ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

2η Εργασία

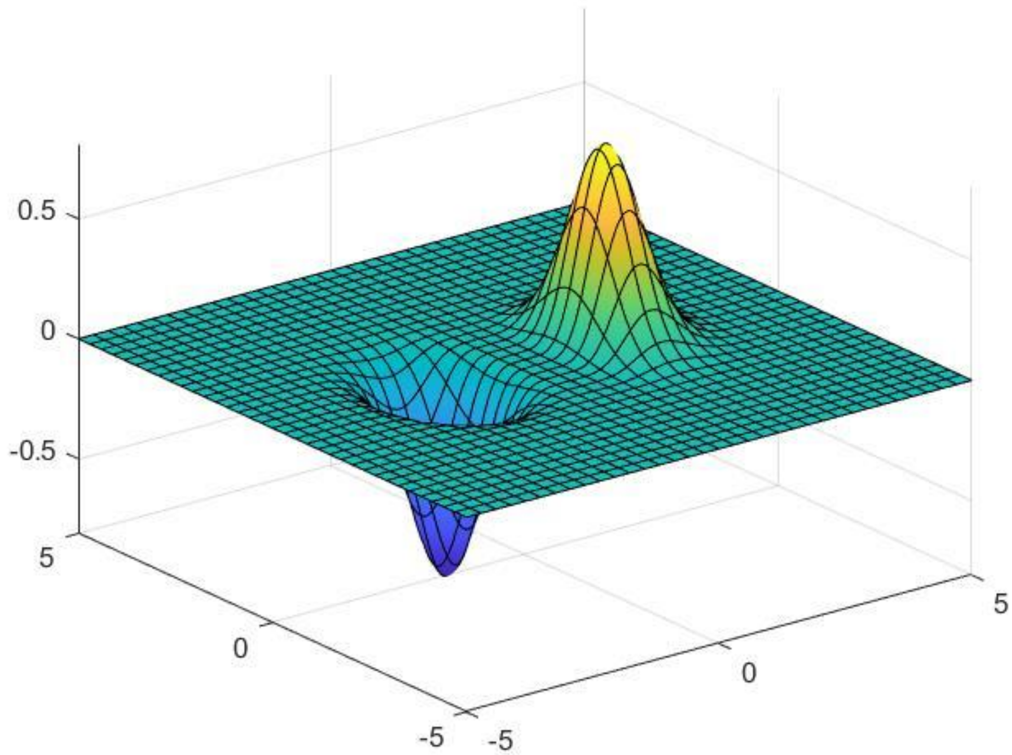
Παναγιώτης

Καρβουνάρης

ΑΕΜ 10193

Αντικειμενική συνάρτηση: f(x,y) = x^5 * exp(-x^2 -y^2).

Αρχικά, μέσω του MatLab σχεδιάζουμε την f(x,y) και παίρνουμε το παρακάτω σχήμα.



Έχοντας ως βάση αυτήν την σχεδίαση της f τρέχουμε διάφορους αλγορίθμους βελτιστοποίησης.

Οι αλγόριθμοι αυτοί θα τρέξουν από 3 διαφορετικά αρχικά σημεία i) (0, 0) ii) (-1, 1) και iii) (1, -1) και με 3 διαφορετικούς τρόπους επιλογής του βήματος γκ α) σταθερό β) τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xκ + γκ * dκ) και γ) βάσει του κανόνα Armijo.

Το ελάχιστο της συνάρτησης είναι περίπου το:

f(-1.581, 0) = -0.8112

Steepest Descent

Παίρνουμε την περίπτωση όπου γκ είναι σταθερό (γκ = 0.1).
Ο αλγόριθμος κατέληξε στα σημεία:

i) f (0, 0) = 0
ii) f (-1.581134, 0.005338) = 0.8111
iii) f (0.327134, -1.268546) = 0.0006

Παρατηρούμε ότι στις περιπτώσεις i και iii δεν συγκλίνουμε στο επιθυμητό σημείο γεγονός που είναι λογικό καθώς εξαιτίας του σημείο εκκίνησης η κλίση της f έγινε μηδέν σε κάποιο τοπικό ακρότατο με αποτέλεσμα να τερματίσει ο αλγόριθμος χωρίς να μας δώσει την βέλτιστη λύση.
Ενώ στην περίπτωση ii όπου το σημείο εκκίνησης είναι πιο κοντά στο ολικό ακρότατο ο αλγόριθμος κατέληξε στο βέλτιστο αποτέλεσμα.

Παίρνουμε τώρα την περίπτωση όπου γκ είναι τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xκ + γκ * dκ).
Ο αλγόριθμος κατέληξε στα σημεία:

i) f (0, 0) = 0
ii) f (-1.5827, 0.0045) = -0.8112
iii) f (-0.9864, -2.3242) = 2.4823e-08 (= 0)

Καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με την προηγούμενη περίπτωση. Αν και βελτιώσαμε τον τρόπο εύρεσης του βήματος γκ, αυτό δεν ήταν αρκετό για να καταλήξουμε στο σωστό αποτέλεσμα.

Παίρνουμε τώρα την περίπτωση όπου βρίσκουμε το γκ βάσει του κανόνα Armijo.
Ο αλγόριθμος κατέληξε στα σημεία:

i) $f(0, 0) = 0$
ii) $f(-1.5811, 0.0061) = -0.8111$
iii) $f(-3.0601, -3.7067) = -0.0016$

Καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με την πρώτη περίπτωση. Αν και βελτιώσαμε τον τρόπο εύρεσης του βήματος γκ, αυτό δεν ήταν αρκετό για να καταλήξουμε στο σωστό αποτέλεσμα.

