Estimación de Parámetros Dinámicos de Robots

CONTROL Y PROGRAMACIÓN DE ROBOTS

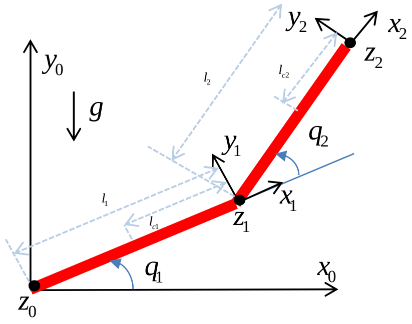
Grado en Electrónica, Robótica y Mecatrónica

Índice

Introducción

Robot real

Modelo



Eslabones

$$l_1 = l_2 = 1m$$
$$l_{c1} = l_{c2} = 0.5\ m$$
$$m_1 = m_2 = 3\,Kg$$
$$I_1 = I_2 = 0.2536\ Kg.m^2$$

Motores

$$J_{m1} = J_{m2} = 0.025\ Kg.m^2$$
$$B_{m1} = B_{m2} = 3.6\times10^{-6}\ Nm/(rad/s)$$
$$K_{t1} = K_{t2} = 10\ Nm/A$$
$$R_1 = R_2 = 25\ \ vs\ \ R_1 = R_2 = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix}250 & 0\\ 0 & 250\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{m1}\\ I_{m2}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}20.63+3.0\cos(q_2) & 1.004+1.5\cos(q_2)\\ 1.004+1.5\cos(q_2) & 16.63\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}\\ &+ \begin{bmatrix}-1.5\sin(q_2)\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2\right)+0.00225\dot{q}_1\\ -1.5\sin(q_2)\dot{q}_1^2+0.00225\dot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}44.1\cos(q_2)+14.7\cos(q_1+q_2)\\ 14.7\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix}\end{aligned}}$$

Introducción

- **Técnicas de control** basadas en **modelo**.
- Resultados de comportamiento de algunas técnicas de control muy dependiente de la **fiabilidad del modelo**.
- Propuesta en la estructura del modelo:

$$\boxed{K_t I_m / R = \left(M(q)/R^2 + J_m\right)\ddot{q} + \left(C(q,\dot{q})/R^2 + B_m\right)\dot{q} + G(q)/R^2 + F(\dot{q})/R^2}$$

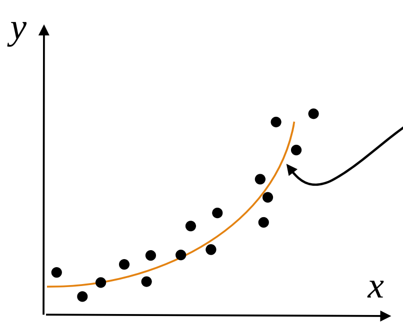
- **Incertidumbre estructural** por modos de alta frecuencia (p.e., resonancias), flexibilidad, fricciones reales, etc.
- **Incertidumbre paramétricas**:
  - Parámetros geométricos: relativamente fáciles de medir (**calibración**)
  - Parámetros inerciales: no tan fáciles de medir → **ESTIMACIÓN**

Estimación de parámetros inerciales

- **Experimentos físicos:**
  - Masas se pueden estimar pesando, las coordenadas del centro de masas por pivotamiento, elementos diagonales de matriz de inercia por movimientos pendulares, …
  - Experimentos tediosos, y a realizar eslabón a eslabón: "**con robot desarmado**"
- **Modelos de CAD/CAM:**
  - Difícil de definir geometría con precisión.
  - Parámetros dinámicos calculados con hipótesis no realistas (p.e., densidad constante).
- **Identificación**:
  - Realización de ***experimentos con el robot real*** que proporcionen una estimación del valor de los parámetros del modelo.
  - Experimentos **off-line** (en este tema) y **on-line** (típico en *control adaptativo*).

