Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων Εργασία-2

Παναγιώτης Καρβουνάρης

21 Απριλίου 2023

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Θεμα 1

1.1 Εισαγωγή

Στόχος της άσκησης είναι η *on line* εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων με την χρήση της μεθόδου της κλίσης.

1.2 Ανάλυση

Έχουμε ένα σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} = -ax + bu \tag{1.1}$$

όπου x είναι η κατάσταση του συστήματος και u είναι η είσοδος με a,b σταθερές αλλά γνωστές παραμέτρους.Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο κλίσης για την επίληση του προβλήματος. Αρχικά, προσθαφαιρώ στο δεξί μέλος της εξίσωσης την ποσότητα $\alpha_m x$, με $\alpha_m > 0$.

$$\dot{x} + \alpha_m x = (\alpha_m - a)x + bu \tag{1.2}$$

$$(s + \alpha_m)x = (\alpha_m - a)x + bu \tag{1.3}$$

$$x = \frac{\alpha_m - a}{s + \alpha_m}x + \frac{b}{s + \alpha_m}u \tag{1.4}$$

Θέλουμε να φέρουμε το σύστημα στην μορφή

$$x = \theta^{*T}\phi \tag{1.5}$$

Οπότε θέτω

$$\theta^{*T} = \begin{bmatrix}\alpha_m - a & b\end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$$\phi = \begin{bmatrix}\frac{x}{s+\alpha_m} & \frac{u}{s+\alpha_m}\end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Θεωρούμε τώρα την εκτίμηση του x ως $\hat{x} = \hat{\theta}^T\phi$ και θέτουμε e το σφάλμα μεταξύ των x και $\hat{x}$, $e = x - \hat{x}$ Έπειτα από πράξεις καταλήγουμε ότι

$$e = \tilde{\theta}^T\phi \tag{1.8}$$

Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση κόστους $\kappa(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2}$ με

$$\nabla\ \kappa(\hat{\theta}) = -e\phi \tag{1.9}$$

Από την μέθοδο κλίσης γνωρίζουμε ότι

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma\nabla\ \kappa(\hat{\theta}) = -\gamma e\phi \tag{1.10}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{\theta}}_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2\end{bmatrix} = \gamma e \begin{bmatrix}\frac{x}{s+\alpha_m} \\ \frac{u}{s+\alpha_m}\end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Από τις διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{\phi}_1 = -\phi_1 a_m + x \tag{1.12}$$

$$\dot{\phi}_2 = -\phi_2 a_m + u \tag{1.13}$$

εξάγουμε συμπεράσματα για τα ϕ_1 και ϕ_2. Έπειτα, σύμφωνα με την εξίσωση (1.11) βρίσκουμε τα $\dot{\hat{\theta}}_1$ και $\dot{\hat{\theta}}_2$. Τέλος γνωρίζουμε ότι

$$\hat{\theta}_1 = a_m - \hat{a} \tag{1.14}$$

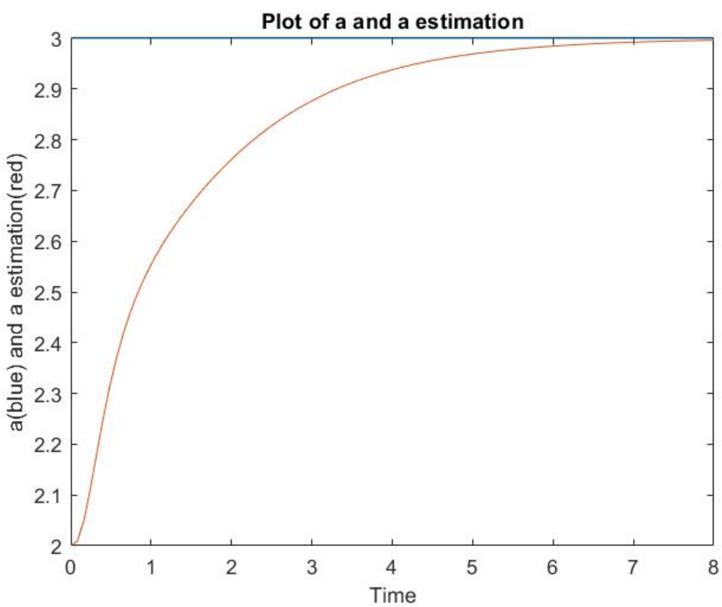
$$\hat{\theta}_2 = \hat{b} \tag{1.15}$$

1.3 Προσομοίωση

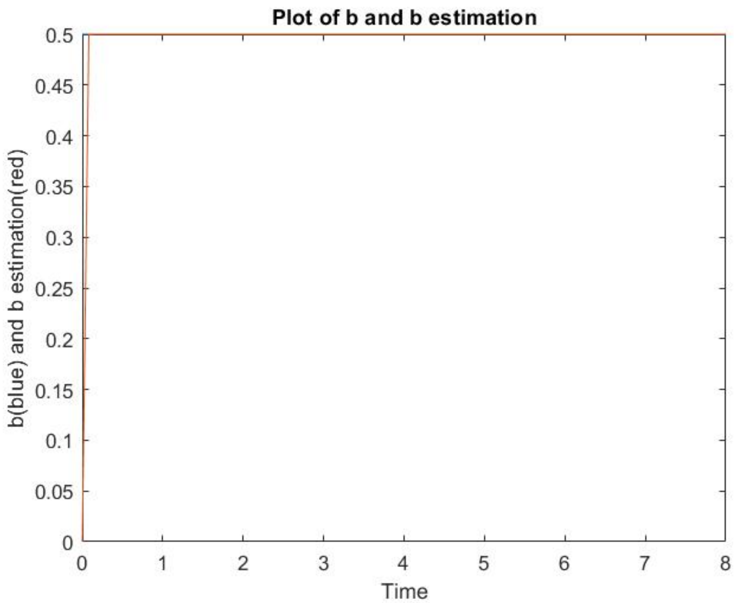
Παρακάτω βλέπουμε τα διαγράμματα διαφόρων προσομοιώσεων στο $Matlab$. Για τις προσομοιώσεις χρησιμοποίησαμε $a_m = 2$ (παρατήρησα ότι η επιλογή του a_m επηρεάζει το αποτέλεσμα κυρίως όσον αφορά τον χρόνο αλλά μικρές αλλαγές στην τιμή του δεν έχουν μεγάλη επίδραση), $\gamma = 1$ (η επιλογή του αποτελεί απλούστευση για τις συγκεκριμένες προσομοιώσεις δεν επηρεάζει τα τελικά συμπεράσματα) και το χρονικό διάστημα διαφέρει αναλόγως, δηλαδή για την περίπτωση όπου $u = 10$ οι προσομοιώσεις τρέχουν για διάρκεια $(0, 8)$ και για την περίπτωση όπου $u = 10 \sin 3t$ οι προσομοιώσεις τρέχουν για διάρκεια $(0, 20)$.

1.3.1 Λύση με $u = 10$

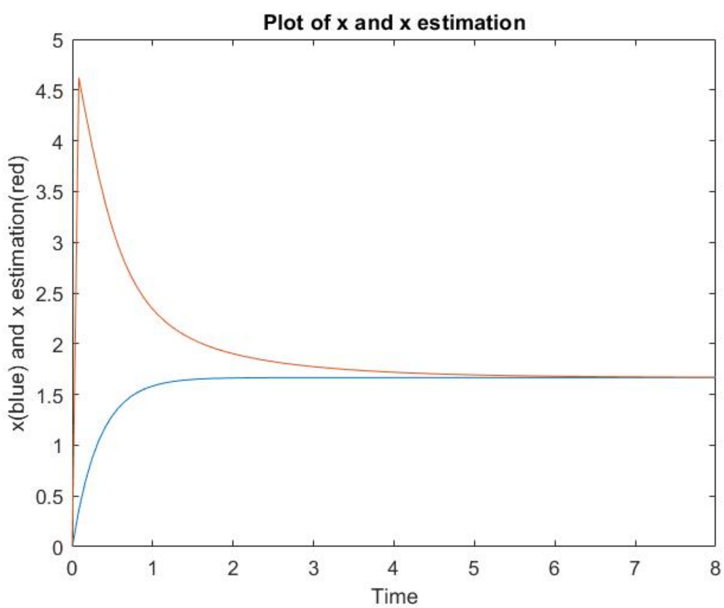
Παρακάρω αναλύεται η περίπτωση, όπου $u = 10$



