

Antoni Karwowski 229809 229908@edu.p.lodz.pl
Michał Gebel 229879 229879@edu.p.lodz.pl

Zadanie 4.: Całkowanie numeryczne

1. Cel

Celem zadania czwartego była implementacja programu pozwalającego na całkowanie numeryczne dwoma różnymi metodami. Pierwszą metodą była kwadratura Newtona-Cotesa oparta na trzech węzłach z wykorzystaniem wzoru Simpsona. Druga metoda to wariant kwadratury Gaussa przy użyciu wielomianów Legendre'a.

Przykładowe funkcje f , które były brane pod uwagę do przeprowadzania eksperymentów:

1. $(\sin(x)^3 + x)$

2. $(-3^x + 10x)$

3. $((\sin(x) + 2)^2 + 5\cos(x))$

4. $(7^{\sin(x)})$

2. Wprowadzenie

Metoda kwadratury Newtona-Cotesa polega na liczeniu całki dla funkcji $f(x)$ dla równoodległych węzłów na danym podprzedziale. Co iterację zwiększamy dwukrotnie ilość podprzedziałów całkowania, lub o jeden. W przypadku implementacji zadania stosujemy wzór otwarty Newtona-Cotesa rzędu 2 nazywany wzorem Simpsona.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Metoda kwadratury Gaussa obliczania jest w przypadku naszej implementacji dla 5 węzłów. Koniecznym jest przeskalowanie granic całkowania zadanej funkcji z żadanego przedziału na przedział $[-1, 1]$. Można to zrobić korzystając ze wzoru:

$$\int_c^d f(y) dy = \int_{-1}^1 f\left(\frac{d-c}{2}x + \frac{c+d}{2}\right) \frac{d-c}{2} dx$$

, gdzie

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$$

A współczynniki A_i oraz x_i są znane z tabeli (n to ilość węzłów):

0	$\frac{128}{255}$
$\pm \frac{1}{21} \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{900} (322 + 13\sqrt{70})$
$\pm \frac{1}{21} \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{900} (322 - 13\sqrt{70})$

3. Opis implementacji

Implementacja metody została wykonana w języku Python. Program posiada cztery pliki z rozszerzeniem.py. W main znajduje się funkcja uruchamiająca program, w functions.py posiadamy funkcje pomocnicze, w Division.py implementację klasy przedziału, a w IntegralCalculations główne funkcje implementujące metody całkowania.

Opis najważniejszych funkcji:

calculate_newton_cotes_integral - wylicza całkę sposobem Newtona-Cotesa (wzór Simpsona)

calculate_minus_one_one_integral - wylicza całkę na przedziale $[-1,1]$

calculate_gauss_legrende_integral - wylicza całkę metodą Gaussa-Legrende'a

calculate_integral - wylicza kwadraturę żadaną metodą

4. Materiały i metody

Zostały zaplanowane 3 eksperymenty. Każdy z nich miał na celu porównanie dwóch metod - Newtona-Cotesa i Gaussa-Legendre'a. Ponadto każdy z eksperymentów przeprowadzono z różnymi sposobami zwiększania ilości podprzedziałów (o jeden lub dwukrotnie w każdej iteracji). Eksperymenty wykonano na funkcji z numerem 2 na przedziale $x \in [-3, 7]$

Eksperyment 1:

Najważniejszą kwestią, którą chcemy zbadać jest dokładność obu metod. Sprawdzamy to zliczając liczbę iteracji potrzebnych do osiągnięcia zadanej dokładności. Ponadto sprawdzamy, czy sposób zwiększania podprzedziałów wpływa na tę dokładność.

Eksperyment 2:

Liczba iteracji nie jest równoznaczna z prędkością algorytmu. Dlatego też ważną kwestią jest całkowity czas obliczeń potrzebny do uzyskania zadanej dokładności. Ponadto sprawdzamy, czy sposób zwiększania podprzedziałów wpływa na ten czas.

