

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie nr 1 – Metody interpolacji

1. Cel

Celem zadania trzeciego było zaimplementowanie metody interpolacji Lagrange'a dla węzłów równoodległych oraz Czebyszewa. Węzły powinny być wyznaczone wedle konkretnego algorytmu po wpisaniu przez użytkownika ich żądanej ilości. Ponadto oprócz stworzenia wielomianu interpolacyjnego można porównać wykres funkcji podanej oraz interpolacyjnej wraz z zaznaczonymi węzłami. Celem jest również zbadanie tej metody numerycznej pod kątem wydajności i złożoności obliczeniowej oraz różnic występujących po zastosowaniu węzłów równoodległych i Czebyszewa,

Przykładowe funkcje f na których przeprowadzano eksperymenty:

1) $2x^3 + 4x^2 + 2$

2) $\sin^3(x) + x$

3) $3^x + 10x$

4) $\sin^2(x) + 5\cos(x)$

5) $7^{\sin(x)}$

6) $|x + 3| - 2$

7) $|20x^3 + 100x^2 + 8|x| - 3|$

2. Wprowadzenie

Metoda numeryczna interpolacji służy do tworzenia funkcji interpolacyjnej $w(x)$. Powstaje ona na podstawie określonej liczby punktów funkcji interpolowanej $f(x)$, tak zwanych węzłów. Celem metody jest jak najdokładniejsze odwzorowanie funkcji f . Interpolacja Lagrange'a jest odmianą tej metody polegającą na tworzeniu funkcji interpolowanej przy pomocy wielomianu Lagrange'a.

wielomian ten ma postać

$$w(x) = \sum_{k=0}^n a_k * j_k(x)$$

współczynniki a_k obliczamy według następującego wzoru:

$$a_k = \frac{y_k}{j_k(x_k)}, k \in [0; n]$$

dla funkcji $j_k(x)$ postaci:

$$j_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i)$$

Liczby x_k oraz y_k oznaczają współrzędne kolejnych węzłów, natomiast stopień wielomianu $w(x)$ jest równy n . Oznacza to, że metoda Lagrange'a pozwala wyznaczyć wielomian stopnia o jeden mniejszego od liczby węzłów.

Współrzędne węzłów wyznaczane są dwoma metodami. Dla zadanej liczby węzłów n , przedziału $[a, b]$ oraz funkcji f :

metodą węzłów równoodległych:

$$x_k = a + \frac{|b - a|}{n} * k$$
$$y_k = f(x_k)$$

3. Opis implementacji

Implementacja metody została wykonana w języku Python. Program posiada cztery pliki z rozszerzeniem.py. W main znajduje się funkcja uruchamiająca program, w division stworzona jest implementacja klasy reprezentującej przedział z węzłami, w functions posiadamy funkcje pomocnicze, a w LagrangeInterpolationAlgorithm jak sama nazwa wskazuje znajduje się implementacja metody interpolacji Lagrange'a również w postaci klasy.

Opis najważniejszych funkcji:

calculate_coefficients - funkcja obliczająca współczynniki dla wielomianu Lagrange'a

calculate_value - funkcja zwraca wartość funkcji interpolacyjnej

calculate_points - funkcja zwracająca węzły równoodległe

calculate_chebyshev_points - funkcja zwracająca węzły Czebyszewa

calculate_by_horner_method - funkcja oblicza wartość funkcji metodą Hornera

j - funkcja implementująca wzór:

$$j_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i)$$

4. Materiały i metody

Przeprowadzono 8 eksperymentów, każdy miał na celu zbadać wpływ poszczególnych parametrów na postać interpolacyjnej funkcji oraz jej podobieństwa do funkcji interpolowanej.

Eksperyment 1

zbadano związek liczby węzłów niezbędnych do osiągnięcia optymalnej dokładności z ilością ekstremów i punktów przegięcia funkcji interpolowanej.

1 funkcja 2 węzły równoodległe

1 funkcja 3 węzły równoodległe

1 funkcja 4 węzły równoodległe

4 funkcja 5 węzły równoodległe

4 funkcja 8 węzły równoodległe

Eksperyment 2

zbadano związek liczby węzłów ze stopniem podobieństwa funkcji interpolacyjnej do funkcji interpolowanej dla węzłów równoodległych

2 funkcja 2 węzły równoodległe

2 funkcja 5 węzłów równoodległe

2 funkcja 20 węzłów równoodległe

3 funkcja 3 węzły równoodległe

3 funkcja 8 węzłów równoodległe

3 funkcja 100 węzłów równoodległe

Eksperyment 2b

zbadano okoliczności i skalę występowania zjawiska Rungego.

1 funkcja 20 węzłów równoodległe

1 funkcja 50 węzłów równoodległe

1 funkcja 100 węzłów równoodległe

1 funkcja 200 węzłów równoodległe

1 funkcja 1 100 węzłów Czebyszew

Eksperyment 3

zbadano związek liczby węzłów ze stopniem podobieństwa funkcji interpolacyjnej do funkcji interpolowanej dla węzłów Czebyszewa

funkcja 1 10 węzłów Czebyszew

funkcja 1 100 węzłów Czebyszew

funkcja 2 10 węzłów Czebyszew

funkcja 2 100 węzłów Czebyszew

funkcja 5 10 węzłów Czebyszew

funkcja 5 100 węzłów Czebyszew

Eksperyment 4

zbadano wpływ typu funkcji (wielomianowa, z wartością bezwzględną, wykładnicza, trygonometryczna) na stopień podobieństwa funkcji interpolacyjnej do funkcji interpolowanej dla stałych ilości węzłów.

funkcja 6 10 węzłów Czebyszew

funkcja 6 50 węzłów Czebyszew

funkcja 6 100 węzłów Czebyszew

funkcja 5 10 węzłów Czebyszew

funkcja 5 50 węzłów Czebyszew

funkcja 5 100 węzłów Czebyszew

Eksperyment 5

zbadano czas obliczania wartości funkcji w punkcie dla funkcji interpolowanej w zależności od liczby węzłów w celu eksperymentalnego potwierdzenia złożoności obliczeniowej.