Σχήμα 1.1: a και a εκτίμηση $u = 10$

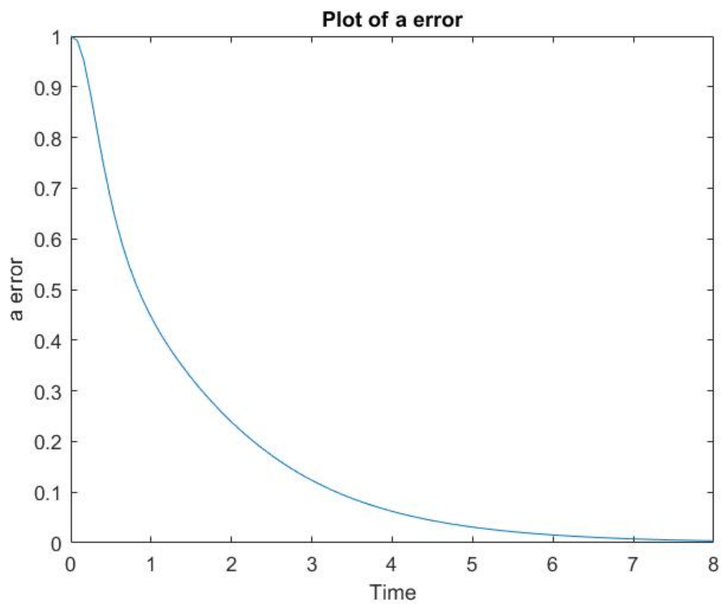


Σχήμα 1.2: b και b εκτίμηση $u = 10$

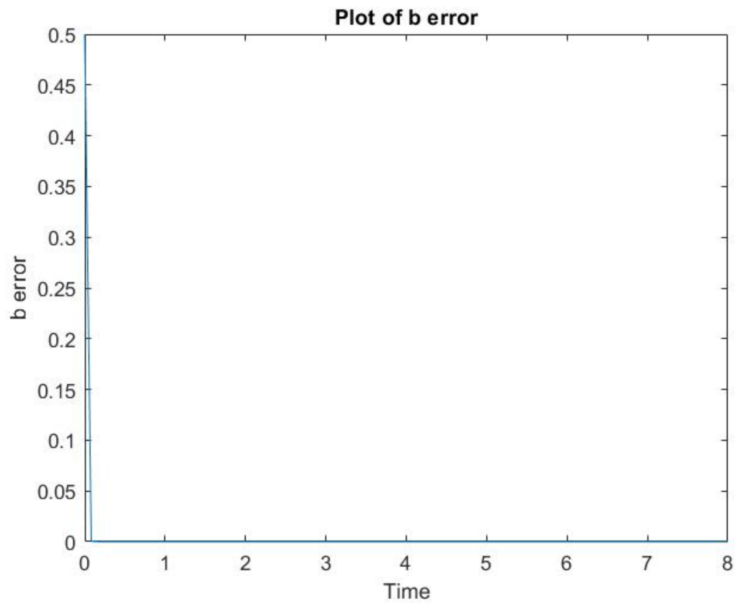


Σχήμα 1.3: x και x εκτίμηση $u = 10$

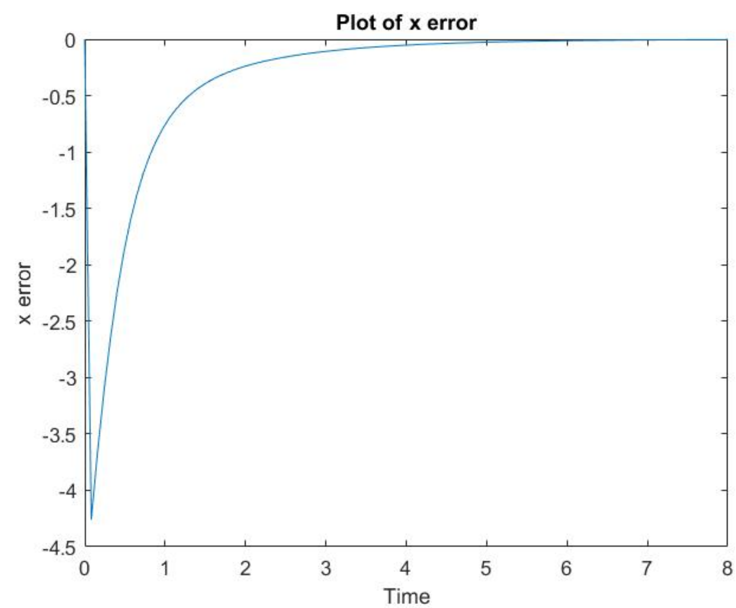
Τα παραπάνω σχήματα μας δίνουν την συμπεριφορά των εκτιμήσεων $\hat{a}$, $\hat{b}$ και $\hat{x}$ ως προς τα πραγματικά a, b και x. Παρατηρούμε ότι μετά από συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα οι εκτιμήσεις τείνουν και ταυτίζονται με τις πραγματικές τιμές. Παρακάτω, ακολουθούν τα διαγράμματα με τα σφάλματα των a, b και x, όπου ως σφάλμα ορίζεται ¨Σφάλμα = Πραγματική Τιμή − Εκτίμηση¨.



Σχήμα 1.4: a σφάλμα $u = 10$



Σχήμα 1.5: b σφάλμα $u = 10$

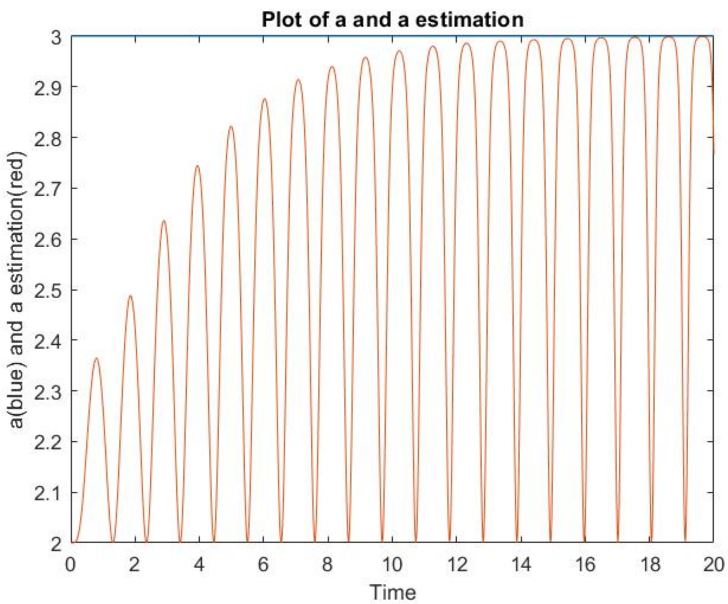


Σχήμα 1.6: x σφάλμα $u = 10$

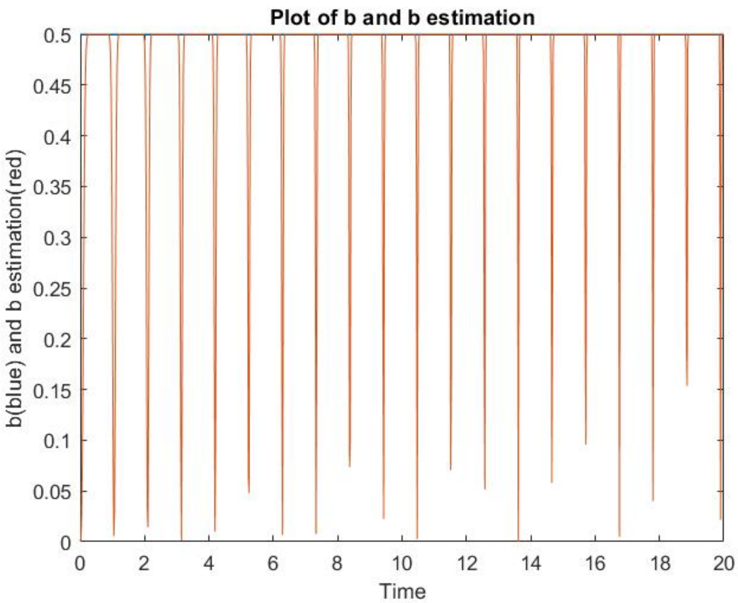
Εδώ παρατηρούμε τα αποτελέσμα που περιμέναμε, δηλασή οι εκτιμήσεις τόσο των παραμέτρων όσο και της εξόδο τείνουν στην επιθυμητή τιμή με το πέρασμα του χρόνου.

1.3.2 Λύση με $u = 10 \sin 3t$

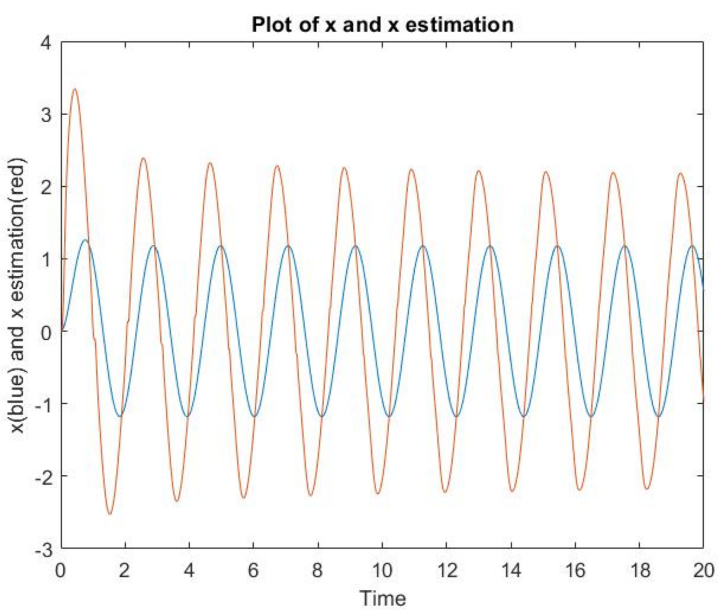
Παρακάρω αναλύεται η περίπτωση, όπου $u = 10 \sin 3t$



