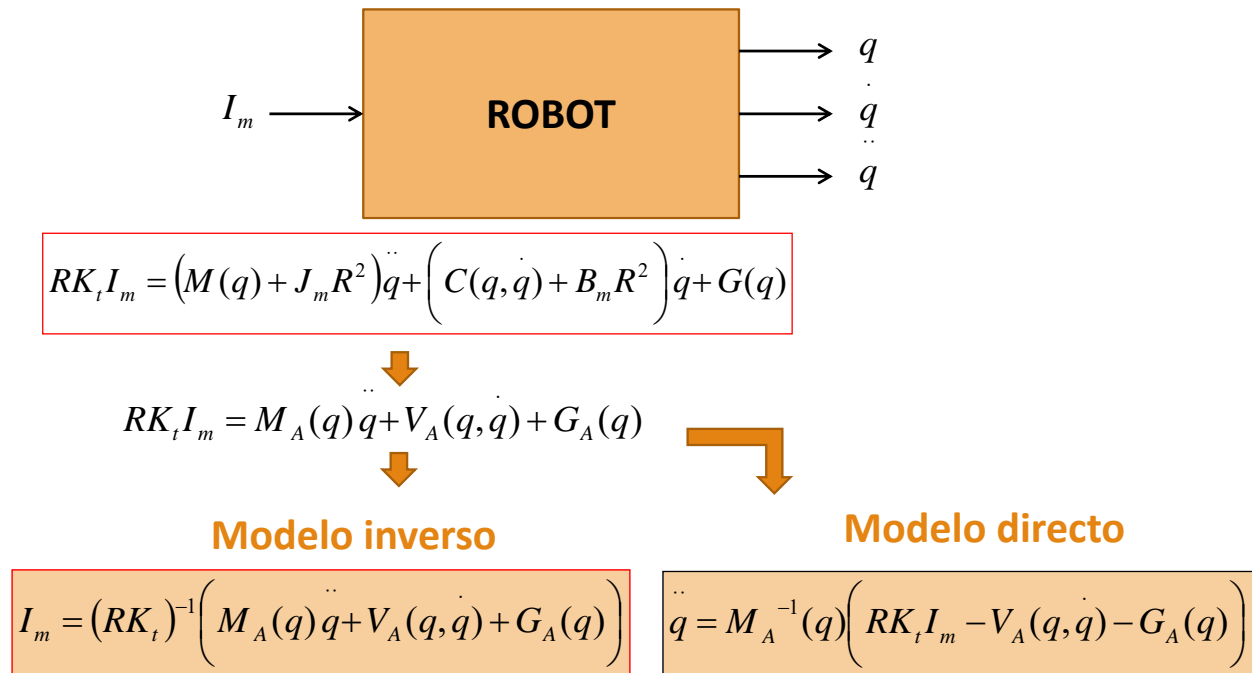


Objetivo para trabajo de curso

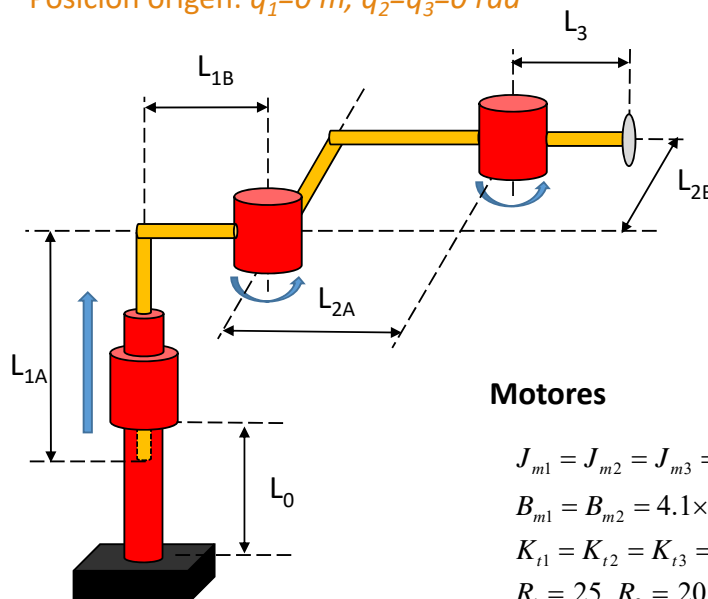
Simulador para control de un robot de N g.d.l.:



Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Esquema (en posición origen salvo q_1):