Principios de los métodos de identificación

- **Características más comunes en identificación:**
  - Uso de **modelos lineales en los parámetros** a identificar
  - Construcción de **sistemas de ecuaciones sobredeterminados** con suficientes medidas.
  - **Estimación de valores de los parámetros** mediante técnicas de regresión lineal (normalmente soluciones con ***errores cuadráticos mínimos***)



Modelo no lineal en *x*:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Pero lineal en los parámetros:

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix}}_{\varphi(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\theta}$$

$$y = \varphi(x)\,\theta$$

Principios de los métodos de identificación

- **Modelo general n-dimensional para identificación:**

$$y_{n\times1} = \varphi(.)_{n\times m}\,\theta_{m\times1} \qquad \theta_{m\times1}$$ **: Vector de parámetros a estimar**

- Aplicando modelo sobre las medidas, se comete un cierto **error residual** (ρ):
  - Medida 1: $y^1_{n\times1} = \varphi^1(.)_{n\times m}\,\theta_{m\times1} + \rho^1$
  - Medida 2: $y^2_{n\times1} = \varphi^2(.)_{n\times m}\,\theta_{m\times1} + \rho^2$
  - …
  - Medida r: $y^r_{n\times1} = \varphi^r(.)_{n\times m}\,\theta_{m\times1} + \rho^r$

- En formato vectorial:

$$Y_{(r.n)\times1} = \Gamma(.)_{(r.n)\times m}\,\theta_{m\times1} + \rho_{(r.n)\times1}$$

Principios de los métodos de identificación

- **Caso determinista:** $r.n = m$ $\quad \boxed{\Gamma(.)_{m\times m}\,\theta_{m\times1} = Y_{m\times1} - \rho_{m\times1}}$
  - Número de medidas justas para determinar los *m* parámetros.
  - Sistema de ecuaciones determinado.
  - ¡¡¡NO FUNCIONA!!! (modelo no es perfecto, medidas no son perfectas, …)

- **Caso redundante:** $r.n >> m$ $\quad \boxed{\Gamma(.)_{(r.n)\times m}\,\theta_{m\times1} = Y_{(r.n)\times1} - \rho_{(r.n)\times1}}$
  - Es necesario tomar **muchas medidas** para hacer un buen ajuste.
  - Sistema de ecuaciones sobredeterminado (incompatible).
  - Calcular la solución (estimación de los parámetros, $\hat{\theta}$) de manera que se minimice la magnitud del vector de error (ρ) bajo algún criterio.

  - Es muy usual trabajar con **mínimos cuadrados**: $\hat{\theta}_{m\times1} = \min_{\theta}\|\rho\|^2$
  - En caso de que $\Gamma(.)$ sea de **rango completo**, la solución explícita viene dada (a partir de su pseudo-inversa) por:

$$\boxed{\hat{\theta}_{m\times1} = \Gamma^{+}Y = \left(\Gamma^T\Gamma\right)^{-1}\Gamma^T Y}$$

MATLAB:
Theta=slcov(Gamma,Y)

Principios de los métodos de identificación

- **Calidad de la estimación:**
  - Asumiendo ρ como ruido blanco independiente y de media nula y desviación típica σ_ρ, su matriz de varianza-covarianza viene dad por:

$$C_\rho = E\left(\rho\rho^T\right) = \sigma_\rho^2 I_{r.n} \qquad \text{Estimación de } \sigma_\rho^2 = \frac{\left\|Y - \Gamma\hat{\theta}\right\|^2}{r.n - m}$$

  - Matriz de varianza-covarianza del error :

$$C_{\hat{\theta}} = E\left((\theta-\hat{\theta})(\theta-\hat{\theta})^T\right) = \Gamma^+ C_\rho \left(\Phi^+\right)^T = \sigma_\rho^2\left(\Gamma^T\Gamma\right)^{-1}$$

