

# Centrality

Closeness Centrality

Betweenness Centrality

Degree Centrality

Eigen Vector Centrality

Page Rank Centrality

## Closeness Centrality

วัดความใกล้กับคนอื่น ๆ

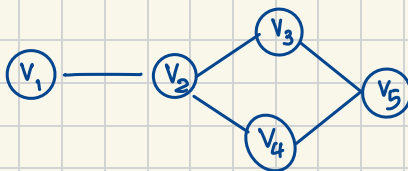
$$C_c(v_i) = \frac{1}{\bar{l}_{v_i}}$$

$\bar{l}_{v_i}$  คือค่าเฉลี่ยของ  $l_{v_i, v_j}$

$$\bar{l}_{v_i} = \frac{1}{n-1} \sum_{v_j \neq v_i} l_{v_i, v_j}$$

หาค่าเฉลี่ยของระยะทางจาก  $i$  ไปทุก node

→ ค่าเฉลี่ยของระยะทางของ shortest path จาก node  $v_i$  ไปยังทุก node



$$\bar{l}_{v_1} = \frac{1}{4} \times (1 + 2 + 2 + 3) = 2$$

$$\bar{l}_{v_2} = \frac{1}{4} (1 + 1 + 1 + 2) = \frac{5}{4}$$

$$C_c(v_1) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$C_c(v_2) = \frac{4}{5} = 0.8$$

ค่ามาก  $\Rightarrow$  ดี อยู่ใกล้จากคนอื่น

$$\bar{l}_{v_3} = \frac{1}{4} (2+1+2+1) = \frac{6}{4} \quad C_c(v_3) = \frac{4}{6} = 0.67$$

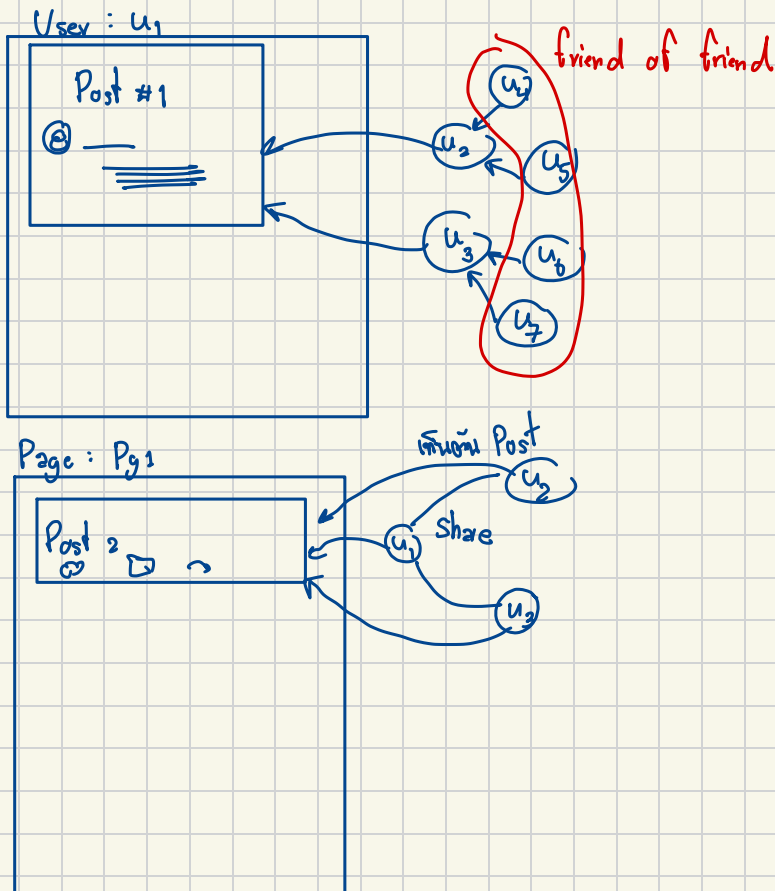
$$\bar{l}_{v_4} = \frac{1}{4} (2+1+2+1) = \frac{6}{4} \quad C_c(v_4) = \frac{4}{6} = 0.67$$

