Diseño de controladores por el lugar de las raíces

CONTROL Y PROGRAMACIÓN DE ROBOTS

Grado en Electrónica, Robótica y Mecatrónica

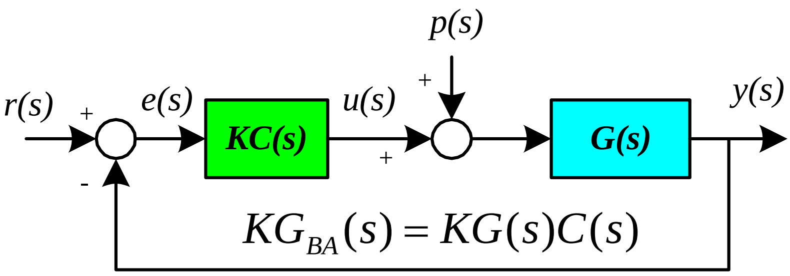
Índice

Introducción

- Diseño analítico de controladores sólo para sistemas de bajo orden, y no se percibe la idea intuitiva de las distintas posibilidades de diseño.
- **Lugar de las raíces**: proporciona una perspectiva gráfica de las posibilidades de diseño.
- Diseño basado en modelo, con especificaciones temporales en bucle cerrado expresadas en términos de localización de polos, ceros y ganancia del sistema en bucle cerrado.

¿Hasta qué punto se puede confiar en el modelo?

Introducción



$$G_{BC}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{KG(s)C(s)}{1+KC(s)G(s)}$$

$$G_{BC}^{Pert}(s) = \frac{y(s)}{p(s)} = \frac{G(s)}{1+KC(s)G(s)}$$

Las funciones de transferencia en bucle cerrado tienen el mismo denominador, y sus polos dependen del valor de K

Lugar de las raíces

- **Definición:**

> **Lugar geométrico que forman los polos en bucle cerrado de un sistema al variar la ganancia del sistema en bucle abierto, K.**

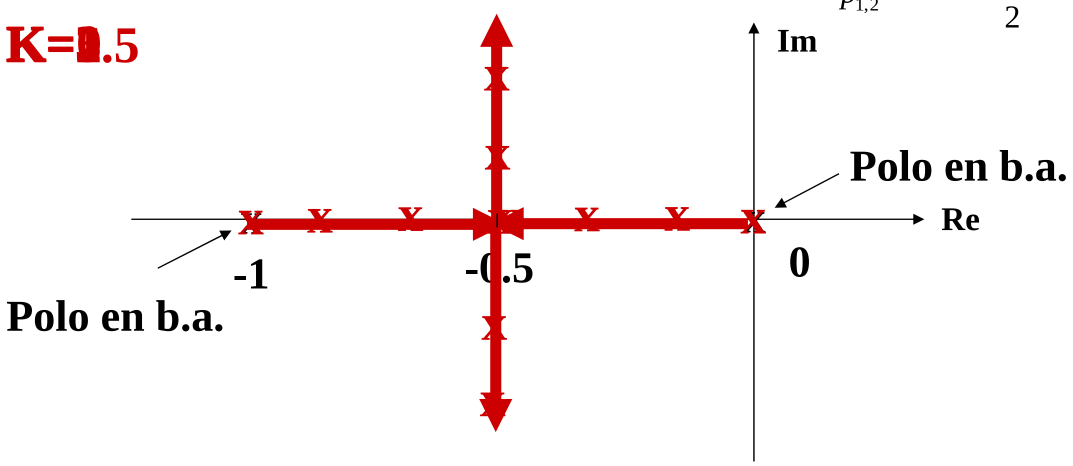
Lugar de las raíces

- Ejemplo:

$$\boxed{KG_{BA}(s) = \frac{0.1K}{(s+1)s} \quad \Rightarrow \quad G_{BC}(s) = \frac{0.1K}{s^2 + s + 0.1K}}$$

polos en bucle cerrado

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-0.4K}}{2}$$



Ecuación del lugar de las raíces

$$KG_{BA}(s)=\frac{KN_{BA}(s)}{D_{BA}(s)} \quad\Rightarrow\quad G_{BC}(s)=\frac{N_{BC}(s)}{D_{BC}(s)}=\frac{KG_{BA}(s)}{1+KG_{BA}(s)}=\frac{KN_{BA}(s)}{D_{BA}(s)+KN_{BA}(s)}$$

Lugar de las raíces: $D_{BC}(s)=0$

$$\boxed{KG_{BA}(s)=-1} \qquad s\in\mathbf{C}$$

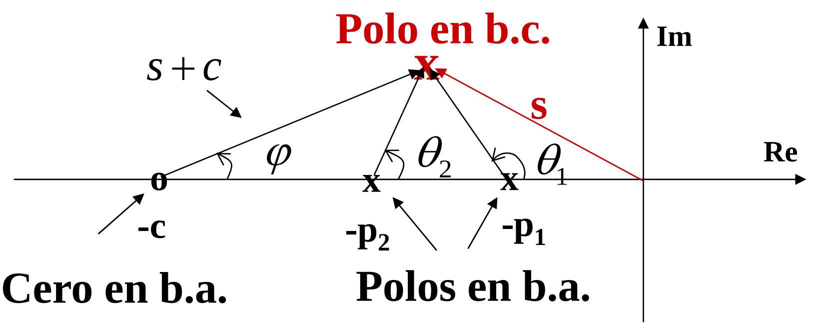
Módulo: $\left|KG_{BA}(s)\right|=1$

Fase: $\langle KG_{BA}(s)\rangle=\begin{cases}-180^o & si\ \ K>0\\ -360^o & si\ \ K<0\end{cases}$

Ecuación del lugar de las raíces

La ecuación de fase proporciona la forma del lugar geométrico: $KG_{BA}(s)=K\dfrac{(s+c)}{(s+p_1)(s+p_2)}$

$$s\in l.r. \Leftrightarrow \langle KG_{BA}(s)\rangle=\underbrace{\langle K\rangle}_{=0}+\underbrace{\langle s+c\rangle}_{=\varphi}-\underbrace{\langle s+p_1\rangle}_{=\theta_1}-\underbrace{\langle s+p_2\rangle}_{=\theta_2}=-180^o$$