  - Desviación típica de la estimación del parámetro *j-ésimo* a partir del elemento *(j,j)* de la matriz anterior:

$$\sigma_{\hat{\theta}_j} = \sqrt{C_{\hat{\theta}}(j,j)}$$

  - ***Desviación estándar relativa*** del *j-ésimo* parámetro: $\sigma_{\hat{\theta}_{jr}}(\%) = 100\dfrac{\sigma_{\hat{\theta}_j}}{\hat{\theta}_j}$
  - Se suele decir que el *j-ésimo* parámetro está **pobremente identificado** si

$$\boxed{\sigma_{\hat{\theta}_{jr}}(\%) > 15\%}$$

Identificación de parámetros del robot

- Una propiedad del modelo dinámico de un robot es que el **lineal respecto a sus parámetros dinámicos**.
  - El modelo estándar utilizado hasta ahora

$$K_t R I_m = \left(M(q) + J_m R^2\right)\ddot{q} + \left(C(q,\dot{q}) + B_m R^2\right)\dot{q} + G(q) + F(\dot{q})$$

  se puede reescribir como:

$$\left(K_t R I_m - F(\dot{q})\right)_{n\times1} = y_{n\times1}(I_m,\dot{q}) = \varphi_{n\times m}(q,\dot{q},\ddot{q})\theta_{m\times1}$$

  donde: $\theta_{m\times1} = \left(\theta^T_{m_1\times1} \quad \ldots \quad \theta^T_{m_n\times1}\right)^T$

  siendo $\theta_{m_i\times1}$ el vector de parámetros dinámicos de la *i-ésimo* eslabón.

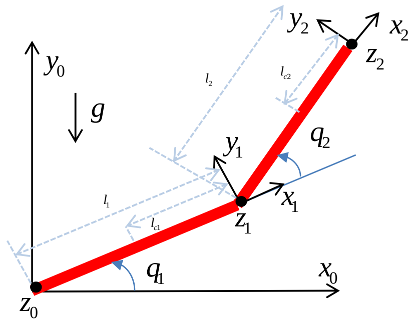
  - De manera genérica:

$$\theta^T_{m_i\times1} = \left(I^i_{xx} \quad I^i_{xy} \quad I^i_{xz} \quad I^i_{yy} \quad I^i_{yz} \quad I^i_{zz} \quad M^i_x \quad M^i_y \quad M^i_z \quad m^i \quad J^i_{motor} \quad B^i_{motor} \quad \ldots\right)^T$$

Identificación de parámetros del robot

◦ Ejemplo: Robot plano RR vertical

$$K_t R I_m = \left(M(q) + J_m R^2\right)\ddot{q} + \left(C(q,\dot{q}) + B_m R^2\right)\dot{q} + G(q)$$



$$J_m R^2 = \begin{bmatrix} R_1^2 J_{m1} & 0 \\ 0 & R_2^2 J_{m2} \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$B_m R^2 = \begin{bmatrix} R_1^2 B_{m1} & 0 \\ 0 & R_2^2 B_{m2} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} L_1 &= l_1 - l_{c1} \\ L_2 &= l_2 - l_{c2} \end{aligned}$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2\left(l_1^2 + L_2^2 + 2 l_1 L_2 \cos(q_2)\right) + I_{zz1} + I_{zz2} & m_2\left(L_2^2 + l_1 L_2 \cos(q_2)\right) + I_{zz2} \\ m_2\left(L_2^2 + l_1 L_2 \cos(q_2)\right) + I_{zz2} & m_2 L_2^2 + I_{zz2} \end{bmatrix}$$

$$C(q,\dot{q}) = m_2 l_1 L_2 \sin(q_2) \begin{bmatrix} -2\dot{q}_2 & -\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G(q) = g \begin{bmatrix} (m_1 L_1 + m_2 l_1)\cos(q_1) + m_2 L_2 \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 L_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Identificación de parámetros del robot

◦ Ejemplo: Robot plano RR vertical

Parámetros dinámicos del eslabón 1

$$\theta_{5\times 1}^T = \left(I_{zz1} + m_1 L_1^2 \quad L_1 m_1 \quad m_1 \quad J_{m1} \quad B_{m1}\right)^T$$

Parámetros dinámicos del eslabón 2

$$\theta_5^T = \left(I_{zz2} + m_2 L_2^2 \quad L_2 m_2 \quad m_2 \quad J_{m2} \quad B_{m2}\right)^T$$