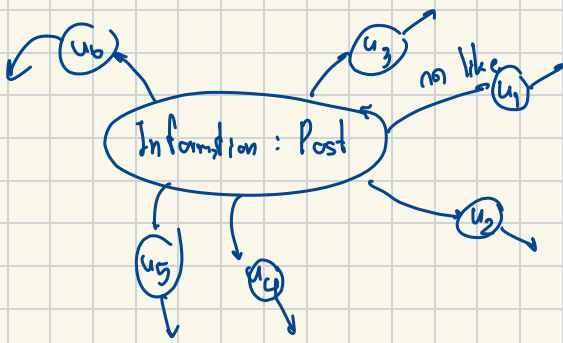
$$\bar{l}_{v_5} = \frac{1}{4} (3+2+1+1) = \frac{7}{4} \quad C_c(v_5) = \frac{4}{7} = 0.57$$

การตีความ - คนที่ใส่ค่า  $C_c$  สูงคือใคร - ใกล้เคียงคนอื่นมาก ๆ

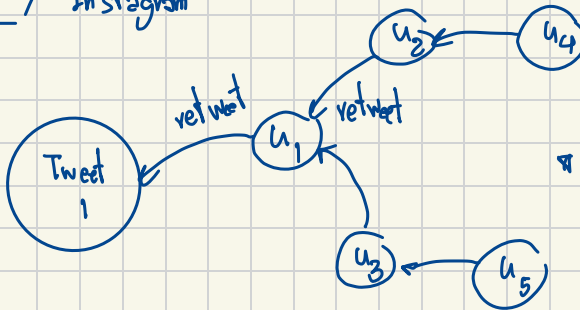
ใช้กับ network ที่ information ไม่ตรงกัน เช่น Facebook

FB ใช้งาน  $v_i$  มาช่วย  $y$  ได้เช่น like, comment, share





Twitter : X / Instagram



an influencer 0.5

Closeness 1/11

information 1/11

YouTube Information Navigation

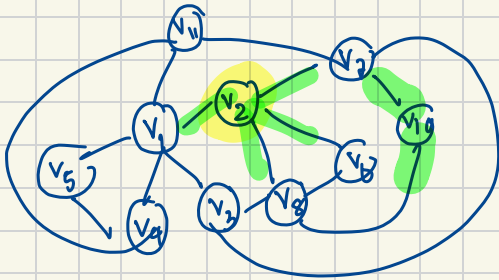
keyword1, keyword2



Recommendation via youtube



# Degree Centrality



$$C_d(v_i) = \text{degree}(v_i)$$

นับจำนวน degree

$$C_d(v_2) = 4$$

$$C_d(v_{10}) = 2$$

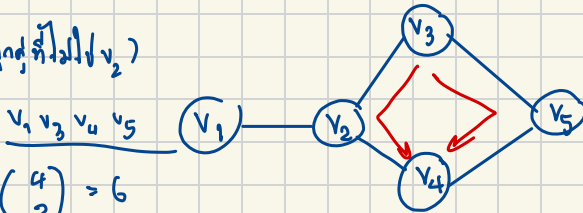
เช่น กรณี influ ได้รับ

## Betweenness Centrality

$$C_b(v_i) = \sum_{s \neq t \neq v_i} \frac{\sigma_{st}(v_i)}{\sigma_{st}}$$

$\sigma_{st}(v_i)$  ← shortest path from  $s \rightarrow v_i \rightarrow t$   
 $\sigma_{st}$  ←  $\sigma_{st}$  คือ shortest path from  $s \rightarrow t$

(หา  $\sigma_{st}(v_2)$ )



มี 2 มุมมองใน  $v_2$  แตกต่าง

$$\binom{4}{2} = 6$$

$$C_b(v_2) = 2 \times \left[ \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} \right]$$

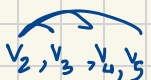
$\frac{1}{1}$  for  $v_1 \rightarrow v_3$ ,  $\frac{1}{1}$  for  $v_1 \rightarrow v_4$ ,  $\frac{2}{2}$  for  $v_3 \rightarrow v_5$ ,  $\frac{1}{2}$  for  $v_3 \rightarrow v_4$ ,  $\frac{0}{1}$  for  $v_3 \rightarrow v_5$ ,  $\frac{0}{1}$  for  $v_4 \rightarrow v_5$