Newton

Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει μία συγκεκριμένη ιδιαιτερότητα, έχει ως αναγκαία προϋπόθεση ο Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης f να είναι θετικά ορισμένος. Στην δική μας συνάρτηση ο Εσσιανός της f δεν είναι θετικά ορισμένος με αποτέλεσμα κανένας από τους αλγορίθμους που υλοποιήθηκαν στην MatLab να μην μπορεί να δώσει κάποιο αποτέλεσμα. Ο αλγόριθμος πρακτικά δεν ξεκινάει ποτέ καθώς αν ο Εσσιανός δεν είναι θετικά ορισμένος τότε τα αποτελέσματα του αλγορίθμου δεν είναι έγκυρα. Η αποτυχία αυτή είναι ανεξάρτητη τόσο από την επιλογή του σημείου εκκίνησης του αλγορίθμου όσο και από τον τρόπο επιλογής του βήματος γκ. Επομένως, η μέθοδος Newton δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης f.

Levenberg – Marquardt

Σε αντίθεση με την μέθοδο Newton, η μέθοδος Levenberg – Marquardt αναγκάζει το άθροισμα του Εσσιανού πίνακα της f με ένα θετικό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου πίνακα να είναι θετικά ορισμένος πίνακας μέσω της επιλογής του μκ σύμφωνα με το τύπο:

Hessian(f) + μκ * I , θετικά ορισμένος πίνακας

Παίρνουμε πρώτα την περίπτωση όπου γκ είναι σταθερό (γκ = 0.1).
Ο αλγόριθμος κατέληξε στα σημεία:

i) f (0, 0) = 0
ii) f (-1.5811, 0.0060) = -0.8111
iii) f (0.2981, -1.1258) = 0.0006

Παρατηρούμε τα ίδια αποτελέσματα με τους προηγούμενους αλγορίθμους.

Παίρνουμε την περίπτωση όπου γκ είναι τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f(xκ + γκ * dκ).
Ο αλγόριθμος κατέληξε στα σημεία:

i) f (0, 0) = 0
ii) f (-1.5799, 0.0017) = -0.8112
iii) f (-1.5809, 0.0033) = -0.8112

Εδώ με την χρήση γκ τέτοιο ώστε να βελτιστοποιεί την f(xκ + γκ * dκ) παρατηρούμε ότι δύο από τα σημεία (όχι το (0,0)) συγκλίνουν στο σωστό αποτέλεσμα. Πρακτικά, με την χρήση αυτής της βελτιωμένης μεθόδου κατά την διάρκεια βελτιστοποίησης του σημείου (1, -1), το οποίο τις προηγούμενες φορές κατέληγε σε σημεία με μηδενική κλίση αλλά τοπικά ακρότατα της f, καταφέραμε να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα επειδή το βήμα γκ επιλέγονταν με βέλτιστο τρόπο κάθε φορά πριν την χρήση του.

Παίρνουμε τέλος την περίπτωση όπου βρίσκουμε το γκ βάσει του κανόνα Armijo.
Ο αλγόριθμος κατέληξε στα σημεία:

i) f (0, 0) = 0
ii) f (-1.5810, 0.0060) = -0.8111
iii) f (-1.5795, -0.0050) = -0.8111

Αντίστοιχα με το προηγούμενο ερώτημα, ο αλγόριθμος καταλήγει σε σωστό αποτέλεσμα για 2 από τα 3 σημεία εκκίνησης, εξαιτίας πάλι της σωστής επιλογής του βήματος γκ.

Συμπέρασμα

Το σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου έχει μεγάλη σημασία καθώς μπορεί να καταλήγει σε κάποιο τοπικό ακρότατο και η λύση να περιορίζεται στην γειτονιά του γεγονός που δεν είναι επιθυμητό (π.χ το σημείο (1, -1)) και φυσικά αν το σημείο εκκίνησης είναι τοπικό ακρότατο, δηλαδή η κλίση της συνάρτησης είναι μηδενική στο σημείο εκείνο τότε ο αλγόριθμος δεν οδηγεί πουθενά και τερματίζει στο ίδιο σημείο.

Όσον αφορά την μέθοδο Newton, θέλει μεγάλη προσοχή το γεγονός ότι μπορεί να εφαρμοσθεί και να φέρει σωστά αποτελέσματα, μόνο όταν ο Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι θετικά ορισμένος. Σε άλλη περίπτωση τρέχει κανονικά αλλά τα αποτελέσματα του είναι εσφαλμένα.

Μεγάλη σημασία στην αποτελεσματικότητα των παραπάνω αλγορίθμων έχει η επιλογή του βήματος γκ. Παρατηρούμε ότι όταν χρησιμοποιούμε μεταβλητό γκ, το οποίο υπολογίζουμε σε κάθε επανάληψη βρίσκοντας ένα καλύτερο γκ κάθε φορά, βελτιώνει πολύ την ταχύτητα αλλά και την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου, καθώς οδηγεί την λύση πιο εύκολα στο σωστό αποτέλεσμα, αποφεύγοντας αρκετές παγίδες (όπως τα περισσότερα τοπικά ακρότατα).

Φυσικά σημαντική είναι και η παράμετρος ε (epsilon) που αποτελεί ένδειξη ακρίβειας και συμμετέχει στον περιορισμό για τον τερματισμό του αλγορίθμου.