Parámetros dinámicos del robot

$$\theta_{10\times 1}^T = \left(I_{zz1} + m_1 L_1^2 \quad L_1 m_1 \quad m_1 \quad J_{m1} \quad B_{m1} \quad I_{zz2} + m_2 L_2^2 \quad L_2 m_2 \quad m_2 \quad J_{m2} \quad B_{m2}\right)^T$$

Ecuación matricial del robot: $K_t R I_m = \left(M(q) + J_m R^2\right)\ddot{q} + \left(C(q,\dot{q}) + B_m R^2\right)\dot{q} + G(q)$

Ecuación 1:

$$K_{t1} R_1 I_{m1} = \left(m_1 L_1^2 + m_2\left(l_1^2 + L_2^2 + 2 l_1 L_2 \cos(q_2)\right) + I_{zz1} + I_{zz2} + R_1^2 J_{m1}\right)\ddot{q}_1 + \left(m_2\left(L_2^2 + l_1 L_2 \cos(q_2)\right) + I_{zz2}\right)\ddot{q}_2$$
$$- m_2 l_1 L_2 \sin(q_2)\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + R_1^2 B_{m1}\dot{q}_1 + g(m_1 L_1 + m_2 l_1)\cos(q_1) + g m_2 L_2 \cos(q_1 + q_2)$$

Reordenando Ecuación 1:

$$K_{t1} R_1 I_{m1} = (\ddot{q}_1)\left(I_{zz1} + m_1 L_1^2\right) + \left(g\cos(q_1)\right)(m_1 L_1) + \left(\ddot{q}_1 R_1^2\right)J_{m1} + \left(\dot{q}_1 R_1^2\right)B_{m1} + (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\left(I_{zz2} + m_2 L_2^2\right) +$$
$$\left(l_1\cos(q_2)(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - l_1 \sin(q_2)\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + g\cos(q_1 + q_2)\right)(m_2 L_2) + \left(l_1^2\ddot{q}_1 + l_1 g\cos(q_1)\right)(m_2)$$

Identificación de parámetros del robot

- Ejemplo: Robot plano RR vertical

Ecuación 2:

$$K_{t2}R_2I_{m2} = \left(m_2\left(L_2{}^2 + l_1L_2\cos(q_2)\right) + I_{zz2}\right)\ddot{q}_1 + \left(m_2L_2{}^2 + I_{zz2} + R_2^2J_{m2}\right)\ddot{q}_2 + m_2l_1L_2\sin(q_2)\dot{q}_1^2 + R_2^2B_{m2}\dot{q}_2 + gm_2L_2\cos(q_1+q_2)$$

Reordenando Ecuación 2:

$$K_{t2}R_2I_{m2} = (\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)\left(m_2L_2{}^2 + I_{zz2}\right) + \left(l_1\left(\cos(q_2)\ddot{q}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2\right) + g\cos(q_1+q_2)\right)(m_2L_2) + \left(R_2^2\ddot{q}_2\right)(J_{m2}) + \left(R_2^2\dot{q}_2\right)(B_{m2})$$

Ecuación matricial del robot (lineal con parámetros dinámicos):

$$\begin{pmatrix} K_{t1}R_1I_{m1} \\ K_{t2}R_2I_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & g\cos(q_1) & 0 & \ddot{q}_1R_1^2 & \dot{q}_1R_1^2 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & l_1\cos(q_2)(2\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) - l_1\sin(q_2)\dot{q}_2(2\dot{q}_1+\dot{q}_2) + g\cos(q_1+q_2) & l_1{}^2\ddot{q}_1 + l_1g\cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & l_1\left(\cos(q_2)\ddot{q}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2\right) + g\cos(q_1+q_2) & 0 & R_2^2\ddot{q}_2 & R_2^2\dot{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{zz1} + m_1L_1{}^2 \\ m_1L_1 \\ m_1 \\ J_{m1} \\ B_{m1} \\ I_{zz2} + m_2L_2{}^2 \\ m_2L_2 \\ m_2 \\ J_{m2} \\ B_{m2} \end{pmatrix}$$

$$(K_tRI_m)_{2\times1} = y_{2\times1}(I_m,\dot{q}) = \varphi_{2\times10}(q,\dot{q},\ddot{q}) \times \theta_{10\times1}$$