เช่น 2 มุมมอง = 1-ก๊อ (Undirected Graph)

$$= 2 \times [1+1+1+0.5+0+0] = 2 \times 3.5 = 7 \neq$$

$$C_b(v_3) = 2 \times \left[ \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{2} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} \right]$$

$\frac{0}{1}$  for  $v_2 \rightarrow v_1$ ,  $\frac{0}{1}$  for  $v_2 \rightarrow v_4$ ,  $\frac{0}{2}$  for  $v_2 \rightarrow v_5$ ,  $\frac{0}{2}$  for  $v_3 \rightarrow v_4$ ,  $\frac{0}{1}$  for  $v_3 \rightarrow v_5$ ,  $\frac{0}{1}$  for  $v_4 \rightarrow v_5$



$$= 2 \times 0 = 0$$

ไม่อยู่ในการเชื่อมต่อหรือการไหล

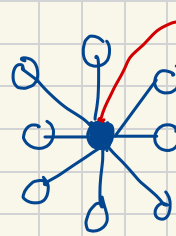
$C_b$  สูง  $\rightarrow$  user อยู่กลางการสื่อสาร รอบคนอื่น แต่การดึงคนนี้ออกมาทำได้

① รวมทางการสื่อสารทั้งหมด

② node อยุ่กลางมากขึ้น disconnect component

$C_b$  (๗) ต่ำสุด (๐)

$C_b$  (๗) สูงสุด อยู่กลางการสื่อสารรอบทุกคน



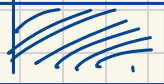


$$C_b \text{ สูงสุด} = \binom{n-1}{2}$$

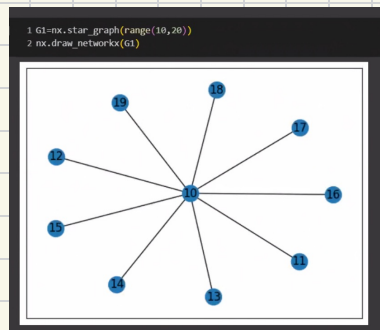
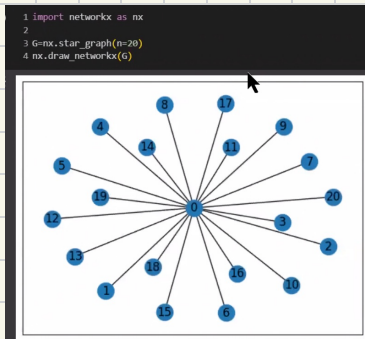
$$= (n-1)(n-2)$$

$$\frac{C_b(v_i)}{(n-1)(n-2)}$$

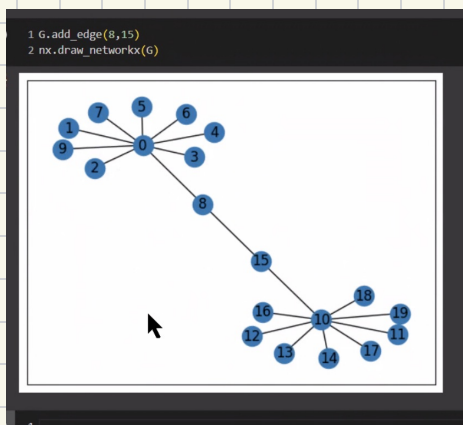
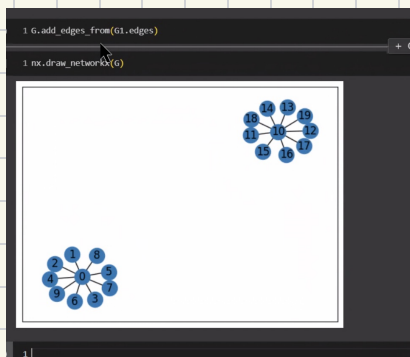
## Node characteristics