Ecuación del lugar de las raíces

La ecuación de fase proporciona la forma del lugar geométrico:

$$\boxed{s \in l.r. \Leftrightarrow \sum \varphi_i - \sum \theta_j = -180^o}$$

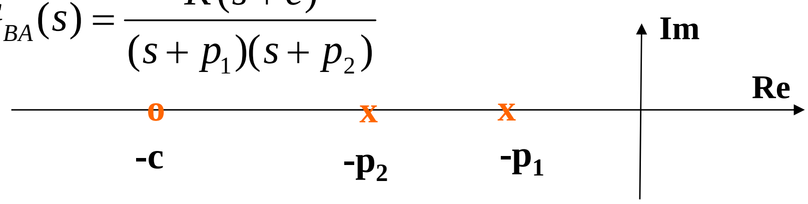
La ecuación de módulo proporciona el valor de la ganancia para obtener unas raíces en bucle cerrado concretas del lugar geométrico.

$$\boxed{\left| KG_{BA}(s) \right|_{s \in l.r.} = 1}$$

Reglas de trazado de la gráfica

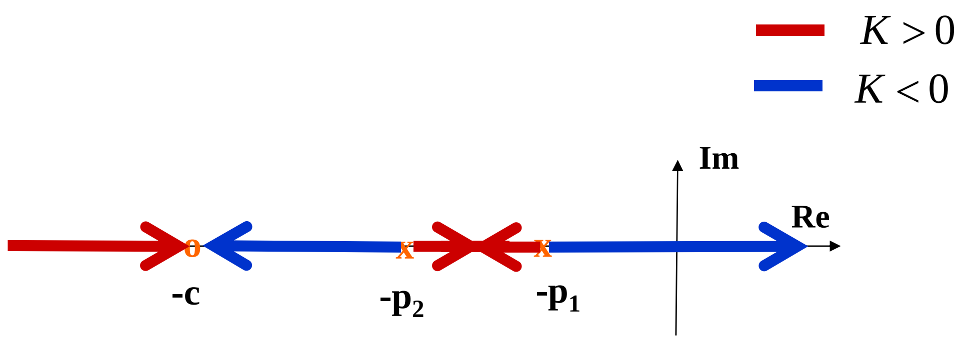
- Marcar los **polos (x)** y los **ceros (o)** de $\mathbf{G_{BA}(s)}$
- **nº ramas** = nº polos de $G_{BA}(s)$
- Las ramas **nacen** en los **polos** de $G_{BA}(s)$ (para **K=0**) y **mueren** (para **K=∞**) en los **ceros** de $G_{BA}(s)$ o en el **infinito** (asíntotas).

$$KG_{BA}(s) = \frac{K(s+c)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$



Reglas de trazado de la gráfica

- Pertenecen al l.r. (**K>0**) los **tramos del eje real** que dejan a su derecha un número **impar** de **ceros/polos** de $G_{BA}(s)$.
- Pertenecen al l.r. (**K<0**) los **tramos del eje real** que no pertenezcan al l.r. con K>0.



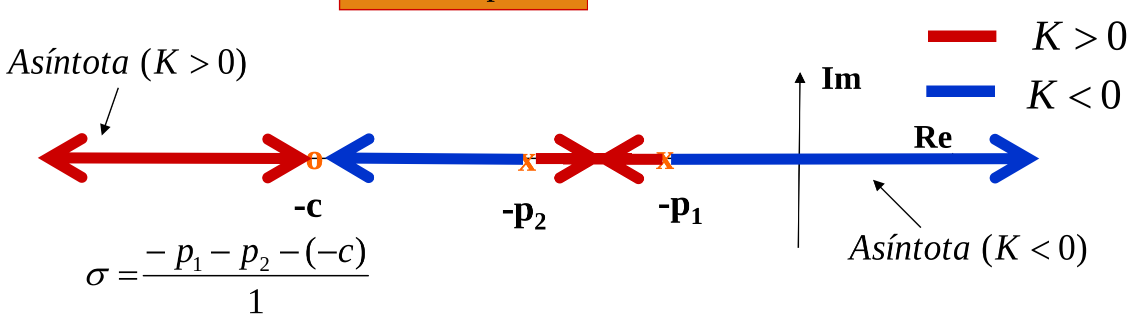
Reglas de trazado de la gráfica

- **Asíntotas: (Nº asíntotas = exceso de polos)**
- **Ángulos:**

$$\begin{cases} K>0: \dfrac{180^{\circ}(2n+1)}{exc.\ polos} & n: 0,1,\ldots, exc.\ polos-1 \\ K<0: \dfrac{180^{\circ}(2n)}{exc.\ polos} & n: 0,1,\ldots, exc.\ polos-1 \end{cases}$$

- **Centroide:**

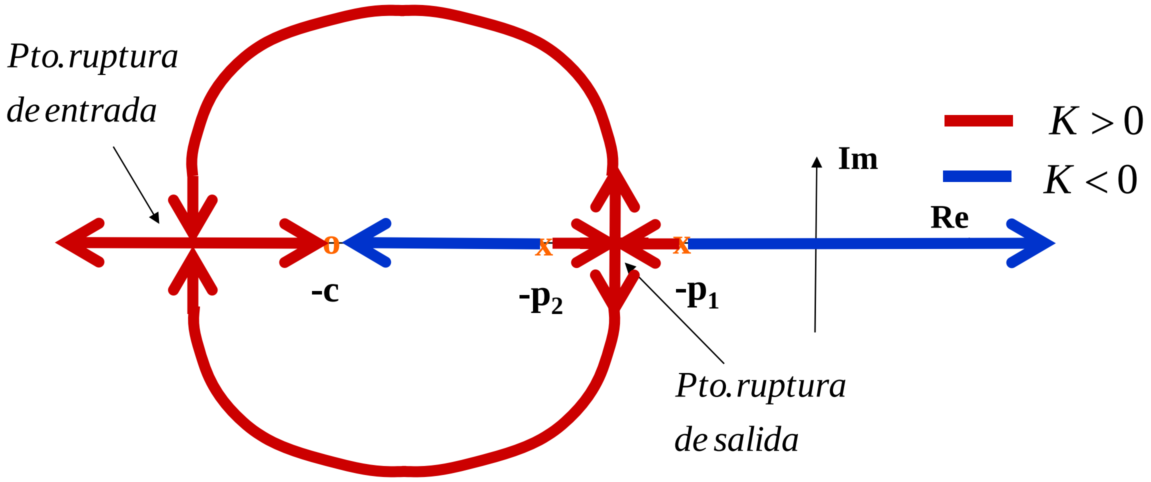
$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum c_j}{exc.\ polos}$$