Identificación de parámetros del robot

- **Identificabilidad de los parámetros:**
  - Los parámetros dinámicos de un robot de clasifican en tres grupos:
    - Totalmente identificables.
    - Parcialmente identificables: identificables en combinación lineal con otros parámetros.
    - No identificables.
  - La identificabilidad de los parámetros se puede analizar a partir del rango de columnas de φ(.), independientemente del valor de las articulaciones y sus derivadas.
    - Si una **columna de φ(.) es nula** (∀q,q̇,q̈), el parámetro es **no identificable**.
    - Si **dos columnas de φ(.) son linealmente dependientes** (∀q,q̇,q̈), los parámetros correspondientes son **parcialmente identificables**.

Identificación de parámetros del robot

- **Base de parámetros identificables:**
  - Un conjunto máximo de parámetros independientes indentificables.
  - Compuesta por parámetros totalmente identificables y "representantes" de parámetros parcialmente identificables.
  - La base no es única.

- **Obtención de una base utilizando el modelo dinámico $\varphi(.)$:**
  - Eliminar de candidatos a la base los parámetros correspondientes a columnas nulas de φ (y eliminar la correspondiente columna de φ).
  - Recorrer columnas desde la última a la primera, analizando la dependencia lineal entre columnas.
    - Una columna φ_j será linealmente dependiente de otras *r* columnas φ_{j1} … φ_{jr}, si $\varphi_j = \alpha_{j1}\varphi_{j1} + \ldots + \alpha_{jr}\varphi_{jr}$, con $\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jr}$ constantes.
    - En ese caso, eliminar la columna φ_j así como el parámetro θ_j , y reemplazar los parámetros θ_{jp} por $\theta_{jp} + \alpha_{jp}\,\theta_j +$, p=1,…,r

Identificación de parámetros del robot

- Ejemplo: Robot plano RR vertical

$$\begin{pmatrix} K_{t1}R_1I_{m1} \\ K_{t2}R_2I_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\ddot{q}_1} & g\cos(q_1) & \cancel{0} & \ddot{q}_1R_1^2 & \dot{q}_1R_1^2 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & l_1\cos(q_2)(2\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) - l_1\sin(q_2)\dot{q}_2(2\dot{q}_1+\dot{q}_2) + g\cos(q_1+q_2) & \cancel{l_1^2\ddot{q}_1 + l_1 g\cos(q_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & 0 & 0 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & l_1\left(\cos(q_2)\ddot{q}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2\right) + g\cos(q_1+q_2) & \cancel{0} & R_2^2\ddot{q}_2 & R_2^2\dot{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{zz1}+m_1L_1^2 \\ m_1L_1 \\ \cancel{m_1} \\ J_{m1} \\ B_{m1} \\ I_{zz2}+m_2L_2^2 \\ m_2L_2 \\ \cancel{m_2} \\ J_{m2} \\ B_{m2} \end{pmatrix}$$

m_1 no identificable

$$\alpha_1\ddot{q}_1 + \alpha_2 g\cos(q_1) = l_1^2\ddot{q}_1 + l_1 g\cos(q_1) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = l_1^2 \;,\quad \alpha_2 = l_1$$

⇩

$$\begin{pmatrix} K_{t1}R_1I_{m1} \\ K_{t2}R_2I_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & g\cos(q_1) & \cancel{\ddot{q}_1R_1^2} & \dot{q}_1R_1^2 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & l_1\cos(q_2)(2\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) - l_1\sin(q_2)\dot{q}_2(2\dot{q}_1+\dot{q}_2) + g\cos(q_1+q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & 0 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & l_1\left(\cos(q_2)\ddot{q}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2\right) + g\cos(q_1+q_2) & R_2^2\ddot{q}_2 & R_2^2\dot{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{zz1}+m_1L_1^2+m_2l_1^2 \\ m_1L_1+m_2l_1 \\ \cancel{J_{m1}} \\ B_{m1} \\ I_{zz2}+m_2L_2^2 \\ m_2L_2 \\ J_{m2} \\ B_{m2} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1\ddot{q}_1 = R_1^2\ddot{q}_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = R_1^2$$