Posición origen: $q_1=0$ m, $q_2=q_3=0$ rad



Eslabones

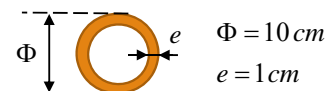
Densidad del material:

$$\rho = 6000 \text{ kg/m}^3$$

Dimensiones:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 \text{ m} & L_{1A} &= 0.8 \text{ m} & L_{1B} &= 0.2 \text{ m} \\ L_{2A} &= 0.8 \text{ m} & L_{2B} &= 0.2 \text{ m} & L_3 &= 0.3 \text{ m} \end{aligned}$$

Perfil:



Motores

$$J_{m1} = J_{m2} = J_{m3} = 0.025 \text{ Kg.m}^2$$

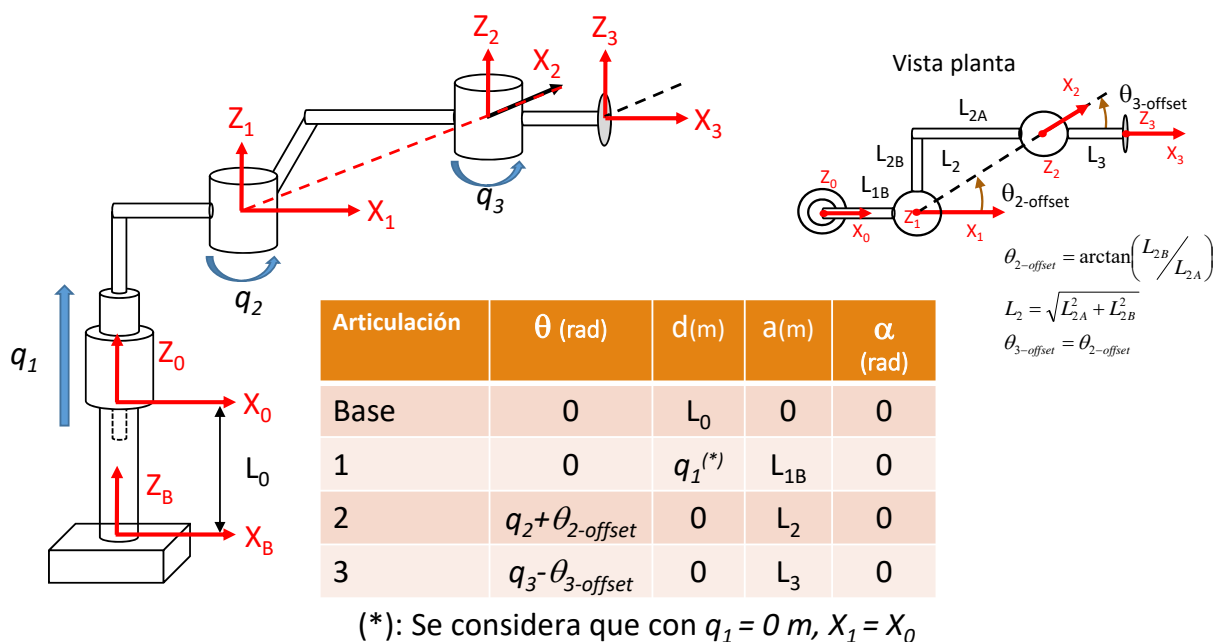
$$B_{m1} = B_{m2} = 4.1 \times 10^{-6} \text{ Nm/(rad/s)}$$

$$K_{t1} = K_{t2} = K_{t3} = 10 \text{ Nm/A}$$

$$R_1 = 25 \text{ } R_2 = 20 \text{ } R_3 = 15$$

Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

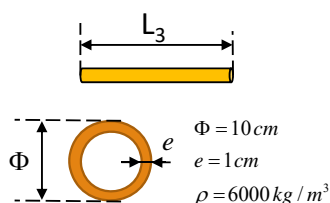
Parámetros de Denavit-Hartenberg (cinemática):



Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Inercia de eslabones respecto a ejes con origen en c.d.m. del eslabón y orientados según D-H

Eslabón 3:



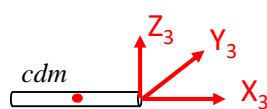
Tensor de inercia de una barra:

$M = \rho_L L$

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} ML^2$
 $I_{zz} = \frac{1}{2} M(R_{ext}^2 + R_{int}^2)$
 $P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = 0$