1 funkcja 10 węzłów Czebyszew

1 funkcja 20 węzłów Czebyszew

1 funkcja 50 węzłów Czebyszew

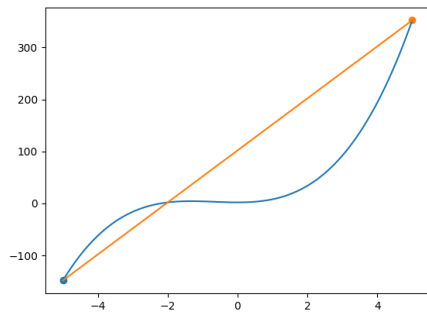
1 funkcja 100 węzłów Czebyszew

1 funkcja 200 węzłów Czebyszew

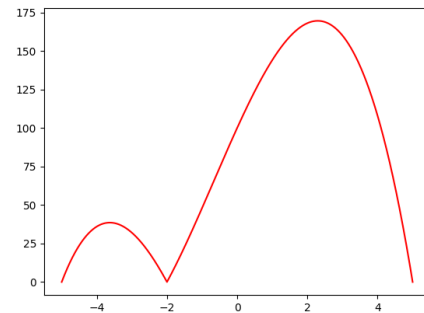
1 funkcja 300 węzłów Czebyszew

5. Wyniki

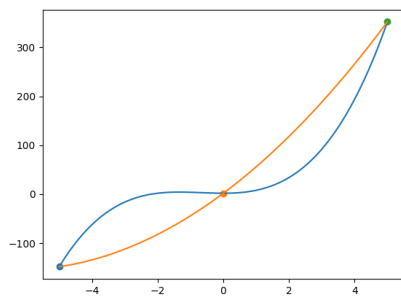
Eksperyment 1 funkcja 1



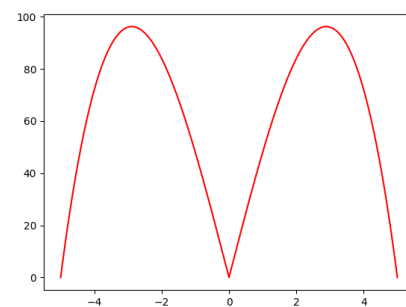
Wykres 1.1



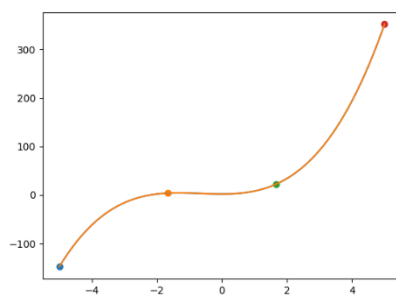
Wykres 1.1e



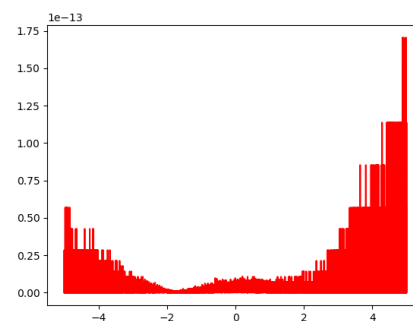
Wykres 1.2



Wykres 1.2e

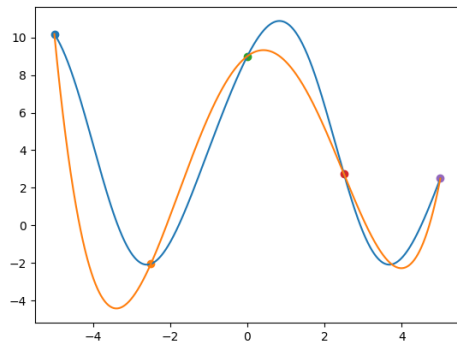


Wykres 1.3

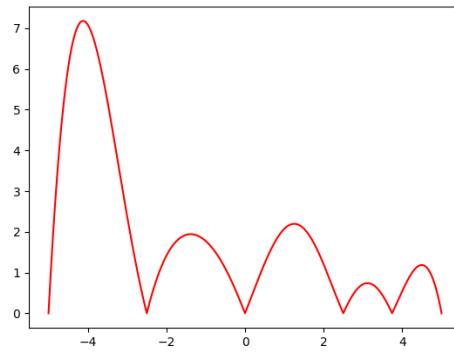