Reglas de trazado de la gráfica

◦ **Puntos de ruptura y otras reglas …**

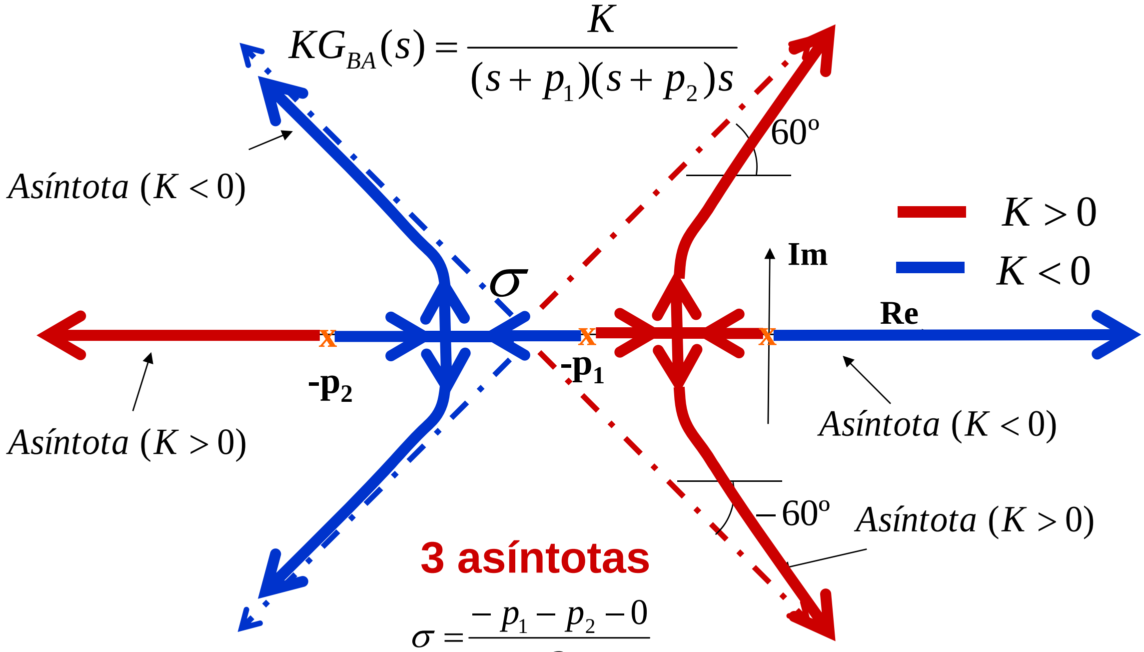
rltool



BOCETO

Ejemplos

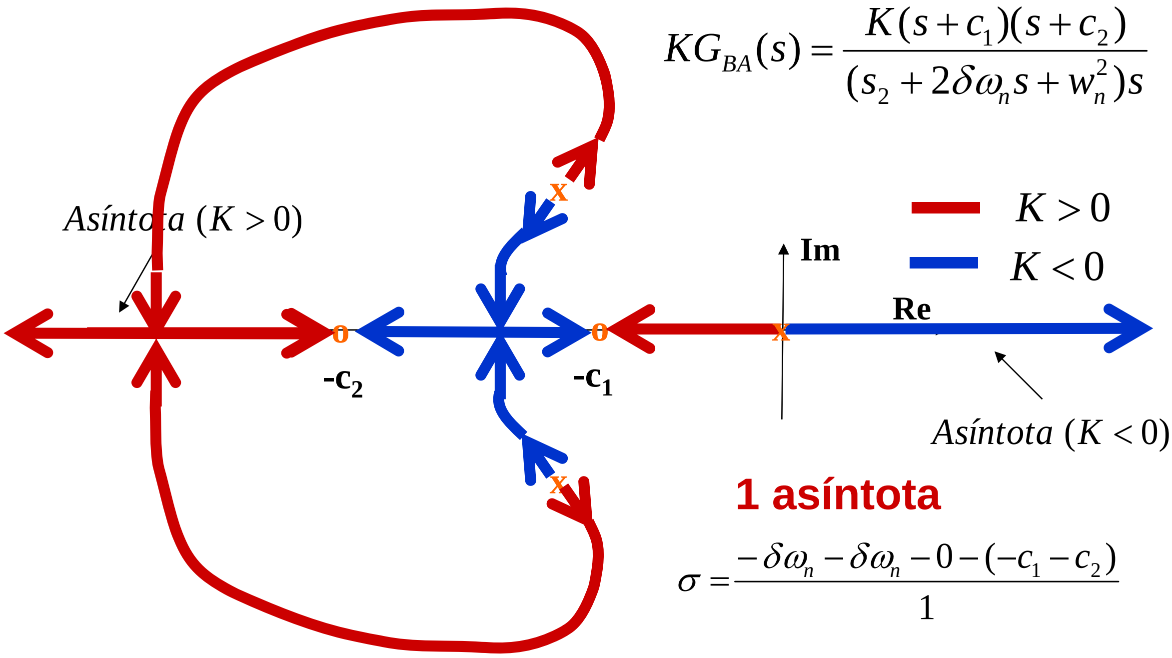
$$KG_{BA}(s) = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)s}$$



3 asíntotas

$$\sigma = \frac{-p_1 - p_2 - 0}{3}$$

Ejemplos



$$KG_{BA}(s) = \frac{K(s+c_1)(s+c_2)}{(s_2+2\delta\omega_n s+w_n^2)s}$$

$$\sigma = \frac{-\delta\omega_n - \delta\omega_n - 0 - (-c_1 - c_2)}{1}$$

Herramientas de cálculo

Herramienta para hacer cálculos concretos:

rltool

(Control Toolbox de Matlab)

Diseño de controladores con l.r.

- **Procedimiento:**
  1. **Añadir y situar polos y ceros de C(s)** para dar forma al lugar de las raíces
  2. **Ajustar la ganancia** para conseguir las raíces en bucle cerrado deseadas.

  - La **adición de un cero en el controlador** hace que las ramas tiendan hacia el SPI (*sistema en b.c. más estable*).
  - La **adición de un polo en el controlador** hace que las ramas tiendan hacia el SPD (sistema en b.c. menos estable).

Polos y ceros en bucle cerrado

- **Seguimiento:** $G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$ $KC(s) = K\frac{N_C(s)}{D_C(s)}$

$$\boxed{G_{BC}(s) = \frac{KC(s)G(s)}{1+KC(s)G(s)} = \frac{KN_C(s)N_G(s)}{D_C(s)D_G(s)+KN_C(s)N_G(s)}}$$

  - Polos en bucle cerrado:
    - Raíces del denominador de GBC(s).
  - Ceros en bucle cerrado:
    - Los mismos que los de bucle abierto, salvo que se cancelen.
    - No se pueden cancelar polos y ceros en el SPD.

Polos y ceros en bucle cerrado

- **Regulación:** $G(s)=\dfrac{N_G(s)}{D_G(s)}$ $\quad KC(s)=K\dfrac{N_C(s)}{D_C(s)}$

$$\boxed{G_{BC}^{Pert}(s)=\frac{G(s)}{1+KC(s)G(s)}=\frac{KD_C(s)N_G(s)}{D_C(s)D_G(s)+KN_C(s)N_G(s)}}$$

- Polos en bucle cerrado:
  - Los mismos que en los de seguimiento.
- Ceros en bucle cerrado:
  - Ceros del sistema.
  - Polos del controlador.

Control de sistemas de primer orden

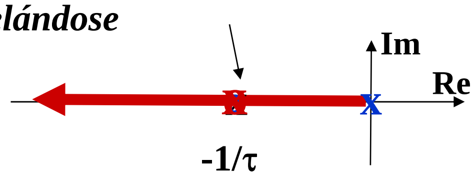
- Control por <u>**cancelación de dinámica**</u>:

NO VÁLIDO SI EL SISTEMA ES INESTABLE

- Modelo: $\boxed{G(s)=\dfrac{K}{\tau s+1}}$ Control: $\boxed{C(s)=\dfrac{K_c}{s}\dfrac{\tau s+1}{K}}$ **PI**

SEGUIMIENTO

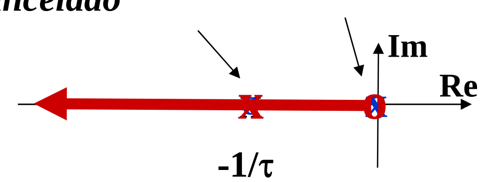
Polo y cero en b.c. cancelándose



REGULACIÓN

Polo en b.c. no cancelado

Cero en b.c.



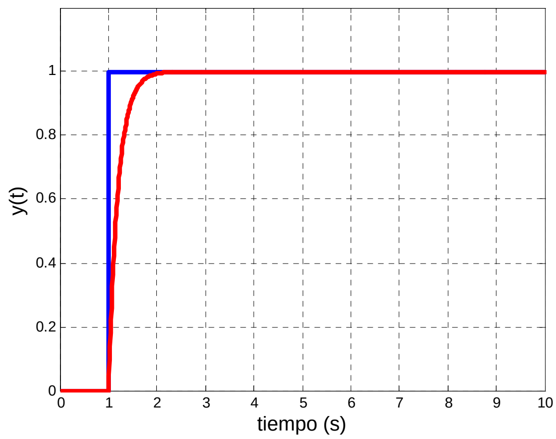
Control de sistemas de primer orden

- Ejemplo: $G(s) = \dfrac{10}{s+1}$

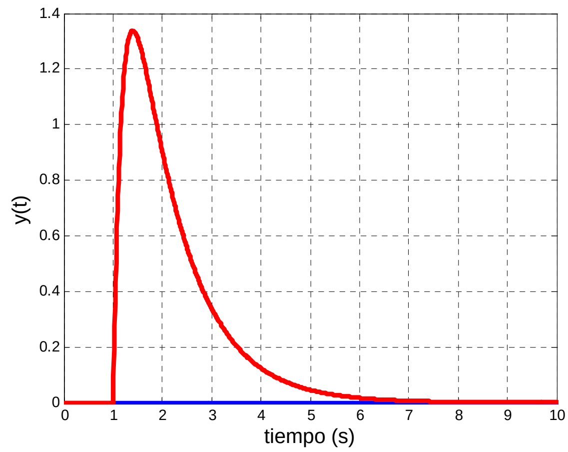
CANCELACIÓN DE DINÁMICA

$$C(s) = K_c \frac{s+1}{s} \qquad K_c = 0.5 \qquad p_{bc} = -5$$

SEGUIMIENTO



REGULACIÓN



Control de sistemas de primer orden

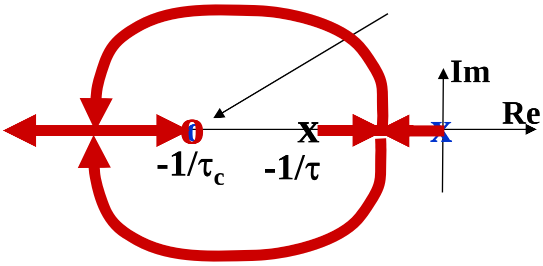
- Control **sin cancelación de dinámica**:

- Modelo: $\boxed{G(s) = \dfrac{K}{\tau s+1}}$ Control: $\boxed{C(s) = \dfrac{K_c}{s}\dfrac{\tau s+1}{K}}$ **PI**

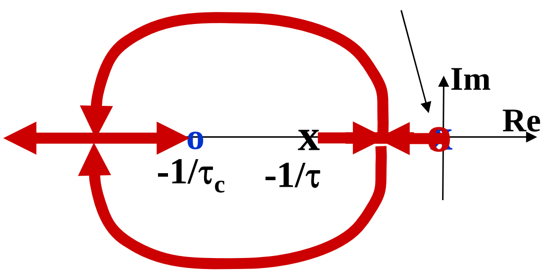
$\boxed{\tau_c \neq \tau}$

SEGUIMIENTO

cero en b.c.



REGULACIÓN



Control de sistemas de primer orden

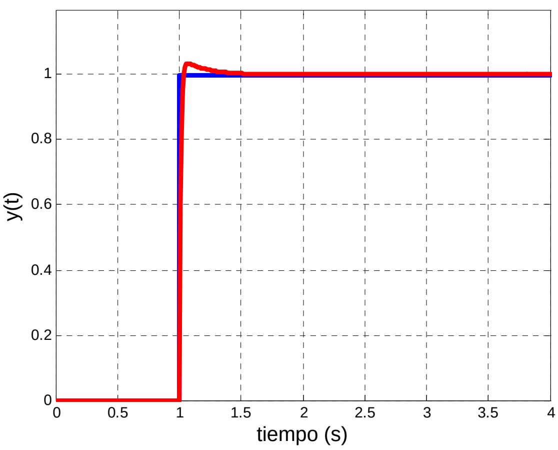
- **Ejemplo:** $G(s) = \dfrac{10}{s+1}$

SIN CANCELACIÓN DE DINÁMICA

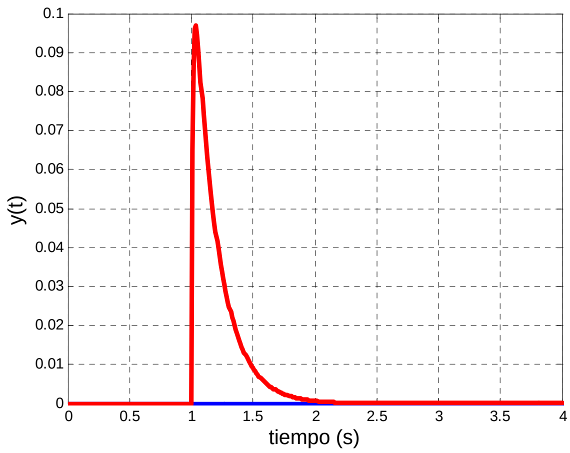
$$C(s) = K_P \frac{T_I s + 1}{T_I s} \qquad K_P = 9 \qquad T_I = 0.2\,s$$

2 polos bc en s=-9.5

SEGUIMIENTO

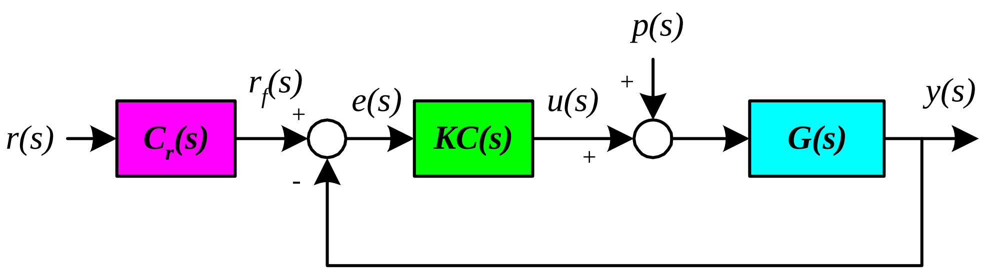


REGULACIÓN



Control con dos grados de libertad

- **Objetivo:** **prefiltrar la referencia**, con $C_r(s)$, para suavizar la respuesta ante seguimiento, sin afectar al comportamiento ante rechazo a perturbaciones



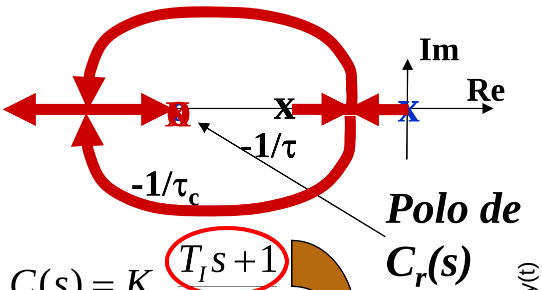
$$G_{BC}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \underbrace{\frac{KC(s)G(s)}{1+KC(s)G(s)}}_{G_{BC}(s)\ 1g.d.l.} C_r(s)$$

$$G_{BC}^{Pert}(s) = \frac{y(s)}{p(s)} = \frac{G(s)}{1+KC(s)G(s)}$$

Control con dos grados de libertad

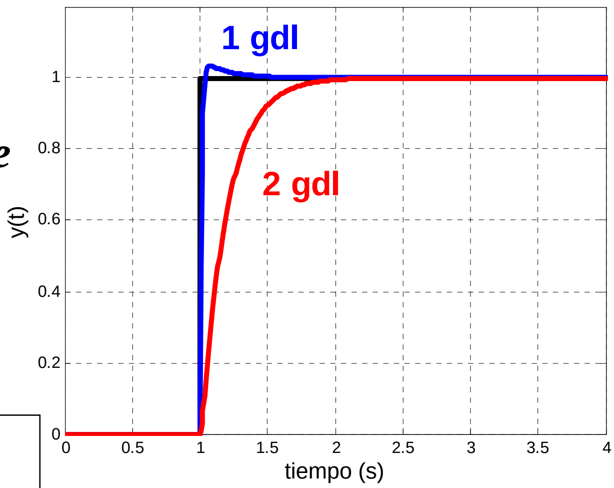
- Aplicación al control sin cancelación de dinámica:

“Utilizar *$C_r(s)$* para cancelar los ceros en b.c. no deseados”



$$C(s) = K_P \frac{T_I s + 1}{T_I s}$$

$$C_r(s) = \frac{1}{T_I s + 1}$$



***$C_r(s)$* debe tener ganancia estática unitaria**

Control de sistemas de segundo orden

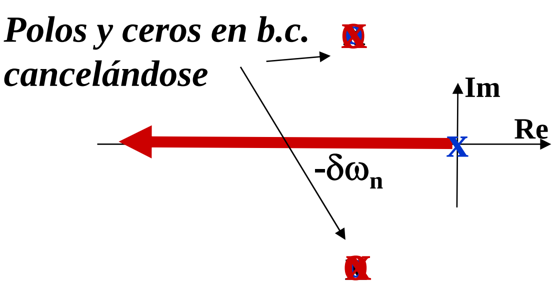
- Control por <u>**cancelación de dinámica**</u>:

NO VÁLIDO SI EL SISTEMA ES INESTABLE

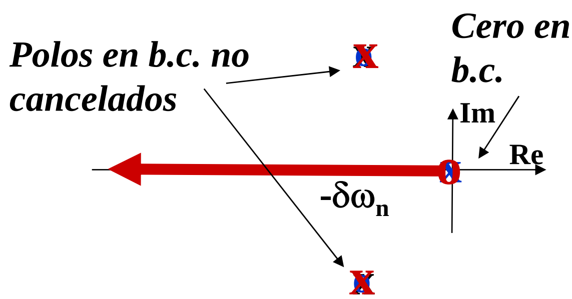
PID

- Modelo: $G(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$ Control: $C(s) = \dfrac{K_c}{s}\dfrac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}{K\omega_n^2}$

SEGUIMIENTO



REGULACIÓN



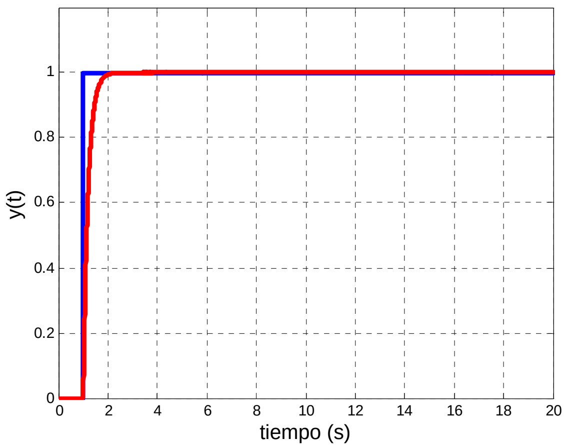
Control de sistemas de segundo orden

- Ejemplo: $G(s) = \dfrac{10}{s^2 + 0.2s + 1}$

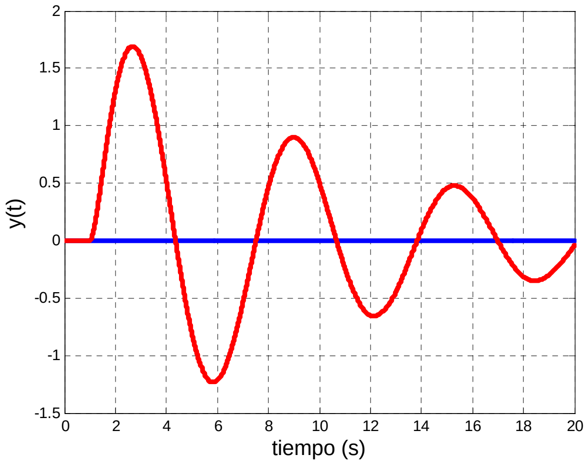
CANCELACIÓN DE DINÁMICA

$$C(s) = \frac{K_c}{s}\,\frac{s^2 + 0.2s + 1}{10} \qquad K_c = 5$$

SEGUIMIENTO



REGULACIÓN



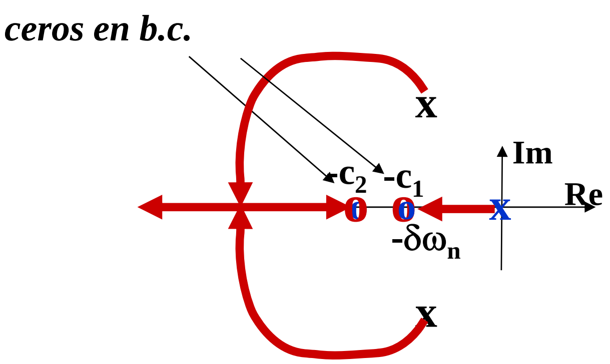
Control de sistemas de segundo orden

- Control **sin cancelación de dinámica**:

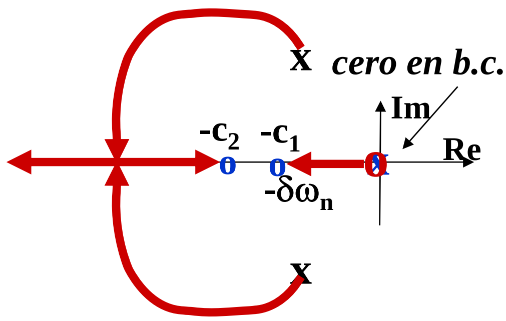
PID

- Modelo: $G(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$ Control: $C(s) = K_C \dfrac{(s + c_1)(s + c_2)}{s}$

SEGUIMIENTO



REGULACIÓN



Control de sistemas de segundo orden

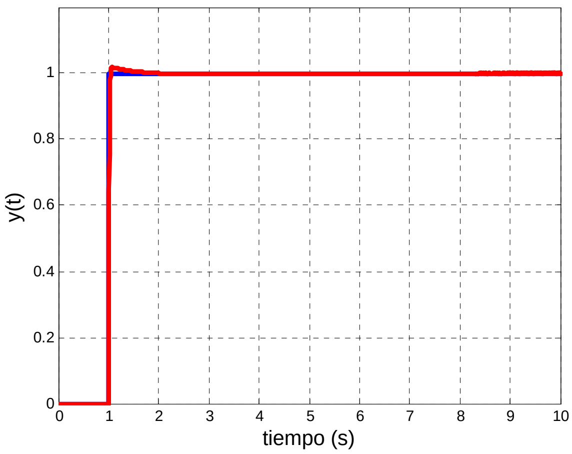
◦ Ejemplo: $G(s) = \dfrac{10}{s^2 + 0.2s + 1}$

SIN CANCELACIÓN DE DINÁMICA

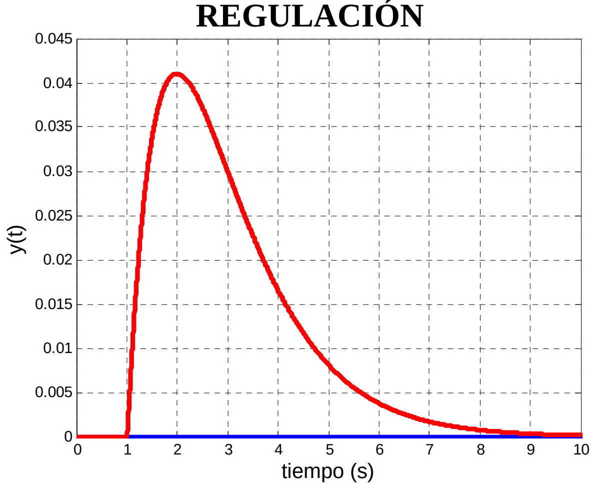
$$C(s) = K_C \frac{(s+c)^2}{s} \qquad K_C = 0.7 \quad c = 1$$

2 polos bc en s=-3.3 y otro en s=-0.65

SEGUIMIENTO



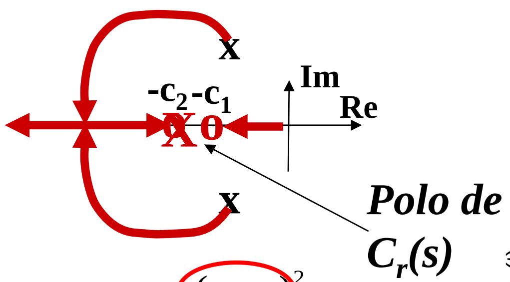
REGULACIÓN



Control con dos grados de libertad

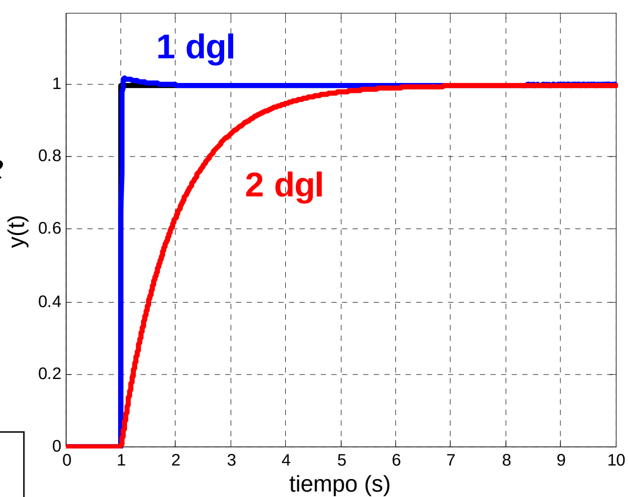
◦ Aplicación al control sin cancelación de dinámica:

"Utilizar *$C_r(s)$* para cancelar los ceros en b.c. no deseados"



$$C(s) = K_C \frac{(s+c)^2}{s}$$

$$C_r(s) = \frac{c}{s+c}$$



***$C_r(s)$* debe tener ganancia estática unitaria**

Control de sistemas de tipo 1

- Control por **cancelación de dinámica**:

NO VÁLIDO SI EL SISTEMA ES INESTABLE

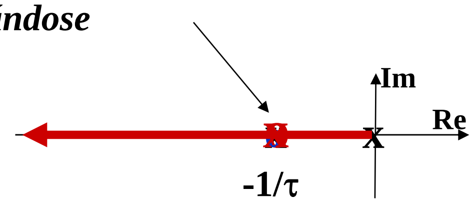
PD

- Modelo: $\boxed{G(s)=\dfrac{K}{(\tau s+1)s}}$ Control: $\boxed{C(s)=K_P(\tau s+1)}$

Si perturbaciones no son importantes

SEGUIMIENTO

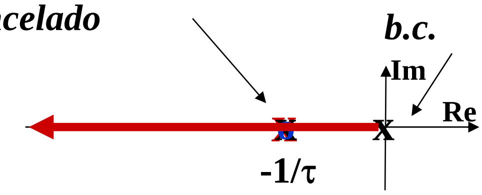
Polo y cero en b.c. cancelándose



REGULACIÓN

Polo en b.c. no cancelado

Sin cero en b.c.



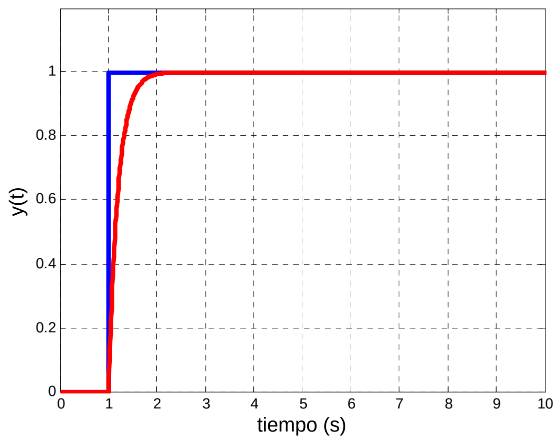
Control de sistemas de tipo 1

- Ejemplo: $G(s)=\dfrac{10}{(s+1)s}$

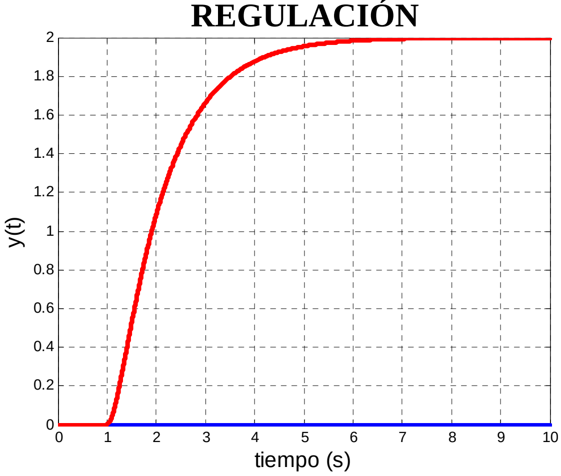
CANCELACIÓN DE DINÁMICA

$$C(s)=\frac{K_c}{10}(s+1) \quad K_c=5$$

SEGUIMIENTO



REGULACIÓN

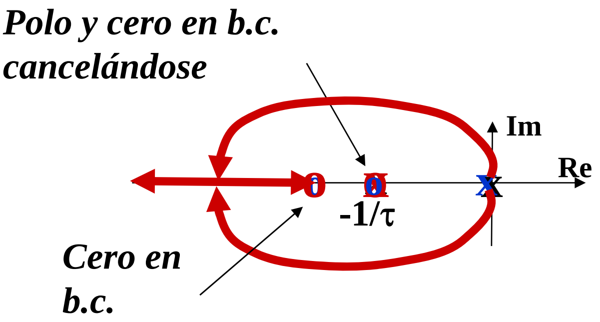


Control de sistemas de tipo 1

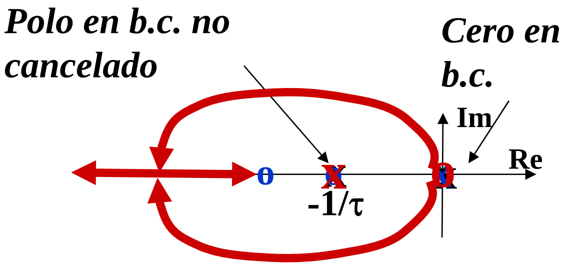
- Control **sin cancelación de dinámica**: **PID**
- Modelo: $\boxed{G(s)=\dfrac{K}{(\tau s+1)s}}$ Control: $\boxed{C(s)=\dfrac{K_C}{K}\dfrac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{s}}$

Si perturbaciones son importantes

SEGUIMIENTO



REGULACIÓN



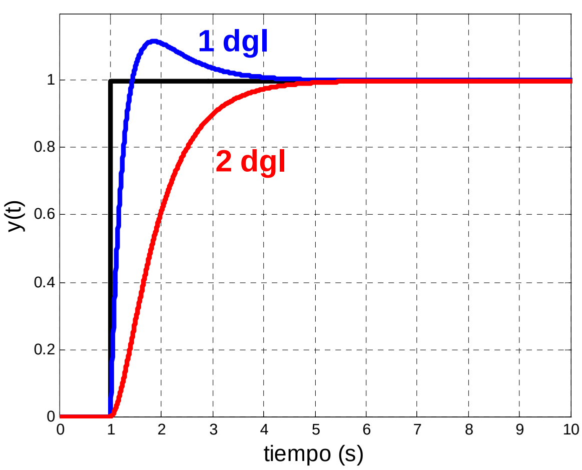
Control de sistemas de tipo 1

- Ejemplo: $G(s)=\dfrac{10}{(s+1)s}$

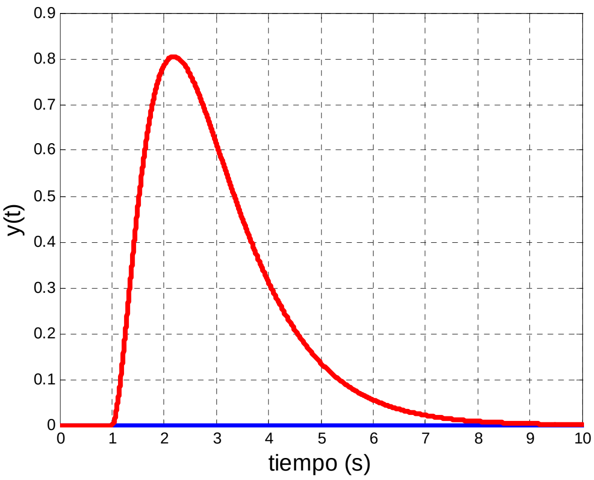
SIN CANCELACIÓN DE DINÁMICA

$$C(s)=\frac{5}{10}\frac{(s+1)^2}{s} \qquad C_r(s)=\frac{1}{(s+1)}$$

SEGUIMIENTO



REGULACIÓN

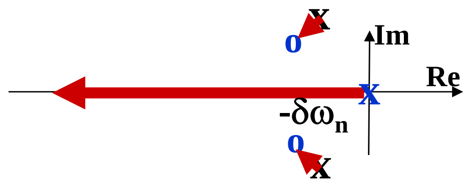


Fiabilidad de los modelos

- **La fiabilidad de un "modelo para control" depende de las especificaciones en bucle cerrado.**
- **Regla práctica: un modelo es fiable si su respuesta temporal es similar (en porcentaje) a la del sistema real, en los tiempos en los que se pretende controlar el sistema.**
- **Este concepto se justifica más claramente en el dominio frecuencial.**

Análisis de incertidumbres

- **Incertidumbre paramétrica: cuasi-cancelaciones en baja frecuencia (no afecta excesivamente).**



- **Dinámica no modelada:**