Área de la sección: $A = \pi(R_{ext}^2 - R_{int}^2)$ $R_{ext} = \Phi/2$ $R_{int} = R_{ext} - e$
 $A = 2.8274 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
 Densidad lineal: $\rho_L = \rho A = 16.965 \text{ kg/m}$

Caso particular de eslabón 3: $M_3 = \rho_L L_3 = 5.09 \text{ kg}$



$x_{3cdm} = -L_3/2 = -0.15 \text{ m}$
 $y_{3cdm} = 0 \text{ m}$
 $z_{3cdm} = 0 \text{ m}$

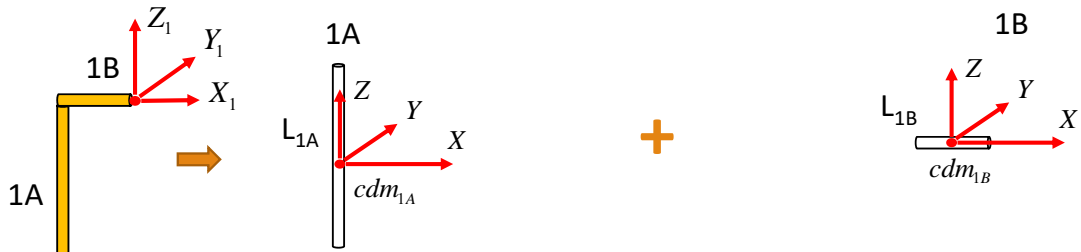
$X_3 \equiv Z \Rightarrow I_{3xx} = I_{zz} = \frac{1}{2} M_3(R_{ext}^2 + R_{int}^2) = 1.043 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$
 $Y_3 \equiv X \Rightarrow I_{3yy} = I_{xx} = \frac{1}{12} M_3 L_3^2 = 3.817 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$
 $Z_3 \equiv Y \Rightarrow I_{3zz} = I_{yy} = I_{xx} = 3.817 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$

$I_3 = \begin{pmatrix} 1.043 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 3.817 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 3.817 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$

Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Inercia de eslabones respecto a ejes con origen en c.d.m. del eslabón y orientados según D-H

Eslabón 1: Teniendo en cuenta la transparencia anterior



$$M_{1A} = \rho_L L_{1A} = 13.572 \text{ kg}$$

$$I_{1Axx} = \frac{1}{12} M_{1A} L_{1A}^2 = 7.238 \times 10^{-1} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{1Ayy} = I_{1Axx} = 7.238 \times 10^{-1} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{1Azz} = \frac{1}{2} M_{1A} (R_{ext}^2 + R_{int}^2) = 2.782 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{1A} = \begin{pmatrix} 7.238 \times 10^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 7.238 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2.782 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$M_{1B} = \rho_L L_{1B} = 3.393 \text{ kg}$$

$$I_{1Bxx} = \frac{1}{2} M_{1B} (R_{ext}^2 + R_{int}^2) = 6.955 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{1Byy} = \frac{1}{12} M_{1B} L_{1B}^2 = 1.131 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

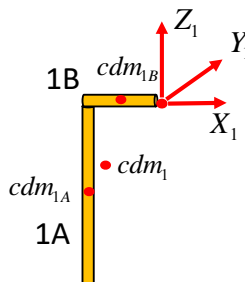
$$I_{1Bzz} = I_{1Byy} = 1.131 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{1B} = \begin{pmatrix} 6.955 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1.131 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1.131 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Inercia de eslabones respecto a ejes con origen en c.d.m. del eslabón y orientados según D-H

Eslabón 1 (continuación): Masa y centro de masas del eslabón:



$$M_1 = M_{1A} + M_{1B} = 16.96 \text{ kg}$$

$$P_{cdm1A} = \begin{pmatrix} x_{cdm1A} \\ y_{cdm1A} \\ z_{cdm1A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_{1B} \\ 0 \\ -L_{1A}/2 \end{pmatrix}$$

$$P_{cdm1B} = \begin{pmatrix} x_{cdm1B} \\ y_{cdm1B} \\ z_{cdm1B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_{1B}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

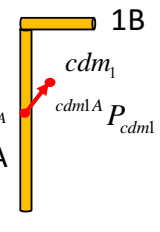
$$P_{cdm1} = \begin{pmatrix} x_{cdm1} \\ y_{cdm1} \\ z_{cdm1} \end{pmatrix} = \frac{1}{M_1} \begin{pmatrix} -M_{1A} L_{1B} - M_{1B} \frac{L_{1B}}{2} \\ 0 \\ -M_{1A} \frac{L_{1A}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.18 \\ 0 \\ -0.32 \end{pmatrix}$$