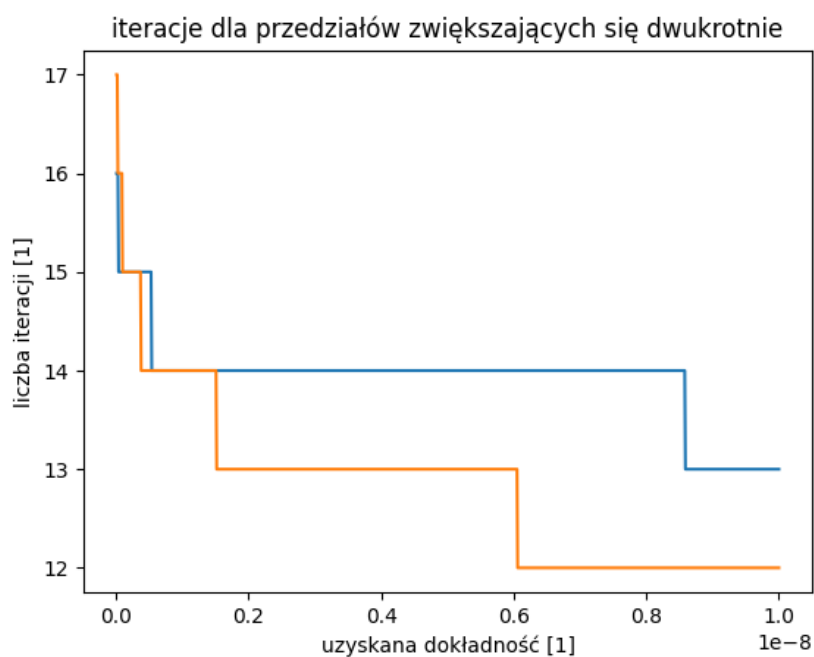
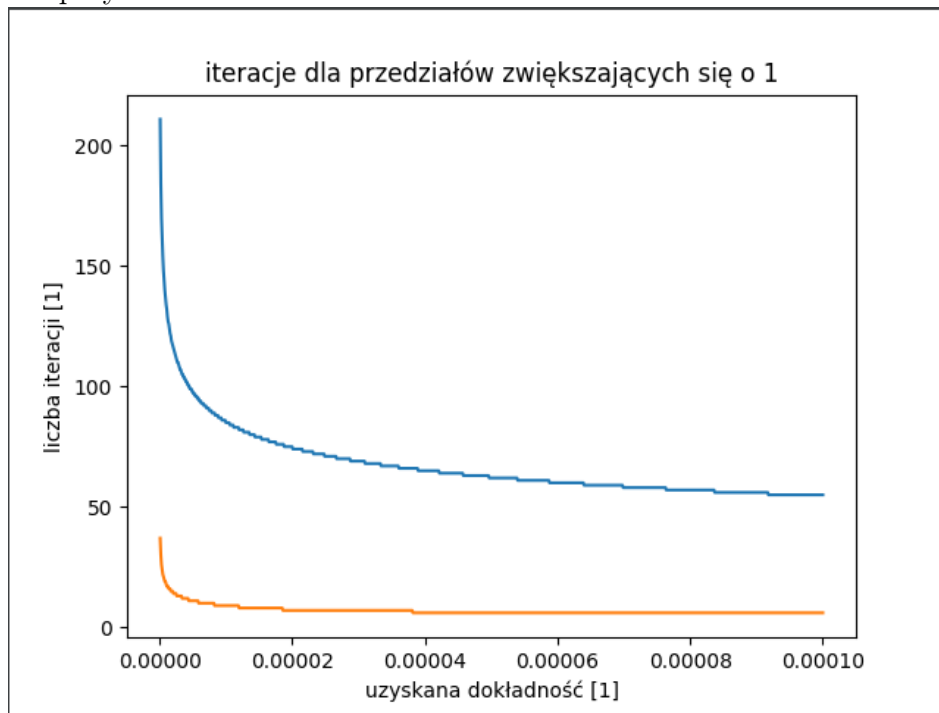
Eksperyment 3:

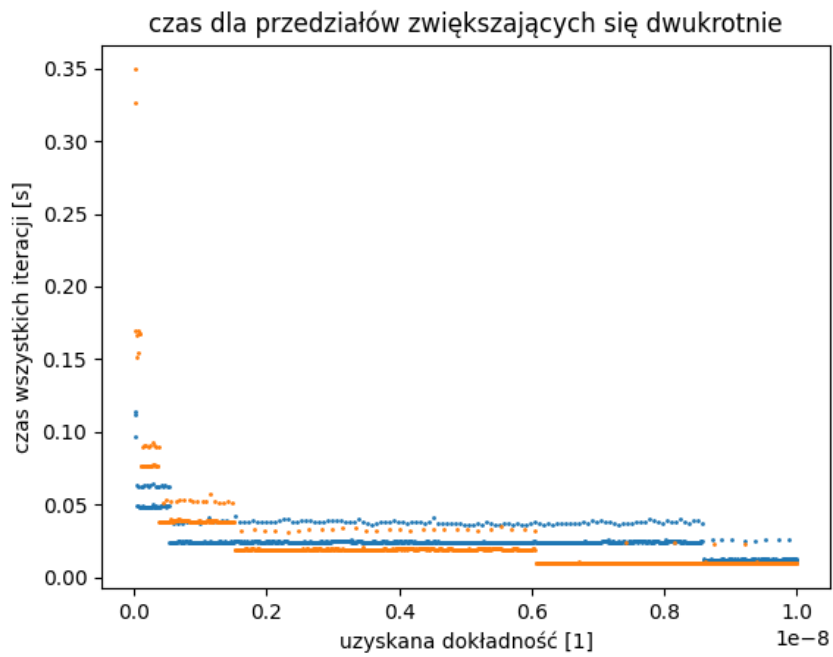
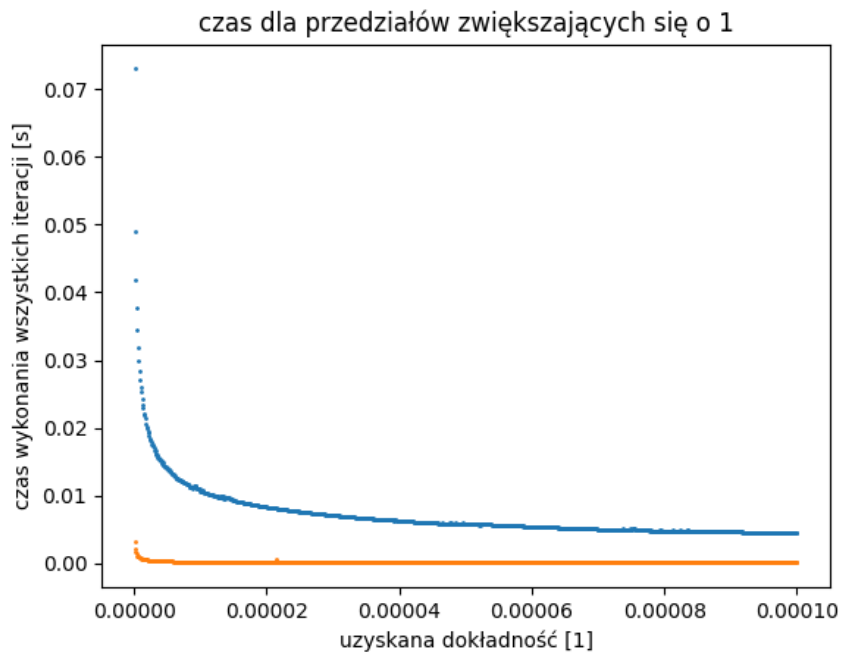
Nie wiadomo jak ilość wcześniej wykonanych iteracji wpływa na czas wykonania kolejnej iteracji. Stąd wartą sprawdzenia kwestią jest również czas obliczeń przypadający na jedną iterację. Ponadto sprawdzamy, czy sposób zwiększania podprzedziałów wpływa na ten czas.