Σχήμα 1.7: a και a εκτίμηση $u = 10 \sin 3t$

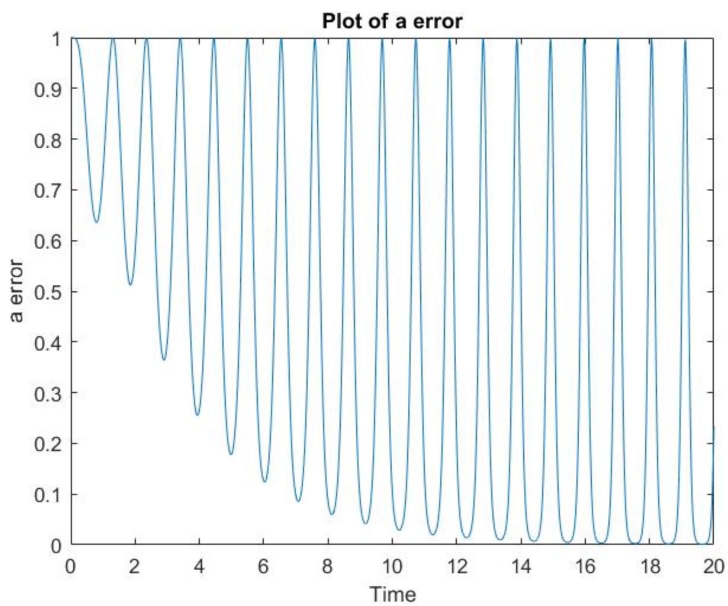


Σχήμα 1.8: b και b εκτίμηση $u = 10\sin 3t$

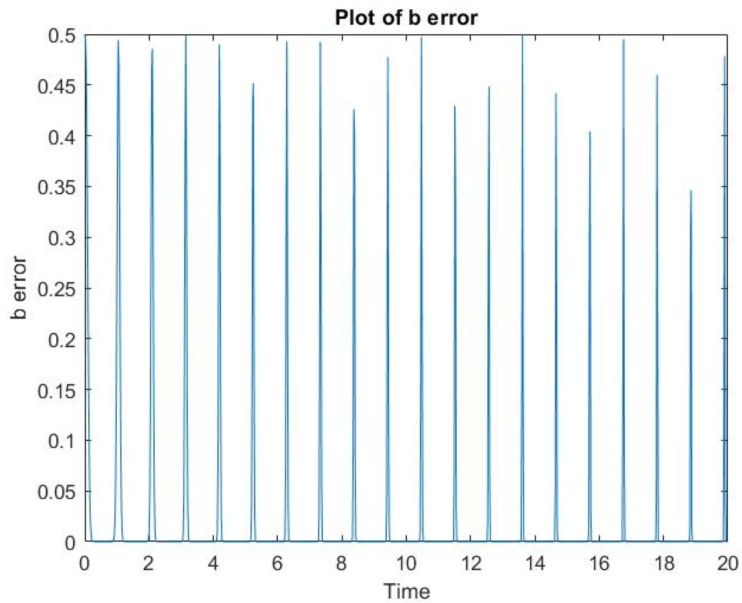


Σχήμα 1.9: x και x εκτίμηση $u = 10\sin 3t$

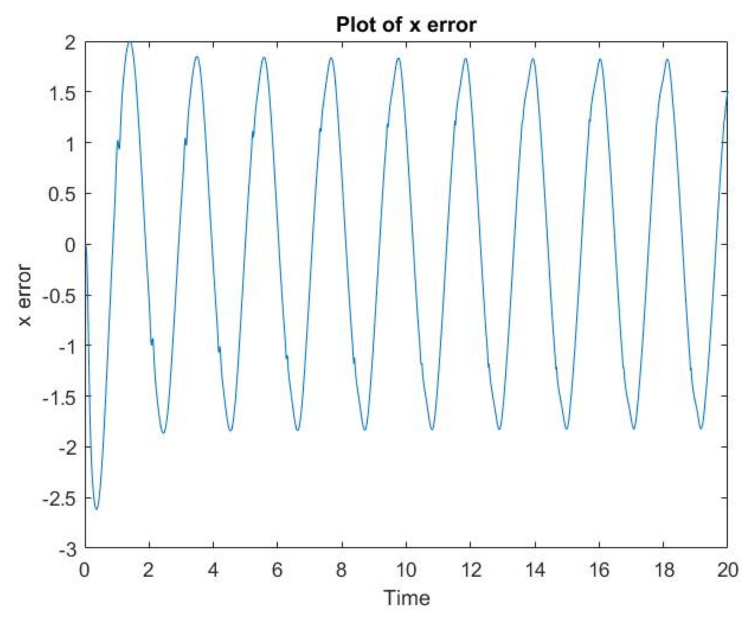
Από τα συγκεκριμένα διαγράμματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι με το πέρασμα του χρόνου οι τιμές των εκτιμήσεων των παραμέτρων τείνουν στις πραγματικές τιμές, όμως όπως ήταν αναμενόμενο όταν η τιμή της εισόδου u μηδενίζεται, γεγονός που συμβαίνει ανά συγκεκριμένο χρονικό διάστημα λόγω του sin, η συγκεκριμένη μέθοδος εκτίμησης αδυνατή να βγάλει σωστά αποτελέσματα γεγονός που περιμέναμε σύμφωνα με την παραπάρω θεωρητική ανάλυση. Στην τιμή της εξόδο x παρατηρείται μια ανάλογη συμπεριφορά, με την τιμή της εκτίμησης, όμως να απέχει από την πραγματική εξαιτίας του μηδενισμού της εισόδου. Τα αποτελέσματα μπορούν να αλλάξουν και ίσως να βελτιωθεί η συμπεριφορα της εκτιμήσης, με αλλαγή της τιμής του a_m και του χρόνου που τρέχει η προσομοίωση. Παρακάτω, ακολουθούν τα διαγράμματα με τα σφάλματα των a, b και x, όπυ ως σφάλμα ορίζεται ¨Σφάλμα = Πραγματική Τιμή − Εκτίμηση¨.



Σχήμα 1.10: a σφάλμα $u = 10 \sin 3t$



Σχήμα 1.11: b σφάλμα $u = 10 \sin 3t$



Σχήμα 1.12: x σφάλμα $u = 10 \sin 3t$

Κεφάλαιο 2

Θεμα 2

2.1 Εισαγωγή

Στόχος της άσκησης είναι η *on line* εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων με την χρήση παράλληλης δομής και μικτής δομής, με βάση την μέθοδο *Lyapunov*.

2.2 Ανάλυση

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα όπως αυτό του θέματος 1 της μορφής

$$\dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u \tag{2.1}$$

ισχύουν οι ίδιοι περιορισμοί όπως στο πρώτο θέμα.

2.2.1 Παράλληλη δομή

Για την περίπτωση της παράλληλης δομής έχουμε την παρακάτω σχέση για το σύστημα

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u \tag{2.2}$$

θέτω $e = x - \hat{x}$, επομένως έχω

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \tag{2.3}$$

$$\dot{e} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u + \hat{\theta}_1 x - \hat{\theta}_2 u \tag{2.4}$$

Έπειτα, προσθαφαιρω το $\theta_1^*\hat{x}$ και καταλήγω

$$\dot{e} = -\theta_1^* e + \tilde{\theta}_1\hat{x} - \tilde{\theta}_2 u \tag{2.5}$$

όπου $\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1^*$ και $\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση *Lyapunov* για το σφάλμα e, ώστε να αποδείξουμε ότι τείνει ασυμπτωτικά στο 0. Πέρνουμε ως συνάρτηση *Lyapunov* την

$$V(e, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^{\,2} + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^{\,2} \tag{2.6}$$

με παράγωγο

$$\dot{V} = -\theta_1^* e^2 + e\tilde{\theta}_1\hat{x} - e\tilde{\theta}_2 u + \frac{\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2}{\gamma_2} \tag{2.7}$$

Για να ισχύει η ανάλυση πρέπει $\dot{V} < 0$, οπότε αυτό συμβαίνει αν θέσω

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e\hat{x} \tag{2.8}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u \tag{2.9}$$

Στην συνέχεια και μέσω του λήμματος *Barbalat* καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το e είναι φραγμένο και τείνει στο μηδέν και τα $\hat{\theta}_2$ και $\hat{\theta}_2$ είναι φραγμένα επίσης.

Η επίλυση του προβλήματος γίνεται με την λύση του παρακάτω συστήματος

$$\begin{pmatrix} \dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 x\hat{x} + \gamma_1\hat{x}^2 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 x u + \gamma_2\hat{x}u \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1\hat{x} + \hat{\theta}_2 u \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

2.2.2 Μικτή δομή

Στην μικτή δομή το σύστημα παρατήρησης έχει την μορφή

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m(x - \hat{x}) \tag{2.11}$$

με $\theta_m > 0$
έχουμε σφάλμα

$$e = x - \hat{x} \tag{2.12}$$

με παράγωγο

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \tag{2.13}$$

$$\dot{e} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u - \theta_m e + \hat{\theta}_1 x - \hat{\theta}_2 u \tag{2.14}$$

Με παρόμοια λογική με αυτή που ακολουθήσαμε στην παράλληλη δομή καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} \dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 x^2 + \gamma_1 \hat{x} q \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 x u + \gamma_2 \hat{x} u \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

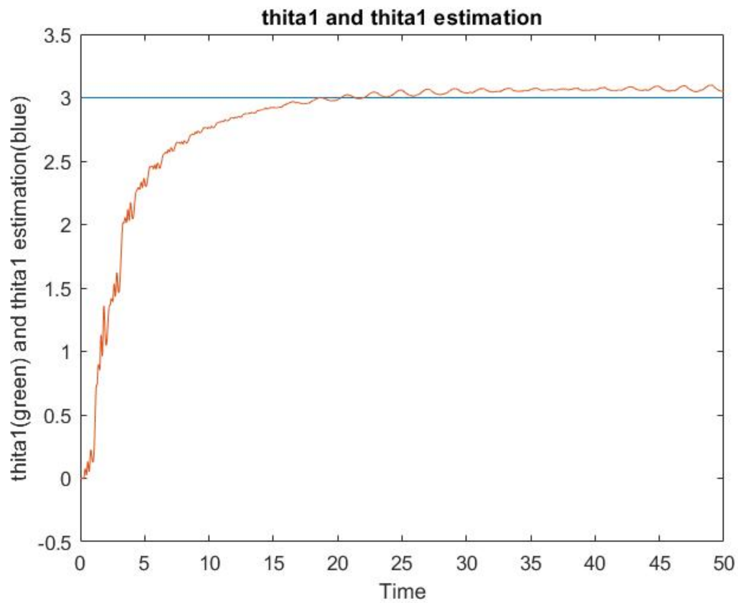
Η μοναδική διαφορά που παρατηρείται στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων είναι των δύο δομών, αφορά την εξίσωση που μας δίνει την ποσότητα $\dot{\hat{\theta}}_1$.