Inercia parte A en c.d.m. del eslabón (Th. Steiner)

$${}^{cdm1}I_{1A} = I_{1A} + M_{1A} \begin{pmatrix} r_{1Ax}^2 + r_{1Az}^2 & -r_{1Ax}r_{1Ay} & -r_{1Ax}r_{1Az} \\ -r_{1Ax}r_{1Ay} & r_{1Ax}^2 + r_{1Az}^2 & -r_{1Ay}r_{1Az} \\ -r_{1Ax}r_{1Az} & -r_{1Ay}r_{1Az} & r_{1Ax}^2 + r_{1Ay}^2 \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm1}P_{cdm1} = \begin{pmatrix} r_{1Ax} \\ r_{1Ay} \\ r_{1Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{cdm1} - x_{cdm1A} \\ y_{cdm1} - y_{cdm1A} \\ z_{cdm1} - z_{cdm1A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0 \\ 0.08 \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm1}I_{1A} = \begin{pmatrix} 8.161 \times 10^{-1} & 0 & -2.171 \times 10^{-2} \\ 0 & 8.107 \times 10^{-1} & 0 \\ -2.171 \times 10^{-2} & 0 & 3.325 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm1}I_{1A} = I_{1A} + M_{1A} \left(\| {}^{cdm1}P_{cdm1} \|^2 - {}^{cdm1}P_{cdm1} \otimes {}^{cdm1}P_{cdm1} \right)$$


Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Inercia de eslabones respecto a ejes con origen en c.d.m. del eslabón y orientados según D-H

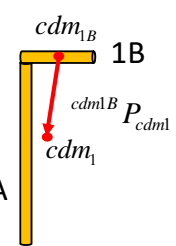
Eslabón 1 (continuación):

Inercia parte B en c.d.m. del eslabón (Th. Steiner)

$${}^{cdm1}I_{1B} = I_{1B} + M_{1B} \begin{pmatrix} r_{1Bx}^2 + r_{1Bz}^2 & -r_{1Bx}r_{1By} & -r_{1Bx}r_{1Bz} \\ -r_{1Bx}r_{1By} & r_{1Bx}^2 + r_{1Bz}^2 & -r_{1By}r_{1Bz} \\ -r_{1Bx}r_{1Bz} & -r_{1By}r_{1Bz} & r_{1By}^2 + r_{1Bz}^2 \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm1}P_{cdm1} = \begin{pmatrix} r_{1Bx} \\ r_{1By} \\ r_{1Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{cdm1} - x_{cdm1B} \\ y_{cdm1} - y_{cdm1B} \\ z_{cdm1} - z_{cdm1B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.08 \\ 0 \\ -0.32 \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm1}I_{1B} = \begin{pmatrix} 3.544 \times 10^{-1} & 0 & -8.686 \times 10^{-2} \\ 0 & 3.805 \times 10^{-1} & 0 \\ -8.686 \times 10^{-2} & 0 & 3.302 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm1}I_{1B} = I_{1B} + M_{1B} \left(\| {}^{cdm1}P_{cdm1} \|^2 - {}^{cdm1}P_{cdm1} \otimes {}^{cdm1}P_{cdm1} \right)$$


Inercia del eslabón completo en c.d.m. del eslabón (ejes paralelos)

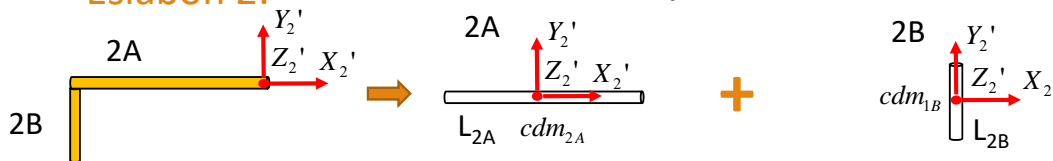
$${}^{cdm1}I_1 = {}^{cdm1}I_{1A} + {}^{cdm1}I_{1B}$$

$${}^{cdm1}I_1 = \begin{pmatrix} 1.165 & 0 & -1.086 \times 10^{-1} \\ 0 & 1.197 & 0 \\ -1.086 \times 10^{-1} & 0 & 6.627 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Inercia de eslabones respecto a ejes con origen en c.d.m. del eslabón y orientados según D-H