Wykres 1.3e

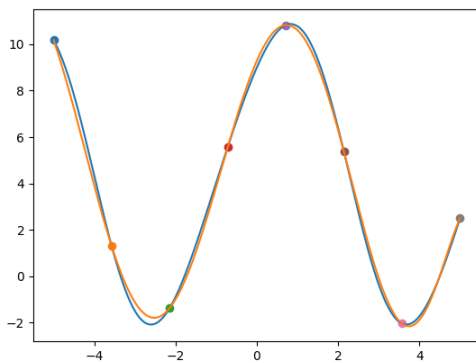
Eksperyment 1 funkcja 4



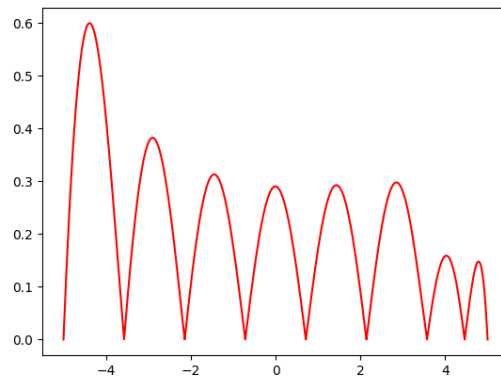
Wykres 1.4



Wykres 1.4e

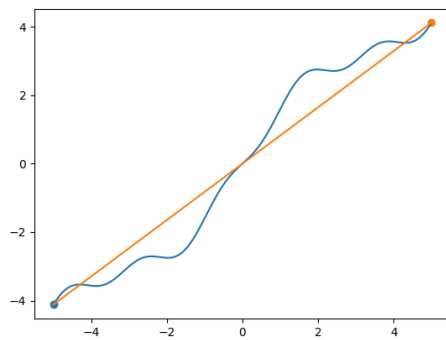


Wykres 1.5

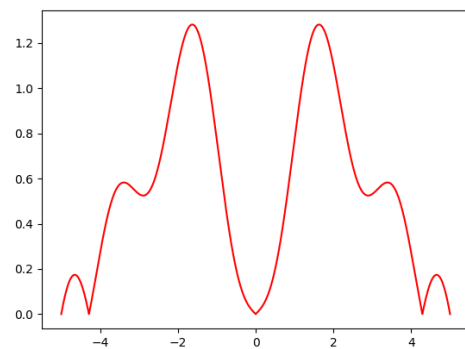


Wykres 1.5e

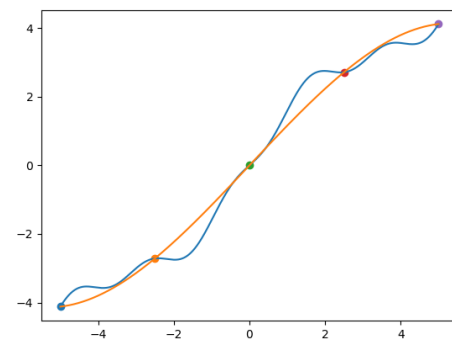
Eksperyment 2 funkcja 2



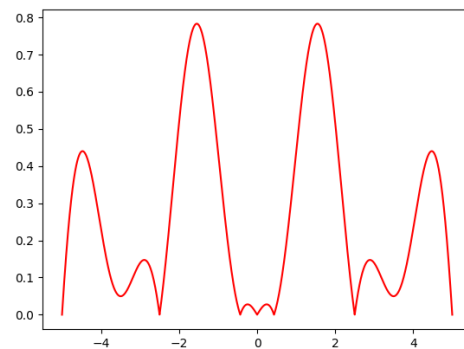
Wykres 2.1



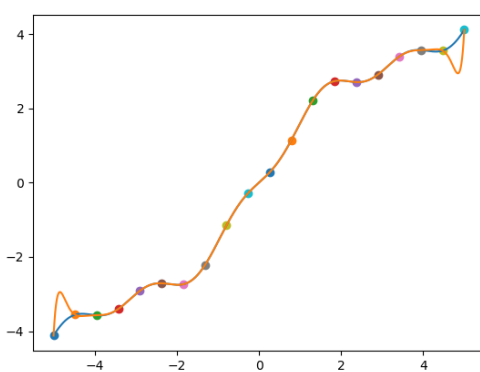
Wykres 2.1e



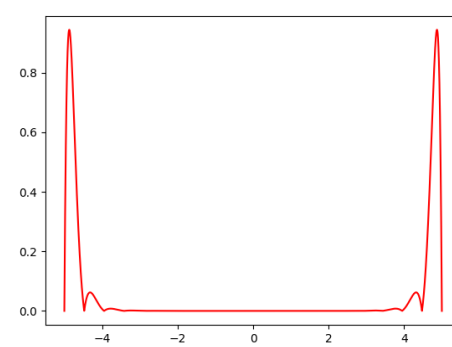
Wykres 2.2



Wykres 2.2e

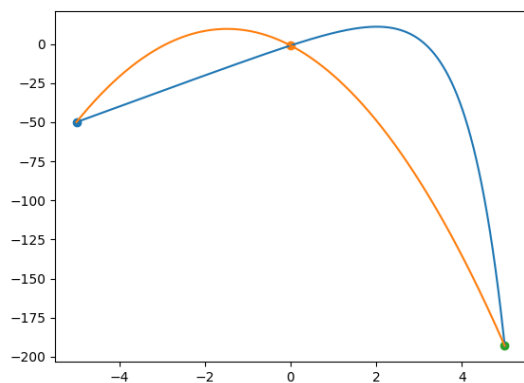


Wykres 2.3

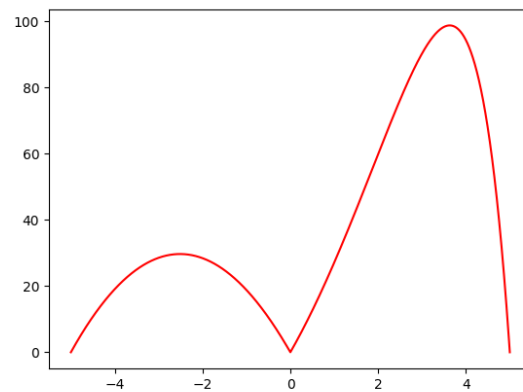


Wykres 2.3e

