vee b$ $a + b$	$f_8=0$, когда $a=0$ и $b=0$	$f_8 = a + b$	

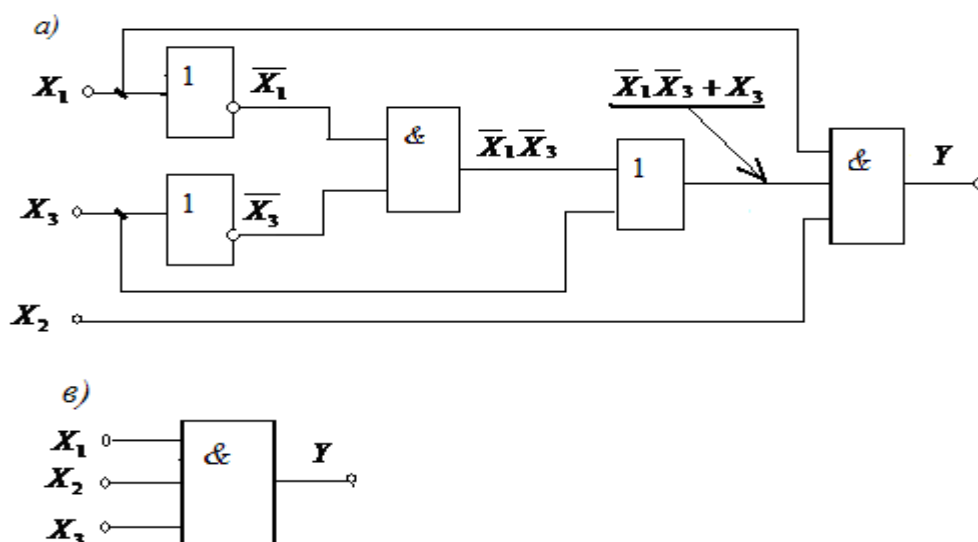


Рисунок 1- Схемы заданной (вариант а) и минимизированной (вариант в) логических функций.

Учитывая, что

$$y = x_1 x_2 = \overline{\overline{x_1 x_2}} = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}} ,$$

логические элементы, выполняющие логические операции, допускается изображать на схемах в двух логически эквивалентных формах. Имея изображение логического элемента, его эквивалентную форму можно получить, проделав следующие преобразования:

а) в основном поле изображения элемента символ операции & заменить на символ 1 либо наоборот;

б) все прямые входы заменить инверсными, а инверсные – прямыми;

в) все прямые выходы заменить инверсными, а инверсные – прямыми.

На рисунке 2 представлены графические преобразования некоторых элементов в двух видах логики. Изображения в одном горизонтальном ряду относятся к одному и тому же элементу.

Соглашение положительной логики имеет преимущественное применение.

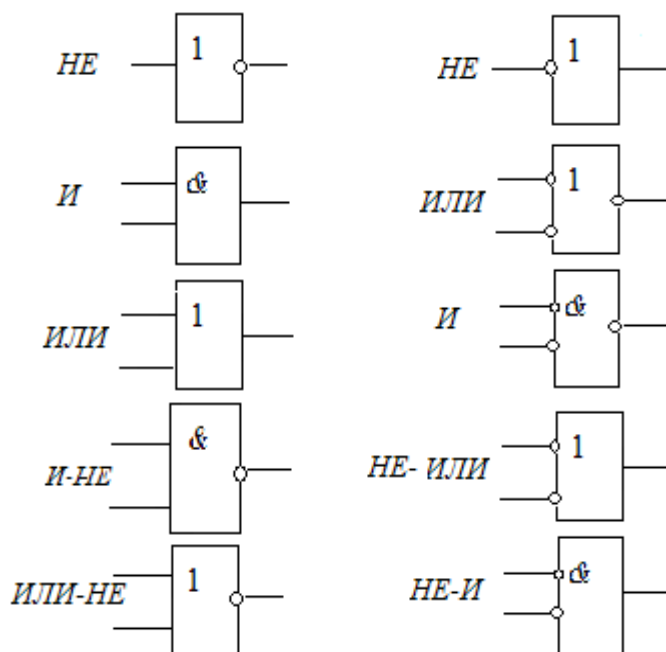


Рисунок 2 – Эквивалентные формы представления логических элементов: первый столбец – в положительной логике; второй столбец – в отрицательной логике.

4. Задание на выполнение расчетной графической работы

В качестве заданной принята представленная на рисунке 3 система, включающая 8 логических элементов, номера которых изображены на соответствующих сносках.