Eslabón 2: Teniendo en cuenta las transparencias anteriores



$$M_{2A} = \rho_L L_{2A} = 13.572 \text{ kg}$$

$$M_{2B} = \rho_L L_{2B} = 3.393 \text{ kg}$$

$$I'_{2Axx} = \frac{1}{2} M_{2A} (R_{ext}^2 + R_{int}^2) = 2.782 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

$$I'_{2Bxx} = \frac{1}{12} M_{2B} L_{2B}^2 = 1.131 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

$$I'_{2Ayy} = \frac{1}{12} M_{2A} L_{2A}^2 = 7.238 \times 10^{-1} \text{ kg.m}^2$$

$$I'_{2Byy} = \frac{1}{2} M_{2B} (R_{ext}^2 + R_{int}^2) = 6.955 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I'_{2Azz} = I'_{2Ayy} = 7.238 \times 10^{-1} \text{ kg.m}^2$$

$$I'_{2Bzz} = I'_{2Bxx} = 1.131 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

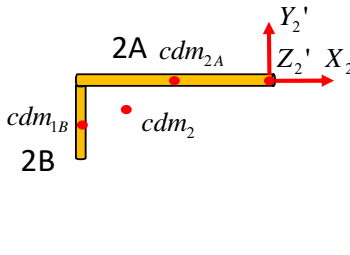
$$I'_{2A} = \begin{pmatrix} 2.782 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 7.238 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 7.238 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

$$I'_{2B} = \begin{pmatrix} 1.131 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 6.955 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.131 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Inercia de eslabones respecto a ejes con origen en c.d.m. del eslabón y orientados según D-H

Eslabón 2 (continuación): Masa y centro de masas del eslabón:



$$M_2 = M_{2A} + M_{2B} = 16.96 \text{ kg}$$

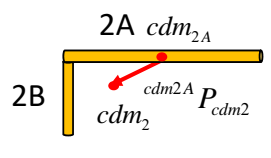
$$P'_{cdm2} = \frac{M_{2A} P'_{cdm2A} + M_{2B} P'_{cdm2B}}{M_{2A} + M_{2B}}$$

$$P'_{cdm2} = \frac{1}{M_2} \begin{pmatrix} -M_{2A} L_{2A}/2 - M_{2B} L_{2A} \\ -M_{2B} L_{2B}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.48 \\ -0.02 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inercia parte A en c.d.m. del eslabón (Th. Steiner)

$${}^{cdm2}I'_{2A} = I'_{2A} + M_{2A} \begin{pmatrix} r_{2Ay}^2 + r_{2Az}^2 & -r_{2Ax}r_{2Ay} & -r_{2Ax}r_{2Az} \\ -r_{2Ax}r_{2Ay} & r_{2Ax}^2 + r_{2Az}^2 & -r_{2Ay}r_{2Az} \\ -r_{2Ax}r_{2Az} & -r_{2Ay}r_{2Az} & r_{2Ax}^2 + r_{2Ay}^2 \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm2A}P'_{cdm2} = \begin{pmatrix} r_{2Ax} \\ r_{2Ay} \\ r_{2Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{cdm2} - x'_{cdm2A} \\ y'_{cdm2} - y'_{cdm2A} \\ z'_{cdm2} - z'_{cdm2A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.08 \\ -0.02 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm2}I'_{2A} = \begin{pmatrix} 3.325 \times 10^{-2} & -2.171 \times 10^{-2} & 0 \\ -2.171 \times 10^{-2} & 8.107 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 8.161 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$


Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

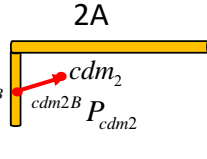
Inercia de eslabones respecto a ejes con origen en c.d.m. del eslabón y orientados según D-H

Eslabón 2 (continuación):