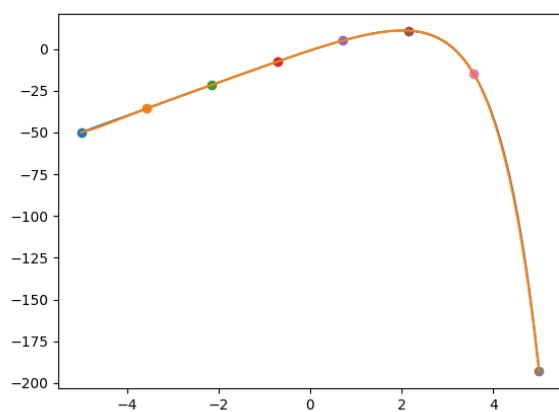
Eksperyment 2 funkcja 3



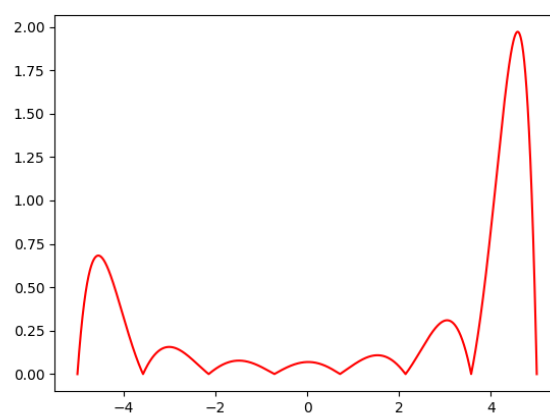
Wykres 2.4



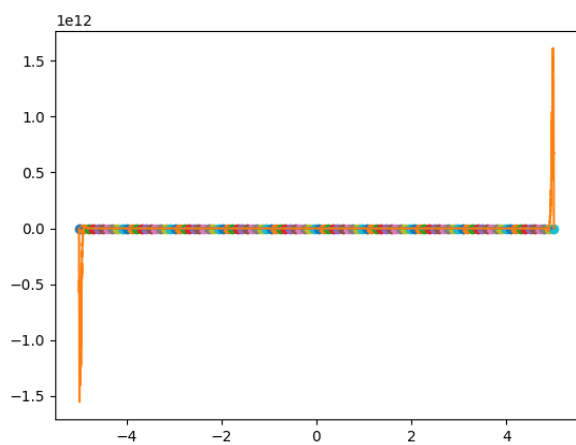
Wykres 2.4e



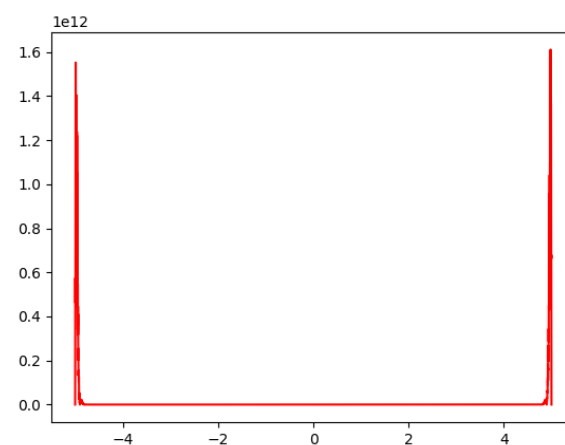
Wykres 2.5



Wykres 2.5e

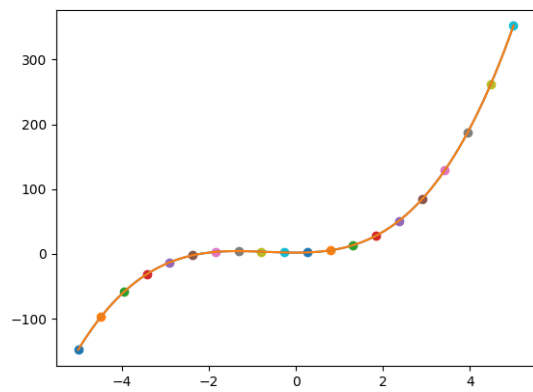


Wykres 2.6

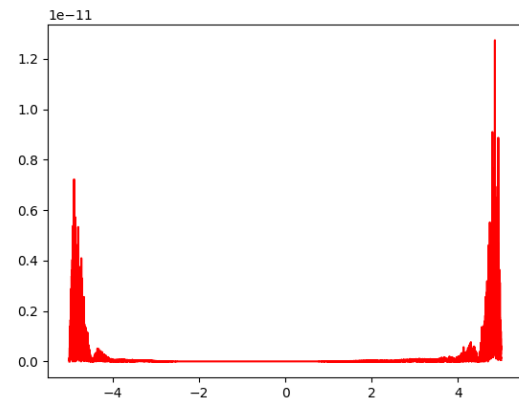


Wykres 2.6e

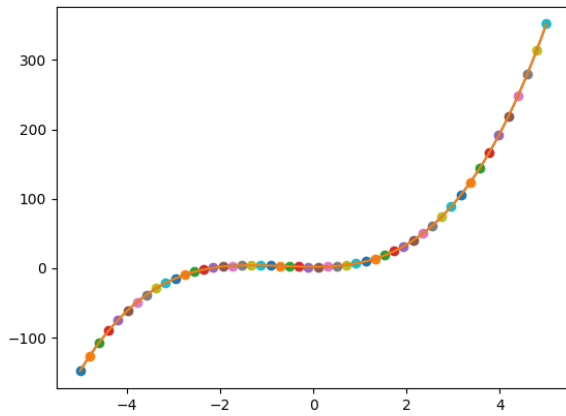
Eksperyment 2b funkcja 1



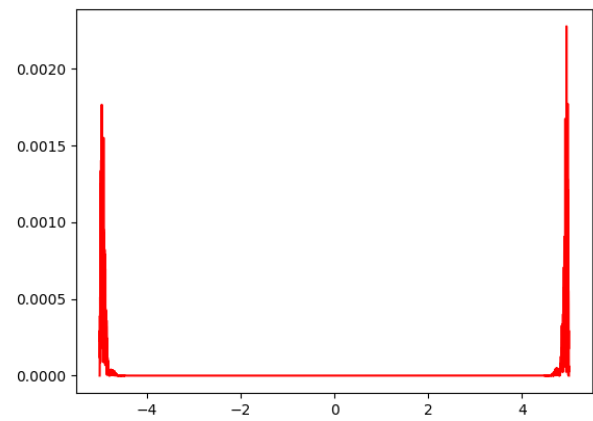
Wykres 2b.1



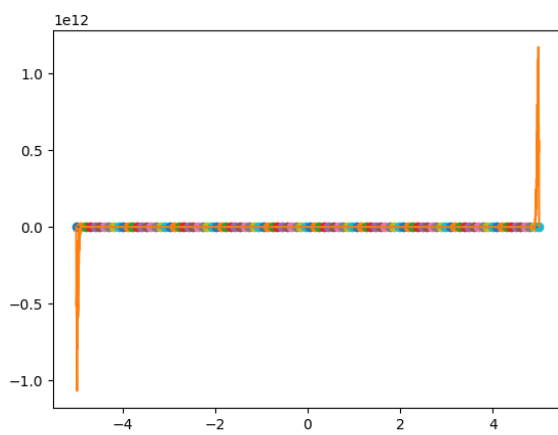
Wykres 2b.1e



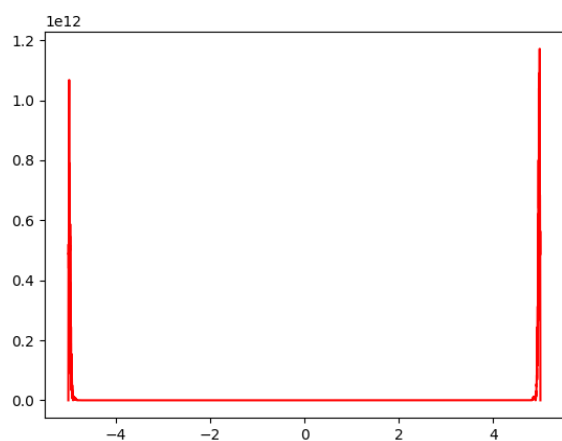
Wykres 2b.2



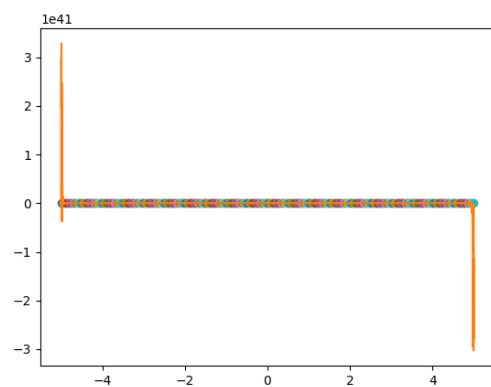
Wykres 2b.2e