	Degree ↑	Betweenness ↑	Closeness ↑
Degree ↓		①	②
Betweenness ↓	③		④
Closeness ↓	⑤	⑥	

- nx.star\_graph

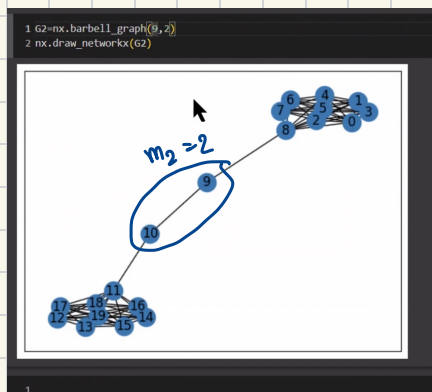


- เปรียบ 2 กราฟ



0, 10 degree สูงสุด

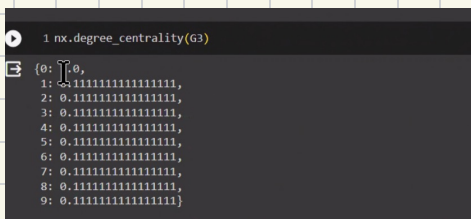
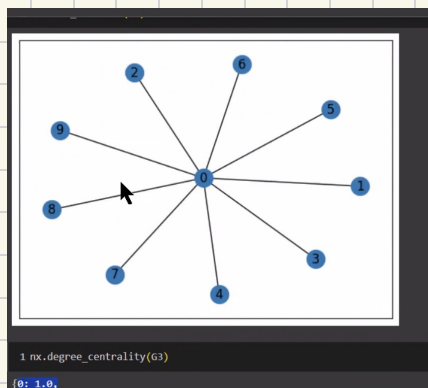
barbell Graph ( $m_1, m_2$ )

