Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων Εργασία-1

Παναγιώτης Καρβουνάρης

31 Μαρτίου 2023

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Θεμα 1

1.1 Εισαγωγή

Στόχος της άσκησης είναι η εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων με την χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

Έχουμε ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα, με σταθερά απόσβεσης b, σταθερά ελατηρίου k και μάζα σώματος m. Το σώμα δέχεται μία εξωτερική δύναμη u και η μετατόπιση του σώματος είναι $y(t)$.

1.2 Ανάλυση

Παρακάτω φαίνεται η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \cdot m = -b \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - k \cdot y + u \tag{1.1}$$

Λύνοντας την παραπάνω ως προς y έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{b}{m} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{k}{m} \cdot y + \frac{1}{m} \cdot u \tag{1.2}$$

Θέλουμε να φέρουμε την παραπάνω σχέση στην γραμμικα παραμετροποιημένη μορφή. Για να γίνει αυτό, πρώτα πρέπει να κάνουμε μετασχηματισμό *Laplace*

$$s^2 \cdot y = -\frac{b}{m} \cdot s \cdot y - \frac{k}{m} \cdot y + \frac{1}{m} \cdot u \tag{1.3}$$

και να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλο φίλτρο $\Lambda(s) = (s+\lambda)^2$, ώστε να έχουμε μία εξίσωση της μορφής

$$\frac{s^2}{(s+\lambda)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{b}{m} \cdot \frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot y + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot u \tag{1.4}$$

Έπειτα κάνοντας πράξεις φέρνουμε την σχέση στην μορφή:

$$y = \theta^{*T} \cdot \zeta \tag{1.5}$$

Στην δική μας περίπτωση τα θ^{*T} και ζ είναι:

$$\theta^{*T} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \lambda - \frac{b}{m} & \lambda^2 - \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot y \\ \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot y \\ \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot u \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Όταν φτάσουμε σε αυτήν την μορφή εφαρμόζουμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Αρχικά, βρίσκουμε των πίνακα Φ έχει διάσταση Nxd, όπου N ο αριθμός των μετρήσεων που πέρνουμε και d ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot y(1) & \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot y(1) & \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot u(1) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot y(N) & \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot y(N) & \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot u(N) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε την σχέση

$$\theta^T = y^T \cdot \Phi \cdot (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \tag{1.9}$$

για να βρούμε το θ^* που περιέχει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Επομένως, έχουμε:

$$\theta^T = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

όπου

$$a = 2 \cdot \lambda - \frac{\hat{b}}{m} \tag{1.11}$$

$$b = \lambda^2 - \frac{\hat{k}}{m} \tag{1.12}$$

$$c = \frac{1}{\hat{m}} \tag{1.13}$$

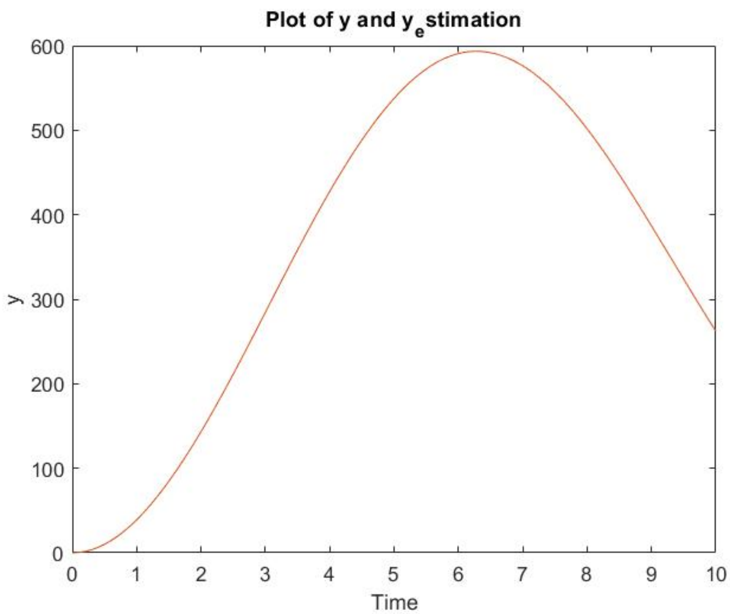
με λ = 2 (η τιμή 2 είναι τυπική, μπορεί να αλλάξει ανάλογα την επιλογή του φίλτρου)