⇩

Identificación de parámetros del robot

◦ Ejemplo: Robot plano RR vertical

$$
\begin{pmatrix} K_{t1}R_1 I_{m1} \\ K_{t2}R_2 I_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & g\cos(q_1) & \dot{q}_1 R_1^2 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & l_1\cos(q_2)(2\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) - l_1\sin(q_2)\dot{q}_2(2\dot{q}_1+\dot{q}_2) + g\cos(q_1+q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & l_1\left(\cos(q_2)\ddot{q}_1+\sin(q_2)\dot{q}_1^2\right) + g\cos(q_1+q_2) & R_2^2\ddot{q}_2 & R_2^2\dot{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{zz1}+m_1L_1^2+m_2l_1^2+R_1^2J_{m1} \\ m_1L_1+m_2l_1 \\ B_{m1} \\ I_{zz2}+m_2L_2^2 \\ m_2L_2 \\ J_{m2} \\ B_{m2} \end{pmatrix}
$$

$$
(K_t R I_m)_{2\times1} = y_{2\times1}(I_m, \dot{q}) = \varphi_{2\times7}(q,\dot{q},\ddot{q}) \times \theta_{7\times1}
$$

BASE DE 7 PARAMETROS IDENTIFICABLES

De los parámetros iniciales:

- Totalmente identificables: B_{m1}, $I_{zz2}+m_2L_2^2$, m_2L_2, J_{m2}, B_{m2}
- Parcialmente identificables: $I_{zz1}+m_1L_1^2$, m_1L_1, m_2, J_{m1} (estimables dos combinaciones de ellos).
- No identificables: m_1

¿Se podría estimar, por ejemplo, el valor de I_{xx1}?

Identificación de parámetros del robot

◦ Ejemplo: Robot plano RR vertical (MODELO NUMÉRICO)

$$
K_t R I_m = \left(M(q) + J_m R^2\right)\ddot{q} + \left(C(q,\dot{q}) + B_m R^2\right)\dot{q} + G(q)
$$

$R_1 = R_2 = 25$

$$
\begin{bmatrix} 250 & 0 \\ 0 & 250 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.6322 + 3.0\cos(q_2) & 1.0036 + 1.5\cos(q_2) \\ 1.0036 + 1.5\cos(q_2) & 16.6286 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} -1.5\sin(q_2)\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) + 0.0022\dot{q}_1 \\ -1.5\sin(q_2)\dot{q}_1^2 + 0.0022\dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 44.1\cos(q_2) + 14.7\cos(q_1+q_2) \\ 14.7\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 250 & 0 \\ 0 & 250 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11a} + M_{11b}\cos(q_2) & M_{12a} + M_{12b}\cos(q_2) \\ M_{12a} + M_{12b}\cos(q_2) & M_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} -V_{1a}\sin(q_2)\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) + V_{1b}\dot{q}_1 \\ -V_{2a}\sin(q_2)\dot{q}_1^2 + V_{2b}\dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{1a}\cos(q_2) + G_{1b}\cos(q_1+q_2) \\ G_{1b}\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}
$$

¿ $\theta_{11\times1}^T = \begin{pmatrix} M_{11a} & M_{11b} & M_{12a} & M_{12b} & M_{22} & V_{1a} & V_{1b} & V_{2a} & V_{2b} & G_{1a} & G_{1b} \end{pmatrix}^T$?