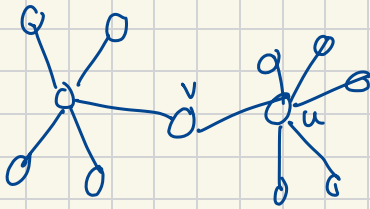


$m_2$  คือจ.น. node ที่ต้องการใช้

โดยกราฟข้างในเป็น complete graph

Degree กับ Betweenness สูง





$$C_d(v) = \frac{2}{\square}$$

$$C_d(u) = 6$$

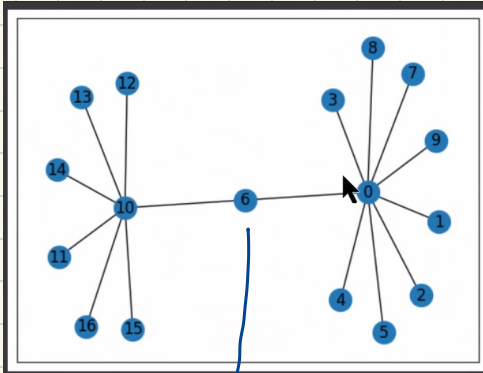
normalize

ตัวส่วนเป็นได้คือ

- max degree  $\rightarrow n-1 = 10$   
ที่มันมีอยู่

- degree สูงสุดของกราฟ = 6

- Summation ของ degree



Degree กับ Betweenness และ  
closeness ของ

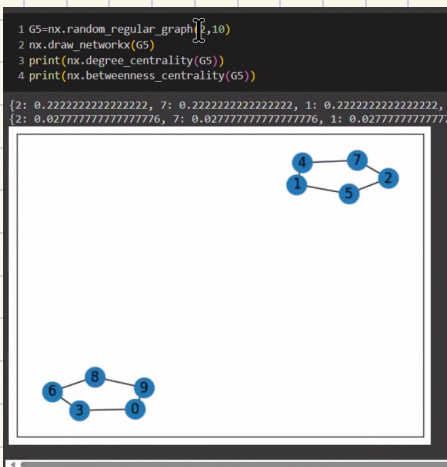
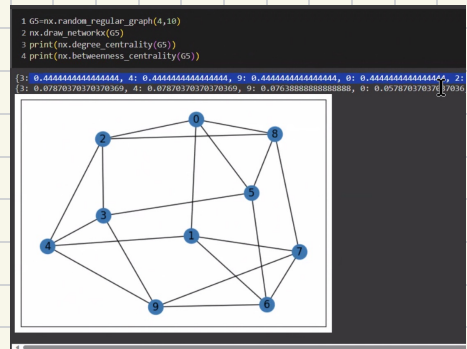
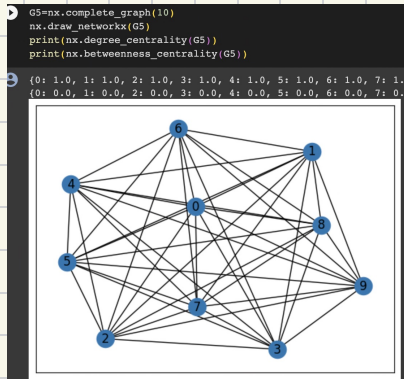
```
1 nx.degree_centrality(G3)
{0: 0.5625,
1: 0.0625,
2: 0.0625,
3: 0.0625,
4: 0.0625,
5: 0.0625,
6: 0.125,
7: 0.0625,
8: 0.0625,
9: 0.0625,
10: 0.4375,
11: 0.0625,
12: 0.0625,
13: 0.0625,
14: 0.0625,
15: 0.0625,
16: 0.0625}
```

```
1 nx.betweenness_centrality(G3)
{0: 0.7666666666666666,
1: 0.0,
2: 0.0,
3: 0.0,
4: 0.0,
5: 0.0,
6: 0.525,
7: 0.0,
8: 0.0,
9: 0.0,
10: 0.625,
11: 0.0,
12: 0.0,
13: 0.0,
14: 0.0,
15: 0.0,
16: 0.0}
```

ตัวเลข 10 กับ 0 1 2 3 4 5 6 betweenness ของ

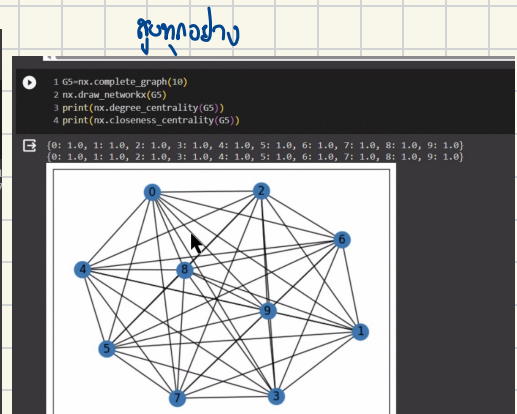
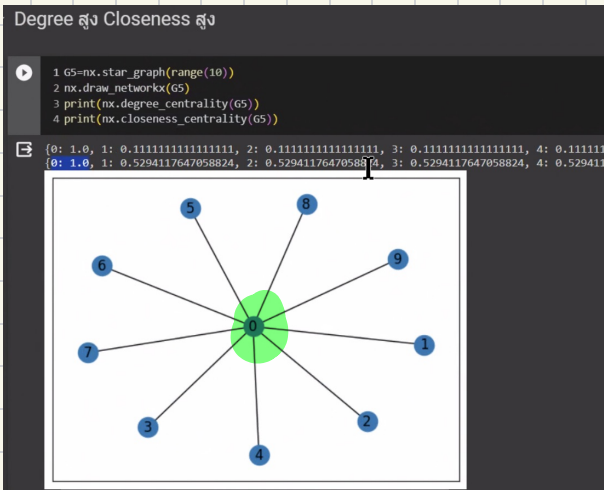
# Degree and Betweenness in

- Complete Graph: Every node is connected to every other node in the graph.

