Безусловный экстремум

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ - непустое множество. $x^0 \in E, f : E \to \mathbb{R}$ Будем говорить, что x^0 - точка локального экстремума функции f на множестве E, если $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in U_{\delta_0}(x^0) \cap E$

$$f(x) \geq f(x^0) \ (x^0\text{- точка локального минимума } f \text{ на } E)$$

$$f(x) \leq f(x^0) \ (x^0 \text{ - точка локального максимума } f \text{ на } E)$$

Замечание: в случае строгих неравенств говорят о точках строгого локального минимума/максимума.

Далее E - непустое открытое множество

Необходимые условия экстремума

Теорема: Пусть $E \neq \emptyset, E \subset \mathbb{R}^m$ - открытое. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ Тогда, если x^0 - точка локального экстремума функции f на E, то

$$\text{если } \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0), \text{ то } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Док-во: Так как E - открытое непустое множество $\implies \exists \delta > 0 :$ $B_\delta(x^0) \subset E$. С другой стороны $x^0 \in E$ - локальный экстремум $\implies \exists \delta^0 > 0 :$

$$\begin{aligned} (*) \ f(x) \geq f(x^0) \ \forall x \in B_{\delta^0}(x^0) \cap E \\ f(x) \leq f(x^0) \ \forall x \in B_{\delta^0}(x^0) \cap E \end{aligned}$$

Положим $\underline{\delta} := \min\{\delta, \delta^0\} \implies B_{\underline{\delta}}(x^0) \subset E$ и при этом выполняется $(*)$ Фиксируем $i \in \{1, \dots, m\}$ и рассмотрим функцию

$$g_i(t) := f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) \implies$$

$\implies$ у функции g_i в точке x_i^0 есть локальный экстремум, так как в x^0 локальный экстремум. Но если $\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \implies \exists\frac{dg_i}{dt}(x_i^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ В силу необходимого условия экстремума для функции одной переменной

$$\frac{dg_i}{dt}(x_i^0) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0$$

Но i был фиксирован произвольно $\implies$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) = 0$$

Достаточные условия локального экстремума

Квадратичной формой в $\mathbb{R}^m$ назовём функцию:

$$k(h) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}h_ih_j$$

$k(h)$ называется положительно определённой, если $\forall h \neq 0\ \ k(h) > 0$ отрицательно определённой, если $\forall h \neq 0\ \ k(h) < 0$ знакоопределённая, если $\exists h_1 \neq 0\ \ k(h_1) > 0$ и $\exists h_2 \neq 0\ k(h_2) < 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \text{— матрица квадратичной формы}$$

В случае, когда f дважды дифференцируема в $x^0 \in E$ и все частные производные 2-ого порядка непрерывны в x^0, то

$$d^2f(x^0) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)dx_idx_j, \text{ где } dx_i = x_i - x_i^0,\ dx_j = x_j - x_j^0$$

Матрица Гессе (гессиан)

$$H_{f(x^0)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(x^0) \end{pmatrix}$$

Критерий Сильвестра: квадратичная форма(симметричная) положительно определенна $\Leftrightarrow$ все главные миноры матрицы кв. формы A положительны. Квадратичная форма отрицательно определена, если знаки главных миноров чередуются, начиная с отрицательного. **Достаточное условие экстремума**: Пусть $f \in C^2(B_{\delta^0(x^0)}), \delta^0 > 0$ Пусть в т. x^0 все частные производные первого порядка обращаются в ноль.(т.е x^0 - стационарная точка функции f). Тогда 1. Если квадратичная форма $d^2_{x^0} f(dx)$ положительно определена, то x^0 - локальный минимум функции f. 2. Если $d^2_{x^0} f(dx)$ отрицательно определена, то x^0 - точка локального максимума функции f 3. Если $d^2_{x^0} f(dx)$ знаконеопределённая, то экстремума нет 4. В остальных случаях сказать ничего нельзя. Пример для 4 пункта.