Inercia parte B en c.d.m. del eslabón (Th. Steiner)

$${}^{cdm2}I'_{2B} = I'_{2B} + M_{2B} \begin{pmatrix} r_{2Bx}^2 + r_{2Bz}^2 & -r_{2Bx}r_{2By} & -r_{2Bx}r_{2Bz} \\ -r_{2Bx}r_{2By} & r_{2Bx}^2 + r_{2Bz}^2 & -r_{2By}r_{2Bz} \\ -r_{2Bx}r_{2Bz} & -r_{2By}r_{2Bz} & r_{2Bx}^2 + r_{2By}^2 \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm2}P'_{cdm2} = \begin{pmatrix} r_{2Bx} \\ r_{2By} \\ r_{2Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{cdm2} - x'_{cdm2B} \\ y'_{cdm2} - y'_{cdm2B} \\ z'_{cdm2} - z'_{cdm2B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.08 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm2}I'_{2B} = \begin{pmatrix} 3.302 \times 10^{-2} & -8.686 \times 10^{-2} & 0 \\ -8.686 \times 10^{-2} & 3.544 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3.805 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$


Inercia del eslabón completo en c.d.m. del eslabón (ejes paralelos)

$${}^{cdm2}I'_2 = {}^{cdm2}I'_{2A} + {}^{cdm2}I'_{2B}$$

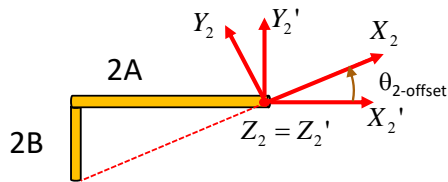
$${}^{cdm2}I'_2 = \begin{pmatrix} 6.627 \times 10^{-2} & -1.086 \times 10^{-1} & 0 \\ -1.086 \times 10^{-1} & 1.165 & 0 \\ 0 & 0 & 1.197 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Inercia de eslabones respecto a ejes con origen en c.d.m. del eslabón y orientados según D-H

Eslabón 2 (continuación):

Inercia del eslabón completo en c.d.m. del eslabón y respecto a ejes de DH (**rotación $X_2'Y_2'Z_2' \rightarrow X_2Y_2Z_2$**)



$$XYZ_2 = R, XYZ_2'$$

$$R = \text{rot}_z(\theta_{2-\text{offset}}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{2-\text{offset}}) & -\sin(\theta_{2-\text{offset}}) & 0 \\ \sin(\theta_{2-\text{offset}}) & \cos(\theta_{2-\text{offset}}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{cdm2} = R, P_{cdm2}' = \begin{pmatrix} -0.461 \\ -0.136 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^{cdm2}I_2 = R, {}^{cdm2}I_2' R^T = \begin{pmatrix} 1.820 \times 10^{-1} & -3.543 \times 10^{-1} & 0 \\ -3.543 \times 10^{-1} & 1.0493 & 0 \\ 0 & 0 & 1.197 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Modelo inverso:

Ejecutando el fichero "NE_Robot_PRR.m":

$$I_m = (RK_t)^{-1} \left(M_A(q) \ddot{q} + V_A(q, \dot{q}) + G_A(q) \right)$$

$$M_A(q) = \begin{pmatrix} 54.635 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2592 * \cos(q_3 - 0.24498) + 17.367 & 0.6296 * \cos(q_3 - 0.24498) + 0.15269 \\ 0 & 0.6296 * \cos(q_3 - 0.24498) + 0.15269 & 5.7777 \end{pmatrix}$$

$$V_A(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0.0025625 * \dot{q}_1 \\ -0.6296 * \sin(q_3 - 0.24498) * \dot{q}_3^2 - 1.2592 * \dot{q}_2 * \sin(q_3 - 0.24498) * \dot{q}_3 + 0.00164 * \dot{q}_2 \\ 0.6296 * \sin(q_3 - 0.24498) * \dot{q}_2^2 + 0.0009225 * \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

$$G_A(q) = \begin{pmatrix} 39.01 * g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$K_t = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Simulaciones:

Implementación de las ecuaciones en

“**Modelo_Dinamico_Robot_PRR.m**” para simulación en Simulink.

Ejecución en “**sk_Modelo_Dinamico_Robot_PRR.mdl**” para simulación en Simulink.