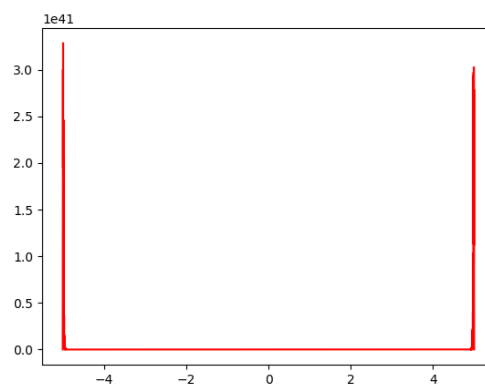
Wykres 2b.3



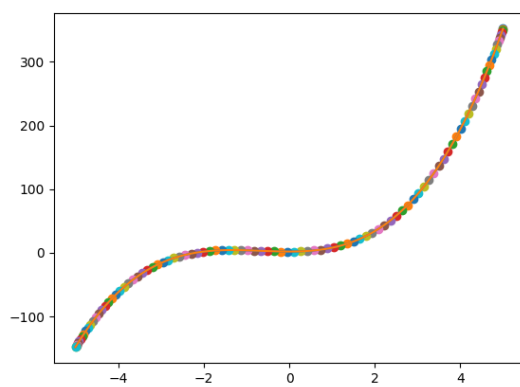
Wykres 2b.3e



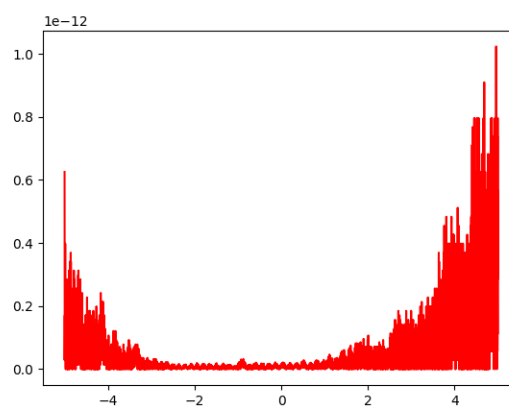
Wykres 2b.4



Wykres 2b.4e

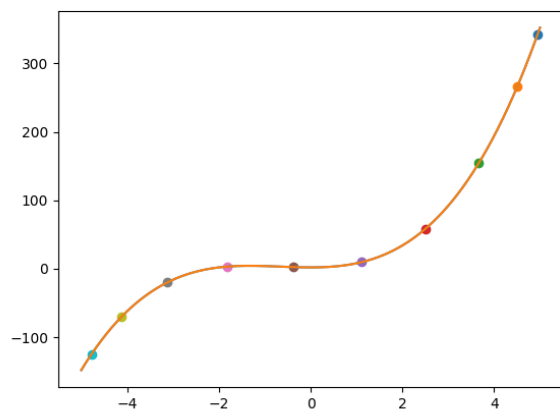


Wykres 2b.5

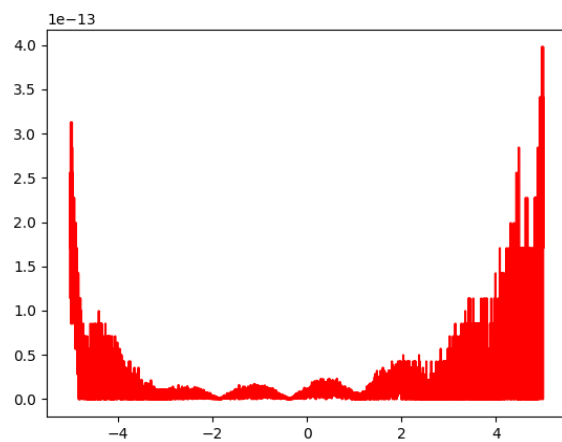


Wykres 2b.5e

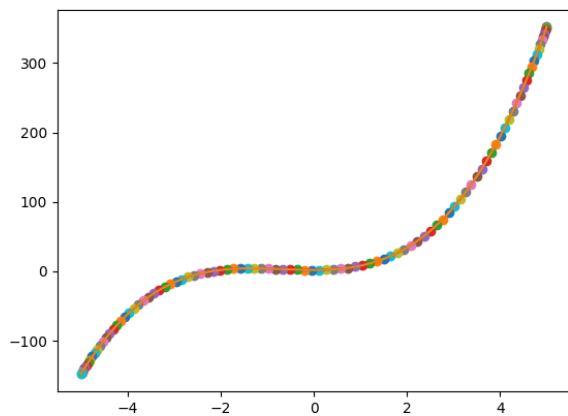
Eksperyment 3 funkcja 1



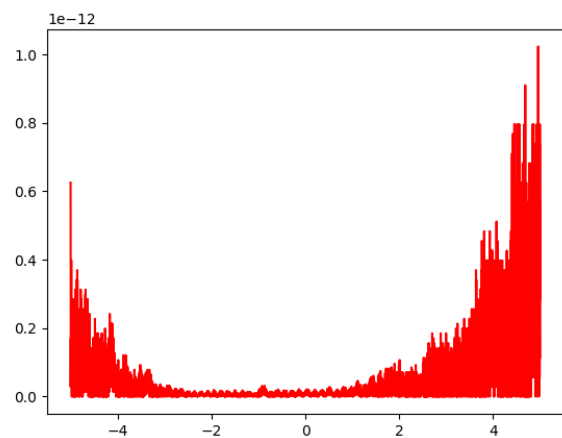
Wykres 3.1



Wykres 3.1e

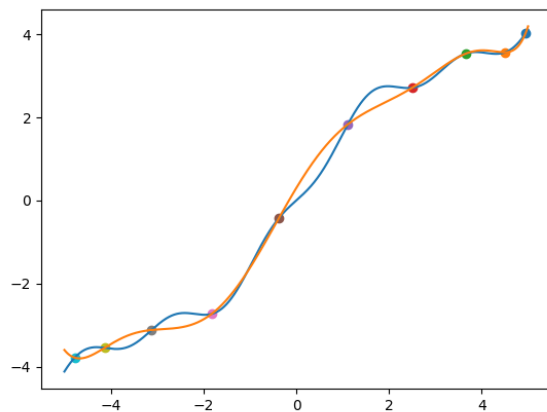


Wykres 3.2

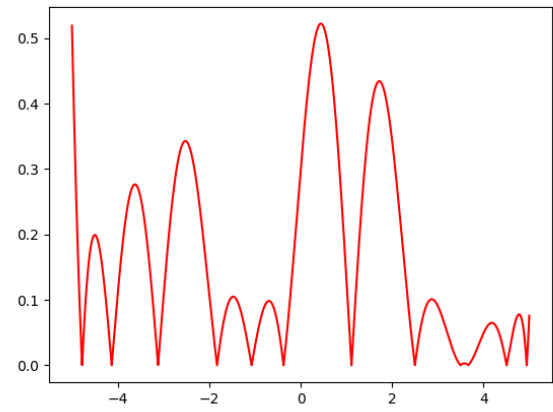


Wykres 3.2e

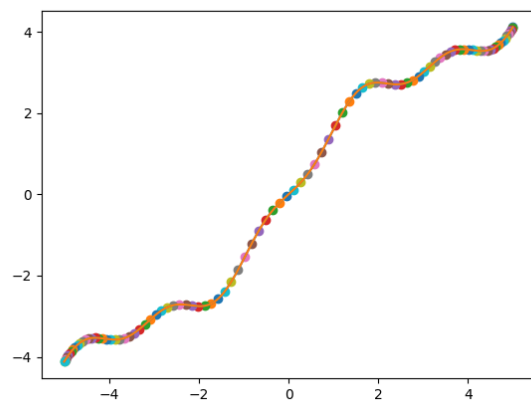
Eksperyment 3 funkcja 2



