МдАД: Математический анализ **Зима 2019**

Занятие 2: 29 Января

Преподаватель: Антон Савостьянов *Асситент: Даяна Мухаметшина*

Контакты: *Антон Савостьянов, почта:* a.s.savostyanov@gmail.com, *telegram:* @mryodo
Даяна Мухаметшина, почта: dayanamuha@gmail.com, *telegram:* @anniesss1

Правила игры: *Домашние задания следует присылать в читаемом виде не позднее чем через две недели (после выдачи задания) в системе Classroot. В выполнении домашнего задания ценен любой прогресс*

2.1 О-большое и о-малое

Зачастую в практических задачах бывает полезно не столько оценить поведение функции в точке (например, рассмотреть ее предел), сколько оценить ее поведение относительно некой другой функции. Более того, в задачах, связанных с алгоритмической обработкой данных, функция сложности или времени работы алгоритма плотно привязана к получаемым на вход неизвестным данным; поэтому вместо указания точного времени выполнения той или иной процедуры указывается только ее поведение относительно набора известных функций.

Определение 2.1. Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в окрестности точки a (a вполне может быть и бесконечным). Говорят, что функция f является *O-большим* от функции g в окрестности точки a, если найдется такая константа $C > 0$, что для любого x из данной окрестности точки a:

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

Другими словами, в окрестности точки a отношение $|f|/|g|$ ограничено (если, конечно, задано: для этого требуется, чтобы функция g не принимала 0 в какой-нибудь окрестности точки a. Ясно, что такого требования нет в первой формулировке определения, поэтому данным отношением пользоваться следует аккуратно).
Обозначение: $f(x) = \underline{O}(g(x)), \quad x \to a.$

Определение 2.2. Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в окрестности точки a (a вполне может быть и бесконечным). Говорят, что функция f является *о-малым* от функции g в окрестности точки a, если для любой константы $C > 0$ найдется такая окрестность точки a, что для любого x из нее:

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

Перепишем формулировку при помощи кванторов:

$$\forall C > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq C|g(x)| \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C$$

Несложно увидеть, что написанное здесь дословно совпадает с определением предела функции:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Говорят также, что *функция f обладает более высоким порядком малости по сравнению с функцией g.*
Обозначение: $f(x) = \overline{o}(g(x)), \quad x \to a.$

Упражнение 1. Качественно опишите, что значат для функции $f(x)$ следующие равенства:

$$\text{a) } f(x) = \underline{O}(x),\ x \to a \qquad \text{b) } f(x) = \overline{o}(x),\ x \to a$$

Упражнение 2. Как вы думаете, что означают следующие равенства:

$$\text{a) } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \overline{o}(x^2),\ x \to 0 \qquad \text{b) } n! = \underline{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right),\ n \to +\infty$$

Определение 2.3. Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в окрестности точки a (a вполне может быть и бесконечным). Говорят, что функция f *эквивалентна* функции g в окрестности точки a, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x), \quad x \to a.$

Упражнение 3. Проверьте, верны ли следующие равенства (если да, докажите их, если нет, опровергните):

$$\text{a) } \sin^2 x = \overline{o}(x),\ x \to 0 \qquad \text{b) } \sin x = \overline{o}(x),\ x \to 0 \qquad \text{c) } \sin x = \overline{o}(x),\ x \to \pm\infty$$
$$\text{d) } e^{20} x^n = \overline{o}(x^{n+1}),\ x \to +\infty \qquad \text{e) } e^{20} x^n \neq \overline{o}(x^{n-1}),\ x \to 0$$
$$\text{f) } (x-1)^2 \left(5 + \sin \frac{1}{x-1}\right) = \underline{O}((x-1)^2 + (x-1)^3),\ x \to 1$$

Упражнение 4. Считая знаки равенства знаками принадлежности к классу (то есть $f(x) = \overline{o}(x)$ должно читать как «функция f принадлежит классу функций, которые бесконечно малы по сравнению с x»), докажите следующие равенства:

$$\text{a) } \overline{o}(x^n) + \overline{o}(x^m) = \overline{o}(x^n),\ x \to 0,\ n < m \qquad \text{b) } \underline{O}(x^n) + \underline{O}(x^m) = \underline{O}(x^m),\ x \to +\infty,\ n < m$$
$$\text{c) } \overline{o}(x^m) + \underline{O}(x^n) = \underline{O}(x^n),\ x \to 0,\ n < m \qquad \text{d) } x^k \cdot \overline{o}(x^n) = \overline{o}(x^{n+k},\ x \to 0$$

2.2 Непрерывность и дифференцируемость

Определение 2.4. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

то есть предел функции в точке равен ее значению. Функция называется *непрерывной на множестве* (например, на отрезке), если она непрерывна в каждой точке данного множества.

Упражнение 5. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то выполняется:

$$f(x) = f(a) + \overline{o}(x - a), \ x \to a$$

Теорема 2.5 (о промежуточном значении, Вейерштрасса-2)**.** *Если непрерывная на отрезке $f(x)$ функция принимает значения A и B, то она принимает все значения между ними.*

Замечание 2.6. Одним из применений данной теоремы является широко известный метод поиска корней серединным делением, а также алгоритмы бинарного поиска в программировании.

Определение 2.7. Пусть дана функция $f(x)$, выбрана точка $x_0 = a$. Приращением аргумента Δx будем называть разность между выбранной точкой a и произвольной точкой x: $\Delta x = x - a$; соответствующим приращением функции будем называть разность между значениями функции в выбранной и произвольной точках: $\Delta f = f(x) - f(a)$; несложно сообразить, что отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ есть тангенс угла наклона прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(x, f(x))$ (такую прямую называют секущей). Предельное значение такого отношения носит название производной $\dfrac{df}{dx} = f'(a)$ в данной точке:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Часто рассматривают производную не в исключительной точке, а в каждой, то есть смотрят на $f'(x)$ — функцию, которая для каждого x возвращает значение производной в данной точке. Такую функцию тоже называют производной.

Определение 2.8. Функцию, называют *дифференцируемой*, если ее приращение в точке $x_0 = a$ хорошо аппроксимируется линейной функцией:

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = A \cdot \Delta x + \overline{o}(\Delta x),$$

где Δx — есть приращение аргумента в данной точке, а A — некое вещественное число. Несложно показать, что $A = f'(a)$.

Величина $df = A \cdot \Delta x = f'(a) \cdot \Delta x = f'(a)dx$ есть линейная составляющая приращения функции и называется *дифференциалом* функции.

Теорема 2.9 (критерий дифференцируемости). *Для функций одной переменной и только для них наличие производной в точке эквивалентно дифференцируемости в ней; более того, наилучшее линейное приближение функции реализуется на касательной в данной точке.*

С геометрической точки зрения дифференцируемость означает две вещи:

- отсутствие «углов»: возможность проведения касательной в данной точке;
- хорошую приближаемость прямой в данной точке.

Упражнение 6. Пользуясь определением, посчитайте производные следующих функций в произвольной точке a:

$$a)\ f(x) = 2018 \qquad b)\ f(x) = x^2 \qquad c)\ f(x) = x^n \qquad d)\ f(x) = \sin x$$

Замечание 2.10. Для взятия производной существует набор правил (в том числе и арифметических):

1. если $f(x) \equiv c$, то $f' = 0$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$
3. $(e^x) = e^x$
4. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
5. (правило Лейбница) $(fg)' = f'g + g'f$
6. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
7. (производная сложной функции) $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Упражнение 7. Вычислите производные данных функций по правилам:

$$a)\ x^4 + 5x - 6 \qquad b)\ f(x) = \sqrt{2x} + 3e^{-x} \qquad c)\ f(x) = \frac{x^2}{1+2x} \qquad d)\ f(x) = \ln x$$

$$e)\ f(x) = \sin\cos x \qquad f)\ f(x) = x^x$$

Определение 2.11. Касательной к графику функции $f(x)$ в точке a называется прямая, наиболее похожая на $f(x)$ в окрестности данной точки, проходящая через точку $(a, f(a))$. Она же есть предельное положение секущих, описанных нами выше. Ее уравнение может быть записано как:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Упражнение 8. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ в точке $x = 1$.

2.3 Построение графиков функций

Существует общая процедура исследования функции для построения графика. Следует понимать, что получающаяся картинка не является точным графиком функции; на самом деле, она просто отображает некоторые найденные качественные характеристики функции, которые достаточно точно определяют нашу кривую.

Процедура исследования может быть описана следующим образом:

1. *Найти область определения функции и нули (такие x_0, что $f(x_0) = 0$).*
   Часто это бывает сделать сложно и/или невозможно, поэтому ценно хотя представление о количестве нулей.

2. *Вычислить производную данной функции $f'(x)$.*

3. *Установить промежутки монотонности нашей функции: интервалы возрастания и убывания.*

   Определение 2.12. Отрезок или интервал (говорят, сегмент) I из области определения функции $f(x)$ называется промежутком возрастания (убывания), если для любых двух a и $b \in I$ выполняется $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$), если $a < b$. Аналогично можно определить нестрогую монотонность.

   Замечание 2.13. Правило для определения промежутков возрастания по производной:

   (a) если $f'(x) > 0$ на данном интервале, то функция $f(x)$ монотонно возрастает;

   (b) если $f'(x) < 0$ на данном интервале, то функция $f(x)$ монотонно убывает.

4. *Определить локальные экстремумы (точки минимума и максимума).*

   Определение 2.14. Точкой *глобального максимума (минимума)* называется такая точка a, что для любого x из области определения $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$), а само значение $f(a)$ называется *глобальным максимумом (минимумом)*.

   Определение 2.15. Точкой *локального максимума (минимума)* называется такая точка a, что для любого x из некоторой (довольно узкой) окрестности точки a верно, что $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$), а само значение $f(a)$ называется *локальным максимумом (минимумом)*. Локальный минимум ил максимум называются также локальными экстремумами.

   Определение 2.16. Точка a называет *стационарной* для функции $f(x)$, если $f'(a) = 0$.

Замечание 2.17 (необходимое условие экстремума)**.** Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке a и дифференцируема в ней, то a является стационарной точкой функции f.
Обратное неверно!

Упражнение 9. Придумайте функцию, у которой:

(a) достигается экстремум в точке, в которой она не дифференцируема;

(b) стационарная точка не является экстремумом.

Замечание 2.18 (достаточное условие экстремума)**.** Если точка a стационарная для функции $f(x)$ (то есть $f'(a) = 0$) и в точке a меняет свой характер монотонности, то точка a — локальный экстремум, причем:

(a) если $f'(x)$ при переходе через точку a меняет знак с "минуса"на "плюс то a — локальный минимум;

(b) если $f'(x)$ при переходе через точку a меняет знак с "плюса"на "минус то a — локальный максимум.

Упражнение 10. Проверьте примеры из предыдущего упражнения с помощью данного условия. Все ли верно?

Замечание 2.19 (Достаточное условие экстремума в терминах старшей производной)**.** Если точка a стационарная для функции $f(x)$ (то есть $f'(a) = 0$) и дважды дифференцируема в ней (то есть можно взять производную от производной), причем $f''(a) \neq 0$, то:

(a) если $f''(a) > 0$, то a — локальный минимум;

(b) если $f''(a) < 0$, то a — локальный максимум.

5. *Установить выпуклость функции и точки перегиба.*

Определение 2.20. *Хордой* называется отрезок, соединяющий две точки на графике функции.

Определение 2.21. Функция называется *выпуклой вверх* на отрезке $[a; b]$, если лежит выше любой хорды на данном отрезке. Аналогично определяется выпуклость вниз (вогнутость).

Замечание 2.22. Если у функции существует вторая производная на области исследования, то:

(a) если $f''(x) > 0$ на данном интервале, то функция $f(x)$ выпукла вниз (вогнута);

(b) если $f''(x) < 0$ на данном интервале, то функция $f(x)$ выпукла вверх (выпукла).

Определение 2.23. *Точкой перегиба* называется такая точка a, что при переходе через нее меняется характер выпуклости.

Замечание 2.24 (необходимое условие точки перегиба)**.** Если функция $f(x)$ имеет перегиб в точке a и дважды дифференцируема в ней, то $f''(a) = 0$.
Обратное неверно!

Замечание 2.25 (достаточное условие точки перегиба)**.** Если первая производная $f'(x)$ непрерывна в окрестности точки a, вторая производная $f''(a) = 0$ или не существует и вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку a, то точка a является точкой перегиба.

6. *Найти асимптоты графика функции.*

Определение 2.26. *Асимптотой* называется прямая, к которой стремится функция при приближении одной из координат графика к бесконечности. Выделяют два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

Определение 2.27. *Вертикальной асимптотой* называется прямая $x = a < \infty$, если выполняется хотя бы одно из следующих равенств:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$$

Замечание 2.28. Если функция непрерывна на всем множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, то она не может иметь вертикальных асимптот!

Определение 2.29. *Наклонной асимптотой* называется прямая вида $y = kx + b$, к которой стремится функция при приближении x к бесконечности. Числа k и b могут быть вычислены следующим образом:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - k\cdot x$$

Нужно отметить, что асимптоты на разных бесконечностях совпадать не обязаны, равно как и присутствовать вообще.

Упражнение 11. Пользуясь описанной выше процедурой, постройте насколько возможно графики следующих функций, указав:

1. промежутки монотонности
2. локальные экстремумы
3. точки перегиба
4. асимптоты

a) $f(x) = xe^{2x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$ d) $f(x) = \ln\sin x$

2.4 Интегралы и площади

К сожалению, если вдаваться в подробности интегрального исчисления, то мы неизбежно увязнем в огромном числе формальностей. С точки зрения математики, введение таких формальностей позволило существенно продвинуться вперед в прикладном смысле, однако в нашем случае такие применения не столь важны.

Определение 2.30. Первообразной $F(x)$ для функции $f(x)$ называется функция, для которой: $F'(x) = f(x)$. Несложно заметить, что из одной первообразной легко получить другую, добавлением константы: $(G(x))' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$.

Теорема 2.31. *Если одна из первообразных функции $f(x)$ имеет вид $F(x)$, то все первообразные данной функции имеют вид $F(x) + C$ (то есть нет других первообразных, кроме как полученных вертикальным сдвигом).*

Несложно понять, что речь идет об обратном действии к взятию производной; такое действие называется интегрированием, а множество всех первообразных — неопределенным интегралом. Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Упражнение 12. При помощи интегрирования укажите такую функцию $f(x)$, что:

(a) $f'(x) = \sin x$

(b) $f'(x) = \sin x + \cos x$

(c) $f'(x) = x^2$

(d) $f'(x) = f(x)$

(e) $f'(x) = 2f(x)$

(f) $f''(x) = x^2$

(g) $f''(x) = -f(x)$

(h) $f''(x) = -f(x) + 1$

(i) $x^2 f'' + xf' + f = 0$

Теорема 2.32 (Замена переменной)**.** *Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$; пусть также нашлась биективная замена $x = g(t)$. Тогда эквивалентный интеграл будет $\int f(x)dx = \int f(g(t))dg(t) = \int f(g(t))g'(t)dt$. Такое рассуждение верно и в обратную сторону.*

Например, рассмотрим интеграл $\int \frac{xdx}{1+x^2}$:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Теорема 2.33 (Интегрирование по частям)**.** *Пусть дан интеграл $\int u(x)v'(x)dx$. Тогда можно воспользоваться следующим преобразованием: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$. Такой метод удобно применять, когда под интегралом стоит сложная функция с простой производной.*

Например, рассмотрим интеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot 1dx = \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Теперь обратимся к определенному интегралу. Фактически, определенным интегралом называется площадь под графиком функции на заданном отрезке; при этом площадь ориентирована: если функция отрицательна, то площадь идет с минусом, а если положительна, то с плюсом.

Теорема 2.34 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть требуется вычислить определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.*

Упражнение 13. Вычислите следующие определенные интегралы:

(a) $\int_1^4 (x^2+2x+3)dx$

(b) $\int_1^3 \frac{2}{x^4}dx$

(c) $\int_0^1 10^x dx$

(d) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$

(e) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

(f) $\int_0^{+\infty} e^x \cos x dx$

(g) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(h) $\int_0^1 (x-1)^2 5dx$

(i) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$

2.5 Числовые ряды

Определение 2.35. *Числовым рядом* называется формальное выражение вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где все a_i — некие действительные числа.

Сумму первых n чисел называют *частичной суммой ряда*:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Суммой ряда называют предел последовательности частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]$$

В зависимости от того существует ли этот предел или нет, ряд называют *сходящимся и расходящимся* соответственно.

Упражнение 14. Вычислите частичные суммы рядов:

(a) $1+2+3+4+\dots$

(b) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$

(c) $\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\dots$

(d) $1-1+1-1+1-1+\dots$

Часто оказывается так, что вычислить сумму ряда гораздо сложнее, чем установить его сходимость. Поэтому используют набор признаков для качественного анализа ряда на предмет наличия суммы.

Замечание 2.36 (Необходимое свойство сходимости)**.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.

Замечание 2.37 (Признак сравнения)**.** Пусть есть два ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, состоящие только из положительных членов, причем, начиная с некоторого n, $a_n < b_n$. Тогда:

(a) если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \to$, то и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \to$;

(b) если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \nrightarrow$, то и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \nrightarrow$;

Упражнение 15. Используя ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$, покажите сходимость такого ряда:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$$

Как Вы думаете, к чему сходится такой ряд?