- Indicar condiciones iniciales en integradores

Definición de objeto robot en Robotics Toolbox en

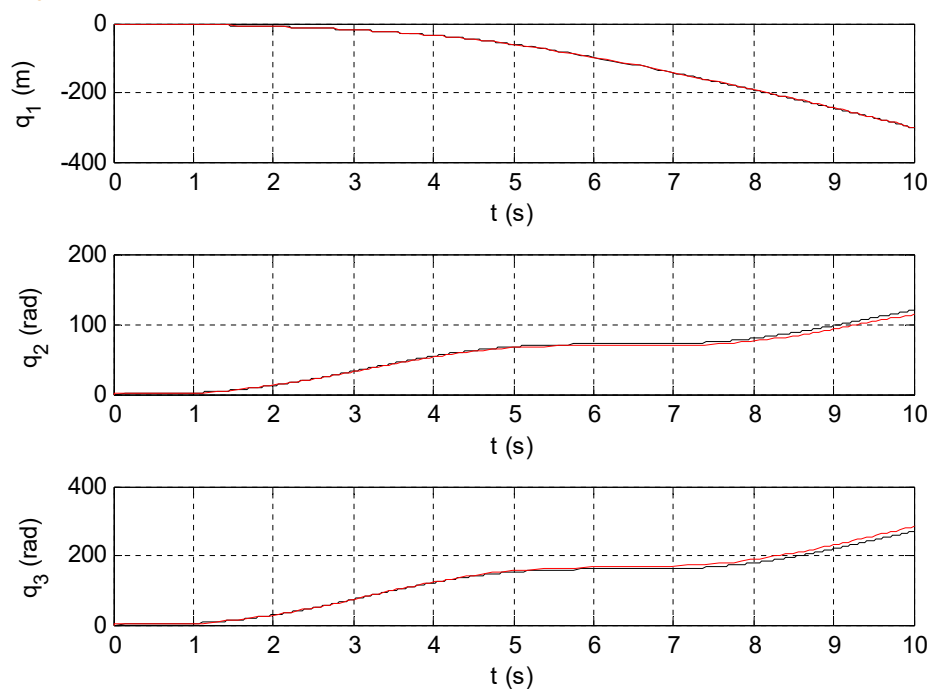
“**Robot_PRR_RTB.m**”

Ejecución en “**sk_Modelo_Dinamico_Robot_PRR_RTB.mdl**” para simulación en Simulink.

- Indicar condiciones iniciales en integradores.
- **Atención:** el modelo dinámico del *Robotics Toolbox* requiere *fuerzas/pares en las articulaciones* como señal de control, y no intensidades en los motores.

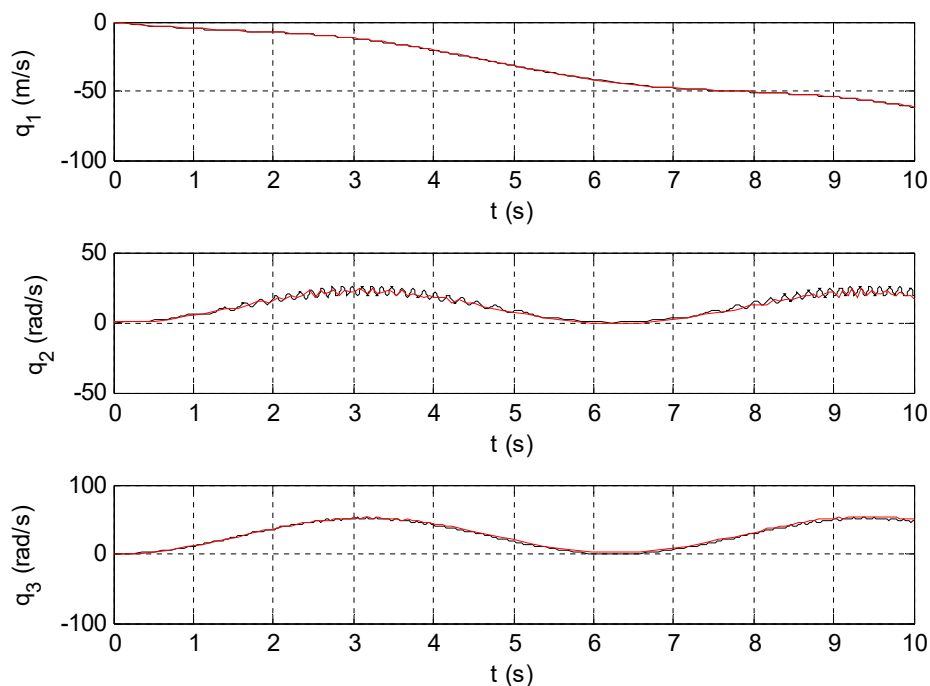
Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Comparaciones de resultados: POSICIONES ARTICULARES



Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Comparaciones de resultados: VELOCIDADES ARTICULARES



Ejemplo de modelo dinámico robot PRR

Comparaciones de resultados: ACELERACIONES ARTICULARES

