

Antoni Karwowski 229809 229908@edu.p.lodz.pl
Michał Gebel 229879 229879@edu.p.lodz.pl

Zadanie 5.: Metoda aproksymacji

1. Cel

Celem zadania piątego była implementacja programu pozwalającego na aproksymację żądanej funkcji w oparciu o wielomiany Legendre'a

Przykładowe funkcje f , które były brane pod uwagę do przeprowadzania eksperymentów:

1. $(\sin(x)^3 + x)$

2. $(-3^x + 10x)$

3. $((\sin(x) + 2)^2 + 5\cos(x))$

4. $(7^{\sin(x)})$

5. $(|x + 3| - 2)$

2. Wprowadzenie

Metoda numeryczna aproksymacji służy do tworzenia funkcji interpolacyjnej $w(x)$. Powstaje ona na podstawie określonej liczby punktów funkcji interpolowanej $f(x)$, tak zwanych węzłów. Celem metody jest jak najdokładniejsze odwzorowanie funkcji f . W naszym wariancie zadania mieliśmy za zadanie oprzeć metodę aproksymacji na podstawie wielomianów Legendre'a istniejących na przedziale $x \in [-1,1]$ o postaci ogólnej:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k (x^2 - 1)}{dx^k}$$

gdzie k to stopień wielomianu Legendre'a

Na potrzeby naszego programu zastosowaliśmy inną, iteracyjną metodę wyliczania wzoru wielomianu Legendre'a odpowiedniego stopnia
Na początku mamy:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

Następnie obliczamy wielomian stopnia $k+1$ według wzoru:

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)$$

gdzie $k > 0$

Kiedy mamy już wielomian Legendre'a żadanego stopnia potrzebujemy jeszcze współczynnika odpowiadającemu temu wielomianowi. Otrzymujemy go rozwiązując za pomocą metody Gaussa-Jordana układ równań liniowych w postaci:

$$\begin{pmatrix} T_0(x_1)A_0 & T_1(x_1)A_1 & \dots & T_n(x_1)A_n \\ T_0(x_2)A_0 & T_1(x_2)A_1 & \dots & T_n(x_2)A_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_0(x_n)A_0 & T_1(x_n)A_1 & \dots & T_n(x_n)A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

gdzie n to stopień współczynnika (odpowiadający stopniowi wielomianu Legendre'a)

Mając odpowiednie współczynniki oraz wielomiany Legendre'a wykonujemy sumowanie:

$$w(x) = \sum_{k=0}^n A_k * T_k(x)$$

Wynik tej sumy to wartość funkcji aproksymacyjnej w danym punkcie.

3. Opis implementacji

Implementacja metody została wykonana w języku Python. Program posiada pięć plików z rozszerzeniem.py. W main znajduje się funkcja uruchamiająca program, w functions.py posiadamy funkcje pomocnicze, w Division.py implementację klasy przedziału, w LinearEquationCalculator pomocniczą funkcję rozwiązującą układ równań metodą Gaussa-Jordana (zadanie 2), a ApproximationFunctionCalculator zawiera klasę, która wystosuje zawarte w sobie metody do wytworzenia funkcji aproksymacyjnej.

Opis najważniejszych funkcji:

`gauss_jordan_solver` - metoda zwracająca rozwiązanie układu równań liniowych.

`convert_x_to_miunus_one_one` - metoda konwertująca wartości x z dowolnego przedziału na przedział $[-1, 1]$

`calculate_legendre_polynomial` - wylicza wartość wielomianu Legendre'a n -tego stopnia w punkcie x

`calculate_coefficients_and_legendre_polynomial` - funkcja zwracająca wartość funkcji aproksymującej w punkcie x

4. Materiały i metody

Wybraliśmy cztery, według nas najważniejsze i najciekawsze, aspekty do zbadania metody aproksymacji przy oparciu wielomianów Legendre'a.

Eksperyment 1 był wykonywany dla funkcji 1, 2 dla 2, 3 dla wszystkich funkcji, a 4 dla 4.

1. Podstawową kwestią jest sprawdzenie jak szybko działa metoda aproksymacji. Sprawdzamy to zadając jako warunek wyjścia wartość żądanej dokładności, a metoda wykonuje kolejne iteracje dopóki jej nie osiągnie. Każda z iteracji posiada błąd dokładności. Wartym sprawdzenia jest charakterystyka zmian wartości błędu i odpowiedzenie sobie na pytanie, od czego zależy i czy zawsze jest taka sama.

