Modelos de Robots Móviles

CONTROL Y PROGRAMACIÓN DE ROBOTS

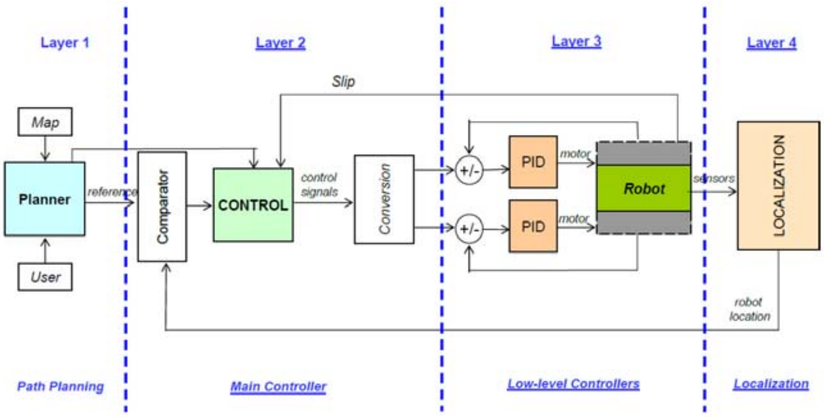
Grado en Electrónica, Robótica y Mecatrónica

Modelos geométricos y cinemáticos

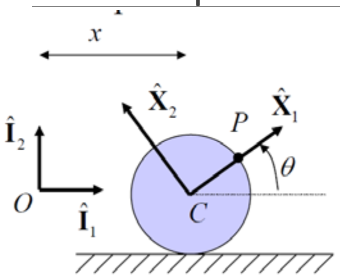
- Vamos a considerar solamente robots con ruedas.
- Hipotesis básicas:
  - Piso plano
  - ejes de guiado perpendicular al piso
  - rodadura pura sin deslizamiento
  - robot rígido

2

Arquitectura de robot móvil



Concepto de restricción



variables generalizadas $q = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$

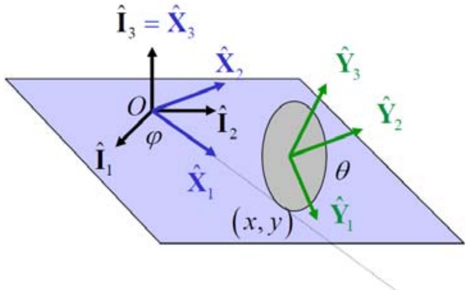
La condicion de rodadura pura sin deslizamiento se escribe

$$\frac{dx}{dt} + R\frac{d\theta}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = -R\dot{\theta}$$

Se puede integrar esa condicion y obtenemos

$$x + R\theta = \text{constante} \quad \Leftrightarrow h(q,t) = 0 \quad \boxed{\text{restricción holónoma}}$$

Concepto de restricción



variables generalizadas $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$

La condicion de rodadura pura sin deslizamiento se escribe

$$-\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi = R\dot{\theta}$$
$$\dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi = 0$$

no integrable

$\Leftrightarrow h(q,\dot{q},t) = 0$ $\boxed{\text{restricción no holónoma}}$

– Concepto de restricción

$\boxed{\text{restricción holónoma}}$ $\Leftrightarrow h(q,t) = 0$

$\boxed{\text{restricción no holónoma}}$ $\Leftrightarrow h(q,\dot{q},t) = 0$

– Modelo cinemático directo (Jacobiano)

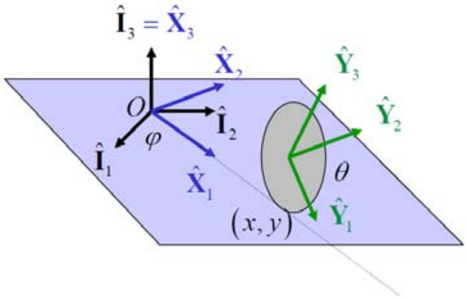
Se trata de relacionar las coordenadas generalizadas con las coordenadas de actuación

$$\dot{q} = J(q)\dot{p}$$

con q : vector de coordenadas generalizadas

p : vector de coordenadas de actuacion

Modelo cinemático directo



variables generalizadas $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix}$

variables de actuacion $p = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}\, cos\varphi + \dot{y}\, sin\varphi & = & R\dot{\theta} \\ -\dot{x}\, sin\varphi + \dot{y}\, cos\varphi & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\, cos\varphi & 0 \\ R\, sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = J(q)\dot{p}$$