Πλέον, έχουμε τον πίνακα των εκτιμήσεων των παραμέτρων του προβλήματός μας και θέλουμε να βρούμε το $\hat{y}$, δηλασή την εκτίμηση της εξόδου με βάση τις εκτημήσεις μας. Το επιθυμητό αποτέλεσμα θα βγεί αν πάρουμε τον τύπο (1.5) αλλά αντί για y και θ^{*T} έχουμε $\hat{y}$ και θ^T αντίστοιχα. Άρα:

$$\hat{y} = \theta^T \cdot \zeta \tag{1.14}$$

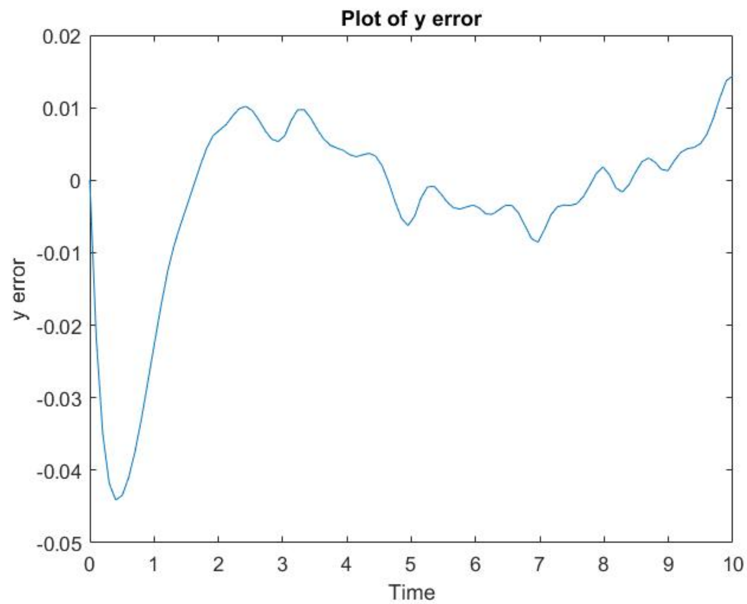
1.3 Προσομοίωση

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση και με δεδομένα ότι $m = 10kg, b = 0.5kg/s, k = 2.5kg/s$ και $u = 15 \cdot sin(3 \cdot t) + 8 \cdot N$ έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα που έχουν προκύψει από προσομοιώσεις.



Σχήμα 1.1: y και $\hat{y}$ για χρόνο $10s$

Στο σχήμα φαίνονται τα δύο μεγέθη να ταυτίζονται, αλλά στην πραγματικότητα έχουν μία μικρή απόκλιση γι αυτό παρακάτω φαίνεται και το σφάλμα $e = y - \hat{y}$.



Σχήμα 1.2: Σφάλμα για χρόνο $10s$

Κεφάλαιο 2

Θεμα 2

2.1 Εισαγωγή

Στόχος είναι η ανάλυση του κυκλώματος και η εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς του κυκλώματος και η έρευνα σχετικά με τον αν τυχαία σφάλματα έχουν μεγάλη επίδραση στην εκτίμηση με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

2.2 Ανάλυση

Από τις κυκλωματικές μας γνώσεις, ξέρουμε ότι

$$v = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{2.1}$$

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt} \tag{2.2}$$

Από το κύκλωμα βλέπουμε ότι

$$I_1 = \frac{V_R}{R} \tag{2.3}$$

$$I_2 = C \cdot V_C \tag{2.4}$$

Με χρήση των νόμων του $Kirchhoff$ καταλήγουμε

$$\ddot{V_C} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{V_C} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot V_C = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{U_1} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{U_2} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_2 \tag{2.5}$$

$$\ddot{V_R} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{V_R} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot V_R = \ddot{U_1} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_1 + \ddot{U_2} \tag{2.6}$$

