Antoni Karwowski 229809 229908@edu.p.lodz.pl
Michał Gebel 229879 229879@edu.p.lodz.pl

Zadanie 2.: Metody rozwiązań układów równań: metoda eliminacji Gaussa-Jordana

1. Cel

Celem zadania drugiego było zaimplementowanie metody Gaussa-Jordana rozwiązującą układ N równań liniowych dla N niewiadomych. Z racji tego, że metoda Gaussa-Jordana jest metodą eliminacyjną, to jej celem jest również automatyczne wykrywanie elementu podstawowego, od którego zaczynamy eliminację oraz wykrywanie sprzeczności, bądź nieoznaczoności danego układu przed przystąpieniem do zastosowania metody rozwiązania.

Przykładowe układy równań w programie:

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix} [1]$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ -4 & -10 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ -40 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -4 & -10 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix} [3]$$

$$4. \begin{pmatrix} 0.5 & -0.0625 & 0.1875 & 0.0625 \\ -0.0625 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1875 & 0 & 0.375 & 0.125 \\ 0.0625 & 0 & 0.125 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.625 \\ 1 \\ 0.4375 \end{pmatrix} [4]$$

5. $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$ [5]

6. $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 21 \\ -5 \end{pmatrix}$$ [6]

7. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$ [7]

8. $$\begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix}$$ [8]

9. $$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 0.9 & 0.9 & 3.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 13.5 \end{pmatrix}$$ [9]

10. $$\begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 1 & -0.3 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.8 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$ [10]

2. Wprowadzenie

Metoda Gaussa-Jordana jak sama nazwa wskazuje jest rozwinięciem metody Gaussa służącym rozwiązywaniu układów równań liniowych. Różnica polega na tym, że zamiast sprowadzać macierz współczynników do macierzy schodkowej, sprowadzamy ją do macierzy jednostkowej (za pomocą operacji elementarnych na wierszach).
Dla każdej k-tej iteracji dokonujemy następujących przypisań:

$$a_{kk}^{k-1} \neq 0$$

$$a_{kj}^{k} = \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}$$

$$a_{ij}^{k} = a_{ij}^{k-1} - \frac{a_{kj}^{k-1} a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}$$

$$k \in [1; n]$$

$$i \in [1; n]/\{k\}$$

$$j = \in [k; n]$$

Na podstawie postaci macierzy orzekamy o rozwiązaniu układu:

Przypadek 1. - jedno rozwiązanie:
Otrzymujemy macierz współczynników jako macierz jednostkową oraz wektor rozwiązań układu równań

Przypadek 2. - układ sprzeczny:
Otrzymujemy macierz współczynników, w której dowolny wiersz posiada same wartości 0 oraz odpowiadający mu element z wektora rozwiązań jest różny od 0.

Przypadek 3. - układ nieoznaczony:
Otrzymujemy macierz współczynników, w której przynajmniej jeden wiersz posiada same wartości 0 oraz odpowiadający mu element z wektora rozwiązań jest równy 0, oraz żaden z wierszy nie spełnia warunków układu sprzecznego.

3. Opis implementacji

Implementacja metody została wykonana w języku Python. Program posiada trzy pliki z roszerzeniem.py. W main znajduje się funkcja uruchamiająca program, w utils posiadamy funkcje pomocnicze i formatujące macierze, a w functions główną funkcję z metodą Gaussa-Jordana.

Opis najważniejszych funkcji:

try_to_swap_rows - funkcja zwraca macierz wejściową z opcjonalnie zmienioną kolejnością wierszy

gauss_jordan_solver - funkcja zwraca rozwiązaną macierz wejściową

parse_matrix - funkcja zwracająca macierz odczytaną z pliku wejściowego

round_matrix - zaokrągla każdy element macierzy do określonego miejsca po przecinku

print_matrix - wypisuje na konsolę macierz w formie przyjaznej użytkownikowi

create_matrix - tworzy pustą macierz o zadanych wymiarach

4. Materiały i metody

Przeprowadzono 10 eksperymentów na układach podanych w treści zadania. Eksperymenty, o numerach odpowiadających numerom rozwiązywanych macierzy, dotyczyły:

Macierze [1],[4],[6],[7],[8],[10]:
Rozwiązywanie układów z jednym rozwiązaniem

Macierze [2],[9]:
Rozpoznawanie układów nieoznaczonych

Macierze [3],[5]:
Rozpoznawanie układów sprzecznych

Dodatkowe układy oznaczone:
[11] wymiary 5x5
[12] wymiary 6x6
[13] wymiary 7x7
[14] wymiary 8x8
[15] wymiary 100x100
[16] wymiary 1000x1000

5. Wyniki

Po wykonaniu metody Gaussa-Jordana otrzymano następujące rozwiązania:

Numer [1]: $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$

Numer [2]: układ nieoznaczony

Numer [3]: układ sprzeczny

Numer [4]: $x_1 = 2, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 1.5 \quad\ x_4 = 0.5$

Numer [5]: układ sprzeczny

Numer [6]: $x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = 5$

Numer [7]: $x_1 = 7, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 3$

Numer [8]: $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$

Numer [9]: układ nieoznaczony

Numer [10]: $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$

Numery [11,12,13,14,15,16] - znaleziono rozwiązania układów, jednak przestawienie wektora rozwiązań nie jest istotne. Ponadto, dla małych macierzy współczynników czas wykonania był bardzo bliski 0s. Liczby operacji na współczynnikach rosły następująco:
5x5 - 150 operacji
6x6 - 252 operacji
7x7 - 392 operacji
8x8 - 576 operacji
Jednakowoż dla dużych macierzy współczynników, gdzie można zaobserwować większy czas wykonania wypisano następujące dane:

Dla układu o macierzy współczynników o rozmiarze 100x100 zostało wykonanych 1010000 operacji w czasie 0.25 sekundy.
Dla układu o macierzy współczynników o rozmiarze 1000x1000 zostało wykonanych 1001000000 operacji w czasie 263.64 sekundy.

6. Dyskusja

Metoda Gaussa-Jordana została poddana eksperymentom w czterech aspektach:
a) rozwiązywanie układów równań o N niewiadomych
b) rozpoznawanie układów nieoznaczonych
c) rozpoznawanie układów sprzecznych
d) czas wykonania i liczba iteracji metody Gaussa Jordana

A. Opisywana metoda dla zadanych przykładów okazała się skuteczna w 12/12 przypadach układów z 3, 4, 5, 6, 7, 8, 100, 1000 niewiadomymi i identyczną liczbą równań z jednym rozwiązaniem

B. Opisywana metoda dla zadanych przykładów okazała się skuteczna w 2/2 przypadkach układów z 3 niewiadomymi i identyczną liczbą równań. Jednak eksperyment nr 5 przeprowadzany był dwukrotnie. W pierwszym przebiegu wynik eksperymentu wskazał układ oznaczony o rozwiązaniach rzędu 10^{20}. Błąd ten wynikał z niedokładnego dzielenia, na skutek którego, otrzymano liczbę bardzo bliską zeru, jednak nie spełniającą warunku układu nieoznaczonego (Wprowadzenie, przypadek 3.). Błąd ten został skorygowany w drugim przebiegu eksperymentu dzięki zaokrągleniu do 0 wartości bardzo mu bliskich.

C. Opisywana metoda dla zadanych przykładów okazała się skuteczna w 2/2 przypadkach układów z 3 lub 4 niewiadomymi i identyczną liczbą równań. Dodatkową zaletą metody jest możliwość wcześniejszego zakończenia obliczeń przy pierwszym spełnieniu warunku wystąpienia układu sprzecznego (Wprowadzenie, przypadek 2.).

D. Zbadano dokładną liczbę iteracji potrzebną do rozwiązania macierzy o wymiarach NxN. W każdym przypadku liczba iteracji wynosiła

$$I = N^3 + N^2$$

Stąd wnioskiem jest, że złożoność obliczeniowa metody Gaussa-Jordana wynosi

$$O(N^3)$$

Czas wykonania rośnie diametralnie dla układów o większej ilości równań. Używanie tej metody dla takich układów jest wysoce nieoptymalne i niewskazane.

7. Wnioski

1. Metoda Gaussa-Jordana jest skuteczną, niezawodną metodą rozwiązywania układów równań liniowych o N niewiadomych z N równaniami, oraz wykrywania sprzeczności/nieoznaczoności układów.

2. Opisywana metoda wymaga wykonania N eliminacji dla rozwiązania układu z N niewiadomymi lub stwierdzenia jego nieoznaczoności (po stwierdzeniu nieoznaczoności należy jeszcze wykluczyć możliwość spełnienia warunku układu sprzecznego). W przypadku rozpoznania układu sprzecznego wykonanych zostanie maksymalnie N iteracji (do pierwszego wystąpienia warunku o układzie sprzecznym).

3. Złożoność obliczeniowa metody wynosi

$$O(N^3)$$

a ilość wszystkich operacji obliczania wartości współczynników dla układu oznaczonego można opisać wzorem

$$I = N^3 + N^2$$

Literatura

[1] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl. *Nie za krótkie wprowadzenie do systemu LaTeX2e*, 2007, dostępny online. `https://ctan.org/tex-archive/info/lshort/polish/lshort2e.pdf`.

[2] Konsultacje z mgr inż. Pawłem Tarasiukiem.

[3] Materiały wykładowe dr. inż. Alicji Romanowicz `https://ftims.edu.p.lodz.pl/pluginfile.php/162066/mod_resource/content/2/Metody%20numeryczne%20cz%20I.pdf`