Przeprowadzono 5 testów na funkcji nr 1 dla dokładności kolejno:

$\{0.5, 0.2, 0.1, 0.01, 0.001\}$

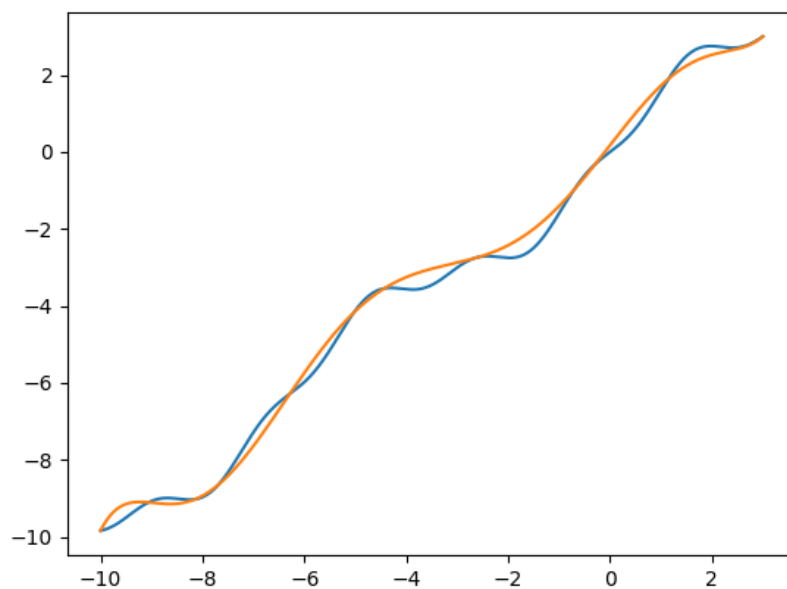
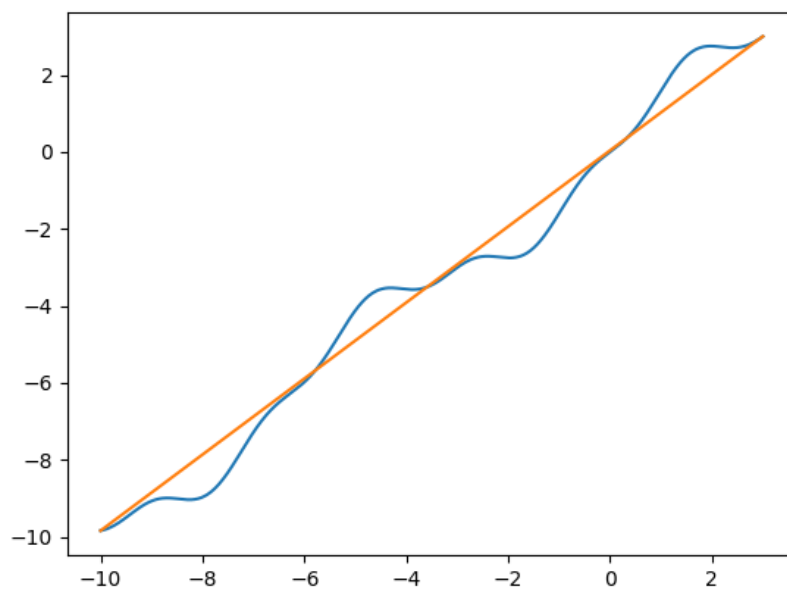
2. To jak działa metoda aproksymacji może różnić się w zależności od funkcji, którą do niej przekazemy. Celem tego eksperymentu jest znalezienie funkcji, której błąd aproksymacji dla 70 węzłów będzie najmniejszy. Wykonano go na każdej z funkcji przykładowych umieszczonych we wstępie. Numer eksperymentu odpowiada numerowi funkcji, którą badamy.

