*Antoni Karwowski* *229908*
*Michał Gebel* *229879*

Rok akademicki *2020/21*
*środa 14.30-16.00*

# METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie *nr_1 – Metody znajdowania maksimum*

# 1. Cel

*Celem zadania było zaimplementowanie i porównanie ze sobą dwóch metod optymalizacji jednowymiarowej (znajdowania maksimum) na wyznaczonym przedziale dla wybranych funkcji.*

*Metoda pierwsza:* ***dychotomia***
*Metoda druga:* ***złoty podział***

*Wybrane funkcje:*

1) $2x^3 + 4x^2 + 2$

2) $\sin^3(x) + x$

3) $3^x + 10x$

4) $\sin^2(x) + 5\cos(x)$

5) $7^{\sin(x)}$

*6) $(\sin(x) - 2)^2 \quad + 5\cos(x)$

**dodatkowa funkcja pojawiająca się jako 6 funkcja 4vs2*

# 2. Wprowadzenie

*Zarówno metoda dychotomii jak i złotego podziału są algorytmami iteracyjnymi służącymi do zawężania zadanego przedziału zawierającego ekstremum dla funkcji jednej zmiennej. Warunkiem poprawnego działania algorytmu jest wprowadzenie na początku przedziału unimodalnego, to jest monotonicznego po obu stronach ekstremum. Dodatkowym warunkiem jest istnienie maksymalnie jednego ekstremum na zadanym przedziale. Za ekstremum uznajemy środek końcowego przedziału.*

## ***2.1***. *Metoda wyznaczania przedziału unimodalnego: [1]*

*Przedział uznajemy za prawdopodobnie unimodalny i potencjalnie zawierający maksimum badanej funkcji jeżeli dla $x_m$ będącego środkiem przedziału <a, b> spełnione są warunki $f(a) < f(x_m)$ oraz $f(b) < f(x_m)$.*

*Dokładność tej metody zależna jest od długości badanego przedziału <a, b>.*

## ***2.2.*** *Metoda Dychotomii [3][4]*

*dla funkcji f na początkowym przedziale <a, b> wybieramy dwa punkty o współrzędnych (x1, f(x1)) oraz (x2, f(x2)), dzieląc przedział na części o stałej proporcji p. wartości x1 oraz x2 obliczamy następująco:*

$x1 = a*p + b*(1-p)$ [2]
$x2 = b*p + a*(1-p)$ [2]

*a następnie wykonujemy przypisanie:*

*jeżeli f(x1) > f(x2)*
*jako nowy przedział wybieramy <a, x2>*

*jeżeli f(x1) < f(x2)*
*jako nowy przedział wybieramy <x1, b>*

*w obu przypadkach ponownie wyliczamy x1 oraz x2 według tych samych wzorów*

*algorytm powtarzamy do osiągnięcia jednego z warunków stopu:*
*a) osiągnięcie zadanej liczby iteracji*
*b) osiągnięcie zadanej dokładności*

## ***2.3***. *Metoda Złotego Podziału [3][4]*

*dla funkcji f na początkowym przedziale <a, b> wybieramy dwa punkty o współrzędnych (x1, f(x1)) oraz (x2, f(x2)), dzieląc przedział na części w zależności od współczynnika $\tau \approx 0{,}618$. Wartości x1 oraz x2 obliczamy następująco:*

$x1 = (b - a)*(-\tau) + b$
$x2 = (b - a)*(\tau) + a$

*a następnie:*

*jeżeli f(x1) > f(x2)*
*jako nowy przedział wybieramy <a, x2> oraz*
$x2 = x1$
$x1 = (b - a)*(-\tau) + b$

*jeżeli f(x1) < f(x2)*
*jako nowy przedział wybieramy <x1, b>oraz*
$x1 = x2$
$x2 = (b - a)*(\tau) + a$

*algorytm powtarzamy do osiągnięcia jednego z warunków stopu:*
*a) osiągnięcie zadanej liczby iteracji*
*b) osiągnięcie zadanej dokładności*

# 3. Opis implementacji

Implementacja została wykonana w języku Python. Program został skonstruowany zgodnie z paradygmatem programowania proceduralnego.