Έπειτα συνεχίζουμε με μετασχηματισμό *Laplace* και καταλήγουμε στην μορφή

$$\begin{bmatrix} V_C(s) \\ V_R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{s}{R\cdot C}}{s^2+\frac{s}{R\cdot C}+\frac{1}{L\cdot C}} & \frac{\frac{s}{R\cdot C}+\frac{1}{L\cdot C}}{s^2+\frac{s}{R\cdot C}+\frac{1}{L\cdot C}} \\ \frac{s+\frac{1}{L\cdot C}}{s^2+\frac{s}{R\cdot C}+\frac{1}{L\cdot C}} & \frac{s^2}{s^2+\frac{s}{R\cdot C}+\frac{1}{L\cdot C}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$V(s) = G(s) \cdot U(s) \tag{2.8}$$

Άρα για το V_C έχουμε

$$\theta^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R\cdot C} & \frac{1}{L\cdot C} & \frac{1}{R\cdot C} & 0 & \frac{1}{R\cdot C} & \frac{1}{L\cdot C} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

και

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\ddot{V}_C \\ -V_C \\ \ddot{U}_1 \\ U_1 \\ \ddot{U}_2 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

αντίστοιχα για το V_R

$$\theta^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R\cdot C} & \frac{1}{L\cdot C} & 1 & 0 & \frac{1}{L\cdot C} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

και

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\ddot{V}_R \\ -V_R \\ \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_1 \\ U_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_2 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Έπειτα χρησιμοποιώ ένα φίλτρο $\Lambda(s) = (s+\lambda)^2$ και οι παραπάνω εξισώσεις μετατρέπονται σε Άρα για το V_C έχουμε

$$\theta^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R\cdot C} - \lambda & \frac{1}{L\cdot C} - \lambda & \frac{1}{R\cdot C} & 0 & \frac{1}{R\cdot C} & \frac{1}{L\cdot C} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

και

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot \ddot{V_C} \\ -\frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot V_C \\ \frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot \ddot{U_1} \\ \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot U_1 \\ \frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot \ddot{U_2} \\ \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot U_2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

αντίστοιχα για το V_R

$$\theta^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R \cdot C} - \lambda & \frac{1}{L \cdot C} - \lambda & 1 & 0 & \frac{1}{L \cdot C} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

και

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot \ddot{V_R} \\ -\frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot V_R \\ \frac{s^2}{(s+\lambda)^2} \cdot \ddot{U_1} \\ \frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot \ddot{U_1} \\ \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot U_1 \\ \frac{s^2}{(s+\lambda)^2} \cdot \ddot{U_2} \\ \frac{s}{(s+\lambda)^2} \cdot \ddot{U_2} \\ \frac{1}{(s+\lambda)^2} \cdot U_2 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Στην συνέχεια υλοποιούμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και δημιουργώντας τον πίνακα Φ, βρίσκοντας την εκτίμηση των παραμέτρων, μέσω του τύπου

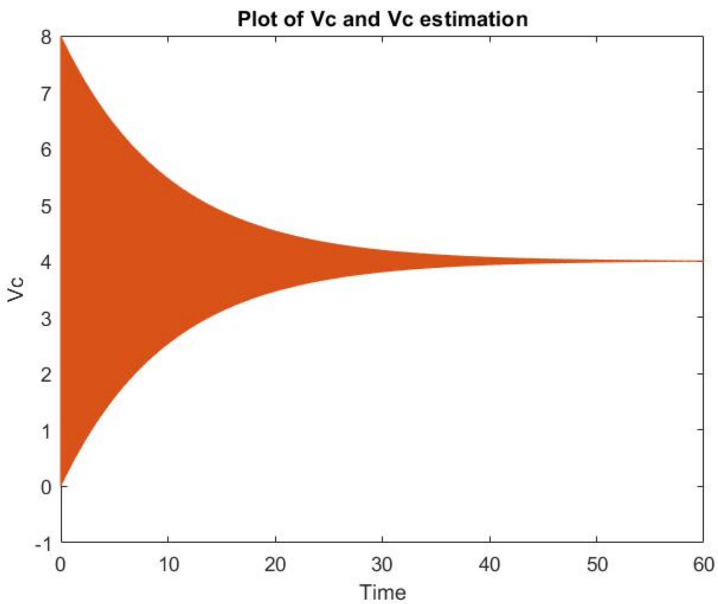
$$\theta^T = y^T \cdot \Phi \cdot (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \tag{2.17}$$

και τέλος βγάζουμε τις εκτιμήσεις των εξόδων βάση των νέων παραμέτρων σύμφωνα με τον τύπο

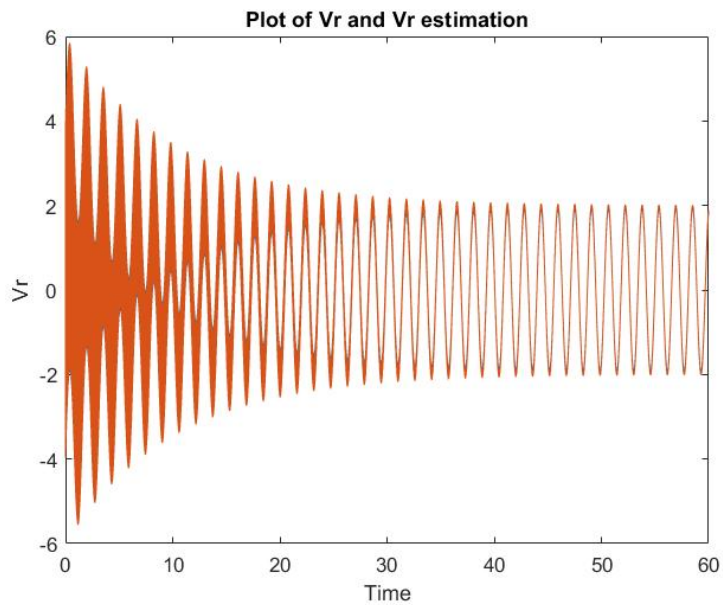
$$\hat{y} = \theta^T \cdot \zeta \tag{2.18}$$

2.3 Προσομοίωση

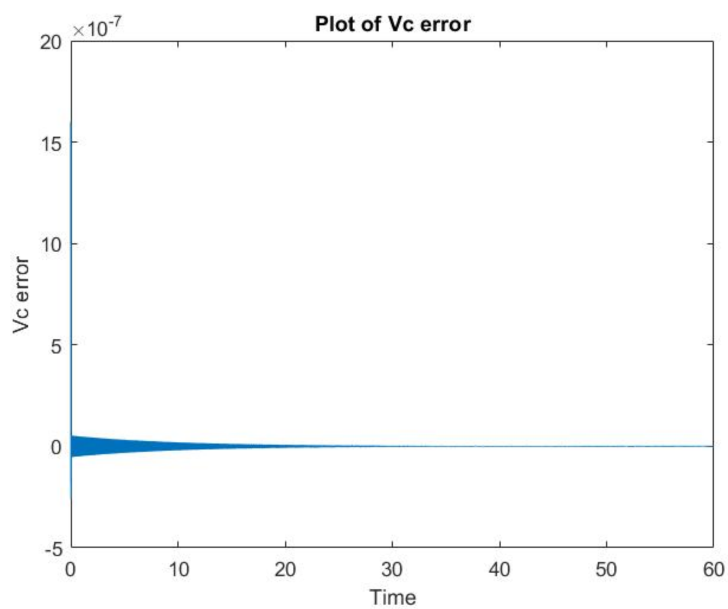
Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση και βάζοντας $\lambda = 100$ έχουμε τα παρακάτω γραφήματα