Identificación de parámetros del robot

◦ Más propiedades genéricas de los modelos dinámicos:

$$K_t R I_m = \left(M(q) + J_m R^2\right)\ddot{q} + \left(C(q,\dot{q}) + B_m R^2\right)\dot{q} + G(q)$$

- ***M(q)*** es simétrica y definida positiva
- ***$M_{ij}(q)$*** es función de $q_{k+1}, \ldots, q_n$, con $k=min(i,j)$, y de los parámetros inerciales de los eslabones $r, \ldots, n$, con $r=max(i,j)$.
- τ_i (o I_{mi}) depende de los parámetros inerciales de los eslabones $i, \ldots, n$
- *Lagrangiana:* $L = K(\dot{q},q) - U(q) \quad con\ K = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$

  Ecuaciones de Lagrange:

$$\tau - F(\dot{q}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(M(q)\dot{q}\right) - \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial U}{\partial q}$$

$$= M(q)\ddot{q} + \underbrace{\frac{dM(q)}{dt}\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q}\dot{q}}_{V(\dot{q},q)} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q}}_{G(q)}$$

- Los términos de V son cuadráticos en la velocidad
- Las **constantes de V no son independientes** de las de **M**

Identificación de parámetros del robot

◦ Ejemplo: Robot plano RR vertical (MODELO NUMÉRICO)

$$K_t R I_m = \left(M(q) + J_m R^2\right)\ddot{q} + \left(C(q,\dot{q}) + B_m R^2\right)\dot{q} + G(q)$$

$$\begin{bmatrix} 250 & 0 \\ 0 & 250 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11a} + M_{11b}\cos(q_2) & M_{12a} + M_{12b}\cos(q_2) \\ M_{12a} + M_{12b}\cos(q_2) & M_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -??\sin(q_2)\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) + V_{1b}\dot{q}_1 \\ -??\sin(q_2)\dot{q}_1^2 + V_{2b}\dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{1a}\cos(q_2) + G_{1b}\cos(q_1+q_2) \\ G_{1b}\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

¿ $\theta_{9\times1}^T = \left(M_{11a} \quad M_{11b} \quad M_{12a} \quad M_{12b} \quad M_{22} \quad V_{1b} \quad V_{2b} \quad G_{1a} \quad G_{1b}\right)^T$?

Sigue habiendo 9 parámetros, cuando la base de parámetros tenía solo 7.

Habrá que analizar el modelo teórico …

Identificación de parámetros del robot

- **Enfoques de los experimentos:**
  - **Identificación de parámetros en experimentos globales**
    - No hay errores acumulativos.
    - Complejidad de cálculos y de generación de señales de control (óptimas), relacionadas con el número de condición de $\varphi(.)$
  - **Identificación de parámetros secuencialmente**
    - Facilidad para generar trayectorias que exciten ciertos parámetros.
    - Acumulación de errores.
    - Movimientos suelen requerir **control** y **bloqueo** de algunas de las articulaciones **(¿cómo se simula el bloqueo de articulaciones?)**.
      - Movimientos con fuertes aceleraciones dan información de términos inerciales diagonales (con bloqueos) y de acoplamientos (con otras articulaciones a velocidad constante).
      - Experimentos a velocidades constantes dan información de términos de fricciones viscosas.
      - Experimentos con velocidades bajas o nulas dan información de términos gravitatorios.
      - ...

Realización de los experimentos

- **Adquisición y estimación de señales:**
  - Suele ser normal tomar medidas con un **tiempo de muestreo constante**.
  - **Si no se puede medir la velocidad**, hay que **estimarla** a partir de las medidas de posición.
  - No se suele poder medir las **aceleraciones**: hay que **estimarlas**.
  - Debido a cuantizaciones (encoders, resolución de tarjetas) y ruidos, es conveniente filtrar (**filtros de paso bajo**) datos **antes de aplicar derivadas** (no filtrar en exceso).
  - Si se realiza identificación fuera de línea, se recomienda el **filtro digital no causal para obtener derivadas** (evita pérdida de fase) :