2.3 Προσομοίωση

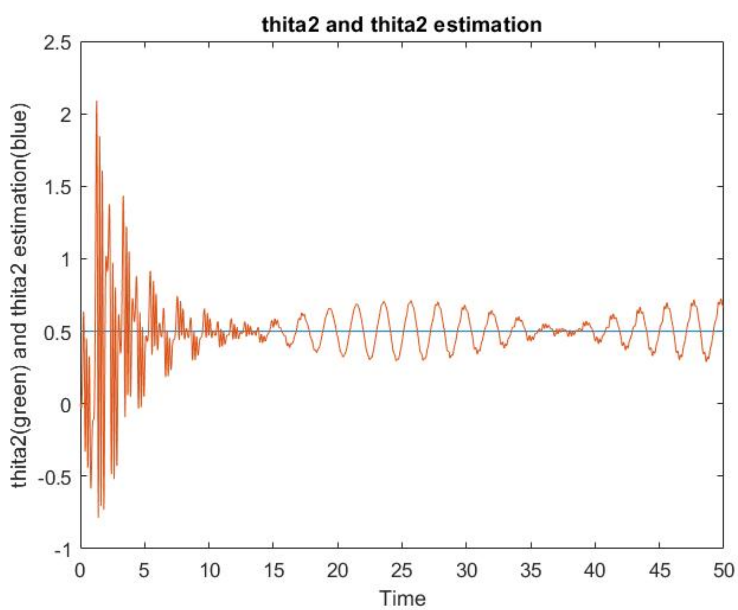
Παρακάτω ακολουθούν αποτελέσματα προσομοιώσεων πυ πραγματοποιήθηκαν σε $Matlab$. Στις προσομοιώσεις έχουν υλοποιηθεί και οι δύο δομές που αναλύθηκαν προηγουμένως. Επίσης, η έξοδος x του συστήματος μετριέται με θόρυβο $n(t) = n_0 sin(2\pi f t)$ με $n_0 = 0.5$ και $f = 40$. Για την δημιουργία των προσομοιώσεων χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$ ώστε να έχουμε σύγκλιση των παραμέτρων σε ένα εύλογο χρονικό διάστημα $50s$, όσο δηλασή έτρεξαν οι προσομοιώσεις.

2.3.1 Παράλληλη δομή

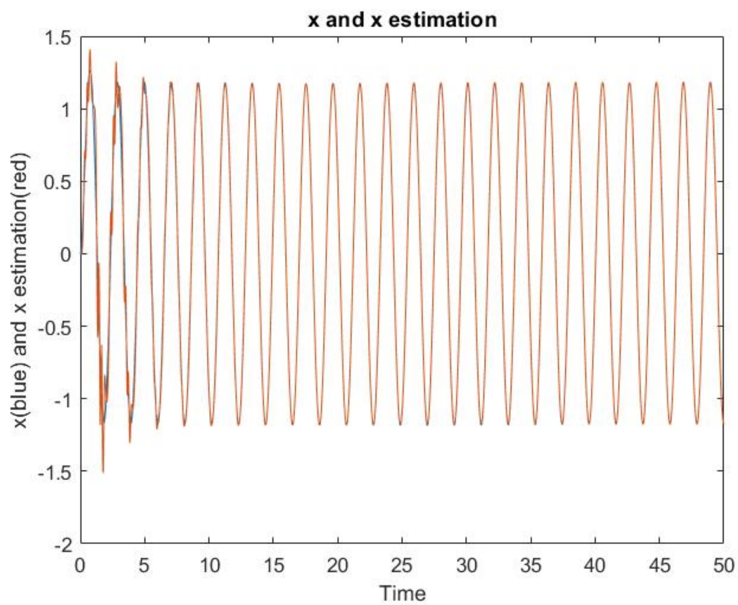
Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για την παράλληλη δομή.



Σχήμα 2.1: ϑ1 και ϑ1 εκτίμηση, παράλληλη δομή

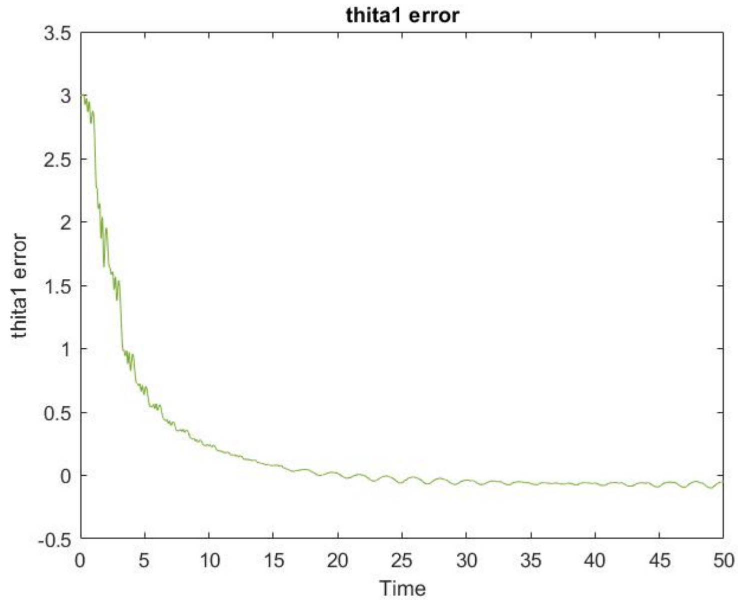


Σχήμα 2.2: ϑ2 και ϑ2 εκτίμηση, παράλληλη δομή

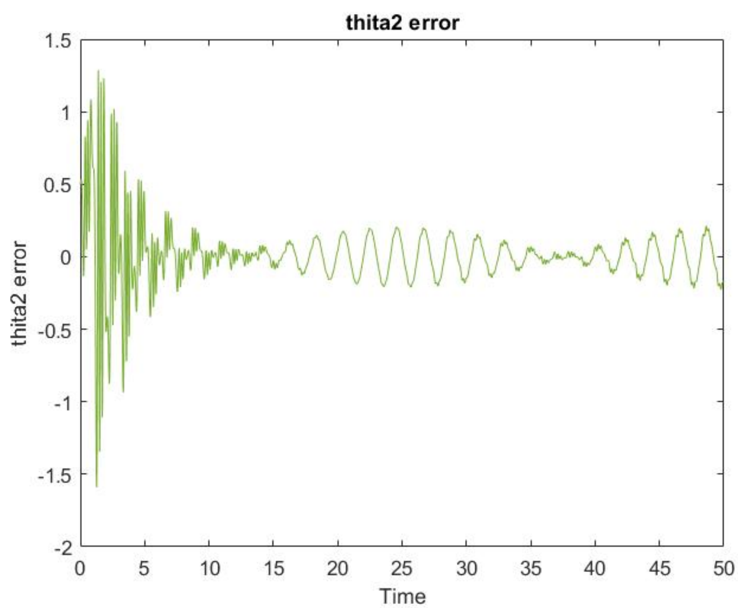


Σχήμα 2.3: x και x εκτίμηση, παράλληλη δομή

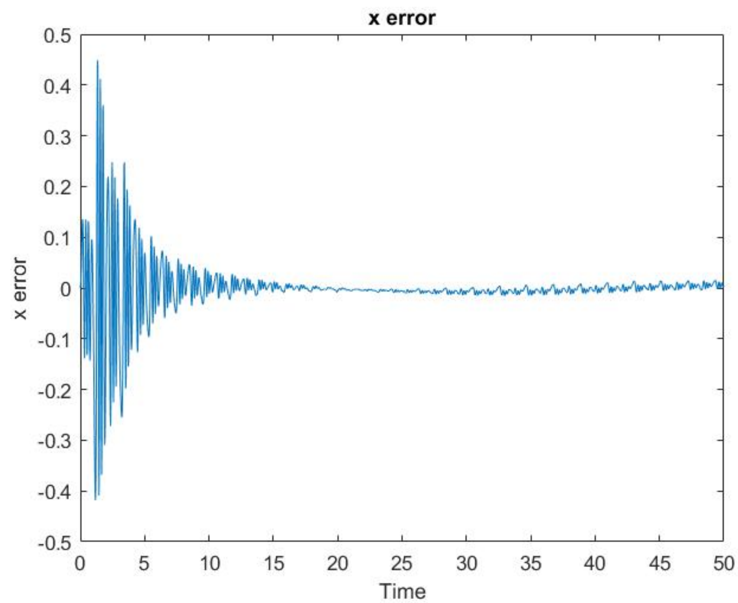
Τα διαγράμματα μας δείχνουν ότι οι τιμές των παραμέτρων τείνουν στις πραγματικές τιμές, όμως λόγω του θορύβου δημιουργούνται κάποιες αποκλίσεις στην διάρκεια του χρόνου. Παρόλο, που ο θόρυβος επιδρά στις εκτιμήσεις των παραμέτρων του συστήματος, η εκτίμηση της εξόδου φαίνεται μετα απο κάποιο χρονικό σημείο να ταυτίζεται σχεδόν με την πραγματική έξοδο παρά την μόνιμη παρουσία του θορύβου.