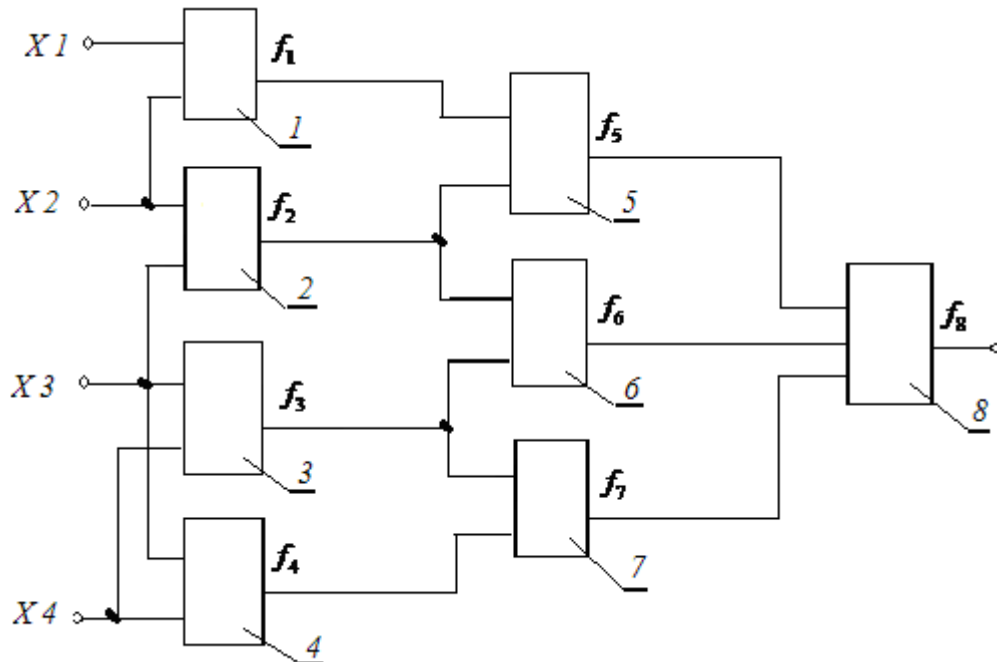


Рисунок 3 - Заданная система, включающая 8 логических элементов.

Логическая функция f_i , выполняемая каждым логическим элементом, выбирается из таблицы 9 в соответствии с заданным вариантом, номер которого приравнивается к номеру Ф.И.О. студента в списке группы. Например, студент Афанасьев включен в список группы под номером 1. Тогда в качестве первого логического элемента должен быть выбран из таблицы 8 элемент, выполняющий функцию f_1 , т.е.

$$f_1 = \overline{X_1 + X_2} \text{ - функция «ИЛИ-НЕ»}.$$

В качестве второго выбирается элемент, выполняющий функцию

$$f_2 = X_2 \overline{X_3} \text{ - функция запрет «В» и т.д.}$$

На рисунке 3 по сути представлена схема варианта № 1 (без расшифровки логических функций, выполняемых логическими элементами).

В таблице вариантов (таблица 9) в заголовке записаны номера 8 логических элементов, каждый из которых должен выполнять логическую функцию f_i в соответствии с заданным вариантом. Например, в варианте №5 логический элемент № 3 должен выполнять функцию:

$$f_6 = f_2 f_3 + \overline{f_2} \overline{f_3} \text{ - функция «эквивалентность»}.$$

Таким образом, в разных вариантах каждому логическому элементу присваивается возможность выполнения различных логических функций за исключением элемента №8, который во всех вариантах выполняет функцию «ИЛИ» (функция f_8).

Таблица 9. Варианты структур заданных систем с логическими элементами и закрепленными за ними логическими функциями f_i