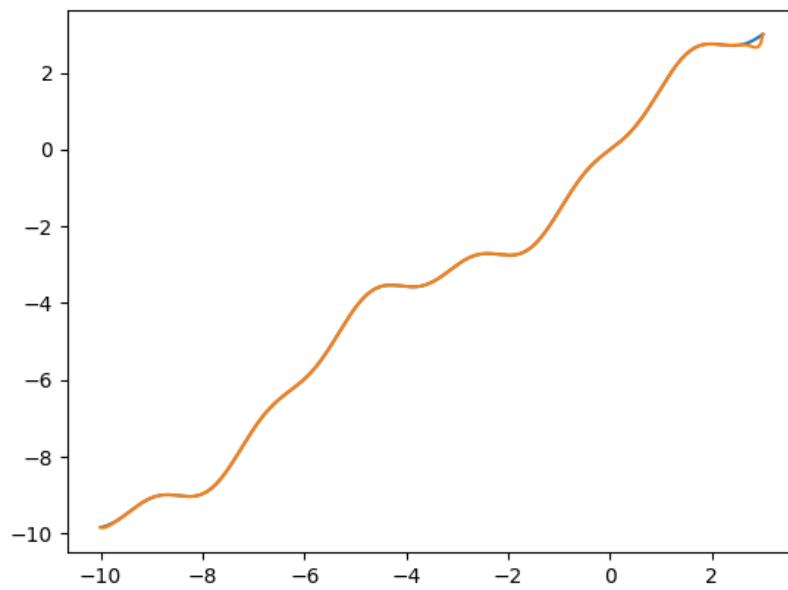
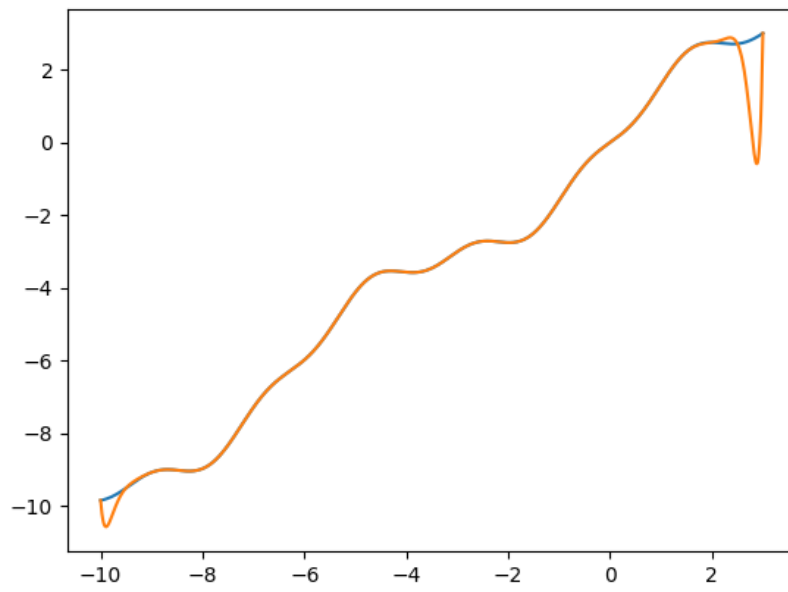
3. Uzyskanie żądanej dokładności dla wielomianu N-tego stopnia wiąże się z przekazaniem konkretnej liczby węzłów funkcji do metody aproksymacyjnej. Badamy jak różni się ta dokładność w zależności od przydziału liczby węzłów i stopnia wielomianu.

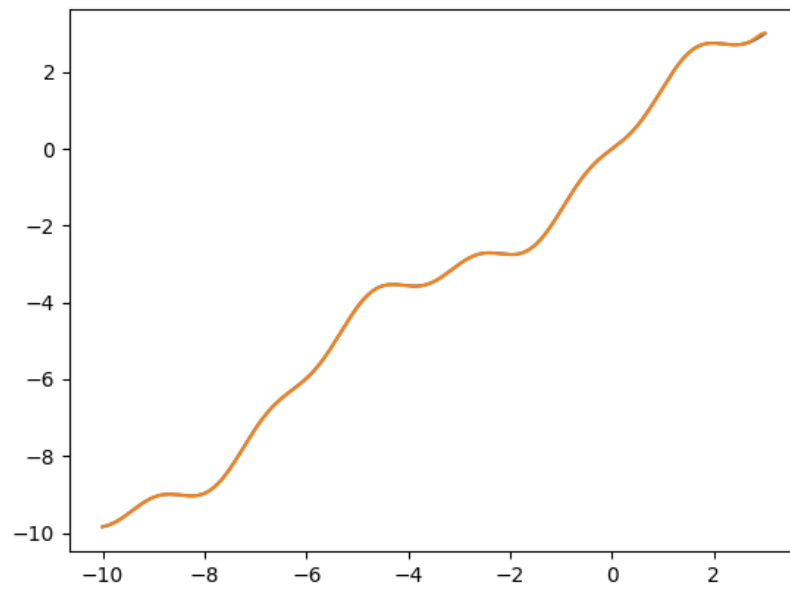
5. Wyniki

Wyniki eksperymentów zostały przedstawione na wykresach (eksperymenty 1 i 2) oraz tabeli (eksperyment 3).