7

Modelo cinemático inverso

$$\dot{p} = J(q)^{-1}\, \dot{q}$$

En la mayoría de los casos, J no es cuadrada y toca usar la pseudo inversa:

$$\dot{p} = \left(J(q)^T J(q)\right)^{-1} J(q)^T\, \dot{q}$$

En nuestro ejemplo,

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R}\, cos\varphi & \frac{1}{R} sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R}\, cos\varphi & \frac{1}{R} sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{q}$$

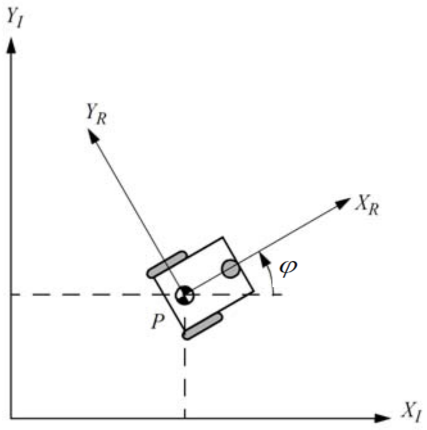
8

Representación de la postura del robot móvil

- Ejes Inerciales: $\{ X_I , Y_I \}$
- Ejes del robot: $\{ X_R , Y_R \}$
- Postura del robot: $[x, y\, \varphi]^T$
- Relación entre los ejes:

$$\dot{\xi}_R = R(\varphi)\dot{\xi}_I = R(\varphi) \cdot [\dot{x} \;\; \dot{y} \;\; \dot{\varphi}]^T$$

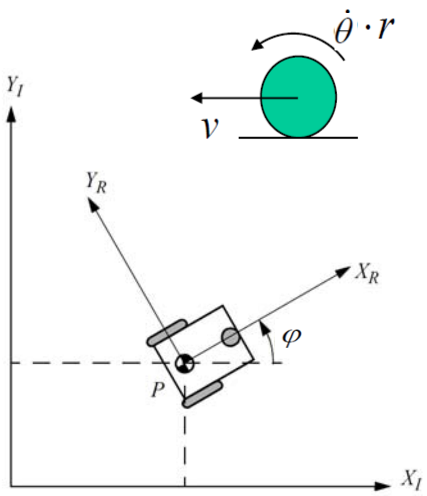
$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



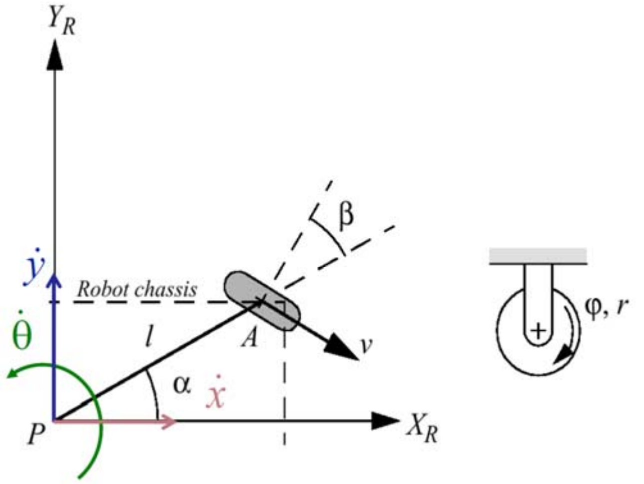
Restricciones cinemáticas de las ruedas

Suposiciones:

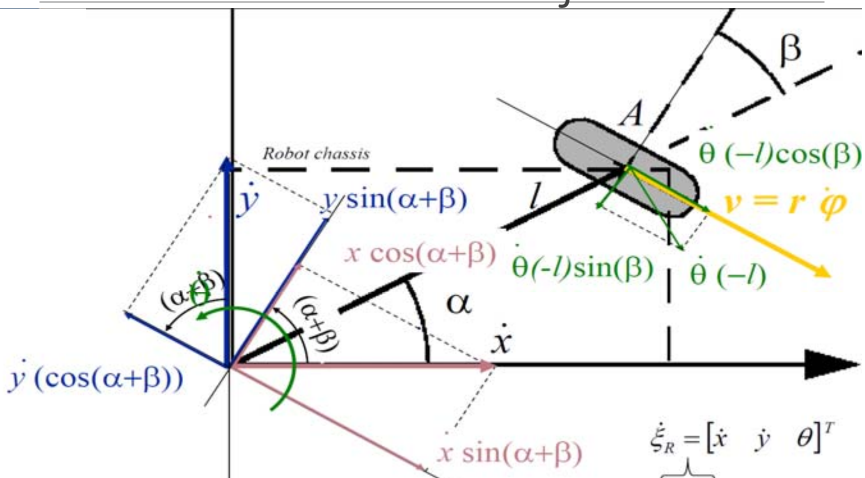
- Movimiento en un plano horizontal
- Las ruedas tienen un punto de contacto
- Las ruedas son no deformable.
- vc = 0 en el punto de contacto
- No se resbala, arrastre o deslizamiento
- No hay fricción en el punto de contacto
- Los ejes de dirección son ortogonales a la superficie
- Las ruedas están conectadas al bastidor rígido



Restricciones: ruedas fijas



Restricciones: ruedas fijas



$$\dot{\xi}_R = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \theta]^T$$

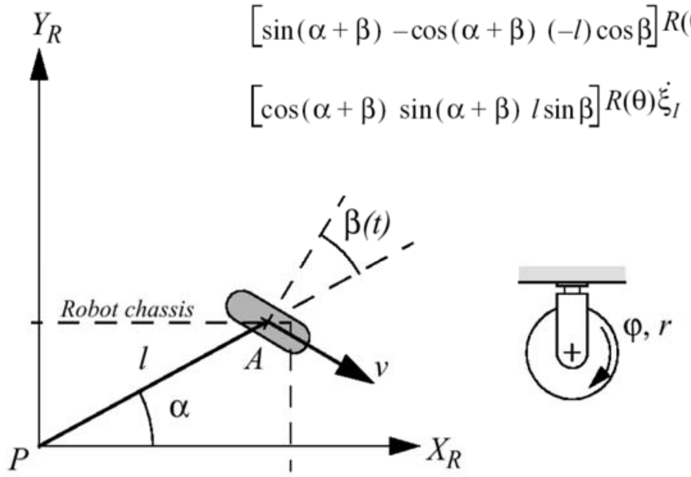
$$\left[\sin(\alpha+\beta) \ \ -\cos(\alpha+\beta) \ \ (-l)\cos\beta\right] \underbrace{R(\theta)\dot{\xi}_I} - r\dot{\varphi} = 0$$

$$\left[\cos(\alpha+\beta) \ \ \sin(\alpha+\beta) \ \ l\sin\beta\right] R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

Restricciones: rueda orientable

$$\left[\sin(\alpha+\beta)\ \ -\cos(\alpha+\beta)\ \ (-l)\cos\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}_I - r\dot{\varphi} = 0$$

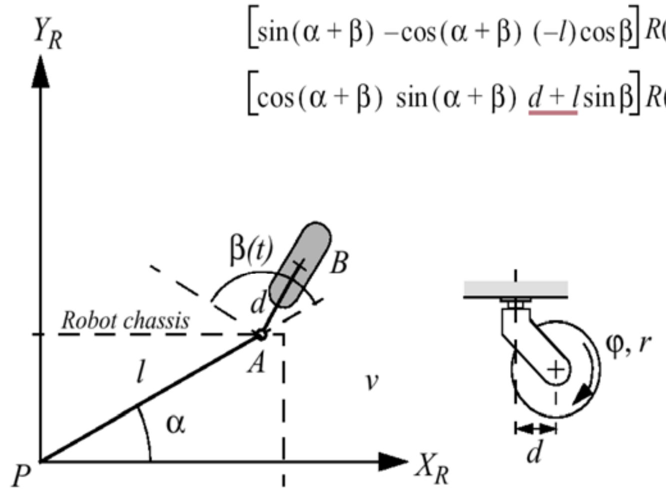
$$\left[\cos(\alpha+\beta)\ \ \sin(\alpha+\beta)\ \ l\sin\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$