Opis najważniejszych funkcji stworzonych w programie (pominięto opis części programu związanych z interfejsem użytkownika):

1) calculate_by_horner_method(x, coefficients) - zwraca wartość wielomianu dla wybranego 'x' oraz listy kolejnych współczynników 'coefficients' metodą Hornera.

2) calculate_unimodal_divisions(function, division, number_of_divisions) - zwraca wszystkie podprzedziały spełniające kryterium opisane w 2.1 dla 'function' powstałe przez fragmentację wejściowego przedziału 'division' na 'number_of_divisions' rozłącznych, równej długości podprzedziałów, tak że suma ich długości jest równa przedziałowi początkowemu.

3) calculate_points(function, division, number_of_points) – zwraca liczbę 'number_of_points' punktów z przedziału 'division' należących do funkcji 'function'. Metoda zaprojektowania w celu obliczania współrzędnych punktów do rysowania wykresów przy użyciu biblioteki matplotlib.

4) maximum_in_range_by_dychotomy_method(function, division, accuracy, iterations_number) – zwraca argument x maksimum funkcji 'function' na przedziale unimodalnym 'division' z maksymalną dokładnością 'accuracy' lub wykonując 'iterations_number' iteracji metodą opisaną w 2.2.

5) maximum_in_range_by_golden_division_method(function, division, accuracy, iterations_number) – zwraca argument x maksimum funkcji 'function' na przedziale unimodalnym 'division' z maksymalną dokładnością 'accuracy' lub wykonując 'iterations_number' iteracji metodą opisaną w 2.3.

*) dodatkowo w celu uproszczenia implementacji stworzono strukturę Division posiadającą pola begin_x oraz end_x reprezentującą przedział <begin_x, end_x> z zaimplementowanymi metodami:

show() - wypisuje zakres przedziału na konsolę
calculate_length() - zwraca długość przedziału
calculate_middle_of_the_division() - zwraca liczbę x znajdującą się dokładnie w środku przedziału

# 4. Materiały i metody

*Przeprowadzono 8 eksperymentów, gdzie 4 służyły porównaniu metod dychotomii oraz złotego podziału, natomiast pozostałe 4 zostały przeprowadzone w celu zbadania wpływu współczynnika proporcji na wyniki. Porównania miały na celu opisanie przedstawionych metod oraz ich właściwości pod względem kryterium złożoności obliczeniowej, maksymalnej dokładności, liczby iteracji niezbędnych do osiągnięcia zadanej dokładności oraz dokładności uzyskanej dla zadanej liczby iteracji.*

*We wszystkich eksperymentach przyjęto poszukiwanie przedziałów unimodalnych na przedziale < -5, 5 > sprawdzając 100 podprzedziałów i do obliczeń wykorzystując pierwszy znaleziony przedział spełniający warunek 2.1. Warunki te zostały ustalone aby w granicach każdego eksperymentu obliczać dokładnie to samo ekstremum na tym samym przedziale unimodalnym, dodatkowo maksymalnie zwiększając prawdopodobieństwo znalezienia poprawnego przedziału unimodalnego dla każdej wybranej funkcji.*

** przez wyrażenie zestaw prób rozumie się przeprowadzenie eksperymentu kilkukrotnie na tych samych parametrach w celu potwierdzenia uzyskania stałych wyników dla danego zestawu parametrów. Potwierdzenie to zostało uzyskane dla wszystkich wyników z wyjątkiem wyniku czasu wykonania algorytmu, dla którego zaobserwowano wahania rzędu ~10% dla każdego zestawu prób. Ze względu na kilkukrotnie większą skalę zaobserwowanych różnic w czasie wykonywania różnych metod, wahania te uznano za pomijalnie małe.*