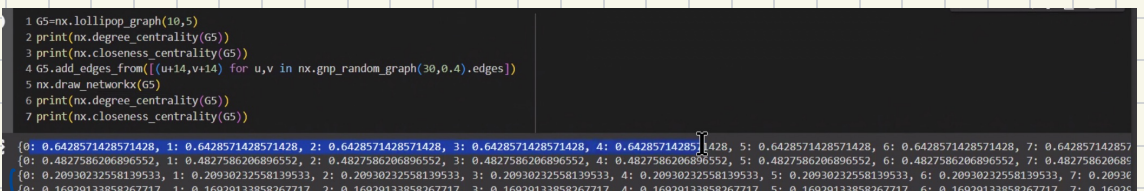
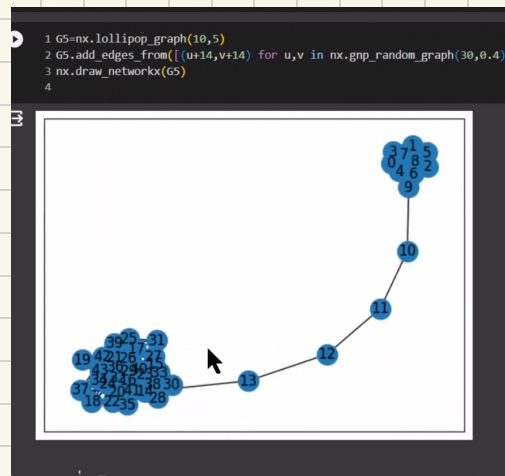
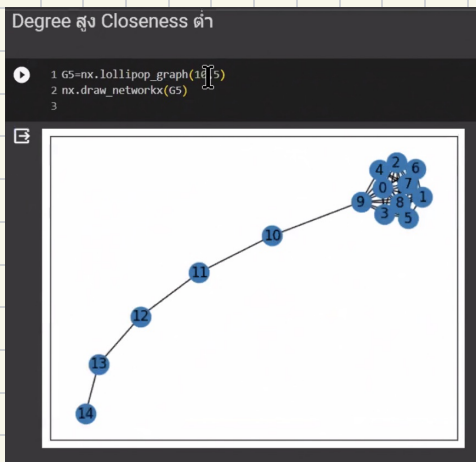




# Degree และ Closeness สูง



## Degree สูง Closeness ต่ำ

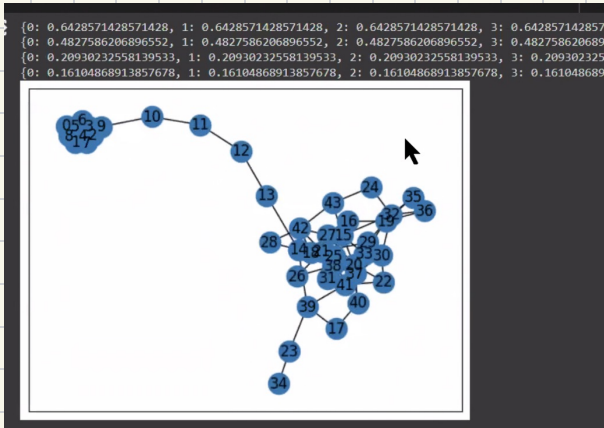


2. ขบวนการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง community closeness และ distance

อันดับ ๑  $C_d$

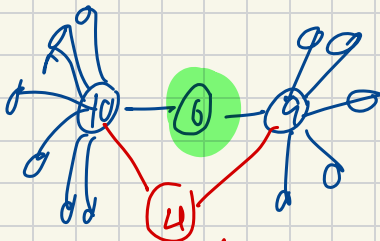
① ลอด Prob

② เปลี่ยน Complete Graph - Star



Degree or Betweenness or rank node ที่ connect กับใคร

Degree or Closeness สูง



ถ้าเพิ่ม ④ ขั้วไม่เท่าที่ ⑥ ลดความสำคัญ

## Eigenvector

$$\begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}_{5 \times 5} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$A$ 
 $\vec{v}$ 
 $\lambda$ 
 $\vec{v}$ 
 eigenvector  
 Eigenvalue

$$A\vec{v} = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2v_1 + v_2 \\ 3v_1 + 4v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2v_1 + v_2 \\ 3v_1 + 4v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix}$$

$$2v_1 + v_2 = 7v_1 \quad \text{--- (1)}$$

$$3V_1 + 4V_2 = 7V_2 \quad - (2)$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\vec{A} - \lambda \vec{V} = 0$$