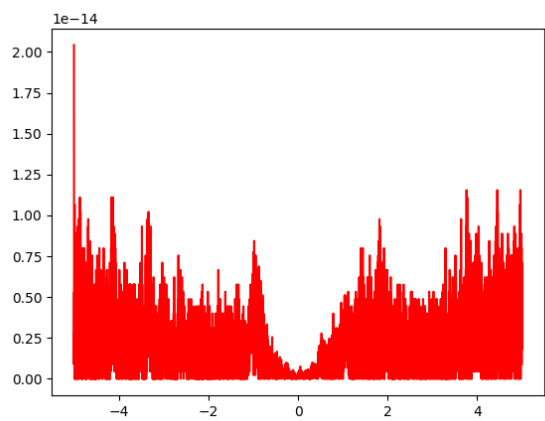
Wykres 3.3



Wykres 3.3e

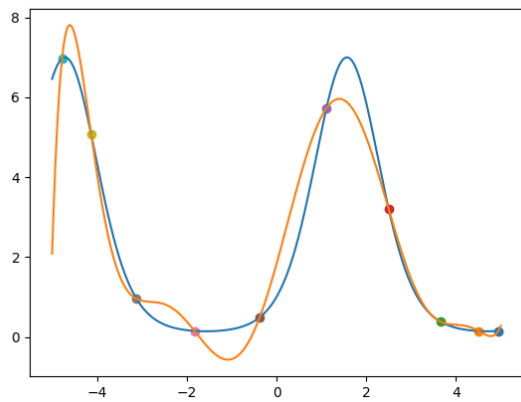


Wykres 3.4

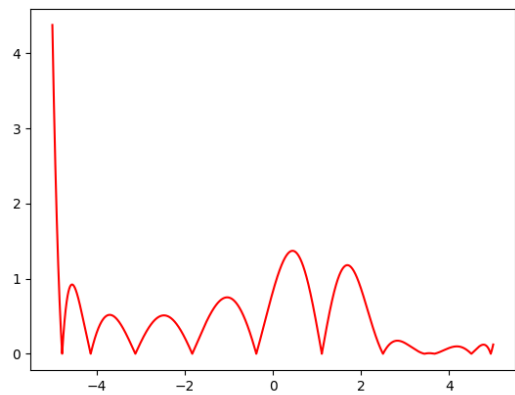


Wykres 3.4e

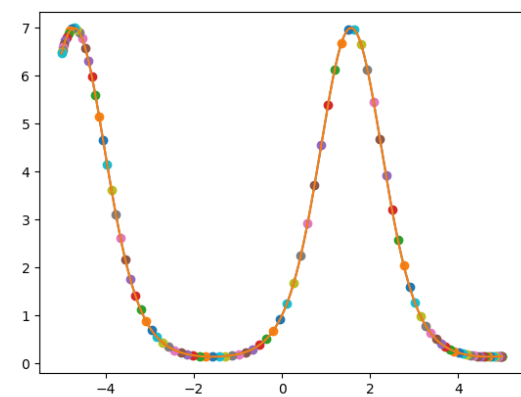
Eksperyment 3 funkcja 5



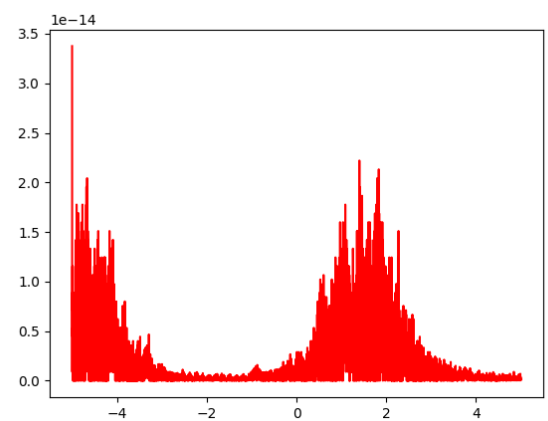
Wykres 3.5



Wykres 3.5e

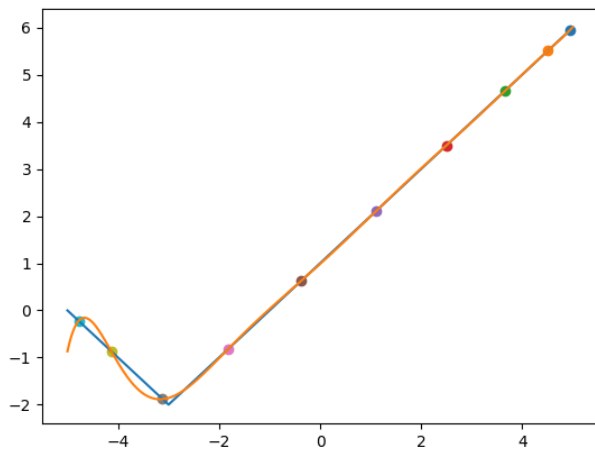


Wykres 3.6

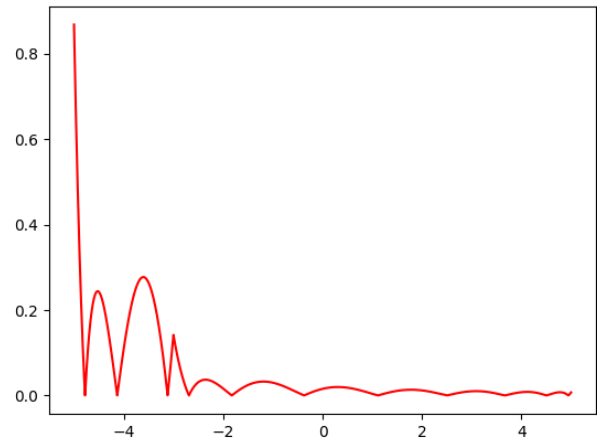


Wykres 3.6e

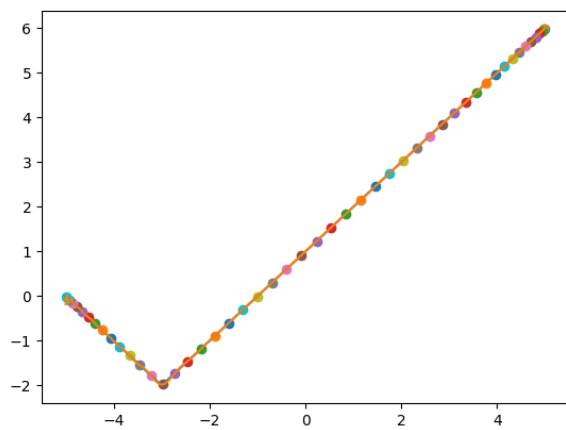
Eksperyment 4 funkcja 6



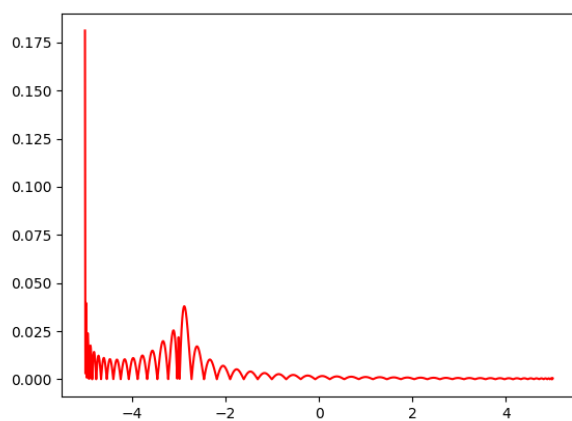
Wykres 4.1



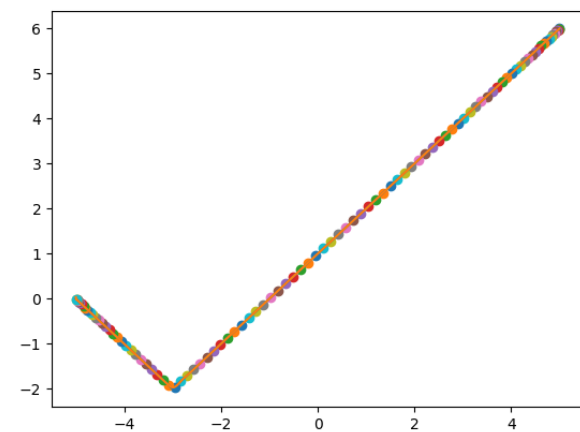
Wykres 4.1e



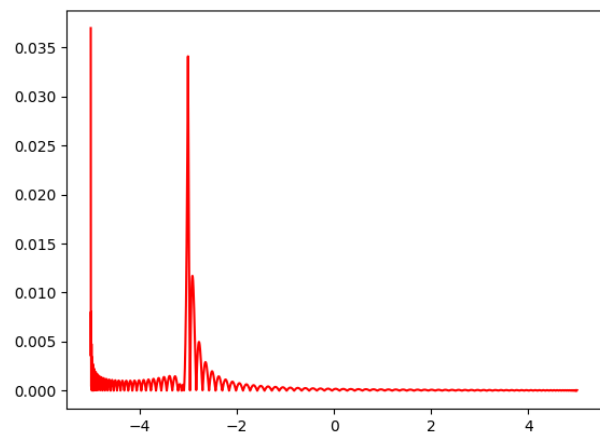
Wykres 4.2



Wykres 4.2e

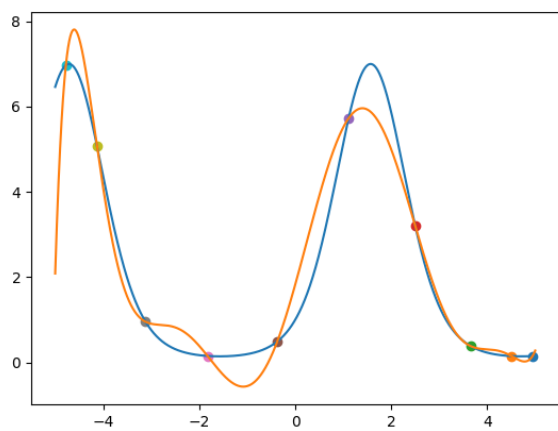


Wykres 4.3

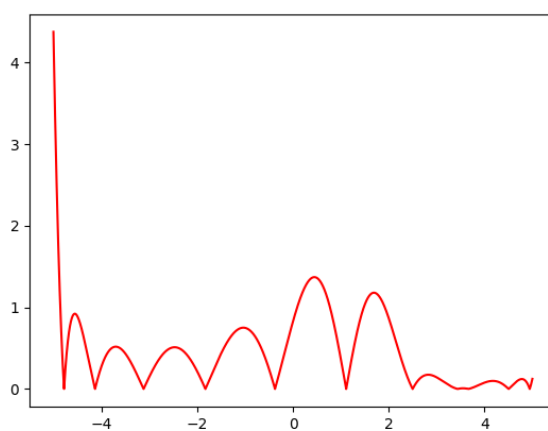


Wykres 4.3e

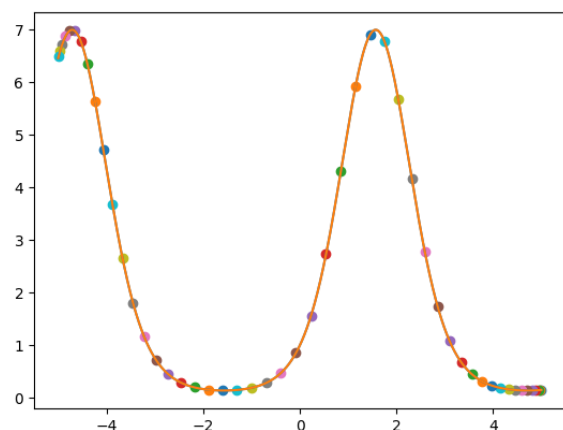
Eksperyment 4 funkcja 5



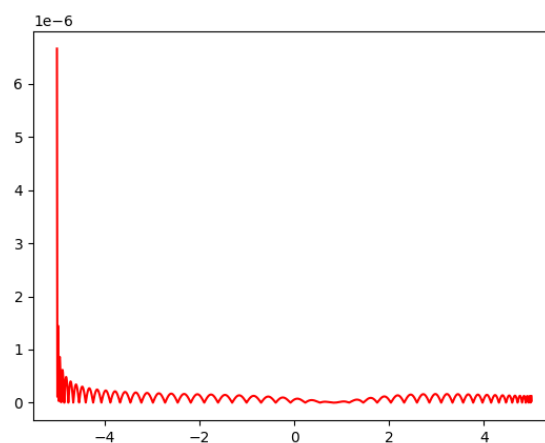
Wykres 4.4



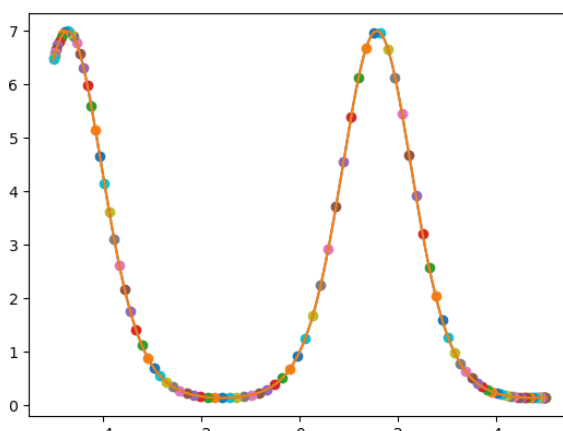
Wykres 4.4e



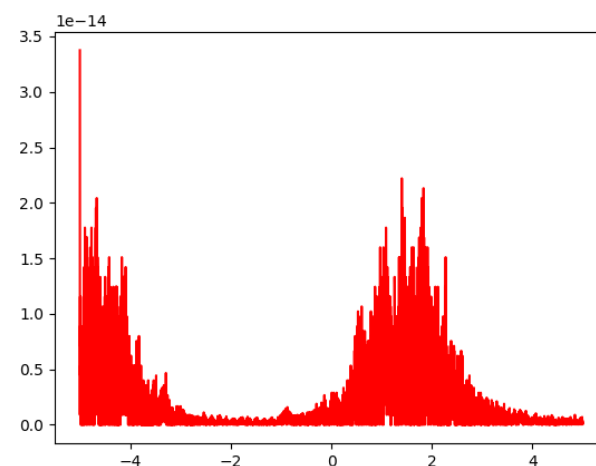
Wykres 4.5



Wykres 4.5e



Wykres 4.6



Wykres 4.6

Eksperyment 5 funkcja 1

czas obliczania 10 współczynników a_k : 5.316734313964844e-05
czas obliczania 10000 wartości funkcji $f(x)$: 0.006111860275268555
czas obliczania 10000 wartości funkcji $w(x)$: 0.14536499977111816