5. Wyniki

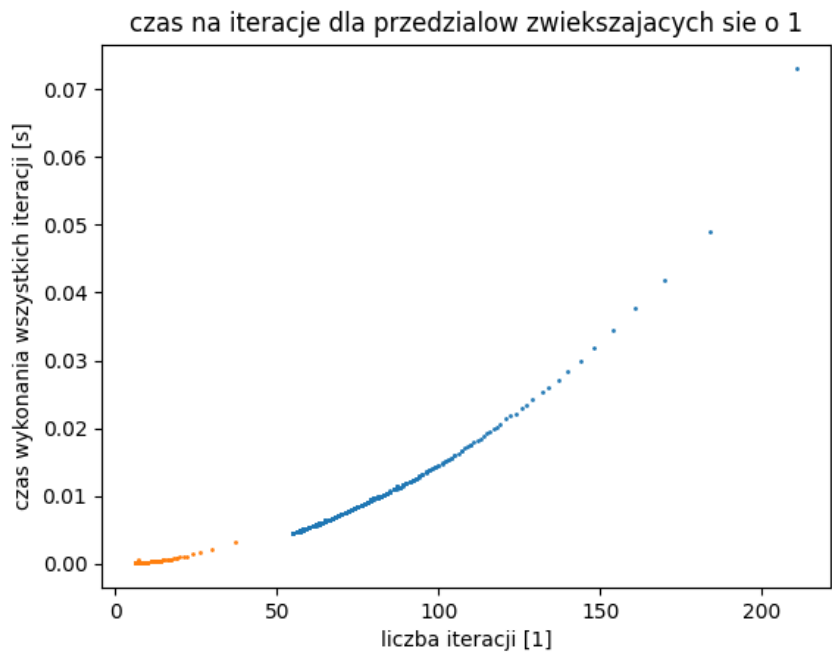
Wyniki eksperymentów zostały przedstawione na 6 wykresach. W ten sposób zestawiono ze sobą dwie metody zwiększania podprzedziałów i ich wpływ na konkretne eksperymenty. Jednakowoż najważniejszą kwestią jest porównanie dwóch metod całkowania numerycznego.