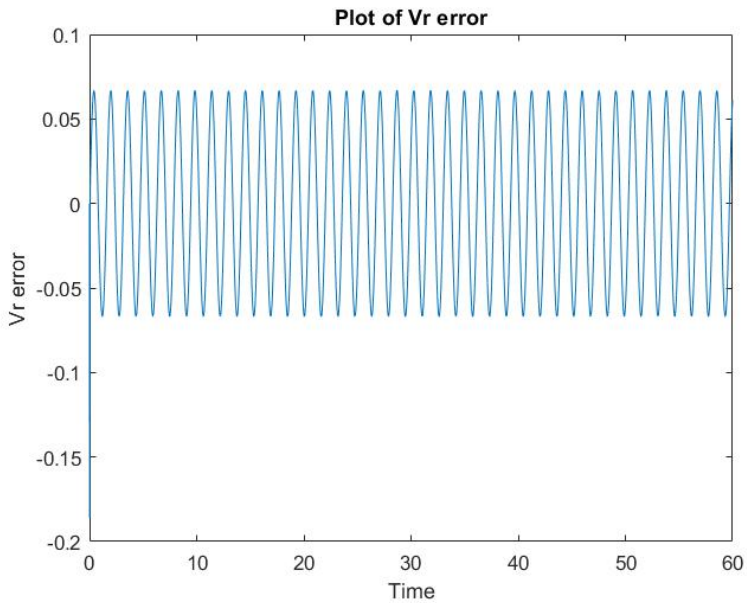
Σχήμα 2.1: Vc και Vc εκτίμηση για $60s$



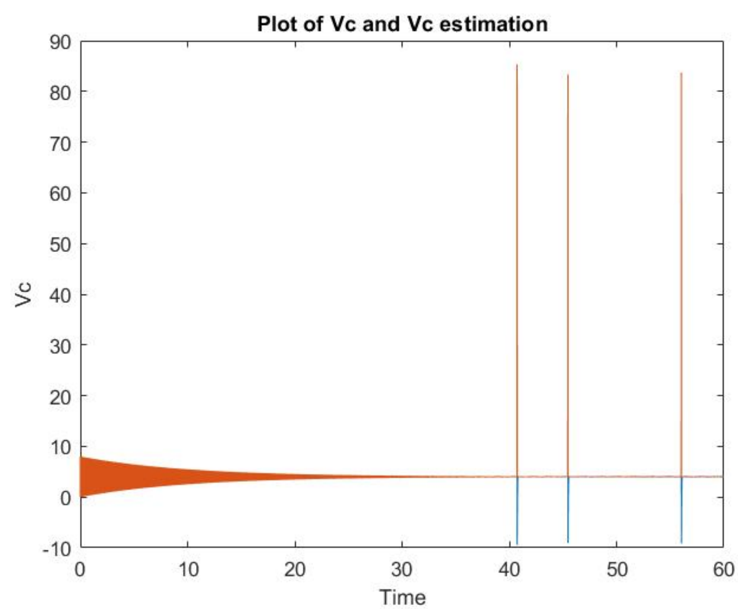
Σχήμα 2.2: Vr και Vr εκτίμηση για $60s$



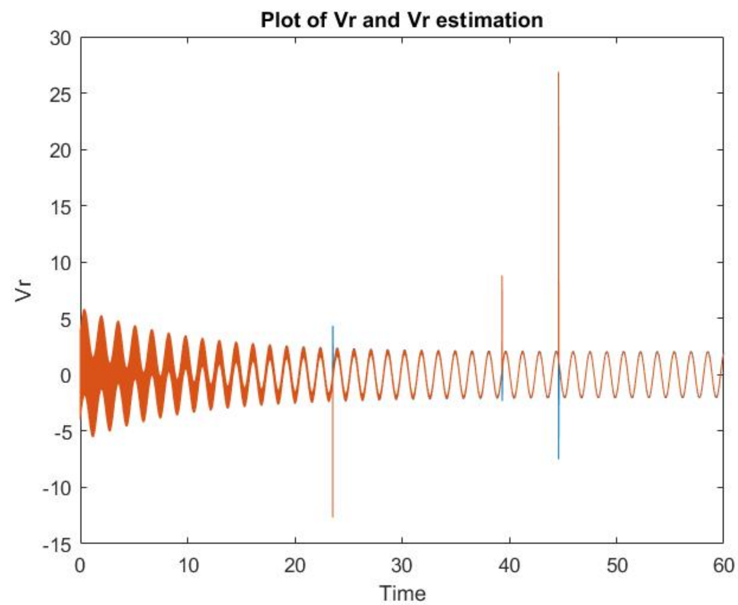
Σχήμα 2.3: Vc σφάλμα για $60s$



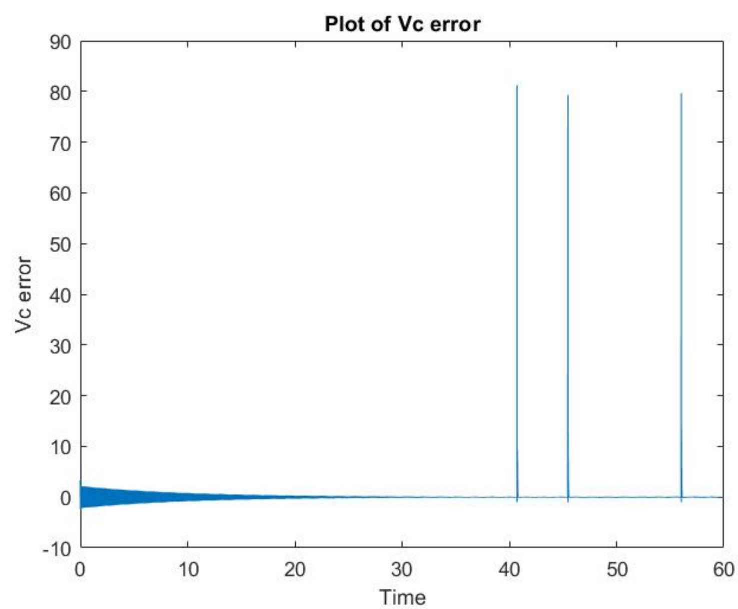
Σχήμα 2.4: Vr σφάλμα για $60s$



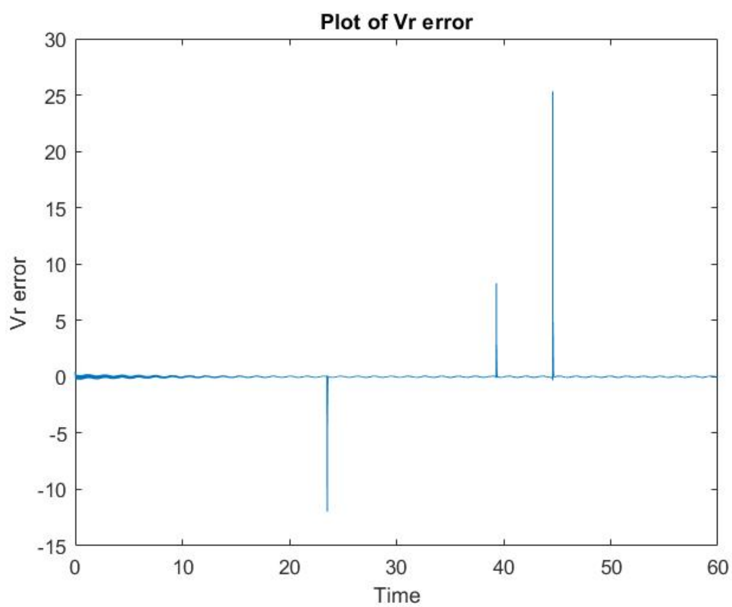
Σχήμα 2.5: Vc και Vc εκτίμηση με τεχνητά σφάλματα για $60s$



Σχήμα 2.6: Vr και Vr εκτίμηση με τεχνητά σφάλματα για $60s$



Σχήμα 2.7: Vc σφάλμα για $60s$ με τεχνητά σφάλματα



Σχήμα 2.8: Vr σφάλμα για $60s$ με τεχνητά σφάλματα