Σχήμα 2.4: $\vartheta 1$ σφάλμα, παράλληλη δομή



Σχήμα 2.5: $\vartheta 2$ σφάλμα, παράλληλη δομή

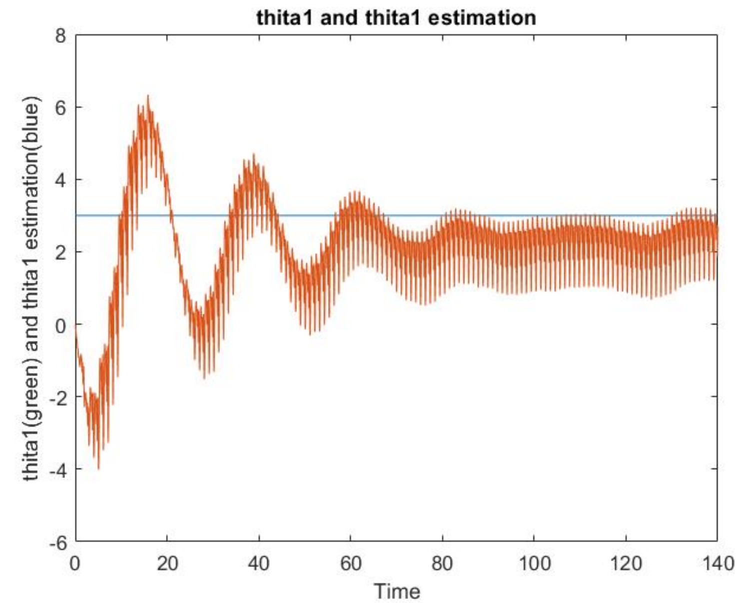


Σχήμα 2.6: x σφάλμα, παράλληλη δομή

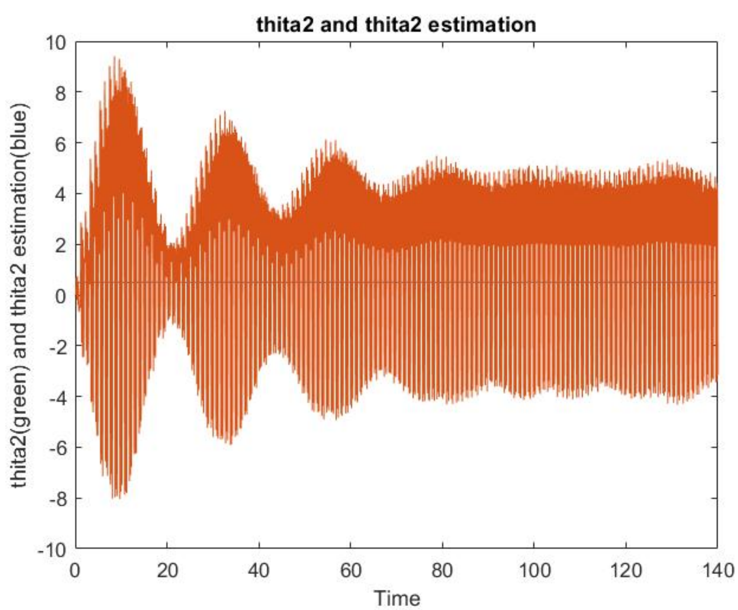
Τα διαγράμματα των σφαλμάτων μεταξύ των εκτιμήσεων και των πραγματικών τιμών τόσο για τις παραμέτρους όσο και για την έξοδο επιβεβαιώνουν τα παραπάνω συμπεράσματα.

2.3.2 Μικτή δομή

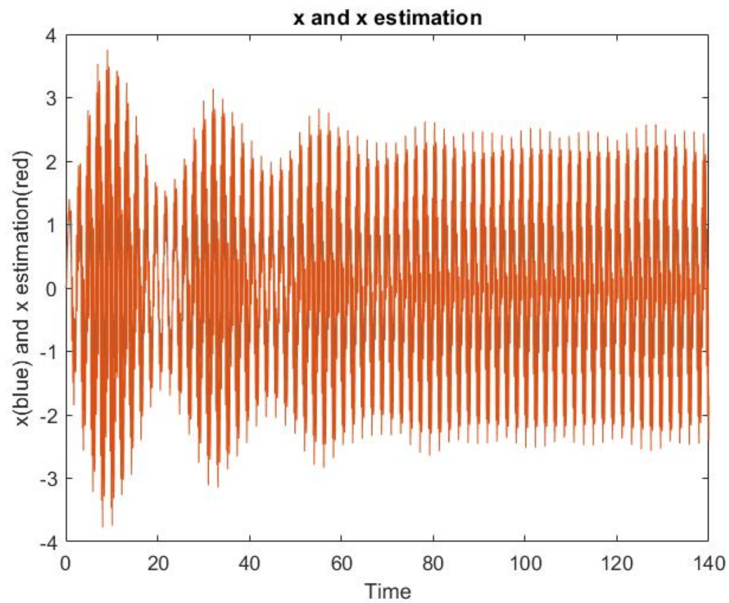
Στην μικτή δομή οι συνθήκες των προσομοιώσεων ήταν ακριβώς οι ίδιες, με στόχο να ανακαλύψουμε ποια από τις δύο μεθόδους ανταποκρίνεται καλύτερα σε περιβάλλον θορύβου.



Σχήμα 2.7: ϑ1 και ϑ1 εκτίμηση, μικτή δομή

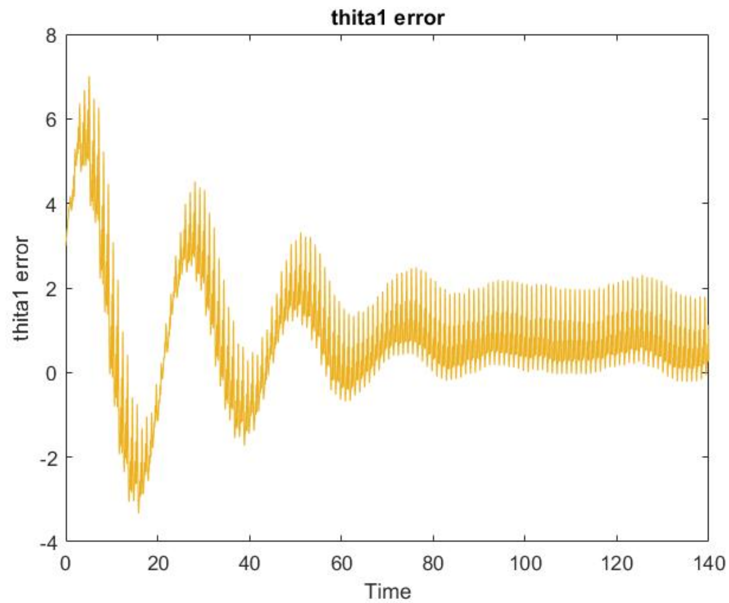


Σχήμα 2.8: ϑ2 και ϑ2 εκτίμηση, μικτή δομή

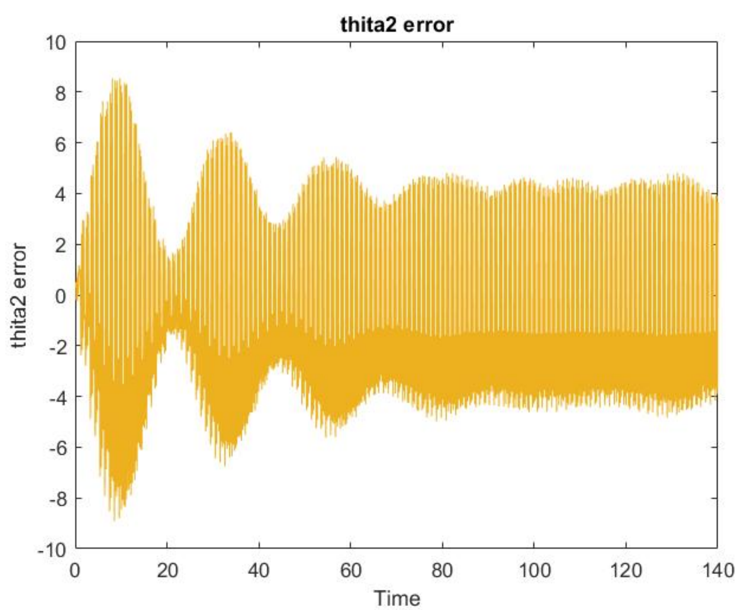


Σχήμα 2.9: x και x εκτίμηση, μικτή δομή

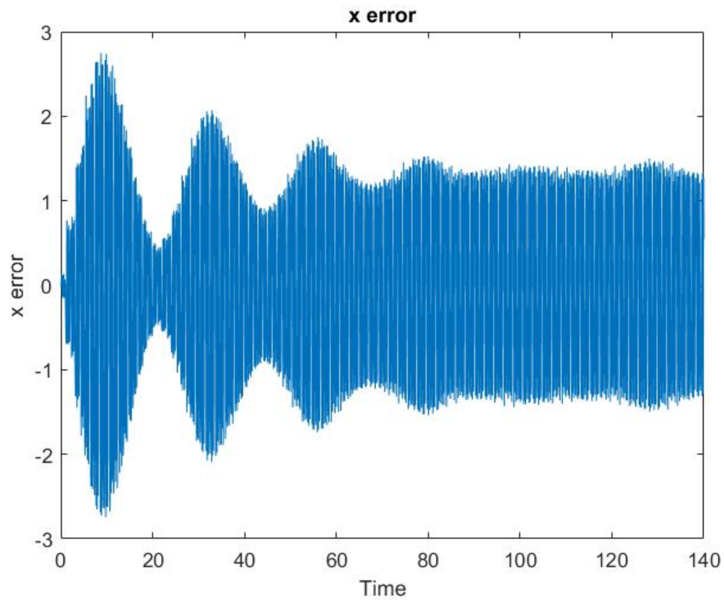
Τα διαγράμματα μας δείχνουν ότι οι τιμές των παραμέτρων βρίσκονται γύρω από τις επιθυμητές τιμές, αλλά η απόκλισή τους απο αυτές είναι έντονες, σε σχέση με τα αποτελέσματα που πήραμε απο την παράλληλη δομή, εξαιτίας του θορύβου. Αντίστοιχα, η εκτίμηση για την έξοδο ακολουθεί μια παρόμοια συμπεριφορα καθώς είναι έντονη η επιρροή του θορύβου.