## ***Eksperyment 1 funkcja 1***

*porównanie złotego podziału i dychotomii pod względem liczby iteracji niezbędnych do uzyskania zadanej dokładności:*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana dokładność | Współczynnik proporcjonalności |
|---|---|---|---|
| 1.1 | Dychotomia | 0.000001 | 0,52 |
| 1.2 | Złoty Podział | 0.000001 | $\tau$ |
| 1.3 | Dychotomia | 0.00001 | $\sim\tau$ |
| 1.4 | Złoty Podział | 0.00001 | $\tau$ |

## ***Eksperyment 2 funkcja 5***

*badanie wpływu współczynnika proporcjonalności na liczbę iteracji niezbędnych do uzyskania zadanej dokładności dla dychotomii*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana dokładność | Współczynnik proporcjonalności |
|---|---|---|---|
| 2.1 | Dychotomia | 0.00001 | 0,5001 |
| 2.2 | Dychotomia | 0.00001 | 0,85 |

## ***Eksperyment 3 funkcja 2***

*porównanie złotego podziału i dychotomii pod względem czasu wykonania zadanej liczby iteracji*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji |
|---|---|---|
| 3.1 | Dychotomia | 1 000 000 |
| 3.2 | Złoty Podział | 1 000 000 |

## ***Eksperyment 4 funkcja 2***

*badanie wpływu współczynnika proporcjonalności na czas wykonania zadanej liczby iteracji dla dychotomii*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji | Współczynnik proporcjonalności |
|---|---|---|---|
| 4.1 | Dychotomia | 1 000 000 | 0,5001 |
| 4.2 | Dychotomia | 1 000 000 | 0,85 |

# *Eksperyment 5 funkcja 3*

*porównanie złotego podziału i dychotomii pod względem maksymalnej dokładności obliczonego wyniku*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji | Współczynnik proporcjonalności |
|---|---|---|---|
| 5.1 | Dychotomia | 50000000 | 0,52 |
| 5.2 | Złoty Podział | 50000000 | $\tau$ |

# *Eksperyment 6 funkcja 4*

*badanie wpływu współczynnika proporcjonalności na maksymalną dokładność obliczonego wyniku*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji | Współczynnik proporcjonalności | Badana funkcja |
|---|---|---|---|---|
| 6.1 | Dychotomia | 50000000 | 0,5001 | $\sin^2(x) + 5\cos(x)$ |
| 6.2 | Dychotomia | 50000000 | 0,85 | $\sin^2(x) + 5\cos(x)$ |
| 6.3 | Dychotomia | 50000000 | 0,51 | $(\sin(x) - 2)^2 + 5\cos(x)$ |
| 6.4 | Dychotomia | 50000000 | 0,85 | $(\sin(x) - 2)^2 + 5\cos(x)$ |

# *Eksperyment 7 funkcja 1*

*porównanie złotego podziału i dychotomii pod względem uzyskanej dokładności dla zadanej liczby iteracji*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji |
|---|---|---|
| 7.1 | Dychotomia | 15 |
| 7.2 | Złoty Podział | 15 |

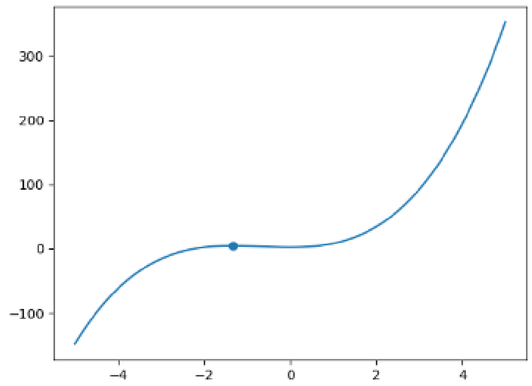
# *Eksperyment 8 funkcja 1*

*badanie wpływu współczynnika proporcjonalności na uzyskaną dokładność dla zadanej liczby iteracji*