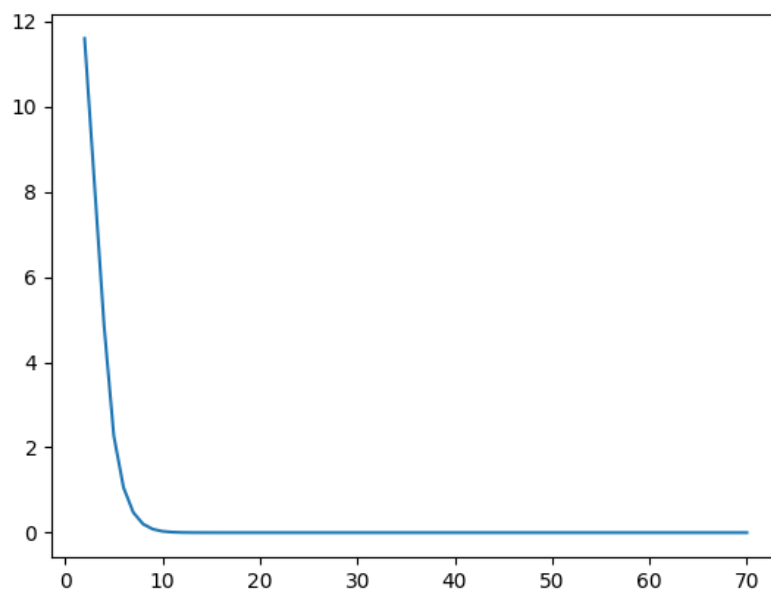
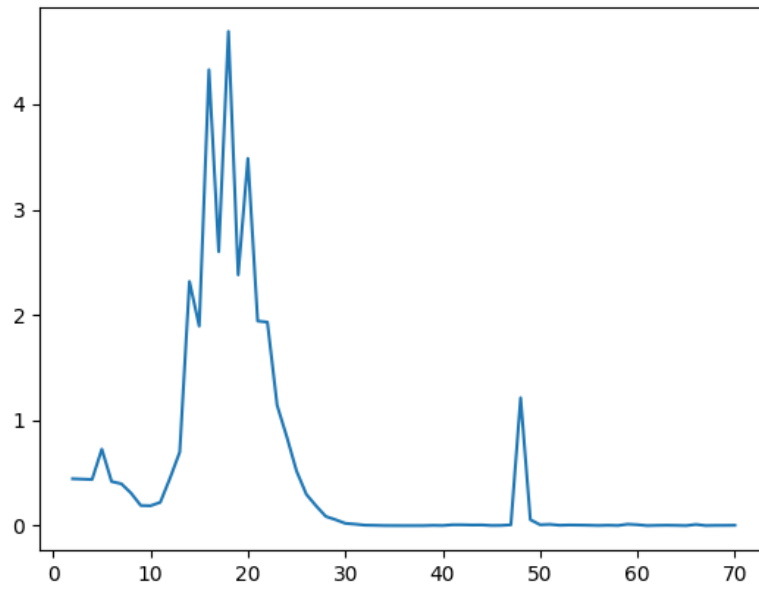
Eksperyment 1