Σχήμα 2.10: ϑ1 σφάλμα, μικτή δομή



Σχήμα 2.11: ϑ2 σφάλμα, μικτή δομή



Σχήμα 2.12: x σφάλμα, μικτή δομή

Τα διαγράμματα των σφαλμάτων επιβεβαιώνουν τους παραπάνω ισχυρισμούς για την κακή αντιμετώπιση του θορύβου απο την μικτή δομή. Φυσικά, αυτό είναι κάτι που περιμέναμε ως αποτέλεσμα της θεωρητικής ανάλυσης, όπου η σχέση που εμπλέκει το θ_1 στο σύστημα έχει το x^2 για την μικτή δομή, ενώ η ίδια σχέση για την παράλληλη δομή έχει το x χωρίς να είναι υψωμένο σε κάποια δύναμη. Ο θόρυβος μετριέται μόνο στην έξοδο που πραγματικού συστήματος x, άρα είναι εμφανές ότι η επίδρασή του είναι πιο έντονη στην μικτή δομή.

Κεφάλαιο 3

Θεμα 3

3.1 Εισαγωγή

Στόχος της άσκησης είναι η *on line* εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων με την χρήση παράλληλης δομής και μικτής δομής, με βάση την μέθοδο *Lyapunov*.

3.2 Ανάλυση

Έστω ότι έχω το σύστημα

$$\dot{x} = -Ax + Bu \tag{3.1}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1}a_{1,2} \\ a_{2,1}a_{2,2} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$u = 3.5sin(7.2t) + 2sin(11.7t) \tag{3.4}$$

Χρησιμοποιούμε μικτή δομή με εκτιμητή

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{A}x + \hat{B}u + C(x - \hat{x}) \tag{3.5}$$

Για την ανάλυση θέτουμε σφάλμα $e = x - \hat{x}$, παραγωγίζουμε $\hat{e} = -Ce - \tilde{A}x - \tilde{B}u$ με χρήση συνάρτησης *Lyapunov* και έπειτα από πράξεις καταλήγουμε

$$\dot{\hat{A}} = \gamma_1 x e^T \tag{3.6}$$

$$\dot{\hat{B}} = \gamma_2 u e \tag{3.7}$$

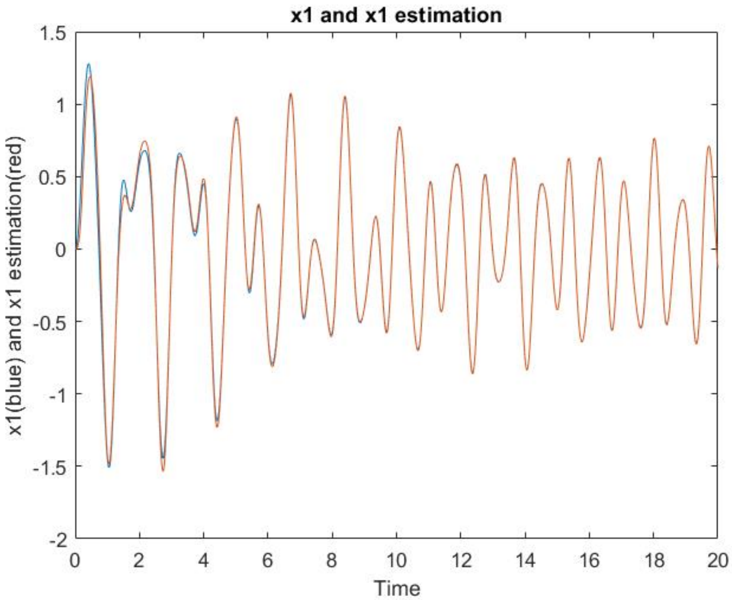
Επομένως το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που μας δίνει τα αποτελέσματα της χρήσης μικτής δομής είναι

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 u \\ \dot{x_2} = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 u \\ \dot{\hat{a_{1,1}}} = \gamma_1 x_1(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{\hat{a_{2,1}}} = \gamma_1 x_1(x_2 - \hat{x_2}) \\ \dot{\hat{a_{1,2}}} = \gamma_1 x_2(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{\hat{a_{2,1}}} = \gamma_1 x_2(x_2 - \hat{x_2}) \\ \dot{\hat{b_1}} = \gamma_2 u(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{\hat{b_2}} = \gamma_2 u(x_2 - \hat{x_2}) \\ \dot{\hat{x_1}} = \hat{a_{1,1}}x_1 + \hat{a_{1,2}}x_2 + \hat{b_1}u + C_{1,1}(x_1 - \hat{x_1}) + C_{1,2}(x_2 - \hat{x_2}) \\ \dot{\hat{x_2}} = \hat{a_{2,1}}x_1 + \hat{a_{2,2}}x_2 + \hat{b_2}u + C_{2,1}(x_1 - \hat{x_1}) + C_{2,2}(x_2 - \hat{x_2}) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

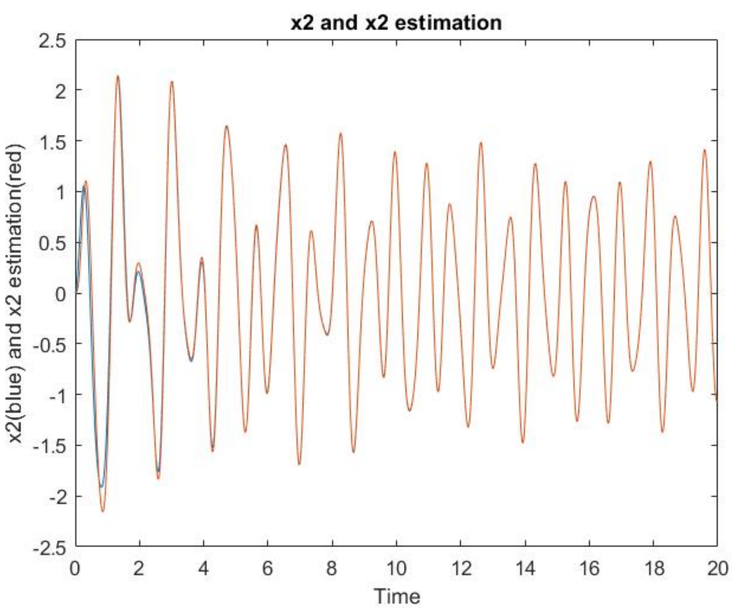
3.3 Προσομοίωση

Για τις προσομοιώσεις σε *Matlab* έχω χρησιμοποιήσει $\gamma_1 = 13.5$ και $\gamma_2 = 3.5$, $t = 20s$ και

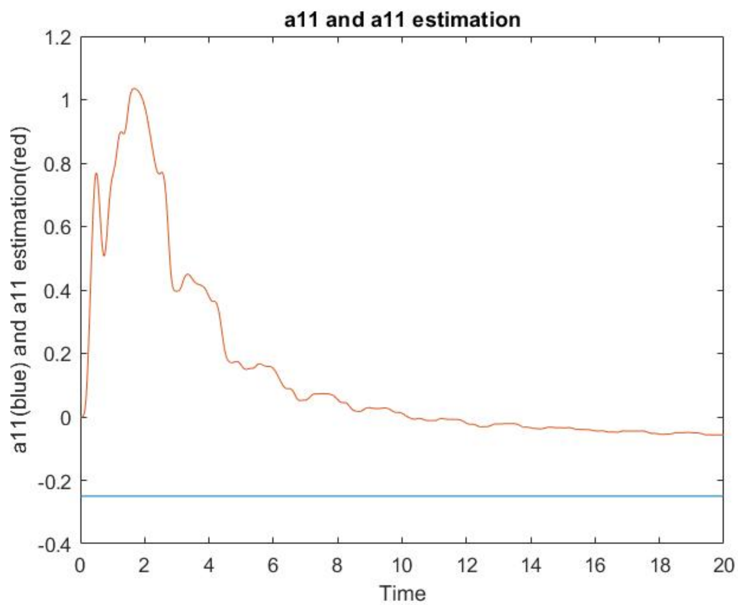
$$C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$