Restricciones: rueda de castor

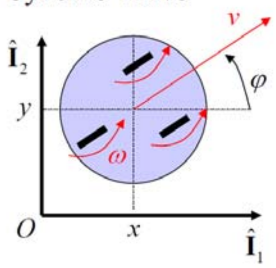
$$\left[\sin(\alpha+\beta)\ \ -\cos(\alpha+\beta)\ \ (-l)\cos\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}_I - r\dot{\varphi} = 0$$

$$\left[\cos(\alpha+\beta)\ \ \sin(\alpha+\beta)\ \ d+l\sin\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}_I + d\dot{\beta} = 0$$



Ejemplos de configuraciones

- Synchro-Drive



variables generalizadas $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix}$

3 coordenadas generalizadas

variables de actuacion $p = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \omega \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\varphi \\ \dot{y} &= v\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$$

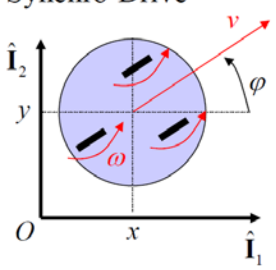
1 restricción $\longrightarrow$ 2 GDL

$$\dot{\varphi} = \omega$$

con $v = R\dot{\theta}$

Ejemplos de configuraciones

- Synchro-Drive



variables generalizadas $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix}$

variables de actuacion $p = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \omega \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\varphi \\ \dot{y} &= v\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$$

$$\dot{\varphi} = \omega$$

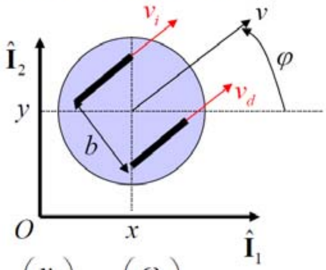
con $v = R\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi & 0 \\ R\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \omega \end{pmatrix}$$

Modelo cinemático

Ejemplos de configuraciones

- Ruedas diferenciales



variables generalizadas $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix}$

variables de actuacion $p = \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_d \end{pmatrix}$

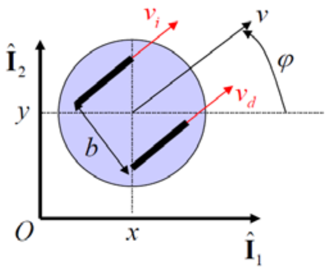
$$\begin{pmatrix} v_i \\ v_d \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{v_d + v_i}{2} \\ \dfrac{v_d - v_i}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R/2 & R/2 \\ -R/b & R/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_d \end{pmatrix}$$

Y $\begin{cases} \dot{x} = v\cos\varphi \\ \dot{y} = v\sin\varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$

Ejemplos de configuraciones

- Ruedas diferenciales



variables generalizadas $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix}$

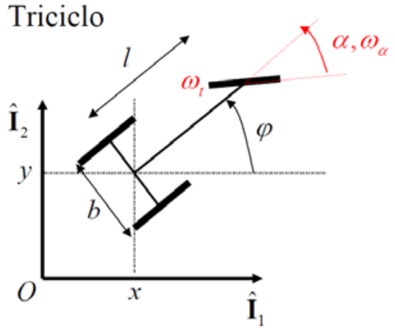
variables de actuacion $p = \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R/2\cos\varphi & R/2\cos\varphi \\ R/2\sin\varphi & R/2\sin\varphi \\ -R/b & R/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_d \end{pmatrix}$$

Modelo cinemático

Ejemplos de configuraciones

- Triciclo



variables generalizadas $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \\ \alpha \end{pmatrix}$

variables de actuacion $p = \begin{pmatrix} \omega_t \\ \omega_\alpha \end{pmatrix}$

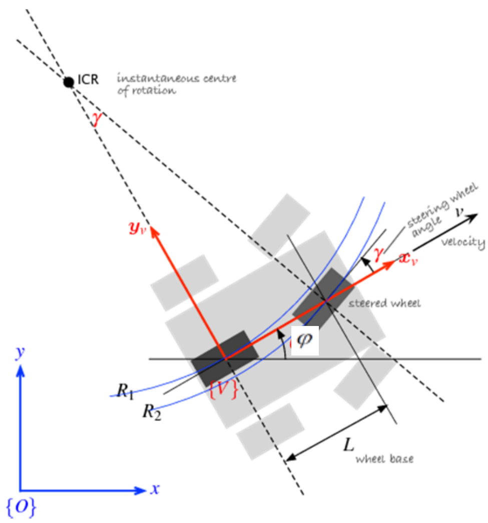
$$\begin{pmatrix} v \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\alpha & 0 \\ \dfrac{R\sin\alpha}{l} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_t \\ \omega_\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\alpha\cos\varphi & 0 \\ R\cos\alpha\sin\varphi & 0 \\ \dfrac{R\sin\alpha}{l} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_t \\ \omega_\alpha \end{pmatrix}$$

Modelo cinemático

19

Modelo de un coche. Biciclo

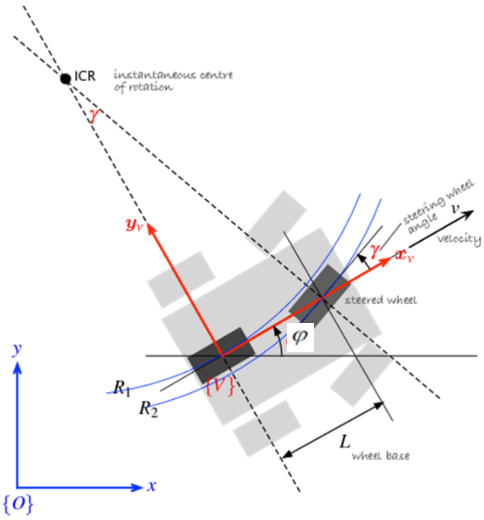


- Postura del vehículo, representada por el sistema V : $\boldsymbol{q} = (x, y, \varphi)$
- La velocidad es: ${}^V\dot{x} = v,\quad {}^V\dot{y} = 0$
- La velocidad angular es: $\dot{\varphi} = \dfrac{v}{R_1}$
- Siendo: $R_1 = L / \tan\gamma$
- Modelo :

$$\dot{x} = v\cos\varphi$$
$$\dot{y} = v\sin\varphi$$
$$\dot{\varphi} = \frac{v}{L}\tan\gamma$$

20

Modelo de un coche. Biciclo



- Puede comprobarse que existe una restricción no-holónoma, no integrable:

$$\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi = 0$$

- Cuando v=0, no es posible el cambio de orientación
- Cuando el ángulo ϒ es π/2 el vehículo no se puede mover hacia adelante y se tiene una región no definida.
- Modelo :

$$\dot{x} = v\cos\varphi$$
$$\dot{y} = v\sin\varphi$$
$$\dot{\varphi} = \frac{v}{L}\tan\gamma$$

21

Estimación de la posición

Integrar los modelos cinemáticos introduciendo condiciones iniciales

$$\text{Synchro-Drive:} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t R\dot{\theta}\cos\varphi dt \\ \int_0^t R\dot{\theta}\sin\varphi dt \\ \int_0^t \omega dt \end{pmatrix}$$

22

Estimación de la posición

Integrar los modelos cinemáticos introduciendo condiciones iniciales

$$\text{Ruedas diferenciales:}\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t R/2 \cos\varphi(\omega_i + \omega_d)dt \\ \int_0^t R/2 \sin\varphi(\omega_i + \omega_d)dt \\ \int_0^t R/b (\omega_d - \omega_i)dt \end{pmatrix}$$

Estimación de la posición

Integrar los modelos cinemáticos introduciendo condiciones iniciales

$$\text{Triciclo:}\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \varphi_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t R\omega_t \cos\alpha\cos\varphi dt \\ \int_0^t R\omega_t \cos\alpha\sin\varphi dt \\ \int_0^t R/l\ \omega_t \sin\alpha dt \\ \int_0^t \omega_\alpha dt \end{pmatrix}$$

Ejemplos en Matlab.

- Realizar el Modelo del coche en Simulink y probar para distintos valores de v y ϒ.
- Realizar el Modelo de robot móvil configuración diferencial

25