№ Вар.	Номера логических элементов								№ Вар.	Номера логических элементов							
	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	19	f_4	f_5	f_6	f_7	f_3	f_1	f_2	f_8
2	f_7	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_8	20	f_2	f_4	f_5	f_6	f_7	f_3	f_1	f_8
3	f_6	f_7	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_8	21	f_1	f_2	f_4	f_5	f_6	f_7	f_3	f_8
4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_2	f_3	f_4	f_8	22	f_4	f_1	f_2	f_3	f_5	f_6	f_7	f_8
5	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_2	f_3	f_8	23	f_7	f_4	f_1	f_2	f_3	f_5	f_6	f_8
6	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_2	f_8	24	f_6	f_7	f_4	f_1	f_2	f_3	f_5	f_8
7	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_1	f_8	25	f_5	f_6	f_7	f_4	f_1	f_2	f_3	f_8
8	f_2	f_1	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	26	f_3	f_5	f_6	f_7	f_4	f_1	f_2	f_8
9	f_7	f_2	f_1	f_3	f_4	f_5	f_6	f_8	27	f_2	f_3	f_5	f_6	f_7	f_4	f_1	f_8
10	f_6	f_7	f_2	f_1	f_3	f_4	f_5	f_8	28	f_1	f_2	f_3	f_5	f_6	f_7	f_4	f_8
11	f_5	f_6	f_7	f_2	f_1	f_3	f_4	f_8	29	f_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_6	f_7	f_8
12	f_4	f_5	f_6	f_7	f_2	f_1	f_3	f_8	30	f_7	f_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_6	f_8
13	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_2	f_1	f_8	31	f_6	f_7	f_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_8
14	f_1	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_2	f_8	32	f_4	f_6	f_7	f_5	f_1	f_2	f_3	f_8
15	f_3	f_1	f_2	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	33	f_3	f_4	f_6	f_7	f_5	f_1	f_2	f_8
16	f_7	f_3	f_1	f_2	f_4	f_5	f_6	f_8	34	f_2	f_3	f_4	f_6	f_7	f_5	f_1	f_8
17	f_6	f_7	f_3	f_1	f_2	f_4	f_5	f_8	35	f_1	f_2	f_3	f_4	f_6	f_7	f_5	f_8
18	f_5	f_6	f_7	f_3	f_1	f_2	f_4	f_8									

Таблица вариантов (таблица 9) расписана на группу не более 35 студентов. Однако она легко тиражируется на практически любое количество групп. Для этого достаточно поменять в таблице 9 места расположения номеров логических элементов. Например, логический элемент №2 можно расположить в шапке первого столбца на месте элемента №1, а последний переместить в шапку второго столбца, т.е. первый и второй элементы поменять местами. В этом случае получим новую таблицу вариантов, в которой меняется только шапка номеров логических элементов. При этом матрица логических функций f_i в таблице 9 остается без изменения.

5. Пример решения РГР «Алгебра логики»

Пусть задан вариант V_j (таблица 10), содержащий следующие логические элементы и логические функции, закрепленные за этими элементами:

Таблица 10. Заданный вариант РГР

№ Вар.	Номера логических элементов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
...								
...								
V_j	f_1	f_2	f_4	f_6	f_3	f_8	f_7	f_5
...								

В исходной схеме системы логических элементов (рисунок 3) в соответствии с вариантом V_j (таблица 10) за логическими элементами закреплены соответствующие логические функции, взятые из таблицы 8. В итоге получена структурная схема логической системы, представленная на рисунке 4.

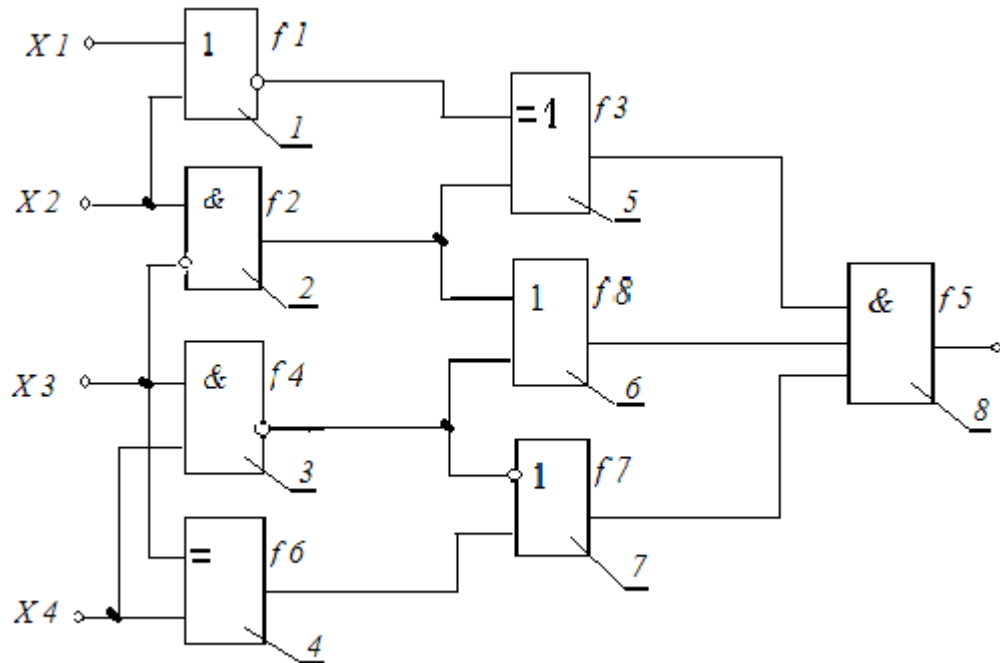


Рисунок 4 - Структурная схема заданной по варианту V_j логической системы.