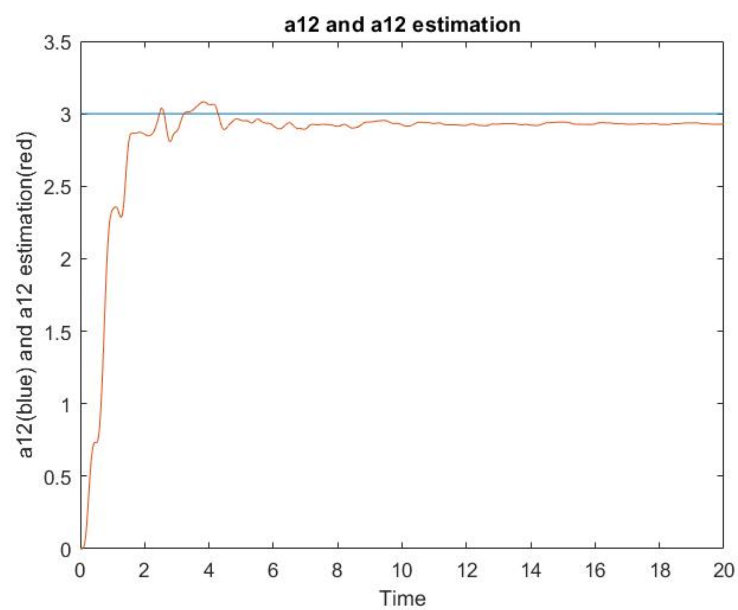
Σχήμα 3.1: $x1$ και $x1$ εκτίμηση



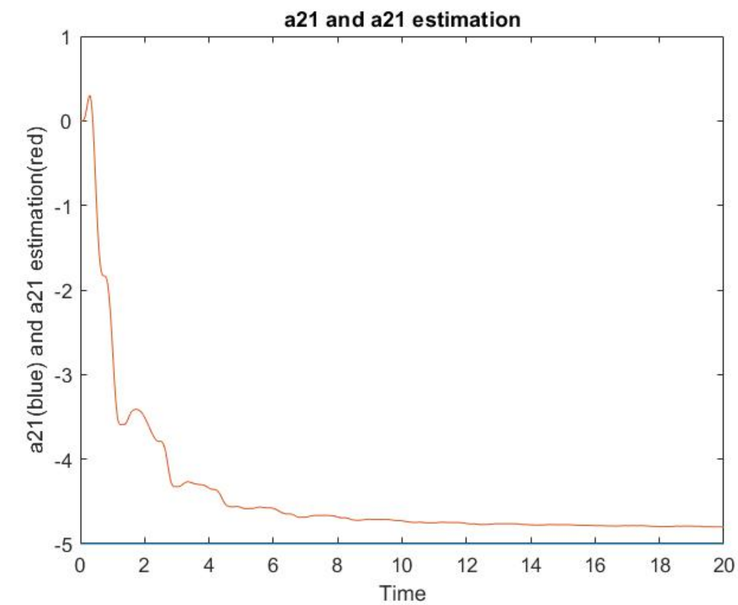
Σχήμα 3.2: $x2$ και $x2$ εκτίμηση



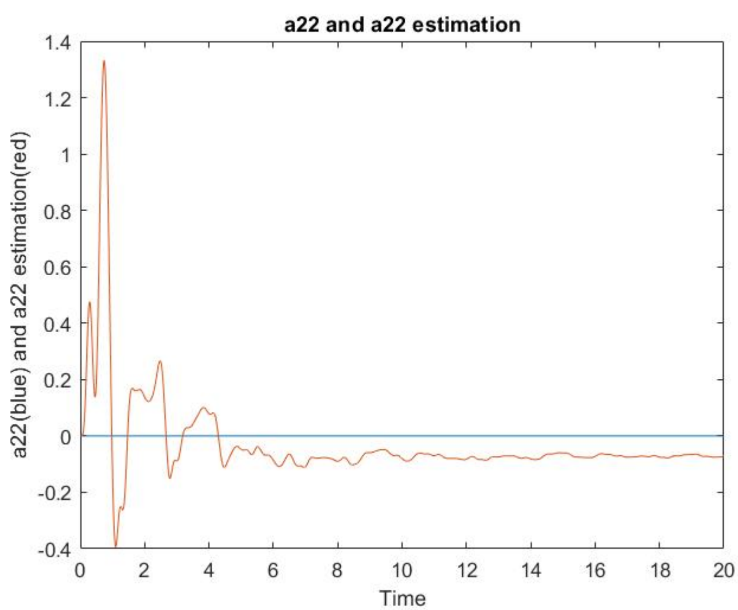
Σχήμα 3.3: $a11$ και $a11$ εκτίμηση



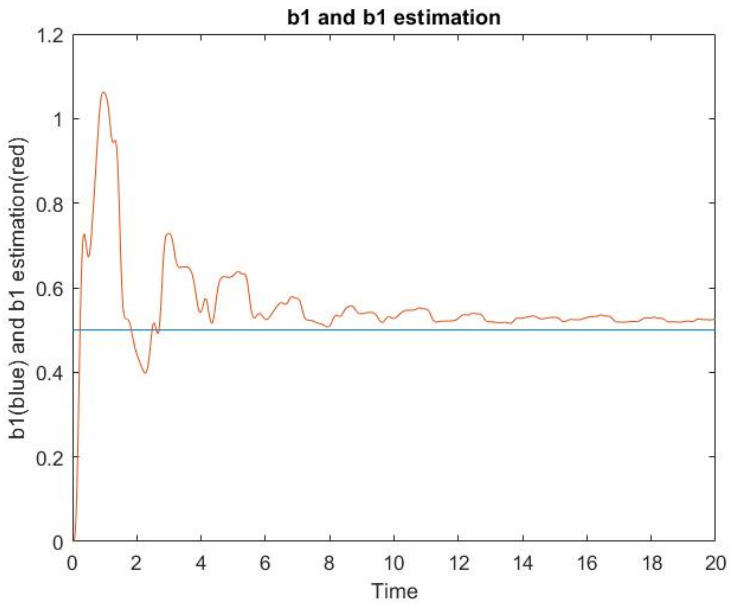
Σχήμα 3.4: $a12$ και $a12$ εκτίμηση



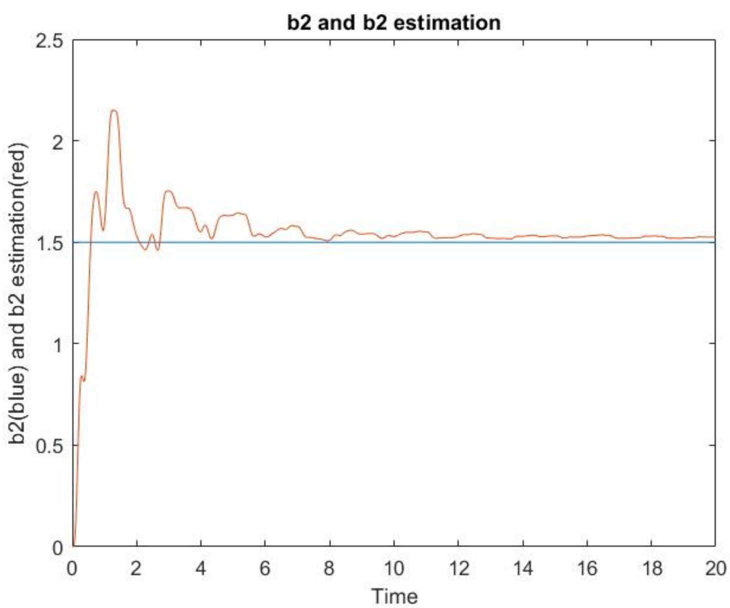
Σχήμα 3.5: $a21$ και $a21$ εκτίμηση



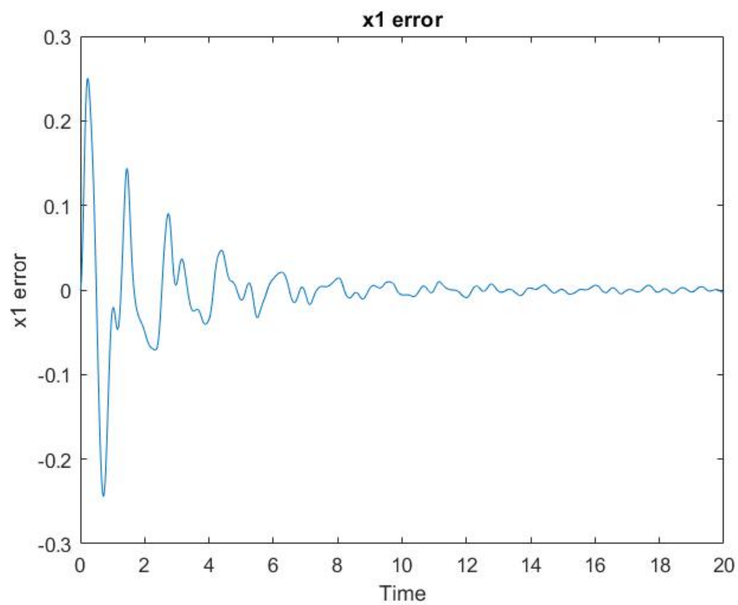
Σχήμα 3.6: $a22$ και $a22$ εκτίμηση



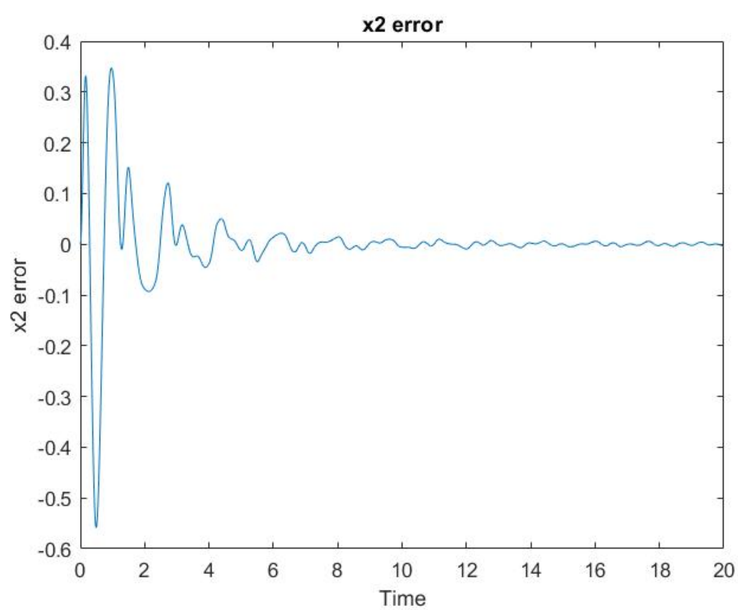
Σχήμα 3.7: $b1$ και $b1$ εκτίμηση



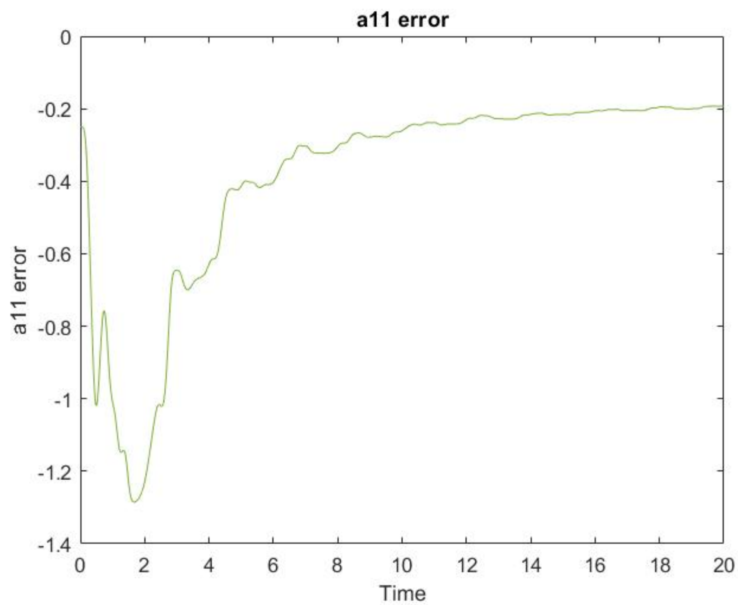
Σχήμα 3.8: $b2$ και $b2$ εκτίμηση