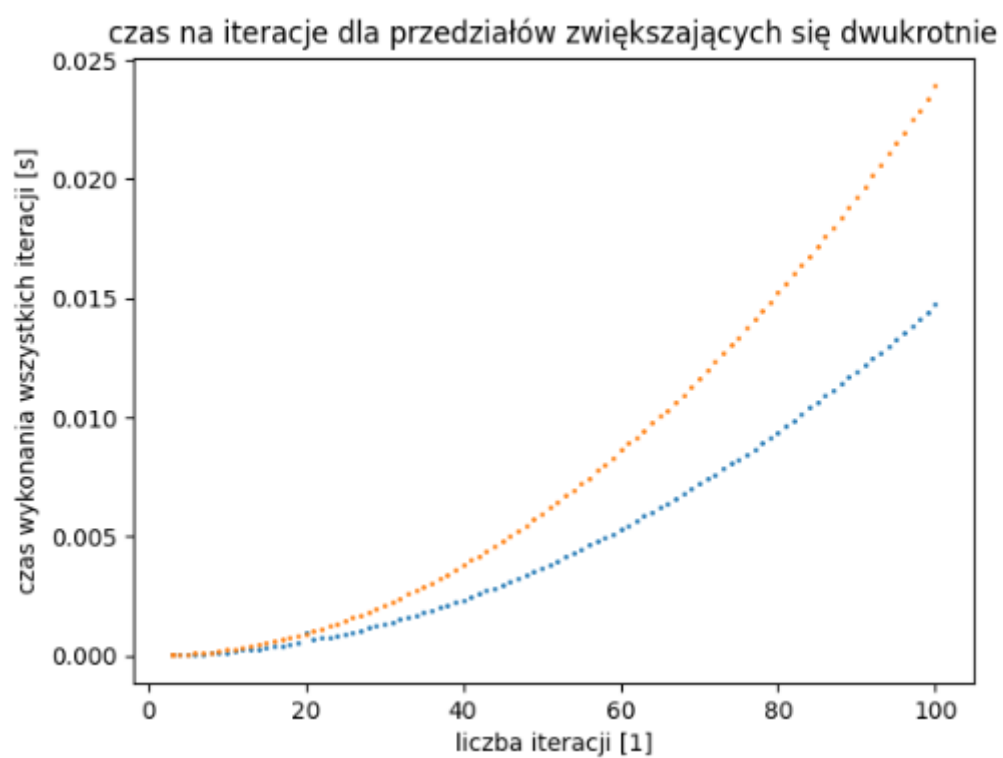
Eksperyment 1





Eksperyment 3





6. Dyskusja

Eksperyment 1

Pierwszym kryterium porównawczym obu metod była liczba iteracji niezbędna do uzyskania zadanej dokładności. wykonano 1000 obliczeń dla zadanej dokładności od 0.0001 do 0.0000001. Jak można zaobserwować na wykresach liczba iteracji wzrasta wykładniczo w stosunku do zadanej dokładności. zaobserwowano znaczną różnicę w liczbie iteracji dla obu metod. Metoda Gaussa-Legendra wymaga takiej samej lub mniejszej liczby iteracji do uzyskania zadanej dokładności. różnica ta jest znacznie większa dla zwiększania liczby przedziałów o 1 przy kolejnych iteracjach.

Eksperyment 2

Zbadano wpływ zadanej dokładności na czas wykonania obliczeń, wykazano (wykres 2.2) jedynie pośredni wpływ zadanej dokładności na czas wykonania. Stwierdzono (eksperyment 3) zależność między ilością iteracji i czasem wykonywania obliczeń, co powoduje zmianę czasu wykonania programu przy różnych zadanych dokładnościach jedynie w sytuacji, kiedy zmienia się liczba iteracji. Wszelkie różnice między zaobserwowanymi metodami wynikają jedynie z różnic czasu wykonania jednej iteracji dla obu metod.

Eksperyment 3

Zbadano wpływ ilości iteracji na czas wykonania programu. Metodologia w eksperymencie 2.1 oraz 2.2 była niepoprawna, ponieważ eksperymenty wykonywano dla zadanej dokładności, co powodowało nieprzewidywalne rezultaty dotyczące ilości iteracji dla różnych funkcji (3.1 oraz 3.2). Po przeprowadzeniu eksperymentu 3.3 wykazano wykładniczą zależność między czasem wykonania programu a ilością iteracji. Wynika to z faktu iż istnieje liniowa zależność między czasem wykonania jednej iteracji, a całkowitą ilością iteracji. zaobserwowano większy wzrost czasu wykonania obliczeń dla metody Gaussa-Legendre'a. Efektem jest bardzo zbliżona wydajność obu metod na jedną iterację dla liczby iteracji < 20 . Ostatecznie jednak metoda Gaussa-Legendre'a dla pięciu węzłów jest obiektywnie wydajniejsza, ponieważ wymaga wielokrotnie mniejszej ilości węzłów do uzyskania zadanej dokładności.

Zaobserwowano pewne ciekawe zjawisko, związane z uzyskaniem większej liczby iteracji dla metody Gaussa-Legendre'a dla zadanej dokładności przy dwukrotnym zwiększaniu liczby przedziałów. Nie podjęto dalszych eksperymentów w celu wyjaśnienia tego zjawiska.

7. Wnioski

Porównując metody całkowania numerycznego Gaussa-Legendre'a oraz Newtona-Cotesa:

1. Metoda Gaussa-Legendre'a wymaga takiej samej lub mniejszej liczby iteracji do uzyskania zadanej dokładności.
2. Czas obliczeń dla jednej iteracji metody Newtona-Cotesa jest równy lub mniejszy w zależności od całkowitej liczby iteracji.
3. Stosowanie dwukrotnego zwiększania ilości przedziałów powoduje wykładniczy spadek ilości iteracji, co sprawia, iż jest on wydajniejszy w połączeniu z metodą Newtona-Cotesa.
4. Złożoność obliczeniowa wykonania jednej iteracji jest liniowa w przypadku obu metod
5. Złożoność obliczeniowa całego algorytmu jest kwadratowa, ponieważ wzrost ze wzrostem liczby iteracji zwiększa się również długość obliczenia jednej iteracji.

Literatura

- [1] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl. *Nie za krótkie wprowadzenie do systemu L^AT_EX2_ε*, 2007, dostępny online. <https://ctan.org/tex-archive/info/lshort/polish/lshort2e.pdf>.
- [2] Konsultacje z mgr inż. Pawłem Tarasiukiem.
- [3] Materiały Uniwersytetu Warszawskiego <https://www.fuw.edu.pl/~jnareb/zajecia/int-gauss.pdf>