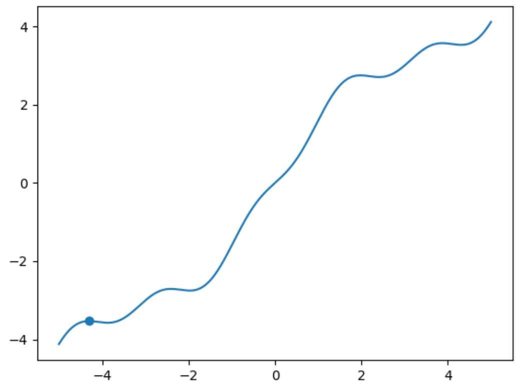
| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji | Współczynnik Proporcjonalności |
|---|---|---|---|
| 8.1 | Dychotomia | 15 | 0,5001 |
| 8.2 | Dychotomia | 15 | 0,85 |

# 5. Wyniki

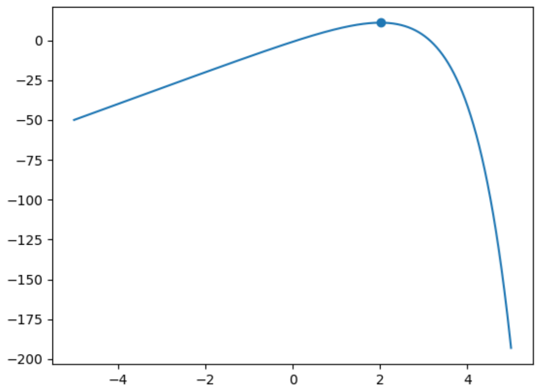
**Funkcja 1**



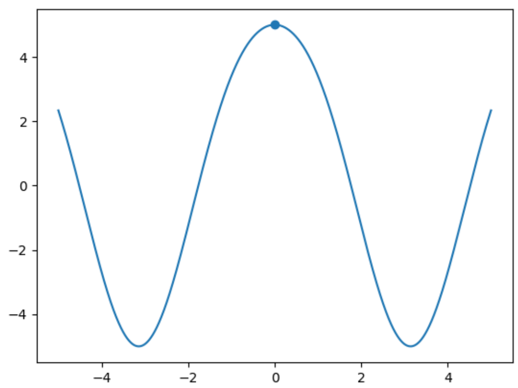

**Funkcja 2**



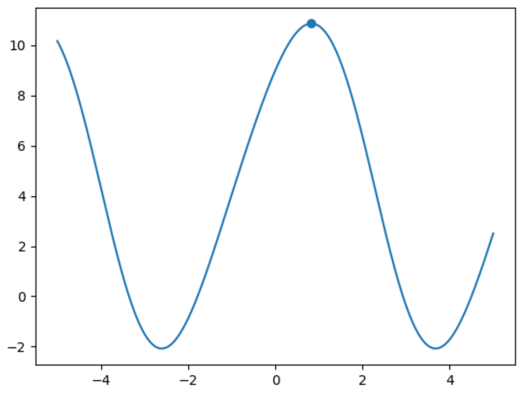

**Funkcja 3**



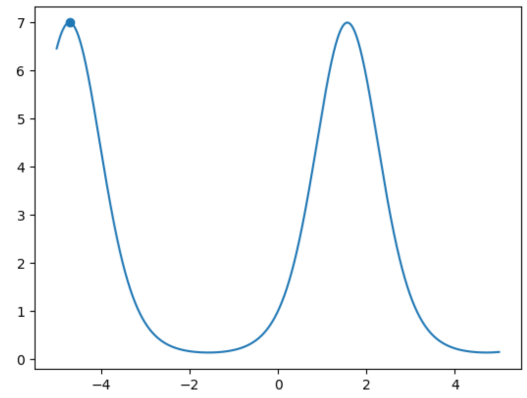

**Funkcja 4 v1**




**Funkcja 4 v2**




**Funkcja 5**



# *Eksperyment 1 funkcja 1*

*porównanie złotego podziału i dychotomii pod względem liczby iteracji niezbędnych do uzyskania zadanej dokładności:*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana dokładność | Współczynnik proporcjonalności | Długość przedziału | Liczba iteracji | Wartość f(x) | Wartość x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 | Dychotomia | 0.000001 | 0,52 | $8.03 * 10^{-6}$ | 19 | 4.370370370370113 | -1.3333335870245533 |
| 1.2 | Złoty Podział | 0.000001 | $\tau$ | $8.26 * 10^{-7}$ | 26 | 4.370370370370344 | -1.3333332510331686 |
| 1.3 | Dychotomia | 0.00001 | $\sim\tau$ | $8.17 * 10^{-6}$ | 21 | 4.370370370370361 | -1.3333332857793718 |
| 1.4 | Złoty Podział | 0.00001 | $\tau$ | $8.27 * 10^{-6}$ | 21 | 4.370370370368261 | -1.3333326070649794 |

# *Eksperyment 2 funkcja 5*

*badanie wpływu współczynnika proporcjonalności na liczbę iteracji niezbędnych do uzyskania zadanej dokładności dla dychotomii*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana dokładność | Współczynnik proporcjonalności | Długość przedziału | Liczba iteracji | Wartość f(x) | Wartość x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.1 | Dychotomia | 0.00001 | 0,5001 | $6.12 * 10^{-6}$ | 15 | 6.999999999999885 | -4.712389109906459 |
| 2.2 | Dychotomia | 0.00001 | 0,85 | $9.89 * 10^{-6}$ | 61 | 6.999999999999942 | -4.712388888965222 |

# *Eksperyment 3 funkcja 2*

*porównanie złotego podziału i dychotomii pod względem czasu wykonania zadanej liczby iteracji*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji | Czas wykonania [s] |
|---|---|---|---|
| 3.1 | Dychotomia | 1 000 000 | 3.126844644546509 |
| 3.2 | Złoty Podział | 1 000 000 | 1.8111293315887451 |

# *Eksperyment 4 funkcja 2*

*badanie wpływu współczynnika proporcjonalności na czas wykonania zadanej liczby iteracji dla dychotomii*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji | Współczynnik proporcjonalności | Czas wykonania [s] |
|---|---|---|---|---|
| 4.1 | Dychotomia | 1 000 000 | 0,5001 | 2.2176711559295654 |
| 4.2 | Dychotomia | 1 000 000 | 0,85 | 2.209017515182495 |

# *Eksperyment 5 funkcja 3*

*porównanie złotego podziału i dychotomii pod względem maksymalnej dokładności obliczonego wyniku*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji | Współczynnik proporcjonalności | Długość przedziału | Wartość f(x) | Wartość x |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5.1 | Dychotomia | 50000000 | 0,52 | 0 | 11.000580257867881 | 2.0102972881665915 |
| 5.2 | Złoty Podział | 50000000 | $\tau$ | $4.78 * 10^{-8}$ | 11.00058025786789 | 2.010297250236656 |

# *Eksperyment 6 funkcja 4*

*badanie wpływu współczynnika proporcjonalności na maksymalną dokładność obliczonego wyniku*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji | Współczynnik proporcjonalności | Badana funkcja | Długość przedziału | Wartość f(x) | Wartość x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6.1 | Dychotomia | 50000000 | 0,5001 | $\sin^2(x) + 5\cos(x)$ | 0 | 5.0 | $-1.02 * 10^{-15}$ |
| 6.2 | Dychotomia | 50000000 | 0,80 | $\sin^2(x) + 5\cos(x)$ | $1.03 * 10^{-25}$ | 5.0 | $-1.55 * 10^{-10}$ |
| 6.3 | Dychotomia | 50000000 | 0,51 | $(\sin(x) - 2)^2 + 5\cos(x)$ | 0 | 10.870649641844164 | 0.8309023131598208 |
| 6.4 | Dychotomia | 50000000 | 0,85 | $(\sin(x) - 2)^2 + 5\cos(x)$ | $3.33 * 10^{-16}$ | 10.870649641844164 | 0.8309023226620227 |

# *Eksperyment 7 funkcja 1*

*porównanie złotego podziału i dychotomii pod względem uzyskanej dokładności dla zadanej liczby iteracji*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji | Długość przedziału | Wartość f(x) |
|---|---|---|---|---|
| 7.1 | Dychotomia | 15 | $6.12 * 10^{-6}$ | 4.370370370358103 |
| 7.2 | Złoty Podział | 15 | $1,46 * 10^{-4}$ | 4.370370369749999 |

# *Eksperyment 8 funkcja 1*

*badanie wpływu współczynnika proporcjonalności na uzyskaną dokładność dla zadanej liczby iteracji*

| Zestaw prób | Metoda | Zadana liczba iteracji | Współczynnik Proporcjonalności | Długość przedziału | Wartość f(x) |
|---|---|---|---|---|---|
| 8.1 | Dychotomia | 15 | 0,5001 | $6.12 * 10^{-6}$ | 4.370370370358103 |
| 8.2 | Dychotomia | 15 | 0,85 | $1.74 * 10^{-2}$ | 4.37036650290362 |

# 6. Dyskusja

*Stwierdzono iż wykorzystana metoda znajdowania przedziałów unimodalnych na zadanym przedziale ma wiele ograniczeń. Uwzględnia ona jedynie ekstrema posiadające otoczenie z obu stron i wyszukuje je jedynie z określoną dokładnością. W celu poprawnej implementacji znajdowania ekstremum na zadanym przedziale należałoby porównać wartości funkcji dla wszystkich ekstremów w znalezionych podprzedziałach oraz z wartościami funkcji na obu końcach początkowego przedziału. Tak znaleziona największa wartość funkcji jest maksimum na danym przedziale.*

*Kwestię tę jednak pominięto, ponieważ znalezienie dowolnego przedziału unimodalnego zawierającego maksimum stwarza warunki wystarczające do wykonania zadania – tj. porównania metod złotego podziału i dychotomii. Metodę dychotomii i złotego podziału porównywano na podstawie czterech kryteriów:*

*a) liczby iteracji niezbędnych do uzyskania zadanej dokładności – eksperymenty 1 oraz 2*

*b) szybkości wykonywania obliczeń (złożoności obliczeniowej) – eksperymenty 3 oraz 4*

*c) maksymalnej dokładności – eksperymenty 5 oraz 6*

*d) dokładności uzyskanej dla zadanej liczby iteracji – eksperymenty 7 oraz 8*

*Porównywanie dychotomii (współczynnik proporcjonalności 5.001 – 5.2) oraz złotego podziału (współczynnik proporcjonalności = ~$\tau$) wykazało znaczne różnice w wynikach dla wszystkich tych kryteriów:*

*1) dychotomia 19 iteracji, złoty podział 26 iteracji eksperyment 1*

*2) dychotomia 3.12 sekundy, złoty podział 1.8 sekundy eksperyment 3*

*3) dychotomia długość ostatniego przedziału 0, złoty podział długość ostatniego przedziału $4{,}78 * 10^{-8}$ eksperyment 5*

*4) dychotomia długość ostatniego przedziału $6{,}12 * 10^{-6}$*
*złoty podział długość ostatniego przedziału $1{,}46 * 10^{-4}$ eksperyment 7*

*Postawiono zatem hipotezę, iż wybór metody wpływa na otrzymane wyniki porównywane dowolnymi kryteriami a, b, c lub d.*

## *1. Liczba iteracji*

*Hipoteza ta została jednak obalona przez eksperyment 1.3 oraz 1.4, gdzie ustawienie współczynnika proporcjonalności dychotomii bliskiego $\tau$ pozwoliło uzyskać za każdym razem identyczną liczbę iteracji co złoty podział dla zadanej dokładności (19, 19). Eksperymenty 2.1 oraz 2.2 wykazały zależność pomiędzy współczynnikiem proporcjonalności a liczbą iteracji:*

*dychotomia 0,5001 – 15 iteracji, dychotomia 0,85 – 61 iteracji.*

*Stwierdzono iż program wymaga najmniejszej liczby iteracji przy współczynniku maksymalnie zbliżonym do 0,5, natomiast największej przy współczynniku zbliżonym do 1. Nie zarejestrowano związku między doborem metody a liczbą iteracji dla zbliżonych współczynników proporcjonalności w obu metodach.*

## *2. Czas wykonania*

*Eksperyment 4 wykazał niezauważalny wpływ współczynnika proporcjonalności na czas wykonania zadanej liczby iteracji:*

*dychotomia 0,5001 – 2,22 sekundy, dychotomia 0,85 – 2,21 sekundy.*

*Stwierdzono poprawność eksperymentu 3, a więc zarejestrowano blisko 70-cio procentowe zmniejszenie prędkości wykonania zadanej liczby iteracji dla dychotomii w porównaniu ze złotym podziałem. Zgadza się to z wynikami teoretycznymi, ponieważ złoty podział wykonuje jedynie jedno obliczenie wartości funkcji w punkcie na iterację, natomiast dychotomia dwa. Nie badano dokładnej różnicy czasu wykonania dla określonych parametrów ze względu na brak możliwości stworzenia wystarczających warunków laboratoryjnych.*

## *3. Maksymalna dokładność*

*W eksperymencie uznano różnicę w maksymalnej dokładności jeżeli którakolwiek z prób osiągnęła długość ostatniego przedziału 0, co oznacza że niemożliwy jest podział zbioru na dalsze podzbiory a więc i dalsze zwiększanie dokładności wyników. Dla ułatwienia eksperymentu przyjęto we wszystkich próbach liczbę iteracji 50 000 000. Eksperyment 6 wykazał zależność między osiąganym zerowym przedziałem a współczynnikiem proporcjonalności:*

*dychotomia 0,5001 – przedział zerowy*

*dychotomia 0,51 – przedział zerowy*

*dychotomia 0,80 – przedział niezerowy*

*dychotomia 0,85 – przedział niezerowy*

*Nie stwierdzono różnicy w wynikach wartości f(x) dla par 6.1, 6.2 oraz 6.3, 6.4. Eksperyment uznano za nieudany/niepełny.*
*Nie badano liczby iteracji potrzebnych do uzyskania przedziału długości 0 dla współczynników zbliżonych do 0,5.*
*Nie badano dokładnych okoliczności powstawania przedziału długości 0*
*Nie badano dokładności ani poprawności wyniku dla eksperymentów w których osiągnięto przedziały długości 0*

*Nie badano wpływu doboru potencjalnie nieodpowiedniej funkcji na nieudany przebieg eksperymentu.*

*Postawiono jedynie hipotezę, że uzyskanie przedziału długości 0 występuje przy bardzo dużej liczbie iteracji dla współczynnika proporcjonalności zbliżonego do 0.5 ze względu na niezauważalne różnice pomiędzy f(x1), f(x2) [rozdział 2.2] spowodowane ograniczoną dokładnością zapisu liczb w języku python (64 bity), zjawisko to nie występuje dla większych współczynników proporcjonalności ze względu na większe różnice pomiędzy f(x1) oraz f(x2).*

## *4. Uzyskana dokładność*

*Eksperyment wykazał przeważający wpływ współczynnika proporcjonalności na dokładność przy stałej liczbie iteracji (15):*

*dychotomia 0,5001* - $6{,}12 * 10^{-6}$

*dychotomia 0,85* - $1{,}74 * 10^{-2}$

*nie badano wpływu doboru metody na uzyskaną dokładność przy stałej liczbie operacji*

# 7. Wnioski

*Stwierdzono:*

*1) Blisko dwukrotnie szybszy czas wykonania zadanej liczby iteracji metodą złotego podziału w porównaniu z metodą dychotomii*

*2) Wpływ współczynnika proporcjonalności na:*

- *1) liczbę iteracji niezbędną do uzyskania zadanej dokładności*
- *2) uzyskaną dokładność dla zadanej liczby iteracji*
- *3) maksymalną dokładność*

*Nie stwierdzono wpływu wyboru metody na wyniki rozpatrywane pod względem powyższych kryteriów.*

# 8. Źródła

[1] http://optymalizacja.w8.pl/PrzedzialyUnimodalnosci.html
[2] Konsultacje z mgr.inż. Pawłem Tarasiukiem
[3] http://optymalizacja.w8.pl/Jednowymiarowa.html
[4]https://ftims.edu.p.lodz.pl/pluginfile.php/162066/mod_resource/content/2/Metody%20numeryczne%20cz%20I.pdf