$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$  ใน  $\mathbb{R}^n$   $\lambda$  เป็น Scalar ทั่วไป  $\vec{v}$  เป็น vector กับ  $A$  ทั่วไป

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda = 1, 5$$

$$\boxed{\lambda = 1} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2v_1 + v_2 \\ 3v_1 + 4v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$2v_1 + v_2 = v_1 \quad \text{--- (1)}$$

$$3v_1 + 4v_2 = v_2 \quad \text{--- (2)}$$

แก้ข้อที่ 1 ;  $v_2 = v_1 - 2v_1$

$$v_2 = -v_1$$

$$v_1 = -v_2$$

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = -1$$

$$\lambda = 1$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = 5} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$2v_1 + v_2 = 5v_1 \quad \text{--- (1)}$$

$$3v_1 + 4v_2 = 5v_2 \quad \text{--- (2)}$$

แก้ข้อที่ 1 ;  $v_2 = 3v_1$

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

## Source code

```
[1] 1 import numpy as np
2
3 A=np.array([[2,1],[3,4]])
4 A
```

```
array([[2, 1],
       [3, 4]])
```

```
1 np.linalg.eig(A)
```

```
(array([1., 5.]),
 array([[[-0.70710678, -0.31622777],
        [ 0.70710678, -0.9486833 ]]]))
```

eigenvalue  $\lambda$   
 $\lambda=1$        $\lambda=5$

eigenvector - ค่าที่แปลงเป็น ทศนิยม 1 หน่วย

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

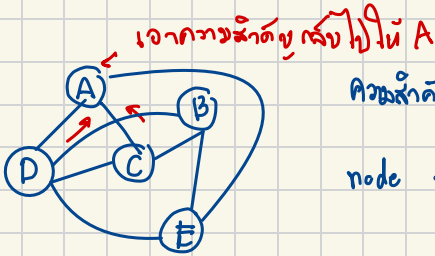
ถ้า matrix 3 หรือ มีโอกาศที่ eigenvector เป็นจำนวนเชิงซ้อน

val, vec = np.linalg.eig(A)

val[0] =  $\lambda$

vec[:, 0] \* (-1) =  $\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

# Eigenvector Centrality



ค่าความสำคัญของ node 1 node สามารถส่งไปยัง node อื่นได้

node ที่เชื่อมกับ node ที่สำคัญอื่นๆ จะมีความสำคัญไปด้วย

	A	B	C	D	E
A	0	0	1	1	1
B	0	0	1	1	1
C	1	1	0	1	0
D	1	1	1	0	1
E	1	1	0	1	0

$$\begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \\ v_E \end{bmatrix} = \propto v_A$$

$$v_C + v_D + v_E = \propto v_A$$

$$v_C + v_D + v_E = \propto v_B$$

← ค่าความสำคัญของ B

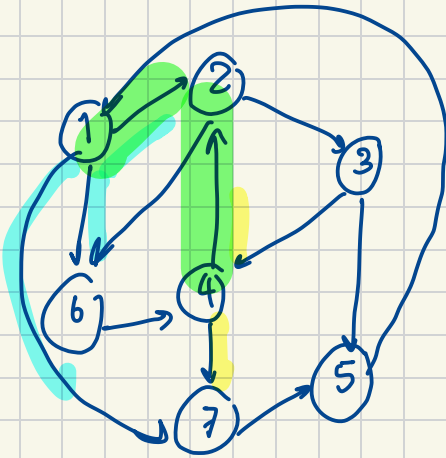
$$v_A + v_B + v_D = \propto v_C$$

$$v_A + v_B + v_C + v_E = \propto v_D$$

$$v_A + v_B + v_D = \propto v_E$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \\ v_E \end{bmatrix} = \propto \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \\ v_E \end{bmatrix}$$

# Pagerank Centrality



รวมเรกเท่ากับคือ  $1/|V| = 1/7$

รวมได้

$$P_1^+ = P_5$$

$$P_2^+ = \frac{P_1}{3} + \frac{P_4}{2}$$