czas obliczania 20 współczynników a_k : 0.00010657310485839844
czas obliczania 10000 wartości funkcji $f(x)$: 0.00612330436706543
czas obliczania 10000 wartości funkcji $w(x)$: 0.43825626373291016

czas obliczania 50 współczynników a_k : 0.00042700767517089844
czas obliczania 10000 wartości funkcji $f(x)$: 0.00620722770690918
czas obliczania 10000 wartości funkcji $w(x)$: 2.162999391555786

czas obliczania 100 współczynników a_k : 0.0014886856079101562
czas obliczania 10000 wartości funkcji $f(x)$: 0.00632929801940918
czas obliczania 10000 wartości funkcji $w(x)$: 8.1458158493042

czas obliczania 200 współczynników a_k : 0.003397703170776367
czas obliczania 10000 wartości funkcji $f(x)$: 0.006224870681762695
czas obliczania 10000 wartości funkcji $w(x)$: 31.698023319244385

czas obliczania 300 współczynników a_k : 0.007990360260009766
czas obliczania 10000 wartości funkcji $f(x)$: 0.006171703338623047
czas obliczania 10000 wartości funkcji $w(x)$: 72.82471227645874

6. Dyskusja

Eksperyment 1

wykazano korelację pomiędzy stosunkiem ilości węzłów do ilości maksimów funkcji a uzyskaną dokładnością prezentowaną na wykresach 1.1e, 1.2e, 1.3e, 1.4e, 1.5e. Eksperyment nie był wystarczający aby zbadać szczegóły tej korelacji, jednak wykazano, że aby wartości funkcji $w(x)$ były zbliżone do wartości funkcji $f(x)$ stopień wielomianu $w(x)$ musi być większy niż liczba ekstremów i punktów przegięcia funkcji $f(x)$. nie badano różnych układów pozycji węzłów względem ekstremów funkcji $f(x)$

Eksperyment 2

wykazano korelację pomiędzy ilością węzłów a dokładnością uzyskanego wielomianu dla węzłów równoodległych. wraz z wzrostem ilości węzłów maleje różnica $|f(x)-w(x)|$ prezentowana na wykresach 2.1e, 2.2e, 2.3e oraz 2.4e i 2.5e.

zaobserwowano znaczny wzrost różnicy $|f(x)-w(x)|$ dla argumentów zbliżonych do końców przedziałów dla liczby węzłów > 10 (wykresy 2.3e, 2.6e). dla liczby węzłów > 50 różnica ta osiąga wartości rzędu $> 10^{12}$. Wystąpiło podejrzenie zaistnienia zjawiska Rungego, opisanego w materiałach[3]. Eksperyment 2b miał na celu zbadanie tegoż zjawiska.

Eksperyment 2b

wykazano iż zjawisko Rungego występuje jedynie dla węzłów równoodległych dla znacznej ilości węzłów (> 15). różnice $f(x)-w(x)$ przy końcach przedziałów osiągają nawet rząd 10^{42} (200 węzłów, wykres 3.5e). ze względu na kwadratową złożoność obliczeniową algorytmu(eksperyment 2b.3e) nie testowano zjawiska rungego dla większych ilości węzłów. Zjawisko Rungego nie występuje dla węzłów Czebyszewa (eksperyment 2b.5e)

Eksperyment 3

wykazano korelację między ilością węzłów a dokładnością uzyskanego wielomianu dla

węzłów Czebyszewa. Ze względu na niewystępowanie zjawiska Rungego dla węzłów Czebyszewa możliwe jest niemal nieskończone zwiększanie dokładności wielomianu $w(x)$ poprzez zwiększanie liczby węzłów.

Eksperyment 4

wykazano znacznie mniejszą dokładność dla funkcji $w(x)$ niebędących wielomianami (wykres 4.1e, 4.2e, 4.3e, 4.4e, 4.6e) w stosunku do funkcji wielomianowych (eksperymenty 1, 2 oraz 3). aby uzyskać optymalną dokładność dla funkcji wykładniczych (wykresy 4.4, 4.5, 4.6) oraz funkcji z wartością bezwzględną (4.1, 4.2, 4.3) potrzebna jest znacznie większa liczba węzłów, co wyklucza stosowanie metody węzłów równoodległych w tych przypadkach

Eksperyment 5

wykazano kwadratowy wzrost czasu obliczania wartości funkcji $w(x)$ w stosunku do ilości węzłów (a więc i stopnia wielomianu).

wykazano liniowy wzrost czasu obliczania współczynników a_k w stosunku do ilości węzłów.

Wartości te zgadzają się z wartościami tabelarycznymi. złożoność obliczeniowa funkcji j_k oraz obliczania współczynników a_k jest liniowa, natomiast złożoność obliczeniowa funkcji $w(x)$ - kwadratowa. Aby uzyskać złożoność liniową funkcji $w(x)$ należy przekształcić ją do postaci kanonicznej, a w celu uzyskania złożoności logarytmicznej - obliczać schematem hornera.

7. Wnioski

1. Minimalna liczba węzłów dla uzyskania funkcji interpolacyjnej zbliżonej do funkcji interpolowanej wynosi $z + 1$, gdzie z to liczba miejsc zerowych pochodnej funkcji $f(x)$ w przedziale interpolowanym
2. Metoda węzłów równoodległych ma ograniczoną dokładność, ponieważ przy zwiększaniu ilości węzłów postępuje zjawisko Rungego
3. Metoda węzłów Czebyszewa pozwala w sposób nielimitowany zwiększać dokładność wielomianu interpolacyjnego.
4. Funkcje inne niż wielomiany wymagają zdecydowanie większej ilości węzłów do uzyskania optymalnej dokładności i z tego powodu powinny być interpolowane jedynie metodą węzłów Czebyszewa
5. Wartości funkcji $w(x)$ są obliczane ze złożonością kwadratową, aby uzyskać złożoność liniową należy przekształcić ją do postaci kanonicznej, a w celu uzyskania złożoności logarytmicznej - obliczać schematem hornera.

8. Źródła

[1] Materiały wykładowe dr. inż. Alicji Romanowicz
https://ftims.edu.p.lodz.pl/pluginfile.php/162464/mod_resource/content/1/Metody_numeryczne_cz_II.pdf