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 \quad \text{т.}(0,0) - \text{точка минимума}$$

$$H_{[f]}(0,0) = 0$$

$f(x_1, x_2) = x_1^3$ $H_{[f]} = 0$

Так как $f \in C^2(B_{\delta(x^0)}) \implies$ справедлва формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

$$f(x) = f(x^0) + d_{x^0} f(dx) + \frac{1}{2} d^2_{x^0}(dx) + o(\|dx\|^2), \ x \longrightarrow x^0$$

Так как x^0 - стационарная точка функции f

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2} d^2_{x^0} f(dx) + o(\|x - x^0)\|^2, \ x \longrightarrow x^0$$

1. Пусть $d^2_{x^0} f(dx)$ - положительно определенная кв. форма, тогда $\forall dx \in S_1^{m-1}(0) \quad d^2_{x^0} f(dx) > 0$, где $d^2_{x^0} f(dx) \in C$ т.к. единичная сфера $S_1^{m-1}(0)$ - компакт $\implies \exists$ минимум $d^2_{x^0} f(dx)$ на единичной сфере. Обозначим $m \implies \forall S_1^{m-1}(0)\ d^2_{x^0} f(dx) \geq m \implies \forall dx \neq 0$

$$d^2_{x^0} f(dx) = \|dx\|^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \frac{dx_i}{\|dx\|} \frac{dx_j}{\|dx\|} \geq m \|dx\|^2$$

$$\implies \exists \tilde{\delta} > 0 : |o(\|x - x^0\|^2)| \leq \tfrac{1}{4} |d^2_{x^0} f(dx)| \ \ \forall x \in B_{\tilde{\delta}}(x^0) \implies$$

$$\implies \forall x \in B_{\tilde{\delta}}(x^0) \ \ f(x) \geq f(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0)(dx) - |o(\|x - x^0\|^2)| \implies$$

$$f(x) \geq f(x^0) + \frac{m}{4} \|x - x^0\|^2 \implies$$

$\Longrightarrow \quad x^0$ - точка строгого локального минимума функции f 2. Следует из первого пункта с заменой f на $-f$
3. Пусть $d^2_{x^0}f(dx)$ знаконеопределённая $\Longrightarrow \quad \exists dx^1 \neq 0$: $d^2_{x^0}f(dx^1) > 0$ $\exists dx^2 \neq 0 :$ $d^2_{x^0}f(dx^2) < 0$ $t \neq 0$

$$f(x^0 + tdx^1) - f(x^0) = \frac{t^2}{2} d^2_{x^0} f(dx^1) + o(t^2),\ t \longrightarrow 0$$

$$f(x^0 + tdx^2) - f(x^0) = \frac{t^2}{2} d^2_{x^0} f(dx^2) + o(t^2),\ t \longrightarrow 0$$

$\Longrightarrow \ \exists \delta_1 > 0 : \forall t \in (0, \delta_1) :$

$$f(x^0 + tdx^1) - f(x^0) > 0$$

$\Longrightarrow \ \exists \delta_2 > 0 : \forall t \in (0, \delta_2) :$

$$f(x^0 + tdx^2) - f(x^0) < 0$$

$x^0 + tdx^1 \in B_\delta(x^0)$ $x^0 + tdx^2 \in B_\delta(x^0)$

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists t_1(\delta) = \min \left\{ \frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta}{2\|dx^1\|} \right\}$$

$$\forall \delta > 0 \exists t_2(\delta) = \min \left\{ \frac{\delta_2}{2}, \frac{\delta}{2\|dx^2\|} \right\}$$

$$\begin{cases} f(x^0 + t_1(\delta)dx^1) - f(x^0) > 0, x^0 + t_1(\delta)dx^1 \in B_\delta(x^0) \\ f(x^0 + t_2(\delta)dx^2) - f(x^0) < 0, x^0 + t_2(\delta)dx^2 \in B_\delta(x^0) \end{cases}$$

$\Longrightarrow \ x^0$ не является точкой локального экстремума функции f.