$$\dot{q}(k) = \frac{q(k+1) - q(k-1)}{2T} \qquad con\ T: tiempo\ de\ muestreo$$

Realización de experimentos

- **Recomendaciones:**
  - En caso de robots con múltiples grados de libertad con dimensiones muy diferenciadas (por ejemplo, brazo y muñeca): primero muñeca y luego brazo (bloqueando muñeca).
  - Número de ecuaciones a utilizar en identificación: como mínimo del orden de 500 veces superior al número de parámetros a estimar.
  - Utilizar la desviación estándar relativa para comprobar la calidad de la estimación de los parámetros. Pobremente estimado si es superior al 15%.
  - Resultados muy dependientes de las señales de excitación: probar con varias (o calcular óptimas).
  - Validar resultados con otros experimentos de simulación.
  - Verificar que la matriz de inercia estimada es definida positiva.
  - Realizar experimentos con y sin carga.
  - …

Resultados experimentales

- **Condiciones de los experimentos (R=25):**
  - Señales de control: suma de senoides atenuadas en el tiempo con exponenciales negativas
  - Ts=0.001 s
  - Análisis de datos: 1 de cada 10
  - Parámetros reales:

$I_{zz1}+m_1L_1^2+m_2l_1^2+R_1^2J_{m1}$	$m_1L_1+m_2l_1$	B_{m1}	$I_{zz2}+m_2L_2^2$	m_2L_2	J_{m2}	B_{m2}
19.6286	4.5	3.6e-06	1.0036	1.5	2.5e-02	3.6e-06

- **Resultados:**
  - Con medidas perfectas:

$I_{zz1}+m_1L_1^2+m_2l_1^2+R_1^2J_{m1}$	$m_1L_1+m_2l_1$	B_{m1}	$I_{zz2}+m_2L_2^2$	m_2L_2	J_{m2}	B_{m2}
19.6286	4.5	3.6e-06	1.0036	1.5	2.5e-02	3.6e-06

  - Con estimación de la aceleración:

$I_{zz1}+m_1L_1^2+m_2l_1^2+R_1^2J_{m1}$	$m_1L_1+m_2l_1$	B_{m1}	$I_{zz2}+m_2L_2^2$	m_2L_2	J_{m2}	B_{m2}
20.51	4.48	-1.19e-02	0.255	1.75	2.62e-02	-4.31e-3

Resultados experimentales

- **Resultados de los experimentos (R=25):**
  - Modelo real:

$$\begin{bmatrix} 250 & 0 \\ 0 & 250 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.63+3.0\cos(q_2) & 1.004+1.5\cos(q_2) \\ 1.004+1.5\cos(q_2) & 16.63 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.5\sin(q_2)\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2\right)+0.00225\dot{q}_1 \\ -1.5\sin(q_2)\dot{q}_1^2+0.00225\dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 44.1\cos(q_2)+14.7\cos(q_1+q_2) \\ 14.7\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

Comprobar si M(q) es definida positiva

  - Modelo estimado:

$$\begin{bmatrix} 250 & 0 \\ 0 & 250 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.78+3.05\cos(q_2) & 0.25+1.75\cos(q_2) \\ 0.25+1.75\cos(q_2) & 16.65 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.751\sin(q_2)\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2\right) \\ -1.751\sin(q_2)\dot{q}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 43.89\cos(q_2)+17.16\cos(q_1+q_2) \\ 17.16\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

$I_{zz1}+m_1L_1^2+m_2l_1^2+R_1^2J_{m1}$	$m_1L_1+m_2l_1$	B_{m1}	$I_{zz2}+m_2L_2^2$	m_2L_2	J_{m2}	B_{m2}
20.51	4.48	0	0.255	1.75	2.62e-02	0

Otros enfoques

- **Estimación de la dinámica filtrada:**
  - Nuevo modelo filtrando las ecuaciones con filtro de paso bajo.
  - Evita tener que medir aceleraciones.
- **Estimación basado en la energía:**
  - Basado en conservación de energía mecánica.
  - Formulación Hamiltoniana.
  - Formulación integral (integra la potencia a lo largo del tiempo).
  - Posibles errores en baja frecuencia (offsets, ...).
- **Estimación basado en la potencia:**
  - Similar a la anterior, pero con formulación diferencial.
  - Evita errores de baja frecuencia.