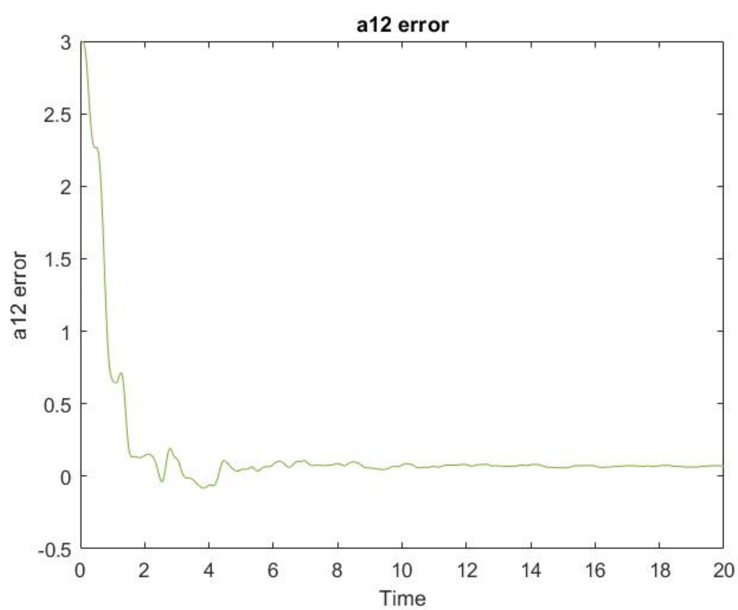
Σχήμα 3.9: $x1$ σφάλμα



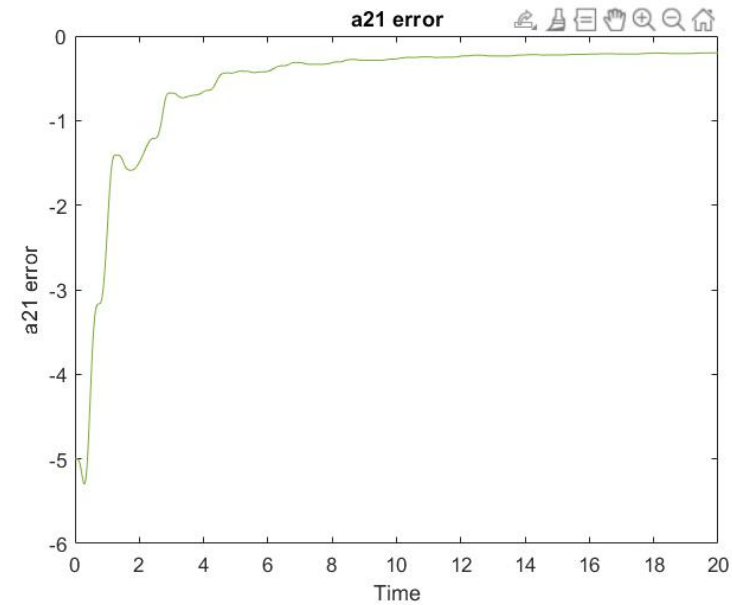
Σχήμα 3.10: $x2$ σφάλμα



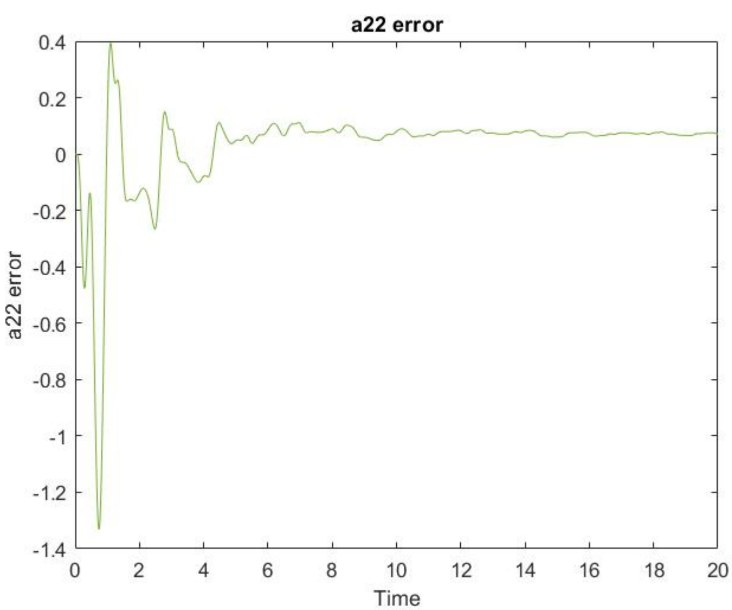
Σχήμα 3.11: $a11$ σφάλμα



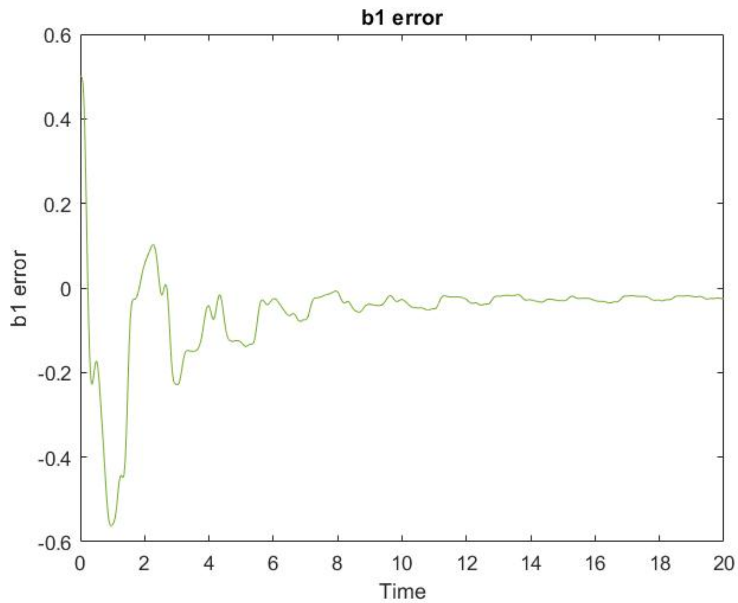
Σχήμα 3.12: $a12$ σφάλμα



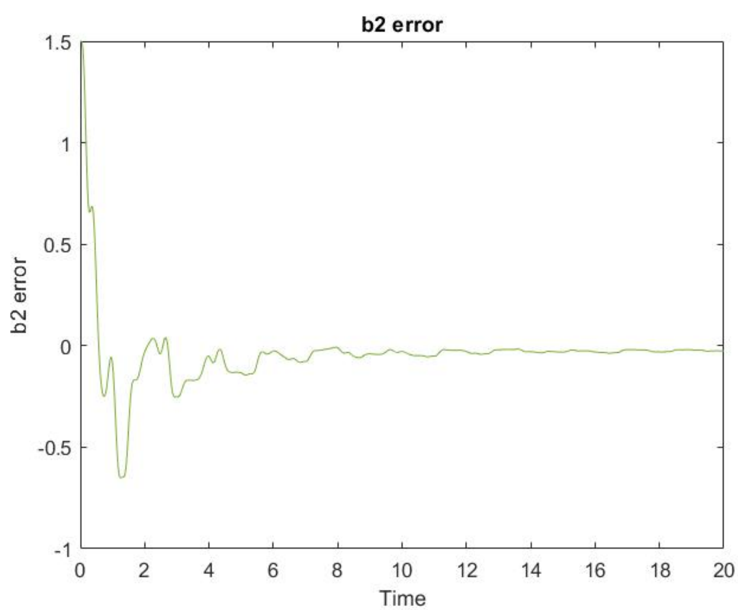
Σχήμα 3.13: $a21$ σφάλμα



Σχήμα 3.14: $a22$ σφάλμα



Σχήμα 3.15: $b1$ σφάλμα



Σχήμα 3.16: $b2$ σφάλμα

Τα αποτελέσματα έχουν έπελθει μετά από αρκετές δοκιμές με τις παραμέτρους γ_1 και γ_2 και το πίνακα C. Τα αποτελέσματα είναι βασισμένα στις καλύτερες τιμές των παραμέτρων που βρήκα.