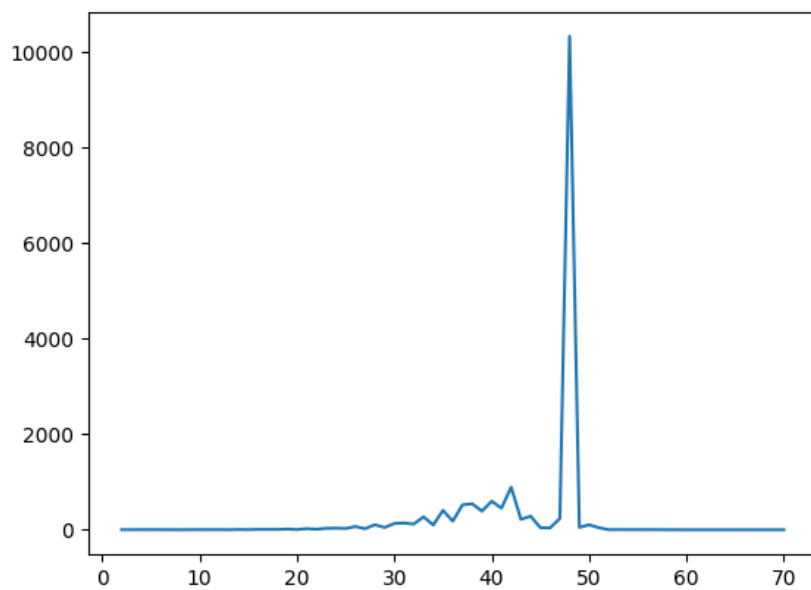
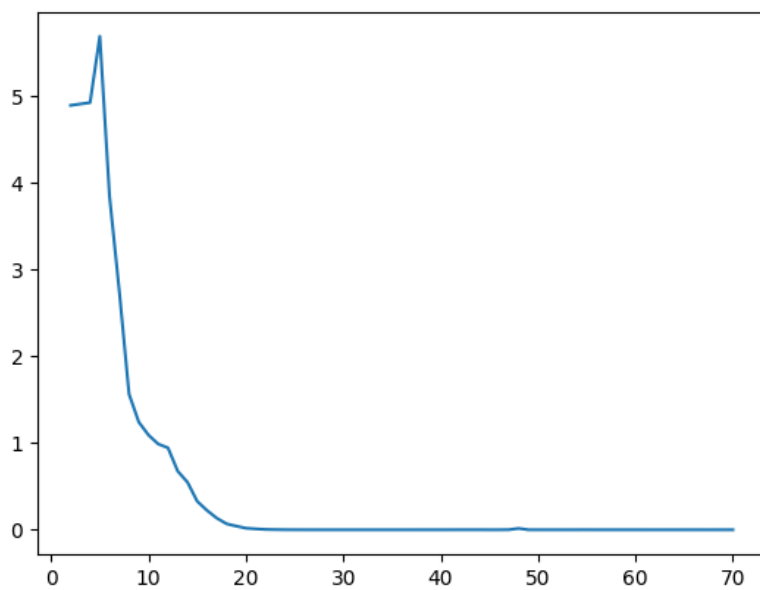