Математическая модель заданной системы представлена логическими выражениями, взятыми из таблицы 8 и записанными для каждого из логических элементов:

$$f_1 = \overline{X_1 + X_2} \quad (1)$$

$$f_2 = X_2 \overline{X_3} \quad (2)$$

$$f_4 = \overline{X_3 X_4} \quad (3)$$

$$f_6 = X_3 X_4 + \overline{X_3} \overline{X_4} \quad (4)$$

$$f_3 = f_1 f_2 + \overline{f_1} f_2 \quad (5)$$

$$f_8 = f_2 + f_4 \quad (6)$$

$$f_7 = \overline{f_4} + f_6 \quad (7)$$

$$f_5 = f_3 f_8 f_7 \quad (8)$$

Целью дальнейших логических преобразований заданной системы является получение для данного варианта задания зависимости выходной логической функции f_5 от входных логических переменных $X_i; \overline{X_j}$, т.е.

$$f_5 = f(X_i; \overline{X_j}),$$

причем, полученная зависимость должна содержать минимальное количество входных логических переменных. Промежуточные логические переменные $f_1; f_2; f_3; f_4$ и f_6 в процессе преобразований должны быть исключены. Для чего осуществим следующие логические преобразования:

$$f_3 = f_1 \bar{f}_2 + \bar{f}_1 f_2 = (\bar{X}_1 + X_2)(\bar{X}_2 \bar{X}_3) + (\bar{X}_1 + X_2)X_2 X_3 = F_1 + F_2 \quad (9)$$

$$F_1 = (\bar{X}_1 + X_2)(\bar{X}_2 \bar{X}_3) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 (\bar{X}_2 + \bar{X}_3) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 (1 + X_3) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \quad (10)$$

$$F_2 = (\bar{X}_1 + X_2)X_2 \bar{X}_3 = X_2 \bar{X}_3 (1 + X_1) = X_2 \bar{X}_3 \quad (11)$$

$$f_3 = F_1 + F_2 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 + X_2 \bar{X}_3 \quad (12)$$

$$f_8 = f_2 + f_4 = X_2 \bar{X}_3 + \bar{X}_3 X_4 = X_2 \bar{X}_3 + \bar{X}_3 + \bar{X}_4 = \bar{X}_3 (1 + X_2) + \bar{X}_4 = \bar{X}_3 + \bar{X}_4 \quad (13)$$

$$f_8 = \bar{X}_3 + \bar{X}_4 \quad (14)$$

$$f_7 = \bar{f}_4 + f_6 = \bar{X}_3 \bar{X}_4 + X_3 X_4 + \bar{X}_3 \bar{X}_4 = X_3 X_4 + \bar{X}_3 \bar{X}_4 \quad (15)$$

$$f_7 = X_3 X_4 + \bar{X}_3 \bar{X}_4 \quad (16)$$

$$f_5 = f_3 f_8 f_7 = (\bar{X}_1 \bar{X}_2 + X_2 \bar{X}_3)(\bar{X}_3 + \bar{X}_4)(X_3 X_4 + \bar{X}_3 \bar{X}_4) = F_3 F_4 \quad (17)$$

$$F_3 = (\bar{X}_1 \bar{X}_2 + X_2 \bar{X}_3) \quad (18)$$

$$F_4 = (\bar{X}_3 + \bar{X}_4)(X_3 X_4 + \bar{X}_3 \bar{X}_4) = X_3 \bar{X}_3 X_4 + \bar{X}_3 \bar{X}_3 \bar{X}_4 + X_4 \bar{X}_4 X_3 + \bar{X}_4 \bar{X}_4 X_3 = \bar{X}_3 \bar{X}_4 \quad (19)$$

$$F_4 = \bar{X}_3 \bar{X}_4 \quad (20)$$

$$f_5 = F_3 F_4 = (\bar{X}_1 \bar{X}_2 + X_2 \bar{X}_3)(\bar{X}_3 \bar{X}_4) = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4 + X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_3 \bar{X}_4 = \bar{X}_3 \bar{X}_4 (\bar{X}_1 \bar{X}_2 + X_2) = \bar{X}_3 \bar{X}_4 (\bar{X}_1 + X_2) \quad (21)$$

$$f_5 = \bar{X}_3 \bar{X}_4 (\bar{X}_1 + X_2) \quad (22)$$

Таким образом, полученная математическая модель (22) эквивалентна математическому описанию логической системы, записанной в виде системы логических выражений (1) - (8). Процедура упрощения модели, основанная на использовании законов алгебры логики, позволила сократить количество логических преобразований до минимума. Теперь на основе полученной логической функции (22) можно построить электронную модель логической системы, эквивалентную заданной системе, изображенной на рисунке 4. Для чего представим (22) в виде трех логических выражений

$$f_5 = F = F_5 F_6 \quad (23)$$

$$F_5 = \bar{X}_3 \bar{X}_4 \quad (24)$$

$$F_6 = (X_2 + \bar{X}_1) \quad (25)$$

Для непосредственной реализации логической функции (24) в таблице 8 нет логического элемента «НЕ-И», однако можно воспользоваться эквивалентной формой представления логических элементов (рисунок 2), в соответствии с которой этому элементу эквивалентен элемент «ИЛИ-НЕ» (логическая функция f_1 в таблице 8), что подтверждается равенством

$$\overline{X_3 X_4} = \overline{X_3} + \overline{X_4} \quad (26)$$

Логическая функция (25) реализуется элементом «импликация» (функция f_7 в таблице 8).

Теперь эквивалентная логическая система, построенная на основе модели (22) (или на основе трех выражений (23), (24) и (25), примет вид, представленный на рисунке 5.

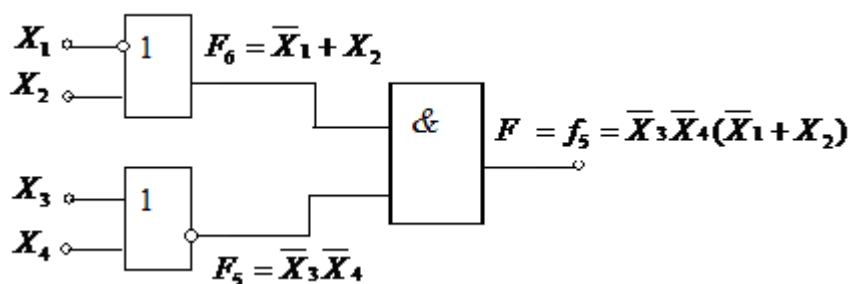


Рисунок 5 - Эквивалентная логическая система, построенная на основе модели (22) и полученная путем преобразования заданной модели (1) – (8).

Заключение

Таким образом, сравнивая между собой заданную электронную логическую систему (рисунок 4) с преобразованной системой (рисунок 5), можно констатировать, что в результате проведенных преобразований заданной модели (1) – (8) удалось сократить количество логических элементов с восьми до трех, сохранив при этом эквивалентность логических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Информатика. Базовый курс: учебное пособие для вузов (МО) / под ред. С.В. Симоновича. – 2 – е изд. – СПб и др. – Питер, 2010. – 639 с.
2. Информатика. Базовый курс: учебное пособие для вузов / под ред. С.В. Симоновича. – 2 – е изд. – СПб: Питер, 2005. – 639 с.
3. Информатика для юристов и экономистов / под ред. С.В. Симоновича. – СПб: Питер, 2007. – 688 с.

Учебное издание

Катанаев Николай Трофимович,
Паневина Екатерина Михайловна

Методическое пособие по расчетно-графической работе «Алгебра логики» по дисциплине «Информатика» для студентов экономических специальностей, обучающихся по направлению 080500.62 «Менеджмент»; по специальности 080507.65 «Менеджмент организации»; по специальности 080111.65 «Маркетинг».

Под редакцией Катанаева Николая Трофимовича
Оригинал-макет подготовлен редакционно-издательским отделом
МГМУ «МАМИ»

По тематическому плану внутривузовских изданий учебной
литературы
на 2012 г.

Подписано в печать . Формат 60х90 1/16. Бумага 80 г/м²
Гарнитура «Таймс». Ризография. Усл. Печ. Л. 1.5.
Тираж 100 экз. Заказ №

МГМУ «МАМИ»
107023, г. Москва, Б. Семеновская ул. 38.