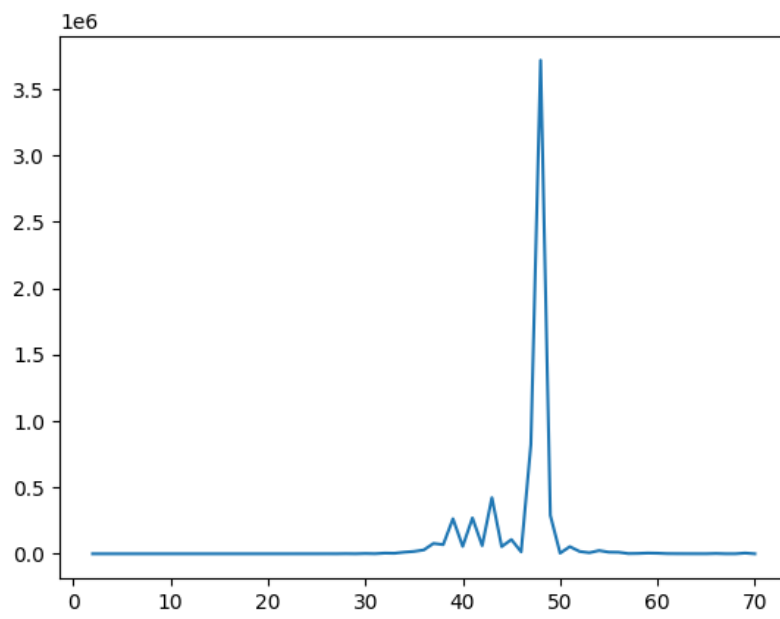




Eksperyment 2







Eksperyment 3

Stopień wielomianu (n)	Błąd aproksymacji dla n-1 węzłów	Błąd aproksymacji dla n węzłów	Błąd aproksymacji dla n+1 węzłów	Błąd aproksymacji dla n+2 węzłów
3	-	-	1.839195462 e-15	3.402389481 e-15
4	-	205.7623689	3.200955056 e-13	1.1339862 e-13
5	1508.92403	383.560122	4.6041570 e-13	5.03942676 e-12
6	3739.71119	573.523071	2.19733733 e-11	5.08820197 e-11
7	94057.783	14454.328053	3.86675240 e-09	4.09247282 e-09
8	276439.02402	35771.7335	2.68247974 e-08	2.310852 e-08
9	804864.0047	102609.3456	3.72693066 e-07	8.3694725 e-07
10	1898272.8936	220120.2322	4.57899296 e-06	5.73347 e-06
11	2347949.1439	271236.524	1.6293774 e-05	3.01575 e-05
12	94797165.294	9287093.52	0.006652874	0.0061480247
13	342590561.31	32178387.63	0.076882169	0.040301420
14	1667242710.015	144015639.72	2.45352	2.663551

6. Dyskusja

W trzech eksperymentach badano trzy własności opisywanej metody: 1) wpływ liczby węzłów na dokładność aproksymacji 2) jakość aproksymacji przy wyborze różnych funkcji aproksymowanych 3) korelację między liczbą węzłów aproksymacji a stopniem wielomianu aproksymowanego niezbędnych do uzyskania optymalnej dokładności

A) W eksperymencie zauważono, że zwiększając zadaną dokładność aproksymacji zwiększa się również liczba węzłów konieczna do jej uzyskania. Wykazano jednak iż nie była to zależność liniowa. dla funkcji 1 dokładność < 1 otrzymano przy 3 węzłach, < 0.2 przy 9 węzłach, natomiast < 0.1 przy 32 węzłach. Dokładność 0.01 uzyskano dopiero przy 62 węzłach

B) Badano wpływ doboru funkcji do optymalności metody, w tym celu wykonano na każdej z 5 opisanych funkcji 68 iteracji dla liczby węzłów od 3 do 70 i zestawiono na wykresach średni błąd aproksymacji dla zadanej liczby węzłów. Zmiana błędu aproksymacji przy kolejnych iteracjach jest diametralnie różna w zależności od wybranej funkcji, zauważono ciekawe podobieństwo wykresów dla funkcji 4 oraz 5. charakterystycznym elementem jest kilkutyśięczny wzrost wartości błędu aproksymacji w pobliżu 50 iteracji. Nie badano przyczyn determinujących postać wykresów. Pewną zależność zauważono tylko przy funkcjach będących wielomianami oraz ich prostymi złożeniami(funkcja 2 oraz 3). W tych funkcjach stwierdzono zależność wykładniczą.

3) Badano aproksymację wielomianów n -tego stopnia. Stwierdzono wysoką optymalność opisywanej metody dla aproksymacji wielomianów. w eksperymencie 3 wykazano, że aproksymacja na $n+1$ węzłach lub więcej jest w stanie zapewnić bardzo dużą dokładność aproksymacji dla wielomianów stopnia n .

7. Wnioski

1) Dokładność aproksymacji zwiększa się wraz ze wzrostem liczby węzłów, jednak nie jest to zależność liniowa, dodatkowo zasada ta obowiązuje jedynie do pewnej granicy (zależnie od doboru funkcji).

2) Aproksymacja metodą wielomianów Legendre'a jest optymalna jedynie dla pewnych rodzajów funkcji. funkcje z wartością bezwzględną, wykładnicze oraz ich złożenia aproksymowane są wysoce nieoptymalnie, oraz z dużym błędem aproksymacji

3) Wielomiany n -tego stopnia można aproksymować przy pomocy $n+1$ węzłów.

Literatura

- [1] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl. *Nie za krótkie wprowadzenie do systemu $\text{\LaTeX}2\epsilon$* , 2007, dostępny online. <https://ctan.org/tex-archive/info/lshort/polish/lshort2e.pdf>.
- [2] Konsultacje z mgr inż. Pawłem Tarasiukiem.
- [3] Materiały wykładowe dr. Alicji Romanowicz https://ftims.edu.p.lodz.pl/pluginfile.php/162464/mod_resource/content/1/Metody_numeryczne_cz_II.pdf
- [4] Angielski artykuł z wikipedii dotyczący wielomianów Legendre'a https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials